TEMMUZ 2019

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

DEMET YAĞMUR

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\boldsymbol{Z}$-DÖNÜŞÜMLERİNİN $\boldsymbol{q}$-ANALİZ VE $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-ANALİZDEKİ BAZI UYGULAMALARI

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEMET YAĞMUR

TEMMUZ 2019

Z-DÖNÜŞÜMLERİNİN q-ANALİZ VE (p, q)-ANALİZDEKİ BAZI UYGULAMALARI

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Demet YAĞMUR

Temmuz 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı : Z-Dönüşümlerinin q-Analiz ve (p, q)-Analizdeki Bazı Uygulamaları

Öğrencinin Adı Soyadı: Demet YAĞMUR

Tez Savunma Tarihi : 31.07.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	…………………..
Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN	…………………..
Dr. Öğr. Üyesi Serkan ARACI	…………………..

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Demet YAĞMUR

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OF Z-TRANSFORMS ON (q)-CALCULUS AND (p, q)-CALCULUS

YAĞMUR, Demet
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
July 2019
55 pages

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, basic definitions and theorems in calculus are given. In addition, the necessary definitions and theorems in q and (p, q)-calculus for the thesis are given. In the second chapter, the definition, properties and examples of Z-transforms are examined. In the last chapter, the applications of Z-transforms on q and (p, q)-calculus are examined.

Key Words: Z-transforms, q-calculus, (p, q)-calculus

ÖZET

$\boldsymbol{Z}$-DÖNÜŞÜMLERİNİN $\boldsymbol{q}$-ANALİZ VE $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-ANALİZDEKİ BAZI UYGULAMALARI

YAĞMUR, Demet
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Temmuz 2019
55 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm analizde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca q ve (p,q)-analizde tez için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, Z-dönüşümlerinin tanımı, özellikleri ve örnekleri incelenmiştir. Son bölümde ise Z-dönüşümlerinin q ve (p,q)-analiz üzerindeki uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Z-dönüşümleri, q-analiz, (p,q)-analiz

''Canım oğluma''

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin oluşumunda ve yazılımında bana yardımcı olan, bilgilerini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Serkan ARACI ve arkadaşım Resul ATEŞ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca beni hep destekleyen, güvenen ve beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{q}}$	n sayısının q-benzeri
$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$	$f(x)$ fonksiyonunun q-türevi
$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{x}}$	I. Tip q-üstel fonksiyon
$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{x}}$	II. Tip q-üstel fonksiyon
$[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}$	n sayısının (p,q)-benzeri
$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$	$f(x)$ fonksiyonunun (p,q)-türevi
$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x})$	I. Tip (p,q)-üstel fonksiyon
$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x})$	II. Tip (p,q)-üstel fonksiyon
$\boldsymbol{Z}$	Z-Dönüşüm operatörü
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) * \boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})$	$f(n)$ ile $g(n)$ in konvolüsyonu
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Laplace dönüşüm operatörü
$\boldsymbol{\delta}$	Delta fonksiyonu

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1 Temel Kavramlar

Bu kesimde, tezde kullanılan bazı temel kavram ve tanımlara yer verilmiştir. Bu kavram ve tanımlara lisans düzeyindeki analiz kitaplarından ulaşılabilir.

Tanım 1.1.1: A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşleyen A dan B ye tanımlı f bağıntısına fonksiyon denir. $f: A \to B$ ile gösterilir. Burada A kümesine tanım kümesi, B kümesine ise değer kümesi adı verilir.

Tanım 1.1.2: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlanmış bir f fonksiyonuna X kümesinde bir dizi denir.

Tanım 1.1.3: z_n, $\mathbb{C}$ de bir dizi ve $z_n \in \mathbb{C}$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n ler için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa, z_n dizisinin z_o ıdır denir. Bu durum,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{ya da} \quad z_n \to z_0$$

gösterimi ile belirtilir. Belli bir z_0 limitine sahip olan bir z_n dizisine yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan bir diziye ise ıraksak dizi adı verilir.

Tanım 1.1.4: $f_n: A \to \mathbb{C}$ olarak tanımlanan (f_n) dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bütün $z \in A$ noktaları ve her $n \geq n_0$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabilirse (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 1.1.5: Her bir $a_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere genel terimi

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini göz önüne alalım. $\big((a_k),(s_n)\big)$ ikilisine seri adı verilir. (a_k) terimine serinin genel terimi, (s_n) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak ise, yani $\lim \ \ s_n = s$ ise $\big((a_k),(s_n)\big)$ serisi yakınsak ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri adı verilir. Genel terimi a_n olan seri $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.6: $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ sabitler olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_2)^2 + \cdots$$

biçimindeki serilere kuvvet serisi denir. Buradaki a_n sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Tanım 1.1.7: Serinin yakınsak olduğu z noktalarının kümesinin üst sınırına serinin yakınsaklık yarıçapı denir.

Tanım 1.1.8: c ve a reel sayıları için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca^{n-1} = \frac{c}{1-a} \qquad (|a| < 1)$$

biçimindeki serilere geometrik seri denir.

Tanım 1.1.9: f fonksiyonu, a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir.

Taylor açılımında özel olarak $a = 0$ alınırsa,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

serisi elde edilir. Bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 1.1.10: $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere t reel değişkenin bir fonksiyonu, e^{-st} ise

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulunabiliyorsa bu integrale $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde ifade edilir [9].

Örnek 1.1.11: $t \geq 0$ olmak üzere $f(t) = 1$ sabit fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Tanım 1.1.10 kullanılarak

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}(1) = \frac{1}{s}$$

elde edilir.

Örnek 1.1.12: a bir sabit olmak üzere $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Tanım 1.1.10 kullanılarak $s > a$ için

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

elde edilir.

Tanım 1.1.13: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 1.1.14: Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Tanım 1.1.15: A, $\mathbb{C}$ de açık bir küme $f: A \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ise $\gamma([a,b]) \subset A$ özelliğinde diferansiyellenebilir bir eğri olsun. f fonksiyonunun γ boyunca integrali $\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz$ simgesi ile gösterilir ve

$$\int f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.16 (Cauchy Goursat Teoremi): B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı çevre olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dir.

Tanım 1.1.17: Delta fonksiyonu

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

1.2 q-Analiz

Bu kesimde q-sayıları tanımlanıp bazı özellikleri verilecektir [1].

Tanım 1.2.1: Herhangi bir n sayısı için

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ifadesine n sayısının q-benzeri denir.

Örnek 1.2.2: q-sayıları ile ilgili bazı örnekler aşağıda verilmiştir;

$$[0]_q = 0\,, \qquad [1]_q = 1\,, \qquad [2]_q = 1 + q\,, \qquad [3]_q = 1 + q + q^2$$

ve

$$\left[\frac{1}{2}\right]_q = \frac{q^{\frac{1}{2}} - 1}{q - 1} = 1 - q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{1}{8}} + q^{\frac{1}{16}} - \cdots$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.3: Bir n pozitif sayısının q-faktoriyeli

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \ldots [2]_q [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1 \quad , & n = 0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 1.2.4: n ve j negatif olmayan tamsayı olmak üzere $n \geq j$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!\,[j]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

ifadesine q-binom katsayısı adı verilir.

Örneğin,

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1 \quad ve \quad n < k \quad için \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 1.2.5: Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

ifadesine f fonksiyonun q-türevi denir. Burada $q \to 1^-$ için

$$\lim_{q \to 1^-} D_q f(x) = \lim_{q \to 1^-} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} = \lim_{q \to 1^-} \frac{x f'(qx)}{x} = f'(x)$$

elde edilir. Bu da klasik analizde bilinen türevdir.

Şimdi bazı temel fonksiyonların q-türev örnekleri verilecektir.

Örnek 1.2.6: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_q(x^3) = \frac{d_q(x^3)}{d_q x} = \frac{q^3 x^3 - x^3}{qx - x} = \frac{x^3(q^3 - 1)}{x(q - 1)} = [3]_q x^2$$

şeklindedir.

