

**T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KISITLANMIŞ YAKLAŞIMLARIN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BİR UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERHAN AKTAŞ BAŞÇI

**HAZİRAN – 2006
MUĞLA**

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜLSU danışmanlığında Ferhan AKTAŞ BAŞÇI tarafından hazırlanan bu çalışma, 14/ 06 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/ oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Mehmet SEZER	İmza :
Üye	: Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY	İmza :
Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜLSU	İmza :
Üye	:	İmza :
Üye	:	İmza :

ÖNSÖZ

Matematik, birçok bilimsel ve günlük olayları değerlendirmek, onları uygun modellerle açıklamak, ortaya çıkan problemlere nasıl yaklaşılacağını akıl yürüterek bulmak için kullanılan bir araçlar topluluğudur. Matematikçi de bu araçlar topluluğunu tanıyan, onları ihtiyaca göre geliştiren ve yenilerini yaratabilen kimsedir. Yaratabilmek için doğru düşünmek ve düşünülenleri formüleştirebilmek gerekir. Buna göre her matematikçi, düşünülen konuya ilişkin teoriyi bilmek zorundadır.

Konu içinde problem çözümü bir ayrıntıdan ibarettir. Problemlerin çözümleri ile birlikte okuyarak öğrenmek, doktordan alınan bir reçeteyi uygulamaktan farksızdır. Reçeteyi uygulayan hasta değil fakat yazan doktor olmak için bu tezi hazırlarken, bilgileriyle ve titiz çalışmalarıyla her zaman destek veren, yol gösteren, emeklerini üzerimde bir sorumluluk olarak taşıyacağım çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜLSU' ya , topoloji alanındaki çalışmaları ve sevecen tavırlarıyla her zaman desteğini hissettiğim değerli hocam Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY' e sonsuz saygılarımla teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Berna BÜLBÜL' e , değerli arkadaşım Arş. Gör. Gamze NAGANLU' ya beni yetiştiren bu günlere gelmemi sağlayan emektar annem Aynur AKTAŞ' a ve hayatın her alanında beni destekleyen babam Mehmet AKTAŞ' a çalışmalarım sırasında beni yüreklendiren, her zaman yanımda olan , bana kuvvet veren, desteğini ve yardımlarını gördüğüm değerli eşim Murat BAŞÇI' ye teşekkür ederim.

Ferhan AKTAŞ BAŞÇI

Muğla 2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
ÇİZELGELER DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ	1
1.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	2
1.2. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	4
1.3. Taylor Serileri ile Türetilen Yaklaşımlar.....	5
1.4. Rasyonel Pade Yaklaşımları.....	6
2. KAYNAK ÖZETLERİ	9
2.1. Kısmi Türevler için bir boyutlu Sonlu fark Yaklaşımları.....	9
2.2. Explicit (Açık) Yöntemler.....	10
2.3. Implicit(Kapalı) Yöntemler.....	15
2.4. Crank-Nicolson Yöntemi.....	16
2.5. BTCS Yöntemi.....	18
2.6. FTCS Yöntemi.....	19
2.7. Yakınsaklığın Analitik Yorumu.....	19
2.8. Kararlılık Analizi.....	22
2.9. Kararlılık için Von-Neuman Yöntemi	22
3. MATERYAL VE YÖNTEM.	
3.1. Taylor Serileri ile türetilen Kısıtlanmış Yaklaşımlar.....	24
3.2. Kısıtlanmış Rasyonel Yaklaşımlar.....	24

3.3. Adomian Polinomları.....	31
3.4. Adomian Ayırıştırma Yöntemi.....	32
3.5. Sayısal bir örnek.....	34
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	41
4.1. Sayısal Sonuçlar ve Grafiksel Değerlendirmeler.....	41
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	55
KAYNAKLAR	56
EKLER.....	57
Ek1 : Taylor yöntemi için Maple V Programı.....	57
Ek2 : C-N yöntemi için Maple V Programı.....	60
ÖZGEÇMİŞ	63

**KISITLANMIŞ YAKLAŞIMLARIN PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BİR UYGULAMASI**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ferhan AKTAŞ BAŞÇI
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
2006

ÖZET

Bu çalışmada birinci mertebeden parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kısıtlanmış yaklaşımlar kullanıldı. Sınır değer problemlerini çözmek için birçok sonlu fark yöntemleri uygulandı.

Bu yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçlar daha önceki araştırmacıların sonuçları ile karşılaştırıldı.

Türkçe Anahtar Kelimeler : Taylor yaklaşımları, Sonlu farklar, Kısıtlanmış Yaklaşımlar

Sayfa Adedi : 63

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜLSU

**AN APPLICATION OF RESTRICTIVE APPROXIMATION TO
PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
(M. Sc. Thesis)
MUGLA UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
2006**

ABSTRACT

In this study, restrictive approximations to the solution of the first-order parabolic partial differential equation are studied.

Several finite difference scheme are presented for solving second order parabolic partial differential equation

The numerical results obtained of present method are compared with the earlier authors.

Key Words : Taylor approximations, Finite differences, Restrictive approximations

Page Number: 63

Adviser : Dr. Mustafa GÜLSU

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- PDE** : Kısmi Türevli Dif. Denk.Yaklaşımı
C-N : Crank Nicolson Yöntemi
K-C-N : Kısıtlanmış Crank Nicolson Yöntemi
A-D-M : Adomian Decomposition metodu
BTCS : Backward Time Centered space
FTCS : Forward Time Centered space
 $\rho(A)$: Spektral Yarıçap

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 4.1 t=0.25 için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait grafik....	41
Şekil 4.2 t=0.33 için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait grafik...	42
Şekil 4.3 t=0.5 için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait grafik....	43
Şekil 4.4 t=0.75 için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait grafik...	44
Şekil 4.5 t=0.25 için $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) ve (K-C-N) yöntemlerine ait grafik	45
Şekil 4.6 t=0.33 için $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) ve (K-C-N) yöntemlerine ait grafik.....	46
Şekil 4.7 t=0.5 için $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) ve (K-C-N) yöntemlerine ait grafik	47
Şekil 4.8 t=0.75 için $\theta = \frac{1}{2}$ (C-N) ve (K-C-N) yöntemlerine grafik	48
Şekil 4.9 t=0.25 için Taylor, (C-N) ve A-D-M yöntemlerine ait grafik.....	49
Şekil 4.10 t=0.33 için Taylor, (C-N) ve A-D-M yöntemlerine ait grafik.....	50
Şekil 4.11 t=0.5 için Taylor, (C-N) ve A-D-M yöntemlerine ait grafik.....	51
Şekil 4.12 t=0.25 için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yöntemlerine ait grafik..	52
Şekil 4.13 t=0.33 için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yöntemlerinin ait grafik..	53
Şekil 4.14 t=0.5 için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yöntemlerinin ait grafik...	54

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge No</u>	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 1.1 Pade açılımı ve hata terimine ait sonuçlar.....	8
Çizelge 2.1 $x=0.3$ için explicit yöntem ve analitik çözüme ait sonuçlar.....	14
Çizelge 2.2 $x=0.5$ için explicit yöntem ve analitik çözüme ait sonuçlar.....	14
Çizelge 4.1 $t=0.25$ için Taylor ve K-Taylor yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)..	41
Çizelge 4.2 $t=0.33$ için Taylor ve K-Taylor yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)..	42
Çizelge 4.3 $t=0.5$ için Taylor ve K-Taylor yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)....	43
Çizelge 4.4 $t=0.75$ için Taylor ve K- Taylor yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)..	44
Çizelge 4.5 $t=0.25$ için (C-N) ve (K-C-N) yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)....	45
Çizelge 4.6 $t=0.33$ için (C-N) ve (K-C-N) yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)....	46
Çizelge 4.7 $t=0.5$ için (C-N) ve (K-C-N) yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)...	47
Çizelge 4.8 $t=0.75$ için (C-N) ve (K-C-N) yaklaşımlarına ait sonuçlar($h=0.1$)....	48
Çizelge 4.9 $t=0.25$ için Taylor, (C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar...	49
Çizelge 4.10 $t=0.33$ için Taylor, (C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar...	50
Çizelge 4.11 $t=0.5$ için Taylor, (C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar.....	51
Çizelge 4.12 $t=0.25$ için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar ($h=0.1$).....	52
Çizelge 4.13 $t=0.33$ için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar ($h=0.1$).....	53
Çizelge 4.14 $t=0.5$ için K-Taylor, (K-C-N) ve A-D-M yaklaşımlarına ait sonuçlar ($h=0.1$).....	54

1.GİRİŞ

Zamana bağlı genel kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için birçok çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu tip kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan birçok yöntem sonlu farklar yardımı ile elde edilebilmektedir. Bu yaklaşımla problem uygun koşullar altında cebirsel denklem sistemine indirgenilmekte ve problem direk veya iteratif yöntemlerle çözülmektedir. Bu bağlamda Taylor serisini temel alan yaklaşım yöntemleri önemli yer tutmaktadır. Burada çözümün hassasiyetini arttırmak için aynı denklik sınıfında bulunan yöntemler üzerinde yeni algoritmalar türetilmeye çalışılacaktır.

İkinci bölümde zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemler için Taylor serileri ile türetilen sonlu fark yaklaşımları üzerinde durulacaktır. Burada yaklaşımdaki hatanın sıfırlanarak elde edilen ϵ parametresi yardımı ile kısıtlanmış Taylor yaklaşımları ile yeni sonlu fark formülleri oluşturulacaktır.

Üçüncü bölümde parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin Adomian polinomları yardımıyla geliştirilen Adomian ayrıştırma yöntemi ile yaklaşık çözümler verilecektir.

Dördüncü bölümde burada geliştirilen yaklaşımlarla daha önce çalışılan yaklaşımlara ait sonuçların tablo ve grafik değerlendirmesi yapılacaktır.

Sonuç bölümünde yapılan çalışmalar üzerinde yorum yapılarak bu çalışmalara göre izlenecek yol ve yöntemler anlatılacaktır.

Ekler bölümünde problemlerin çözümünde kullanılan ve matematik hesapları için geliştirilen Maple V programlama dili ile yapılan programların bir kısmı verilecektir.

1.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Kısmi diferansiyel denklemler mühendislik bilimlerinde ve fen bilimlerinin uygulamalı bilim dallarında önemli bir yer tutar. Özellikle fizik, kimya, ekonomi ve mühendisliğin pek çok dalında olayların incelenmesinde bu tür denklemler karşımıza çıkar. Örneğin bir katı cisim içinde veya belli homojen ortam içinde ısının yayılmasının incelendiği ısı yayılım denklemleri ile bir telin titreşimin incelendiği dalga yayılım denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmaz. Analitik çözümün bulunamadığı yada karmaşık olduğu bazı problemlerde problemi çözebilmek için nümerik metotlara başvurulur.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve bu durumda denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem denir.

Genel olarak a, b, c, d, e, f ve g bağımsız değişkenlere bağlı, $u = u(x, y)$ x ve y ye bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad 1.1$$

şeklinde verilir. (Türker, S. ,1999)

İkinci mertebeden kısmi türevler, diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında önemli rol oynar. $(b^2 - 4ac)$ diskriminant değerinin işaretine göre (1.1) denklemi hiperbolik, parabolik ve eliptik olarak sınıflandırılabilir.

- i) $b^2 - 4ac < 0$ ise denkleme eliptik
- ii) $b^2 - 4ac = 0$ ise denkleme parabolik
- iii) $b^2 - 4ac > 0$ ise denkleme hiperbolik

diferansiyel denklem denir.

Örneğin;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \quad (\text{Hiperbolik})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \quad (\text{Eliptik})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F \quad (\text{Parabolik})$$

denklemlerdir. Burada $F = F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ dir.

Matematiksel fiziğin en önemli denklemleri olan ısı ve dalga denklemleri de yukarıdaki şekilde sınıflandırılabilir. Örneğin;

i) x konum, t zaman değişkeni olmak üzere bir boyutlu dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\beta, \text{sabit})$$

hiperbolik denklemdir.

ii) x konum, t zaman değişkeni olmak üzere bir boyutlu ısı denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\alpha, \text{sabit})$$

parabolik denklemdir.

iii) x ve y konum değişkenleri, t zaman değişkeni olmak üzere $u = u(x, y, t)$ fonksiyonu için iki boyutlu ısı denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (c^2, \text{sabit})$$

ile verilir.

Diferansiyel denklemin verilen bir problemin yanıtı olan tek bir çözümü, bu problemi belirleyen birtakım koşulların kullanılması ile elde edilir. Diferansiyel denklemlerle birlikte verilen bu ön bilgilere başlangıç ve sınır koşulları adı verilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte, denklemin t bağımsız değişkeninin $t = t_0$ değeri için $u(t_0) = u_0$ çözümü verilirse buna başlangıç koşulu ve bu koşul altında denklemin çözümünün aranmasına ise Başlangıç Değer Problemi denir.

Kısmi diferansiyel denklemlerle beraber çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri problemi belirleyecek şekilde verilmişse bunlara sınır koşulları ve bu koşullar altında denklemin çözümünün aranmasına da Sınır Değer Problemi denir.

Hem başlangıç, hem de sınır koşullarını içeren problemlere de Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri denir .

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunamadığı durumlarda kullanılan nümerik yöntemlerden birkaçı şöyledir:

- a) Adi diferansiyel denkleme indirgedikten sonra nümerik çözüm,
- b) Sonlu farklarla çözüm,
- c) Sonlu elemanlarla çözüm,

1.2. Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

$u = u(x, t)$ bağımlı değişkenine bağlı bir kısmi diferansiyel denklem R bölgesinin tüm noktalarında $b^2 - 4ac = 0$ koşulunu gerçekleştiriyor ise paraboliktir denir.

Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemleri ile ifade edilen problemlere sınır değer problemleri veya yayılma problemleri adı verilir. Bu tip problemlerde çözüm açık bir bölge içinde tanımlanır. Verilen başlangıç ve sınır koşulları ile yayılma başlar, fakat bu yayılım belli bir sınıra kadar gerçekleşir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\alpha, \text{ sabit })$$

denklemini tek boyutlu ısı akış denkleminin genel hali olup parabolik denkleme bir örnektir.

1.3. Taylor Serileri Yardımıyla Türetilen Yaklaşımlar

$u = u(x, t)$, fonksiyonu (ih, jk) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [u_x(ih, jk)(x - ih) + u_t(ih, jk)(t - jk)]^{(n)} \\ &= u(ih, jk) + \frac{1}{1!} [u_x(ih, jk)(x - ih) + u_t(ih, jk)(t - jk)] + \\ &\frac{1}{2!} [u_{xx}(ih, jk)(x - ih)^2 + 2u_{xt}(ih, jk)(x - ih)(t - jk) + u_{tt}(ih, jk)(t - jk)^2] + \dots \end{aligned}$$

serisine u fonksiyonunun (ih, jk) noktasındaki Taylor seri açılımı denir.

$P_{n,u(x,t)}(x)$, n . dereceden bir polinom ve $R_{n+1}(x)$, $R_{n+1}(t)$, $(n+1)$. dereceden kesme hataları olmak üzere $u(x, t)$ fonksiyonunu Taylor yaklaşımı;

$$u(x, t) = P_{n,u(x,t)}(x, t) + R_{n+1}(x) + R_{n+1}(t)$$

şeklinde yazılabilir. (Ismail&Elbarbary, 2000) Burada;

$$\begin{aligned} P_{n,u(x,t)}(x, t) &= \\ &u(ih, jk) + \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ih, jk} (x - ih) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ih, jk} (t - jk) \right] + \\ &\frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ih, jk} (x - ih)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial t} \right)_{ih, jk} (x - ih)(t - jk) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{ih, jk} (t - jk)^2 \right] + \dots + \\ &\frac{1}{n!} \left[\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{ih, jk} (x - ih)^n + \dots + \left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right)_{ih, jk} (t - jk)^n \right] + R_{n+1}(x) + R_{n+1}(t) \end{aligned}$$

ve

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - ih)^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} u(\xi)}{\partial x^{n+1}} \right)_{i,j}$$

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} (t - jk)^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} u(\zeta)}{\partial t^{n+1}} \right)_{i,j}$$

şeklindedir. Kısaca $u(ih, jk) = u_{i,j}$ ile gösterilirse;

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j) =$$

$$u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots + \frac{1}{n!} h^n \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} + R_{n+1}(x)$$

ve

$$u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + k) =$$

$$u_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{1}{2!} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{3!} k^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{i,j} + \dots + \frac{1}{n!} k^n \left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right)_{i,j} + R_{n+1}(t)$$

şeklindedir.

