

167849

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR BOYUTLU KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN KONTROL
PARAMETRESİNİN NÜMERİK YÖNTEMLERLE BELİRLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNA BÜLBÜL

HAZİRAN – 2005
MUĞLA

TEZİN YAZILDIĞI DİL : Türkçe

TEZİN SAYFA SAYISI : 72

TEZİN KONUSU : Bir boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler için kontrol parametresinin nümerik yöntemlerle belirlenmesi

TÜRKÇE ANAHTAR KELİMELER :

1. Sonlu Farklar
2. Ters Problemler
3. Enterpolasyon Teknikleri

İNGİLİZCE ANAHTAR KELİMELER :

1. Finite Difference
2. Inverse Problems
3. Enterpolation Techniques

1. Tezimden fotokopi yapılmasına izin vermiyorum
2. Tezimden dipnot gösterilmek şartıyla bir bölümün fotokopisi alınabilir
3. Kaynak gösterilmek şartıyla tezimi tamamının fotokopisi alınabilir

Yazarın İmzası

Berna BÜLBÜL

26.01.2005

ONAY SAYFASI

Yrd.Doç.Dr. Mustafa Gülsu danışmanlığında Berna BÜLBÜL tarafından hazırlanan bu çalışma, 14/06/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan :Doç.Dr. Zekeriya GÜNEY

İmza

Danışman :Yrd.Doç.Dr. Mustafa GÜLSU

İmza :

Üye :Yrd.Doç.Dr. Metin KANTAR

İmza :

Üye :.....

İmza :

Üye :.....

İmza :

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasındaki her safhada ciddi ve önemli katkılarından, ders aşamasındaki verdiği bilgiler açısından, kazandırdığı araştırma azmi ve çalışma gayreti bakımından Yrd.Doç.Dr. Mustafa Gülsu'ya (Muğla Üniv. Mat. Böl.), Matematiğin ince sanatlarını ve derinliklerini her defasında hissettiren ve öğreten Doç.Dr. Zekeriya Güney'e (Muğla Üniv. Mat. Böl.), Muğla Üniversitesi Matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve ders arkadaşlarıma, öğrenimim boyunca desteklerini esirgemeyen annem, babama ve her konuda yardıma koşan, hep yanımda olan çok değerli ablama teşekkürlerimi bir borç biliyorum.

Berna BÜLBÜL

Muğla 2005



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VIII
ABSTRACT	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI
ÇİZELGELER DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. TAYLOR SERİLERİ YARDIMIYLA TÜRETİLEN YAKLAŞIMLAR	2
2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	2
2.2. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	3
2.3. Taylor Yaklaşımları	3
2.4. Sonlu Fark Yaklaşımları	4
2.5. İki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark formülleri	6
2.6. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel denklemler için taylor serileri yardımıyla türetilen yaklaşımlar	6
2.6.1. Açık (Explicit) Yöntem	7
2.6.2. Crank-Nicolson Yöntemi	9
2.6.3. 5-Nokta Explicit Yöntem	10
2.6.4. (5,5)Crank-Nicolson Yöntemi	11
2.6.5. (1,3)BTCS (Implicit) Yöntem	12
2.6.6. (3,3)Crandall Yöntemi	12
2.7. Yakınsaklığın Analitik Yorumu	14
2.8. Kararlılık Analizi	16
2.9. Ağırlıklı Ortalama Yaklaşımı	19
2.10. Kararlılık için Von-Neuman Yöntemi	19

2.11. Sınır Koşullarının Türetilmesi.....	23
3. ENTERPOLASYON TEKNİKLERİ	26
3.1. Lagrange Enterpolasyonu Yardımıyla Türev.....	26
3.2. Newton Enterpolasyonu Yardımıyla Türev	26
3.3. Spline Enterpolasyonu	27
3.4. En Küçük Kareler Yöntemi.....	30
3.5. Trapizoidal Yöntemi(Yamuklar yöntemi).....	31
3.6. Jacobi ve Gauss Seidel Yöntemleri.....	33
3.7. Succesive Over-Relaxation (S.O.R).....	35
4. BİR BOYUTLU PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK PARAMETRESİ İÇİN TÜRETİLEN YAKLAŞIMLAR.....	36
4.1. Bir Boyutlu Parabolik Diferansiyel Denklemlerde Bilinmeyen Kaynak Parametresi için Türetilen Yaklaşımlar.....	36
4.2. Bir Boyutlu Ters Probleme Sonlu Fark Yaklaşımlarının Uygulanması...	36
4.3. Kontrol Fonksiyonu için Algoritmanın Geliştirilmesi.....	39
5 BİR BOYUTLU PARABOLİK KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE TÜREVLİ SINIR KOŞULLARI İÇİN KONTROL FONKSİYONUNUN BELİRLENMESİ.....	41
5.1. Kontrol parametresinin belirlenmesi	41
5.2. Kanonik gösterim.....	41
5.3. Nümerik Yöntemler	42
5.4. PDE ye bağlı çözüm.....	46
5.5. Sayısal bir örnek	48
6. SAYISAL SONUÇLAR VE GRAFİKSEL DEĞERLENDİRMELER..	50
7. SONUÇ VE TARTIŞMA	63

KAYNAKLAR	64
EKLER	65
Ek1 : Ters Problemin Crank-Nicolson yöntemi için Maple V Programı	65
Ek2 : Kontrol parametresinin bulunmasında Spline Enterpolasyon tekniği için Maple V programı	70
ÖZGEÇMİŞ	72



**BİR BOYUTLU KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
KONTROL PARAMETRESİNİN NÜMERİK YÖNTEMLERLE
BELİRLENMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Berna BÜLBÜL

**MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
2005**

ÖZET

Bu çalışmada bir boyutlu parabolik Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerde karşımıza çıkan ters problemlerde bilinmeyen kontrol parametresinin nümerik yöntemlerle bulunmasına çalışıldı. Bu amaçla birçok sonlu fark yaklaşımları geliştirildi.

Bu yaklaşım kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar daha önceki araştırmacıların sonuçları ile karşılaştırıldı.

Türkçe Anahtar Kelimeler : Sonlu Farklar, Ters problemler, Enterpolasyon Teknikleri
Sayfa Adedi : 72
Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Mustafa GÜLSU

**FINDING A CONTROL PARAMETER WITH NUMERICAL SCHEMES IN
ONE DIMENSIONEL
PARABOLIC EQUATION**

M.Sc.Thesis

**MUGLA UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
2005**

ABSTRACT

In this thesis, numerical procedures for the solution of an inverse problem of determining unknown control parameter in parabolic equation are studied. Several finite difference schemes are presented for finding a parabolic Partial Diferential Equation

The numerical results obtained by present method and compared with the earlier authors.

Key Words : Finite Difference, Inverse Problem, Enterpolation Tecniquies

Page Number: 72

Adviser : Dr. Mustafa GÜLSU

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

INV : Inverse Yaklaşımı

PDE : Kısmi Türevli Dif. Denk. Yaklaşımı

C-N : Crank Nicolson Yöntemi

BTCS : Backward Time Centered space

FTCS : Forward Time Centered space

$\rho(A)$: Spektral Yarıçap



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 6.1. $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait grafik.....	50
Şekil 6.2. $\theta = 0$ (Implicit) yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait grafik.....	51
Şekil 6.3. $\theta = 1$ (Explicit) yönteminde $r(t)$ için INV ve PDE yaklaşımlarına ait grafik.....	52
Şekil 6.4. 5-nokta Explicit yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait grafik.....	53
Şekil 6.5. Crandall yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait grafik..	54
Şekil 6.6. $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) için kontrol parametresine ait grafik.....	55
Şekil 6.7. $\theta = 0$ (Implicit) için kontrol parametresine ait grafik.....	56
Şekil 6.8. $\theta = 1$ (Explicit) için kontrol parametresine ait grafik.....	57
Şekil 6.9. Crandall yöntemi için kontrol parametresine ait grafik.....	58
Şekil 6.10. 5-nokta Explicit yöntemi için kontrol parametresine ait grafik.....	59
Şekil 6.11. $P(t)$ için BTCS ve FTCS yaklaşımlarına ait grafik.....	60
Şekil 6.12. $P(t)$ için C-N ve Crandall yaklaşımlarına ait grafik.....	61
Şekil 6.13. $P(t)$ için 5-nokta Explicit yöntem ve C-N(5,5) yaklaşımlarına ait grafik.....	62

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge No</u>	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 6.1 $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	50
Çizelge 6.2 $\theta = 0$ (Implicit) yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	51
Çizelge 6.3 $\theta = 1$ (Explicit) yönteminde $r(t)$ için INV ve PDE yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	52
Çizelge 6.4 5-nokta Explicit yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	53
Çizelge 6.5 Crandall yönteminde $r(t)$ için PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	54
Çizelge 6.6 $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) için kontrol parametresine ait sonuçlar.....	55
Çizelge 6.7 $\theta = 0$ (Implicit) için kontrol parametresine ait sonuçlar	56
Çizelge 6.8 $\theta = 1$ (Explicit) için kontrol parametresine ait sonuçlar.....	57
Çizelge 6.9 Crandall yöntemi için kontrol parametresine ait sonuçlar.....	58
Çizelge 6.10 5-nokta Explicit yöntemi için kontrol parametresine ait sonuçlar.....	59
Çizelge 6.11 $P(t)$ için BTCS ve FTCS yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	60
Çizelge 6.12 $P(t)$ için C-N ve Crandall yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	61
Çizelge 6.13 $P(t)$ için 5 nokta Explicit yöntem ve C-N(5,5) yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	62

1.GİRİŞ

Bilinmeyen kaynak parametresinin bulunması ile tanımlanan ters parabolik denklemler birçok yöntemle çözülebilmektedir. Bu parametre standart sınır ve başlangıç koşulları ve çözüm bölgesinin iç noktasında çözüm üzerinde verilmiş ek koşullar ile birlikte düşünülen lineer parabolik denklemde zaman değişkenine bağlı katsayıdır. Bu denklemlerde bilinmeyen kaynak parametresini içeren terim, uygun dönüşümler uygulanarak yok edilir ve sistem sonlu farklar yardımıyla çözülebilir. Burada hassasiyeti arttırmak için aynı denklik sınıfında bulunan yöntemler üzerine yeni algoritmalar türetilmeye çalışılacaktır.

İkinci bölümde, zamana bağımlı kısmi türevli diferansiyel denklemler için Taylor serileri ile türetilen sonlu fark yaklaşımları verilecektir. Burada Taylor serisinin ilk iki teriminin alınmasıyla elde edilen yaklaşımın klasik anlamda bilinen Explicit yaklaşım olduğu gösterilecektir.

Üçüncü bölümde, ele alınan ters problemin çözüm yöntemlerinden birkaçı verilecektir. Burada bu yöntemlerin kullanılmasında enterpolasyon tekniklerinden yararlanılacaktır.

Dördüncü bölümde, parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak fonksiyonu için türetilen yaklaşımlar verilecektir. Burada karşımıza çıkan türevlere sonlu farklar aracılığı ile yaklaşılabilecektir.

Beşinci bölümde, parabolik diferansiyel denklemlerde sınır şartlarının türevler cinsinden verilmesi durumunda, kaynak fonksiyonu için türetilen yaklaşımlar verilecektir.

Altıncı bölümde, burada geliştirilen yaklaşımlarla daha önce çalışılan yaklaşımlara ait sonuçların tablo ve grafik değerlendirmesi yapılacaktır.

Sonuç bölümünde bu yapılan çalışmalar üzerinde yorum yapılarak bu çalışmalara göre izlenebilecek yol ve yöntemler anlatılacaktır.

Ekler bölümünde problemlerin çözümünde kullanılan ve Matematik hesaplamaları için geliştirilen Maple V programlama dili ile yapılan programların bir kısmı verilecektir.

2. TAYLOR SERİLERİ YARDIMIYLA TÜRETİLEN YAKLAŞIMLAR

2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Uygulamalı bilimlerde iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre değişim oranlarını içeren birçok problem, matematiksel olarak kısmi diferansiyel denklemler ile formüle edilebilir.

Genel olarak x ve t reel bağımsız değişkenli ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem,

$$L(u) = Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + M(x, t, u, u_x, u_t) = 0 \quad 2.1$$

biçiminde tanımlanır.

(2.1) denkleminde, A, B, C katsayıları sabit veya yalnızca x ve t nin bir fonksiyonları iseler lineer; x, t, u, u_x ve u_t nin bir fonksiyonları iseler quasilineer, bunların dışındaki durumlarda ise lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem denir.

A, B, C katsayıları $x-t$ düzleminin bir R bölgesinde ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip reel değerli fonksiyonlar olsun ve bunların aynı anda sıfır olmadığını kabul edelim.

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

olmak üzere

$$L_1 = AD_x^2 + 2BD_xD_t + CD_t^2 \quad 2.2$$

toplamına (2.1) diferansiyel denklemindeki L operatörünün esas kısmı denir.

R bölgesinde,

$$\Delta(x, t) = B^2(x, t) - A(x, t)C(x, t) \quad 2.3$$

ile tanımlanan Δ fonksiyonuna L operatörünün diskriminantı denir ve (2.1) ile ifade edilen denklem

$$\Delta(x, t) > 0 \Rightarrow \text{hiperbolik}$$

$$\Delta(x, t) = 0 \Rightarrow \text{parabolik}$$

$$\Delta(x, t) < 0 \Rightarrow \text{eliptik}$$

dir, denir.

2.2. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

R bölgesinin her noktasında $\Delta(x,t) = 0$ koşulu sağlanıyor ise denklem paraboliktir. u sıcaklığı göstermek üzere, $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ olarak verilen ısı dağılımı problemi parabolik denklemlere bir örnek olarak verilebilir. Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde sınır ve başlangıç koşulları genellikle bilinmektedir. Bilinen sınır ve başlangıç koşulları yardımıyla parabolik denklemlere sonlu fark formülleri uygulanarak denklem nümerik olarak çözülebilir.

2.3. Taylor Yaklaşımları

$u(x,t)$ fonksiyonuna Taylor açılımı uygulanarak bir yaklaşım elde edilir. $R_{n+1}(x)$ ve $R_{n+1}(t)$ sırasıyla x ve t yönünde $(n+1)$. dereceden kesme hatası olmak üzere $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t yönündeki Taylor açılımları sırası ile

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j) = u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots + \frac{1}{n!} h^n \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} + R_{n+1}(x) \quad 2.4$$

ve

$$u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + k) = u_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{1}{2!} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{3!} k^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{i,j} + \dots + \frac{1}{n!} k^n \left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right)_{i,j} + R_{n+1}(t) \quad 2.5$$

şeklindedir. Burada,

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} u(\xi)}{\partial x^{n+1}} \right)_{i,j} \quad 2.6$$

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} k^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} u(\xi)}{\partial t^{n+1}} \right)_{i,j}$$

biçiminde verilir (Smith,1985).

2.4. Sonlu Fark Yaklaşımları

Sonlu fark formülleri bir yöntem olarak diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça sık kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerde bulunan türevler, uygun yaklaşımlarla değiştirilerek denklem kesikli hale dönüştürülmekte ve nümerik olarak çözülmektedir. U bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevleri sonlu ve sürekli ise Taylor açılımı yardımıyla,

$$U(x+h)=U(x)+hU'(x)+\frac{h^2}{2!}U''(x)+\dots \quad 2.7$$

ifadesi elde edilir. Özel olarak $x=x_i$ noktasında ,

$$U_{i+1}=U_i+hU'_i+\frac{h^2}{2!}U''_i+\dots \quad 2.8$$

biçimini alır. Burada U_{i+1} ve U_i , U fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarındaki değerleridir.

Benzer şekilde $U(x-h)$ için Taylor açılımı kullanılırsa

$$U(x-h)=U(x)-hU'(x)+\frac{h^2}{2!}U''(x)+\dots \quad 2.9$$

ve $x=x_i$ noktasında;

$$U_{i-1}=U_i-hU'_i+\frac{h^2}{2!}U''_i+\dots \quad 2.10$$

ifadesi elde edilir.

(2.8) ve (2.10) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$U''_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad 2.11$$

ikinci dereceden merkezi fark formülü elde edilir.

Benzer şekilde, (2.8) ve (2.10) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + O(h) \quad 2.12$$

birinci dereceden merkezi fark formülü elde edilir. Burada $O(h^2)$ ve $O(h)$ Taylor serisindeki kesme hatasını göstermektedir

Benzer işlemler yapılarak,

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h) \quad 2.13$$

ileri fark formülü ve,

$$U_i' = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + O(h) \quad 2.14$$

geri fark formülü elde edilir.

$U(x-2h)$ ve $U(x+2h)$ için Taylor açılımı uygulanırsa,

$$U(x-2h) = U(x) - 2hU'(x) + 2h^2 U''(x) - \dots \quad 2.15$$

$$U(x+2h) = U(x) + 2hU'(x) + 2h^2 U''(x) + \dots \quad 2.16$$

elde edilir.

(2.7) ve (2.9) denklemleri 16 ile çarpılır;

$$16U(x+h) = 16U(x) + 16hU'(x) + 8h^2 U''(x) + \dots \quad 2.17$$

$$16U(x-h) = 16U(x) - 16hU' + 8h^2 U''(x) - \dots \quad 2.18$$

ve benzer şekilde (2.15) ve (2.16) denklemleri -1 ile çarpılırsa,

$$-U(x-2h) = -U(x) + 2hU'(x) - 2h^2 U''(x) - \dots \quad 2.19$$

$$-U(x+2h) = -U(x) - 2hU'(x) - 2h^2 U''(x) + \dots \quad 2.20$$

ifadeleri elde edilir.

