TEMMUZ 2019 Yüksek Lisans Tezi - Matematik EBRU KAYA

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ YAPILAR ÜZERİNDE NORMLU VE METRİK UZAYLAR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU KAYA

TEMMUZ 2019

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ YAPILAR ÜZERİNDE NORMLU VE METRİK UZAYLAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Ebru KAYA

Temmuz 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI ADI

Tezin Başlığı : Neutrosophic Üçlü Yapılar Üzerinde Normlu ve Metrik Uzaylar

Öğrencinin Adı Soyadı: Ebru KAYA

Sınav Tarihi : 09.07.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Memet ŞAHİN
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Memet ŞAHİN	…………………….
Doç. Dr. Necati OLGUN	…………………..
Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA	…………………..

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Ebru KAYA

ABSTRACT

NORMED AND METRİC SPACES ON NEUTROSOPHIC TRİPLET STRUCTURE

KAYA, Ebru
M.Sc in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Memet ŞAHİN
July 2019
54 pages

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the historical process of neutrosophic sets is mentioned. In the second chapter, basic information about the concept of a fuzzy set is given. In continuation, the concept of the intuitive fuzzy set which is an upper generalization of the concept of a fuzzy set was examined and its general properties were reminded. In addition, the concepts of neutrosophic set, single-valued neutrosophic set, interval valued neutrosophic set which is an upper generalization of the concept of intuitive fuzzy sets was examined and its general properties and operations were reminded. In the third chapter, the definition of neutrosophic triplet sets and some concepts in neutrosophic triple set are examined. In the fourth chapter, some basic definitions n and theorems related to neutrosophic triple partial inner product space are given. In the fifth chapter, some basic definitions, examples and theorems about neutrosophic v-generalized metric space and neutrosophic partial v-generalized metric space are given. Finally, in the sixth chapter, suggestions were made about the study.

Keywords: Neutrosophic Triplet Sets, Neutrosophic Triplet Partial Inner Product Space, Neutrosophic Triplet V-Generalized Metric Space, Neutrosophic Triplet Partial V-Generalized Metric Space.

ÖZET

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ YAPILAR ÜZERİNDE NORMLU VE METRİK UZAYLAR

KAYA, Ebru
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Memet ŞAHİN
Temmuz 2019
54 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde neutrosophic kümelerin tarihi sürecinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde bulanık küme kavramı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Devamında bulanık küme kavramının bir üst genellemesi olan sezgisel bulanık küme kavramı incelendi ve genel özellikleri hatırlatılmıştır. Ayrıca, sezgisel bulanık kümelerin de bir üst genellemesi olan neutrosophic küme, tek değerli neutrosophic küme ve aralık değerli neutrosophic küme kavramları incelendi ve genel özellikleri ve işlemleri hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde neutrosophic üçlü kümeler ve neutrosophic üçlü kümelerde bazı kavramlar incelendi. Dördüncü bölümde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde neutrosophic v-genelleştirilmiş metrik uzayı ve neutrosophic kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı ile ilgili bazı temel tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise çalışmayla ilgili önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophic Üçlü Kümeler, Neutrosophic Üçlü Kısmi İç Çarpım Uzay, Neutrosophic Üçlü V-Genelleştirilmiş Metrik Uzay, Neutrosophic Üçlü Kısmi V-Genelleştirilmiş Metrik Uzay.

‘‘Canım aileme…’

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr.Memet ŞAHİN ´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim annem Rahime KAYA, babam Kadir KAYA ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
v_A	A kümesinin üye olmama fonksiyonu
$\mu_A(x)$	A’da bir x elemanının üyelik derecesi
$\mu_A(X)$	A kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi
$v_A(x)$	A’da bir x elemanının üye olmama derecesi
$\pi_A(x)$	A’da bir x elemanının kararsızlık derecesi
$\emptyset$	Boş Küme
$\vee$	En küçük üst sınır
$\wedge$	En büyük alt sınır
T_K	K neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu
F_K	K neutrosophic kümesinin yanlışlık fonksiyonu
I_K	K neutrosophic kümesinin kararsızlık fonksiyonu
$anti(a)$	a’nın ters elemanı
$neut(a)$	a’nın etkisiz elemanı
$d(a,b)$	a ve b arasındaki öklidyen uzaklık
$< >$	iç çarpım fonksiyonu
$\| \; \|$	norm fonksiyonu

BÖLÜM I

GİRİŞ

Günlük yaşantımızda belirsizlik içeren birçok durumla karşı karşıya kalırız. Bir şeyi tanımlarken, bir olayı açıklarken veya bir durum karşısında karar verirken göreceli (kesinlik içermeyen) ifadeler kullanırız. Bir kişinin yaş durumuna göre ona; yaşlı, orta yaşlı, genç, çok genç veya çok yaşlı deriz. Başka bir örnekle, sürücü adayının araba sürmeye başladığı zaman, tekerleğin tam sağ veya tam sol konumda iken, tekerleği düz konuma getirebilmek için direksiyonunun yarım tur mu, bir tur mu ya da bir buçuk tur mu döndüreceği konusunda kararsız kalabilir. Bütün bunlar insan beyninin kesin olmayan durumlarda nasıl davranacağına ve olayları nasıl yorumlayacağına dair birer örnektir.

Bu durumun üstesinden gelebilmek için çok farklı matematiksel modellemeler kullanılmaktadır. Ancak belirsizlik içeren kavramları klasik matematik mantığı ile açıklamak her zaman mümkün değildir. Dolayısıyla 1965 yılında Lotfi A. Zadeh[1] tarafından bulanık küme teorisi ortaya atılmıştır. Bulanık küme teorisi; X evrensel kümesinin elemanlarını [0,1] aralığına götüren bir üyelik fonksiyonu yardımıyla ifade edilmiştir. Bu teoriye göre üyelik fonksiyonunun yanında X evrensel kümesinin elemanlarını [0,1] aralığına götüren bir üye olmama fonksiyonunu da ilave ederek bulanık kümenin daha genel halini, 1986 yılında K. Atanassov[4] tarafından sezgisel bulanık küme teorisi ortaya atılmıştır.

Sezgisel bulanık küme teorisinde; X evrensel kümesindeki her bir elemanın üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonlarının toplamı, her zaman [0,1] aralığında olma şartını sağlayacaktır. Bu kısıtlama, belirsizlik içeren problemler için modelleme sıkıntısı oluşturmuştur. Bu durumun üstesinden gelebilmek için 1999 yılında Smarandache[6], bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorisini içeren neutrosophic küme teorisi adı verilen yeni bir küme teorisini sundu. Daha sonra neutrosophic kümelerin özel hali olan tek değerli neutrosophic kümeler Wang ve arkadaşları[3] tarafından 2010 yılında geliştirildi. Tek değerli neutrosophic küme teorisi; birbirinden bağımsız [0,1] aralığında tanımlı üç fonksiyon yardımıyla karakterize edilmiştir. Yani üyelik fonksiyonu yerine doğruluk fonksiyonu $T_K \in [0,1]$, üye olmama fonksiyonu yerine yanlışlık fonksiyonu $F_K \in [0,1]$ ve ilave olarak kararsızlık fonksiyonu için $I_K \in [0,1]$ kullanılmıştır. Buradaki doğruluk fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonunun [0,1] aralığında birbirinden bağımsız olması, sezgisel bulanık kümelerde yapılan modellemelerden daha esnek ve daha gerçekçi olmasını sağlamıştır. Dolayısıyla bir konu hakkında karar verirken emin olmadığımız durumlarda kararsızlık fonksiyonu kullanılır. Belirsizlik içeren birçok durumların modellenmesi için, oldukça geniş bir yer tutmaktadır.

Tezin diğer bölümleri ise aşağıdaki gibi organize edilmiştir: İkinci bölümde Bulanık Kümeler, Bulanık Küme Kavramı, Sezgisel Bulanık Kümeler, Neutrosophic Kümeler, Tek Değerli Neutrosophic Kümeler, Aralık Değerli Neutrosophic Kümelerle ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde Neutrosophic Üçlü Kümeler ile ilgili temel bilgiler verilip, devamında Neutrosophic Üçlü Kümeler ile ilgili bazı kavramlar hatırlatılmıştır. Dördüncü bölümde Neutrosophic Üçlü Kısmi İç Çarpım Uzayı ile ilgili tanım, örnek ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde Neutrosophic Üçlü ν-Genelleştirilmiş Metrik Uzayı ve Neutrosophic Üçlü Kısmi ν-Genelleştirilmiş Metrik Uzayı ile ilgili tanım, örnek ve teoremler verilmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

2.1 Bulanık Kümeler

1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların daha önce saptanmış olan kurallara kesin bir şekilde uyup uymadığı incelenmiştir. Bu incelemeler doğrultusunda örneğin, bir önermenin daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış olduğu söylenmiştir. Dolayısıyla klasik anlamda düşünce sistemimiz iki seçenekli bir mantığa dayanmaktadır. Buna karşın yaşadığımız evrende birçok olay vardır ki bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi zor durumda bırakabilir, başka bir deyişle bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin, bir sınıfta bulunan öğrencilerden önereceğimiz etkinliği yapmaları istenilsin. Renkli toplardan oluşan bir kutu düşünelim. Öğrencilerden kutunun içerisinden sarı renkte olanları seçip bir küme oluşturmaları istenilsin. Eğer öğrenci klasik kümeye göre hareket ederse seçtiği top sarı ise "kümeye dahil", seçtiği top sarı değilse "kümeye dahil değildir" diyecektir. Öğrencinin elindeki top, sarı ile sarı olmama arasındaki bir renk tonajında ise nasıl hareket edecektir? Biraz daha bu ifadeyi genişletmek gerekirse; herhangi bir öğrencinin seçtiği sarımtrak diye nitelendirdiği top, A kişisine göre sarı top iken B kişisine göre sarı top değildir. Peki "Sarımtırak rengindeki topun kümedeki üyelik değeri nedir?" diye sorduğumuzda ne tür bir yanıt vermemiz doğru olur sizce? İşte tam olarak üye ya da üye değil diyemeyeceğimiz bu gibi durumlar için kısmi üyelik derecesi kavramı oldukça yardımcı olabilir[9].

Bu gözlemler ve çeşitli araştırmalar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin, kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durum ilk kez 1965 yılında, Lotfi A. Zadeh tarafından "Fuzzy Sets" [1] adlı makalesinde yayınlanmıştır.

2.2 Bulanık Küme Kavramı

Matematikte bir kümenin belirtilmesini iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir ifadeyle, A kümesinin tanımlı olması için evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı "A kümesinin elemanı mıdır?" sorusuna kesin bir şekilde "evet elemanıdır" ya da "hayır elemanı değildir" cevabını vermemiz gerekirdi. Bunu $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere A kümesini

$\forall x \in X$ için;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade edilirdi[2]. Zadeh'in [1] de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre, $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere A kümesindeki x ($x \in X$) elemanının üyelik derecesi r dir.

Tanım 2.2.1:

$X = \{ x : x \in X \}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için, $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

kümesine, X'in **A bulanık kümesi** denir.

Bir X kümesini, $\emptyset$ kümeyi ve A kümesini;

$X = \{(x, 1) : x \in X \}$, $\emptyset = \{(x, 0) : x \in X \}$, $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X \}$

şeklinde ifade edilebiliriz[1].

Uyarı 2.2.1:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda X üzerinde A bulanık kümesinin gösterimi: $x_j \in X$ için;

$A = \{ \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n\}$

$$A = \{\sum_{j=1}^{n} \mu_A(x_j)/x_j \}$$

şeklinde ifade edilebilir[7].

Tanım 2.2.2:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ bulanık küme olsun. $\forall\, x \in X$ için, $\mu_A(x) = 0$ ise A bulanık kümesi, **boş küme** olarak adlandırılır[1].

Tanım 2.2.3:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subseteq X$ bulanık iki küme olsun. $\forall\, x \in X$ için;

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \Leftrightarrow A = B$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.2.4:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

ile tanımlıdır[1].

Tanım 2.2.5:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subseteq X$ bulanık iki küme olsun. $\forall\, x \in X$ için**;**

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

dir[1].

Tanım 2.2.6:

Her $x \in X$ için A ile B bulanık iki küme olsun. Bulanık iki kümenin birleşimi $C = A \cup B$ bulanık kümesi ile verilsin ve C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_C(x) = \max\ [\, \mu_A(x), \mu_B(x)\,],$$

veya kısaltılmış olarak

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

şeklindedir[1].

Tanım 2.2.7:

Her $x \in X$ için A ile B bulanık iki küme olsun. Bulanık iki kümenin kesişimi $C = A \cap B$ bulanık kümesi ile verilsin ve C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_C(x) = \min\ [\, \mu_A(x), \mu_B(x)\,],$$

veya kısaltılmış olarak

$$\mu_C(x) = \mu_A\ (x) \wedge \mu_B(x)$$

şeklindedir[1].

X'in bulanık kümeleri arasındaki birleşim ve arakesit işlemlerindeki özellikler, klasik kümelerin birleşim ve arakesit işlemlerindeki özelliklerle, aşağıdaki iki özellik dışında aynıdır.

Klasik kümelerde;

$$A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$$

olmasına karşılık, bulanık kümelerde;

$$A \cap A^c \neq \emptyset, A \cup A^c \neq X$$

olabilir.