1.4. Rasyonel Pade Yaklaşımı

e^θ nın $(1 + p_1\theta) / (1 + q_1\theta)$ ifadesine yakın bir değer olduğu kabul edilirse p_1 ve q_1 sabit değerler olmak üzere q_1 ve p_1 ' nin elde edilmesi için iki denkleme ihtiyaç vardır. (p_1 ve q_1 θ ve θ^2 katsayılarından oluşan iki denkleme bulunur.) Bu yüzden önde gelen hata terimi θ^3 derecesinde olacaktır. Buradan

$$e^\theta = \frac{1 + p_1\theta}{1 + q_1\theta} + c_3\theta^3 + c_4\theta^4 + \dots \quad 1.2$$

biçiminde yazılabilir. Taylor açılımından

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^3 + \dots$$

şeklinde yazılır ve (1.2) denkleminde yerine konursa

$$(1 + q_1\theta) \left(1 + \theta + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \right) = 1 + p_1\theta + (1 + q_1\theta)(c_3\theta^3 + c_4\theta^4 + \dots) \quad 1.3$$

yazılır. Daha sonra (1.3) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$(1 + q_1\theta + \theta + q_1\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}q_1\theta^3 + \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{6}q_1\theta^4 + \dots = 1 + p_1\theta + c_3\theta^3 + c_4\theta^4 + \dots + c_3q_1\theta^4 + c_4q_1\theta^5 + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 + q_1 - p_1)\theta + (\frac{1}{2} + q_1)\theta^2 + (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}q_1 - c_3)\theta^3 + \dots \equiv 0$$

eşitliği elde edilir.

$$1 + q_1 - p_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} + q_1 = 0$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}q_1 - c_3 = 0$$

eşitliklerin

$$q_1 = -\frac{1}{2}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{12}$$

çözümleri bulunur.

$$(1 + \frac{1}{2}\theta) / (1 - \frac{1}{2}\theta) \text{ rasyonel yaklaşımı (exp } \theta \text{) pade yaklaşımı (1,1)}$$

olarak adlandırılır ve hata terimi 3. derecedendir.

Genel olarak (exp θ) için Pade Yaklaşımı

$$e^\theta = \frac{1 + p_1\theta + p_2\theta^2 + \dots + p_t\theta^t}{1 + q_1\theta + q_2\theta^2 + \dots + q_s\theta^s} + c_{s+t+1}\theta^{s+t+1} + o(\theta^{s+t+2}) \quad c_{s+t+1} : \text{sabit}$$

şeklinde verilir. Burada

$$R_{s,t}(\theta) = \frac{1 + p_1\theta + p_2\theta^2 + \dots + p_t\theta^t}{1 + q_1\theta + q_2\theta^2 + \dots + q_s\theta^s} = \frac{P_t(\theta)}{G_s(\theta)}$$

rasyonel fonksiyon e^θ üstel fonksiyonu için (S+T) ninci dereceden (S+T) pade yaklaşımı olarak adlandırılır. (Smith, G. D. , 1985)

Aşağıdaki tablo ilk sekiz pade açılımını ve önde gelen hata terimlerini gösterir.

Çizelge 1.1 Pade açılımı ve hata terimlerine ait sonuçlar

(S,T)	$R_{S,T}(Q)$	Hata Terimi
(0,1)	$1+Q$	$\frac{1}{2}Q^2$
(0,2)	$1+Q+\frac{1}{2}Q^2$	$\frac{1}{6}Q^3$
(1,0)	$\frac{1}{1-Q}$	$-\frac{1}{2}Q^2$
(1,1)	$\frac{1+\frac{1}{2}Q}{1-\frac{1}{2}Q}$	$-\frac{1}{12}Q^3$
(1,2)	$\frac{1+\frac{2}{3}Q+\frac{1}{6}Q^2}{1-\frac{1}{3}Q}$	$-\frac{1}{72}Q^4$
(2,0)	$\frac{1}{1-Q+\frac{1}{2}Q^2}$	$\frac{1}{6}Q^3$
(2,1)	$\frac{1+\frac{1}{3}Q}{1-\frac{2}{3}Q+\frac{1}{6}Q^2}$	$\frac{1}{72}Q^4$
(2,2)	$\frac{1+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{12}Q^2}{1-\frac{1}{2}Q+\frac{1}{12}Q^2}$	$\frac{1}{720}Q^5$

2.KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Kısmi Türevler için bir boyutlu Sonlu Fark Yaklaşımları

Nümerik yöntemlerin kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmasında büyük oranda aritmetik gerekmektedir. Farklı problemlerin değişik formları için bir çözüm uygun koşullarda her zaman mümkündür. Bu boyutsuz form değerlerin terimlerinin bütün denklemlerini ifade ederek yapılabilir. Matematiksel formüllerle aynı boyutsuz form problemleri bir çözümle anlamlandırılabilir.

Fizik problemlerinde sarkacın salınımı , bir kapasiteden elektrik akımı içinde resistans ve indüktans problemleri örnek olarak gösterilebilir. Metal bir levha alındığında ortadaki ısı, ısı denklemi merkezde olduğu zaman dışarı doğru yayılır. Boyutsuz form süreci parabolik denklem için aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial T} = K \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (K: \text{sabit}) \quad 2.1$$

denkleminde $u(x,t)$ çözümü, t zaman sonra X uzaklığındaki ısı dönüşümünü verir. L uzaklığında u_0 belirli sıcaklığı yani sıfır anında maksimum ve minimum sıcaklığı göstermek üzere

$$x = \frac{X}{L} \quad \text{ve} \quad u = \frac{U}{U_0} \quad (U_0: \text{sabit}) \quad 2.2$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dX} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{L} \quad 2.3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{dx}{dX} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2.4$$

(2.1) ve (2.4) dönüşümünden

$$\frac{\partial(uU_0)}{\partial T} = \frac{K}{L^2} \frac{\partial^2(uU)}{\partial x^2} \quad 2.5$$

ifadesi elde edilir. (2.5) denkleminde değişken dönüşümü yapılarak sabitler yok edilirse

$$\frac{1}{kL^{-2}} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2.6$$

ifadesi elde edilir.

$$t = \frac{KT}{L^2} \quad 2.7$$

(2.7) eşitliği (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2.8$$

denklemin boyutsuz formu elde edilir.

2.2. Explicit (Açık) Yöntemler

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 2.9$$

1sı denklemini ele alalım. Burada $\frac{\partial U}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevlerine sırası ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad 2.10$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad 2.11$$

şeklinde yaklaşılsın. Bu değerler (2.9) eşitliğinde yerine konursa

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad 2.12$$

eşitliği elde edilir. Burada u sonlu fark denkleminin tam çözümüdür.

$$x_i = ih , \quad (i = 0,1,2,\dots)$$

$$t_j = jk, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

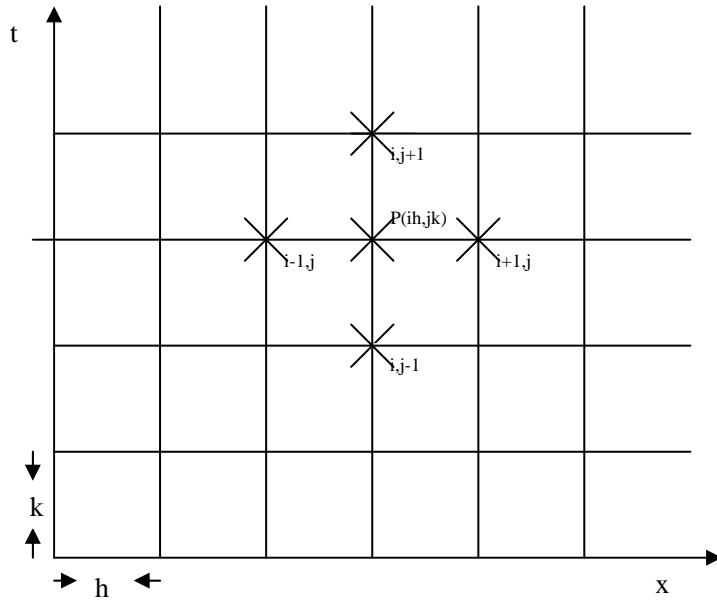
(2.12) ifadesinde gerekli işlemler yapılır ve

$$r = \frac{\partial t}{(\partial x)^2} = \frac{k}{h^2}$$

denirse

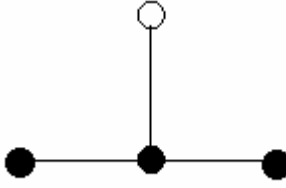
$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} \quad 2.13$$

(2.13) eşitliği elde edilir. Bu tür yaklaşımlara yani birden fazla bilinene karşılık bir tek bilinmeyen barındıran yöntemlere explicit (açık) yöntemler denir. Özel olarak bu yöntem (1,3) yöntemi ile ifade edilir. (Dehghan, M. 2003)



Şekil 2.1 : Grid noktalarının gösterimi

(1,3) yöntemine ait moleküler gösterim



Şekil 2.2 : Explicit yöntemine ait moleküler gösterim

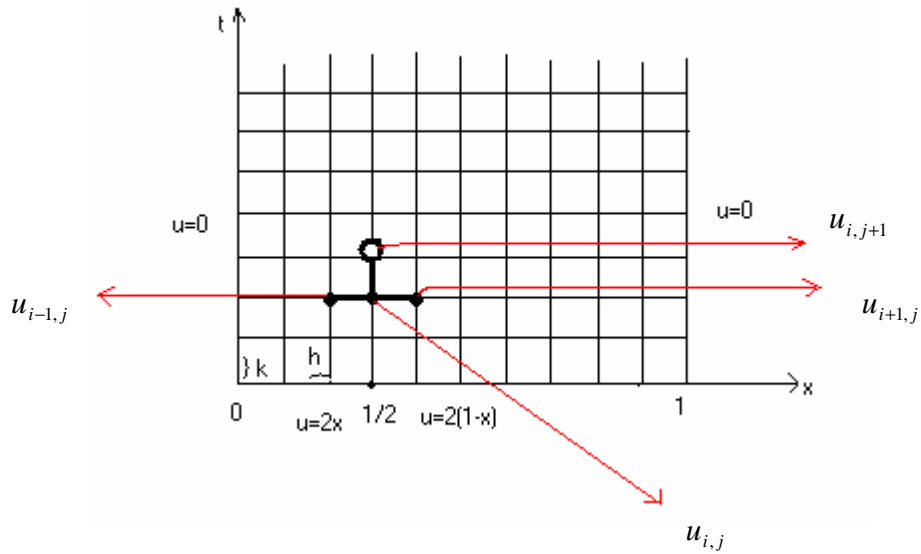
şeklinde verilebilir. Açık yöntemin bir uygulamasını ısı denklemi olarak bilinen aşağıdaki örnekte görebiliriz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ısı denklemini

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

başlangıç ve sınır değer problemini göz önüne alalım.



Şekil 2.3 : Problemin tanım bölgesi

$$\partial x = h = \frac{1}{10} \quad \partial t = k = \frac{1}{1000} \quad \text{olsun.}$$

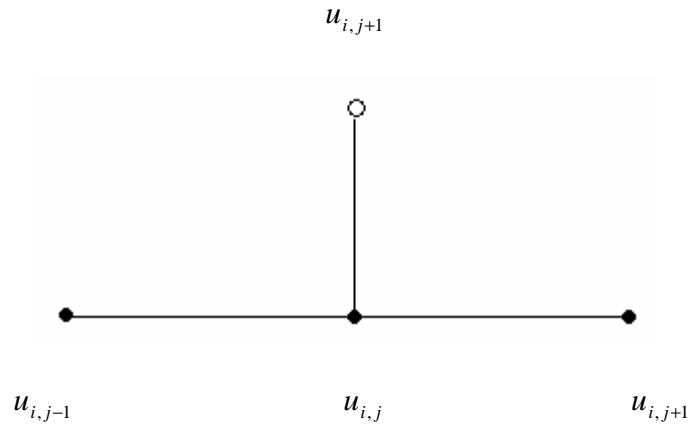
Bu halde

$$r = \frac{\partial t}{\partial x^2} = \frac{k}{h^2} = \frac{1/1000}{1/100} = \frac{1}{10}$$

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} \quad 2.14$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10} [u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + u_{i+1,j}] \quad 2.15$$

dir.



Şekil 2. 4 : Açık yöntemin moleküler gösterimi

x - doğrultusunda $\forall i = 1, \dots, 10$ ve $\forall j = 1, \dots$ değerleri hesaplanabilir. Hesaplanan tüm değerler tablo ile verilmiştir.

	i=0 x=0	i=1 0,1	i=2 0,2	i=3 0,3	i=4 0,4	i=5 0,5	i=6 0,6	
(j=0)t=0.000		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8
(j=1)t=0.001		0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.96	0.8
(j=2)t=0.002		0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796
(j=3)t=0.003		0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
(j=4)t=0.004		0	0.2	0.4	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818
(j=5)t=0.005		0	0.2	0.3999	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732
.
.
.
(j=10)t=0.01		0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
.
.
.

Bu denklemin koşulları sağlayan analitik çözümü

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{2} n\pi) (\sin n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 t)$$

şeklindedir. $x=0.3$ ve $x=0.5$ noktasında sonlu fark yaklaşımları ile analitik çözüm karşılaştırmaları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 2.1 $x=0.3$ için Explicit yöntem ile analitik çözüme ait sonuçlar

	Sonlu Fark Çözümü x=0.3	Analitik Çözüm x=0.3	Fark	Hata Oranı
t= 0.005	0.5971	0.5966	0.0005	0.08
t=0.01	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
t=0.02	0.5373	0.5334	0.0039	0.7
t=0.10	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

Çizelge 2.2 $x=0.5$ için Explicit yöntem ile analitik çözüme ait sonuçlar

	Sonlu Fark Çözümü $x=0.5$	Analitik Çözüm $x=0.5$	Fark	Hata Oranı
$t=0.005$	0.8597	0.8404	0.0193	2.3
$t=0.01$	0.7867	0.7743	0.0124	1.6
$t=0.02$	0.6891	0.6809	0.0082	1.2
$t=0.10$	0.3056	0.3021	0.0035	1.2

2.3. Implicit (Kapalı) Yöntemler

Explicit yöntem hesaplama yönünden çok kolay olmasına rağmen önemli bazı eksiklikleri vardır. Bu yöntemde t zaman adımı yukarıda görüldüğü gibi

$0 < r \leq \frac{1}{2}$ aralığı için kararlı olup diğer durumlarda problemlerle karşılaşılır. Bu

eksiklikleri gidermek amacıyla t zaman doğrultusunda ileri fark , x doğrultusunda merkezi fark alınarak yeni bir yaklaşım elde edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2}$$

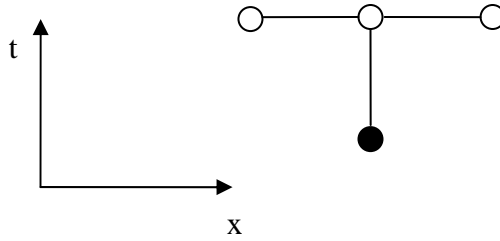
ifadeleri (2.9) denkleminde yerine yazılırsa denklem

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2} \{ U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} \} \quad \left(r = \frac{k}{h^2} \right)$$

$$- rU_{i+1,j+1} + (1 + 2r)U_{i,j+1} - rU_{i-1,j+1} = U_{i,j} \quad 2.16$$

biçimini alır. Görüldüğü gibi denklemin sol tarafında 3 bilinmeyen ama sağ tarafında tek bilinenden oluşan bir denklem elde edilir. u denklemin moleküler gösterimi aşağıdaki gibi verilir.

Kapalı yöntem Von-Neumann kararlılığı uyarınca $r > 0$ için koşulsuz kararlıdır.



Şekil 2.5 : Implicit yönteme ait moleküler gösterim

2.4. Crank-Nicolson Yöntemi

Bu yöntem sonlu fark yaklaşımlarının $\{ih, (j + \frac{1}{2})k\}$ noktasında uygulanmasını temel alan bir yaklaşımdır. Bu amaçla

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}$$

denklemine

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right\}$$

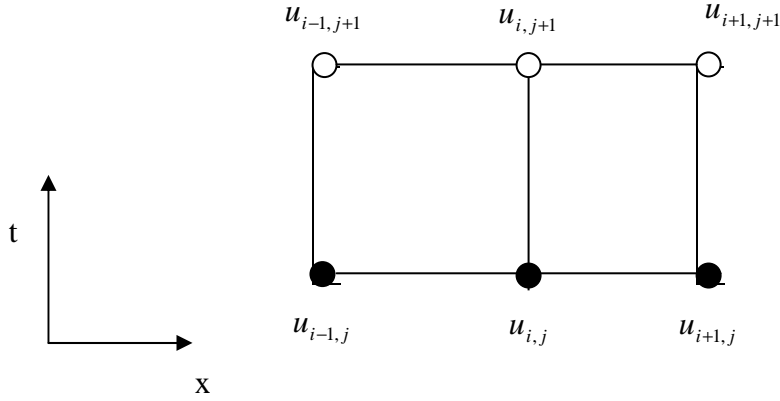
$$r = \delta t / \delta x^2 = k / h^2$$

sonlu fark formülleri ile yaklaşırsa

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \quad 2.17$$

denklemini elde edilir. Bu yönteme Crank- Nicolson yöntemi adı verilir. Bu yöntem $\forall r > 0$ için koşulsuz kararlıdır.