(2.17), (2.18), (2.19) ve (2.20) ifadeleri taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse,

$$U'' = \frac{-U(x+2h) + 16U(x+h) - 30U(x) + 16U(x-h) - U(x-2h)}{12h^2} \quad 2.21$$

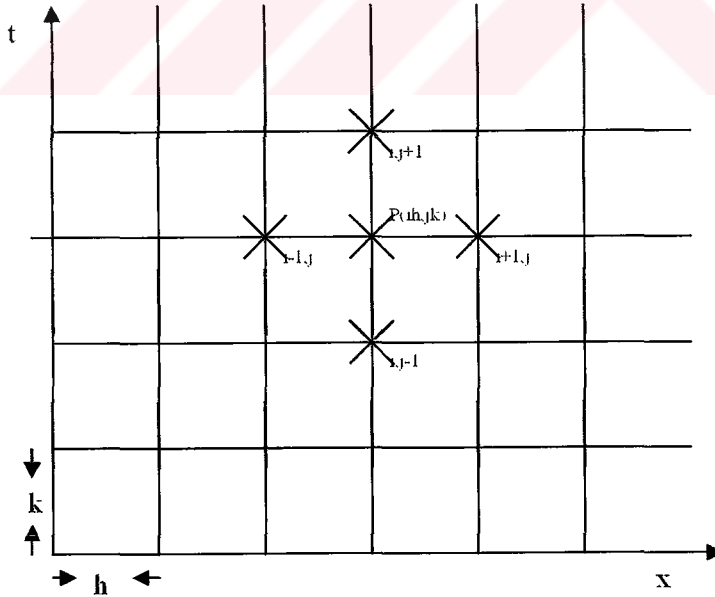
denklemini elde edilir. Bu ise özel olarak x_i noktasında,

$$U_i'' = \frac{-U_{i+2} + 16U_{i+1} - 30U_i + 16U_{i-1} - U_{i-2}}{12h^2} \quad 2.22$$

biçimini alır. Bu ifade 5 nokta merkezi fark formülü olarak adlandırılır.

2.5. İki Değişkenli Fonksiyonlar için Sonlu Fark Formülleri

U , x ve t bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. x - t düzlemini, boyutları $\Delta_x = h$ ve $\Delta_t = k$ olan eşit dikdörtgenlere bölelim. O_x eksenine paralel eşit aralıklı grid doğruları üzerinde $x_i = ih$, $i=0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \dots$ ve O_t eksenine paralel, eşit aralıklı grid doğruları üzerinde $t_j = jk$, $j=0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \dots$ noktaları alınsın. $P(ih, jk)$ noktasında u fonksiyonunun $U_p = U(ih, jk) = U_{i,j}$ olmak üzere molekül gösterimi aşağıdaki gibi verilir.



İki bağımsız değişkene sahip U fonksiyonunun ikinci dereceden türevini, istenilen noktada merkezi fark formülleri cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_p \cong \frac{U\{(i+1)h, jk\} - 2U\{ih, jk\} + U\{(i-1)h, jk\}}{h^2}$$

$x=x_i$ ve $t=t_j$ noktasında x yönünde ikinci dereceden merkezi fark,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cong \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad 2.23$$

t yönünde ikinci dereceden merkezi fark,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_{i,j} \cong \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \quad 2.24$$

ileri fark formülü,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} \quad 2.25$$

ve geri fark formülü,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} \quad 2.26$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, x yönündeki ileri fark ve geri fark formülleri oluşturulabilir.

2.6. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Taylor Serileri Yardımıyla Türetilen Yaklaşımlar

2.6.1. Açık(Explicit) yöntem

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

ile verilen ısı dağılım probleminde $k=1$ özel hali için denklem,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 2.27$$

şeklini alır. Burada türevlere sırasıyla birinci dereceden ileri fark ve ikinci dereceden merkezi fark formülleri ile yaklaşılın. Bu durumda denklem,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad 2.28$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki U yaklaşık çözümleri göstermektedir.

$$x_i = ih \quad (i=0,1,2,\dots) \quad t_j = jk \quad (j=0,1,2,\dots)$$

olmak üzere,

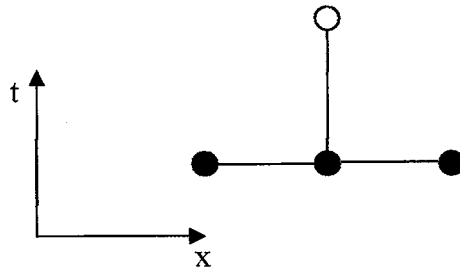
$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{k}{h^2} \{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\}$$

$r = k/h^2$ denirse,

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r \{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\}$$

$$U_{i,j+1} = rU_{i+1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i-1,j}$$

ifadeleri elde edilir (Smith, 1985). Böylece $(i,j+1)$. grid noktasındaki $U_{i,j+1}$, bilinenler cinsinden yazılarak bulunabilir. Bu yaklaşımın basit molekül gösterimi,



biçiminde verilir.

2.6.2. Crank-Nicolson yöntemi

Explicit yöntem hesaplama açısından kolay olmasına rağmen önemli bir dezavantajı zaman adımı $\Delta_t = k$ ların oldukça küçük olmasının getirdiği kısıtlamadır. Burada çözüm $0 < r \leq 1/2$ koşulu için geçerlidir. Bununla birlikte $\Delta_x = h$ lar kararlılığı bozmayacak şekilde küçük olmalıdır. Crank-Nicolson yöntemi bu sınırlılığı ortadan kaldırmış, böylece r 'nin bütün sonlu değerleri için kararlılık sağlanmıştır. Crank-Nicolson yöntemi genel halde

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j+1/2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j+1/2} \quad 2.29$$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = 1/2 \left\{ \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} \right\}$$

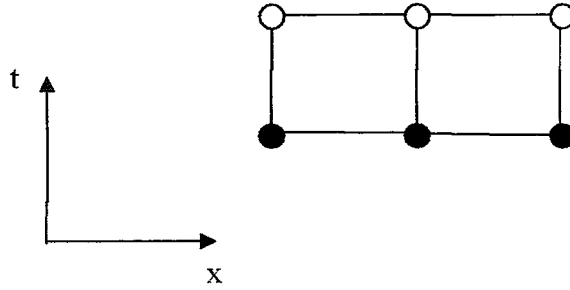
şeklinde ifade edilir. Burada $r = k/h^2$ denirse,

$$-rU_{i-1,j+1} + (2+2r)U_{i,j+1} - rU_{i+1,j+1} = rU_{i-1,j} + (2-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j} \quad 2.30$$

eşitliği elde edilir.

(2.30) denkleminin sağ tarafı bilinenleri, sol tarafı ise bilinmeyenleri oluşturmaktadır.

Genel olarak her bir zaman satırında n adet iç nokta varsa, $j=0$ ve $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere bilinen başlangıç ve sınır koşulları cinsinden bütün zaman satırları boyunca n bilinmeyen nokta için aynı anda gerçekleşen n denklem oluşur. Bu şekilde bilinmeyen değeri bulmak amacıyla aynı anda gerçekleşen denklem sisteminin çözümü için ihtiyaç duyulan yöntemlere kapalı yöntem veya implicit yöntem adı verilir. Bu şekilde oluşturulan (3,3) kapalı yöntemin moleküler gösterimi



2.6.3. 5- Nokta Explicit Yöntem

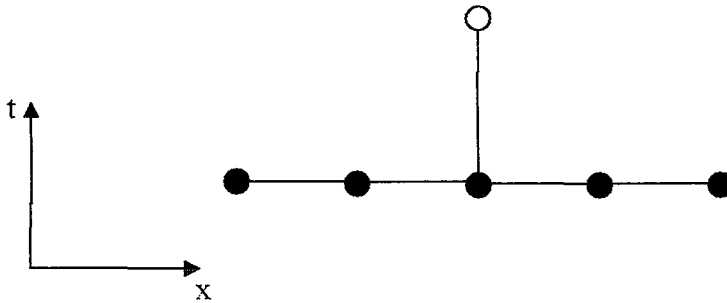
(2.27) ile verilen ısı denkleminde bulunan türevlere sırasıyla birinci dereceden ileri fark ve 5 nokta merkezi fark formülleri ile yaklaşılın. Bu durumda (2.27) denklemi,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{-U_{i-2,j} + 16U_{i-1,j} - 30U_{i,j} + 16U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{12h^2}$$

biçiminde verilir (Dehghan, 2003). Denklem düzenlenirse,

$$U_{i,j+1} = -r/12(U_{i-2,j} + U_{i+2,j}) + 16r/12(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + (1-30r/12)U_{i,j} \quad 2.31$$

ile verilen ifade, (1,5) yaklaşımını verir. Yaklaşımın moleküler gösterimi,



şeklindedir.

2.6.4. (5,5) Crank-Nicolson Yöntemi

(2.27) ile verilen ısı denkleminde, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yerine (j+1). ve j. zaman adımlarında, 5 nokta merkezi fark uygulanarak ortalaması alınırsa,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-U_{i-2,j} + 16U_{i-1,j} - 30U_{i,j} + 16U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{12h^2} \\ & + \frac{-U_{i-2,j+1} + 16U_{i-1,j+1} - 30U_{i,j+1} + 16U_{i+1,j+1} + 16U_{i+2,j+1}}{12h^2} \end{aligned} \right\}$$

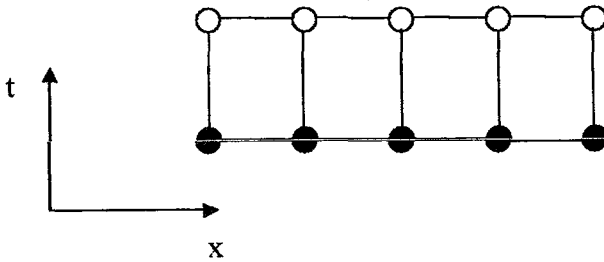
elde edilir. Bu ifade düzenlenerek aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r/24 \{ -U_{i-2,j} + 16U_{i-1,j} - 30U_{i,j} + 16U_{i+1,j} - U_{i+2,j} \} \\ + r/24 \{ -U_{i-2,j+1} + 16U_{i-1,j+1} - 30U_{i,j+1} + 16U_{i+1,j+1} + 16U_{i+2,j+1} \}$$

$r=k/h^2$ denirse,

$$r/24U_{i-2,j+1} - 16r/24U_{i-1,j+1} + (1+30r/24)U_{i,j+1} - 16r/24U_{i+1,j+1} + r/24U_{i+2,j+1} \\ = -r/24U_{i-2,j} + 16r/24U_{i-1,j} + (1-30r/24)U_{i,j} + 16r/24U_{i+1,j} - r/24U_{i+2,j} \quad 2.32$$

ifadesi elde edilir. Bu yöntemim moleküler gösterimi,



biçiminde verilir.

2.6.5. (1,3) BTCS (Implicit) Yöntem

Isı denkleminde bulunan türevlere sırası ile ikinci dereceden merkezi fark ve ileri fark formülleri ile yaklaşılın. Bu durumda denklem,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2}$$

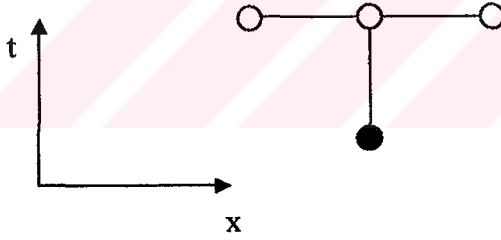
olmak üzere,

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1})$$

biçimini alır ve düzenlenirse,

$$U_{i,j} = -rU_{i+1,j+1} + (1 + 2r)U_{i,j+1} - rU_{i-1,j+1} \quad 2.33$$

ifadesi elde edilir. Burada bir bilinen üç bilinmeyen vardır. Bu şekilde verilen yönteme BTCS yöntemi denir ve moleküler gösterimi,



şeklindedir (Dehghan, 2003).

2.6.6 (3,3) Crandall Yöntemi

Bir fonksiyonun türevi, geri ileri ve merkezi farkların sonsuz serileri cinsinden aşağıdaki biçimde verilir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 U - \frac{1}{12} \delta_x^4 U + \frac{1}{90} \delta_x^6 U + \dots) \quad 2.34$$

Burada x notasyonu, x yönündeki türevi göstermek üzere merkezi fark formülü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\delta_x U_{i,j} = U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\delta_x^2 U_{i,j} = \delta_x (\delta_x U_{i,j}) = U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j} \quad 2.35$$

yaklaşımın kullanılmasında (2.34) denkleminin sağ tarafı birinci terimden sonra kesilmektedir. 2 ve daha fazla terimlerin kesilmesi durumunda ise yaklaşım daha kararlı hale gelir fakat bu durum bilinmeyen sayısını arttıracaktır. 2. dereceden türevleri içeren denklemlerde, 4. dereceden merkezi farklar yok edilebilir. Isı denkleminde $(i,j+1/2)$ noktasındaki yaklaşım uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \right\} \\ &= \frac{1}{2h^2} (\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 + \dots)(u_{i,j+1} + u_{i,j}) \end{aligned} \quad 2.36$$

ifadesi elde edilir.

Bu ifadenin her iki tarafı $(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2)$ ile çarpılıp δ_x^4 terimi yok edilirse,

$$(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2)(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2} r (\delta_x^2 u_{i,j+1} + \delta_x^2 u_{i,j}) + O(\delta_x^6)$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} r \right) \delta_x^2 \right\} u_{i,j+1} = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} r \right) \delta_x^2 \right\} u_{i,j}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(1 - 6r)u_{i-1,j+1} + (10 + 12r)u_{i,j+1} + (1 - 6r)u_{i+1,j+1} = (1 + 6r)u_{i-1,j} + (10 - 12r)u_{i,j} + (1 + 6r)u_{i+1,j} \quad 2.37$$

eşitliği elde edilir.

Üç bilinmeyene karşılık üç bilinen nokta olduğundan kapalı bir yöntemdir. Her bir zaman adımında meydana gelen matris sistemlerinin çözülmesiyle çözüm nümerik olarak hesaplanabilmektedir. Molekül şeması Crank-Nicolson yönteminin molekül şeması ile aynıdır.

2.7. Yakınsaklığın Analitik Yorumu

Açık yöntem için türetilen fark denklemini inceleyelim. U kısmi türevli diferansiyel fark denkleminin çözümü olsun. Bu halde,

$$e=U-u$$

ifadesi hatayı verir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

$$U(x,0)=a$$

$$U(0,t)=U(1,t)=b$$

olmak üzere,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} \quad 2.38$$

her bir grid noktasında,

$$U_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}, \quad U_{i,j+1} = U_{i,j+1} - e_{i,j+1}$$

(2.38) de yerine konularak,

$$e_{i,j+1} = r e_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + r e_{i+1,j} + U_{i,j+1} - U_{i,j} + r(2U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j}) \quad 2.39$$

ifadesi elde edilir. Taylor teoremi uyarınca,

$$U_{i+1,j} = U(x_i + h, t_j) = U_{i,j} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_i + \theta_1 h, t_j)}{\partial x^2},$$

$$U_{i-1,j} = U(x_i - h, t_j) = U_{i,j} - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_i - \theta_2 h, t_j)}{\partial x^2},$$

$$U_{i+1,j} = U(x_i + h, t_j) = U_{i,j} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_i + \theta_1 h, t_j)}{\partial x^2},$$

$$U_{i,j+1} = U(x_i, t_j + k) = U_{i,j} + k \frac{\partial U(x_i, t_j + \theta_3 k)}{\partial t},$$

elde edilen ifadeler $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta_3 < 1$ ve $-1 < \theta < 1$ olmak üzere (2.39) de yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$e_{i,j+1} = r e_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + r e_{i+1,j} + k \left\{ \frac{\partial U(x_i, t_j + \theta_3 k)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(x_i + \theta_4 h, t_j)}{\partial x^2} \right\} \quad (2.40)$$

bu ifade $e_{i,j}$ için bir fark denklemini oluşturur.

E_i , $|e_{i,j}|$ için j. satırındaki maximum değerini gösterebilir. M ise, (2.40) denklemindeki parantezdeki ifadenin $\forall i, j$ için maximum değerini ifade etsin. Böylece $r \leq 1/2$ için (2.40) daki e'nin tüm katsayıları ya pozitifdir ya da sıfırdır. Bu halde,

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &\leq r |e_{i-1,j}| + (1-2r) |e_{i,j}| + r |e_{i+1,j}| + kM \\ &= E_i + kM \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ifade $\forall i$ için doğru olduğundan $\max |e_{i,j+1}|$ içinde doğrudur. Böylece,

$$E_{j+1} \leq E_i + kM \leq (E_{i-1} + kM) + kM = E_{i-1} + 2kM$$

ve

$$E_{j+1} \leq E_0 + jkM = tM$$

ifadeleri elde edilir.

Burada U ve u için başlangıç koşulları aynıdır ve $E_0 = 0$ dır.

$h \rightarrow 0$ iken $k = rh^2 \rightarrow 0$ olduğundan

$$M \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j}$$

dir.

M'in limit değeri için $E_j \rightarrow 0$ dir. Bu ise $|U_{i,j} - u_{i,j}| \leq E_i$ olduğunu gösterir. Böylece sonlu t ler için $r < 1/2$ olması durumunda U fonksiyonun u'ya yakınsadığı görülür.