Örnek 2.2.1

$\forall\, x \in X$ için

$\mu_A(x) = \frac{1}{4},\ \mu_{A^c}(x) = \frac{3}{4}$

$\mu_{A \cap A^c} = \min\{\ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\ \} = \min\ \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow A \cap A^c \neq \emptyset$$

$\mu_{A \cap A^c} = \max\{\ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\ \}\ = \max\ \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow A \cup A^c \neq X.$$

Tanım 2.2.8: Sonlu bulanık A kümesi için kardinalite $|A|$ ile tanımlanır ve

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

ile gösterilir[8,9].

2.3. Sezgisel Bulanık Kümeler

Bu bölümde sezgisel bulanık küme kavramı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Bu bölüm [4], [5], [10] ve [21]'den derlenmiştir.

Tanım 2.3.1:

$X \neq \emptyset$ evrensel bir küme olsun. $\forall\, x \in X$ için, $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ olmak üzere,

$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ ve $\nu_A : X \rightarrow [0,1]$

fonksiyonları ile sezgisel bulanık küme

$$A = \{< x, \mu_A(x),\ \nu_A(x) >: x \in X\}$$

ile tanımlanır. Burada; $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ sırasıyla $x \in X$'in üyelik derecesi ve üye olmama derecesidir.

Uyarı 2.3.1:

X evrensel kümesi üzerinde A sezgisel bulanık kümesi: $\forall\, x \in X$ için;

$A = \{< x, \mu_A(x),\ \nu_A(x) >\}$ veya $A = < \mu_A(x),\ \nu_A(x) >/\ x$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.3.2:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda, X üzerindeki sezgisel bulanık bir A kümesinin gösterimi: $x_i \in X$ için;

$$A = < x_1, \mu_A(x_1), \nu_A(x_1) > + < x_2, \mu_A(x_2), \nu_A(x_2) > + \cdots + < x_n, \mu_A(x_n), \nu_A(x_n) >$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} < x_i, \mu_A(x_j), \nu_A(x_j) >$$

şeklinde ifade edilebilir.

Uyarı 2.3.3:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda, X üzerindeki sezgisel bulanık bir A kümesinin gösterimi $x_i \in X$ için;

$$A = < \mu_A(x_1), \nu_A(x_1) >/x_1 + < \mu_A(x_2), \nu_A(x_2) >/x_2 + \cdots + < \mu_A(x_n), \nu_A(x_n) >/x_n$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} < \mu_A(x_j), \nu_A(x_j)/x_j$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.3.2:

X boş kümeden farklı evrensel küme üzerinde

A = { < x, $\mu_A(x)$, $\nu_A(x)$ >: x ϵ X } sezgisel bulanık küme verildiğinde A'da bir x elemanının **kararsızlık derecesi** aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

dir.

Örnek 2.3.1:

Genel kurul toplantısında, oy çokluğu ile okul aile birliğinin seçilmesi ideal bir örnek olarak verilebilir. Toplantıdaki seçimi üç kriterde inceleyebiliriz: Birincisi, seçime oy verenler, ikincisi seçime oy vermeyenler, üçüncüsü ise seçime kararsız kalanlar. Dolayısıyla sezgisel bulanık kümenin anlamlarını kolay bir şekilde, seçim kuralı örneği ile sezgisel olarak yorumlayabiliriz. Sezgisel bulanık kümeyi,

B = < k, 0.7, 0.2 > olarak verelim.

Buradaki k, seçimde aday olan birisidir. O halde basit bir biçimde; adayın üye olma derecesi $\mu_B(k)$ = 0.7 ve üye olmama derecesi $\nu_B(k)$ = 0.2, dolayısıyla kararsızlık derecesi de $\pi_B(k)$ = 1- $\mu_B(k)$ - $\nu_B(k)$ = 0.1 bulunur.

Öyleyse B sezgisel bulanık kümesine ait olan k adayının, üye olma derecesi 0.7 ve üye olmama derecesi 0.2'dir. Kararsızlık ister B kümesine ait olsun ya da olmasın derecesi 0.1'e eşittir. Bu olayı bir seçim seneryosu ile anlatmak gerekirse: Genel kurulda k adayına oy veren 10 kişi olduğunu varsayalım. Kurul sonucuna göre; k adayına oy verenlerin sayısı 7, oy vermeyenlerin sayısı 2, kararsız olanların sayısı 1'dir. Oransal olarak ifade etmek gerekirse; k adayına oy verenlerin oranı

$7/10 = 0.7$, k adayına oy vermeyenlerin oranı $2/10$ = 0.2, kararsız olanların oranı

$1/10$ = 0.1'dir. Bu üç oransal değerlerinin sezgisel bulanık B kümesinde sırasıyla üye olma derecesi $\mu_B(k)$, üye olmama derecesi $\nu_B(k)$ ve kararsızlık derecesi de $\pi_B(k)$' e karşılık gelir. Sonuç olarak oy çokluğu ile okul aile birliği seçimini sezgisel bulanık bir B kümesi ile belirtmiş olduk.

Tanım 2.3.3:

A sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni $\mathbf{A^c}$ ile gösterilir ve

$$A^c = \{ < x, \nu_A(x), \mu_A(x) >| \, x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.4:

B sezgisel bulanık kümesinin, A sezgisel bulanık kümesini kapsaması:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için; } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi **AUB** ile gösterilir ve

$$A \cup B = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) > | \, x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi **A∩B** ile gösterilir ve

$$A \cap B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) > | \, x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin eşitliği $\mathbf{A = B}$ ile gösterilsin ve

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için; } \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ ve } \nu_A(x) = \nu_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.8:

A ve B sezgisel bulanık kümelerinin toplamı **A + B** ile gösterilir ve

$$A + B = \{< x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x).\nu_B(x) > \, | \, x \in X\}$$

dir.

Tanım 2.3.9:

A ve B sezgisel bulanık kümelerinin çarpımı **A.B** ile gösterilir ve

$$A.B = \{< x, \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x).\nu_B(x) > | \ x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3.2:

$X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ evrensel kümesi üzerinde

$A = < x_1, 0.4, 0.5 > + < x_2, 0.2, 0.3 > + < x_3, 0.2, 0.2 >$,

$B = < x_1, 0.1, 0.2 > + < x_2, 0.2, 0.6 > + < x_3, 0.1, 0.5 >$

sezgisel bulanık iki küme olsun. A^c, AUB, A∩B, A+B, A.B değerlerini hesaplayalım.

$A^c = \{ < x, \nu_A(x), \mu_A(x) > | \ x \in X \}$

$A^c = < x_1, 0.5, 0.4 > + < x_2, 0.3, 0.2 > + < x_3, 0.2, 0.2 >$

dir.

$AUB = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) > | \ x \in X \}$

$AUB = < x_1, 0.4\vee 0.1, 0.5\wedge 0.2 > + < x_2, 0.2\vee 0.2, 0.3\wedge 0.6 > + < x_3, 0.2\vee 0.1, 0.2\wedge 0.5 >$

$= < x_1, 0.4, 0.2 > + < x_2 , 0.2, 0.3 > + < x_3, 0.2, 0.2 >$

dir.

$A\cap B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) > | \ x \in X \}$

$= < x_1, 0.4\wedge 0.1, 0.5\vee 0.2 > + < x_2, 0.2\wedge 0.2, 0.3\vee 0.6 > + < x_3, 0.2\wedge 0.1, 0.2\vee 0.5 >$

$= < x_1, 0.1, 0.5 > + < x_2, 0.2, 0.6 > + < x_3, 0.1, 0.5 >$

dir.

$A+B = \{< x, \mu_A(x)+\mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x).\nu_B(x) > | \ x \in X \}$

$= < x_1, 0.4+0.1-0.5x0.2, 0.5x0.2 > + < x_2, 0.2+0.2-0.3x0.6, 0.3x0.6 > +$

$< x_3, 0.2+0.1-0.2x0.5, 0.2x0.5 >$

$= < x_1, 0.4, 0.2 > + < x_2, 0.22, 0.18 > + < x_3, 0.2, 0.1>$

dir.

A.B = $\{< x, \mu_A(x). \mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x). \nu_B(x) > | x \in X \}$

$= < x_1$, 0.4x0.1, 0.5+0.2-0.5x0.2 > + $< x_2$, 0.2x0.2, 0.3+0.6-0.3x0.6> +

$< x_3$, 0.2x0.1,0.2+0.5-0.2x0.5>

$= < x_1, 0.04, 0.6 > + < x_2, 0.04, 0.72 > + < x_3, 0.02, 0.6 >$

dir.

2.4 Neutrosophic Kümeler

Bu bölüm [3] ve [22]'den derlenmiştir.

Tanım 2.4.1:

X evrensel bir küme ve x ∈ X olsun. X üzerinde K neutrosophic kümesi, bir T_K doğruluk fonksiyonundan, bir I_K kararsızlık fonksiyonundan ve bir F_K yanlışlık fonksiyonundan karakterize edilir. $T_K(x)$, $I_K(x)$ ve $F_K(x)$ $]0^-, 1^+[$ aralığının alt kümesidir. Öyle ki $T_K: X \to]0^-, 1^+[$, $I_K: X \to]0^-, 1^+$ ve $F_K: X \to]0^-, 1^+[$ dır. Böylece $T_K(x)$, $I_K(x)$ ve $F_K(x)$'in toplamı

$$0^- \leq \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \leq 3^+$$

dır.

Tanım 2.4.2:

Her x ∈ X için K neutrosophic kümesinin tümleyeni **c(K)** ile gösterilir ve c(K) neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$T_{c(K)}(x) = \{1^+\} - T_K(x)$

$I_{c(K)}(x) = \{1^+\} - I_K(x)$

$F_{c(K)}(x) = \{1^+\} - F_K(x)$

şeklindedir.

Tanım 2.4.3:

Her x ∈ X için L Neutrosophic kümesinin, K neutrosophic kümesini kapsaması:

$K \subseteq L \Leftrightarrow \inf T_K(x) \leq \inf T_L(x),\ \sup T_K(x) \leq \sup T_L(x)$

$\inf I_K(x) \geq \inf I_L(x),\ \sup I_K(x) \geq \sup I_L(x)$

$\inf F_K(x) \geq \inf F_L(x),\ \sup F_K(x) \geq \sup F_L(x)$

dir.

Tanım 2.4.4:

Her x ∈ X için K ile L neutrosophic kümelerinin birleşimi M neutrosophic kümesi

M = K∪L ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu,

kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$T_M(x) = T_K(x) + T_L(x) - T_K(x) \text{x}\, T_L(x)$

$I_M(x) = I_K(x) + I_L(x) - I_K(x) \text{x}\, I_L(x)$

$F_M(x) = F_K(x) \text{ x } F_L(x) - F_K(x) \text{ x } F_L(x)$

dir.

Tanım 2.4.5:

Her x ∈ X için K ile L neutrosophic kümelerinin kesişimi M neutrosophic kümesi

M = K∩L ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu,

kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$T_M(x) = T_K(x) \text{ x } T_L(x)$,

$I_M(x) = I_K(x) \text{ x } I_L(x)$

$F_M(x) = F_K(x) \text{ x } F_L(x)$

dir.

2.5 Tek Değerli Neutrosophic Küme

Bu bölüm [3] ve [22]'den derlenmiştir.

Tanım 2.5.1:

X evrensel bir küme olsun. $\forall$ x $\in$ X, $0 \leq \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \leq 3$ olmak üzere,

$T_K: X \rightarrow [0,1]$, $I_K: X \rightarrow [0,1]$ ve $F_K: X \rightarrow [0,1]$

fonksiyonları ile X üzerinde bir K tek değerli neutrosophic küme

$$K = \{< x, T_K(x), I_K(x), F_K(x) > \mid x \in X\}$$

ile tanımlanır. Burada $T_K(x)$, $I_K(x)$ ve $F_K(x)$ sırasıyla $x \in$ X'in doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık derecesidir.

Uyarı 2.5.1:

X evrensel kümesi sonlu olduğunda, bu küme üzerinde K tek değerli neutrosophic küme: $x_j \in X$ için;

$$K = \sum_{j=1}^{n} < T_K(x_j), I_K(x_j), F_K(x_j) > / x_j$$

şeklinde gösterilebilir.

Uyarı 2.5.2:

K tek değerli neutrosophic kümesinin X üzerinde sürekli olması durumunda kümenin gösterimi;

$$A = \int_{x \in X} < T_K(x), I_K(x), F_K(x) > / x$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.5.1:

Varsayalım ki; bir şirket, belli bir miktar sermayesini değerlendirmek için bir araştırma yapsın. Bunun için X = $\{ x_1, x_2, x_3 \}$ kümesini dikkate alsın. Burada x_1= risk, x_2 = performans, x_3 = çevresel faktör olsun. Bunun için alanında uzman kişilerle bir anket yapıyor. Anket sonucunu bir “iyi derece”, bir “belirsizlik” ve bir de “kötü derece” olarak belirliyor. Buna göre anket sonuçlarını iki küme şeklinde yazalım. X üzerinde bir K tek değerli neutrosophic küme

K = < 0.3, 0.4, 0.5 > $/x_1$ + < 0.5, 0.2, 0.3 > $/x_2$ + < 0.7, 0.2, 0.2 > $/x_3$

ve X üzerinde bir L tek değerli neutrosophic küme

L = < 0.6, 0.1, 0.2 >/ x_1 + < 0.3, 0.2, 0.6 >/ x_2 + < 0.4, 0.1, 0.5 >/ x_3

şeklinde yazılır.