C-N yöntemine j. zaman adımında bilinen üç noktaya karşılık, j+1. zaman adımında bilinmeyen üç nokta karşılık geldiğinden Crank-Nicolson yönteminin moleküler gösterimi aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.6 : C-N yönteme ait moleküler gösterim

Her bir zaman satırı boyunca N adet iç nokta varsa $j=0$ ve $i=1,2,\dots,N$ için denklemin başlangıç ve sınır koşulları cinsinden her zaman satırı boyunca N bilinmeyen nokta için aynı anda gerçekleşen N denklem oluşur. Benzer şekilde $j=1$ için 2. zaman satırında 1.zaman satırına bağlı olarak yine N denklem oluşur. Bu şekilde geliştirilen yani bilinmeyeni bulmak için aynı anda gerçekleşen denklem sisteminin çözümüne ihtiyaç duyan yöntemle Implicit yöntem (Kapalı yöntem) adı verilir.

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

eşitliğinde $i=1,2,\dots,(n-1)$ yazılırsa;

$$i = 1 \text{ için, } -rU_{0,j+1} + (2 + 2r)U_{1,j+1} - rU_{2,j+1} = rU_{0,j} + (2 - 2r)U_{1,j} + rU_{2,j}$$

$$i = 2 \text{ için, } -rU_{1,j+1} + (2 + 2r)U_{2,j+1} - rU_{3,j+1} = rU_{1,j} + (2 - 2r)U_{2,j} + rU_{3,j}$$

⋮

$$i = n-1 \text{ için, } -rU_{n-2,j+1} + (2 + 2r)U_{n-1,j+1} - rU_{n,j+1} = rU_{n-2,j} + (2 - 2r)U_{n-1,j} + rU_{n,j}$$

şeklinde elde edilen sistemin matris formu, sınır koşulları $U_{0,j}, U_{n,j}, U_{0,j+1}, U_{n,j+1}$ bilinen değerler olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 2+2r & -r & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -r & 2+2r & -r \\ 0 & \cdots & 0 & -r & 2+2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix}}_{U_{j+1}} \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} 2-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 2-2r & r & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & r & 2-2r & r \\ 0 & \cdots & 0 & r & 2-2r \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{n-2,j} \\ U_{n-1,j} \end{bmatrix}}_{U_j} + \underbrace{\begin{bmatrix} r(U_{0,j+1} + U_{0,j}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(U_{n,j+1} + U_{n,j}) \end{bmatrix}}_{c_j}
 \end{aligned}$$

$$AU_{j+1} = BU_j + c_j$$

şeklinde elde edilir.

2.5. BTCS Yöntemi

İsı denkleminde bulunan türevlere sırası ile ikinci dereceden merkezi fark ve ileri fark formülleri ile yaklaşılın. Bu durumda denklem,

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2}$$

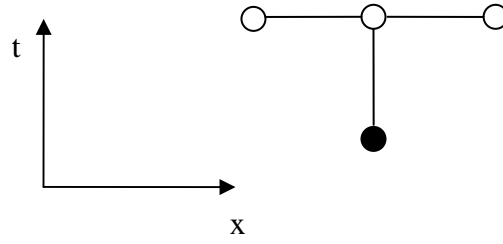
olmak üzere

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1})$$

biçimini alır ve düzenlenirse

$$U_{i,j} = -rU_{i+1,j+1} + (1+2r)U_{i,j+1} - rU_{i-1,j+1} \quad 2.18$$

ifadesi elde edilir. Burada bir bilinen üç bilinmeyen vardır. Bu şekilde verilen yönteme BTCS yöntemi denir ve moleküler gösterimi,



Şekil 2.7 : Kapalı yönteme ait moleküler gösterim şeklindedir .

2.6. FTCS Yöntemi

FTCS yöntemi açık (explicit) yönteminin özel bir halidir. T zamanı boyunca ileri fark ikinci dereceden türev yerine ise merkezi fark denklemleri yazılarak

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2} \{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$U_{i,j+1} = \frac{k}{h^2} U_{i-1,j} + (1 - 2\frac{k}{h^2}) U_{i,j} + \frac{k}{h^2} U_{i+1,j} \quad 2.19$$

şeklini alır. Bir bilinmeyene karşılık 3 bilinen olduğundan FTCS yöntemi (1,3) yöntemi olarak adlandırılır.

2.7. Yakınsaklığın Analitik Yorumu

$u = u(x, t)$ kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü; sonlu fark çözümleriyle kesikli hale getirilen denklemin tam çözümü ise U olsun. $\partial x \rightarrow 0$ $\partial t \rightarrow 0$ için $u \rightarrow U$ ise denklem “yakınsaktır” denir.

Yakınsaklık koşulları ikinci basamaktan lineer eliptik parabolik ve hiperbolik denklemleri için biliniyor olsa da henüz bazı özel haller için nonlineer denklemler için tam olarak bilinmemektedir.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g = 0$$

denkleminin a,b,c,d,e,f,g katsayıları sabit yada yalnızca x ve t'nin bir fonksiyonu ise denkleme 2. dereceden "lineer bir denklemdir" denir. Aksi halde denkleme "nonlineer bir denklemdir" ikinci basamaktan türevlerin katsayıları $x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ nin fonksiyonları , fakat 2. mertebeden türevlerin fonksiyonu değilse denkleme nonlinear olmasına karşın denkleme "quazilineer"dir. Lineer denklemlerin önemli bir özelliği , çözümlerinin lineer toplamlarının da yine bir çözüm olduğudur.

Explicit fark yaklaşımı için kesme hatasını inceleyelim. U kısmi türevli diferansiyel denkleminin tam çözümü ve u sonlu fark denkleminin tam çözümü olsun. O halde

$$e = U - u$$

yazılabilir.

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = a$$

$$u(0, t) = u(1, t) = b$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denkleme için sonlu fark denklemini

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad 2.20$$

şeklinde yazılabilir. Grid noktalarındaki

$$u_{i,j} = u_{i,j} - e_{i,j} \quad u_{i,j+1} = u_{i,j+1} - e_{i,j+1}, \dots$$

değerler (2.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \\ u_{i,j+1} - e_{i,j+1} &= r(u_{i-1,j} - e_{i-1,j}) + (1-2r)[u_{i,j} - e_{i,j}] + r[u_{i+1,j} - e_{i+1,j}] \\ e_{i,j+1} &= re_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + re_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j+1} [2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}] \end{aligned} \quad 2.21$$

ifadesi elde edilir. Burada $u_{i-1,j}$ ve $u_{i+1,j}$ yi Taylor serisinden yararlanarak bulabiliriz.

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j) = u_{i,j} + h \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{i,j} (x_i + \theta_1 h, t_j) \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - h, t_j) = u_{i,j} - h \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{i,j} (x_i - \theta_2 h, t_j) \quad 0 < \theta_2 < 1$$

$$u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + k) = u_{i,j} + k \left(\frac{du}{dt} \right)_{i,j} (x_i, t_j + \theta_3 k) \quad 0 < \theta_3 < 1$$

Bu ifadeler (2.21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$e_{i,j+1} = r e_{i-1,j} + (1-2r) e_{i,j} + r e_{i+1,j} + k \left\{ \frac{du}{dt} (x_i, t_j + \theta_3 k) - \frac{d^2u}{dx^2} (x_i + \theta_2 k, t_j) \right\}$$

ifadesi elde edilir.

$$E_{i,j}, \quad |e_{i,j}| \quad \text{hatalarının maksimum değerini ve } M, \quad \forall \quad i, j \quad \text{için}$$

yukarıdaki parantezin maksimum değerini gösterebiliriz. Bu halde $r \leq \frac{1}{2}$ iken

yukarıdaki hata fark denklemindeki katsayılar ya 0 ya pozitifdir. Ancak $r = \frac{1}{2}$

olduğu zaman 0 olur.

$$|e_{i,j}| \leq r |e_{i-1,j}| + (1-2r) |e_{i,j}| + r |e_{i+1,j}| + kM$$

$$\leq r E_j + (1-2r) E_j + r E_j + kM = E_j + kM$$

Bu ifadeler her i için gerçeğlendiğinden $\max |e_{i,j}|$ içinde gerçeğlenir. Böylece,

$$E_{j+1} \leq E_j + kM \leq (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM \leq (E_{j-2} + kM) + 2kM = E_{j-2} + 3kM$$

$$E_j \leq E_0 + jkM = tM$$

dir.

2.8. Kararlılık Analizi

Sınır değer problemleri için kararlılık $k \rightarrow 0$ yani $(j \rightarrow \infty)$ için sabit zaman satırlarında sonlu fark denklemlerinin çözümlerinin sınırlılığı için kullanılmıştır.

$$u_{i,j+1} = [u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots, u_{N-1,j+1}]^T$$

çözümü ile $u_{i,j+1} = Au_i + B_i$ ilişkilendirilsin. Burada B vektörü 0 ve bilinen sınır değerlerinden oluşan sütun vektör A ise bilinen elemanları içeren $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir matris olsun. Bu halde bu şekilde tanımlanan matris metod analizi A matrisinin öz vektörlerinin modüllerinin en büyüğü yani A'nın spektral yarıçapı $\delta(A)$ t arttığında diferansiyel denkleminin çözümü artmıyorsa yani $\delta(A) \leq 1$ ise sistemin kararlı olduğunu gösterir.

$$\text{Sistem kararlı : } \Leftrightarrow \delta(A) \leq 1$$

2.9. Kararlılık için Von-Neuman Yöntemi

T sonlu olmak üzere zaman aralığı $0 \leq t \leq T = Jk$, $\delta x = h \rightarrow 0$, $\delta t = k \rightarrow 0$ ve $J \rightarrow \infty$ olmak üzere iki zamanlı doğrusal fark denklemleri için $u(x,t)$ nin kararlılığını araştıralım.

Kosinüs ve sinüslü terimlerle formülize edilen fourier serilerini işlem kolaylığı açısından kompleks üstel formundaki $\sum a_n \cos(n\pi x/l)$ veya $\sum b_n \sin(n\pi x/l)$ ifadeleri yerine eşdeğeri olan $\sum A_n e^{in\pi x/l}$ ifadesi yazılabilir. $i = \sqrt{-1}$ ve l , x aralığının uzunluğu olmak üzere $u(ph, qk) = u_{p,q}$ olsun. Bu halde

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph} \quad \beta_n = n\pi/Nh \quad \text{ve } Nh = 1$$

şeklini alır.

Başlangıç değerleri $t = 0$ boyunca $u(ph, 0) = u_{p,0}$, $p = 0(1)N$ şeklinde belirlenirse

$$u_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n p h} \quad p = 0(1)N$$

elde edilir. t artarken değişimi araştırmak için

$$u_{p,q} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta p h} e^{\alpha q k} = e^{i\beta p h} \xi^q$$

şeklinde yazılsın . Burada $\xi = e^{\alpha k}$, α kompleks sabit sayıdır.

$$|u_{p,q}|, \quad \forall q \leq J \quad \text{için sınırlandırılırsa } h \rightarrow 0 \text{ ve } k \rightarrow 0 \text{ için başlangıç}$$

şartlarını sağlayan tüm β değerleri için sonlu fark denkleminin tam çözümlü zamanla

üstel artmıyorsa kararlılık için gerekli ve yeterli koşul;

$$|\xi| \leq 1$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

dır.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Taylor Serileri ile Türetilen Kısıtlanmış Yaklaşımlar

$u = u(x)$, fonksiyonu a noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$RT_{n,u(x)}(x, a) = u(a) + \frac{u'(a)}{1!}(x-a) + \frac{u''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{\varepsilon u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad 3.1$$

ile verilen $RT_{n,u(x)}(x)$ fonksiyonuna $u(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki Kısıtlanmış Taylor yaklaşımı adı verilir. $RT_{n,u(x)}(x_0) = u(x_0)$ eşitliğinden ε değeri belirlenebilir. Belirlenen ε değerinde yaklaşık çözüm tam çözüme eşit olacağından, yaklaşımın hatası da sıfıra eşit olur .

3.2. Kısıtlanmış Rasyonel Yaklaşımlar

Parabolik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için bir çok nümerik yöntem vardır. Bir diferansiyel denklemi implicit yöntem ile çözmek çok zaman almaktadır. Implicit yöntemde elde edilen denklemleri çözmek için çok geniş hafızaya sahip makinalara ihtiyaç duyulur.

Kısıtlanmış pade yaklaşımı olarak geliştirilen yöntem çok daha hızlı ve denklem sistemi daha azdır. Bu sebeple çözüm hızı diğer yöntemlere göre daha kısa sürer.

Kısıtlanmış pade yaklaşımı (RPA) herhangi bir fonksiyon için aşağıdaki gibi verilir.

$$RPA[M + \alpha / N]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{M+i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i} \quad 3.2$$

$$f(x) - RPA[M + \alpha / N]_{f(x)}(x) = O(x^{M+N+1}) \quad 3.3$$

(3.3) ifadesinde $f(x)$ fonksiyonunu yerine maclaurin açılımından

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad 3.4$$

ifadesi yazılır. (3.3) denkleminde (3.2) ve (3.4) yerine konur ve

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \frac{\sum_{i=0}^M a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{M+i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i} = O(X^{M+N+1}) \quad 3.5$$

(3.5) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \left(1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i \right) - \sum_{i=0}^M a_i x^i - \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{M+i} = O(X^{M+N+1}) \quad 3.6$$

denklemini elde edilir.

(3.6) eşitliğinin her iki tarafında x 'in yok olan ilk $(M+N+1)$ terimi $(M+N+1)$

denklem gerektirir. Bundan dolayı

$$RPA[M + \alpha / N]_{f(x)}(x_j) = f(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \quad 3.7$$

eşitliği α denklemden oluşan bir denklem sistemi gerektirir. Bu ise yaklaşımın $\alpha + 1$

noktada $\{x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_{\alpha}\}$ tam değere sahip olduğunu söyler. Bu denklem

sisteminden b_i $i = 1, 2, \dots, N$, a_i $i = 0, 1, \dots, M$, ε_i $i = 1, 2, \dots, \alpha$ katsayıları

bulunabilir. Eğer (3.2) eşitliğinde $\varepsilon = 0$ ve $i = 1, \dots, \alpha$ alınırsa klasik pade (PA)

rasyonel yaklaşımı elde edilir.

$$PA[M / N]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i x^i} \quad 3.8$$

Bu kısıtlanmış pade yaklaşımını bir örnekle görelim. Bu amaçla

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + 0.5x}{1 + 2x}}$$

fonksiyonunun pade yaklaşımı ve kısıtlanmış pade yaklaşımlarını bulalım.

$$f(x) - PA[M/N]_{f(x)}(x) = 0(x^{M+N+1}) \quad 3.9$$

M=2 ve N=1 için

$$PA[2/1]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^2 \beta_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^1 \gamma_i x^i} = \frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}{1 + \gamma_1 x} \quad 3.10$$

$$0(x^{M+N+1}) = 0(x^{2+1+1}) = 0(x^4)$$

f(x) fonksiyonunun 4.dereceye kadar seri açılımı

$$f(x) = 1 - 0,75x + 1,2188x^2 - 2,0859x^3 + 3,6929x^4 + 0(x^5) \quad 3.11$$

şeklindedir. (3.9) eşitliğinde (3.10) ve (3.11) yerine yazılırsa

$$(1 - 0,75x + 1,2188x^2 - 2,0859x^3) - \frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}{1 + \gamma_1 x} = 0(x^4) \quad 3.12$$

eşitliği bulunur. Payda eşitlenir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$1 - \beta_0 = 0$$

$$\gamma_1 - 0,75 - \beta_1 = 0$$

$$1,2188 - 0,75\gamma_1 - \beta_2 = 0$$

$$1,2188\gamma_1 - 2,0859 = 0$$

dört bilinmeyen ve dört denklemden oluşan bir sistem oluşur.