2.8. Kararlılık Analizi

Kısmi türevli diferansiyel denklemin çözüm bölgesi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$
 $x_i = ih \quad i = 1 \dots N \quad Nh = 1 \quad t_j = jk \quad j = 1 \dots T \quad jk = T$ ve $r = \frac{k}{h^2}$ için düzgün dikdörtgenlerle bölünmüş olsun, denklemin katsayıları sabit olmak üzere sonlu fark denklemini grid noktaları ile j. ve j+1. adımları boyunca ,

$$b_{i-1}U_{i-1,j+1} + b_i U_{i,j+1} + b_{i+1}U_{i+1,j+1} = C_{i-1}U_{i-1,j}U_{i,j} + C_{i+1}U_{i+1,j}$$

şeklinde verilmiş olsun $i=0$ ve $i=N$ sınır değerleri biliniyorsa $i=1 \dots N-1$ denklem matris formunda yazılabilir.

$i=1 \dots N-1$;

$$b_0U_{0,j+1} + b_1U_{1,j+1} + b_2U_{2,j+1} = C_0U_{0,j} + C_1U_{1,j} + C_2U_{2,j}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$b_{N-2}U_{N-2,j+1} + b_{N-1}U_{N-1,j+1} + b_NU_{N,j+1} = C_{N-2}U_{N-2,j} + C_{N-1}U_{N-1,j} + C_NU_{N,j}$$

Sınır koşulları $i=0$ ve $i=N$ için biliniyorsa buradaki (N-1) tane denklem matris formunda yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
u_j &= Au_{j-1} + f_{j-1} = A(Au_{j-2} + f_{j-2}) + f_{j-1} \\
&= A^2u_{j-2} + Af_{j-2} + f_{j-1} \\
&= \dots \\
&= A^ju_0 + A^{j-1}f_0 + A^{j-2}f_1 + \dots + f_{j-1},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

ifadesi elde edilir.

u_0 başlangıç vektörüne bir öteleme verilir ve u^* ile gösterilirse j . adımda çözüm;

$$u_j^* = A^ju_0^* + A^{j-1}f_0 + \dots + f_{j-1} \tag{2.42}$$

biçimindedir.

Yuvarlama hatası e ile gösterilmek üzere,

$$e_j = u^* - u$$

ile verilir. (2.41) ve (2.42) denklemlerinden

$$e_j = u^* - u = A^j(u_0^* - u_0) = A^je_0, j = 1(1)j$$

$$e_j = Ae_{j-1} = A^2e_{j-2} = \dots = A^je_0$$

$$\|e_j\| \leq \|A^j\| \|e_0\|$$

ifadesi elde edilir.

Tanım: $k \rightarrow 0$ ve $j \rightarrow \infty$ için sabit zaman adımlarında sonlu fark denkleminin çözümleri sınırlı oluyorsa, denklemler Lax-Richtmyer anlamında kararlıdır denir.

Tanım: Denklem sisteminin kapalı formu,

$$U_{j+1} = AU_j + b_j \tag{2.43}$$

olmak üzere. A matrisinin özvektörlerinin modüllerinin en büyüğü olan $\rho(A)$ (spektral yarıçap) t arttığında ve çözüm artmadığında $\rho(A) \leq 1$ koşulunu gerçekleştiriyor ise denklem kararlıdır denir.

2.9. Ağırlıklı Ortalama Yaklaşımı (A weighted Average Approximation)

$0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denkleminin daha genel bir sonlu fark yaklaşımı,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{1}{(\delta x)^2} \{ \theta(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (1-\theta)(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \}$$

denkleminin ile verilir. Bu denklem, $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson ve $\theta = 0$ için explicit method ve $\theta = 1$ için BTCS yöntemine karşılık gelir.

2.10. Kararlılık için Von-Neuman Yöntemi

T sonlu olmak üzere zaman aralığı $0 \leq t \leq T = Jk$, $\delta x = h \rightarrow 0$, $\delta t = k \rightarrow 0$ ve $J \rightarrow \infty$ olmak üzere iki zamanlı doğrusal fark denklemi için $u(x,t)$ nin kararlılığını araştıralım.

Kosinüs ve sinüslü terimlerle formülize edilen fourier serilerini işlem kolaylığı açısından kompleks üstel formundaki ;

$\sum a_n \cos(n\pi x/l)$ veya $\sum b_n \sin(n\pi x/l)$ ifadeleri yerine eşdeğeri olan $\sum A_n e^{in\pi x/l}$ ifadesi yazılabilir.

$i = \sqrt{-1}$ ve l x aralığının uzunluğu olmak üzere $u(ph, qk) = u_{p,q}$ olsun. Bu halde;

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph} \quad \beta_n = n\pi/Nh \quad \text{ve} \quad Nh = 1$$

şeklini alır.

Başlangıç değerleri $t = 0$ boyunca $u(ph, 0) = u_{p,0}$, $p = 0(1)N$ şeklinde belirlenirse;

$$u_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n ph} \quad p = 0(1)N$$

elde edilir. t artarken değişimi araştırmak için;

$$u_{p,q} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta p h} e^{\alpha q k} = e^{i\beta p h} \zeta^q$$

şeklinde yazılsın (Smith,1985).

Burada $\xi = e^{\alpha k}$, α kompleks sabit sayıdır.

$|u_{p,q}|$, $\forall q \leq J$ için sınırlandırılırsa $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ için başlangıç şartlarını sağlayan tüm β değerleri için sonlu fark denklemi Lax-Richtmyer tanımına da uygun olur.

Eğer fark denkleminin tam çözümü zamanla üstel artmıyorsa kararlılık için gerekli ve yeterli koşul;

$$\begin{aligned} |\xi| &\leq 1 \\ -1 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

dır.

Bir boyutlu sabit katsayılı ısı denklemini göz önüne alalım,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0$$

Bu denkleme ağırlıklı ortalama yaklaşımı uygulayarak elde edilen sistemin

Lax-Richtmyer ve Von-Neuman anlamında kararlılığını inceleyelim. Uygun sonlu farklar yukarıdaki denklemde yerine konulursa,

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r\{\theta(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j}) + (1-\theta)(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}),$$

$$-r\theta U_{i-1,j+1} + (1+2r\theta)U_{i,j+1} - r\theta U_{i+1,j+1} = (1-\theta)rU_{i-1,j} + (-2r(1-\theta)+1)U_{i,j} + (1-\theta)rU_{i+1,j},$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem matris formunda,

olarak yeniden düzenlenirse,

$$A = (I_{N-1} - r\theta T_{N-1})^{-1} \{I_{N-1} + r(1-\theta)T_{N-1}\}$$

şeklinde ifade edilir. A matrisinin özdeğeri

$$\left(1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)\right)^{-1} \left(1 - 4r(1-\theta) \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)\right)$$

olmak üzere

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_s \left| \frac{1 - 4r(1-\theta) \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)} \right|$$

elde edilir.

$\rho(A) \leq 1$ olduğundan Lax-Richtmyer anlamında kararlılık koşulu uyarınca,

$$-1 \leq \max_s \frac{1 - 4r(1-\theta) \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)} \leq 1$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $r \geq 0$ için gerçekleşir sol tarafı ise $r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$

için sağlanır. Bu durumda sonlu farklarla belirtilen ağırlıklı ortalama yaklaşımı

$0 \leq r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ koşulu için kararlıdır. Denklem, $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson $\theta = 0$

için explicit method ve $\theta = 1$ için implicit backward yöntemlerine karşılık gelir.

Benzer şekilde Von-Neuman anlamında kararlılık analizini yapalım.

$$U_{p,q+1} - U_{p,q} = r\{\theta(U_{p-1,q+1} - 2U_{p,q+1} + U_{p+1,q}) + (1-\theta)(U_{p-1,q} - 2U_{p,q} + U_{p+1,q})\},$$

$$-r\theta U_{p-1,q+1} + (1+2r\theta)U_{p,q+1} - r\theta U_{p+1,q+1} = (1-\theta)rU_{p-1,q} + (-2r(1-\theta)+1)U_{p,q} + (1-\theta)rU_{p+1,q}$$

denkleminde $U_{p,q} = e^{i\beta p h} \xi^q$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& -r\theta e^{i\beta(p-1)h} \xi^{q+1} + (1+2r\theta)e^{i\beta p h} \xi^{q+1} - r\theta e^{i\beta(p+1)h} \xi^{q+1} \\
& = (1-\theta)re^{i\beta(p-1)h} \xi^q + (-2r(1-\theta)+1)e^{i\beta p h} \xi^q + (1-\theta)re^{i\beta(p+1)h} \xi^q
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Denklemin her iki tarafı $e^{i\beta p h} \xi^q$ ile bölünürse,

$$\xi = \frac{\left\{ 1 - 4r(1-\theta) \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right\}}{\left\{ 1 + 4r\theta \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right\}}$$

elde edilir.

Kararlılık için $-1 \leq \xi \leq 1$ olmalıdır bu ise lax-Richtmyer anlamında kararlılık ile aynı eşitsizlik sistemini oluşturduğundan aynı kararlılık aralığı için geçerlidir.

2.11. Sınır Koşullarının Türetilmesi

Türevlerde ifade edilen sınır şartlarına pratikte sık rastlanır. Örneğin ısı iletilen bir materyal izole edildiğinde yüzeye normal ısı akışı yoktur ve buna karşı gelen sınır şartı izole edilmiş yüzeyin her noktasında

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

dir. Burada u sıcaklığının diferensiyeli, yüzeye normal doğrultudadır. Buna benzer olarak radyasyondan kaynaklanan u sıcaklığındaki bir dış yüzeyden v sıcaklığındaki bir bölgeye olan ısı transferindeki değişimin genellikle $(u-v)$ ile orantılı olduğu kabul edilir. Isı davranışı teorisinin temel varsayımına göre, herhangi bir yüzeyden geçen ısı akışındaki değişim

$$-K \frac{\partial U}{\partial n}$$

sıcaklık birimlerine eşittir. Yüzey saçılması için karşılık gelen sınır şartı ise

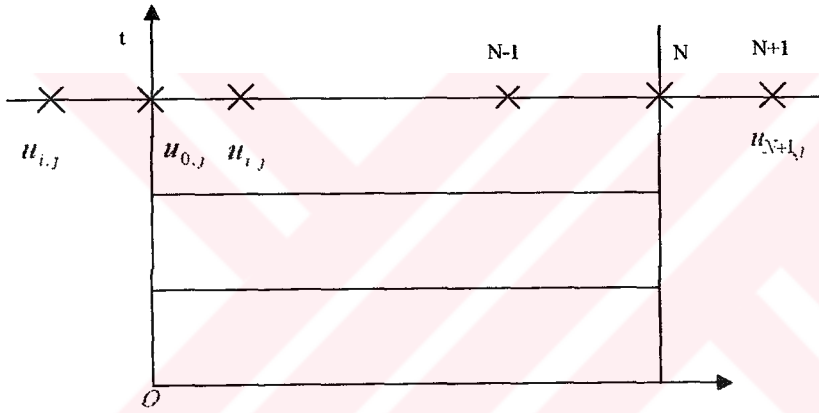
$$-K \frac{\partial U}{\partial n} = H(u-v)$$

dir. Burada K sabiti materyal, N ısı iletkenliği ve H sabiti de onun yüzey ısı transferi katsayısıdır. Eksi işareti, u cebirsel olarak arttığı için sıcaklığın ters doğrultuda yayıldığına varsayıldığını gösterir. Bu denklem, h pozitif bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -h(u-v)$$

şeklinde yazılabilir.

Uzunluğu boyunca sıcaklıktan yalıtılmış ve $x=0$ uç noktasından ısı yayan ince bir çubuk göz önüne alınsın. t anında bu uç noktadaki ısı bilinemez ise bunun hesabı ilave denklem gerektirir. $\frac{\partial u}{\partial x}$ için ileri fark kullanıldığında bu denklem sınır şartının kendisi olabilir.



$x=0$ da (sol uçta) sınır şartı;

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = h(u-v)$$

ifadesi ve $u_{0,j}$ sıcaklığı için ekstra bir denklem veren,

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta_x} = h(u_{0,j} - v)$$

ifadesi ile temsil edilecektir. x -ekseninin pozitif yönü sağa doğru olduğu zaman

$-K \frac{\partial u}{\partial n}$ ısı yayılma kuralı, her birim zaman için birim alandan sağdan sola geçen ısı

büyüküğünün $K \frac{\partial u}{\partial n}$ olduğunu belirtir bu ise, $x=0$ da artan sıcaklık ile orantılıdır.

Eğer $\frac{\partial u}{\partial x}$, $x=0$ da bir merkezi fark formülü ile ifade edilmesi gerekirse $(-\delta_x, j\delta_t)$ iç

noktasında $u_{-1,j}$ sıcaklığının verilmesi gerekir. Bu halde sınır şartı

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta_x} = h(u_{0,j} - v)$$

ile ifade edilebilir. $u_{-1,j}$ sıcaklığı bilinmeyendir ve başka bir denklem gerektirir. Bu denklem, sıcaklık hareket denkleminin çubuğun ucunda sağlandığı varsayılarak elde edilir. Bu durumda $u_{-1,j}$ bilinmeyi bu denklemler arasında elimine edilebilir.

Benzer denklem çubuğun diğer ucundaki yayılma için de yazılabilir.

3. ENTERPOLASYON TEKNİKLERİ

Bazı durumlarda sayısal türevi hesaplanacak olan $y=f(x)$ fonksiyonuna $p(x)$ gibi bir enterpolasyon polinomu oluşturmak ve bu polinomun türevini almak, istenen yaklaşımı verebilir. Bunun için kullanılan bazı enterpolasyon teknikleri aşağıda verilmiştir.

3.1. Lagrange Enterpolasyonu Yardımıyla Türev

Eşit aralıklı olmayan $(n+1)$ tane ayrık noktadan geçen n . dereceden polinom, “Lagrange Enterpolasyon” formülüne göre,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right] f(x_i) + E$$

veya kısaca,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + E$$

şeklinde verilir. Bu halde,

$$P'_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x) + E'$$

birinci mertebeden türev hesaplanabilir. Benzer şekilde ikinci, üçüncü, ve daha yüksek dereceden türevler de hesaplanabilir.

3.2. Newton Enterpolasyonu Yardımıyla Türev

Eşit aralıklı ayrık noktaların verilmesi durumunda, Gregory Newton Enterpolasyon formülü uyarınca

$$s = \frac{x - x_k}{h}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_k + sh) = \sum_{r=0}^n \binom{s}{r} \Delta^r f_k \\ &= f_k + s \Delta f_k + \frac{1}{2} s(s-1) \Delta^2 f_k + \frac{1}{6} s(s-1)(s-2) \Delta^3 f_k + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_k \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani $(n+1)$ noktadan n . dereceden bir polinom geçirek, verilen noktaları $[x_k, x_{k+n}]$ aralığında fonksiyonel olarak ifade edebiliriz. Böylece bulunacak $g(x)$ polinomunun türevi, temsil ettiği fonksiyonun türevine yakın olacaktır.

$n=2$ özel hali göz önüne alınırsa:

$$g(x) = f_k + s\Delta f_k + \frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 f_k$$

olacağından,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \left[\Delta f_k + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_k \right] \frac{1}{h}$$

elde edilir.

$s=0, s=1, s=2$ alınarak $x = x_k, x = x_{k+1}, x = x_{k+2}$ deki türev değerleri hesaplanabilir.

$s=0$ için,

$$g'(x_k) = \frac{1}{2h} [2\Delta f_k - \Delta^2 f_k] = \frac{1}{2h} [-f_{k+2} + 4f_{k+1} - 3f_k]$$

bulunur.

$s=1$ için,

$$\begin{aligned} g'(x_{k+1}) &= \frac{1}{2h} [2\Delta f_k + \Delta^2 f_k] \\ &= \frac{1}{2h} [f_{k+2} - f_k] \end{aligned}$$

bulunur.

$s=2$ için ise,

$$\begin{aligned} g'(x_{k+2}) &= \frac{1}{2h} [2\Delta f_k + 3\Delta^2 f_k] \\ &= \frac{1}{2h} [3f_{k+2} - 4f_{k+1} + f_k] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

3.3. Spline Enterpolasyonu

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ şeklinde sıralanmış apsislere karşılık y_0, y_1, \dots, y_n noktaları verilmiş olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan n tane $f_k(x)$ kübik polinomu varsa $f(x)$ 'e kübik spline fonksiyonu denir.

Her aralıkta üçüncü dereceden,

$$f_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k ; \quad k=0,1,2,\dots,n$$

şeklinde polinomlar kullanılarak yaklaşım yapılacaktır. $(n+1)$ tane nokta için n adet aralık olduğundan $4n$ tane bilinmeyen sabitin hesabı için $4n$ tane şarta gerek vardır. Bunlar;

- i) iç noktalarda fonksiyon değerleri eşit olmalıdır. $(2n-2)$ bağıntı,
- ii) baştaki ve sondaki fonksiyonlar uç noktalardan gelmelidir. (2) bağıntı
- iii) İç noktalarda birinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. $(n-1)$ bağıntı
- iv) İç noktalarda ikinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. $(n-1)$ bağıntı
- v) İlk ve son noktada ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. (2) bağıntı

şeklindedir.