Tanım 2.5.2:

Her x ∈ X için K tek değerli neutrosophic kümesinin tümleyeni **c(K)** ile gösterilir ve c(K) tek değerli neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$\mathrm{T}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{F}_{\mathrm{K}}(x)$

$\mathrm{I}_{\mathrm{c(K)}}(x) = 1 - \mathrm{I}_{\mathrm{K}}(x)$

$\mathrm{F}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(x)$

dir.

Örnek 2.5.2:

Örnek 2.5.1’de bir K tek değerli neutrosophic kümesinin tümleyeni;

x_1 elemanı için; $\mathrm{T}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{F}_{\mathrm{K}}(x) = 0.5$,

$\mathrm{I}_{\mathrm{c(K)}}(x) = 1 - \mathrm{I}_{\mathrm{K}}(x) = 1 - 0.6 = 0.4$ ve $\mathrm{F}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(x) = 0.3$

x_2 elemanı için;$\mathrm{T}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{F}_{\mathrm{K}}(x) = 0.3$,

$\mathrm{I}_{\mathrm{c(K)}}(x) = 1 - \mathrm{I}_{\mathrm{K}}(x) = 1 - 0.2 = 0.8$ ve $\mathrm{F}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(x) = 0.5$

x_3 elemanı için; $\mathrm{T}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{F}_{\mathrm{K}}(x) = 0.2$,

$\mathrm{I}_{\mathrm{c(K)}}(x) = 1 - \mathrm{I}_{\mathrm{K}}(x) = 1 - 0.2 = 0.8$, $\mathrm{F}_{\mathrm{c(K)}}(x) = \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(x) = 0.7$.

Dolayısıyla

c(K) = < 0.5, 0.6, 0.3 >/ x_1 + < 0.3, 0.8, 0.5 >/ x_2 + < 0.2, 0.8, 0.7 >/ x_3

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.3:

Her $x \in X$ için L tek değerli neutrosophic kümesinin, K tek değerli neutrosophic kümesini kapsaması:

$$K \subseteq L \Leftrightarrow T_K(x) \leq T_L(x)$$
$$I_K(x) \leq I_L(x)$$
$$F_K(x) \geq F_L(x)$$

dir.

Tanım 2.5.4:

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin eşitliği **K = L** ile gösterilir ve

$$K = L \Leftrightarrow K \subseteq L \text{ ve } L \subseteq K$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.5:

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin birleşimi M tek değerli neutrosophic kümesi M = KUL ile gösterilir ve M tek değerli neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_M(x) = \max\{ T_K(x), T_L(x)\}$$
$$I_M(x) = \max\{ I_K(x), I_L(x) \}$$
$$F_M(x) = \min\{ F_K(x), F_L(x) \}$$

dir.

Örnek 2.5.3:

Örnek 2.5.1’de K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin birleşimi

$K \cup L = < 0.6, 0.4, 0.2 >/ x_1 + < 0.5, 0.8, 0.3 >/ x_2 + < 0.7, 0.2, 0.2 >/ x_3$

dir.

Tanım 2.5.6:

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin kesişimi M tek değerli neutrosophic kümesi $M = K \cap L$ ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$\mathrm{T_M}(x) = \min \{ \mathrm{T_K}(x), \mathrm{T_L}(x) \}$$

$$\mathrm{I_M}(x) = \min \{ \mathrm{I_K}(x), \mathrm{I_L}(x) \}$$

$$\mathrm{F_M}(x) = \max \{ \mathrm{F_K}(x), \mathrm{F_L}(x) \}$$

dir.

Örnek 2.5.4:

Örnek 2.5.1'de K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin kesişimi

$K \cap L = < 0.3, 0.4, 0.5 >/ x_1 + < 0.3, 0.2, 0.6 >/ x_2 + < 0.4, 0.1, 0.5 >/ x_3$

dir.

Tanım 2.5.7:

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin farkı M tek değerli neutrosophic kümesi **M = K / L** ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$\mathrm{T_M}(x) = \min \{ \mathrm{T_K}(x), \mathrm{F_L}(x) \}$$

$$\mathrm{I_M}(x) = \min \{ \mathrm{I_K}(x), 1 - \mathrm{I_L}(x) \}$$

$$\mathrm{F_M}(x) = \min \{ \mathrm{F_K}(x), \mathrm{T_L}(x) \}$$

dir.

Örnek 2.5.5:

Örnek 2.5.1'de K ve L tek değerli neutrosophic kümelerinin farkı

$K / L = < 0.2, 0.4, 0.6 >/ x_1 + < 0.5, 0.2, 0.3 >/ x_2 + < 0.5, 0.2, 0.2 >/ x_3$

dir.

2.6 Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler

Bu bölüm [11] ve [22]'den derlenmiştir.

Tanım 2.6.1:

X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X,\ 0 \le \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \le 3$

olmak üzere,

$T_K(x) = [\inf T_K(x), \sup T_K(x)]$,

$I_K(x) = [\inf I_K(x), \sup I_K(x)]$,

$F_K(x) = [\inf F_K(x), \sup F_K(x)] \subseteq [0,1]$,

fonksiyonları ile X üzerinde bir K aralık değerli neutrosophic küme

$$K = \{< x, T_K(x), I_K(x), F_K(x) > \mid x \in X\}$$

dir.

Sadece [0,1] in alt birim aralığı değerlendirilir ve bu alt birim aralık neutrosophic kümenin bir alt aralığıdır. Dolayısıyla tüm aralık değerli neutrosophic kümeler, açık bir şekilde neutrosophic kümelerdir.

BÖLÜM III

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ YAPILAR

Bu bölümde neutrosophic üçlü kümeler ve neutrosophic üçlü kümelerde bazı kavramlar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bu bölüm [12], [13], [14], [15], [16], [17], [19]'dan derlenmiştir.

3.1 Neutrosophic Üçlü Kümeler

Tanım 3.1.1:

N herhangi bir küme ve * bir ikili işlem olsun. Eğer, N kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa (N, *) kümesine, **neutrosophic üçlü küme** denir.

$\forall$ a $\in$ N için;

i) a*neut(a) = neut(a)*a = a olacak şekilde bir neut(a) elemanı vardır.

ii) a*anti(a) = anti(a)*a = neut(a) olacak şekilde bir anti(a) elemanı vardır.

Burada anti(a) ve neut(a) elemanları, N kümesine aittir.

Ayrıca bir a $\in$ N için neutrosophic üçlü (a, neut(a), anti(a)) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2:

(N, *) neutrosophic üçlü bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa N

neutrosophic üçlü grup olarak adlandırılır.

- (N, *) iyi tanımlanmışsa yani,

Herhangi bir a, b $\in$ N için; a*b $\in$ N

- (N, *) birleşme özelliğine sahipse yani,

$\forall$ a, b, c $\in$ N için; (a*b)*c = a*(b*c).

Tanım 3.1.3:

(N, *) neutrosophic üçlü grup olsun.

N, **değişmeli neutrosophic üçlü gruptur.** $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, b $\in$ N için a*b = b*a.

Önerme 3.1.1:

(N,*) neutrosophic üçlü bir grup ve * bir ikili işlem olsun.

a, b $\in$ N için;

(1) a*b = a*c $\Leftrightarrow$ neut(a)*b = neut(a)*c

(2) b*a = c*a $\Leftrightarrow$ b*neut(a) = c*neut(a)

(3) anti(a)*b = anti(a)*c $\Rightarrow$ neut(a)*b = neut(a)*c

(4) b*anti(a) = c*anti(a) $\Rightarrow$ b*neut(a) = c*neut(a)

sağlanır.

İspat:

(1): a*b = a*c olduğunu varsayalım. * işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise anti(a) $\in$ N vardır.

anti(a)*a*b = anti(a)*a*c = [anti(a)*a]*b = [anti(a)*a]*c = neut(a)*b = neut(a)*c

Diğer taraftan, neut(a)*b = neut(a)*c olsun.

a*neut(a)*b = **a***neut(a)*c = [a*neut(a)]*b = [a*neut(a)]*c = a*b = a*c dir.

(2): b*a = c*a olduğunu varsayalım. * işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise anti(a) $\in$ N vardır.

b*a*anti(a) = c*a*anti(a) = b*[a*anti(a)] = c*[a*anti(a)] = b*neut(a) = c*neut(a) dır.

(3): anti(a)*b = anti(a)*c olduğunu varsayalım. * işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise a $\in$ N vardır.

a*anti(a)*b = a*anti(a)*c = [a*anti(a)]*b = [a*anti(a)]*c = neut(a)*b = neut(a)*c dır

(4): b*anti(a) = c*anti(a) olduğunu varsayalım. * işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise a $\in$ N vardır.

b*anti(a)*a = c*anti(a)*a = b*[anti(a)*a] = c*[anti(a)*a] = b*neut(a) = c*neut(a) elde edilir□

Teorem 3.1.1:

(N, *) değişmeli neutrosophic üçlü bir grup ve * bir ikili işlem olsun.

a, b ∈ N için;

(i) neut(a)*neut(b) = neut(a*b)

(ii) anti(a)*anti(b) = anti(a*b) dir.

İspat:

(i) İlk önce eşitliğin sol tarafını düşünelim.

a*neut(a)*neut(b)*b = [a*neut(a)]*[neut(b)*b] = a*b dir.

Şimdi de eşitliğin sağ tarafını düşünelim.

a*neut(a*b)*b = [a*b]*[neut(a*b)] = a*b dir.

(ii) İlk önce eşitliğin sol tarafını düşünelim. (i) teoremi ve * birleşme özelliğini kullanarak,

a*anti(a)*anti(b)*b = [a*anti(a)]*[anti(b)*b] = neut(a)*neut(b) = neut(a*b).

Şimdi de eşitliğin sağ tarafını düşünelim.

a*anti(a*b)*b = [a*b]*[anti(a*b)] = neut(a*b)

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır □

Teorem 3.1.2:

(N, *) neutrosophic üçlü grup ve * bir ikili işlem ve a ∈ N olsun.

(i) neut(a)*neut(a) = neut(a)

(ii) anti(a)*neut(a) = neut(a)*anti(a) = anti(a).

İspat:

(i): a*neut(a)*neut(a) = a*neut(a) = [a*neut(a)]*neut(a) = [a*neut(a)] =

a*neut(a) = a

a = a.

Genel olarak sıfırdan farklı pozitif bir n tamsayısı için;

$(\mathrm{neut}(a))^n$ = neut(a).

(ii): a*neut(a)*anti(a) = a*anti(a) = [a*neut(a)]*anti(a) = a*anti(a) =

a*anti(a) = neut(a)

neut(a) = neut(a).

Benzer şekilde,

a*anti(a)*neut(a) = a*anti(a) = [a*anti(a)]*neut(a) = a*anti(a) =

neut(a) = neut(a).

Tanım 3.1.4:

(N, *) neutrosophic üçlü bir küme ve S kümesi N nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. (S,*) neutrosophic üçlü bir küme ise S **neutrosophic üçlü kümenin bir alt kümesi** olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.3:

(N, *) neutrosophic üçlü bir grup olsun. a ∈ N için;

a = neut(a) ise, neut(a) = anti(a) = a

olacak şekilde bir anti(a) vardır.

İspat:

Neutrosophic üçlü küme tanımından,

anti(a)*a*anti(a) = anti(a)*anti(a)*a = anti(a)*neut(a)

[anti(a)*a]*anti(a) = anti(a)*[anti(a)*a] = anti(a)*neut(a)

neut(a)*anti(a) = anti(a)* neut(a) = anti(a)*neut(a)

(a = neut(a) ise, teorem 3.1.2 anti(a)*neut(a) = neut(a)*anti(a) = anti(a) ifadesi kullanılarak)

a*anti(a) = anti(a)*a = anti(a)

yazılır ve böylece bir anti(a) vardır ki, neut(a) = anti(a) = a ifadesi bulunur ve ispat tamamlanmış olur□

Teorem 3.1.4:

(N, *) neutrosophic üçlü grup olsun. a ∈ N için;

(i) neut(neut(a)) = neut(a)

(ii) anti(neut(a)) = neut(a)

(iii) anti(anti(a)) = a

(iv) neut(anti(a)) = neut(a).

İspat:

(i) Neutrosophic üçlü küme tanımından,

neut(a)*neut(neut(a)) = neut(a) yazılır. Önerme 3.1.1'den;

a*neut(a)*neut(neut(a)) = a*neut(a)

[a*neut(a)]*neut(neut(a)) = [a*neut(a)]

a* neut(neut(a)) = a

olabilmesi için neutrosophic üçlü küme tanımından neut(neut(a)) = neut(a) dır.

(ii) i) kullandığında, neut(a) = b olacak şekilde bir b ∈ N elemanı vardır. O zaman neut(a) = b ise i)'den neut(b) = b yazılır. Teorem 3.1.3'den neut(b) = b ise neut(b) = anti(b) dir.

Buradan neut(neut(a)) = neut(anti(a)) = neut(a) dır.

(iii) Neutrosophic üçlü küme tanımındaki a*anti(a) = anti(a)*a = neut(a) ifadesinden anti(anti(a)*anti(a)) = anti(a)*anti(anti(a)) = neut(a) yazılır.

Buradan eşitliğin sağlanabilmesi için neutrosophic üçlü küme tanımından anti(anti(a)) = a dır.