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_1 = 0,961538$$

$$\beta_2 = -0,064903$$

$$\gamma_1 = 1,711538$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$PA[2/1]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^2 \beta_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^1 \gamma_i x^i} = \frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}{1 + \gamma_1 x} = \frac{1 + 0,961538x - 0,06903x^2}{1 + 1,711538x} \quad 3.13$$

klasik pade yaklaşımı bulunur. $f(x)$ fonksiyonunu kısıtlanmış pade yaklaşımı bulmak için

$$f(x) - RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x) = 0(x^{M+N+1}) \quad 3.14$$

(3.14) eşitliğinde $M=1$ $N=1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa

$$f(x) - RPA[1 + 1/1]_{f(x)}(x) = 0(x^{1+1+1}) \quad 3.15$$

$$RPA[1 + 1/1]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^1 a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{1+i}}{1 + \sum_{i=1}^1 b_i x^i} = \frac{a_0 + a_1 x + \varepsilon_1 x^2}{1 + b_1 x} = 0(x^3)$$

3.16

$$(1 - 0,75x + 1,2188x^2) - \frac{a_0 + a_1 x + \varepsilon_1 x^2}{1 + b_1 x} = 0(x^3) \quad 3.17$$

ifadesi elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$1 - a_0 = 0 \quad (i)$$

$$b_1 - 0,75 + a_1 = 0 \quad (ii)$$

$$1,2188 - 0,75b_1 + \varepsilon_1 = 0 \quad (iii)$$

dört bilinmeyen ve üç denklem elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözülmesi için bir denkleme daha ihtiyaç vardır.

$$RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x_j) = f(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, \alpha$$

3.18 eşitliğinden

$$RPA[1 + 1/1]_{f(x)}(10) = f(10)$$

yazılırsa

$$\frac{a_0 + 10a_1 + 100\varepsilon_1}{1 + 10b_1} = 0,5345 \quad (iv)$$

elde edilen dördüncü denklem ile gerekli işlemler yapılarak

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0,882527$$

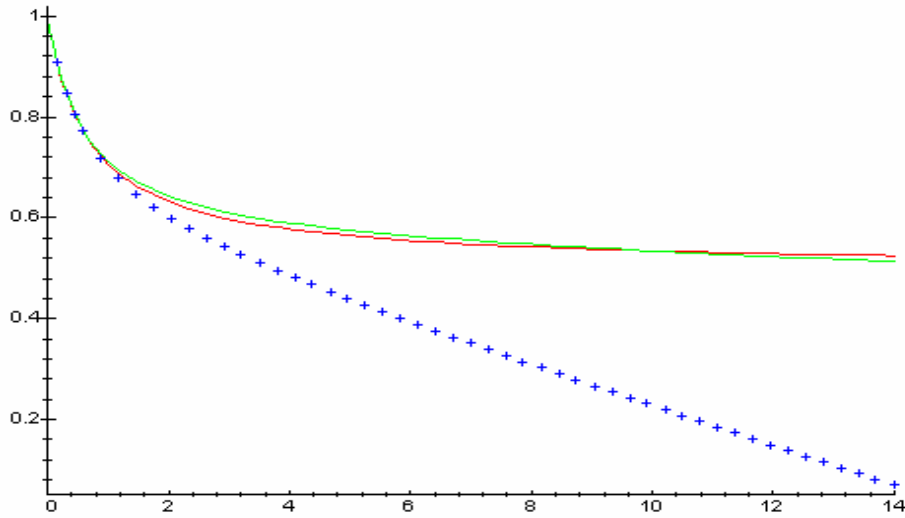
$$\varepsilon_1 = 0,064903 \quad b_1 = 1,711538$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$RPA[2/1]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^1 a_i x^i + \sum_{i=-1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{1+i}}{1 + \sum_{i=1}^1 b_i x^i} = \frac{a_0 + a_1 x + \varepsilon_1 x^2}{1 + b_1 x} = \frac{1 + 0,882527x - 0,005645x^2}{1 + 1,63252x}$$

$$\alpha = 1, x_1 = 10 \quad 3.19$$

kısıtlanmış pade yaklaşımı bulunur. Pade ve kısıtlanmış pade yaklaşımlarına ait grafikler aşağıda verilmiştir.



_____ $f(x)$
 ***** $PA[2/1]_{f(x)}(x)$
 - - - - - $RPA[2/1]_{f(x)}(x)$

Şekil 2.8 : f(x) fonksiyonunun pade açılımları

Exp(rA) üstel matrisi için kısıtlanmış pade yaklaşımı kuvvet serilerinden yararlanarak formüle edilirse, A (N-1)X(N-1) kare matrisi olmak üzere

$$\exp(rA) = I + rA + \frac{r^2}{2!} A^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} A^n, A^0 = I \quad 3.20$$

yazılır. Kısıtlanmış pade yaklaşımında

$$RPA[M + \alpha/N]_{f(x)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i x^i + \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i x^{M+i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i x^i} \quad 3.21$$

eşitliğinde bulunan ε_i terimi $\varepsilon_{(N-1) \times (N-1)}$ kısıtlanmış kare matrisi olarak yazılır.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & & & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & & \\ \cdot & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \varepsilon_{N-2} & \varepsilon_{N-2} & \varepsilon_{N-2} \\ 0 & & & \varepsilon_{N-1} & \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix}$$

Burada

$$\varepsilon_{i,j-1} = \varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j+1}$$

$$RPA[1/1]_{\exp(rA)}(r) = (I + (\varepsilon - \frac{1}{2}A)r)^{-1} (I + (\varepsilon + \frac{1}{2}A)r) \quad 3.22$$

olarak bulunur. Kısıtlanmış pade yaklaşımının bir uygulamasını standart ısı denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq x_0$$

$$u(0,t) = u(x_0,t) = 0 \quad t \geq 0$$

ele alarak inceleyelim. Burada Taylor teoremi uyarınca

$$u(x,t+k) = u(x,t) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \dots$$

$$u(x,t+k) = (1 + k \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots) u(x,t)$$

$$u(x,t+k) = \exp(k \frac{\partial}{\partial t}) u(x,t)$$

$$u_{i,j+1} = \exp(k \frac{\partial}{\partial t}) u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1} = \exp(k \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1} = \exp(kD_x^2)u_{i,j} \quad 3.23$$

yazılabilir. (ih,jk) grid noktalarında D_x^2 kısmi türev yaklaşımı için genel form

$$D_x^2 u = \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad 3.24$$

kullanılarak

$$U^j = (u_{1,j}, u_{2,j}, u_{3,j}, \dots, u_{N-1,j})^T \quad (Nh = x_0) \quad 3.25$$

$$U^{j+1} = \exp(rA)U^j \quad \left(r = \frac{k}{h^2}\right) \quad 3.26$$

üstel matris yaklaşımı elde edilir.

$$RPA[1/1]_{\exp(rA)}(r) = \left(I + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}A\right)r\right)^{-1} \left(I + \left(\varepsilon + \frac{1}{2}A\right)r\right) \quad 3.27$$

yaklaşımı kullanılarak

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \cdot & 1 & -2 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

üstel matris yaklaşımının vektör formu

$$U^{j+1} = \left(I + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}A\right)r\right)^{-1} \left(I + \left(\varepsilon + \frac{1}{2}A\right)r\right)U^j = BU^j \quad 3.28$$

$$r\left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}\right)u_{i-1,j+1} + (r(\varepsilon_i + 1) + 1)u_{i,j+1} + r\left(\varepsilon_i - \frac{1}{2}\right)u_{i+1,j+1} = r\left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}\right)u_{i-1,j} \\ + (r(\varepsilon_i - 1) + 1)u_{i,j} + r\left(\varepsilon_i + \frac{1}{2}\right)u_{i+1,j}$$

$$i=1(1)N-1 \quad 3.29$$

formu elde edilir.

3.3. Adomian Polinomları

Bilim dallarının çoğunda geniş kullanım alanına sahip yakınsak seri çözümlerini içeren Adomian Decomposition yöntemi serilerin kapalı çözümlerini geliştirerek diferansiyel denklemlerin tümüne uygulanabilir. Genel olarak L , t yönünde en yüksek dereceden türevin katsayısı, R lineer operatör ve $F(u)$ lineer olmayan terimleri göstermek üzere kısmi diferansiyel denklem

$$Lu + R(u) + F(u) = g(t) \quad 3.30$$

biçiminde tanımlanır. (3.30) eşitliğinden Lu çekilirse

$$Lu = g(t) - R(u) - F(u) \quad 3.31$$

ifadesi elde edilir. L türev operatörünün tersi L^{-1} integral operatörü olarak alınır.

$$L^{-1} = \int (\cdot) dt \quad 3.32$$

(3.32) eşitliği (3.31) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa

$$u = f_0 + L^{-1}[g(t) - R(u) - F(u)] \quad 3.33$$

eşitliğini elde edilir. f_0 , $Lu=0$ integral sabitini içeren denlemlerin çözümüdür.

Benzer şekilde türdeş denklemlerin çözümü başlangıç ve sınır değer problemlerinde başlangıç ve sınır şartları alınarak elde edilir.

Adomian Decomposition yönteminde bilinmeyen fonksiyon $u(x,t)$ sonsuz seri formunda

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad 3.34$$

alınarak ifade edilebilir. Lineer olmayan operatör $F(u)$

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad 3.35$$

polinom serilerinden yararlanılarak çözülür. Bu sonsuz seride bulunan A_n 'ler

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ 'lerin polinomlarıdır ve Adomian polinomları olarak adlandırılır.

Adomian polinolarının genel formu

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} \quad (n \geq 0) \quad 3.36$$

şeklinde verilir. (Zhang, B. , 2005) Benzer şekilde Adomian Polinomları lineer olmayan bütün sınıflar için düzenlenebilir.

$\Phi_n(x, t)$ kısmi toplamlar dizisi ve $u(x, t)$ serinin toplamı olmak üzere

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=0}^n u_k(x, t) \quad (n \geq 0) \quad 3.37$$

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t) \quad 3.38$$

şeklinde yazılır. Adomian Decomposition yönteminin önemli yönlerinden bir tanesi bilgisayar hesaplama işlemlerini büyük ölçüde azaltmasıdır.

3.4. Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede kullanılan yöntemlerden biri de Adomian Decomposition yöntemidir. (A-D-M) Adomian Decomposition Yöntem etkili nümerik bir çözüm elde etmeye yarar. Adomian Decomposition Yönteminde nümerik çözüm yakınsak serilerin integral denklemler ve diferansiyel çözümü ile elde edilir. Kısmi türevli diferansiyel denklem tipleri bir çok bilim dalında özellikle fizik alanında difüzyon konveksiyon akışkan dinamiği konularında inceleme gerektirir.

Adomian Decomposition yöntemde x ve t yönünde nümerik çözüm elde etmek mümkündür. Lineer veya lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin A-D-M kullanılarak nümerik çözümleri kolaylıkla bulunabilir. Bu tekniğin klasik tekniklerden bir çok avantajı vardır. A-D-M da verilen lineer olmayan denklemin çözümünü bulmak için integral ve türev işlemleri yapılır. A-D-M küçük hesaplamalarla yüksek doğrulukta etkili nümerik çözüm verir.

$$u_t + \varepsilon uu_x - vu_{xx} = 0 \quad 3.39$$

ε, v : parametre

(3.40) eşitliğini operatör formda yazılırsa

$$L_t(u(x,t)) + \varepsilon uu_x - uL_x(u(x,t)) = 0 \quad 3.40$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad L_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$L_x^{-1} = \iint (\cdot) dx dx \quad L_t^{-1} = \int (\cdot) dt$$

dır. (3.41) eşitliğinin her iki tarafını L_t nin ters operatörü L_t^{-1} ile işleme tabi tutulursa

$$u(x,t) = f(x) - L_t^{-1}[\varepsilon(\phi(u(x,t))) - uL_x(u(x,t))] \quad 3.41$$

$$f(x) = u(x,0)$$

ve (3.41) eşitliğinin her iki tarafı L_x in ters operatörü L_x^{-1} ile işleme tabi tutulursa

$$u(x,t) = g(x,t) + \frac{1}{4}L_x^{-1}[\varepsilon(\phi(u(x,t))) + uL_t(u(x,t))] \quad 3.42$$

$$g(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t)$$

elde edilir. $u(x,t)$ fonksiyonunu sonsuz seri formunda yazılırsa

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad 3.43$$

Adomian Decomposition yöntem kullanılarak x ve t yönlü çözümleri elde etmek için

$$u_{n+1} = -L_t^{-1}[\varepsilon(A_n) - vL_x(u_n)]$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{v}L_x^{-1}[\varepsilon(A_n) + vL_t(u_n)] \quad (n \geq 0) \quad 3.44$$

(3.40) eşitliğinde lineer olmayan terim $\phi(u)$ için

$$\phi(u(x,t)) = uu_x \quad 3.45$$

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad 3.46$$

Adomian polinomları hesaplanır. Adomian polinomları tüm lineer olmayan formlarda hesaplanabilir. Adomian polinlarının genel formu

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} \quad (n \geq 0) \quad 3.47$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak A-D-M bir uygulamasını aşağıda verilen bir örnekte görelim.

$$u_t - u_{xx} = 0$$

lineer ısı denklemi

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = \sin(\pi) e^{-\pi^2 t}$$

$$u_x(0, t) = \pi \exp(-\pi^2 t)$$

koşulları ile verilsin. Bu halde denklemi t doğrultusunda çözmek için

$$u_{n+1} = -L_t^{-1} [\mathcal{E}(A_0) - \nu L_x(u_n)]$$

$$u_0 = u(x, 0)$$

$$u_0 = \sin(\pi x)$$

n=0 için

$$u_1 = -L_t^{-1} [-L_x(u_0)]$$

$$u_1 = -L_t^{-1} [-L_x(\sin(\pi x))]$$

$$u_1 = -L_t^{-1} [-L_x(\pi \cos(\pi x))]$$

$$u_1 = -L_t^{-1} [-\pi(-\pi \sin(\pi x))]$$

$$u_1 = -L_t^{-1} [\pi^2 \sin(\pi x)]$$

$$u_1 = -\sin(\pi x)(\pi^2 t)$$

elde edilir. Benzer şekilde

n=1 için

$$u_2 = -L_t^{-1}[-L_x(u_1)]$$

$$u_2 = -L_t^{-1}[-L_x(-\sin(\pi x)(\pi^2 t))]]$$

$$u_2 = -L_t^{-1}[-L_x(-\pi \cos(\pi x)(\pi^2 t))]]$$

$$u_2 = -L_t^{-1}[-L_x(\pi^3 t \cos(\pi x))]]$$

$$u_2 = -L_t^{-1}[+\pi^3 t \pi \sin(\pi x)]]$$

$$u_2 = -L_t^{-1}[\pi^4 t \sin(\pi x)]]$$

$$u_2 = \pi^4 \sin(\pi x) \frac{t}{2}$$

$$u_2 = \sin(\pi x) \frac{1}{2} (\pi^2 t)^2$$

elde edilir. Yine yukardaki işlemlere benzer şekilde

n=3 için

$$u_3 = -L_t^{-1}[-L_x(u_2)]$$

$$u_3 = -L_t^{-1}[-L_x(-\sin(\pi x) \cdot \frac{1}{2} (\pi^2 t)^2)]]$$

$$u_3 = -L_t^{-1}[-L_x(\pi \cos(\pi x) \frac{1}{2} (\pi^2 t)^2)]]$$

$$u_3 = -L_t^{-1}[-(-\pi^2 \sin(\pi x) \frac{1}{2} (\pi^2 t)^2)]]$$

$$u_3 = -L_t^{-1}[\sin(\pi x) \frac{1}{2} \pi^6 t^2]$$

$$u_3 = -\sin(\pi x) \frac{1}{2} \pi^6 \frac{t^3}{3}$$

$$u_3 = -\sin(\pi x) \frac{1}{6} \sin(\pi^2 t)^3$$

...

Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t) = \sin(\pi x) - \sin(\pi x)(\pi^2 t) + \sin(\pi x) \frac{1}{2!} (\pi^2 t)^2 - \sin(\pi x) \frac{1}{3!} (\pi^2 t)^3 + \dots \\
&= \sin(\pi x) \left(1 - \pi^2 t + \frac{1}{2!} (\pi^2 t)^2 - \frac{1}{3!} (\pi^2 t)^3 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$u(x,t) = \sin(\pi x) (e^{-\pi^2 t}) \tag{3.49}$$

elde edilir. Diğer bir taraftan x doğrultusundaki çözümü elde etmek için

$$u_{n+1} = \frac{1}{v} L_x^{-1} [\varepsilon(A_n) + L_t(u_n)] \quad (\varepsilon = 0) \quad (v = 1)$$

$$u_{n+1} = L_x^{-1} [L_t(u_n)]$$

$$u_0 = u(0,t) + xu_x(0,t) = 0 + x\pi e^{(-\pi^2 t)} \Rightarrow u_0 = x\pi e^{(-\pi^2 t)}$$

$$u_1 = L_x^{-1} [L_t(u_0)] = L_x^{-1} [L_t(x\pi e^{(-\pi^2 t)})] = \iint [(x\pi)(-\pi^2) e^{(-\pi^2 t)}] dx dx$$

$$u_1 = \iint [-x\pi^3 e^{(-\pi^2 t)}] dx dx = \int \left[-\frac{x^2}{2} \pi^3 e^{(-\pi^2 t)} \right] dx = -\frac{x^3}{6} \pi^3 e^{(-\pi^2 t)}$$

$$u_1 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} (\pi x)^3$$

$$u_2 = L_x^{-1} [L_t(u_1)] = L_x^{-1} \left[L_t \left(-e^{(-\pi^2 t)} \frac{1}{6} (\pi x)^3 \right) \right] = L_x^{-1} \left[\pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} (\pi x)^3 \right]$$

$$u_2 = \iint \pi^2 e^{(-\pi^2 t)} \frac{1}{6} (\pi x)^3 dx dx = \int \pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} \pi^3 - \frac{x^4}{4} dx = \pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} \pi^3 \frac{1}{4} \frac{x^5}{5}$$

$$u_2 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} (\pi x)^5$$

$$u_3 = L_x^{-1} [L_t(u_2)] = L_x^{-1} \left[L_t \left(e^{(-\pi^2 t)} \frac{1}{120} (\pi x)^5 \right) \right] = L_x^{-1} \left[-\pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} (\pi x)^5 \right]$$

$$u_3 = \iint -\pi^2 e^{(-\pi^2 t)} \frac{1}{120} (\pi x)^5 dx dx = \int -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} \pi^5 - \frac{x^6}{6} dx$$

$$u_3 = -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} \pi^5 \frac{1}{6} \frac{x^7}{7} \Rightarrow u_3 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{5040} (\pi x)^7$$

bulunur. Decomposition serilerinin diğer terimleri benzer şekilde elde edilir.

(3.44) ifadesinde t yönünde hesaplanan terimler ve x yönünde hesaplanan terimler yerine yazılırsa

$$u_0 = \sin(\pi x) \quad u_1 = -\sin(\pi x)(\pi^2 t) \quad u_2 = -\sin(\pi x) \frac{1}{2} (\pi^2 t)^2 \quad u_3 = -\sin(\pi x) \frac{1}{6} (\pi^2 t)^3$$

$$u_0 = e^{-\pi^2 t} (\pi x) \quad u_1 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} (\pi x)^3 \quad u_2 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} (\pi x)^5 \quad u_3 = -e^{-\pi^2 t} \frac{1}{5040} (\pi x)^7$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

x- yönündeki çözüm

$$u(x, t) = x\pi e^{-\pi^2 t} - e^{-\pi^2 t} \frac{1}{6} (\pi x)^3 + e^{-\pi^2 t} \frac{1}{120} (\pi x)^5 - e^{-\pi^2 t} \frac{1}{5040} (\pi x)^7 + \dots$$

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} (x\pi - \frac{1}{6} (\pi x)^3 + \frac{1}{120} (\pi x)^5 - \frac{1}{5040} (\pi x)^7 + \dots)$$

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$$

şeklinde bulunur. Bir diğer örnek olarak

$$u_t = u_{xx} + u$$

kapalı formda lineer ısı denklemi

$$u(x, 0) = \cos(\pi x)$$

$$u(0, t) = e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u_x(0, t) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Burada

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt \qquad L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

dır. t- ve x- yönünde çözümleri bulabilmek için

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} [L_x(u(x,t)) + \Phi(u)],$$

$$u(x,t) = u(0,t) + x u_x(0,t) + L_x^{-1} [L_t(u(x,t)) - \Phi(u)],$$

ifadelerinde bulunan

$$\Phi(u) = u$$

ifadesinin Adomian polinomlarını bulalım. Önce t- yönünde çözümü elde etmek için

$$L_t(u(x,t)) = L_x(u(x,t)) + \Phi(u)$$

eşitliğinin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatör uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t(u(x,t))] = L_t^{-1} [L_x(u(x,t)) + \Phi(u)]$$

bu eşitlikten

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} [L_x(u(x,t)) + \Phi(u)]$$

yazılır. Başlangıç koşulundan

$$u_0 = u(x,0) = \cos(\pi x)$$

bulunur.

$$u_{n+1} = L_t^{-1} [L_x(u(x,t)) + A_n]$$

ifadesinde A_n Adomian polinomlarını

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\Phi(u(x,t))]$$

şeklinde yazarız. Bu eşitlikte $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)$ sonsuz seri formu yerine yazılırsa

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\Phi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u(x,t) \right) \right]_{\lambda=0}$$

eşitliği elde edilir. Buradan Adomian polinomları

$$A_0 = \Phi(u_0) = u_0$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left[\Phi \left(\sum_{n=0}^1 \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} [\Phi(u_0 + \lambda u_1)]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} [u_0 + \lambda u_1]_{\lambda=0} = u_1$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\Phi \left(\sum_{n=0}^2 \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\Phi(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 \right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[u_1 + 2\lambda u_2 \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2} * 2u_2 = u_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[\Phi \left(\sum_{n=0}^3 \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[\Phi(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) \right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 \right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{6} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[u_1 + 2\lambda u_2 + 3\lambda^2 u_3 \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{6} \frac{d}{d\lambda} \left[2u_2 + 6\lambda u_3 \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{6} * 6u_3 = u_3
\end{aligned}$$

...

şeklinde bulunur. Bulunan bu polinomlar yardımı ile $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ler

$$u_1 = L_t^{-1} \left[L_x(u(x, t)) + A_0 \right]$$

$$u_1 = L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + A_0 \right]$$

$$u_1 = L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_0(x, t) \right) + A_0 \right]$$

$$u_1 = L_t^{-1} \left[L_x(\cos(\pi x)) + u_0 \right]$$

$$u_1 = L_t^{-1} \left[-\pi^2 (\cos(\pi x)) + \cos(\pi x) \right]$$

$$u_1 = L_t^{-1} \left[(1 - \pi^2) \cos(\pi x) \right]$$

$$u_1 = \int_0^t (1 - \pi^2) \cos(\pi x) dt$$

$$u_1 = (1 - \pi^2) (\cos(\pi x)) t \int_0^t$$

$$u_1 = (1 - \pi^2) (\cos(\pi x)) t$$

$$u_1 = (1 - \pi^2) t \cos(\pi x)$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} (1 - \pi^2)^2 t^2 \cos(\pi x)$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} (1 - \pi^2)^3 t^3 \cos(\pi x)$$

şeklinde elde edilir. Bu halde $u(x, t)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = \cos(\pi x) + (1 - \pi^2)t \cos(\pi x) + \frac{1}{2!}(1 - \pi^2)^2 t^2 \cos(\pi x) + \frac{1}{3!}(1 - \pi^2)^3 t^3 \cos(\pi x) + \dots$$

$$= e^{(1-\pi^2)t} \cos(\pi x)$$

biçiminde yazılır. Benzer şekilde x yönünde çözümü elde etmek için sınır koşulundan $u_0 = e^{(1-\pi^2)t}$ yazılır. t- yönünde çözümde elde edilen Adomian polinomları kullanılarak

$$u_1 = L_x^{-1} \left[L_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) - A_0 \right]$$

$$u_1 = L_x^{-1} \left[L_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_0(x, t) \right) - A_0 \right]$$

$$u_1 = L_x^{-1} \left[L_t \left(e^{(1-\pi^2)t} \right) - u_0 \right]$$

$$u_1 = L_x^{-1} \left[(1 - \pi^2) e^{(1-\pi^2)t} - e^{(1-\pi^2)t} \right]$$

$$u_1 = L_x^{-1} \left[e^{(1-\pi^2)t} (1 - \pi^2 - 1) \right]$$

$$u_1 = L_x^{-1} \left[e^{(1-\pi^2)t} (-\pi^2) \right]$$

$$u_1 = \int_0^x \int_0^x e^{(1-\pi^2)t} (-\pi^2) dx dx$$

$$u_1 = \int_0^x e^{(1-\pi^2)t} (-\pi^2) x dx$$

$$u_1 = -\frac{(\pi x)^2}{2!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u_2 = \frac{(\pi x)^4}{4!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u_3 = -\frac{(\pi x)^6}{6!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u(x, t) = e^{(1-\pi^2)t} - \frac{(\pi x)^2}{2!} e^{(1-\pi^2)t} + \frac{(\pi x)^4}{4!} e^{(1-\pi^2)t} - \frac{(\pi x)^6}{6!} e^{(1-\pi^2)t} + \dots$$

$$= e^{(1-\pi^2)t} \cos(\pi x)$$

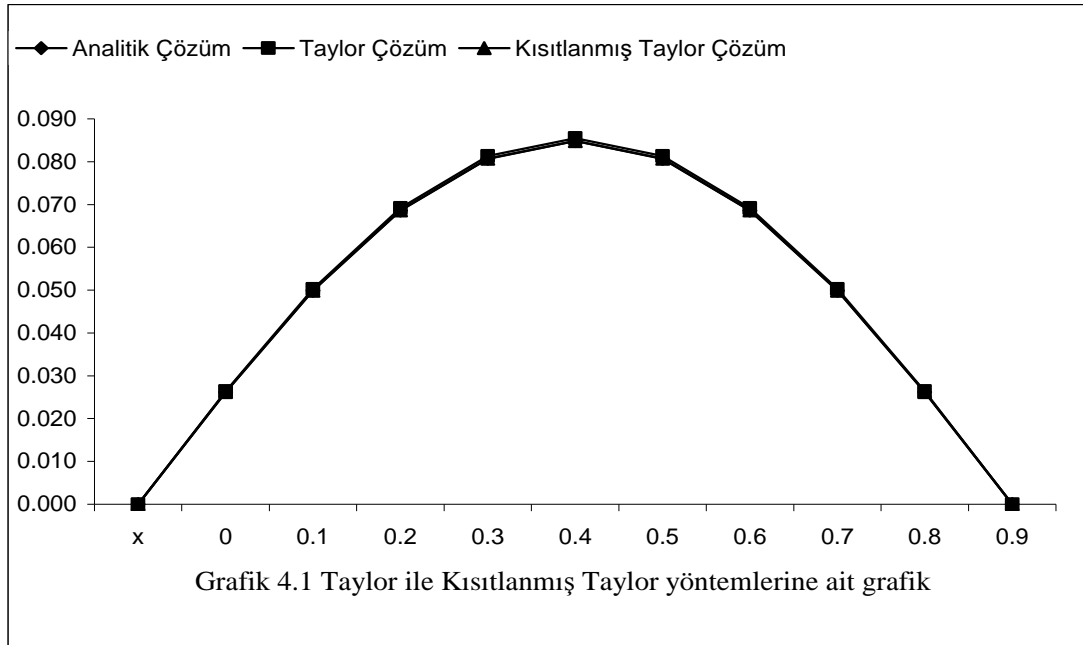
çözümü elde edilir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Sayısal Sonuçlar ve Grafikselle Değerlendirmeler

Çizelge 4.1 $t=0.25$ için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait sonuçlar.

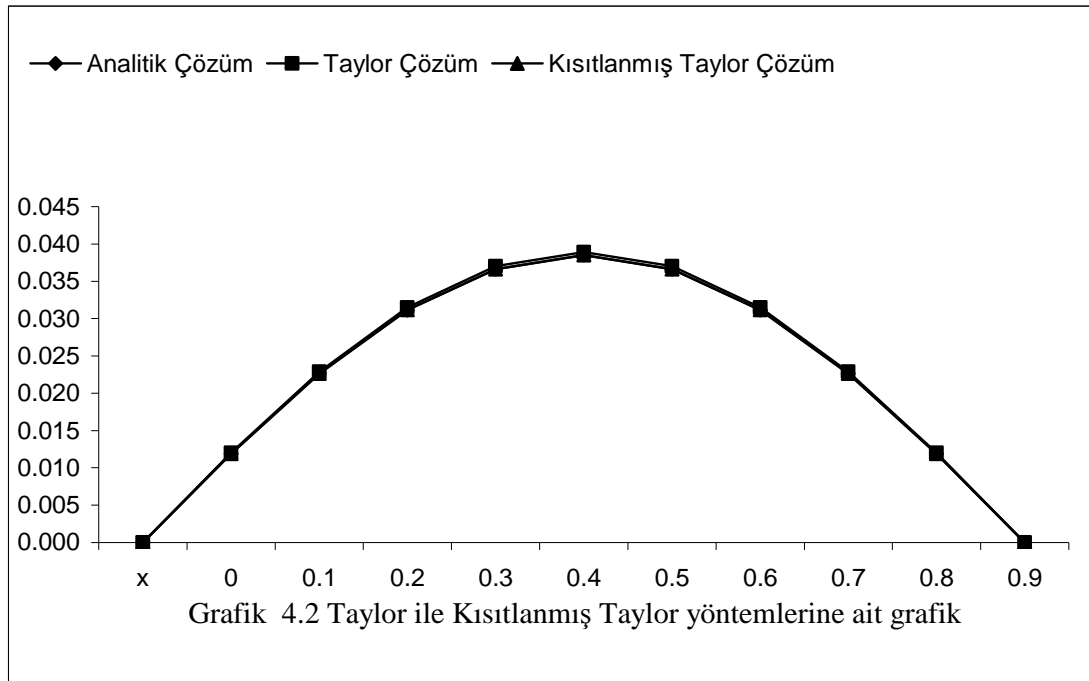
x	Analitik Çözüm	Taylor Çözüm	Kısıtlanmış Taylor Çözüm	Taylor Hata	Kısıtlanmış Taylor Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.026206178	0.026421182	0.026219744	0.000215004	0.00001356609
0.2	0.049847112	0.050260744	0.049871601	0.000408962	0.00002448882
0.3	0.068608664	0.069171552	0.068641678	0.000562888	0.00003301442
0.4	0.080654322	0.081316037	0.080692630	0.000661715	0.00003830834
0.5	0.084804972	0.085500741	0.084844825	0.000695768	0.00003985238
0.6	0.080654322	0.081316037	0.080691817	0.000661715	0.00003749547
0.7	0.068608664	0.069171552	0.068640133	0.000562888	0.00003146927
0.8	0.049847112	0.050256074	0.049869485	0.000408962	0.00002237280
0.9	0.026206178	0.026421182	0.026217369	0.000215004	0.00001119158
1	0	0	0	0	0



Çizelge 4.2 $t=0.33$ için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait sonuçlar.