Herhangi bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında $f_k(x)$ 'in ikinci türevi doğrusal olacağından, Lagrange enterpolasyon formülüne göre,

$$f_k''(x) = f_k''(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f_k''(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

yazılabilir. Son bağıntıda ard arda iki kez integral alınarak,

$$f_k'(x) = f_k''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)}{2(x_{k-1} - x_k)} + f_k''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^2}{2(x_k - x_{k-1})} + C_1$$

$$f_k(x) = f_k''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + f_k''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + C_1 x + C_2$$

bulunur. Diğer yandan bu fonksiyonun her bir aralığın uç noktalarından geçmesi şartı kullanılırsa C_1 ve C_2 sabitleri belirlenmiş olur. Yani x_{k-1} için $f(x_{k-1})$ ve x_k için $f(x_k)$ olacağından,

$$f_k(x_{k-1}) = f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + C_1 x_{k-1}$$

$$f_k(x_k) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + C_1 x_k$$

yazılabilir. Son iki denklem taraf tarafa çıkartılırsa,

$$f_k(x_k) - f_k(x_{k-1}) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{6} - f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{6} + C_1 (x_k - x_{k-1})$$

bulunur. Buradan C_1 ve C_2 çekilerek,

$$C_1 = \frac{f_k(x_k) - f_k(x_{k-1}) - \frac{f''(x_k) - f''(x_{k-1})}{6} (x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

$$C_2 = \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)}{(x_k - x_{k-1})} - \left[\frac{x_k f''(x_{k-1}) - x_{k-1} f''(x_k)}{6} \right] (x_k - x_{k-1})$$

değerleri bulunur böylece,

$$f_k(x) = \frac{f''(x_{k-1})}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3 + \frac{f''(x_k)}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3$$

$$+ \left[\frac{f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x_k - x) +$$

$$+ \left[\frac{f(x_k)}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_k)(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x - x_{k-1})$$

ifadesi elde edilir.

Bu son ifade, başlangıçta verilenden çok daha karmaşık olmasına rağmen iki bilinmeyen içermektedir. Yani aralığın uç noktalarında ikinci türevler belli ise, bu aralıkta "Spline Fonksiyonu" elde edilir.

İkinci türevleri, birinci türevlerin düğüm noktalarındaki sürekliliği şartı kullanılarak hesaplanabilir. Böylece,

$$f'_k(x_k) = f''_k(x_k)$$

şartı kullanılırsa,

$$(x_k - x_{k-1})f''(x_{k-1}) + 2(x_{k+1} - x_{k-1})f''(x_k) + (x_{k+1} - x_k) \\ = \frac{6}{(x_{k+1} - x_k)}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] + \frac{6}{(x_k - x_{k-1})}[f(x_{k-1}) - f(x_k)]$$

bağıntısı elde edilir (Türker, Can, 1999). Tüm (n-1) tane iç nokta için bu bağıntı yazılırsa (n+1) tane bilinmeyene sahip, ikinci türev içeren (n-1) adet denklem elde edilmiş olur.

3.4. En Küçük Kareler Yöntemi

Doğrusal eğri uydurma işleminde “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılır. Yöntem, ölçüm değişimine en uygun fonksiyonun bilinmeyen parametrelerinin bulunmasında en etkili yöntemdir. Kullanılabilecek diğer bir yöntem olan deneme-yanılma yöntemi hem kesin değildir, hem de zaman alıcı bir işlemdir. Bir ölçümde, $i=1,2,3,\dots,N$ olmak üzere N nokta için x_i bağımsız değişkenine karşı y_i bağımlı değişken değerleri elde edilmiş olsun. Bu değişime uyan fonksiyonun

$$f(x) = c_0 + c_1x$$

doğru denklemi olacağını varsayalım. Ölçüm değerleri y_i ile uyum denklemi $f(x) = c_0 + c_1x_i$ arasındaki farkların minimum olması istenmektedir. Bunun için y_i ile $f(x_i)$ arasındaki farkların toplamı alınabilir, fakat farkların bir kısmı negatif olacağından, değerlerin birbirini yok etmesi söz konusudur ve toplam işlemi anlamsızdır. Ayrıca bunun istatistik bir anlamı vardır. Bu durumda tüm değerler, daha doğrusu farkların kareleri pozitif olacağından sonuç anlamlıdır.

Ölçüm değerleriyle tahmini uyum fonksiyonunu arasındaki farkların kareleri toplamı,

$$\Omega = \sum_{i=1}^N [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^N [c_0 + c_1x_i - y_i]^2$$

biçiminde verilsin.

Ölçüm değerlerinin fonksiyona en iyi uyumu için, elde edilen farkların kareleri toplamının c_0 ve c_1 katsayılarına göre minimum olması gerekmektedir. Buna göre,

toplamı katsayılara göre minimum yapmak için Ω 'nın c_0 ve c_1 katsayılarına göre türevlerini sıfıra eşitlensin. Böylece

$$\frac{\partial \Omega}{\partial c_0} = 2 \sum_{i=1}^N [c_0 + c_1 x_i - y_i] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=1}^N [c_0 + c_1 x_i - y_i] x_i = 0$$

elde edilir. Bu iki ifade yeniden düzenlenirse,

$$c_0 N + c_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$c_0 \sum_{i=1}^N x_i + c_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

elde edilir.

Bu denklemlerde bilinmeyenler c_0 ve c_1 kolaylıkla çözülebilir. Son ifadeyi matris denkleminde yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

ifadesi elde edilir

Burada denklem sistemi çözülerek katsayılar bulunur.

3.5. Trapizoidal Yöntemi (Yamuklar yöntemi)

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere, aralığı $a=x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ şeklinde n parçaya bölelim.

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

olmak üzere,

$$I \cong \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i) \quad 3.1$$

yazılabilir, ve

$$A_1 = h_0 y_0, \quad A_2 = h_1 y_1, \dots, A_n = h_{n-1} y_{n-1}$$

alanları toplanırsa (3.1) elde edilir. Aralık uzunlukları eşit ise,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

olmak üzere,

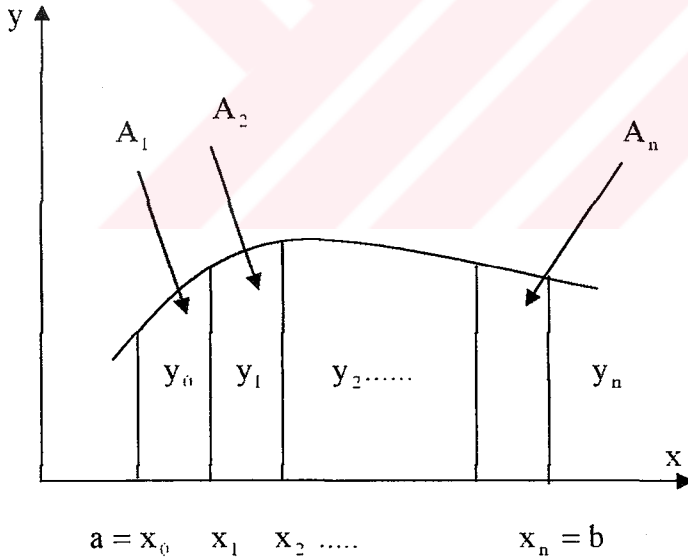
$$I \cong h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad 3.2$$

elde edilir.

(3.1) ve (3.2) ile verilen formüllerde aritmetik ortalama alınırsa,

$$\begin{aligned} I &\cong h \left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n}{2} \right) \\ &= h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \end{aligned} \quad 3.3$$

elde edilir.



Burada yamukların alanları toplamı, integralin yaklaşık değerini verir. Bu halde,

$$A_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h, \quad A_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h, \dots, \quad A_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

biçiminde verilir (Türker, Can, 1999).

Yukarıdaki alt aralıklarda fonksiyon yerine, iki noktadan geçen doğrular kullanılmaktadır.

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} \left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} (x - x_0) \right] dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h} (x - x_1) \right] dx = \frac{h}{2} (y_1 + y_2)$$

$$A_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} (x - x_{n-1}) \right] dx = \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

3.6. Jacobi Ve Gauss Seidel Yöntemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Parabolik denkleminin nümerik çözümünü bulmak için Crank-Nicolson yöntemi göz önüne alınsın, bu yöntem

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = 1/2 \left\{ \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} \right\} \quad 3.4$$

denklemlerle ifade edilmektedir. Bu denklem $U_{i,j+1}$ için tekrar düzenlenirse,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{1}{2} r \left\{ (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) + (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \right\}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemdeki $u_{i-1,j+1}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i+1,j+1}$ bilinmeyenlerini kısaca u_{i-1} , u_i , u_{i+1} şeklinde yazarak bu bilinmeyenler arasında

$$u_i = \frac{1}{2} r (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + b_i \quad 3.5$$

ilişkisi elde edilir. Burada,

$$b_i = u_{i,j} + \frac{1}{2}r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad 3.6$$

olup bilinen değerlerden oluşmuştur. Bu bağıntıdan hesaplanacak olan u_i ye ilk yaklaşımı $u_i^{(1)}$, ikinci yaklaşımı u_i^2, \dots ile gösterilsin ve her i için bu $u_i^{(n)}$ lerin hesaplandığını kabul edilsin. Buna göre (3.5) denkleminde açık olan

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}r\{u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}\} + b_i \quad 3.7$$

iterasyon formülü elde edilir. Ancak bu iterasyon, sadece $0 < r \leq \frac{1}{2}$ için yakınsak olduğundan kullanımı sınırlıdır. Buna karşılık Crank-Nicolson yöntemi r nin her sonlu değeri için geçerlidir. Bundan dolayı (3.7) iterasyon formülünde basit bir düzenleme yapılarak,

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}r\{u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + b_i \quad \text{veya,}$$

$$u_i^{(n+1)} = \frac{r}{2(1+r)}\{u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)} \quad 3.8$$

iterasyonu elde edilir (Hildebrand, 1987). Bu düzenlemeyle elde edilen iterasyon, (3.7) iterasyonuna göre daha hızlı yakınsar ve r 'nin her sonlu değeri için yakınsaktır.

(3.8) iterasyon formülünde n . iterasyonun terimleriyle $(n+1)$. terimler hesaplanır. Bu iterasyona, (3.5) denklemlerine karşı gelen "Jacobi iterasyonu" denir.

$u^{(n+1)}$; gerçek çözüme yaklaşırken son bulunan iterasyon kullanılarak daha iyi sonuç elde edilir. Yani $u^{(n)}$ yerine $u^{(n+1)}$ yazılır.

Verilen zaman satırının her bir noktasında $u^{(n)}$ nin hesaplandığı kabul edilsin. Sistematik olarak soldan sağa $u_1^{(n+1)}, u_2^{(n+1)}, u_3^{(n+1)}$ ler hesaplanabilir. Ayrıca $u_{i-1}^{(n+1)}$, nin hesaplandığını ve $u_{i+1}^{(n+1)}$ in hesaplanmak üzere olduğu kabul edilirse, (3.8) denkleminde

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}r\{u_{i-1}^{(n+1)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + b_i$$

elde edilir. Böylece,

$$u_i^{(n+1)} = \frac{r}{2(1+r)}\{u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)} \quad 3.9$$

iterasyonu elde edilir. Bu iterasyona (3.5) denklemlerine karşı gelen “Gauss-Seidel iterasyonu” denir. Bu iterasyon r 'nin her sonlu değeri için yakınsaktır ve Jacobi iterasyonuna göre iki kat daha hızlı sonuca yaklaşır.

3.7.Succesive Over-Relaxation (S.O.R)

Crank-Nicolson denklemleri için Gauss-Seidel iterasyon formülü,

$$u_i^{(n+1)} = \frac{r}{2(1+r)} \{u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)}$$

biçimindedir. Bu iterasyonun sağ tarafına $u_i^{(n)}$ terimi ilave edilip, çıkartılır ve düzenlenirse,

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \left[\frac{r}{2(1+r)} \{u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)} - u_i^{(n)} \right] \quad 3.10$$

iterasyonu elde edilir. Bu iterasyon yöntemine “Successive Over-Relaxation” iterasyonu denir. Köşeli parantez içindeki ifade, Gauss-Seidel iterasyonu yardımıyla bulunan $u_i^{(n)}$ 'e verilen artış miktarıdır. Bu artış miktarının yukarıdakinden daha büyük bir artış olması istenirse, parantez içindeki ifade “relaxation factor” olarak adlandırılan ve genellikle $1 \leq w \leq 2$ olan w ile çarpılırsa iterasyon,

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + w \left[\frac{r}{2(1+r)} \{u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)} - u_i^{(n)} \right]$$

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + w \left[\frac{r}{2(1+r)} \{u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)}\} + \frac{b_i}{(1+r)} \right] - (w-1)u_i^n \quad 3.11$$

olarak yazılabilir (Hildebrand, 1987).

4. BİR BOYUTLU PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK PARAMETRESİ İÇİN TÜRETİLEN YAKLAŞIMLAR

4.1. Bir Boyutlu Parabolik Diferansiyel Denklemlerde Bilinmeyen Kaynak Parametresi İçin Türetilen Yaklaşımlar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)u + \phi(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad 4.1$$

denklemini için başlangıç koşulları,

$$U(x,0)=f(x) \quad 4.2$$

ve sınır koşulları,

$$U(x,t)=g_0(t), \quad 0 < t \leq T \quad 4.3$$

$$U(x,t) = g_1(t) \quad 0 < t \leq T \quad 4.4$$

$$U(x_0,t)=E(t) \quad 0 < t \leq T \quad 4.5$$

ile verilsin. Burada f , g_0 , g_1 , ϕ , E ve t bilinen değerleri U ve p ise bilinmeyen değerleri gösterebilirsin.

4.2. Bir Boyutlu Ters Probleme Sonlu Fark Yaklaşımlarının Uygulanması

$[0,1] \times [0,T]$ aralıklarını sırasıyla M ve N parçaya bölelim. Bu durumda $h=1/M$ ve $t=1/N$ olmak üzere grid noktalar (x_i, t_n) ; aşağıdaki gibi tanımlansınlar.

$$x_i = ih \quad i = 0,1,2,\dots,M \quad 4.6$$

$$t_n = nk \quad t = 0,1,2,\dots,N$$

Burada u_i^n ve $p(nk)$ inceleme yapılan noktada sonlu fark yaklaşımlarını gösterebilirsin, x_0 noktası, $x_0 = k_0 h$ $1 \leq k_0 \leq N-1$ olmak üzere veri noktası olarak adlandırılabilir ve

$u_{k_0}^n = E^n$ ile gösterilsin $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ısı denkleminde ağırlıklı ortalama yaklaşımını n . ve

$(n+1)$. adımlarda uygulayalım bu amaçla (4.1) ifadesinde verilen difüzyon denkleminde $(ih, (n+\theta)k)$ noktasında $0 \leq \theta \leq 1$ için yaklaşım uygulanırsa denklem,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^{(n+\theta)} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^{(n+\theta)} + (pu + \Phi)_i^{(n+\theta)} \quad 4.7$$

biçimini alır ve açık formda,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \theta \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + p^n u_i^n + \Phi_i^n \quad 4.8$$

şeklinde ifade edilir.

u 'nun $(n+1)$. adımdaki bilinmeyen terimleri, bilinenler cinsinden $r = \frac{k}{h^2}$ olmak üzere düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\theta r u_i^{n+1} + (1 + 2r\theta) u_i^{n+1} - \theta r u_{i+1}^{n+1} \\ & = r(1-\theta) u_{i-1}^{n+1} + [1 - 2r(1-\theta)] u_i^{n+1} + r(1-\theta) u_{i+1}^{n+1} + k(p^n u_i^n + \Phi_i^n) \end{aligned} \quad 4.9$$

Ağırlıklı ortalama yaklaşımı için Von-Neuman kararlılık yöntemi uygulanarak, $r = \frac{k}{h^2}$ olmak üzere kararlılık bölgesi,

$$\begin{aligned} 0 < \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad 0 < r \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \\ r > 0 \quad \text{için} \quad \frac{1}{2} < \theta \leq 1 \end{aligned} \quad 4.10$$

şeklinde belirlenir.

yaklaşımın modife edilmiş şekli,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu - \phi - \frac{(\Delta x)^2}{12} [1 - 6r(1-2\theta)] \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(\Delta x)^4}{360} [1 - 30r(1-2\theta) \\ + 120r^2(1-3\theta+3\theta^2)] \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O((\Delta x)^6) = 0 \end{aligned} \quad 4.11$$

ile verilir (Warming, Hyett, 1973).

(4.9) ile verilen bir boyutlu difüzyon denklemi $O\{(\Delta x)^2\}$ kesme hatasına sahip olup, ikinci dereceden doğruluktur. Eğer $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r}$ ise, $O\{(\Delta x)^2\}$ terimi yok edilirse

denklem dördüncü dereceden doğrulukta olacaktır. (4.9) denklemi $\theta = 1$ için düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} - ru_i^{n+1} = u_i^n + k(u_i^n p^n + \phi_i^n) \quad 4.12$$

ile verilen ifade klasik kapalı denklem olarak bilinir ve Backward time centered space (BTCS) olarak adlandırılır. Bu yöntemin modife edilmiş denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu - \Phi - \frac{(\Delta x)^2}{12}(1 + 6r)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ - \frac{(\Delta x)^4}{360}(1 + 30r + 120r^2)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O((\Delta x)^6) = 0 \end{aligned} \quad 4.13$$

$\theta = 1/2$ için ağırlıklı ortalama yaklaşımı, Crank-Nicolson kapalı yöntemini belirtir.