(iv) Neutrosophic üçlü küme tanımındaki a*neut(a) = neut(a)*a = a ifadesinden anti(a)*neut(anti(a)) = neut(anti(a))*anti(a) = anti(a) yazılır.

Önerme 3.1.1 kullanıldığında;

a* anti(a)*neut(anti(a)) = a* anti(a)

[a* anti(a)]*neut(anti(a)) = [a* anti(a)] neut(a)*neut(anti(a)) = neut(a).

Tekrardan önerme 3.1.1 kullanılarak,

a*neut(a)*neut(anti(a)) = a*neut(a)

[a*neut(a)]*neut(anti(a)) = [a*neut(a)]

a* neut(anti(a)) = a

Burada eşitliğin sağlanabilmesi için, neutrosophic üçlü küme tanımından

neut(anti(a)) = neut(a) dır□

Tanım 3.1.5:

(N, *, #) neutrosophic üçlü küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (N, *, #), **neutrosophic üçlü cisim** olarak adlandırılır.

(1) * işlemine göre (N,*) bir değişmeli neutrosophic üçlü grup,

(2) # işlemine göre (N,#) neutrosophic üçlü grup,

(3) $\forall$ a, b, c $\in$ N için;

$a\#(b * c) = (a\#b) * (a\#c)$ ve (b * c) # a = (b # a) * (c # a).

3.2 Neutrosophic Üçlü Kümelerde Bazı Kavramlar

Tanım 3.2.1:

(N, *) neutrosophic üçlü küme olsun. ∀ x, y ∈ N için x*y ∈ N olsun. d : N x N → $IR^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d fonksiyonu **neutrosophic üçlü metrik** olarak adlandırılır.

∀ x, y, z ∈ N için;

a) d(x, y) ≥ 0

b) x = y ⇒ d(x, y) = 0

c) d(x, y) = d(y, x)

d) Eğer d(x, z) ≤ d(x, z*neut(y)) olacak şekilde en az bir y ∈ N varsa,

d(x, z*neut(y)) ≤ d(x, y) + d(y, z) dir.

Ayrıca ((N,*), d) ikilisi **neutrosophic üçlü metrik uzay** olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.2:

(A,*) bir neutrosophic üçlü küme ve $\forall$ x, y $\in$ A için x*y $\in$ A olsun. Eğer $p_N: A \times A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa p_N **neutrosophic üçlü kısmi metrik** olarak adlandırılır.

$\forall x, y, z \in A$ için,

i) $p_N(x, y) \geq p_N(y, y) \geq 0$

ii) Eğer $p_N(x, x) = p_N(x, y) = p_N(y, y) = 0$ ise $x = y$

iii) $p_N(x, y) = p_N(y, x)$

iv) Eğer $p_N(x, k) \leq p_N(x, k\#neut(y))$ olacak şekilde en az bir y $\in$ A varsa, $p_N(x, k * neut(y)) \leq p_N(x, y) + p_N(y, k) - p_N(y, y)$ dir.

Ayrıca $((A\ *), p_N)$ ikilisi **neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay** olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.3:

(F, $*_1$, $\#_1$) neutrosophic üçlü bir cisim, (V, $*_2$, $\#_2$), $*_2$ ve $\#_2$ ikili işlemleriyle birlikte neutrosophic üçlü bir küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa (V, $*_2$, $\#_2$), **neutrosophic üçlü vektör uzay** olarak adlandırılır.

$\forall$ u, v $\in$ V ve $\forall$ k $\in$ F için;

1) u $*_2$ v $\in$ V ve u $\#_2$ k $\in$ V;

2) $\forall$ u, v, t $\in$ V için; (u $*_2$ v)$*_2$ t = u $*_2$ (v$*_2$ t)

3) $\forall$ u, v $\in$ V için; u$*_2$ v = v$*_2$ u

4) $\forall$ k $\in$ F ve $\forall$ u, v $\in$ V için; (v $*_2$ u) $\#_2$ k = (v$\#_2$ k) $*_2$ (u$\#_2$k)

5) $\forall$ k, t $\in$ F ve $\forall$ u $\in$ V için; (k$*_1$t) $\#_2$u = (k$\#_2$u) $*_1$(t$\#_2$u)

6) $\forall$ k, t $\in$ F ve $\forall$ u $\in$ V için; (k$\#_1$t) $*_2$u = k$\#_1$(t$*_2$u)

7) $\forall$ u $\in$ V için; u$\#_2$neut(k) = neut(k) $\#_2$u = u

olacak şekilde bir neut(k) $\in$ F vardır.

Tanım 3.2.4:

(V, $*_2$, $\#_2$), (F, $*_1$, $\#_1$) neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü vektör uzayı olsun. araştırma yapsın. ||.|| : V→ $IR^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa ||.|| fonksiyonu (V, $*_2$, $\#_2$) üzerinde **neutrosophic üçlü norm** olarak adlandırılır. f: FxV→$IR^+ \cup \{0\}$, ∀ x,y ∈ V ve α ∈ F için; f (α, x) = f(anti(α), anti(x)) olacak şekilde bir fonksiyondur.

a) $||x|| \geq 0$

b) Eğer x = neut(x) ise $||x|| = 0$

c) $||\alpha \#_2 x|| = f(\alpha, x).||x||$

d) $||anti(x)|| = ||x||$

e) Eğer $||x *_2 y|| \leq ||x *_2 y *_2 neut(k)||$ olacak şekilde en az bir k ∈ V varsa,

$||x *_2 y *_2 neut(k)|| \leq ||x|| + ||y||$ dir.

Ayrıca ((NTV, $*_2$, $\#_2$), ||.||) ikilisine de **neutrosophic üçlü normlu uzay** denir.

Tanım 3.2.5:

(V, $*_2$, $\#_2$), (F, $*_1$, $\#_1$) neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü vektör uzayı olsun. Eğer ||.|| : NTV→ $IR^+ \cup \{0\}$, fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa ||.|| fonksiyonu (V, $*_2$, $\#_2$) üzerinde **neutrosophic üçlü kısmi norm** olarak adlandırılır. f : F x V →$IR^+ \cup \{0\}$, ∀ x, y ∈ V ve α ∈ F için, f (α, x) = f(anti(α), anti(x)) olacak şekilde bir fonksiyondur.

a) $||x|| \geq 0$

b) Eğer, $||x|| = ||neut(x)|| = 0$ ise x = neut(x)

c) $||\alpha \#_2 x|| = f(\alpha, x).||x||$

d) $||anti(x)|| = ||x||$

e) Eğer $||x *_2 y|| \leq ||x *_2 y *_2 neut(k)||$ olacak şekilde en az bir k∈V varsa,

$||x *_2 y *_2 neut(k)|| \leq ||x|| + ||y||$ dir.

Ayrıca ((V, $*_2$, $\#_2$), ||.||) ikilisi de **neutrosophic üçlü kısmi normlu uzay** olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.6:

$((V, *_2, \#_2), (F, *_1, \#_1)$ neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü vektör uzay olsun. Eğer $<.,.>: V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $< .,. >$ fonksiyonu $((V, *_2, \#_2)$, üzerinde **neutrosophic üçlü iç çarpım** olarak adlandırılır. Burada $f : F \times V \times V \to IR^+ \cup \{0\}$, f(m, a, b) = f(anti(m), anti(a), anti(b)) ve f(m, a, b) = f(m, b, a) olacak şekilde bir fonksiyondur.
$\forall$ a, b, c $\in$ V ve m, n $\in$ F için,

a) $< a, a > \geq 0$

b) Eğer, a = neut(a) ise $<a, a> = 0$

c) $< (m\#_2a) *_2 (n\#_2b), c > = f(m, a, c).<a, c> + f(n, b, c).<b, c>$

d) $<anti(a), anti(a)> = <a, a>$

e) $<a, b> = <b, a>$.

Ayrıca $((V, *_2, \#_2), <.,. >)$ ikilisi de **neutrosophic üçlü iç çarpım uzayı** olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.1:

$(V, *_2, \#_2), (F, *_1, \#_1)$ NTF üzerinde NTVS ve $((V,*_2, \#_2), < .,. >), (V, *_2, \#_2)$ ve $f : F \times V \times V \to IR^+ \cup \{0\}$ üzerinde $\forall$ a, b $\in$ V ve m, n $\in$ F için;

f(m, a, b) = f(anti(m), anti(a), anti(b)) ve f(m, a, b) = f(m, b, a)

olacak şekilde bir fonksiyon olsun. O zaman;

$< (m\#_2a) *_2(n\#_2b), (m\#_2a) *_2(n\#_2b) > = f(m,(m\#_2a) *_2(n\#_2b), a). f(m,a,a).<a, a> +$

$[f(m,(\alpha\#_2a)*_2(n\#_2b), a). f(n,a,b) + f(n,(m\#_2a) *_2(n\#_2b), b). f(m,a,b)].<a, b> +$

$f(n,(m\#_2a) *_2(n\#_2b), b). f(n, b, b)].<b, b>$.

İspat :

$< (m\#_2a)*_2(n\#_2b), (m\#_2a) *_2(n\#_2b) >= f(m, a,(m\#_2a)*_2(n\#_2b)).<a, (m\#_2a) *_2(n\#_2b) > +$
$f(n, b, (m\#_2a) *_2(n\#_2b)).<b, (m\#_2a) *_2(n\#_2b)>$.
Tanım 3.2.6'daki $<a, b>=<b, a>$ ve f(m, a, b) = f(m, b, a) ifadelerinden,
$f(m,a,(m\#_2a)*_2(n\#_2b)).<a,(m\#_2a)*_2(n\#_2b)>+$

$f(n,b,(m\#_2a)*_2(n\#_2b)).\langle b,(m\#_2a)*_2(n\#_2b)\rangle =$

$f(m,(m\#_2a)*_2(n\#_2b),a).\langle (m\#_2a)*_2(n\#_2b),a\rangle +$

$f(n,(m\#_2a)*_2(n\#_2b),b).\langle (m\#_2a)*_2(n\#_2b),b\rangle =$

(şimdi tanım 3.2.6’nın (c) koşulunu uygulayalım)

$f(m, (m\#_2a) *_2(n\#_2b), a).[f(m, a, a).\langle a, a\rangle + f(n, a, b).\langle a, b\rangle] +$

$f(n, (m\#_2a) *_2(n\#_2b), b).[f(m, a, b).\langle a, b\rangle + f(n, b, b).\langle b, b\rangle] =$

(dağılma kuralı uygulanır)

$f(m, (m\#_2a)*_2(n\#_2b), a).f(m, a, a).\langle a, a\rangle + [f(m, (m\#_2a)*_2(n\#_2b),x). f(n, a, b)+$

$f(n, (m\#_2a) *_2(n\#_2b),b).f(m, a, b)].\langle a, b\rangle + f(n, (m\#_2a) *_2(n\#_2b), b).f(n, b, b).\langle b, b\rangle$

dir.

BÖLÜM IV

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ KISMİ İÇ ÇARPIM UZAYLARI

Bu bölümde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bu bölüm [20]'den derlenmiştir.

4.1 Neutrosophic Üçlü Kısmi İç Çarpım Uzay Kavramı

Tanım 4.1.1:

(V, $*_2$, $\#_2$), (F , $*_1$, $\#_1$) neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü vektör uzayı olsun. Eğer <. , .> : F X V X V $\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa <. , .> fonksiyonu (V, $*_2$, $\#_2$) üzerinde **neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım** olarak adlandırılır.

i) f: F X V X V $\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$\forall$ a, b, c $\in$ V ve m, n $\in$ F için;

$\mathrm{f(m, a, b) = f(\, anti(m), anti(a), anti(b))}$ olacak şekilde bir fonksiyondur;

ii) $< \mathrm{a, b} > \geq 0$ ve $< \mathrm{a, a} > \geq 0$;

iii) Eğer $< \mathrm{a, a} > = < \mathrm{neut(a), neut(a)} > = 0$ ise, $\mathrm{a = neut(a)}$;

iv) $< (\mathrm{m}\#_2\mathrm{a} \; *_2 (\mathrm{n}\#_2\mathrm{b}), \mathrm{c} > = \mathrm{f(\, m, a, c)}. < \mathrm{a, c} > + \mathrm{f(n, b, c)}. < \mathrm{b, c} >$

v) $< \mathrm{anti(a), anti(a)} > = < \mathrm{a, a} >$

vi) $< \mathrm{a, b} > = < \mathrm{b, a} >$ dır.

Ayrıca ((NTV, $*_2$, $\#_2$), <. , .>) ikilisi de **neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzay** olarak adlandırılır.

Sonuç 4.1.1:

Tanım 4.1.1'deki i) ve ii) koşullarından dolayı neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı, klasik iç çarpım uzayından farklıdır.

Sonuç 4.1.2:

Tanım 3.2.6'da eğer x = neut(x) ise $< x, x > = 0$. Tanım 4.1.1'de

< x, x > = < neut(x), neut(x) > = 0 ise x = neut(x). Bu nedenle; neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı, neutrosophic üçlü iç çarpım uzayından farklıdır.

Sonuç 4.1.3:

i) Neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı için, eğer a = neut(a) ve $< a, a > = 0$ ise, o zaman neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı aynı zamanda neutrosophic üçlü iç çarpım uzayıdır.

ii) Neutrosophic üçlü iç çarpım uzayı için, eğer < a, a > = < neut(a), neut(a) > = 0 ve a = neut(a) ise o zaman neutrosophic üçlü iç çarpım uzayı aynı zamanda neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayıdır.