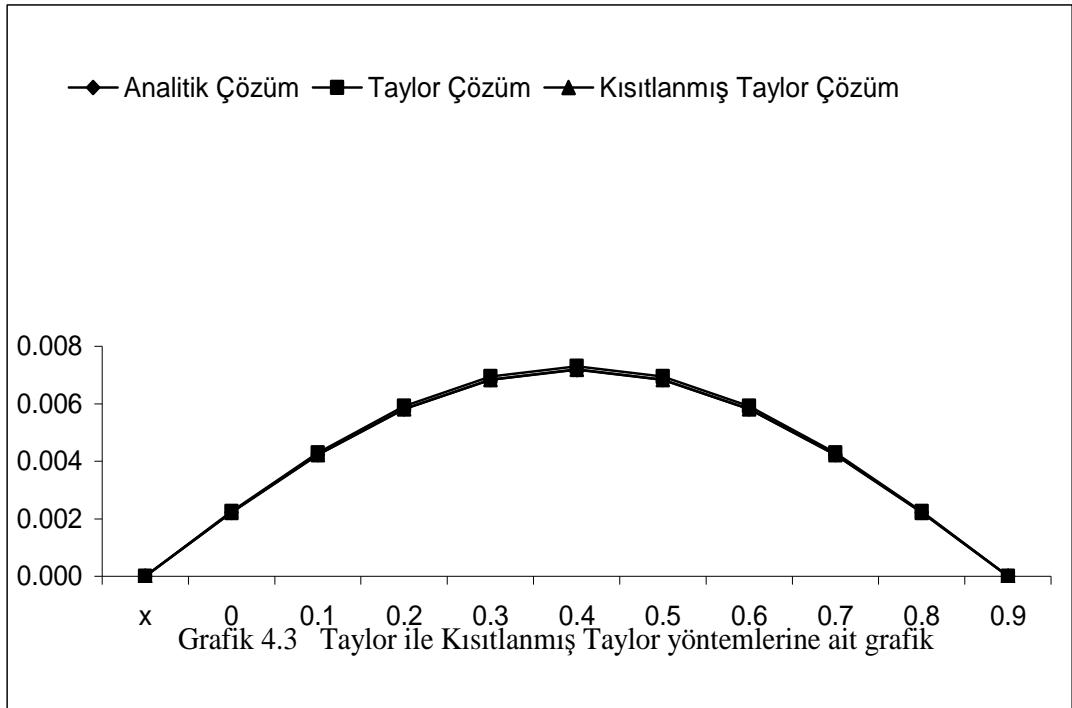
(h=0.1)

x	Anolitik Çözüm	Taylor Çözüm	Kısıtlanmış Taylor Çözüm	Taylor Hata	Kısıtlanmış Taylor Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.011898672	0.012027700	0.011904832	0.000215004	0.00000615956
0.2	0.022632620	0.022878046	0.022643739	0.000408962	0.00001111892
0.3	0.031151128	0.031488928	0.031166183	0.000562888	0.00001498990
0.4	0.036620348	0.037017455	0.036637741	0.000661715	0.00001739354
0.5	0.038504912	0.038922456	0.038523007	0.000695768	0.00001809460
0.6	0.036620348	0.037017455	0.036637372	0.000661715	0.00001702448
0.7	0.031151128	0.031488928	0.031165417	0.000562888	0.00001428834
0.8	0.022632620	0.022878046	0.022642778	0.000408962	0.00001015817
0.9	0.011898672	0.012027700	0.011903754	0.000215004	0.00000508144
1	0	0	0	0	0



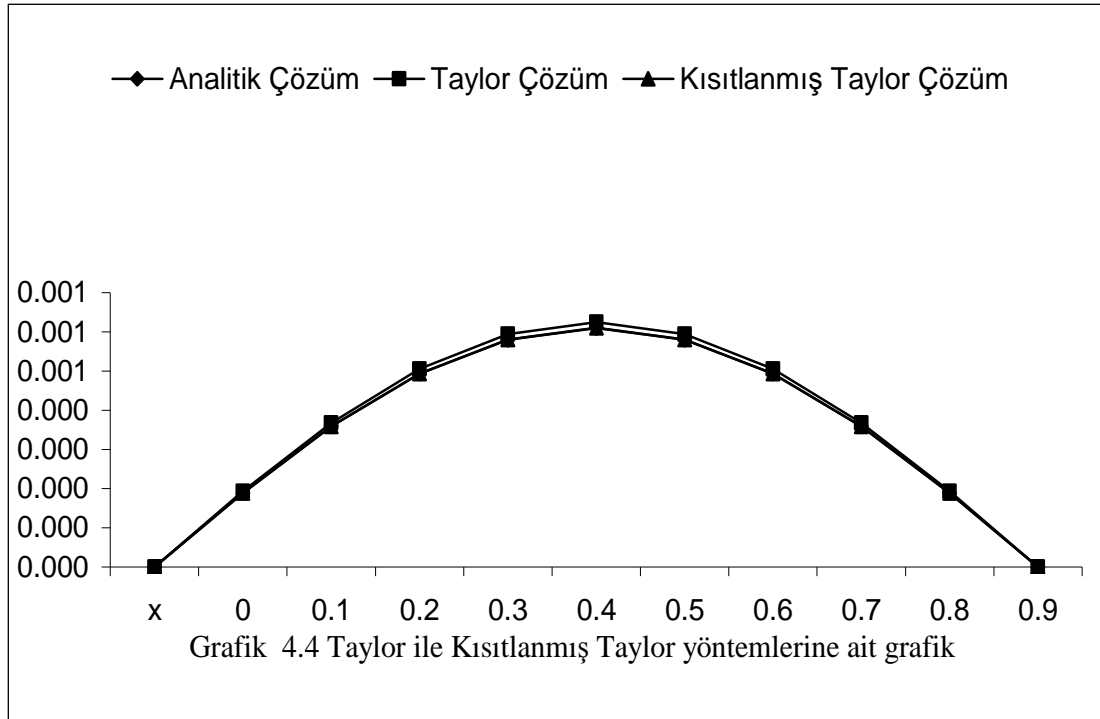
Çizelge 4.3 $t=0.5$ için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait sonuçlar.
($h=0.1$)

x	Anolitik Çözüm	Taylor Çözüm	Kısıtlanmış Taylor Çözüm	Taylor Hata	Kısıtlanmış Taylor Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.002222414	0.002259031	0.002223565	0.000036616	0.00000115047
0.2	0.004227283	0.004296932	0.004229360	0.000069649	0.00000207677
0.3	0.005818356	0.005914219	0.005821156	0.000095863	0.00000279979
0.4	0.006839888	0.006952581	0.006843136	0.000112694	0.00000324874
0.5	0.007191883	0.007310377	0.007195263	0.000118493	0.00000337968
0.6	0.006839888	0.006952581	0.006843067	0.000112694	0.00000317980
0.7	0.005818355	0.005914219	0.005821025	0.000095863	0.00000266875
0.8	0.004227283	0.004296932	0.004229180	0.000069649	0.00000189733
0.9	0.002222414	0.002259031	0.002223363	0.000036616	0.00000094910
1	0	0	0	0	0



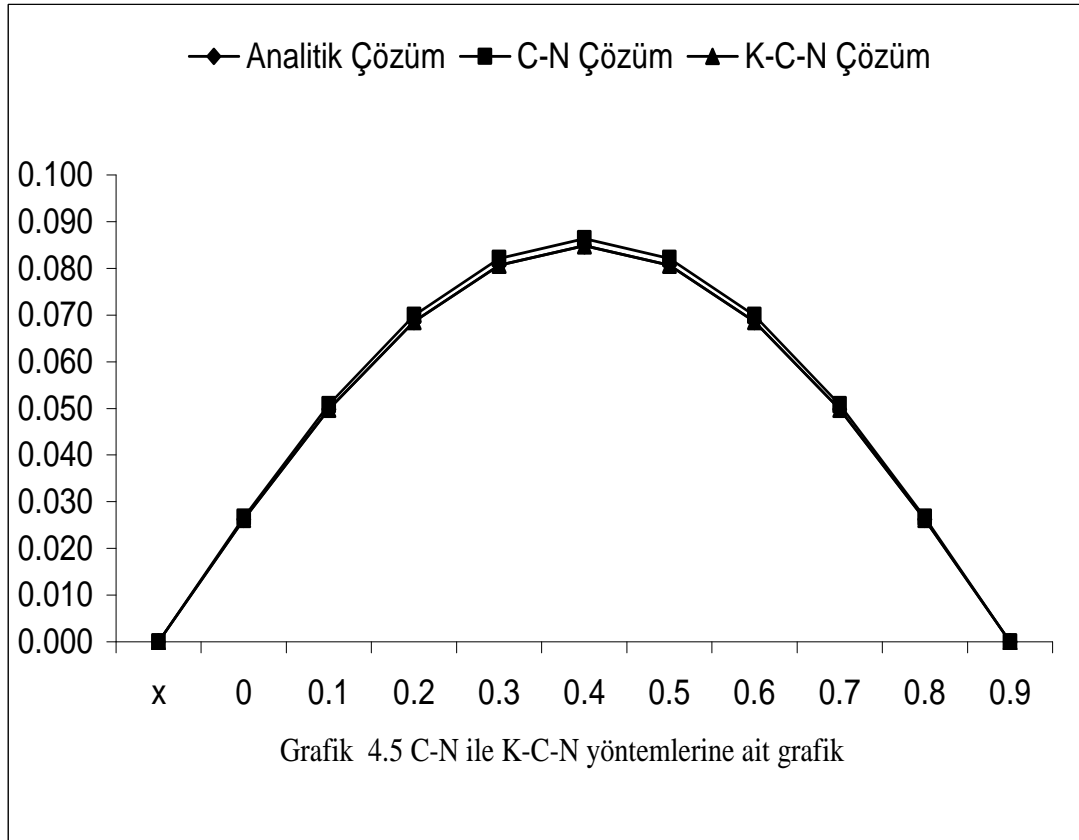
Çizelge 4.4 $t=0.75$ için Taylor ve Kısıtlanmış Taylor yöntemlerine ait sonuçlar.
($h=0.1$)

x	Analitik Çözüm	Taylor Çözüm	Kısıtlanmış Taylor Çözüm	Taylor Hata	Kısıtlanmış Taylor Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.000188472	0.000193149	0.000188569	0.000004677	0.00000009757
0.2	0.000358495	0.000367391	0.000358671	0.000008896	0.00000017612
0.3	0.000493426	0.000505670	0.000493663	0.000012245	0.00000023744
0.4	0.000580056	0.000594451	0.000580332	0.000014394	0.00000027551
0.5	0.000609907	0.000625043	0.000610194	0.000015135	0.00000028661
0.6	0.000580056	0.000594451	0.000580326	0.000014394	0.00000026966
0.7	0.000493255	0.000505670	0.000493652	0.000012245	0.00000022632
0.8	0.000358495	0.000367391	0.000358656	0.000008896	0.00000016090
0.9	0.000188472	0.000193149	0.000188855	0.000004677	0.00000008049
1	0	0	0	0	0



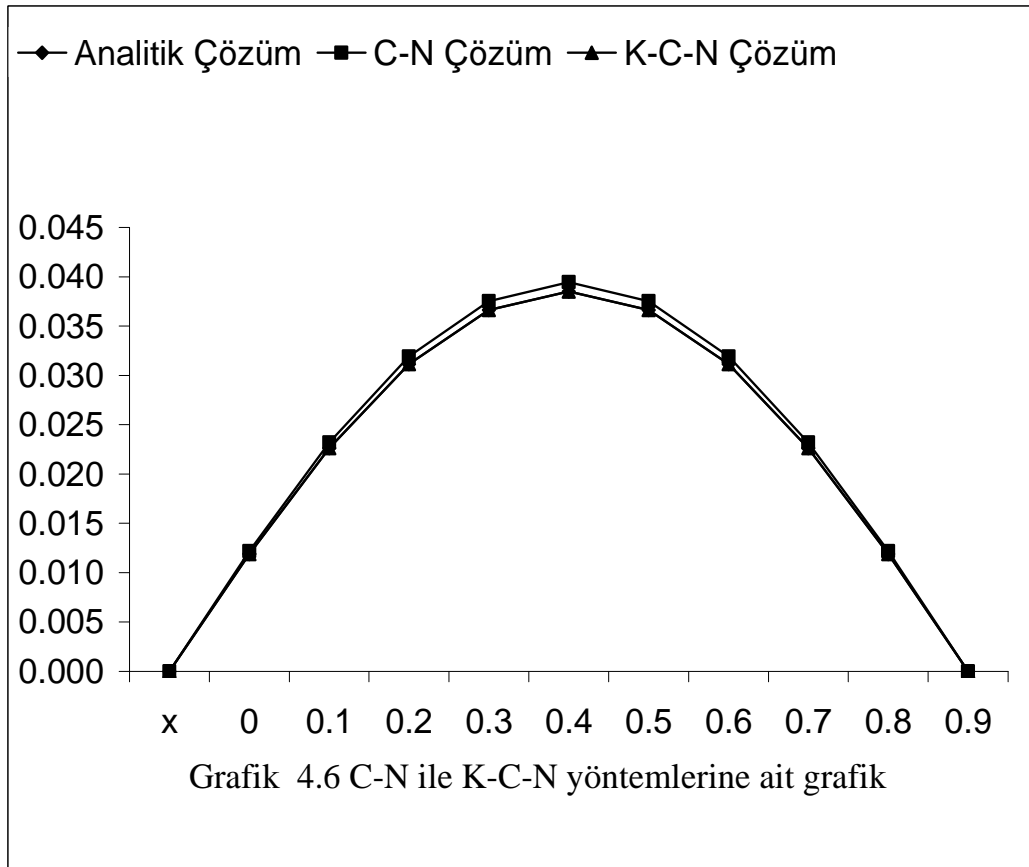
Çizelge 4.5 $t=0.25$ için $\theta = \frac{1}{2}$ C-N ve K-C-N yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$)

x	Anolitik Çözüm	C-N Çözüm	K-C-N Çözüm	C-N Hata	K-C-N Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.026206178	0.026689367	0.026206179	0.000483189	0.00000000093
0.2	0.049847112	0.050766192	0.049847114	0.000919080	0.00000000177
0.3	0.068608664	0.069873669	0.068608666	0.001265005	0.00000000245
0.4	0.080654322	0.082141425	0.080654325	0.001487103	0.00000000291
0.5	0.084804972	0.086368605	0.084804975	0.001563633	0.00000000306
0.6	0.080654322	0.082141425	0.080654325	0.001487103	0.00000000289
0.7	0.068608664	0.069873669	0.068608666	0.001265005	0.00000000245
0.8	0.049847112	0.050766192	0.049847114	0.000919080	0.00000000176
0.9	0.026206178	0.026689367	0.026206179	0.000483189	0.00000000099
1	0	0	0	0	0



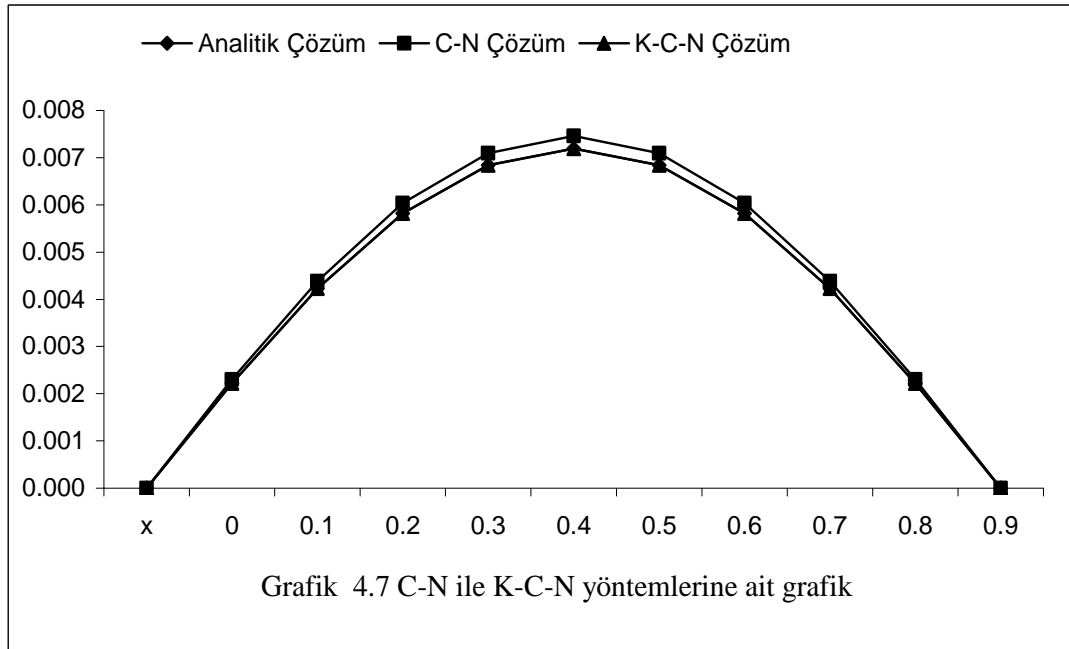
Çizelge 4.6 $t=0.33$ için $\theta = \frac{1}{2}$ C-N ve K-C-N yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$)

x	Analitik Çözüm	C-N Çözüm	K-C-N Çözüm	C-N Hata	K-C-N Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.011898672	0.012189115	0.011898673	0.000290442	0.00000000056
0.2	0.022632620	0.023185074	0.022632621	0.000552454	0.00000000105
0.3	0.031151128	0.031911516	0.031151130	0.000760388	0.00000000147
0.4	0.036620348	0.037514237	0.036620350	0.000893889	0.00000000172
0.5	0.038504912	0.039444803	0.038504914	0.000939891	0.00000000181
0.6	0.036620348	0.037514237	0.036620349	0.000893889	0.00000000172
0.7	0.031151128	0.031911516	0.031151130	0.000760388	0.00000000146
0.8	0.022632620	0.023185074	0.022632621	0.000552454	0.00000000106
0.9	0.011898672	0.012189115	0.011898673	0.000290442	0.00000000059
1	0	0	0	0	0