Bu kapalı yöntem,

$$\begin{aligned} -ru_{i-1}^{n+1} + 2(1 + r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} \\ = u_{i-1}^n + 2(1 - r)u_i^n + ru_{i+1}^n + 2k(p^n u_i^n + \Phi_i^n) \end{aligned} \quad 4.14$$

biçimindedir.

Crank-Nicolson yönteminin modife edilmiş formu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu - \phi - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(\Delta x)^4}{360}(1 + 30r^2)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O((\Delta x)^6) = 0$$

şeklindedir.

$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r}$ için Crandall sonlu fark formülü kapalı bir yöntem olarak

$$\begin{aligned} (1 - 6r)u_{i-1}^{n+1} + 2(5 + 6r)u_i^{n+1} + (1 + 6r)u_{i+1}^{n+1} \\ = (1 + 6r)u_{i-1}^n + 2(5 - 6r)u_i^n + (1 + 6r)u_{i+1}^n + 12k(p^n u_i^n + \Phi_i^n) \end{aligned} \quad 4.15$$

şeklinde verilsin. Crandall yönteminin modife edilmiş denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu - \Phi - \frac{(\Delta x)^4}{240}(20r^2 - 1)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O((\Delta x)^6) = 0 \quad 4.16$$

biçimindedir.

Benzer şekilde (4.9) ifadesi $\theta=0$ için düzenlenirse bilinen klasik FTCS olarak adlandırılan açık yöntem elde edilir ve bu yöntem,

$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1-2r)u_{i+1}^n + ru_{i+1}^n + k(p^n u_i^n + \phi_i^n) \quad 4.17$$

biçiminde verilir.

FTCS fark formülünün modife edilmiş formu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu - \phi - \frac{(\Delta x)^2}{12}(1-6r)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(\Delta x)^4}{360}(1-30r+120r^2)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O((\Delta x)^6) = 0 \quad 4.18$$

biçiminde verilebilir.

4.3. Kontrol Fonksiyonu için Algoritmanın Geliştirilmesi

(4.1) ve (4.2) denklemi $u(x,t)$ ve $p(t)$ için çözümlenip,

$$E'(t) = u_{xx}(x_0, t) + p(t)E(t) + \phi(x_0, t) \quad 4.19$$

ifadesi düzenlenirse,

$$p(t) = \frac{E'(t) - u_{xx}(x_0, t) - \phi(x_0, t)}{E(t)} \quad 4.20$$

elde edilir. Bu ifadeye sonlu farklar uygulanırsa,

$$p^n = \frac{(E')^n - (1/h^2)(u_{k_0-1}^n - 2u_{k_0}^n + u_{k_0+1}^n) - \phi_{k_0}^n}{E^n} \quad 4.21$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$p_0 = \frac{E'(0) - f_{xx}(x_0) - \phi(x_0, 0)}{f(x_0)} \quad 4.22$$

ifadesi elde edilir.

Kontrol parametresinin hesaplanmasında kullanılan yöntemlerin kararlılığı parabolik denklemin kararlılığı ile uyumlu olmalıdır. Dolayısıyla aşağıda dördüncü dereceden verilen denklem $p(t)$ 'nin yaklaşık olarak çözülmesinde kullanılacaktır.

$$p^n = \frac{1}{E^n} \left((E')^n - \frac{1}{12h^2} (-u_{k_0-2}^n + 16u_{k_0-1}^n - 30u_{k_0}^n + 16u_{k_0+1}^n - u_{k_0+2}^n) - \phi_{k_0}^n \right) \quad 4.23$$



5. BİR BOYUTLU PARABOLİK KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE TÜREVLİ SINIR KOŞULLARI İÇİN KONTROL FONKSİYONUNUN BELİRLENMESİ

5.1. Kontrol parametresi için türetilen yaklaşımlar

Bu bölümde,

$$u_t = u_{xx} + p(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (5.1)$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad x \in (0,1) \quad (5.2)$$

$$u_x(0,t) = g_1(t), \quad t \in (0,T) \quad (5.3)$$

$$u_x(1,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T) \quad (5.4)$$

sistemi ve,

$$\int_0^{s(t)} u(x,t) = E(t), \quad 0 < t \leq T; 0 < s(t) \leq T \quad (5.5)$$

ek koşulunu sağlayan bilinmeyen $u=u(x,t)$ fonksiyonu ve $p=p(t)$ kontrol parametresinin bulunma problemi ile ilgilenilmektedir. Bu amaçla sonlu farklar kullanılmaktadır. Burada $f(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $E(t)$ bilinen fonksiyonlardır.

(5.1)-(5.4) denklemleri birtakım fiziksel olaylara karşılık gelmektedir. U ısı dağılımını göstermek üzere bu ifadeler, kaynak kontrolüne bağlı kontrol problemini oluştururlar. Belirlenmeye çalışılan kontrol parametresi olan $p(t)$, uzayın bir bölümüne bırakılan enerjiyi göstermektedir.

5.2. Kanonik Gösterim

(5.1) denkleminde bulunan $p(t)$ u terimi uygun dönüşümlerle kaldırılarak (5.1)-(5.4) denklem sistemi sonlu fark çözümü için uygun hale getirilir. Bu şekilde elde edilen sisteme PDE sistemi, bu sistem için uygulanacak çözüm yöntemine PDE çözüm denilecektir.

$$r(t) = \exp\left(-\int_0^t p(\tau) d\tau\right) \quad (5.6)$$

$$v(x,t)=u(x,t)r(t) \quad (5.7)$$

olmak üzere $(u,p) \rightarrow (v,r)$ dönüşümleri kullanılarak,

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)} \text{ ve } p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)} \quad (5.8)$$

ifadeleri elde edilsin, böylece elde edilen yeni denklem sistemi (v,r) ikilisi olarak aşağıdaki gibi verilir (Wang, Lin, 1989).

$$v_t = v_{xx} + r(t).f(x,t) \quad 0 < x < 1; 0 < t \leq T \quad (5.9)$$

$$v(x,0) = \phi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.10)$$

$$v_x(0,t) = r(t)g_1(t) \quad 0 < t \leq T \quad (5.11)$$

$$v_x(1,t) = r(t)g_2(t) \quad 0 < t \leq T \quad (5.12)$$

$$r(t).E(t) = \int_0^{s(t)} v \partial x \quad 0 < t \leq T$$

$$r(t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^{s(t)} v dx \quad 0 < t \leq T \quad (5.13)$$

5.3. Nümerik Yöntemler

$H=[0,1]$ ve $T=[0,T]$ aralıklarını M ve N parçaya bölelim ve $h = \frac{1}{M}$, $\tau = \frac{T}{N}$ olsun. Sınır koşullarının türevli olması nedeniyle sanal noktalar ikinci sınır koşulları olarak belirlensin. (5.9)-(5.13) denklem sistemine ağırlıklı ortalama yaklaşımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \theta \left(\frac{v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (rf)_j^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(\frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{h^2} + (rf)_j^n \right) \quad 5.14$$

$$v_{-1}^n = v_1^n - 2h(rg_1)^n$$

$$v_{m+1}^n = v_{m-1}^n + 2h(rg_2)^n$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$j=1\dots M-1$ için;

$$\begin{aligned} & -\theta v_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_j^{n+1} - \theta v_{j+1}^{n+1} - h^2 \theta (rf)_j^{n+1} \\ & = (1-\theta) v_{j-1}^n + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_j^n + (1-\theta) v_{j+1}^n + h^2 (1-\theta) (rf)_j^n \end{aligned}$$

$j=0$ için;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_0^{n+1} - 2\theta v_1^{n+1} - h^2 \theta (rf)_0^{n+1} + 2\theta h (rg_1)^{n+1} \\ & = \left(\frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_0^n + 2(\theta-1) v_1^n + h^2 (1-\theta) (rf)_0^n + 2(\theta-1) h (rg_1)^n \end{aligned}$$

$j=M$ için;

$$\begin{aligned} & -2\theta v_{M-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_M^{n+1} - h^2 \theta (rf)_M^{n+1} - 2\theta h (rg_2)^{n+1} \\ & = 2(\theta-1) v_{M-1}^n + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_M^n + h^2 (1-\theta) (rf)_M^n + 2(1-\theta) h (rg_2)^n \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

(5.13) denkleminde bulunan $\int_0^{s(t)} v dx$ integrali nümerik olarak hesaplanır. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} v dx &= \int_0^{kh} v dx + \int_{kh}^{s(t)} v dx \\ &= h \left(\frac{v_0}{2} + v_1 + \dots + v_{k-1} + \frac{v_k}{2} \right) + \int_{kh}^{s(t)} v dx \end{aligned} \quad 5.15$$

ifadeleri elde edilir. (5.15) denkleminde $\int_{kh}^{s(t)} v dx$ integrali için enterpolasyon

uygulanırsa,

$$\int_{kh}^{s(t)} v dx = \left(\delta - \frac{\delta^2}{2h} \right) v_k + \frac{\delta^2}{2h} v_{k+1} \quad 5.16$$

$$\tilde{b}_i = h(1-\theta)f_i^n \quad i=1,2,\dots,M-1$$

şeklindedir.

(5.18) ifadesi Gauss, Sor ve Jacobi algoritmalarından herhangi biri kullanılarak çözülebilir. Nümerik çözümler v_j^{n+1} , $j=0,1,\dots,M$ için elde edilmesi halinde (5.6) ve

(5.7) ifadeleri kullanılarak r^{n+1} çözülebilir. Böylece (u,p) ikilisi aşağıdaki denklemler yardımıyla bulunur.

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)} \quad 5.19$$

$$p(t) = -\frac{r(t)}{r(t)} \quad 5.20$$

5.4.PDE ye Bağlı Çözüm

Eğer $r(t)$ biliniyor ise (5.9)-(5.13) sistemi aşağıdaki gibi düzenlenerek, uygun sonlu farklar uygulanarak çözüm nümerik olarak hesaplanabilir.

$$f(x,t).r(t)=F(x,t) \quad 5.21$$

$$v_x(0,t) = r(t)g_1(t) = \eta_1(t) \quad 5.23$$

$$v_x(1,t) = r(t)g_2(t) = \eta_2(t) \quad 5.24$$

$$v_t = v_{xx} + F(x,t) \quad 5.24$$

$$\frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \theta \left(\frac{v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{h^2} \right) + (1-\theta) \left(\frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{h^2} \right) + F(x,t) \quad 5.25$$

$h^2 F(x,t) = G(x,t)$ olmak üzere denklem genel formda aşağıdaki biçimi alır.

$$\begin{aligned} -\theta v_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_j^{n+1} - \theta v_{j+1}^{n+1} \\ = (1-\theta)v_{j-1}^n + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_j^n + (1-\theta)v_{j+1}^n + G(x,t) \end{aligned} \quad 5.26$$

$$\int_0^{s(t)} u dx = \frac{1}{2}(1+t) - \frac{\exp(-t^2)}{\pi} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 5.32$$

Burada,

$$s(t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

ile verilir. Denklemin bu koşulları sağlayan analitik çözümü,

$$u(x, t) = 1 - \exp(-t^2) \sin(\pi x)$$

$p(t)$ ve $r(t)$ 'nin analitik çözümü ise

$$p(t) = 1 - 2t$$

$$r(t) = \exp(t^2 - t)$$

denklemleri ile verilsin

(5.29-5.31) denklem sistemine (5.8) denklemine verilen dönüşümler uygulanırsa,

$$v_t = v_{xx} + (1 - \pi^2) \exp(-t) \sin(\pi x) - (1 - 2t) \exp(t^2 - t) \quad 0 < x < 1; 0 < t \leq 1 \quad 5.33$$

$$v(x, 0) = 1 - \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 5.34$$

$$v_x(0, t) = -\pi \exp(-t) \quad 0 < t \leq 1 \quad 5.35$$

$$v_x(1, t) = \pi \exp(-t) \quad 0 < t \leq 1 \quad 5.36$$

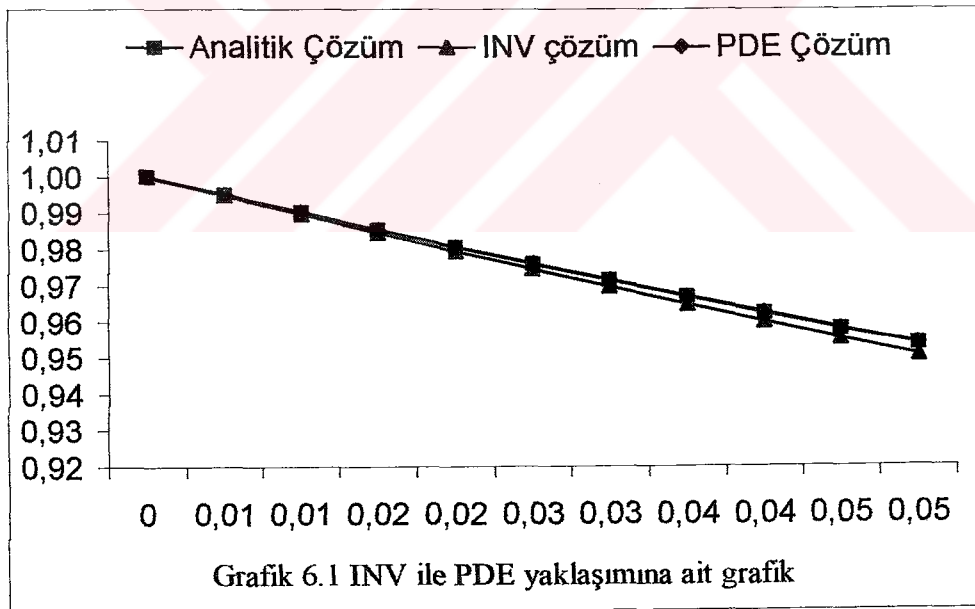
$$\int_0^{s(t)} v dx = \frac{1}{2}(1+t) - \frac{\exp(-t^2)}{\pi} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] \exp(t^2 - t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 5.37$$

ile verilen PDE olarak adlandırılan denklem sistemi elde edilir. Bu problemin çözümü diğer araştırmacıların yöntemleri ve burada geliştirilen tekniklerle yapılarak Bölüm 6 da tablo ve grafikler halinde verilmiştir.

6.SAYISAL SONUÇLAR VE GRAFİKSEL DEĞERLENDİRMELER

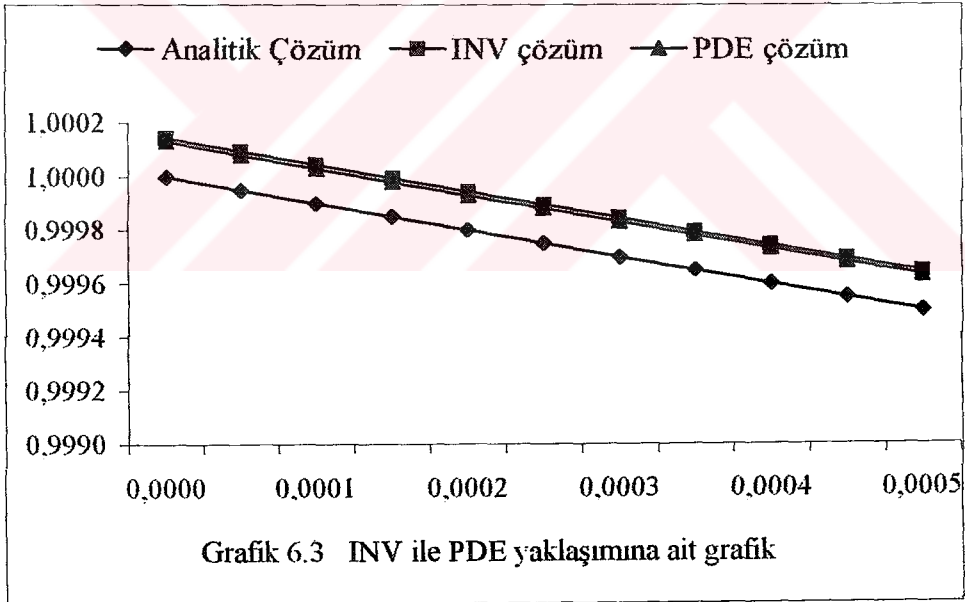
Çizelge 6.1 $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) için $r(t)$ 'nin PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Anolitik Çözüm	INV çözüm	PDE Çözüm	PDE Hata	INV Hata
0	1,000000000	1,000130512	1,000144093	0,000130514	0,000144099
0,005	0,995037355	0,994887523	0,995188314	0,000149832	0,000150960
0,01	0,990148844	0,989709609	0,990308838	0,000439234	0,000159993
0,015	0,985333615	0,984595519	0,985503956	0,000738095	0,000170342
0,02	0,980590831	0,979544006	0,980772044	0,001046827	0,000181212
0,025	0,975919671	0,974553876	0,976111572	0,001365804	0,000191900
0,03	0,971319328	0,969623917	0,971521059	0,001695419	0,000201730
0,035	0,966789008	0,964752957	0,966999072	0,002036066	0,000210064
0,04	0,962327933	0,959939802	0,962544210	0,002388140	0,000216277
0,045	0,957935338	0,955183292	0,958155195	0,002752054	0,000219857
0,05	0,953610473	0,950482278	0,953830849	0,003128197	0,000220375