Örnek 4.1.1:

X = {∅, {1}, {2}, {1,2}} olsun. Tanım 3.2.3'den (X, ∪, ∩), neutrosophic üçlü cisim üzerinde bir neutrosophic üçlü vektör uzayıdır. Ayrıca ∪ işlemine göre neutrosophic üçlü kümede neut(K) = K ve anti(K) = K, ∩ işlemine göre neutrosophic üçlü kümede neut(L) = L ve anti(L) = L, olarak tanımlansın.

Şimdi <. , .> : X x X → $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $< K, L > = s(K) + s(L)$ ve $s(K)$, K∈X'in eleman sayısı ve K', K∈X'in tümleyeni olacak şekilde alalım.

<. , .> bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım ve ((X, ∪, ∩), <. , .>) bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzay olduğunu gösterelim.

i) f: X x X x X → $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$f(A,B,C) = \begin{cases} \dfrac{s(C) + 2.s(A \cap B)}{2\big(s(B) + s(C)\big)}; & A \cap B \cap C = \emptyset, \quad B = C \neq \emptyset \\ \dfrac{s(C) - s(A) + 2.s(A \cap B)}{2(s(B) + s(C))}; & A \cap B \cap C \neq \emptyset, \quad B = C \neq \emptyset \\ 0; & B = C = \emptyset \\ \dfrac{1}{2(s(B) + s(C))}; & A \cap B \cap C = \emptyset, B = C \neq \emptyset, s(C) + s(A \cap B) = 0, \quad s(C) - s(A) + 2.s(A \cap B) \end{cases}$$

olacak şekilde alalım. Ayrıca, $f(A, B, C)$ = f(anti(A), anti(B), anti(C))'dır. Çünkü her A ∈ X için anti(A) = A.

ii) $< A, B > = s(A) + s(B) \geq 0$ ve $< A, A > = s(A) + s(A) \geq 0$

iii) A = $\emptyset$ için, $s(A) + s(A) = s(\text{neut}(A)) + s(\text{neut}(A)) = 0$, ayrıca, $\emptyset = \text{neut}(\emptyset)$.

iv) A = $\emptyset$, B = {1}, C = {2}, D = {1,2}, E = $\emptyset$ için;

$<((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \emptyset > = s((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}) + s(\emptyset) = 1.$

Ayrıca

$f(\emptyset, \{1\}, \emptyset) = 1/2,\ < \{1\}, \emptyset > = 1, f(\{2\}, \{1,2\}, \emptyset) = 1/4,\ < \{1,2\}, \emptyset > = 2.$

Böylece $<((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \emptyset >=$

$f(\emptyset, \{1\}, \emptyset). < \{1\}, \emptyset > + f(\{2\}, \{1,2\}, \emptyset). < \{1,2\}, \emptyset >$.

A = $\emptyset$, B = {1}, C = {2}, D = {1,2}, E = {1} için;

$<((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{1\} > = s((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}) + s(\{1\}) = 2.$

Ayrıca

$f(\emptyset, \{1\}, \{1\}) = 1/2, < \{1\}, \{1\} > = 2, f(\{2\}, \{1,2\}, \{1\}) = 1/3, < \{1,2\}, \{1\} > = 3.$

Böylece, $<(\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{1\} >=$

$f(\emptyset, \{1\}, \{1\}). < \{1\}, \{1\} > +f(\{2\}, \{1,2\}, \{1\}). < \{1,2\}, \{1\} >$.

A = $\emptyset$, B = {1}, C = {2}, D = {1,2}, E = {2} için;

$< (\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{2\} > = s((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}) + s(\{2\}) = 2.$

Ayrıca

$f(\emptyset, \{1\}, \{2\}) = 1/2, < \{1\}, \{2\} > = 2, f(\{2\}, \{1,2\}, \{2\}) = 1/3, < \{1,2\}, \{2\} > = 3.$

Böylece, $< (\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{2\} > =$

$f(\emptyset, \{1\}, \{2\}). < \{1\}, \{2\} > +f(\{2\}, \{1,2\}, \{2\}). < \{1,2\}, \{2\} >.$

A = $\emptyset$, B = {1}, C = {2}, D = {1,2}, E = {1,2} için;

$< (\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{1,2\} > = s((\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}) + s(\{1,2\}) = 3.$

Ayrıca

$f(\emptyset, \{1\}, \{1,2\}) = 2/3, < \{1\}, \{1,2\} > = 3,$

$f(\{2\}, \{1,2\}, \{1,2\}) = 1/4,\ < \{1,2\}, \{1,2\} > = 4.$

Böylece, $<(\emptyset \cap\{1\}) \cup (\{2\} \cap \{1,2\}), \{1,2\} > =$

$f(\emptyset, \{1\}, \{1,2\}). < \{1\}, \{1,2\} > +f(\{2\}, \{1,2\}, \{1,2\}). < \{1,2\}, \{1,2\}.$

Ayrıca, iv koşulu farklı A, B, C, D, E elemanları tarafından da sağlanır.

v) $< \text{anti}(K), \text{anti}(K) >= s(\text{anti}(K)),\ s(\text{anti}(K)) = s(K) + s(K) = < K, K >$ dir.

Çünkü her K $\in$ X için, K =anti(K).

iv) $< K, L > = s(K) + s(L) = s(L) + s(K) = < L, K >.$

Teorem 4.1.1:

$(V, *_2, \#_2)$, $(F, *_1, \#_1)$ neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü vektör uzayı ve $((V, *_2, \#_2), <.\,,.>)$, $(V,*_2, \#_2)$ ve $f : F \text{ X } V \text{ X } V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ üzerinde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı olsun.

$\forall\, a, b, c \in V$ ve $m, n \in F$ için;

Eğer $a \neq b$, $a = c$ veya $b = c$ ve $< c, c > \geq 1$ ve $< c, c > \leq < a, a >, < b, b >$ ise,

$(< a, b >)^2 \leq < a, a >. < b, b > - < c, c >$ dir.

İspat:

$a \neq b$, $a = c$ veya $b = c$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.2.1'de,

$$f(m, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), a) = \frac{< a, b >^2 + < c, c >^{1/2}}{< a, a >^{3/2}}$$

$$f(m, a, b) = \frac{-\left(< a, b > + \frac{< c, c >^{1/2}}{< a, b >}\right)}{< a, a >^{1/2}},$$

$$f(n, b, b) = \frac{1}{< b, b >^{1/2}},$$

$$f(n, a, b) = \frac{\left(1 + \frac{< c, c >^{1/2}}{< a, b >}\right)}{< a, a >^{1/2}},$$

$f(n, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), a) = f(m, a, b) = f(n, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), b) = 1,$

alırsak o zaman;

$< (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b) > =$

$f(m, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), a). f(m, a, b). < a, a > +$

$[f(m, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), a). f(n, a, b) +$

$f(n, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), b). f(m, a, b)]. < a, b > +$

$f(n, (m\#_2\, a) *_2 (n\, \#_2 b), b). f(n, b, b)]. < b, b > =$

$$\frac{< a, b >^2 + < c, c >^{1/2}}{< a, a >^{3/2}}. < a, a > - \frac{\left(< a, b > + \frac{< c, c >^{1/2}}{< a, b >}\right)}{< a, a >^{1/2}}. < a, b > -$$

$$\frac{\left(1 + \frac{< c, c >^{1/2}}{< a, b >}\right)}{< a, a >^{1/2}}. < a, b > + \frac{1}{< b, b >^{1/2}}. < b, b > =$$

$$-\frac{\left(1+\frac{<c,c>^{1/2}}{<a,b>}\right)}{<a,a>^{1/2}}.<a,b>+<b,b>^{1/2}=<b,b>^{1/2}-\frac{\left(<a,b>+<c,c>^{1/2}\right)}{<a,a>^{1/2}} \text{ dir.}$$

Buradan

$$<b,b>^{1/2}-\frac{\left(<a,b>+<c,c>^{1/2}\right)}{<a,a>^{1/2}} \geq 0$$

ve

$$<a,a>^{1/2}.<b,b>^{1/2}-<a,a>^{1/2}.\frac{\left(<a,b>+<c,c>^{1/2}\right)}{<a,a>^{1/2}}=$$

$$<a,a>^{1/2}.<b,b>^{1/2}-<a,b>-<c,c>^{1/2} \geq 0.$$

Dolayısıyla;

$$<a,b> \leq <a,a>^{1/2}.<b,b>^{1/2}-<c,c>^{1/2} \text{ dir.}$$

Teorem 4.1.2:

$(V, *_2, \#_2)$, $(F, *_1, \#_1)$ neutrosophic üçlü cisim üzerinde bir neutrosophic üçlü vektör uzayı olsun ve $((V, *_2, \#_2), <.\,,.>)$, $(V, *_2, \#_2)$ üzerinde bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\forall\, a,b,c \in V$ ve $m,n \in F$ için;

$f(m,a,a) = f(m,a)$ ve $||a|| = \sqrt{<a,a>}$ ise, o zaman

$((V, *_2, \#_2), ||.||)$, $((V, *_2, \#_2)$ üzerinde bir neutrosophic üçlü kısmi metrik uzayıdır.

İspat:

$||a|| = \sqrt{<a,a>}$ ifadesinin neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı olduğunu göstereceğiz. Tanım 4.1.1 ve Tanım 3.2.5'den,

a) $||a|| = \sqrt{<a,a>} \geq 0.$

b) $||a|| = \sqrt{<neut(a), neut(a)>} = ||neut(a)|| = 0$ ise, $a = neut(a)$

c) $||m\,\#_2 a|| = \sqrt{<m\,\#_2 a, m\,\#_2 a>} = \sqrt{f(m,a,a)}.\sqrt{f(m,a,a)}.\sqrt{<a,a>} =$

$f(m,a,a).\sqrt{<a,a>} = f(m,a,).\,||a||$

d) $||anti(a)|| = \sqrt{<anti(a), anti(a)>} = \sqrt{<a,a>} = ||a||$

e) Teorem 3.2.1'de $m = neut(a)$, $n = neut(b)$ alırsak,

$<(m\,\#_2\, a) *_2 (n\,\#_2\, b), (m\,\#_2\, a) *_2 (n\,\#_2\, b)> = <a *_2 b, a *_2 b> =$

$f(neut(a), a *_2 b, a).f(neut(a), a, a). < a, a > +$

$[f(neut(a), a *_2 b, a).f(neut(b), a, b) +$

$f(neut(b), a *_2 b, b).f(neut(a), a, b)]. < a, b > +$

$f(neut(b), a *_2 b, b).f(neut(b), b, b)]. < b, b >.$

Ayrıca

$f(neut(a), a *_2 b, a) = f(neut(a), a, a) = f(neut(b), a, b) =$

$f(neut(b), a *_2 b, b\ ) = f(neut(a), a, b) = f(neut(b), b, b) = 1$

alırsak,

$< a *_2 b, a *_2 b > = < a, a > +2. < a, b > + < b, b > =$

$||a||^2 + 2. < a, b > +||b||^2.$

Teorem 4.1.1'de, eğer $a \neq b$, $a = c$ veya $b = c$ ise,

$(< a, b >)^2 \leq \sqrt{< a, a >}.\sqrt{< b, b >} - \sqrt{< c, c >}.$

Buradan

$< a *_2 b, a *_2 b > = ||a||^2 + 2. < a, b > +||b||^2 \leq$

$$||a||^2 + 2.\left||a|\right|.\left||b|\right| + ||b||^2 - 2.\left||b|\right| = \left(\left||a|\right| + \left||b|\right|\right)^2 - 2.||b|| \quad (1)$$

Eğer neut(c) = neut(b) alırsak,

$< a *_2 b *_2 neut(c), a *_2 b *_2 neut(c) > = < a *_2 b, a *_2 b > .$

Böylece a = b alırsak

$$< a *_2 b, a *_2 b > - < neut(m), neut(m) >^{1/2} \leq$$
$$< a *_2 b *_2 neut(c), a *_2 b *_2 neut(c) > \quad (2)$$

olduğu açıktır.

Ayrıca Tanım 3.2.5'de a, b elemanları için,

$\left||a *_2 b|\right| - \left||neut(k)|\right| \leq |||a *_2 b *_2 neut(k)||,$

olacak şekilde en az bir k = neut(m) elemanı varsa, o zaman

$\left||a *_2 b|\right| \leq \left||a|\right| + \left||b|\right| - neut(k)$ dır.

Böylece (1) ve (2)'den

$\left||a *_2 b|\right| \leq \left||a|\right| + \left||b|\right| - neut(k)$ dır.

Sonuç 4.1.4:

Her neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı tarafından indirgenir. Fakat tam tersi her zaman doğru değildir. Benzer şekilde her neutrosophic üçlü kısmi normlu uzay bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı tarafından indirgenir. Fakat tam tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 4.1.2:

$((X, \&_2, \$_2), <.,.>), (Y, \&_1, \$_1)$) neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ve $||a|| = \sqrt{< a, a >}$ olacak şekilde $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$ bir neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı olsun. O zaman $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(a, b) = ||a *_2 \text{anti}(b)|| = \sqrt{a *_2 \text{anti}(b), a *_2 \text{anti}(b)}$$

ile tanımlanmış bir neutrosophic üçlü kısmi metriktir ve $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$, tarafından **indirgenmiş neutrosophic üçlü kısmi metrik** olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.3:

$((X, \&_2, \$_2), <.,.>), (Y, \&_1, \$_1))$ neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi ve p, $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$ tarafından indirgenmiş bir neutrosophic üçlü kısmi metrik olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $x, k \in X$ özelliğindeki $\forall\ n \geq M$ için,

$$p(x, \{x_n\}) =< a *_2 \text{anti}(b), a *_2 \text{anti}(b) >^{1/2} < \varepsilon + p(k, k);$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi a'ya **yakınsaktır**(ya da dizinin limiti **a**'dır) denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ veya } x_n \rightarrow a$$

gösterimleri ile belirtilir.