Örnek 1.2.7: $f(x) = \alpha x^n$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_q(\alpha x^n) = \frac{d_q(\alpha x^n)}{d_q x} = \frac{\alpha (qx)^n - \alpha x^n}{(q - 1)x} = \alpha \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} = \alpha [n]_q x^{n-1}$$

şeklindedir.

Özellik 1.2.8: q-türev lineerlik özelliğine sahiptir. Yani, a ve b herhangi bir sayı olmak üzere

$$D_q\big(af(x) + bg(x)\big) = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

dir [1].

Tanım 1.2.9: $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere iki fonksiyonun çarpımının q-türevi

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$$

$$= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x)$$

dir ve iki fonksiyonun bölümünün q-türevi ise

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

$$= \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.2.10: $(x-a)^n$ polinomunun q-benzeri

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a), & n \in \mathbb{N} \\ 1 \qquad , & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Özellik 1.2.11: q-türevin tanımı kullanılarak

$$D_q(x-a)_q^n = [n]_q (x-a)_q^{n-1} \tag{1.2.1}$$

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)q^n \tag{1.2.2}$$

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \tag{1.2.3}$$

$$(x-a)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (x-q^{-n+1}a)_q^n \tag{1.2.4}$$

$$D_q(a-x)_q^n = -[n]_q (a-qx)_q^{n-1} \tag{1.2.5}$$

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = \frac{[-n]_q}{(x-q^n a)_q^{n+1}} \tag{1.2.6}$$

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]_q}{(a-x)_q^{n+1}} \tag{1.2.7}$$

özellikleri sağlanır [1].

Teorem 1.2.12: Mertebesi N olan herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu ve herhangi bir c sayısı için q-Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]_q!}$$

şeklinde ifade edilir [1].

Özel olarak $f(x) = x^n$ fonksiyonu alınırsa n pozitif tam sayısı ve $c = 1$ için q-Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left(D_q^j f\right)(1) \frac{(x-1)_q^j}{[j]_q!}$$

ifadesine dönüşür ve j defa q-türev alınırsa

$$\left(D_q f\right)(x) = [n]_q x^{n-1}$$

$$\left(D_q^2 f\right)(x) = [n]_q [n-1]_q x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\left(D_q^j f\right)(x) = [n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q x^{n-j}$$

olur. Buradan $x = 1$ için

$$\left(D_q^j f\right)(1) = [n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q \tag{1.2.8}$$

bulunur. Daha sonra bu ifade q-Taylor formülünde yerine yazılırsa

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q}{[j]_q!} (x-1)_q^j$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde $f(x) = (x-a)_q^n$ fonksiyonu için q-Taylor formülü kullanılarak $x = 0$ civarında

$$(x-a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} a^k$$

olur (q-Gauss Binom formülü) [1,2].

Teorem 1.2.13: $yx = qxy$ olmak üzere

$$[x+y]^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q y^{n-j} x^j$$

dir [1]. Burada q, x ve y ile komütatif bir sayıdır.

q-Binom katsayısında da $q \to 1$ için limit alınırsa bilinen binom katsayısı $\binom{n}{j}$ elde edilir. q-binom katsayıları ile bilinen binom katsayıları arasında

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!\,j!} = \binom{n}{n-j}$$

ile

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!\,[j]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

olduğu gibi benzerlik vardır. Ayrıca $1 \le j \le n-1$ için Paskal kuralı olarak bilinen

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}$$

eşitliği vardır. Benzer şekilde q-Paskal kuralı sıradaki önermede verilmiştir.

Önerme 1.2.14: $1 \le j \le n-1$ için q-Paskal kuralı

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q$$

şeklinde tanımlanır [1].

İspat: $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

$$= 1 + q + q^2 + \cdots + q^j + q^{j+1} + \cdots + q^{n-1}$$

$$= \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}\right) + q^j\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-j-1}\right)$$

$$= [j]_q + q^j[n-j]_q$$

dir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-j}\begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

$$= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n-j}\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

q-paskal kuralları göz önüne alındığında paskal üçgeninin q-benzeri

Tablo 1.2.1 q-Paskal üçgeni

1					
1	1				
1	$1+q$	1			
1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1		
1	$1+q+q^2+q^3$	$(1+q+q^2)$ $(1+q^2)$	$1+q+q^2$ $+q^3$	1	
1	$1+q+q^2$ $+q^3+q^4$	$(1+q+q^2)$ $(1+q^2)+q^3$ $(1+q+q^2+q^3)$	$(1+q+q^2+q^3)$ $(1+q+q^2)$ (q^2+q^6)	$1+q+q^2$ $+q^3+q^4$	1

şeklindedir [2].

Tanım 1.2.15: İki farklı üstel fonksiyonların q-benzerleri

$$e_q^x := e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} \tag{1.2.9}$$

ve

$$E_q^x := E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]_q!} \tag{1.2.10}$$

şeklinde ifade edilir [1].

Eğer x ve y komütatiflik özelliğine sahip ise, yani $yx = qxy$ ise,

$$e_q^{(x+y)} = e_q^{(x)} e_q^{(y)} \tag{1.2.11}$$

eşitliği sağlanır [1]. Ayrıca

$$D_q e_q(x) = e_q(x) \qquad ve \qquad D_q E_q(x) = E_q(qx)$$

$$e_q(x) E_q(-x) = 1 \qquad ve \qquad e_{\frac{1}{q}}(x) = E_q(x)$$

oldukları görülür [1].

Tanım 1.2.16: q-Trigonometrik fonksiyonlar

$$sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \qquad Sin_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \tag{1.2.12}$$

$$cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \qquad Cos_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{1.2.13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [1].

(1.2.12) ve (1.2.13) eşitlikleri kullanılarak

$$(cos_q x)(Cos_q x) + (sin_q x)(Sin_q x) = 1$$

özelliği elde edilir. Sonuç olarak $(cos_q x)(Cos_q x) + (sin_q x)(Sin_q x) = 1$ ifadesi $sin^2 x + cos^2 x = 1$ eşitliğinin q-benzeridir.

$sin_q x$ fonksiyonunun q-türevi alınırsa

$$D_q sin_q x = D_q\left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(D_q e_q^{ix} - D_q e_q^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ie_q^{ix} + ie_q^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(ie_q^{ix} + ie_q^{-ix}\right)$$

$$= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} = cos_q x$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer q-trigonometrik fonksiyonların da q-türevleri bulunabilir [1]:

$$D_q\left(cos_q x\right) = -sin_q x$$

$$D_q\left(Sin_q x\right) = Cos_q x$$

$$D_q\left(Cos_q x\right) = -Sin_q x.$$

1.3 (p, q)-Analiz

Bu kesimde (p, q)-sayıları tanımlanıp bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 1.3.1: (p, q)-sayıları

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

(p, q)-sayıları, $[n]_{p,q} = [n]_{q,p}$ simetriklik özelliğine sahiptir [2-4].

Eğer $p = 1$ alınırsa (p, q)-sayıları $[n]_{p,q}$, q-analizdeki $[n]_q$ sayısına dönüşür.

Örnek 1.3.2: Birkaç (p, q)-sayıları

$[0]_{p,q} = 0,$ $[1]_{p,q} = 1,$ $[2]_{p,q} = p + q$ $[3]_{p,q} = p^2 + pq + q^2$

şeklindedir.

Tanım 1.3.3: n sayısının (p, q)-faktoriyeli

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} [n]_{p,q}[n-1]_{p,q} \dots [2]_{p,q}[1]_{p,q}, & n \geq 1 \\ 1 \qquad , & n = 0 \end{cases} \tag{1.3.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.4: n sayısının (p, q)-binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!\,[n-k]_{p,q}!} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_{p,q} \tag{1.3.3}$$

ifadesi ile verilir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,p} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_{p,q}$$

özelliği sağlanır.

Teorem 1.3.5: (p, q)-binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + p^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}$$

dır [2].