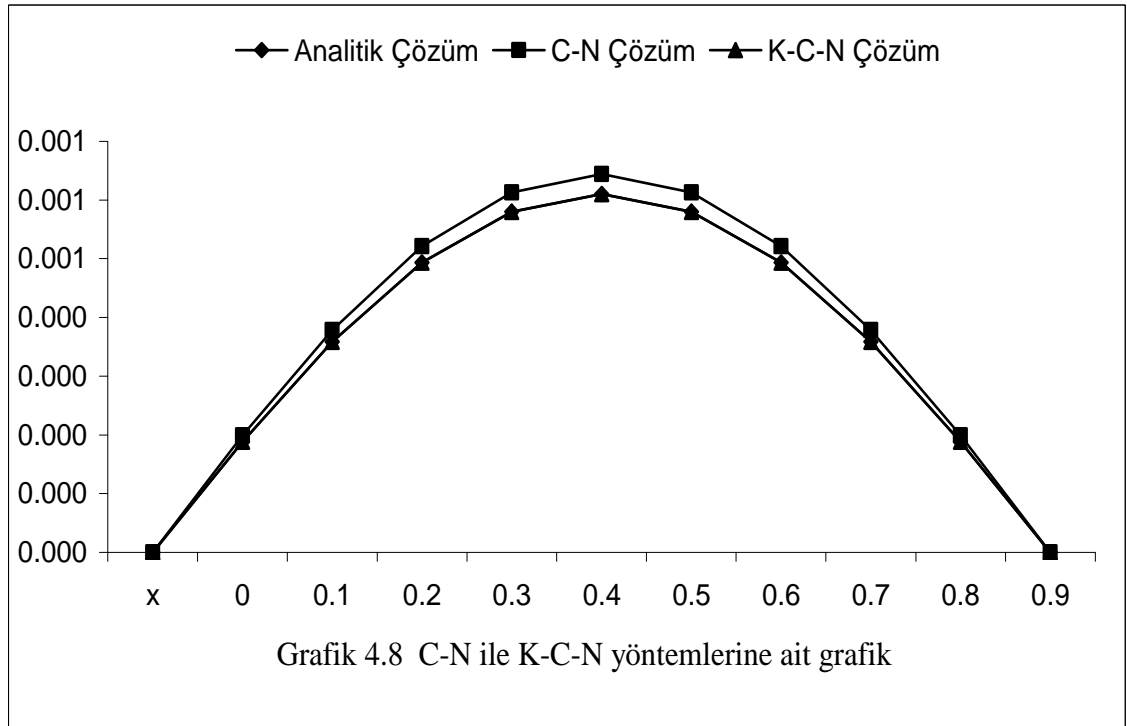
Çizelge 4.7 $t=0.5$ için $\theta = \frac{1}{2}$ C-N ve K-C-N yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$)

x	Analitik Çözüm	C-N Çözüm	K-C-N Çözüm	C-N Hata	K-C-N Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.002222414	0.002305123	0.002222414	0.000082709	0.00000000015
0.2	0.004227283	0.004384605	0.004227283	0.000157322	0.00000000029
0.3	0.005818356	0.006034891	0.005818356	0.000216535	0.00000000040
0.4	0.006839888	0.007094440	0.006839888	0.000254553	0.00000000048
0.5	0.007191883	0.007459536	0.007191884	0.000267653	0.00000000051
0.6	0.006839888	0.007094440	0.006839888	0.000254553	0.00000000048
0.7	0.005818355	0.006034891	0.005818356	0.000216535	0.00000000041
0.8	0.004227283	0.004384605	0.004227283	0.000157322	0.00000000030
0.9	0.002222414	0.002305123	0.002222414	0.000008271	0.00000000016
1	0	0	0	0	0



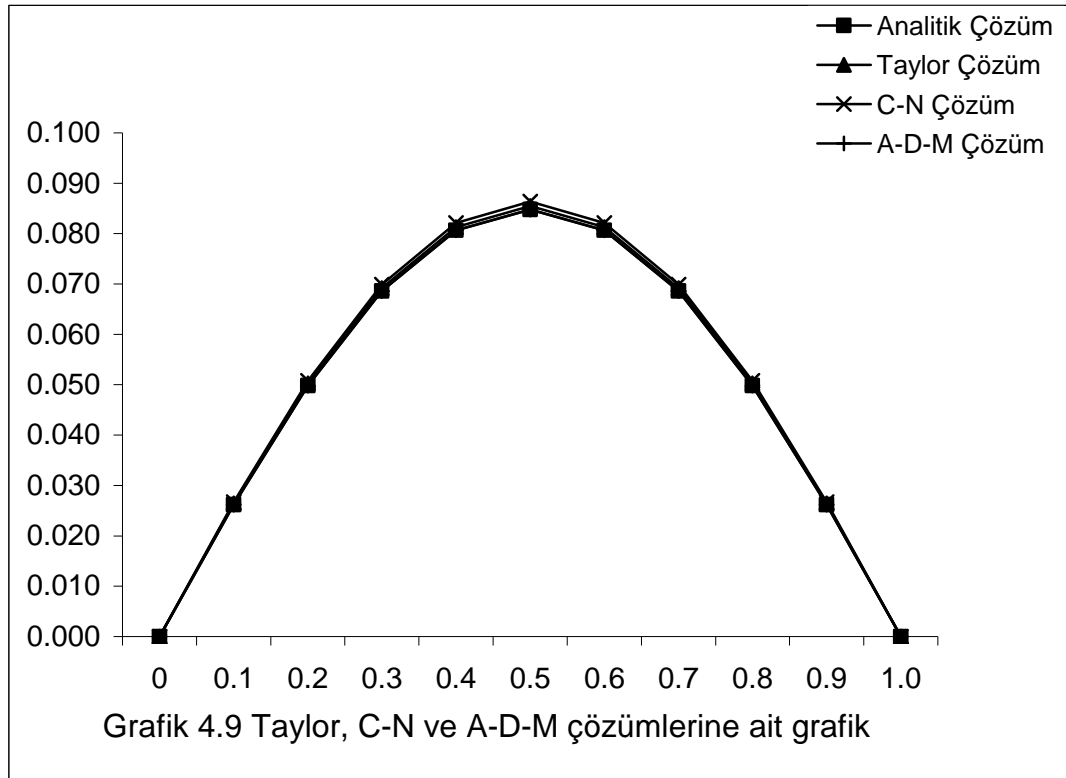
Çizelge 4.8 $t=0.75$ için $\theta = \frac{1}{2}$ C-N ve K-C-N yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$)

x	Anolitik Çözüm	C-N Çözüm	K-C-N Çözüm	C-N Hata	K-C-N Hata
0	0	0	0	0	0
0.1	0.000188472	0.000199090	0.000188472	0.000010619	0.00000000002
0.2	0.000358495	0.000378692	0.000358495	0.000020198	0.00000000004
0.3	0.000493426	0.000521225	0.000493426	0.000027800	0.00000000005
0.4	0.000580056	0.000612737	0.000580057	0.000032680	0.00000000006
0.5	0.000609907	0.000644270	0.000609908	0.000034362	0.00000000006
0.6	0.000580056	0.000612737	0.000580057	0.000032680	0.00000000006
0.7	0.000493255	0.000521225	0.000493426	0.000027800	0.00000000005
0.8	0.000358495	0.000378692	0.000358495	0.000020198	0.00000000004
0.9	0.000188472	0.000199090	0.000188472	0.000010619	0.00000000002
1	0	0	0	0	0



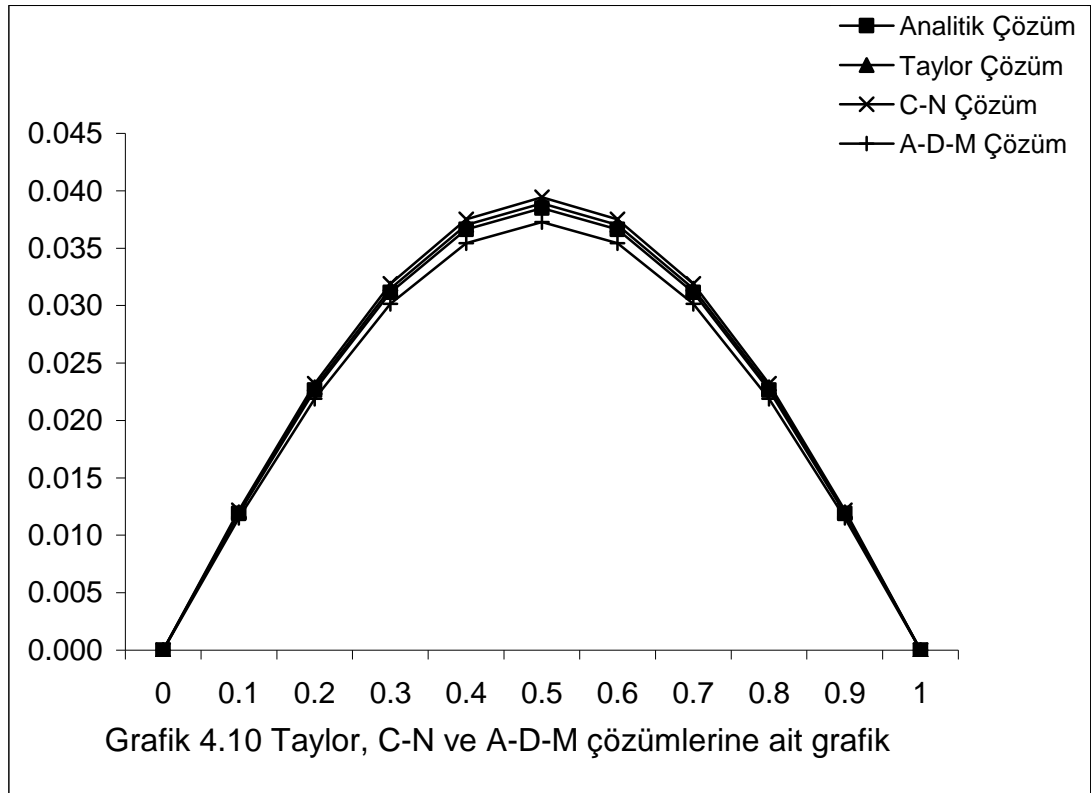
Çizelge 4.9 $t=0.25$ için Taylor , C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar.

x	Analitik Çözüm	Taylor Çözüm	C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.026206178	0.026421182	0.026689367	0.026206178
0.2	0.049847112	0.050260744	0.050766192	0.049847113
0.3	0.068608664	0.069171552	0.069873669	0.068608664
0.4	0.080654322	0.081316037	0.082141425	0.080654323
0.5	0.084804972	0.085500741	0.086368605	0.084804972
0.6	0.080654322	0.081316037	0.082141425	0.080654323
0.7	0.068608664	0.069171552	0.069873669	0.068608664
0.8	0.049847112	0.050256074	0.050766192	0.049847113
0.9	0.026206178	0.026421182	0.026689367	0.026206178
1	0	0	0	0



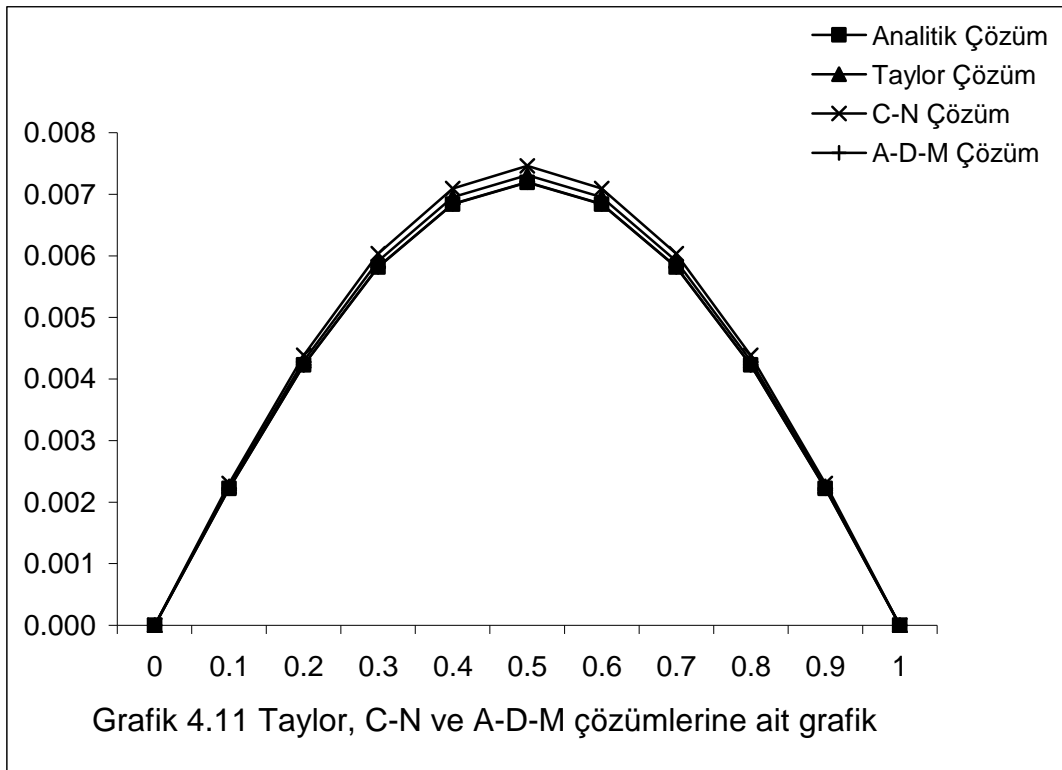
Çizelge 4.10 $t=0.33$ için Taylor, C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$) ($N=20$).

x	Analitik Çözüm	Taylor Çözüm	C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.011898672	0.012027700	0.012189115	0.011513591
0.2	0.02263262	0.022878046	0.023185074	0.02190015
0.3	0.031151128	0.031488928	0.031911516	0.030142973
0.4	0.036620348	0.037017455	0.037514237	0.035435188
0.5	0.038504912	0.038922456	0.039444803	0.037258765
0.6	0.036620348	0.037017455	0.037514237	0.035435188
0.7	0.031151128	0.031488928	0.031911516	0.030142973
0.8	0.02263262	0.022878046	0.023185074	0.02190015
0.9	0.011898672	0.012027700	0.012189115	0.011513591
1	0	0	0	0



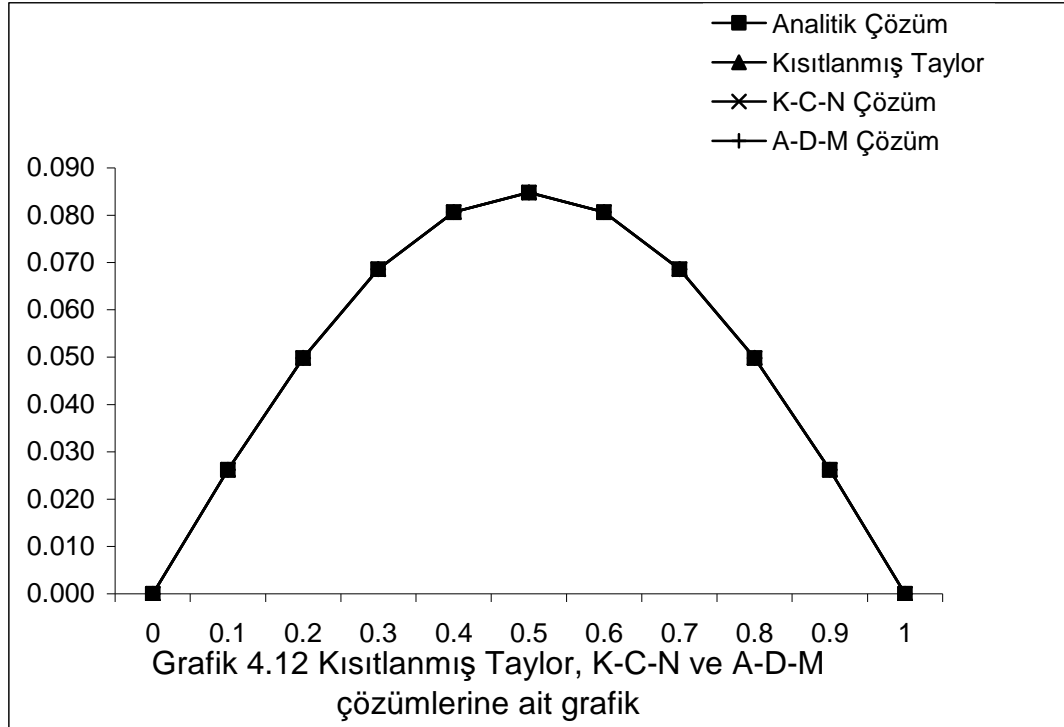
Çizelge 4.11 $t=0.5$ için Taylor , C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar . ($h=0.1$) ($N=20$)

x	Analitik Çözüm	Taylor Çözüm	C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.002222414	0.002259031	0.002305123	0.002224200
0.2	0.004227283	0.004296932	0.004384605	0.00423069
0.3	0.005818356	0.005914219	0.006034891	0.005823035
0.4	0.006839888	0.006952581	0.00709444	0.006845399
0.5	0.007191883	0.007310377	0.007459536	0.007197684
0.6	0.006839888	0.006952581	0.00709444	0.006845399
0.7	0.005818355	0.005914219	0.006034891	0.005823035
0.8	0.004227283	0.004296932	0.004384605	0.004230690
0.9	0.002222414	0.002259031	0.002305123	0.002224200
1	0	0	0	0