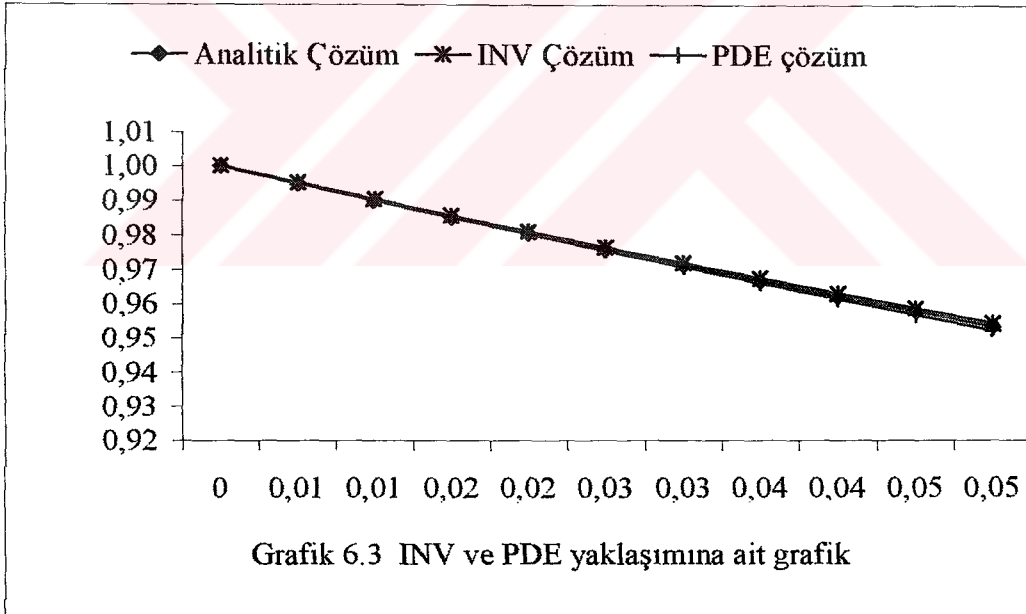
Çizelge 6.2 $\theta = 0$ (Implicit) için $r(t)$ 'nin PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Analitik Çözüm	INV çözüm	PDE çözüm	PDE Hata	INV hata
0,00000	1,000000000	1,000144094	1,000130514	0,000130514	0,000144094
0,00005	0,999950003	1,000094146	1,000080601	0,000130597	0,000144142
0,00010	0,999900015	1,000044207	1,000030696	0,000130681	0,000144192
0,00015	0,999850034	0,999994273	0,999980795	0,000130761	0,000144240
0,00020	0,999800060	0,999944350	0,999930903	0,000130843	0,000144290
0,00025	0,999750094	0,999894434	0,999881018	0,000130925	0,000144340
0,00030	0,999700135	0,999844525	0,999831140	0,000131005	0,000144390
0,00035	0,999650184	0,999794625	0,999781268	0,000131085	0,000144441
0,00040	0,999600240	0,999744731	0,999731400	0,000131160	0,000144491
0,00045	0,999550304	0,999694846	0,999681546	0,000131241	0,000144542
0,00050	0,999500375	0,999644969	0,999631693	0,000131319	0,000144594



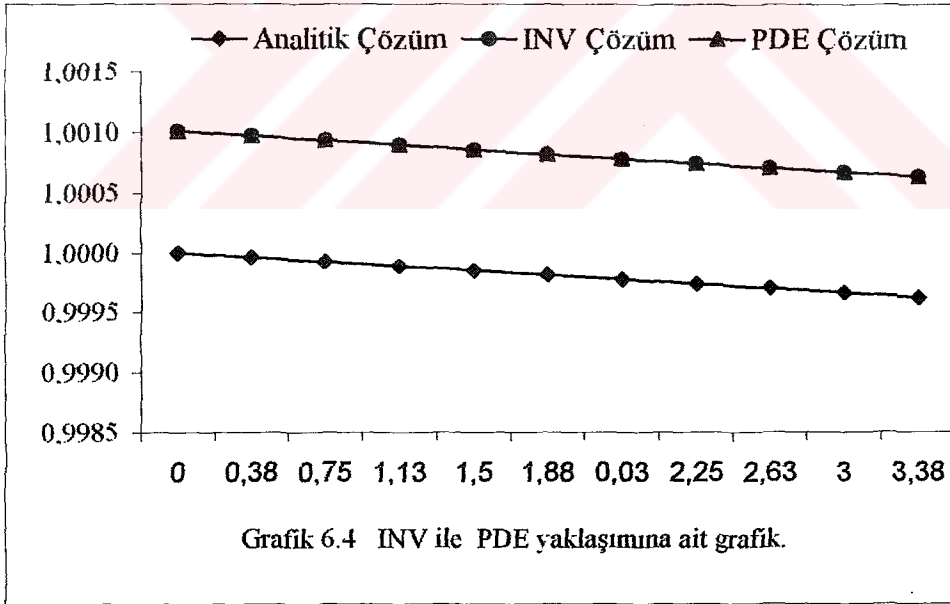
Çizelge 6.3 $\theta = 1$ (Explicit) için $r(t)$ 'nin INV ve PDE yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Analitik Çözüm	INV Çözüm	PDE çözüm	INV Hata	PDE hata
0	1,000000000	1,000144093	1,000130514	0,000130514	0,000130514
0,005	0,995037355	0,995268951	0,995107753	0,000130597	0,000070399
0,01	0,990148844	0,990469170	0,990145518	0,000130681	0,000003325
0,015	0,985333615	0,985743023	0,985242918	0,000130761	0,000090697
0,02	0,980590831	0,981088789	0,980399271	0,000130843	0,000191560
0,025	0,975919671	0,976504893	0,975614050	0,000130925	0,000305622
0,03	0,971319328	0,971989864	0,970886713	0,000131005	0,000432615
0,035	0,966789008	0,967542313	0,966216649	0,000131085	0,000572359
0,04	0,962327933	0,963160996	0,961603226	0,000131160	0,000724707
0,045	0,957935338	0,958844794	0,957045683	0,000131242	0,000889656
0,05	0,953610473	0,954592755	0,952543193	0,000131319	0,001067280



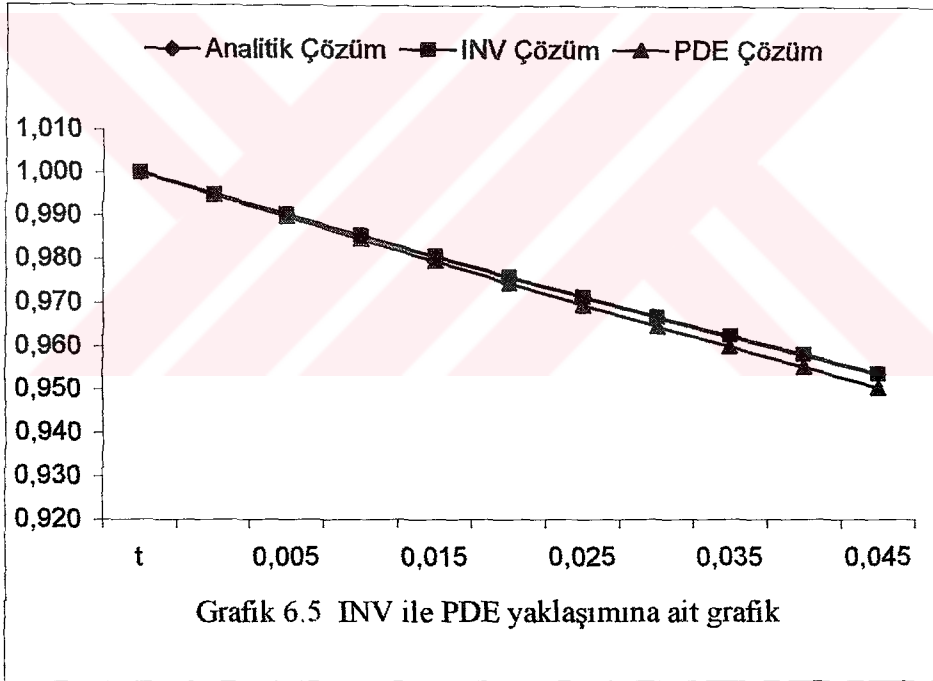
Çizelge 6.4 5-nokta explicit yönteminde $r(t)$ 'nin PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçları

t	Analitik Çözüm	INV Çözüm	PDE Çözüm	PDE Hata	INV Hata
0	1,000000000	1,001008498	1,001008498	0,001008498	0,001008498
0,375	0,999962502	1,000971724	1,000971195	0,001008693	0,001009222
0,75	0,999925008	1,000934054	1,000933772	0,001008764	0,001009046
1,125	0,999887519	1,000896817	1,000896411	0,001008892	0,001009298
1,5	0,999850034	1,000859241	1,000859007	0,001008973	0,001009207
1,875	0,999812553	1,000821914	1,000821642	0,001009089	0,001009361
0,03	0,999775076	1,000784388	1,000784254	0,001009178	0,001009312
2,25	0,999737603	1,000747031	1,000746893	0,001009290	0,001009428
2,625	0,999700135	1,000709531	1,000709515	0,001009380	0,001009396
3	0,999662671	1,000672160	1,000672159	0,001009488	0,001009489
3,375	0,999625211	1,000634683	1,000634792	0,001009581	0,001009472



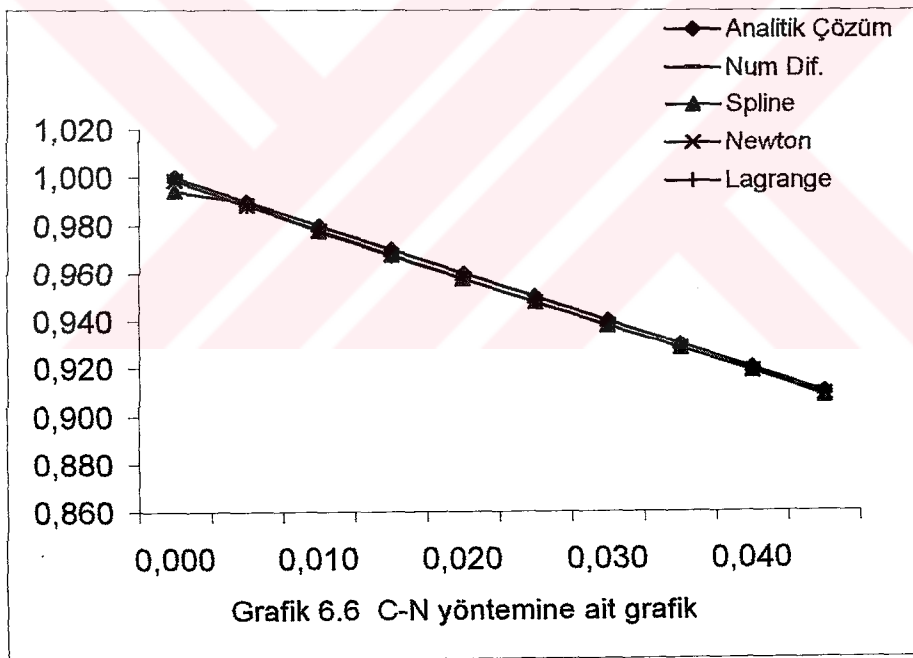
Çizelge 6.5 Crandall yönteminde $r(t)$ 'nin PDE ve INV yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Analitik Çözüm	INV Çözüm	PDE Çözüm	INV Hata	PDE Hata
0,000	1,000000000	1,000144093	1,000130514	0,000144093	0,000130514
0,005	0,995037355	0,995189023	0,994888217	0,000151669	0,000149138
0,010	0,990148844	0,990310262	0,989711004	0,000161418	0,000437840
0,015	0,985333615	0,985506118	0,984597618	0,000172503	0,000735997
0,020	0,980590831	0,980774952	0,979546816	0,000184121	0,001044015
0,025	0,975919671	0,976115217	0,974557397	0,000195546	0,001362274
0,030	0,971319328	0,971525431	0,969628163	0,000206103	0,001691165
0,035	0,966789008	0,967004147	0,964757924	0,000215139	0,002031084
0,040	0,962327933	0,962550007	0,959945497	0,000222074	0,002382436
0,045	0,957935338	0,958161734	0,955189719	0,000226396	0,002745620
0,050	0,953610473	0,953838153	0,950489439	0,000227680	0,003121034



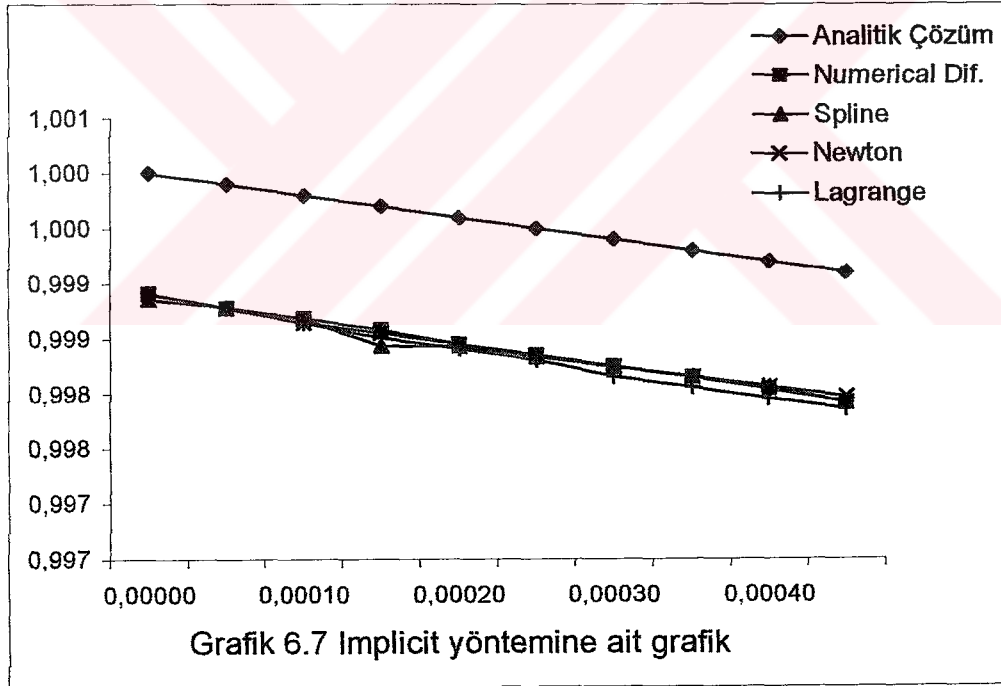
Çizelge 6.6 $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) için Kontrol parametresine ait sonuçlar.

t	Analitik Çözüm	Num Dif.	Spline	Newton	Lagrange
0,000	1	0,998641963	0,994252721	0,998641653	0,998641953
0,005	0,990000000	0,988280837	0,989436044	0,988280837	0,988280847
0,010	0,980000000	0,977912903	0,977529782	0,977743865	0,977740694
0,015	0,970000000	0,967707338	0,967741852	0,967552402	0,967317422
0,020	0,960000000	0,957652174	0,957578965	0,957652174	0,957651889
0,025	0,950000000	0,947738544	0,947690019	0,947586594	0,947586349
0,030	0,940000000	0,937962160	0,937931112	0,937817665	0,937817243
0,035	0,930000000	0,928320260	0,928201223	0,928320260	0,928319816
0,040	0,920000000	0,918802088	0,919033383	0,918669544	0,918669077
0,045	0,910000000	0,909389370	0,908323602	0,908865406	0,908864915



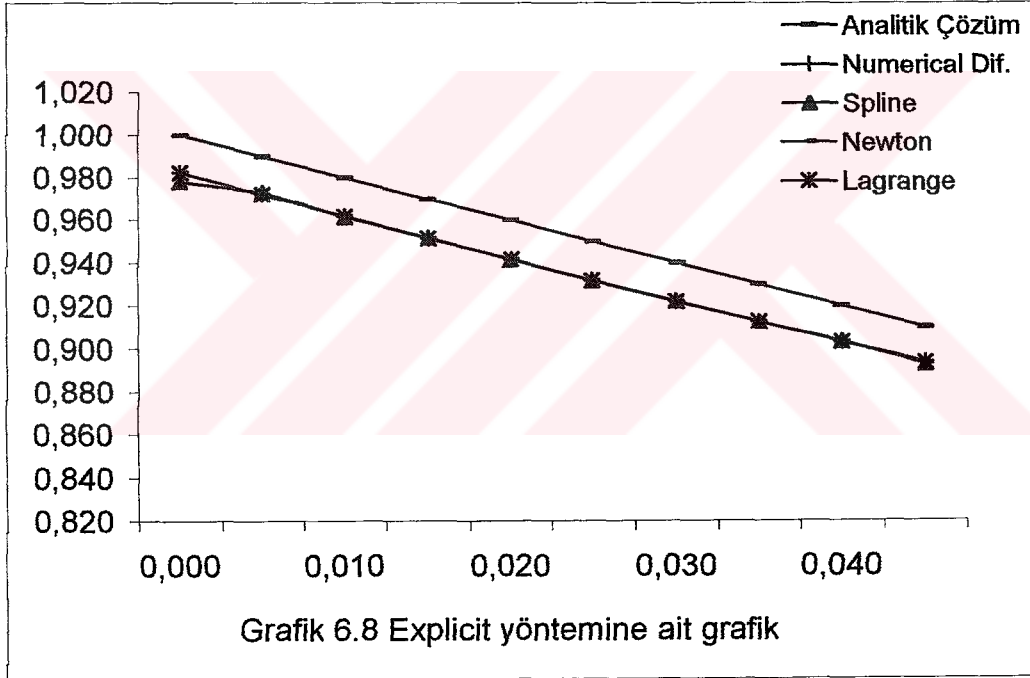
Çizelge 6.7 $teta:=0$ (Implicit) için Kontrol Parametresine ait sonuçlar.