Tanım 1.3.6: $(x-a)^n$ polinomunun (p, q)-benzeri

$$(x-a)_{p,q}^n = \begin{cases} (x-a)(px-qa) \dots (p^{n-1}x - q^{n-1}a), & n \in \mathbb{N} \\ 1 \qquad , & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.3.7: f karmaşık sayılar kümesinde tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun (p, q)-diferansiyeli

$$d_{p,q} f(x) = f(px) - f(qx)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $f(x) = x$ olarak alınırsa $d_{p,q}x = (p-q)x$ q-diferansiyele benzer ve diğer taraftan, iki fonksiyonun çarpımının (p,q)-diferansiyeli

$$d_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = f(px)g(px) - f(qx)g(qx)$$

$$= f(px)g(px) - f(qx)g(px) + f(qx)g(px) - f(qx)g(qx)$$

$$= g(px)d_{p,q}f(x) + f(qx)d_{p,q}g(x)$$

şeklindedir. Böylece

$$d_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = g(px)d_{p,q}f(x) + f(qx)d_{p,q}g(x) \tag{1.3.4}$$

dir ve benzer şekilde

$$d_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = f(px)d_{p,q}g(x) + g(qx)d_{p,q}f(x) \tag{1.3.5}$$

olur.

Tanım 1.3.8: Herhangi bir f fonksiyonunun (p,q)-türevi $x \neq 0$ için

$$D_{p,q}f(x) = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

şeklinde tanımlanır [2,3,5].

(p,q)-diferansiyel lineerdir. Yani, a ve b herhangi iki sabit sayı olmak üzere

$$D_{p,q}\big(af(x) + bg(x)\big) = \frac{\Big(af(px) + bg(px) - \big(af(qx) + bg(ax)\big)\Big)}{(p-q)(x)}$$

$$= a\frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)(x)} + b\frac{g(px) - g(qx)}{(p-q)(x)}$$

$$= aD_{p,q}f(x) + bD_{p,q}g(x)$$

olduğu görülür.

Tanım 1.3.9: İki fonksiyonun çarpımının (p,q)-türevi

$$D_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = g(px)D_{p,q}f(x) + f(qx)D_{p,q}g(x) \tag{1.3.6}$$

ve benzer şekilde

$$D_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = f(px)D_{p,q}g(x) + g(qx)D_{p,q}f(x) \tag{1.3.7}$$

şeklinde tanımlanır [2,3,5].

$$D_{p,q}\big(f(x)g(x)\big) = D_{p,q}f(x)\left(\frac{g(px)+g(qx)}{2}\right) + D_{p,q}g(x)\left(\frac{f(px)+f(qx)}{2}\right)$$

ve bölümün türevi

$$D_{p,q}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_{p,q}f(x) - f(qx)D_{p,q}g(x)}{g(px)g(qx)}$$

şeklindedir [2,3,5].

Özellik 1.3.10: Bazı bilinen polinomların (p,q)-türevleri

$$D_{p,q}\frac{1}{(x-a)_{p,q}^{n}} = \frac{-q[n]_{p,q}}{(qx-a)_{p,q}^{n+1}} \tag{1.3.8}$$

$$D_{p,q}(a-x)_{p,q}^{n} = -[n]_{p,q}(a-qx)_{p,q}^{n-1} \tag{1.3.9}$$

$$D_{p,q}\frac{1}{(a-x)_{p,q}^{n}} = \frac{p[n]_{p,q}}{(a-px)_{p,q}^{n+1}} \tag{1.3.10}$$

şeklindedir [2,6].

(1.3.8) eşitliğinde $D_{p,q}\frac{1}{(x-a)_{p,q}^{n}}$ ifadesinin k defa (p,q)-türevi alınırsa

$$D_{p,q}\frac{1}{(x-a)_{p,q}^{n}} = \frac{-q[n]_{p,q}}{(qx-a)_{p,q}^{n+1}}$$

$$D_{p,q}^{2}\frac{1}{(x-a)_{p,q}^{n}} = \frac{q^{3}[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}}{(q^{2}x-a)_{p,q}^{n+2}}$$

$$D_{p,q}^3 \frac{1}{(x-a)_{p,q}^n} = \frac{-q^6[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}[n+2]_{p,q}}{(q^3x-a)_{p,q}^{n+3}}$$

$$\vdots$$

$$D_{p,q}^k \frac{1}{(x-a)_{p,q}^n} = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{[n+k-1]_{p,q}!}{[n-1]_{p,q}!} \frac{1}{(q^kx-a)_{p,q}^{n+k}} \tag{1.3.11}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (1.3.9) eşitliğinden

$$D_{p,q}(a-x)_{p,q}^n = -[n]_{p,q}(a-qx)_{p,q}^{n-1}$$

$$D_{p,q}^2(a-x)_{p,q}^n = [n]_{p,q}[n-1]_{p,q}(a-q^2x)_{p,q}^{n-2}$$

$$D_{p,q}^3(a-x)_{p,q}^n = -qq^2[n]_{p,q}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}(a-q^3x)_{p,q}^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$D_{p,q}^k(a-x)_{p,q}^n = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}(a-q^kx)_{p,q}^{n-k} \tag{1.3.12}$$

ve (1.3.10) eşitliğinden

$$D_{p,q} \frac{1}{(a-x)_{p,q}^n} = \frac{p[n]_{p,q}}{(a-px)_{p,q}^{n+1}}$$

$$D_{p,q}^2 \frac{1}{(a-x)_{p,q}^n} = \frac{p^3[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}}{(a-p^2x)_{p,q}^{n+2}}$$

$$D_{p,q}^3 \frac{1}{(a-x)_{p,q}^n} = \frac{p^6[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}[n+2]_{p,q}}{(a-p^3x)_{p,q}^{n+3}}$$

$$\vdots$$

$$D_{p,q}^k \frac{1}{(a-x)_{p,q}^n} = p^{\binom{k}{2}} \frac{[n+k-1]_{p,q}!}{[n-1]_{p,q}!} \frac{1}{(a-p^kx)_{p,q}^{n+k}} \tag{1.3.13}$$

elde edilir.

q-paskal kurallarına benzer şekilde (p,q)-paskal kuralları kullanılarak (p,q)-paskal üçgeni aşağıdaki şekilde elde edilir [2]:

Tablo 1.3.1 (p,q)-paskal üçgeni

1					
1	1				
1	$p+q$	1			
1	p^2+pq+q^2	p^2+pq+q^2	1		
1	$p^3+p^2q+pq^2+q^3$	$(p^2+pq+q^2)(p^2+q^2)$	$p^3+p^2q+pq^2+q^3$	1	
1	$p^4+p^3q+p^2q^2+pq^3+q^4$	$p^2(p^2+pq+q^2)(p^2+q^2)+q^3(p^3+p^2q+pq^2+q^3)$	$p^3(p^3+p^2q+pq^2+q^3)+q^2(p^2+pq+q^2)(p^2+q^2)$	$p^4+p^3q+p^2q^2+pq^3+q^4$	1

Tanım 1.3.11: İki farklı (p,q)-üstel fonksiyonlar;

$$e_{p,q}^{x} \coloneqq e_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]_{p,q}!} \tag{1.3.14}$$

ve

$$E_{p,q}^{x} \coloneqq E_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]_{p,q}!} \tag{1.3.15}$$

şeklinde ifade edilir [2,12]. Burada $p=1$ için

$$e_{1,q}(x) = e_q(x) \qquad ve \qquad E_{1,q}(x) = E_q(x)$$

olur.

$e_{p,q}(x)$ ve $E_{p,q}(x)$ fonksiyonlarının (p,q)-türevleri

$$D_{p,q}e_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{D_{p,q}x^n}{[n]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{[n-1]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p^{\binom{n-1}{2}} \frac{(px)^{n-1}}{[n-1]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{(px)^{n}}{[n]_{p,q}!}$$

ve

$$D_{p,q}E_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{D_{p,q}x^n}{[n]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{[n-1]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n-1}{2}} \frac{(qx)^{n-1}}{[n-1]_{p,q}!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{(qx)^{n}}{[n]_{p,q}!}$$

şeklindedir. Böylece

$$D_{p,q}e_{p,q}(x) = e_{p,q}(px) \qquad ve \qquad D_{p,q}E_{p,q}(x) = E_{p,q}(qx)$$

elde edilir.