Tanım 4.1.4:

$((X, \&_2, \$_2), <.,.>), (Y, \&_1, \$_1)$) neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi ve p, $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$ tarafından indirgenmiş bir neutrosophic üçlü kısmi metrik olsun.

$\forall\ \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $x, k \in X$ özelliğindeki $\forall\ n, m \geq M$ için,

$p(\{x_m\}, \{x_n\}) =< \{x_m\} *_2 \text{anti}(\{x_n\}), \{x_m\} *_2 \text{anti}(\{x_n\}) >^{1/2} < \varepsilon + p(k, k);$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi **cauchy dizisi** olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.5:

$((X, \&_2, \$_2), <.,.>), (Y, \&_1, \$_1))$ neutrosophic üçlü cisim üzerinde neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi ve p, $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$ tarafından indirgenmiş bir neutrosophic üçlü kısmi metrik olsun. Eğer neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayındaki her $\{x_n\}$ cauchy dizisi $((X, \&_2, \$_2), <.,.>)$ tarafından indirgenmiş p neutrosophic üçlü kısmi metriğine göre yakınsak ise $\big((X, \&_2, \$_2), <.,.>\big)$, neutrosophic üçlü kısmi iç çarpım uzayı **hilbert uzayı** olarak adlandırılır.

BÖLÜM V

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ ν-GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR VE NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ KISMİ ν-GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay kavramı ve neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bu bölüm [18] ve [20]'den derlenmiştir.

5.1. Neutrosophic Üçlü v- Genelleştirilmiş Metrik Uzay Kavramı

Tanım 5.1.1:

(X, #) bir neutrosophic üçlü küme olsun. Eğer $d_v: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d_v **neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik** olarak adlandırılır. $\forall\ x, y, k_1, \ldots, k_v \in X$ için;

(i) $x\#y \in X$

(ii) $d_v(x, y) \geq 0$

(iii) Eğer $x = y$ ise $d_v(x, y) = 0$

(iv) $d_v(x, y) = d_v(y, x)$

(v) Eğer, $d_v(x, y) \leq d_v(x, y\#neut(k_v))$,

$$d_v(x, k_2) \leq d_v(x, k_2\#neut(k_1)),$$

$$d_v(k_1, k_3) \leq d_v(k_1, k_3\#neut(k_2)),$$

.

.

$$d_v(k_{v-1}, y) \leq d_v(k_{v-1}, b\#neut(k_v));$$

olacak şekilde x, y, $k_1, \ldots, k_v$ elemanları varsa o zaman;

$d_v(x, y\#neut(k_v)) \leq d_v(x, k_1) + d_v(k_1, k_2) + \ldots + d_v(k_{v-1}, k_v) + d_v(k_v, y)$ dir.

Burada x, y, $k_1, \ldots, k_v$ elemanları birbirinden farklıdır. Ayrıca ((X, #), d_v) ikilisi de **neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay** olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.1:

X = {∅, {a}, {b}, {a,b}} bir küme ve n(A) ise A ∈ X'in eleman sayısı olsun. Ayrıca A∈ X için AUA = A olduğu açıktır ve ∀ A ∈ X için, neut(A) = A, anti(A) = A olarak alalım. Dolayısıyla (X, U) neutrosophic üçlü kümedir ve B ∈ X için,

$d_v : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_v(A, B) = |n(A) + 2^{n(A)} - (n(B) + 2^{n(B)})|$ olacak şekilde bir fonksiyon alalım.

Şimdi d_v nin bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik olduğunu gösterelim.

(i) A, B ∈ X için, A ∪ B ∈ X olduğu açıktır.

(ii) $d_v(A, B) = |n(A) + 2^{n(A)} - (n(B) + 2^{n(B)})| \geq 0$.

(iii) A = B ise,

$d_v(A, B) = |n(A) + 2^{n(A)} - (n(B) + 2^{n(B)})| = |n(B) + 2^{n(B)} - (n(B) + 2^{n(B)})| = 0$

(iv) $d_v(A, B) = |n(A) + 2^{n(A)} - (n(B) + 2^{n(B)})|$

$= |-(-(n(A) + 2^{n(A)}) + (n(B) + 2^{n(B)})|$

$= |-1| . |(n(B) + 2^{n(B)}) - (n(A) + 2^{n(A)})|$

$= |(n(B) + 2^{n(B)}) - (n(A) + 2^{n(A)})|$

$= d_v(B, A)$

(v) $d_v(\{b\}, \{a, b\}) \leq d_v(\{b\}, \{a, b\} U \{a\})$,

$d_v(\{a\}, \{a, b\}) \leq d_v(\{a\}, \{a, b\} U \{b\})$,

$d_v(\{a\}, \{b\}) \leq d_v(\{a\}, \{b\} U \{\emptyset\})$,

$d_v(\{b\}, \{a\}) \leq d_v(\{b\}, \{a\} U \{\emptyset\})$,

$d_v(\{\emptyset\}, \{a\}) \leq d_v(\{\emptyset\}, \{a\} U \{b\})$,

$d_v(\{\emptyset\},\{b\}) \leq d_v(\{\emptyset\},\{b\}U\{a\})$,

$d_v(\{\emptyset\},\{a,b\}) \leq d_v(\{\emptyset\},\{a,b\}U\{b\})$ olduğu açıktır.

Ayrıca

$d_v(\{\emptyset\},\{a\}) = 2$, $d_v(\{\emptyset\},\{b\}) = 2$, $d_v(\{\emptyset\},\{a,b\}) = 5$, $d_v(\{a\},\{b\}) = 0$,

$d_v(\{a,b\},\{a\}) = 3$, $d_v(\{a,b\},\{b\}) = 3$,

Buradan

$d_v(\{\emptyset\},\{b\}) < d_v(\{\emptyset\},\{a,b\}) + d_v(\{a,b\},\{a\}) + d_v(\{a\},\{b\})$,

$d_v(\{\emptyset\},\{a\}) < d_v(\{\emptyset\},\{a,b\}) + d_v(\{a,b\},\{b\}) + d_v(\{b\},\{a\})$,

$d_v(\{a\},\{b\}) < d_v(\{a\},\{a,b\}) + d_v(\{a,b\},\{\emptyset\}) + d_v(\{\emptyset\},\{b\})$,

$d_v(\{a\},\{a,b\}) < d_v(\{a\},\{b\}) + d_v(\{b\},\{\emptyset\}) + d_v(\{\emptyset\},\{a,b\})$,

$d_v(\{b\},\{a,b\}) < d_v(\{b\},\{a\}) + d_v(\{a\},\{\emptyset\}) + d_v(\{\emptyset\},\{a,b\})$,

yazılır. Dolayısıyla $((X, U), d_v)$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Sonuç 5.1.1:

Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik, üçgen eşitsizliğinden ve # ikili işlemlerinden dolayı klasik metrikten farklıdır.

Sonuç 5.1.2:

Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik; üçgen eşitsizliğinden dolayı neutrosophic üçlü metrikten farklıdır.

Teorem 5.1.1:

Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik tanımından $k_1 = k_2 = \ldots = k_v$ alırsak, o zaman her neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik aynı zamanda bir neutrosophic üçlü metriktir.

İspat :

$((X, \#), d_v)$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olsun. Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve neutrosophic üçlü metrik uzay tanımlarından

i) $x, y \in X$ için $x\#y \in X$

ii) $d_v(x,\ y) \geq 0$;

iii) x = y ise $d_v(x,\ y) = 0$;

iv) $d_v(x,\ y) = d_v(y,\ x)$;

olduğu açıktır.

v) Bu koşul için $k_1 = k_2 = \ldots = k_v$ alalım. Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay tanımından;

Eğer, $d_v(x,\ y) \leq d_v(x, y\#neut(k_v))$,

$d_v(x, k_2) \leq d_v(x, k_2\#neut(k_1))$,

$d_v(k_1, k_3) \leq d_v(k_1, k_3\#neut(k_2))$,

.

.

$d_v(k_{v-1}, y) \leq d_v(k_{v-1}, y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde x, y, $k_1, \ldots, k_v$ elemanları varsa o zaman;

$d_v(x, y\#neut(k_v)) \leq d_v(x, k_1) + d_v(k_1, k_2) + \ldots + d_v(k_{v-1}, k_v) + d_v(k_v, y)$'dir.

$k_1 = k_2 = \ldots = k_v$ için $k_1 = k_3 = \ldots = k_v = k_2$ alabiliriz. Buradan

$d_v(x, y\#neut(k_v)) = d_v(x, y\#neut(k_2))$ ve

$d_v(x, k_1) + d_v(k_1, k_2) + \ldots + d_v(k_{v-1}, k_v) + d_v(k_v, y) =$

$d_v(x, k_2) + d_v(k_1, k_2) + \ldots + d_v(k_2, k_2) + d_v(k_2, y)$ dir.

Dolayısıyla

$d_v(x, y\#neut(k_2)) \leq d_v(x, k_1) + d_v(k_1, k_2) + \ldots + d_v(k_{v-1}, k_v) + d_v(k_v, y) =$

$d_v(x, k_2) + d_v(k_2, k_2) + \ldots + d_v(k_2, k_2) + d_v(k_2, y) = d_v(x, k_2) + 0 + \cdots + 0 +$

$d_v(k_2, y) = d_v(x, k_2) + d_v(k_2, y)$ dır.

Böylece $((X, \#), d_v)$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Sonuç 5.1.3:

Teorem 5.1.1'den, her neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik ile bir neutrosophic üçlü metrik tanımlayabiliriz. Ayrıca her neutrosophic üçlü metrik aynı zamanda neutrosophic üçlü 1-genelleştirilmiş metriktir.

Tanım 5.1.2:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi ve a ∈ X olsun. n ≥ M için, (n, M ∈ ℕ)

$$d_v(a, \{x_n\}) < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir ε > 0 reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi, ((X, #), d_v) neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzayında a'ya **yakınsaktır** (ya da dizinin limiti **a'**dır) denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ ve } \quad x_n \to a$$

gösterimleri ile belirtilir.

Tanım 5.1.3:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. n, m ≥ M için, (n, m, M ∈ ℕ)

$$d_v(\{x_m\}, \{x_n\}) < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir ε > 0 reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi, ((X, #), d_v) neutrosophic üçlü v- genelleştirilmiş metrik uzayında bir **cauchy dizisi**dir.

Tanım 5.1.4:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. ∀ ε > 0 ve k ∈ ℕ için;

$$d_v\big(\{x_n\}, \{x_{(n+1+jk)}\}\big) < \varepsilon, (j = 0, 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde n ∈ ℕ var ise $\{x_n\}$ dizisine, ((X, #), d_v) neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzayında bir **k-cauchy dizisi** denir.

Önerme 5.1.1:

$\{x_n\}$ neutrosophic üçlü metrikte cauchy dizisidir. ⇔ $\{x_n\}$ neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrikte bir 1-cauchy dizisidir.

İspat:

Sonuç 5.1.3'den her neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay, aynı zamanda bir neutrosophic üçlü metrik uzaydır. Ayrıca neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzayındaki cauchy dizisinin tanımı, neutrosophic üçlü metrik uzayındaki cauchy dizisinin tanımına eşittir. Dolayısıyla $\{x_n\}'$nin neutrosophic üçlü metrikte bir cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}'$nin neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrikte bir 1-cauchy dizisi olmasıdır.

Önerme 5.1.2:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve k, m ∈ N için k, m tarafından bölünebilir olsun. O zaman her k-cauchy dizisi m-cauchy dizisidir.

İspat:

$\{x_n\}$'nin bir k-cauchy dizisi olduğunu varsayalım. k, m ∈ N için k, m tarafından bölünebilir ve $d_v\big(\{x_n\}, \{x_{(n+1+j.k)}\}\big) < \varepsilon$ için $d_v\big(\{x_n\}, \{x_{(n+1+j.m)}\}\big) < \varepsilon$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir m-cauchy dizisidir.

Karşıt olarak $\{x_n\}'$nin bir m-cauchy dizisi olduğunu varsayalım. O zaman

$d_v\big(\{x_n\}, \{x_{(n+1+j.m)}\}\big) < \varepsilon, (j = 0, 1, 2, \ldots)$

yazabiliriz. k, m ∈ N için k, m tarafından bölünebilir olduğu için k = j.m gibi herhangi bir j ∈ N vardır. Buradan (j = 0, 1, 2, …) için $d_v\big(\{x_n\}, \{x_{(n+1+j.k)}\}\big) < \varepsilon$. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir k-cauchy dizisidir.

Tanım 5.1.5:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydaki her $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise o zaman ((X, #), d_v) ikilisi **tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay**ı olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.6:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir k-cauchy dizisi olsun. Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay k-tamdır. ⇔ Neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydaki her $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır.