t	Analitik Çözüm	Numerical Dif.	Spline	Newton	Lagrange
0,00000	1,000000000	0,998906064	0,998858853	0,998906064	0,998906064
0,00005	0,999900000	0,998775969	0,998780406	0,998775969	0,998775969
0,00010	0,999800000	0,998683851	0,998675327	0,998645853	0,998645853
0,00015	0,999700000	0,998578719	0,998432376	0,998552718	0,998505718
0,00020	0,999600000	0,998448564	0,998432376	0,998448564	0,998405562
0,00025	0,999500000	0,998348392	0,998335039	0,998344391	0,998305387
0,00030	0,999400000	0,998248202	0,998240702	0,998241201	0,998155188
0,00035	0,999300000	0,998150996	0,998157160	0,998150996	0,998054976
0,00040	0,999200000	0,998041769	0,998065038	0,998060774	0,997954747
0,00045	0,999100000	0,997919519	0,997911299	0,997970537	0,997854501



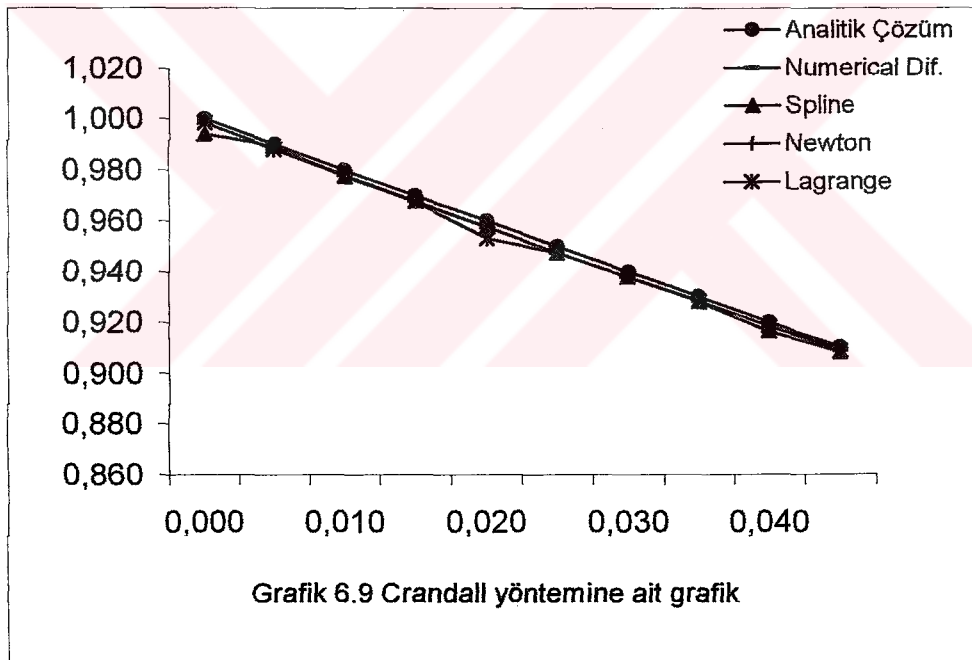
Çizelge 6.8 teta=1(explicit) için Kontrol parametresine ait sonuçlar

t	Analitik Çözüm	Numerical Dif.	Spline	Newton	Lagrange
0,000	1	0,982422980	0,978088076	0,982423020	0,982422990
0,005	0,990000000	0,972091272	0,973231644	0,972091272	0,972091261
0,010	0,980000000	0,961759163	0,961378090	0,961584639	0,961584649
0,015	0,970000000	0,951605112	0,951635449	0,951445172	0,951445436
0,020	0,960000000	0,941620137	0,941546760	0,941620137	0,941620381
0,025	0,950000000	0,931784926	0,931736973	0,931634328	0,931634553
0,030	0,940000000	0,922085819	0,922058298	0,921957762	0,921957762
0,035	0,930000000	0,912504640	0,912391856	0,912504485	0,912504485
0,040	0,920000000	0,903018129	0,903254549	0,902901804	0,902901804
0,045	0,910000000	0,893600409	0,892548187	0,893149659	0,893149659



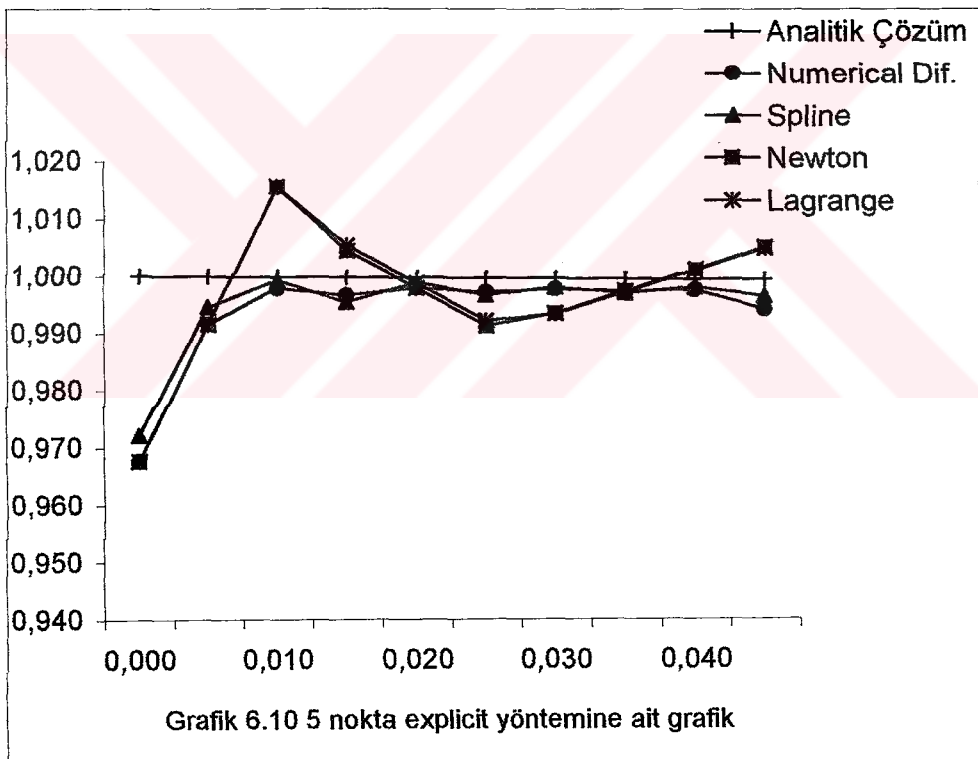
Çizelge 6.9 Crandall yöntemi için Kontrol parametresinin hesaplanması.

t	Analitik Çözüm	Numerical Dif.	Spline	Newton	Lagrange
0,000	1	0,998500903	0,994111033	0,998500883	0,998500923
0,005	0,990000000	0,988137024	0,989292729	0,988137024	0,988137708
0,010	0,980000000	0,977764805	0,977382079	0,977594111	0,977594030
0,015	0,970000000	0,967554612	0,967588316	0,967397728	0,967397850
0,020	0,960000000	0,957498046	0,957424602	0,957498046	0,952901543
0,025	0,950000000	0,947585002	0,947536174	0,947433053	0,947433340
0,030	0,940000000	0,937810789	0,937780423	0,937670885	0,937670977
0,035	0,930000000	0,928168067	0,928049944	0,928168067	0,928168098
0,040	0,920000000	0,918644521	0,916363061	0,918511894	0,918511863
0,045	0,910000000	0,909225801	0,908159886	0,908702257	0,908702162



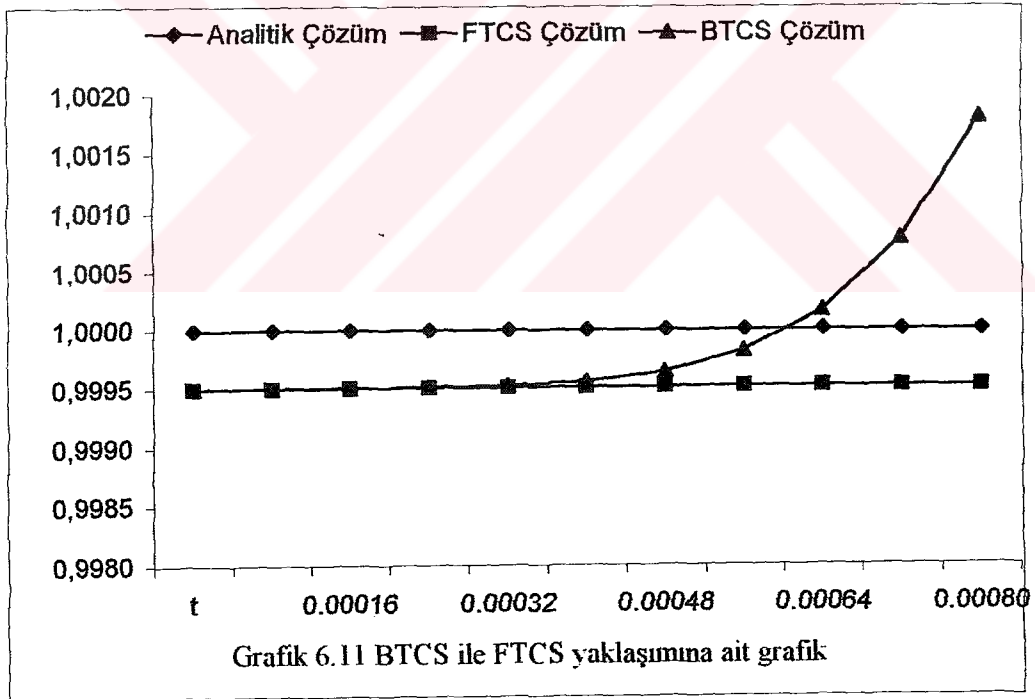
Çizelge 6.10 5 nokta explicit yöntemi (F-P) için Kontrol Parametresinin sonuçları

t	Analitik Çözüm	Numerical Dif.	Spline	Newton	Lagrange
0,000	1	0,967717392	0,972212129	0,967717392	0,967724052
0,005	0,999925000	0,991623083	0,994576308	0,991623083	0,991623915
0,010	0,999850000	0,997827975	0,999227002	1,015531439	1,015526443
0,015	0,999775000	0,996626209	0,995419190	1,004445863	1,005371271
0,020	0,999700000	0,997835953	0,998799433	0,997849274	0,998733878
0,025	0,999625000	0,997207048	0,996612936	0,991251943	0,992170582
0,030	0,999550000	0,997670773	0,998047563	0,993500710	0,993345831
0,035	0,999475000	0,997348283	0,997011353	0,997348283	0,997130363
0,040	0,999400000	0,997572192	0,997999386	1,001196287	1,000989767
0,045	0,999325000	0,994171758	0,996488059	1,005044723	1,004812379



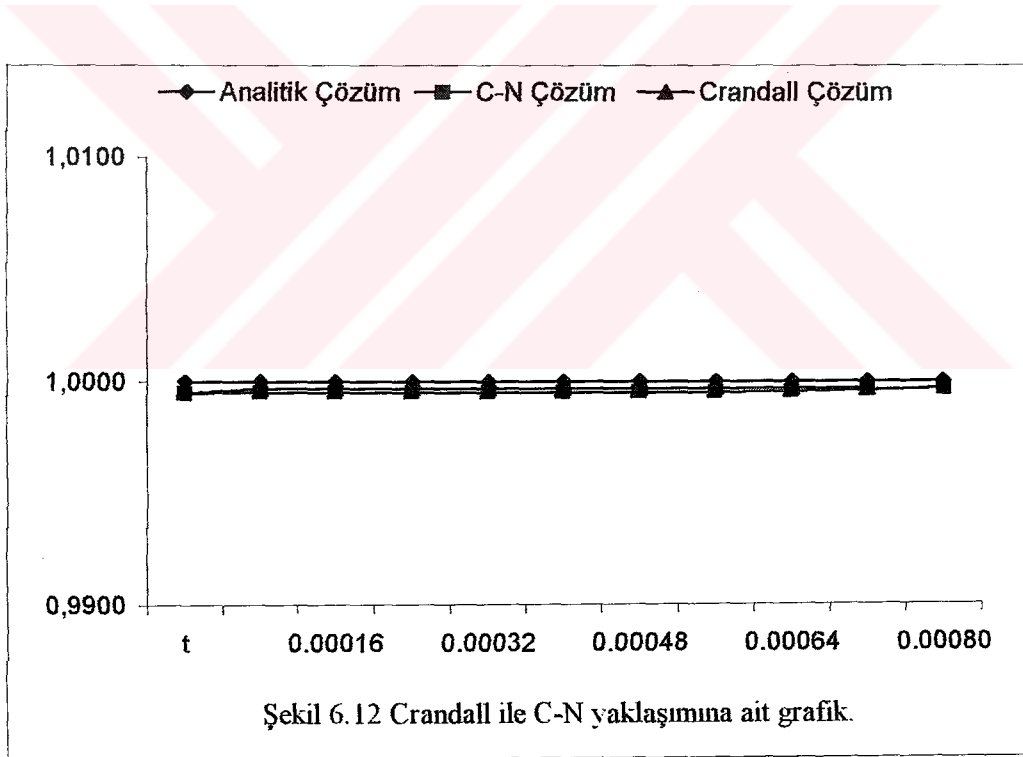
Çizelge 6.11 P(t)'nin BTCS ve FTCS yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Anolitik Çözüm	FTCS Çözüm	FTCS Hata	BTCS Çözüm	BTCS Hata
0.00008	1,000000000	0,999502097	0,000497904	0,999502097	0,000497904
0.00016	1,000000006	0,999504592	0,000495414	0,999504740	0,000495266
0.00024	1,000000026	0,999509136	0,000490890	0,999506336	0,000493690
0.00032	1,000000058	0,999511028	0,000489030	0,999515744	0,000484314
0.00040	1,000000102	0,999513499	0,000486604	0,999527054	0,000473048
0.00048	1,000000160	0,999514928	0,000485233	0,999559419	0,000440741
0.00056	1,000000230	0,999518272	0,000481958	0,999643635	0,000356595
0.00064	1,000000314	0,999520710	0,000479605	0,999819611	0,000180703
0.00072	1,000000410	0,999520502	0,000479909	1,000164994	0,000164584
0.00080	1,000000518	0,999523807	0,000476712	1,000782606	0,000782088
0.00088	1,000000640	0,999523807	0,000473233	1,001811809	0,001811169



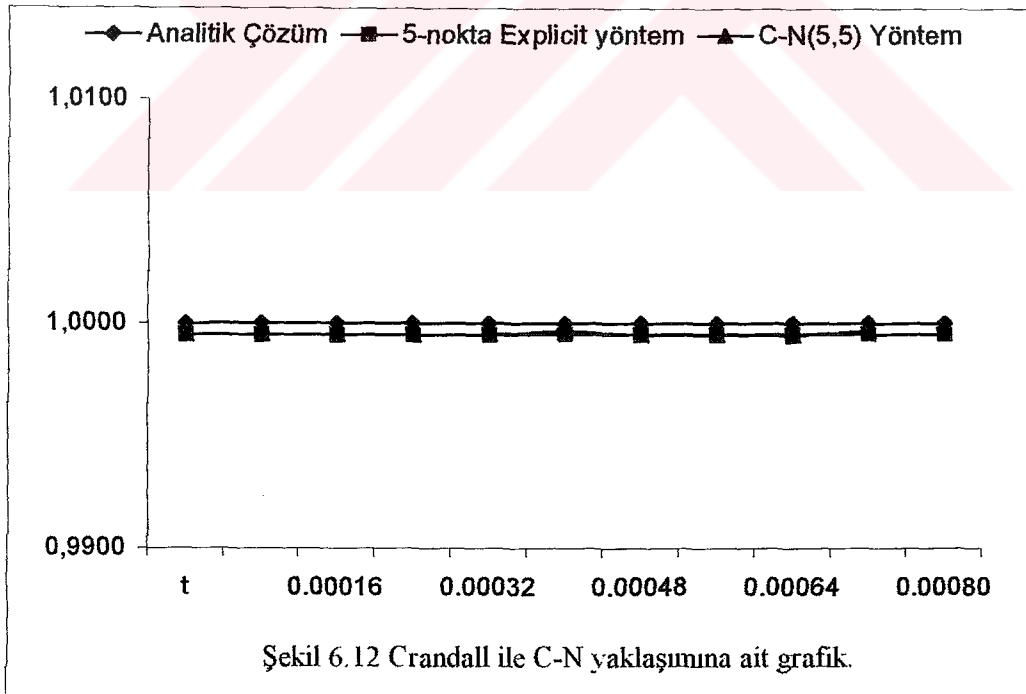
Çizelge 6.12 $p(t)$ 'nin C-N ve Crandall yaklaşımlarına ait sonuçlar.

t	Analitik Çözüm	C-N Çözüm	C-N Hata	Crandall Çözüm	Crandall Hata
0.00008	1,000000000	0,999502097	0,000497904	0,999502097	0,000497904
0.00016	1,000000006	0,999509011	0,000490995	0,999684020	0,000490995
0.00024	1,000000026	0,999507369	0,000492657	0,999681204	0,000492657
0.00032	1,000000058	0,999513828	0,000486230	0,999681476	0,000486230
0.00040	1,000000102	0,999514531	0,000485571	0,999681882	0,000485571
0.00048	1,000000160	0,999517431	0,000482729	0,999682427	0,000482729
0.00056	1,000000230	0,999516356	0,000483874	0,999686062	0,000483874
0.00064	1,000000314	0,999530432	0,000469882	0,999683938	0,000469882
0.00072	1,000000410	0,999544953	0,000455457	0,999684904	0,000455457
0.00080	1,000000518	0,999596731	0,000403788	0,999686003	0,000403788
0.00088	1,000000640	0,999687249	0,000313391	0,999690190	0,000313391



Çizelge 6.13 $P(t)$ 'nin 5 nokta explicit yöntem ve C-N(5,5) yaklaşımlarına ait sonuçları.

t	Anolitik Çözüm	5-nokta Explicit yöntem	5-nokta Explicit hata	C-N(5,5) Yöntem	C-N(5,5) hata
0.00008	1,000000000	0,999502097	0,000497904	0,999502097	0,000497904
0.00016	1,000000006	0,999506360	0,000493646	0,999504153	0,000290995
0.00024	1,000000026	0,999508401	0,000491625	0,999497943	0,000492657
0.00032	1,000000058	0,999515157	0,000486230	0,999506757	0,000486230
0.00040	1,000000102	0,999516596	0,000485571	0,999508634	0,000284856
0.00048	1,000000160	0,999519792	0,000465429	0,999682427	0,000482339
0.00056	1,000000230	0,999522105	0,000487741	0,999499322	0,000483874
0.00064	1,000000314	0,999521890	0,000464482	0,999494853	0,000461488
0.00072	1,000000410	0,999523592	0,000455122	0,999484477	0,000455457
0.00080	1,000000518	0,999525426	0,000403418	0,999686005	0,000403788
0.00088	1,000000640	0,999532710	0,000313124	0,999690190	0,000313391



7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde bir boyutlu ters problemlere farklı yaklaşımlar sonlu farklar kullanılarak uygulanmıştır. Bu yaklaşımların kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılarak, Bölüm 6 da hatalar, tablo ve grafikler aracılığı ile verilmiştir.