Tanım 1.3.12: $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere (p,q)-trigonometrik fonksiyonlar

Tablo 1.3.2 (p,q)-trigonometrik fonksiyonlar

$sin_{p,q}x=\dfrac{e_{p,q}^{ix}-e_{p,q}^{-ix}}{2i}$	$S\dot{I}N_{p,q}x=\dfrac{E_{p,q}^{ix}-E_{p,q}^{-ix}}{2i}$
$cos_{p,q}x=\dfrac{e_{p,q}^{ix}+e_{p,q}^{-ix}}{2}$	$COS_{p,q}x=\dfrac{E_{p,q}^{ix}+E_{p,q}^{-ix}}{2}$
$tan_{p,q}x=\dfrac{sin_{p,q}x}{cos_{p,q}x}$	$TAN_{p,q}x=\dfrac{S\dot{I}N_{p,q}x}{COS_{p,q}x}$
$cot_{p,q}x=\dfrac{cos_{p,q}x}{sin_{p,q}x}$	$COT_{p,q}x=\dfrac{COS_{p,q}x}{S\dot{I}N_{p,q}x}$

şeklinde tanımlanır [2,7].

Tanım 1.3.13: (p,q)-trigonometrik fonksiyonların (p,q)-türevleri

$$D_{p,q}sin_{p,q}x=D_{p,q}\left(\frac{e_{p,q}^{ix}-e_{p,q}^{-ix}}{2i}\right)$$

$$=\frac{D_{p,q}e_{p,q}^{ix}-D_{p,q}e_{p,q}^{-ix}}{2i}$$

$$=\frac{e_{p,q}(px)-e_{p,q}(-px)}{2}$$

$$=cos_{p,q}(px) \tag{1.3.16}$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$D_{p,q}S\dot{I}N_{p,q}x=COS_{p,q}(qx) \tag{1.3.17}$$

$$D_{p,q}cos_{p,q}x=-sin_{p,q}(px) \tag{1.3.18}$$

$$D_{p,q}COS_{p,q}x=-S\dot{I}N_{p,q}(qx) \tag{1.3.19}$$

bulunur [2,12].

Tanım 1.3.14: (p,q)-hiperbolik fonksiyonlar

Tablo 1.3.3 (p,q)-hiperbolik fonksiyonlar

$sinh_{p,q}x = \frac{e_{p,q}^{x} - e_{p,q}^{-x}}{2}$	$SİNH_{p,q}x = \frac{E_{p,q}^{x} - E_{p,q}^{-x}}{2}$
$cosh_{p,q}x = \frac{e_{p,q}^{x} + e_{p,q}^{-x}}{2}$	$COSH_{p,q}x = \frac{E_{p,q}^{x} + E_{p,q}^{-x}}{2}$
$tanh_{p,q}x = \frac{sinh_{p,q}x}{cosh_{p,q}x}$	$TANH_{p,q}x = \frac{SİNH_{p,q}x}{COSH_{p,q}x}$
$coth_{p,q}x = \frac{cosh_{p,q}x}{sinh_{p,q}x}$	$COTH_{p,q}x = \frac{COSH_{p,q}x}{SİNH_{p,q}x}$

şeklinde tanımlanır [2,7].

Tanım 1.3.15: (p,q)-hiperbolik fonksiyonların (p,q)-türevleri

$$D_{p,q}sinh_{p,q}x = D_{p,q}\left(\frac{e_{p,q}(ix) - e_{p,q}(-ix)}{2i}\right)$$

$$= \frac{D_{p,q}e_{p,q}(ix) - D_{p,q}e_{p,q}(-ix)}{2i}$$

$$= \frac{e_{p,q}(px) + e_{p,q}(-px)}{2}$$

$$= cosh_{p,q}(px) \qquad (1.3.20)$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$D_{p,q}SİNH_{p,q}x = COSH_{p,q}(qx) \qquad (1.3.21)$$

$$D_{p,q}cosh_{p,q}x = sinh_{p,q}(px) \qquad (1.3.22)$$

$$D_{p,q}COSH_{p,q}x = SİNH_{p,q}(qx) \qquad (1.3.23)$$

bulunur [2].

BÖLÜM II

Z-DÖNÜŞÜMLERİ

Matematiksel dönüşümler, mühendisliğin elektrik elektronik mühendisliği, matematiğin yaklaşım teorisi, istatistik gibi birçok alanında yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bu dönüşümlerin mühendislik problemlerindeki çözümleri kolaylaştırma, alternatif çözüm yolları elde etme ve bilgisayar destekli hesaplama yapabilme gibi birçok avantajları vardır. Bazı sistemlerin çözümü Fourier dönüşümü ile yapılır. Fourier dönüşümünün yetersiz kaldığı durumlarda Z-dönüşümü kullanılır. Haberleşme ve sinyal işlemede önemli yeri olan ayrık zamanlı sistemlerin analizi Z-dönüşümünün kullanılmasıyla basitleşir. Ayrıca Z-dönüşümü ve ters Z-dönüşümü kullanılarak sonsuz toplam serileri ve fark denklemleri etkili bir biçimde çözülebilir. Z-dönüşümlerinin fark denklemlerine uygulanması, yaklaşım teorisinde ve modern nümerik analizde son derece faydalıdır. Sonsuz serilerin toplamına Z-dönüşümü uygulanarak bu toplamların daha kolay bir biçimde çözüldüğü görülmektedir. Sonuç olarak Z-dönüşümleri matematik ve mühendislikte kolaylıklar sağlamaktadır.

Bu bölümde Z-dönüşümleri hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.1: Örneklem fonksiyon $f^*(t)$

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir [8,9].

(2.1) eşitliğinde verilen örneklem fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)exp(-nsT)$$

şeklinde olur. Bu denklemde $z = exp(sT)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

elde edilir. Böylece $F(z)$ ye $f(nT)$ nin Z-dönüşümü denir. Örnekler arasındaki T aralığının Z-dönüşümünün kullanımı ve özellikler üzerinde hiçbir etkisi olmadığı için T ye 1 değerini vermek uygundur. Şimdi $f(n)$ nin Z-dönüşümünü kompleks değişken z nin $F(z)$ fonksiyonu olarak tanımlanırsa

$$Z\big(f(n)\big) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \tag{2.2}$$

olur. Böylece Z, lineer bir dönüşümdür. Bu bölümde şu varsayılır ki; $|z| > R$ şartını sağlayan bir R için (2.2) ifadesi yakınsaktır. Çünkü $\sigma < 0$ (kompleks s düzlemin sol yarısı olursa), $|z| < 1$ iken

$$|z| = |exp(sT)| = |exp(\sigma + i\mu)T| = |exp(\sigma T)|$$

ve böylece s düzleminin sol yarısının kompleks z düzlemi içindeki birim çemberin içi ile eşlendiği sonucu çıkar. Benzer şekilde s düzleminin sağ yarısı ($|z| > 1$), z düzlemindeki birim çemberin dışı ile eşlenir ve $\sigma = 0$ için s düzlemi z düzlemindeki çember ile eşlenir.

Kompleks integral ile verilen Z-dönüşümün tersi,

$$Z^{-1}\big(F(z)\big) = f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(z)z^{n-1}dz \tag{2.3}$$

dir. Burada γ orijini çevreleyen ve $|z| = R$ çemberinin dışında kalan basit kapalı bir eğridir. Bu tersin varlığı $f(n)$ üzerindeki teklik için kısıtlama koymaktadır. $n < 0$ için $f(n) = 0$ olması gerekmektedir.