Önerme 5.1.3:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve k, m ∈ N için k, m tarafından bölünebilir olsun. Eğer ((X, #), d_v), k-tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ise ((X, #), d_v), m-tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

İspat:

Önerme 5.1.2'nin ispatında, eğer $\{x_n\}$ bir k-cauchy dizisi ise $\{x_n\}$ bir m-cauchy dizisidir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir k-tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ise $\{x_n\}$ bir m-tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Önerme 5.1.4:

((X, #), d_v) tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.⇔((X, #), d_v), 1-tam neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olmasıdır.

İspat:

Önerme 5.1.1'den $\{x_n\}'$nin neutrosophic üçlü metrikte bir cauchy dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\{x_n\}'$nin neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrikte 1-cauchy dizisi olması idi. Eğer $\{x_n\}$ yakınsak cauchy dizisi ise, o zaman $\{x_n\}$ yakınsak 1-cauchy dizisidir.

Teorem 5.1.2:

((X, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik ve

$d_v(x,\ y) \leq\ d_v(x, y\#neut(k_v))$,

$d_v(x, k_2) \leq\ d_v(x, k_2\#neut(k_1))$,

$d_v(k_1\ , k_3) \leq\ d_v(k_1\ , k_3\#neut(k_2))$,

.

.

$d_v(k_{v-1}\ ,\ y) \leq\ d_v(k_{v-1}\ , y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde $k_1, k_2 \ldots ,\ k_v,$ ∈ X var olsun. Burada x, y, $k_1, \ldots ,\ k_v, y$ elemanları birbirinden farklıdır. Eğer $\{x_n\}$, k-cauchy dizisi ve z ∈ $\{x_n\}'$e yakınsak ise o zaman $\{x_n\}$ bir cauchy dizisidir ve buradaki tüm x_n'ler farklıdır.

İspat:

$\{x_n\}$'nin k-cauchy dizisi olduğunu ve $z \in \{x_n\}$ yakınsadığını varsayalım. Yani

$d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1+jk)}\}) < \varepsilon$, (j = 0, 1, 2,…)

Eğer j = 0 alırsak

$d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1)}\}) < \varepsilon,$ (1)

ve

$d_v(z, \{x_{(n+1)}\}) < \varepsilon,$ (2)

elde edilir.

Ayrıca $u_1, u_2 \dots, u_v, \in X$ olduğunu varsayalım, öyle ki;

$d_v(x, y) \leq d_v(x, y\#neut(k_v)),$

$d_v(x, k_2) \leq d_v(x, k_2\#neut(k_1)),$

$d_v(k_1, k_3) \leq d_v(k_1, k_3\#neut(k_2)),$

.

.

$d_v(k_{v-1}, y) \leq d_v(k_{v-1}, y\#neut(k_v)),$

Burada x, y, $k_1, \dots, k_v, y$ elemanları birbirinden farklıdır. Böylece Tanım 5.1.1'deki (v)'inci koşuldan ve (1) ve (2)'den,

$d_v(\{x_n\}, \{x_m\}) \leq d_v(\{x_n\}, z) +$

$d_v(z, \{x_{n+v-1}\}) + d_v(\{x_{n+v-1}\}, \{x_{n+v-2}\}) + \cdots + d_v(\{x_{m+1}\}, \{x_m\}) \leq$ (v-1).ε

yazılır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir cauchy dizisidir.

Teorem 5.1.3:

((A, #), d_v) bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve

$d_v(x, y) \leq d_v(x, y\#neut(k_v)),$

$d_v(x, k_2) \leq d_v(x, k_2\#neut(k_1)),$

$d_v(k_1, k_3) \leq d_v(k_1, k_3\#neut(k_2)),$.

.

.

$d_v(k_{v-1}, y) \leq d_v(k_{v-1}, y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde $k_1, k_2 \ldots, k_v, \in X$ var olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizi ve

$\sum_{k=0}^{\infty} d_v(\{x_k\}, \{x_{k+1}\}) < \infty$

ise o zaman $\{x_n\}$, k-cauchy dizisidir. Buradaki tüm x_n'ler ve $x, y, k_1, \ldots, k_v, y$ elemanları birbirinden farklıdır.

İspat:

$\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\sum_{k=0}^{\infty} d_v(\{x_k\}, \{x_{k+1}\}) < \infty$, için

$\sum_{k=1}^{\infty} d_v(\{x_m\}, \{x_{m+1}\}) < \varepsilon$ olsun.

Şimdi $d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1+jk)}\}) < \varepsilon$ olduğunu gösterelim.

Eğer j = 0 alırsak

$\sum_{k=0}^{\infty} d_v(\{x_m\}, \{x_{m+1}\}) < \varepsilon$ için $d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1+jk)}\}) < \varepsilon$ olduğu açıktır.

$j \neq 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1+jk)}\}) &\leq d_v(\{x_n\}, \{x_{(n+1)}\}) + \\
&\leq d_v(\{x_{n+2}\}, \{x_{(n+3)}\}) + \\
&\quad \ldots + \\
&\leq d_v(\{x_{(n+1+jk-1)}\}, \{x_{(n+1+jk)}\}) \\
&= \sum_{m=n}^{n+1+jk-1} d_v(\{x_m\}, \{x_{m+1}\}) < \sum_{k=1}^{\infty} d_v(\{x_m\}, \{x_{m+1}\}) < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $\{x_n\}$, k-cauchy dizisidir.

5.2 Neutrosophic Üçlü Kısmi v-Genelleştirilmiş Metrik Uzay Kavramı

Tanım 5.2.1:

(N, *) bir neutrosophic üçlü küme olsun.

$\forall\, x, y, k_1, k_2, \ldots\ , k_v \in N$ için;

(i) $x*y \in N$

(ii) $d_{pv}(x, y) \geq d_{pv}(x, x) \geq 0$

(iii) Eğer $d_{pv}(x, x) = d_{pv}(x, y) = d_{pv}(y, y) = 0$ ise, x = y.

(iv) $d_{pv}(x, y) = d_{pv}(y, x)$

(v) Eğer, $d_{pv}(x, y) \leq d_{pv}(x, y\#neut(k_v))$,

$d_{pv}(x, k_2) \leq d_{pv}(x, k_2\#neut(k_1))$,

$d_{pv}(k_1 , k_3) \leq d_{pv}(k_1 , k_3\#neut(k_2))$,

.

.

$d_{pv}(k_{v-1} , y) \leq d_{pv}(k_{v-1} , y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde $x, y, k_1, k_2, \ldots\ , k_v \in N$ elemanları varsa,

$d_{pv}(x, y * neut(k_v)) \leq d_{pv}(x,\ k_1) + d_{pv}(k_1,\ k_2) + \ldots + d_{pv}(k_{v-1},\ k_v) +$

$d_{pv}(k_v, y) - [d_{pv}(k_1,\ k_1) + d_{pv}(k_2,\ k_2) + \cdots + d_{pv}(k_v,\ k_v)]$;

koşullarını sağlayan d_{pv}: N X N → ℝ fonksiyonuna N üzerinde bir **neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik** denir. Burada $x, k_1, k_2, \ldots\ , k_v, y$ birbirinden farklıdır.

Ayrıca $((N,*), d_{pv})$ ikilisi de **neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay** olarak adlandırılır.

Ayrıca, v = k (k ∈ ℕ) ise, o zaman neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı, neutrosophic üçlü kısmi k-genelleştirilmiş metrik uzay olarak gösterilir. Örneğin, v = 2 ise, neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı, neutrosophic üçlü kısmi 2-genelleştirilmiş metrik uzay olarak gösterilir.

Örnek 5.2.1:

$N = \{\emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}\}$ bir küme ve s(M) ise M ∈ N'nin eleman sayısı olsun. Ayrıca M ∈ N için M∪M= M olduğu açıktır ve her M ∈ N için, neut(M) = M, anti(M) = M olarak alalım. Dolayısıyla (N,∪) bir neutrosophic üçlü kümedir ve $d_{pv}: N \, X \, N \rightarrow N$, $d_{pv}(S, K) = 2^{\max\{s(S), s(K)\}}$ olacak şekilde bir fonksiyon alalım. Şimdi d_{pv} nin bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik olduğunu gösterelim.

i) $S, K \in N$ için, $S \cup K \in N$.

ii) $d_{pv}(S, K) = 2^{\max\{s(S), s(K)\}} \geq 0$

iii) $d_{pv}(S, K) = d_{pv}(S, S) = d_{pv}(K, K) = 0$ ise K = L.

iv) $d_{pv}(S, K) = 2^{\max\{s(S), s(K)\}} = 2^{\max\{s(K), s(S)\}} = d_{pv}(K, S)$

v)

a) $d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) \leq d_{pv}(\{l\}, \{k, l\} \cup \{k\})$ ve $d_{pv}(\{l, k\}, \emptyset) \leq d_{pv}(\{l, k\}, \emptyset) \cup \{1\})$.

Ayrıca

$d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) = 2^2 = 4$, $d_{pv}(\{l\}, \{k\}) = 2^1 = 2, d_{pv}(\{k\}, \emptyset) = 2^1 = 2$,

$d_{pv}(\emptyset, \{l, k\}) = 2^2 = 4$. Buradan

$d_{pv}(\{l\}, \{k, l\} \cup \{k\}) \leq$

$d_{pv}(\{l\}, \{k\}) + d_{pv}(\{k\}, \emptyset) + d_{pv}(\emptyset, \{l, k\}) - d_{pv}(\{k\}, \{k\}) - d_{pv}(\{l\}, \{l\})$.

b) $d_{pv}(\{l\}, \{k\}) \leq d_{pv}(\{l\}, \{k\} \cup \{k, l\})$ *ve* $d_{pv}(\{k\}, \emptyset) \leq d_{pv}(\{k\}, \emptyset \cup \{l\})$.

Ayrıca

$d_{pv}(\{l\}, \{k\}) = 2^1 = 2$, $d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) = 2^2 = 4, d_{pv}(\{k\}, \emptyset) = 2^2 = 4$,

$d_{pv}(\emptyset, \{k\}) = 2^1 = 2$. Buradan

$d_{pv}(\{l\}, \{k\} \cup \{k, l\}) \leq$

$d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) + d_{pv}(\{k, l\}, \emptyset) + d_{pv}(\emptyset, \{k\}) - d_{pv}(\{k, l\}, \{k, l\}) - d_{pv}(\{l\}, \{l\})$.

c) $d_{pv}(\{l\}, \emptyset) \leq d_{pv}(\{l\}, \emptyset\}) \cup \{k, l\})$ ve $d_{pv}(\emptyset, \{k\}) \leq d_{pv}(\emptyset, \{k\}) \cup \{l\}$.

Ayrıca

$d_{pv}(\{l\}, \emptyset) \cup \{k, l\} = 2^2 = 4$, $d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) = 2^2 = 4$, $d_{pv}(\{k, l\}, \{k\}) = 2^2 = 4$,

$d_{pv}(\{k\}, \{l\}) = 2^1 = 2$. Buradan

$d_{pv}(\{l\}, \emptyset) \cup \{k, l\} \leq$

$d_{pv}(\{l\}, \{k, l\}) + d_{pv}(\{k, l\}, \emptyset\}) + d_{pv}(\emptyset, \{k\}) - d_{pv}(\{k, l\}, \{k, l\}) - d_{pv}(\{l\}, \{l\})$.

d) $d_{pv}(\{k\},\emptyset) \leq d_{pv}(\{k\},\emptyset \cup \{k,l\})$ ve $d_{pv}(\emptyset,\{l\}) \leq d_{pv}(\emptyset,\{l\} \cup \{k\})$.

Ayrıca

$d_{pv}(\{k\},\emptyset \cup \{k,l\}) = 2^2 = 4,\ d_{pv}(\{k\},\{k,l\}) = 2^2 = 4,\ d_{pv}(\{k,l\},\emptyset) = 2^2 = 4,$

$d_{pv}(\emptyset,\{k\}) = 2^1 = 2.$ Buradan

$d_{pv}(\{k\},\emptyset \cup \{k,l\}) \leq$

$d_{pv}(\{k\},\{k,l\}) + d_{pv}(\{k,l\},\emptyset) + d_{pv}(\emptyset,\{k\}) - d_{pv}(\{k,l\},\{k,l\}) - d_{pv}(\{l\},\{l\}).$

e) $d_{pv}(\{l,k\},\emptyset) \leq d_{pv}(\{l,k\},\emptyset \cup \{k\})$ ve $d_{pv}(\emptyset,\{l,k\}) \leq d_{pv}(\emptyset,\{l,k\} \cup \{l\})$.

$d_{pv}(\{k,l\},\emptyset \cup \{k\}) = 2^2 = 4, d_{pv}(\{l,k\},\{k\}) = 2^2 = 4, d_{pv}(\{k\},\{l\}) = 2^1 = 2,$

$d_{pv}(\{l\},\emptyset) = 2^1 = 2.$ Buradan

$d_{pv}(\{k,l\},\emptyset \cup \{k\}) \leq$

$d_{pv}(\{k,l\},\{k\}) + d_{pv}(\{k\},\{l\}) + d_{pv}(\{l\},\emptyset) - d_{pv}(\{k,l\},\{k,l\}) - d_{pv}(\{l\},\{l\}).$

f) $d_{pv}(\{k\},\{l,k\}) \leq d_{pv}(\{k\},\{l,k\}) \cup \{l\})$ ve $d_{pv}(\{l,k\},\emptyset) \leq d_{pv}(\{l,k\},\emptyset \cup \{k\})$.