Açık yöntem olarak (1,3) FTCS ve 5- nokta FTCS, kapalı yöntem olarak (3,1) BTCS, (3,3) Crandall, (3,3) Crank-Nicolson ve (5,5) Crank-Nicolson yöntemleri uygulanmıştır. Bu yöntemlerin sonuçları kullanılarak, ters problemlerin çözümünde karşımıza çıkan "Kontrol Parametresi" yaklaşık türevlerin hesaplanmasında kullanılan enterpolasyon tekniklerinden yararlanılarak belirlenmiştir. Dört farklı enterpolasyon tekniği kullanılmış sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılarak tablo ve grafikler aracılığı ile oluşturulmuştur.

Burada kullanılan yöntemler hata açısı bakımından ele alındığında diğer bilinen yöntemlerle benzer sonuçlar elde edilmiştir.

İleride ters problemler üzerine yapılacak çalışmalarda elde edilecek yaklaşık çözümlerin daha hassas ve kolay hesaplama tekniklerini beraberinde getireceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Dehghan, M. 2003. Numerical Solution of one Dimensional Parabolic Inverse Problem. *Appl. Math. Comp.*, 136, 333-344

Dehghan, M. 2003. Finding a Control Parameter in One-Dimensional Parabolic Equations. *Appl. Math. Com.*, 135, 491-503

Dehghan, M. 2001. An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation. *Appl. Math. Modelling*, 25, 743-75

Hildebrand, F.B., 1987 *Introduction to Numerical Analysis*, Dover Publications, New York, 653p

Smith, G.D. 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 330p.

Türker, S., Engin, C., 1999, *Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınları, Adapazarı, 477p.

Wang, S., Lin, Y. 1989. A Finite Difference Solution to an Inverse Problem for Determining a Control Function in a Parabolic Partial Diferential Equation . *Inverse Problem*, 5, 631-640

Warming R.F., Hyett B.J., 1973. The Modified Equation Approach to the Stability And Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods. *j. Compt. Physics.*, 14, 159-179

Ek1:

```
teta:=1/2
```

```
#Bir boyutlu difüzyon denklemini,türevli sınır koşulları için ele alınmıştır.
```

```
diff(u(x,t),t)=diff(u(x,t),x,x)+p*u+f(x,t);
```

```
teta:=1/2;
```

```
x>0;x<1; t>0; t<=T;
```

```
restart;
```

```
#x boyutunun ve t zaman boyutunun kesikli hale getirilmesi
```

```
h:=0.01:
```

```
dx:=h:
```

```
x:=array(1..101):
```

```
x[1]:=0:
```

```
for i to 100 do x[i+1]:=x[i]+dx od:
```

```
dt:=h/2;
```

```
t[1]:=0:
```

```
for i to 10 do t[i+1]:=t[i]+dt od:
```

```
k:=50:
```

```
#Başlangıç ve sınır koşullarının tanımlanması
```

```
g1:=array(1..11):
```

```
g2:=array(1..11):
```

```
for i to 11 do g1[i]:=evalf(-Pi*exp(-t[i]^2)) od:
```

```
for i to 11 do g2[i]:=evalf(Pi*exp(-t[i]^2)) od:
```

```
# p(t),kaynak parametresinin analitik çözümünün tanımlanması.
```

```
p:=array(1..11):
```

```
for i to 11 do p[i]:=1-2*t[i] od:
```

```
# Tam çözümün ve f fonksiyonunun tanımlanması.
```

```

tr:=array(1..11):
for i to 11 do tr[i]:=evalf(exp(t[i]^2-t[i])) od:
f:=array(1..101,1..11):
for i to 101 do for j to 11 do f[i,j]:=evalf((1-Pi^2)*exp(-t[j]^2)*sin(Pi*x[i])-((1-
2*t[j]))) od ; od;

#Matrislerin tanımlanması

a:=array(1..101,1..11):
for j to 10 do a[1,j+1]:=-h*teta*f[1,j+1]+2*teta*g1[j+1] od:
for i from 2 to 100 do for j to 10 do a[i,j+1]:=-h*teta*f[i,j+1] od; od;
for j to 10 do a[101,j+1]:=-h*teta*f[101,j+1]-2*teta*g2[j+1] od:
b:=array(1..101,1..11):
for j to 11 do b[1,j]:=h*(1-teta)*f[1,j]+2*(teta-1)*g1[j] od:
for j to 11 do for i from 2 to 100 do b[i,j]:=h*(1-teta)*f[i,j] od; od;
for j to 11 do b[101,j]:=h*(1-teta)*f[101,j]+2*(1-teta)*g2[j] od:
with(linalg):
teta:=1/2;
delta:=array(1..11):
for i to 11 do delta[i]:=1/2*t[i] od:
A:=array(1..101,1..101):
for i to 101 do for j to 101 do A[i,j]:=0 od; od;
for i to 101 do A[i,i]:=(h^2/dt)+2*teta od:
A[1,2]:=-2*teta:
A[101,100]:=-2*teta:
for i from 2 to 100 do A[i,i-1]:=-teta; A[i,i+1]:=-teta od:
B:=array(1..101,1..101):
for i to 101 do for j to 101 do B[i,j]:=0 od; od;
for i to 101 do B[i,i]:=(h^2/dt)+2*(teta-1) od:
B[1,2]:=2*(1-teta):
B[101,100]:=2*(1-teta):
for i from 2 to 100 do B[i,i-1]:=1-teta; B[i,i+1]:=1-teta od:
for n to 11 do AA[n]:=array(1..101,1..101) od:

```

```

for n to 10 do for i to 101 do for j to 101 do AA[n+1][i,j]:=0 od; od;od;
for j to 10 do for i to 101 do AA[j+1][i,1]:=1/2*a[i,j+1] od; od;
for j to 10 do for n from 2 to 50 do for i to 101 do AA[j+1][i,n]:=a[i,j+1] od; od; od;
for j to 10 do for i to 101 do AA[j+1][i,51]:=(1/2+(delta[j]/h)-
(delta[j]^2/(2*h^2)))*a[i,j+1] od; od;
for j to 10 do for i to 101 do AA[i,52]:=(delta[j]^2/(2*h^2))*a[i,j+1] od; od;
with(linalg):
E:=array(1..101):
for n to 11 do AAAA[n]:=array(1..101,1..101) od:
for n to 11 do AAA[n]:=array(1..101,1..101) od:
for i to 11 do E[i]:=evalf((1/2*(1+t[i]))-(exp(-t[i]^2)/Pi)*(1+sin(Pi*t[i]/2))) od:
with(linalg):
for n to 10 do for i to 101 do for j to 101 do
AAA[n+1][i,j]:=(h^2/E[n+1])*AA[n+1][i,j] od;od; od;
for n to 10 do AAAA[n+1]:=matadd(A,AAA[n+1]) od:
for n to 11 do BB[n]:=array(1..101,1..101) od:
for n to 10 do for i to 101 do for j to 101 do BB[n][i,j]:=0 od; od;od;
for j to 10 do for i to 101 do BB[j][i,1]:=1/2*b[i,j] od; od;
for j to 10 do for n from 2 to 50 do for i to 101 do BB[j][i,n]:=b[i,j] od; od; od;
for j to 10 do for i to 101 do BB[j][i,51]:=(1/2+(delta[j]/h)-
(delta[j]^2/(2*h^2)))*b[i,j] od; od;
for j to 10 do for i to 101 do BB[j][i,52]:=(delta[j]^2/(2*h^2))*b[i,j] od; od;
for n to 11 do BBB[n]:=array(1..101,1..101) od:
for n to 11 do BBBB[n]:=array(1..101,1..101) od:
for i to 11 do E[i]:=evalf((1/2*(1+t[i]))-(exp(-t[i]^2)/Pi)*(1+sin(Pi*t[i]/2))) od:
with(linalg):

#Gauss algoritmasının tanımlanması

for n to 10 do for i to 101 do for j to 101 do BBB[n][i,j]:=(h^2/E[n])*BB[n][i,j]
od;od; od; for n to 10 do BBBB[n]:=matadd(B,BBB[n]) od:
ngauss:=proc(Aaug) local n,k,i,m,j,x,s;
n:=rowdim(Aaug);

```

```

x:=vector(n);
for k from 1 to n-1 do for i from k+1 to n do
m:=Aaug[i,k]/Aaug[k,k];
for j from 1 to n+1 do Aaug[i,j]:=Aaug[i,j]-m*Aaug[k,j];
od;
od;
od;
x[n]:=Aaug[n,n+1]/Aaug[n,n];
for i from n-1 to 1 by -1 do
s:=Aaug[i,n+1];
for j from i+1 to n do s:=s-Aaug[i,j]*x[j]; od;
x[i]:=s/Aaug[i,i];
od;
RETURN(op(x));
save ngauss,'ngauss.m' ;
end:
yak:=array(1..101,1..11);
for i to 101 do yak[i,1]:=evalf(1-sin(Pi*x[i])) od:
C:=array(1..101) ;
for i to 101 do yak[i,1] od:
with(linalg):

```

#Gauss algoritması kullanılarak,yaklaşık çözümlerin bulunması

```

for j to 10 do for i to 101 do C[i]:=yak[i,j] od;
s:=array(1..101);s:=multiply((BBBB[j],C)) ;
Aaug:=augment(AAAA[j+1],s);
uc:=array(1..101);
uc:=ngauss(Aaug);
for i to 101 do yak[i,j+1]:=uc[i] od:
od:

```

#Yaklaşık çözümden yararlanarak r(t) nin hesaplanması


```

r:=array(1..11);
for i to 11 do delta[i]:=1/2*t[i] od:
for i to 11 do E[i]:=evalf(((1/2*(1+t[i]))-(exp(-t[i]^2)/Pi)*(1+sin(Pi*t[i]/2)))) od:
for i to 11 do tr[i]:=evalf(exp(t[i]^2-t[i])) od:
for j to 11 do
r[j]:=(h/E[j])*(yak[1,j]/2+yak[2,j]+yak[3,j]+yak[4,j]+yak[5,j]+yak[6,j]+yak[7,j]+yak
[8,j]+yak[9,j]+yak[10,j]+yak[11,j]+yak[12,j]+yak[13,j]+yak[14,j]+yak[15,j]+yak[16,
j]+yak[17,j]+yak[18,j]+yak[19,j]+yak[20,j]+yak[21,j]+yak[22,j]+yak[23,j]+yak[24,j]
+yak[25,j]+yak[26,j]+yak[27,j]+yak[28,j]+yak[29,j]+yak[30,j]+yak[31,j]+yak[32,j]+
yak[33,j]+yak[34,j]+yak[35,j]+yak[36,j]+yak[37,j]+yak[38,j]+yak[39,j]+yak[40,j]+y
ak[41,j]+yak[42,j]+yak[43,j]+yak[44,j]+yak[45,j]+yak[46,j]+yak[47,j]+yak[48,j]+ya
k[49,j]+yak[50,j]+(1/2+delta[j])/h-
delta[j]^2/h^2)*yak[51,j]+(delta[j]^2/h^2)*yak[52,j]) od;
with(linalg):
hataa:=array(1..11);
eksir:=array(1..11);
for i to 11 do eksir[i]:=-r[i] od:

#Hataların bulunması

hata:=matadd(tr,eksir);

```

Ek 2:

#Crank-nicolson yaklaşımında spline metodu kullanılarak $p(t)$ ' nin hesaplanması.

restart;

readlib(spline):

h:=evalf(1/200);

#Zaman aralıklarına göre spline fonksiyonlarının belirlenmesi

spline([0,h,2*h,3*h,4*h,5*h,6*h,7*h,8*h,9*h,10*h],[1.000144093,.9951883144,.9903088376,.9855039565,.9807720435,.9761115717,.9715210579,.9669990718,.9625442096,.9581551955,.9538308481],t,cubic);

t:=array(1..11);

t[1]:=0;

for i to 10 do t[i+1]:=t[i]+h od;

#Spline fonksiyonları kullanılarak $p(t)$ kaynak parametresinin bulunması

diff(1.000144093-.9943959858*t+129.6106314*t^3,t);

s[1]:=1.000144093-.9943959858*t[1]+129.6106314*t[1]^3;

pp[1]:=-.9943959858+388.8318942*t[1]^2;

p[1]:=-pp[1]/s[1];;

diff(1.000164999-1.006939570*t+2.508716830*t^2-37.63715724*t^3,t);

pp[2]:=-1.006939570+5.017433660*t[2]-112.9114717*t[2]^2;

s[2]:=1.000164999-1.006939570*t[2]+2.508716830*t[2]^2-37.63715724*t[2]^3;

p[2]:=-pp[2]/s[2];

diff(1.000120068-.9934606810*t+1.160827915*t^2+7.292473241*t^3,t);

pp[3]:=-.9934606810+2.321655830*t[3]+21.87741972*t[3]^2;

s[3]:=1.000120068-.9934606810*t[3]+1.160827915*t[3]^2+7.292473241*t[3]^3;

p[3]:=-pp[3]/s[3];

diff(1.000160122-1.001471416*t+1.694876935*t^2-4.575282767*t^3,t);

pp[4]:=-1.001471416+3.389753870*t[4]-13.72584830*t[4]^2;

s[4]:=1.000160122-1.001471416*t[4]+1.694876935*t[4]^2-4.575282767*t[4]^3;

p[4]:=-pp[4]/s[4];

diff(1.000132920-.9973909338*t+1.490852822*t^2-1.174880880*t^3,t);

s[5]:=1.000132920-.9973909338*t[5]+1.490852822*t[5]^2-1.174880880*t[5]^3;

```

pp[5]:=-.9973909338+2.981705644*t[5]-3.524642640*t[5]^2;
p[5]:=-pp[5]/s[5];
diff(1.000155396-1.000088013*t+1.598735989*t^2-2.613323104*t^3,t);
s[6]:=1.000155396-1.000088013*t[6]+1.598735989*t[6]^2-2.613323104*t[6]^3;
pp[6]:=-1.000088013+3.197471978*t[6]-7.839969312*t[6]^2;
p[6]:=-pp[6]/s[6];
diff(1.000079531-.9925015573*t+1.345854138*t^2+.1964752451*t^3,t);
s[7]:=1.000079531-.9925015573*t[7]+1.345854138*t[7]^2+.1964752451*t[7]^3;
pp[7]:=-.9925015573+2.691708276*t[7]+.5894257353*t[7]^2;
p[7]:=-pp[7]/s[7];
diff(1.000491198-1.027787249*t+2.354016758*t^2-9.405073519*t^3,t);
s[8]:=1.000491198-1.027787249*t[8]+2.354016758*t[8]^2-9.405073519*t[8]^3;
pp[8]:=-1.027787249+4.708033516*t[8]-28.21522056*t[8]^2;
p[8]:=-pp[8]/s[8];
diff(.9981474442-.8520057509*t-2.040520701*t^2+27.21607198*t^3,t);
s[9]:=.9981474442-.8520057509*t[9]-2.040520701*t[9]^2+27.21607198*t[9]^3;
pp[9]:=-.8520057509-4.081041402*t[9]+81.64821594*t[9]^2;
p[9]:=-pp[9]/s[9];
diff(1.010551926-1.678971240*t+16.33649016*t^2-108.9099344*t^3,t);
s[10]:=1.010551926-1.678971240*t[10]+16.33649016*t[10]^2-

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Berna BÜLBÜL

Doğum Yeri : Siverek

Doğum Tarihi : 1980

Medeni Hali : Bekar

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : Ahmet Adnan Saygun Lisesi 1994-1998

Lisans : Muğla Ün. Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü 1998-2002

Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

Muğla Üniversitesinde araştırma görevlisi

Muğla (2002-)