(2.2). eşitliğinde her iki tarafını z^{n-1} ile çarpıp kapalı γ eğrisi üzerinden integral alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma} f(0)z^{n-1}dz + \oint_{\gamma} f(1)z^{n-2}dz + \cdots\right.$$

$$\left. + \oint_{\gamma} f(n)z^{-1}dz + \oint_{\gamma} f(n+1)z^{-2}dz + \cdots\right]$$

elde edilir. Cauchy-Goursat teoremine göre yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki integraller

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(n)\frac{dz}{z} = f(n)$$

olur. Bu ifade

$$Z^{-1}\big(F(z)\big) = f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(z)z^{n-1}dz$$

şeklindeki Z-dönüşümünü ters integrale götürür. Benzer bir biçimde iki taraflı Z-dönüşümü;

$$Z\big(f(n)\big) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 2.2: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonun Z-dönüşümü

$$Z\big(f(n)\big) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Özellik 2.3: Z-Dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. Lineerlik özelliği

Eğer $Z\big(f(n)\big) = F(z)$ ve $Z\big(g(n)\big) = G(z)$, c_1 ve c_2 sabit sayı, $f(n)$ ve $g(n)$ iki fonksiyon olmak üzere;

$$Z\big(c_1 f(n) + c_2 g(n)\big) = c_1 F(z) + c_2 G(z)$$

dir.

2. Öteleme özelliği

Eğer $Z\big(f(n)\big) = F(z)$ ve $m \geq 0$ ise

$$Z\big(f(n-m)\big) = Z^{-m}\left[F(z) + \sum_{r=-m}^{-1} f(r) z^{-r}\right] \tag{2.4}$$

$$Z\big(f(n+m)\big) = Z^{m}\left[F(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r) z^{-r}\right] \tag{2.5}$$

Özellikle, eğer $m = 1,2,3, \ldots$ ise

$$Z\big(f(n-1)\big) = Z^{-1}F(z)$$

$$Z\big(f(n-2)\big) = Z^{-2}F(z) + Z^{-2}\sum_{r=-2}^{-1} f(r) z^{-r}$$

dır ve böyle devam eder. Benzer şekilde (2.5) ifadesinden dolayı

$$Z\big(f(n+1)\big) = Z\big(F(z) - f(0)\big)$$

$$Z\big(f(n+2)\big) = Z^{2}\big(F(z) - f(0)\big) - Zf(1)$$

$$Z\big(f(n+3)\big) = Z^{3}\big(F(z) - f(0)\big) - Z^{2}f(1) - Zf(2)$$

.

.

.

Bu ifadeler daha genel yazılırsa $m > 0$ için

$$Z\big(f(n+m)\big) = Z^m\big(F(z) - f(0)\big) - Z^{m-1}f(1) - \cdots - Zf(m-1)$$

olur. Bütün bu sonuçlar genellikle fark denklemini içeren başlangıç değer probleminin çözümünde kullanılmaktadır.

3. Çarpma özelliği

Eğer $Z\big(f(n)\big) = F(z)$ ise

$$Z\big(a^n f(n)\big) = F\left(\frac{z}{a}\right) \qquad |z| > |a| \tag{2.6}$$

$$Z\left(e^{-nb} f(n)\right) = F(ze^b) \qquad |z| > |e^{-b}| \tag{2.7}$$

$$Z\big(nf(n)\big) = -z\frac{d}{dz}F(z) \tag{2.8}$$

4. Konvolüsyon özelliği

Teorem 2.4: Eğer $Z\big(f(n)\big) = F(z)$ ve $Z\big(g(n)\big) = G(z)$ ise $f(n) * g(n)$ konvolüsyonun Z-dönüşümü

$$Z\big(f(n) * g(n)\big) = Z\big(f(n)\big)Z\big(g(n)\big)$$

dir ve

$$f(n) * g(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)$$

ya da

$$Z^{-1}\big(F(z)G(z)\big) = \sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)$$

ifadeleri ile tanımlanmıştır [8,9].

İspat: Tanım 2.2 den

$$Z\big(f(n)*g(n)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}f(n-m)g(m)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}g(m)\sum_{n=0}^{\infty}f(n-m)z^{-n}$$

$n-m=r$ dönüşümü yapılırsa

$$Z\big(f(n)*g(n)\big)=\sum_{m=0}^{\infty}g(m)z^{-m}\sum_{r=-m}^{\infty}f(r)z^{-r}$$

bulunur. Burada $r<0$ için $f(r)=0$ dır.

$$=\sum_{m=0}^{\infty}g(m)z^{-m}\sum_{r=0}^{\infty}f(r)z^{-r}$$

$$=Z\big(g(n)\big)Z\big(f(n)\big)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 2.5: $a_{n+k}=(a_k,a_{k+1},\dots)$ olmak üzere

$$Z(a_{n+k})=z^k\left(z(a_n)-a_0-\frac{a_1}{z}-\cdots-\frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}\right)$$

dir [11].

İspat: Tanım 2.2 den

$$Z(a_{n+k})=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^{-n}\frac{z^{-k}}{z^{-k}}$$

$$=z^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^{-n-k}\right)$$

$$=z^k\left(\sum_{n=k}^{\infty}a_nz^{-n}\right)$$

$$= z^k\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} + \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \cdots - a_0 - \frac{a_1}{z} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}\right)$$

$$= z^k\left(z(a_n) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}\right)$$

dır.

Örnek 2.6: $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f(n) = b^n$ fonksiyonunun Z-dönüşümü

$$Z(b^n) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{b}{z}}$$

$$= \frac{z}{z-b} \qquad |z| > b$$

olur. Özel olarak $b = 1$ için

$$Z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

elde edilir.

Örnek 2.7: $f(n) = e^{inx}$ fonksiyonunun Z-dönüşümü

$$Z\left(e^{inx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{inx} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{z}\right)^n$$

$$= \frac{z}{z - e^{ix}} \qquad |z| > 1$$

Örnek 2.8: $f(n) = \cos nx$ trigonometrik fonksiyonun Z-dönüşümü

$$Z(\cos nx) = \frac{z(z - \cos x)}{z^2 - 2z\cos x + 1}$$

eşitliğinin sağlandığı

$$Z(\cos nx) = Z\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Z\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{ix}} + \frac{z}{z - e^{-ix}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2 - ze^{-ix} + z^2 - ze^{ix}}{z^2 - ze^{ix} - ze^{-ix} + 1}\right)$$

$$= \frac{z(z - \cos x)}{z^2 - 2z\cos x + 1}$$

uygulamalarıyla kolayca görülür.

Benzer şekilde

$$Z(\sin nx) = \frac{z\sin x}{z^2 - 2z\cos x + 1}$$

bulunur.

Örnek 2.9: $f(n) = n$ fonksiyonunun Z-dönüşümü

$$Z(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

$$= \frac{z}{z}\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-(n+1)}$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right)$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} \qquad\qquad |z| > 1$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.10: $f(n) = \cosh nx$ hiberbolik fonksiyonun Z-dönüşümü

$$Z(\cosh nx) = \frac{z(z-\cosh x)}{z^2 - 2z\cosh x + 1}$$

eşitliğinin sağlandığı

$$Z(\cosh nx) = \frac{1}{2}z(e^{nx} + e^{-nx})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^x} + \frac{z}{z-e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{z(z-\cosh x)}{z^2 - 2z\cosh x + 1}$$

uygulamaları ile görülür.

Benzer şekilde $f(n) = \sinh nx$ ise

$$Z(\sinh nx) = \frac{z\sinh x}{z^2 - 2z\cosh x + 1}$$

bulunur.

Örnek 2.11: $f(n) = n^2$ fonksiyonun Z-dönüşümü

$$Z(n^2) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

eşitliği

$$Z(nn) = -z\frac{d}{dz}z(n)$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

uygulamaları ile sağlanır.

Tanım 2.12: Ters Z-dönüşümünün tanımı (2.3) eşitliğinde verilmiştir. Ters Z-dönüşümü, karmaşık düzlemde integral alma yerine basit kesirlere ayırma ve kuvvet serisine açma yöntemleri kullanılacaktır. Tanım (2.2) yola çıkarak $F(z)$ yi z nin ters kuvvet açılımına götürür. Yani $F(z)$

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(n)z^{-n} + \cdots$$

formunda yazılır. Bu açılımda z^{-n} nin katsayısı

$$f(n) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

dir.