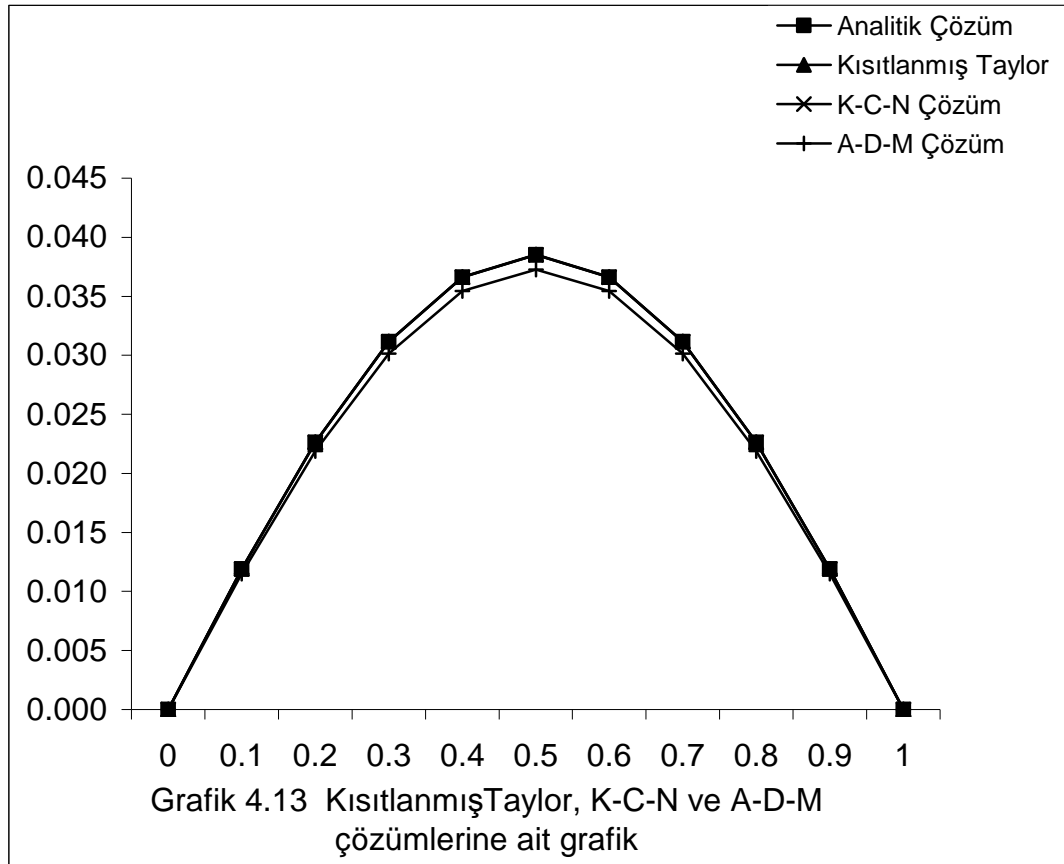
Çizelge 4.12 $t=0.25$ için Kısıtlanmış Taylor, K-C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$)

x	Analitik Çözüm	K-Taylor Çözüm	K-C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.026206178	0.026219744	0.026206179	0.026206178
0.2	0.049847112	0.049871601	0.049847114	0.049847113
0.3	0.068608664	0.068641678	0.068608666	0.068608664
0.4	0.080654322	0.08069263	0.080654325	0.080654323
0.5	0.084804972	0.084844825	0.084804975	0.084804972
0.6	0.080654322	0.080691817	0.080654325	0.080654323
0.7	0.068608664	0.068640133	0.068608666	0.068608664
0.8	0.049847112	0.049869485	0.049847114	0.049847113
0.9	0.026206178	0.026217369	0.026206179	0.026206178
1	0	0	0	0



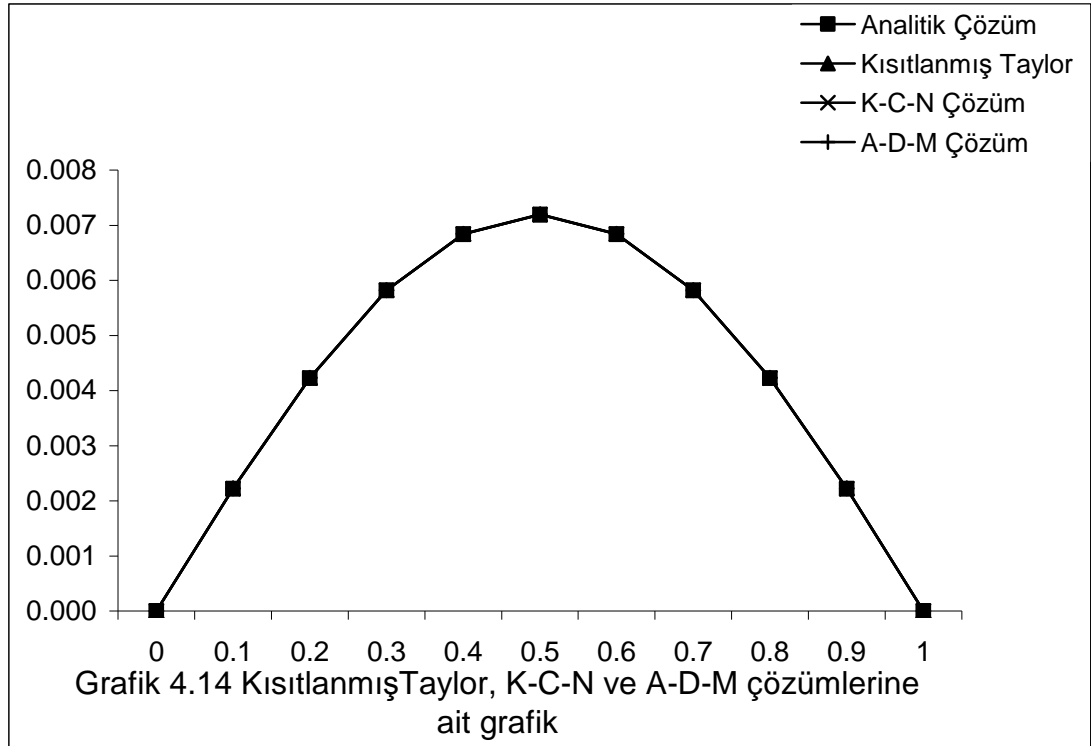
Çizelge 4.13 $t=0.33$ için Kısıtlanmış Taylor, K-C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$) ($N=20$)

x	Analitik Çözüm	K-Taylor Çözüm	K-C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.011898672	0.011904832	0.011898673	0.011513591
0.2	0.02263262	0.022643739	0.022632621	0.02190015
0.3	0.031151128	0.031166183	0.03115113	0.030142973
0.4	0.036620348	0.036637741	0.03662035	0.035435188
0.5	0.038504912	0.038523007	0.038504914	0.037258765
0.6	0.036620348	0.036637372	0.036620349	0.035435188
0.7	0.031151128	0.031165417	0.03115113	0.030142973
0.8	0.02263262	0.022642778	0.022632621	0.02190015
0.9	0.011898672	0.011903754	0.011898673	0.011513591
1	0	0	0	0



Çizelge 4.14 $t=0.5$ için Kısıtlanmış Taylor, K-C-N ve A-D-M yöntemlerine ait sonuçlar. ($h=0.1$) ($N=20$)

x	Analitik Çözüm	K-Taylor Çözüm	K-C-N Çözüm	A-D-M Çözüm
0	0	0	0	0
0.1	0.002222414	0.002223565	0.002222414	0.002224200
0.2	0.004227283	0.00422936	0.004227283	0.004230690
0.3	0.005818356	0.005821156	0.005818356	0.005823035
0.4	0.006839888	0.006843136	0.006839888	0.006845399
0.5	0.007191883	0.007195263	0.007191884	0.007197684
0.6	0.006839888	0.006843067	0.006839888	0.006845399
0.7	0.005818355	0.005821025	0.005818356	0.005823035
0.8	0.004227283	0.00422918	0.004227283	0.004230690
0.9	0.002222414	0.002223363	0.002222414	0.002224200
1	0	0	0	0



5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada birçok sonlu fark yöntemi ile birlikte Adomian ayrıştırma yöntemi bir boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denkleme uygulanmıştır. Bu tip denklemler için geliştirilen algoritmaların problemlerin çözümünde etkili sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Yöntem hata açısından ele alındığında burada geliştirilen yöntemlerin hata oranı diğer klasik yöntemlerle karşılaştırıldığında benzer sonuçlar elde edilmiştir.

İleride uygulanacak çalışmaların bu yönde geliştirilmiş algoritmalarından ve kolay hesaplama tekniklerini beraberinde getireceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Dehghan, M. 2003. Numerical Solution of one Dimensional Parabolic Inverse Problem. *Appl. Math. Comp.*, 136, 333-344

Dehghan, M. 2003. Finding a Control Parameter in One-Dimensional Parabolic Equations. *Appl. Math. Com.*, 135, 491-503

Dehghan, M. 2001. An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation. *Appl. Math. Modelling*, 25, 743-75

Hildebrand, F.B., 1987 *Introduction to Numerical Analysis*, Dover Publications, New York, 653p

Smith, G.D. 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 330p.

Türker, S., Engin, C., 1999, *Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınları, Adapazarı, 477p.

Wang, S., Lin, Y. 1989. A Finite Difference Solution to an Inverse Problem for Determining a Control Function in a Parabolic Partial Diferential Equation . *Inverse Problem*, 5, 631-640

Warming R.F., Hyett B.J., 1973. The Modified Equation Approach to the Stability And Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods. *j. Compt. Physics.*, 14, 159-179

EKLER**Ek 1 : Taylor yöntemi için Maple V Programı**

```

restart;
n:=10;
h:=evalf(1/n);
dx:=evalf(1/n);
k:=evalf(1/n^3);
dt:=evalf(1/n^3);
r:=k/h^2;
x:=array(1..11);
x[1]:=0;
for i from 1 to 10 do
x[i+1]:=x[i]+dx od:

t:=array(1..1001);
t[1]:=0;
for i from 1 to 1000 do
t[i+1]:=t[i]+dt od:
u:=array(1..1001,1..11);
f:=(t,x)->sin(Pi*x)*exp(-t*Pi^2);
for i to 1001 do
for j to 11 do
u[i,j]:=evalf(f(t[i],x[j])) od;
od;
yak:=array(1..1001,1..11);
g:=(x,t)->sin(Pi*x);
for i from 1 to 11 do
yak[1,i]:=evalf(g(x[i],t[1])) od;
for j from 1 to 1001 do
yak[j,1]:=0 od:

```

```

g1:=(x,t)->sin(Pi)*exp(-t*Pi^2);
for j from 1 to 1001 do
yak[j,11]:=evalf(g1(x[11],t[j])) od:
for i to 1000 do
for j from 2 to 10 do
yak[i+1,j]:=r*yak[i,j+1]+(1-2*r)*yak[i,j]+r*yak[i,j-1] od;
od;
for z from 1 to 1001 do

print(z*dt,yak[z,1],yak[z,2],yak[z,3],yak[z,4],yak[z,5],yak[z,6],yak[z,7],yak[z,8],yak
[z,9],yak[z,10],yak[z,11]) od;
with(linalg):
hata:=array(1..1001,1..11);
yak1:=array(1..1001,1..11);
hata1:=array(1..1001,1..11);
for i to 1001 do
for j to 11 do
yak1[i,j]:=-yak[i,j] od; od;
for i to 1001 do
for j to 11 do
hata1[i,j]:=evalf(u[i,j]) od;od;
for b to 1001 do

print(b*dt,hata1[b,1],hata1[b,2],hata1[b,3],hata1[b,4],hata1[b,5],hata1[b,6],hata1[b,7
],hata1[b,8],hata1[b,9],hata1[b,10],hata1[b,11]) od;
hata:=(matadd(yak1,hata1)):
for b to 1001 do

print(b*dt,hata[b,1],hata[b,2],hata[b,3],hata[b,4],hata[b,5],hata[b,6],hata[b,7],hata[b,
8],hata[b,9],hata[b,10],hata[b,11]) od;

with(plots):

```

```
tA:=plot([[0,yak[10,1]],[0.1,yak[10,2]],[0.2,yak[10,3]],[0.3,yak[10,4]],[0.4,yak[10,5]
],[0.5,yak[10,6]],[0.6,yak[10,7]],[0.7,yak[10,8]],[0.8,yak[10,9]],[0.9,yak[10,10]],[1,y
ak[10,11]]],colour=red);
```

```
display({tA});
```

```
tB:=plot([[0,u[10,1]],[0.1,u[10,2]],[0.2,u[10,3]],[0.3,u[10,4]],[0.4,u[10,5]],[0.5,u[10,
6]],[0.6,u[10,7]],[0.7,u[10,8]],[0.8,u[10,9]],[0.9,u[10,10]],[1,u[10,11]]],colour=blue,s
tyle=point);
```

```
display({tB});
```

```
display({tA,tB});
```

Ek 2 :C-N yöntemi için Maple V Programı

```

restart;
n:=10;
dx:=evalf(1/n);
h:=evalf(1/n);
dt:=evalf(1/n^2);
k:=evalf(1/n^2);
r:=k/h^2;
x:=array(1..11);
x[1]:=0;
for i to 10 do x[i+1]:=x[i]+dx od;
t:=array(1..101);
t[1]:=0;
for i to 100 do t[i+1]:=t[i]+dt od;
theta:=1/2;
f:=(x,t)->exp(-t*Pi^2)*sin(Pi*x);
tam:=array(1..11,1..101);
for i to 11 do
for j to 101 do
tam[i,j]:=evalf(f(x[i],t[j])) od;
od;
g:=(x,t)->sin(Pi*x);
yak:=array(1..11,1..101);
for j to 101 do yak[1,j]:=0 od;
h:=(x,t)->exp(-t*Pi^2)*sin(Pi);
for i to 11 do
for j to 101 do
yak[11,j]:=evalf(h(x[i],t[j])) od;
od;
for i from 2 to 10 do yak[i,1]:=evalf(g(x[i])) od;
b:=array(1..9);
a:=array(1..9,1..9);

```

```

for i to 9 do for j to 9 do a[i,j]:=0 od; od;
for i to 9 do a[i,i]:=1+2*r*theta od;
for i to 8 do a[i,i+1]:=-r*theta od;
for i to 8 do a[i+1,i]:=-r*theta od;
print(a);
with(linalg):
for j from 2 to 101 do
for i to 9 do
b[i]:=(1-theta)*r*yak[i,j-1]+(1-2*r*(1-theta))*yak[i+1,j-1]+(1-theta)*r*yak[i+2,j-1]
od;
uc:=linsolve(a,b);
for i from 2 to 10 do yak[i,j]:=uc[i-1] od;
od:
hata:=array(1..11,1..101);
tam1:=array(1..11,1..101);
for i to 11 do
for j to 101 do
tam1[i,j]:=-tam[i,j] od;od;
hata:=matadd(tam1,yak):
for z from 1 to 80 do

print(z*dt,yak[1,z],yak[2,z],yak[3,z],yak[4,z],yak[5,z],yak[6,z],yak[7,z],yak[8,z],yak
[9,z],yak[10,z],yak[11,z]) od;

for z from 1 to 80 do

print(z*dt,tam[1,z],tam[2,z],tam[3,z],tam[4,z],tam[5,z],tam[6,z],tam[7,z],tam[8,z],ta
m[9,z],tam[10,z],tam[11,z]) od;

for z from 1 to 80 do

print(z*dt,hata[1,z],hata[2,z],hata[3,z],hata[4,z],hata[5,z],hata[6,z],hata[7,z],hata[8,z]
,hata[9,z],hata[10,z],hata[11,z]) od;

```

```
with(plots):
```

```
ta:=plot([[0,tam[1,101]],[0.1,tam[2,101]],[0.2,tam[3,101]],[0.3,tam[4,101]],[0.4,tam[5,101]],[0.5,tam[6,101]],[0.6,tam[7,101]],[0.7,tam[8,101]],[0.8,tam[9,101]],[0.9,tam[10,101]],[1,tam[11,101]]],style=line,color=black):
```

```
display(ta);
```

```
tb:=plot([[0,yak[1,101]],[0.1,yak[2,101]],[0.2,yak[3,101]],[0.3,yak[4,101]],[0.4,yak[5,101]],[0.5,yak[6,101]],[0.6,yak[7,101]],[0.7,yak[8,101]],[0.8,yak[9,101]],[0.9,yak[10,101]],[1,yak[11,101]]],style=point,color=black):
```

```
display(tb);
```

```
display({ta,tb});
```


ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ferhan AKTAŞ BAŞÇI

Doğum Yeri : Kaş

Doğum Tarihi : 1980

Medeni Hali : Evli

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : Fethiye Lisesi (1994-1998)

Lisans : Atatürk Üniv. Kazım Karabekir Eğit. Fak. İlköğretim Matematik

Öğretmenliği (1998-2002)

Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullarda Öğretmenlik

Ağrı (2004-2005)

Muğla (2005-)