Ayrıca,

$d_{pv}(\{k\},\{l,k\} \cup \{l\}) = 2^2 = 4, d_{pv}(\{k\},\{l\}) = 2^1 = 2, d_{pv}(\{l\},\emptyset) = 2^1 = 2,$

$d_{pv}(\emptyset \cup \{k,l\}) = 2^2 = 4.$ Buradan

$d_{pv}(\{k\},\{l,k\} \cup \{l\}) \leq$

$d_{pv}(\{k\},\{l\}) + d_{pv}(\{l\},\emptyset) + d_{pv}(\emptyset \cup \{k,l\}) - d_{pv}(\{l\},\{l\}) - d_{pv}(\{k,l\},\{k,l\}).$

Dolayısıyla $((X,\cup), d_{pv})$ neutrosophic üçlü kısmi 2-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Sonuç 5.2.1:

Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı, üçgen eşitsizliği ve * ikili işlemlerinden dolayı neutrosophic üçlü kısmi metrik uzayından farklıdır.

Sonuç 5.2.2:

Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı, Tanım 5.2.1'deki iii. koşul ve üçgen eşitsizliğinden dolayı neutrosophic üçlü kısmi metrik uzayından farklıdır.

Teorem 5.2.2:

Tanım 5.2.1'de $k_1 = k_2 = \cdots = k_v$ ve $d_{pv}(x,x) = 0$ alırsak o zaman, her neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı, aynı zamanda bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

İspat :

$((X,\#), d_{pv})$, neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olsun.

i) $((X,\#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, x # y ∈ X.

ii) $((X,\#),d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, $d_{pv}(x,y) \geq 0$.

iii) Eğer $d_{pv}(x,x) = d_{pv}(x,y) = d_{pv}(y,y) = 0$ ise, x = y.

iv) $((X,\#),d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, $d_{pv}(x,y) = d_{pv}(y,x)$

v) Tanım 5.2.1'de,

Eğer, $d_{pv}(x,y) \leq d_{pv}(x,y\#neut(k_v))$,

$d_{pv}(x,k_2) \leq d_{pv}(y,k_2\#neut(k_1))$,

$d_{pv}(k_1,k_3) \leq d_{pv}(k_1,k_3\#neut(k_2))$,

.

.

$d_{pv}(k_{v-1},y) \leq d_{pv}(k_{v-1},y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde $a,b,k_1,k_2,\ldots,k_v \in N$ elemanları varsa,

$d_{pv}(x,y*neut(k_v)) \leq d_{pv}(x,k_1) + d_{pv}(k_1,k_2) + \ldots + d_{pv}(k_{v-1},k_v) +$

$d_{pv}(k_v,y) - [d_{pv}(k_1,k_1) + d_{pv}(k_2,k_2) + \cdots + d_{pv}(k_v,k_v)]$; (1)

(1) eşitsizliğinde, $k_1 = k_2 = \cdots = k_v$ ve $d_{pv}(x,x) = 0$ alalım. Burada $a,b \in X$ için,

$d_{pv}(x,y) \leq d_{pv}(x,y\#neut(k_1))$,

$d_{pv}(x,k_1) \leq d_{pv}(x,k_1\#neut(k_1))$,

$d_{pv}(k_1,k_1) \leq d_{pv}(k_1,k_1\#neut(k_1))$,

.

.

$d_{pv}(k_1,b) \leq d_{pv}(k_1,y\#neut(k_1))$;

Dolayısıyla,

$d_{pv}(x,y\#neut(k_v)) = d_{pv}(x,y\#neut(k_1)) \leq$

$d_{pv}(x,k_1) + d_{pv}(k_1,k_1) + \cdots + d_{pv}(k_1,k_1) + d_{pv}(k_1,y) -$

$[d_{pv}(k_1,k_1) + d_{pv}(k_1,k_1) + \cdots + d_{pv}(k_1,k_1)] =$

$d_{pv}(x,k_1) + 0 + \cdots + 0 + d_{pv}(k_1,y) - 0 = d_{pv}(x,k_1) + d_{pv}(k_1,y)$.

Böylece $((X,\#),d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Sonuç 5.2.3:

Teorem 5.2.1'den her neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı ile bir neutrosophic üçlü kısmi 1-genelleştirilmiş kısmi metrik uzay tanımlayabiliriz. Ayrıca Teorem 5.2.1'den her neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzayı, aynı zamanda neutrosophic üçlü kısmi 1-genelleştirilmiş kısmi metrik uzaydır.

Teorem 5.2.2:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve d_{pv} ise $d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k, (k \in \mathbb{R}^+)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. O zaman $((X, \#), d_{pv})$, neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzaydır.

İspat:

$d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k$ alalım. Burada, $((X, \#), d_{pv})$, neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, $d_{pv}(x, x) = d(x, x) + k = k$.

i) $((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, $x \# y \in X$.

ii) $((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olduğu için, $d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k \geq d_{pv}(x, x) = k \geq 0$.

iii) $d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k = d_{pv}(x, x) = k = d_{pv}(y, y) = k = 0$, olacak şekilde herhangi bir x, y çifti yoktur. Çünkü, $(k \in \mathbb{R}^+)$.

iv) $d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k = d(y, x) + k = d_{pv}(y, x)$

v) Tanım 5.1.1'den,

Eğer, $d(x, y) \leq d_{pv}(x, y\#neut(k_v))$,

$d(x, k_2) \leq d_{pv}(x, k_2\#neut(k_1))$,

$d(k_1, k_3) \leq d_{pv}(k_1, k_3\#neut(k_2))$,

.

.

$d(k_{v-1}, y) \leq d_{pv}(k_{v-1}, y\#neut(k_v))$;

olacak şekilde $x, y, k_1, k_2, \ldots, k_v \in N$ elemanları varsa,

$(x, b\#neut(k_v)) \leq d_{pv}(x, k_1) + d_{pv}(k_1, k_2) + \ldots + d_{pv}(k_{v-1}, k_v) + d_{pv}(k_v, y)$ (2)

(2)'deki eşitsizlikte $d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k$; alalım.

$d_{pv}(x, y) = d(x, y) + k \leq d_{pv}\big(x, y\#neut(k_v)\big) = d(x, y\#neut(k_v) + k$,

$d_{pv}(x, k_2) = d(x, k_2) + k \leq d_{pv}\big(x, k_2\#neut(k_1)\big) = d\big(x, k_2\#neut(k_1)\big) + k,$

$d_{pv}(k_1, k_3) = d(k_1, k_3) + k \leq d_{pv}\big(k_1, k_3\#neut(k_2)\big) = d\big(k_1, k_3\#neut(k_2)\big) + k,$

.

.

$d_{pv}(k_{v-1}, y) = d(k_{v-1}, y) + k \leq$

$d_{pv}\big(k_{v-1}, y\#neut(k_v)\big) = d\big(k_{v-1}, y\#neut(k_v)\big) + k,$

O zaman

$d_v\big(x, y\#neut(k_v)\big) = d\big(x, y\#neut(k_v)\big) + k \leq d_{pv}(x, k_1) + k + d_{pv}(k_1, k_2) + k + \cdots + d_{pv}(k_{v-1}, k_v) + k + d_{pv}(k_v, y) + k$ dır.

Buradan

$d_v\big(x, y\#neut(k_v)\big) = d\big(x, y\#neut(k_v)\big) + k \leq$

$d_{pv}(x, k_1) + d_{pv}(k_1, k_2) + \ldots + d_{pv}(k_{v-1}, k_v) + d_{pv}(k_v, y) - v.k$ dır.

Böylece her $x \in X$ için $d_{pv}(x, x) = k,$

$d_v\big(x, y\#neut(k_v)\big) = d\big(x, y\#neut(k_v)\big) \leq$

$d_{pv}(x, k_1) + d_{pv}(k_1, k_2) + \ldots + d_{pv}(k_{v-1}, k_v) + d_{pv}(k_v, y) - [d_{pv}(k_1, k_1) + d_{pv}(k_2, k_2) + \cdots + d_{pv}(k_v, k_v)]$ dır.

Sonuç 5.2.4:

Teorem 5.2.2'den her neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaydan bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay tanımlayabiliriz.

Tanım 5.2.2:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi ve $m \in X$ olsun. $\forall\, n \geq M$ için ($n, M \in \mathbb{N}$);

$$d_{pv}(m, \{x_n\}) < \varepsilon + d_{pv}(m, m),$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi m'ye **yakınsaktır** (ya da dizinin limiti **m**'dir) denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \text{ veya } x_n \to m$$

gösterimleri ile belirtilir.

Tanım 5.2.3:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m \in X$ ve $n, m \geq M$ için;

$$d_{pv}(\{x_m\}, \{x_n\}) < \varepsilon + d_{pv}(m, m);$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi bir **cauchy dizisi**dir.

Tanım 5.2.4:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun.

$\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m \in X$ ve $k \in \mathbb{N}$ için,

$$d_{pv}\big(\{x_n\}, \{x_{n+1+jl}\}\big) \leq \varepsilon + d_{pv}(m, m), \qquad (j = 0,1,2, \dots)$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi bir **k- cauchy dizisi**dir.

Tanım 5.2.5:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir cauchy dizisi olsun. Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay tamdır. ⇔ Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzaydaki her $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır.

Tanım 5.2.6:

$((X, \#), d_{pv})$ bir neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir k-cauchy dizisi olsun. Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay k-tamdır. ⇔ Neutrosophic üçlü kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzaydaki her $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bulanık küme kavramından yola çıkarak neutrosophic üçlü yapılar kavramına değinilmiştir. Ayrıca neutrosophic üçlü yapılar üzerinde kısmi iç çarpım uzayı, v-genelleştirilmiş metrik uzayı ve kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayı ile ilgili bazı temel tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir. İlerleyen zamanlarda bu çalışma sayesinde yeni yapı ve özellikler elde edilebilir. Örneğin; neutrosophic üçlü banach cebiri gibi konular üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*. **8(3),** 338-335

[2] Klir G.J., Floger T.A. (1998), Fuzzy Set, *Uncertainly and İnformation Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*

[3] Wang H, Smarandache F. Zang, Y.Q. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure.***4**,410-413.

[4] Atanassov, T. K., (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst*. **20**,87– 96.

[5] Li, D.F. (2004). Some measures of dissimilarity in intuitionistic fuzzy structures. *Journal of Computer System Sciences*. **68(1),** 115-122.

[6] Smarandache, F. A ,(1998). *A Unifying Field in Logics. Neutrosophy: Neutrosophic Probability,* Set and Logic. American Research Press. Rehoboth, MA, USA.

[7] N.K. Kasabov.(1996). Foundation of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering. ISBN: 0-262-11212-4. MIT press.

[8] Zimmermann H.J.(1985). *Fuzzy Set Theory –and Its Applications*. Kluwer, Boston.

[9] Baykal N., Beyan T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri,* Bıçaklar Kitapevi. Matematik Dizisi No:1.

[10] Despi I.; Opriş D.; Yalcin E. (2013). Generalised Atanassov Intuitionistic Fuzzy Sets. ISNB:978-1-61208-254-7.

[11] Zhang, H. Y., Wang, J. Q., Chen, X.H. (2014). Interval neutrosophic sets and their application in multi criteria decision making problems. *The Scientific World Journal.* **2014:**645953.

[12] Smarandache, F., Ali, M. (2016). Neutrosophic triplet group. *Neural Computing and Applicatons.***29**,595–601.

[13] Sahin M., Kargın A. (2017). Neutrosophic triplet metric space and neutrosophic triplet normed space, ICMME -2017, Şanlıurfa.

[14] Smarandache F., Ali M. (2017). Neutrosophic Triplet Field Used in Physical Applications. (Log Number: NWS17-2017-000061).

[15] Smarandache F., Ali M. (2017). Neutrosophic Triplet Ring and its Applications. (Log Number: NWS17-2017-000062).

[16] Şahin, M.; Kargın, A. (2017). Neutrosophic triplet inner product space. Neutrosoph. Oper. Res. **2**, 193–205.

[17] Şahin, M.; Kargın, A., Çoban, M.A. (2018). Fixed point theorem for neutrosophic triplet partial metric space. Symmetry –MDPI. **10**,No:240.

[18] Şahin, M.; Kargın. A. (2018). Neutrosophic Triplet v-Generalized Metric Space. Axiomes–MDPI.**7**, 67.

[19] Şahin M., Kargın A. (2018). Neutrosophic triplet partial normed space, *Zeugma I. International Multidiscipline Studies Congress, Gaziantep, Turkey* (13-16 September 2018)

[20] F. Smarandache, M. Şahin.(2019). Neutrosophic Triplet Structures Volume I. ISBN: 978-1-59973-595-5

[21] Li, D.F., Cheng, C.T. (2002). New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. *Pattern Recognition Letters*. **23** (1-3), 221-225.

[21] Li, D.F., Cheng, C.T. (2002). New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. *Pattern Recognition Letters*. **23** (1-3), 221-225.

[22] Peng, J., Wang, J. Q., Wu, X. H., Wang, J., Chen, X. H., (2014). Multi-valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-criteria Group Decision-making problems. *Iternational Journal of.*