Örnek 2.13: $F(z) = \frac{z}{z-a}$ nın kuvvet serisine açma yöntemini kullanarak ters Z-dönüşümünü bulunuz.

$$F(z) = \frac{z}{z-a} = \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots + a^nz^{-n} + \cdots$$

Böylece

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = a, \qquad f(2) = a^2, \ldots, \qquad f(n) = a^n$$

olur ve genellenirse

$$f(n) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = a^n$$

elde edilir.

Örnek 2.14: $F(z) = \frac{z}{z^2-6z+8}$ ifadesinin basit kesirlere ayırma yöntemini kullanarak ters Z-dönüşümünü bulunuz.

$$F(z) = \frac{z}{(z-2)(z-4)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-4} - \frac{z}{z-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Z^{-1}\left(\frac{z}{z-4} - \frac{z}{z-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(4^n - 2^n).$$

BÖLÜM III

Z-DÖNÜŞÜMLERİNİN UYGULAMALARI

3.1 Z-Dönüşümlerinin q-Analiz Üzerindeki Bazı Uygulamaları

Yeşil ve ark. [10], özel q-sayı dizilerinin Z-dönüşümleri üzerine çalıştılar ve özel q-matrisleri ile konvolüsyon kavramları ile ilgili yeni sonuçlar türettiler.

Tezin bu bölümünde Yeşil ve ark. [10] elde ettiği sonuçlar ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

Teorem 3.1.1: $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ nin Z-dönüşümü

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q\right) = \frac{z}{(z-1)_q^{r+1}} \tag{3.1.1}$$

dir [10].

İspat: Tanım 2.2 den

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_q!}{[n-r]_q!\,[r]_q!} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q \ldots [n-r+1]_q}{[r]_q!} z^{-n}$$

olduğu görülür ve burada Z^{-1} dönüşümü yapılırsa

$$=\frac{1}{[r]_q!}\sum_{n=0}^{\infty}[n]_q[n-1]_q[n-2]_q\dots[n-r+1]_q w^n$$

$$=\frac{1}{[r]_q!}\sum_{n=0}^{\infty}w^r D_q^r(w^n)$$

$$=\frac{w^r}{[r]_q!}D_q^r\left(\sum_{n=0}^{\infty}w^n\right)$$

$$=\frac{w^r}{[r]_q!}D_q^r\left(\frac{1}{1-w}\right)$$

$$=\frac{w^r}{[r]_q!}\frac{[r]_q!}{(1-w)_q^{r+1}}$$

$$=\frac{w^r}{(1-w)_q^{r+1}}$$

$$=\frac{w^r}{(1-w)(1-qw)\dots(1-q^r w)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^r}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{q}{z}\right)\dots\left(1-\frac{q^r}{z}\right)}$$

$$=\frac{z}{(z-1)(z-q)\dots(z-q^r)}$$

$$=\frac{z}{(z-1)_q^{r+1}}$$

bulunur. Bu da ispatlanması istenilen eşitliktir.

Sonuç 3.1.2: $q \to 1^-$ için

$$\lim_{q\to 1^-} Z\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q\right) = Z\left(\binom{n}{r}\right) = \frac{z}{(z-1)^{r+1}} \tag{3.1.2}$$

dır [10].

Teorem 3.1.3: $[n]_q$ sayısının Z-dönüşümü

$$Z\left([n]_q\right) = \frac{z}{(z-1)_q^2} \tag{3.1.3}$$

şeklindedir [10].

İspat: Tanım 2.2 ve Tanım 1.2.1 kullanılarak

$$Z\left([n]_q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [n]_q z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^n}{1-q} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} (1-q^n) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^{-n} \right)$$

$$= \frac{1}{1-q} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-q} \right)$$

$$= \frac{1}{1-q} \left(\frac{z(1-q)}{(z-1)_q^2} \right)$$

$$= \frac{z}{(z-1)_q^2}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4: $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^n$ ifadesinin Z-dönüşümü

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^n \right) = \frac{q^r z}{(z-q)_q^{r+1}} \tag{3.1.4}$$

şeklindedir [10].

İspat: Öncelikle $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^n$ ifadesine

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \left(\frac{q}{z}\right)^n$$

şeklinde Z-dönüşümünün tanımı uygulanıp $\frac{q}{z} = w$ dönüşümü yapılırsa

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-r+1]_q}{[r]_q!} w^n$$

$$= \frac{1}{[r]_q!} \sum_{n=0}^{\infty} w^r D_q^r (w^n)$$

$$= \frac{w^r}{[r]_q!} D_q^r \left(\frac{1}{1-w}\right)$$

$$= \frac{w^r}{(1-w)_q^{r+1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{q}{z}\right)^r}{\left(1-\frac{q}{z}\right)_q^{r+1}}$$

$$= \frac{zq^r}{(z-q)(z-q^r)\dots(z-q^r q)}$$

$$= \frac{q^r z}{(z-q)_q^{r+1}}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5: $k \geq 2$ için

$$Z\left([n]_q * q^{2n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q\right) = \frac{z^k}{(z-1)_q^{k+1}} \tag{3.1.5}$$

dir [10].

İspat: Tümevarım yöntemiyle $k = 2$ için

$$Z\left([n]_q * q^{2n}[1]_q\right) = Z\left([n]_q\right)Z\left(q^{2n}[1]_q\right)$$

$$= \left(\frac{z}{(z-1)_q^2}\right)\left(\frac{z}{z-q^2}\right)$$

$$= \left(\frac{z}{(z-1)(z-q)}\right)\left(\frac{z}{z-q^2}\right)$$

$$= \frac{z^2}{(z-1)_q^3}$$

sağlanır. k için doğru olsun. $k+1$ için

$$Z\left([n]_q * q^{2n}[1]_q * \dots * q^{(k+1)n}[1]_q\right) = Z\left([n]_q * \dots * q^{kn}[1]_q\right)Z\left(q^{(k+1)n}[1]_q\right)$$

$$= \left(\frac{z^k}{(z-1)_q^{k+1}}\right)\left(\frac{z}{z-q^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{z^{k+1}}{(z-1)_q^{k+2}}$$

doğru olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6: $k \geq 2$ için

$$[n]_q * q^{2n}[1]_q * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q = \sum_{j=1}^{k} q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \tag{3.1.6}$$

dir [10].

İspat: Teorem 3.1.5 den

$$Z\left([n]_q * q^{2n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q\right) = \frac{z^k}{(z-1)_q^{k+1}} \tag{3.1.7}$$

olduğundan

$$\frac{z^k}{(z-1)_q^{k+1}} = \frac{A_1 z}{(z-1)_q^2} + \frac{A_2 z}{(z-1)_q^3} + \cdots + \frac{A_{k-1} z}{(z-1)_q^k} + \frac{A_k z}{(z-1)_q^{k+1}}$$

yazılabilir ve dolayısıyla

$$A_i = q^{i(i-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q \qquad (\, i = 1,2,\dots,k)$$

elde edilir [11]. Buradan

$$A_1 = q^{1.0} \begin{bmatrix} k-1 \\ 1-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k-1 \\ 0 \end{bmatrix}_q, A_2 = q^2 \begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \dots, A_k = q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

olur ve Z-dönüşümü tanımı ile birlikte Teorem 3.1.1 kullanılarak

$$\begin{bmatrix} k-1 \\ 0 \end{bmatrix}_q z\left(\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q\right) + \cdots + q^{i(i-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q z\left(\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q\right) + \cdots + q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q z\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\right)$$

$$= z\left(\begin{bmatrix} k-1 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + \cdots + q^{i(i-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q + \cdots + q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\right)$$

bulunur ve buradan

$$Z\left(\sum_{j=1}^{k} q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q\right)$$

olur. (3.1.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$[n]_q * q^{2n}[1]_q * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q = \sum_{j=1}^{k} q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6 daki konvolüsyon formülü kullanılarak,

$$P_{kj} = q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q$$

ön koşulu ile özel bir matris elde edilebilir:

Teorem 3.1.6 toplamında $k = 1$ için

$$[n]_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q$$

$k = 2$ için

$$[n]_q * q^{2n}[1]_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + q^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q$$

$k = 3$ için

$$[n]_q * q^{2n}[1]_q * q^{3n}[1]_q = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + q^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q + q^6 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_q$$

.

.

.

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q & 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q & q^6 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q & q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q & q^{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisi yazılabilir. Bu matris q-Paskal matrisidir. Özel olarak $q \to 1^-$ için bilinen Paskal matrisidir [11].

Teorem 3.1.7: $[n]_q^2$ ifadesinin Z-dönüşümü

$$Z\left([n]_q^2\right)=\frac{z(z+q)}{(z-1)_q^3}$$

olur [10].

İspat: Z-dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned}
Z\left([n]_q^2\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}[n]_q^2 z^{-n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^2 z^{-n}\\
&=\frac{1}{(1-q)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^n)^2 z^{-n}\right)\\
&=\frac{1}{(1-q)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-2q^n+q^{2n})z^{-n}\right)\\
&=\frac{1}{(1-q)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=0}^{\infty}q^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}z^{-n}\right)\\
&=\frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-q}+\frac{z}{z-q^2}\right)\\
&=\frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{z(q^2-2q+1)(z+q)}{(z-1)(z-q)(z-q^2)}\right)\\
&=\frac{z(z+q)}{(z-1)_q^3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8: $k\geq 3$ için

$$Z\left([n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q\right)=\frac{z^{k-1}(z+q)}{(z-1)_q^{k+1}}$$

dir [10].

İspat: Tümevarım yöntemiyle:

$k = 3$ için doğrudur.

$$Z\left([n]_q^2 * q^{3n}[1]_q\right) = Z\left([n]_q^2\right)Z\left(q^{3n}[1]_q\right)$$

$$= \left(\frac{z(z+q)}{(z-1)_q^3}\right)\left(\frac{z}{z-q^3}\right)$$

$$= \frac{z^2(z+q)}{(z-1)_q^4}$$

$k > 3$ için k nın doğruluğu kabul edilip $k+1$ için doğruluğu gösterilirse

$$Z\left([n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{(k+1)n}[1]_q\right) = Z\left([n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q\right)Z\left(q^{(k+1)n}[1]_q\right)$$

$$= \left(\frac{z^{k-1}(z+q)}{(z-1)_q^{k+1}}\right)\left(\frac{z}{z-q^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{z^k(z+q)}{(z-1)_q^{k+2}}$$

eşitlikleri ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9: $k \geq 3$ olmak üzere

$$[n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * q^{4n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q = \sum_{j=1}^{k}\left\{q^{j(j-1)}\begin{bmatrix}k-1\\ j-1\end{bmatrix}_q + q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\ j-2\end{bmatrix}_q\right\}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}_q$$

dir [10].

İspat: $k \geq 3$ için Teorem 3.1.8 den

$$[n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * \dots * q^{kn}[1]_q = \frac{z^{k-1}(z+q)}{(z-1)_q^{k+1}}$$

$$= \frac{z^{k-1}z}{(z-1)_q^{k+1}} + \frac{z^{k-1}q}{(z-1)_q^{k+1}}$$

yazılabilir. Daha sonra Teorem 3.1.6 kullanılarak

$$\frac{z^{k-1}z}{(z-1)_q^{k+1}}=\sum_{j=1}^{k}q^{j(j-1)}\begin{bmatrix}k-1\\j-1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q$$

olur ve

$$\frac{z^{k-1}q}{(z-1)_q^{k+1}}=\left(\frac{A_1z}{(z-1)_q^2}+\frac{A_2z}{(z-1)_q^3}+\cdots+\frac{A_kz}{(z-1)_q^{k+1}}+\cdots\right)q$$

yazılırsa

$$A_j=q^{j(j-2)}\begin{bmatrix}k-2\\j-2\end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Buradan

$$qA_j=qq^{j(j-2)}\begin{bmatrix}k-2\\j-2\end{bmatrix}_q$$

$$=q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\j-2\end{bmatrix}_q$$

$$=\begin{bmatrix}k-2\\0\end{bmatrix}_q Z\left(\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_q\right)+\cdots+q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\j-2\end{bmatrix}_q Z\left(\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\right)+\cdots+q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\k-2\end{bmatrix}_q Z\left(\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\right)$$

$$=Z\left(\begin{bmatrix}k-2\\0\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_q+\cdots+q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\k-2\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\right)$$

$$=Z\left(\left(\sum_{j=2}^{k}q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix}k-2\\j-2\end{bmatrix}_q\right)\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\right)$$

bulunur ve yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9 konvolüsyon formülündeki katsayılar kullanılarak

$$L_{kj} = q^{j(j-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^{(j-1)^2} \begin{bmatrix} k-2 \\ j-2 \end{bmatrix}_q$$

ön koşulu için üçgensel matris oluşturulabilir [11]. Bu matris q-Lucas matrisidir. Özel olarak $q \to 1^-$ için Lucas matrisine olduğu görülür. Teorem 3.1.9 kullanılarak

$k = 2$ için

$$[n]_q^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + \left(q^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q$$

$k = 3$ için

$$[n]_q^2 * q^{3n}[1]_q = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + \left(q^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q + \left(q^6 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q + q^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_q$$

$k = 4$ için

$$\begin{aligned} [n]_q^2 * q^{3n}[1]_q * q^{4n}[1]_q &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q + \left(q^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q \\ &+ \left(q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q + q^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_q + \left(q^{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q + q^9 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q \right) \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

.

.

.

elde edilir. Bu ifadelerin katsayılarını kullanarak

$$L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^6 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q + q^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q & 0 & 0 & \dots \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q & q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q + q^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q & q^{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q + q^9 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulabilir [10]. Bu matrise q-Lucas matrisi denir.

3.2 $\boldsymbol{Z}$-Dönüşümlerinin $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-Analiz Üzerindeki Bazı Uygulamaları

Ağyüz ve Açıkgöz [12] (p,q)-analizinde bazı özel fonksiyonların ve bazı özelliklerin Z-dönüşümü üzerindeki yansımalarını incelediler.

Tezin bu kesiminde Ağyüz ve Açıkgöz'ün makalelerinden elde edilmiş bazı teoremler ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Teorem 3.2.1: $0<|q|<|p|<1$ olmak üzere

$$Z\left([n]_{p,q}\right)=\frac{zp}{(z-p)_{p,q}^{2}} \tag{3.2.1}$$

dir [12].

İspat: Tanım 2.2 kullanılarak

$$Z\left([n]_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}[n]_{p,q}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n-q^n}{p-q}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{p-q}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p^n z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}q^n z^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{p-q}\left(\frac{z}{z-p}-\frac{z}{z-q}\right)$$

$$=\frac{zp}{(z-p)(zp-pq)}$$

$$=\frac{zp}{(z-p)_{p,q}^{2}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2: $0 < |q| < |p| \leq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}\right) = \frac{zp}{(z-p)_{p,q}^2} \tag{3.2.2}$$

dir [12].

İspat: Z-dönüşümünün tanımından

$$Z\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!\,[k]_{p,q}!} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_{p,q}[n-1]_{p,q} \ldots [n-k+1]_{p,q}}{[k]_{p,q}!} z^{-n}$$

$z^{-1} = w$ dönüşümü yapılırsa

$$= \frac{1}{[k]_{p,q}!} \sum_{n=0}^{\infty} w^k D_{p,q}^k (w^n)$$

$$= \frac{w^k}{[k]_{p,q}!} D_{p,q}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right)$$

$$= \frac{w^k}{[k]_{p,q}!} D_{p,q}^k \left(\frac{1}{1-w} \right)$$

$$= \frac{w^k}{[k]_{p,q}!} \left(\frac{[k]_{p,q}!}{(1-pw)_{p,q}^{k+1}} \right)$$

$$= \frac{zp}{(z-p)_{p,q}^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3: $0 < |q| < |p| \leq 1$ olmak üzere iki farklı (p, q)-üstel fonksiyonların Z-dönüşümleri

$$Z\left(e_{p,q}^{x}\right) = \frac{z}{z - e_{p,q}^{x}} \tag{3.2.3}$$

$$Z\left(E_{p,q}^{x}\right) = \frac{z}{z - E_{p,q}^{x}} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir [12].

İspat: Tanım 2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} Z\left(e_{p,q}^{x}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{p,q}^{x} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{p,q}^{x} z^{-1}\right)^{n} \\ &= 1 + e_{p,q}^{x} z^{-1} + e_{p,q}^{2x} z^{-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e_{p,q}^{x} z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - e_{p,q}^{x}} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Z\left(E_{p,q}^{x}\right) = \frac{z}{z - E_{p,q}^{x}}$$

olduğu görülür.

$p = 1$ için iki farklı (p, q)-üstel fonksiyonların Z-dönüşümleri, aşagıdaki gibi q-üstel fonksiyonların Z-dönüşümlerine dönüşür:

$$Z\left(e_{q}^{x}\right) = \frac{z}{z - e_{q}^{x}}$$

$$Z\left(E_{q}^{x}\right) = \frac{z}{z - E_{q}^{x}}$$

Teorem 3.2.4: $0 < |q| < |p| \leq 1$ olmak üzere (p, q)-trigonometrik fonksiyonların Z-dönüşümü

$$Z\big(\sin_{p,q}(x)\big) = \frac{z \sin_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cos_{p,q}(x) + 1} \tag{3.2.5}$$

$$Z\big(\cos_{p,q}(x)\big) = \frac{z^2 - z\cos_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cos_{p,q}(x) + 1} \tag{3.2.6}$$

şeklindedir [12].

İspat: Tanım 2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
Z\big(\sin_{p,q}(x)\big) &= Z\left(\frac{e_{p,q}^{ix} - e_{p,q}^{-ix}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i} Z\big(e_{p,q}^{ix} - e_{p,q}^{-ix}\big) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - e_{p,q}^{ix}} - \frac{z}{z - e_{p,q}^{-ix}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2 - ze_{p,q}^{-ix} + ze_{p,q}^{ix} - z^2}{z^2 - ze_{p,q}^{-ix} - ze_{p,q}^{ix} + 1}\right) \\
&= \frac{z \sin_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cos_{p,q}(x) + 1}
\end{aligned}$$

elde edilir.Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
Z\big(\cos_{p,q}(x)\big) &= Z\left(\frac{e_{p,q}^{ix} + e_{p,q}^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} Z\big(e_{p,q}^{ix} + e_{p,q}^{-ix}\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e_{p,q}^{ix}} + \frac{z}{z - e_{p,q}^{-ix}}\right) \\
&= \frac{z^2 - z\cos_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cos_{p,q}(x) + 1}
\end{aligned}$$

bulunur.

$p = 1$ için (p, q)-trigonometrik fonksiyonların Z-dönüşümleri, aşağıdaki gibi q-trigonometrik fonksiyonların Z-dönüşümlerine dönüşür:

$$Z\big(\sin_q(x)\big) = \frac{z\sin_q(x)}{z^2 - 2z\cos_q(x) + 1}$$

$$Z\big(\cos_q(x)\big) = \frac{z^2 - z\cos_q(x)}{z^2 - 2z\cos_q(x) + 1}$$

Teorem 3.2.5: $0 < |q| < |p| \leq 1$ olmak üzere (p, q)-hiperbolik fonksiyonların Z-dönüşümü

$$Z\big(\sinh_{p,q}(x)\big) = \frac{z\sinh_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cosh_{p,q}(x) + 1} \tag{3.2.7}$$

$$Z\big(\cosh_{p,q}(x)\big) = \frac{z^2 - z\cosh_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cosh_{p,q}(x) + 1} \tag{3.2.8}$$

şeklindedir [13].

İspat: Tanım 2.2 kullanılarak

$$Z\big(\sinh_{p,q}(x)\big) = Z\left(\frac{e_{p,q}^{x} - e_{p,q}^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Z\big(e_{p,q}^{x} - e_{p,q}^{-x}\big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e_{p,q}^{x}} - \frac{z}{z - e_{p,q}^{-x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2 - ze_{p,q}^{-x} - z^2 + ze_{p,q}^{x}}{z^2 - ze_{p,q}^{-x} - ze_{p,q}^{x} + 1}\right)$$

$$= \frac{z\sinh_{p,q}(x)}{z^2 - 2z\cosh_{p,q}(x) + 1}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Z\big(\cosh_{p,q}(x)\big) = Z\left(\frac{e_{p,q}^{x} + e_{p,q}^{-x}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}Z\left(e_{p,q}^{x}+e_{p,q}^{-x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e_{p,q}^{x}}+\frac{z}{z-e_{p,q}^{-x}}\right)$$

$$=\frac{z^2-z\cosh_{p,q}(x)}{z^2-2z\cosh_{p,q}(x)+1}$$

bulunur. Burada $p=1$ için

$$Z\left(\sinh_q(x)\right)=\frac{z\sinh_q(x)}{z^2-2z\cosh_q(x)+1}$$

$$Z\left(\cosh_q(x)\right)=\frac{z^2-z\cosh_q(x)}{z^2-2z\cosh_q(x)+1}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Teorem 3.2.6: $k\geq 2$ için

$$Z\left([n]_{p,q}*\left(\frac{q^2}{p}\right)^n[1]_{p,q}*\left(\frac{q^3}{p^2}\right)^n[1]_{p,q}*\ldots*\left(\frac{q^k}{p^{k-1}}\right)^n[1]_{p,q}\right)=\frac{z^k p^{\binom{k+1}{2}}}{(z-p)_{p,q}^{k+1}}$$

dir [12] .

İspat: Tümevarım yöntemiyle bu teorem aşağıdaki gibi ispatlanır. Öncelikle $k=2$ için

$$Z\left([n]_{p,q}*\left(\frac{q^2}{p}\right)^n[1]_{p,q}\right)=Z\left([n]_{p,q}\right)Z\left(\left(\frac{q^2}{p}\right)^n[1]_{p,q}\right)$$

$$=\left(\frac{zp}{(z-p)_{p,q}^2}\right)\left(\frac{zp}{zp-q^2}\right)$$

$$=\frac{z^2p^3}{(z-p)_{p,q}^3}$$

doğru olduğu görülür. k için doğruluğunu kabul edip $k+1$ için

$$Z\left([n]_{p,q}*\left(\frac{q^2}{p}\right)^n[1]_{p,q}*\left(\frac{q^3}{p^2}\right)^n[1]_{p,q}*\ldots*\left(\frac{q^k}{p^{k-1}}\right)^n[1]_{p,q}*\left(\frac{q^{k+1}}{p^k}\right)^n[1]_{p,q}\right)=$$

$$Z\left([n]_{p,q} * \left(\frac{q^2}{p}\right)^n [1]_{p,q} * \left(\frac{q^3}{p^2}\right)^n [1]_{p,q} * \dots * \left(\frac{q^k}{p^{k-1}}\right)^n [1]_{p,q}\right) Z\left(\left(\frac{q^{k+1}}{p^k}\right)^n [1]_{p,q}\right)$$

$$= \left(\frac{z^k p^{\binom{k+1}{2}}}{(z-p)_{p,q}^{k+1}}\right)\left(\frac{zp^k}{zp^k - q^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{z^{k+1} p^{\binom{k+2}{2}}}{(z-p)_{p,q}^{k+2}}$$

de doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.7: $[n]_{p,q}^2$ ifadesinin Z-dönüşümü

$$Z\left([n]_{p,q}^2\right) = \frac{z(z+pq)}{\left(\frac{z}{p} - p\right)_{p,q}^3} \tag{3.2.9}$$

dir [13].

İspat: Tanım 2.2 ve Tanım 1.3.1 kullanılarak

$$Z\left([n]_{p,q}^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [n]_{p,q}^2 z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p^n - q^n}{p-q}\right)^2 z^{-n}$$

$$= \frac{1}{(p-q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (p^n - q^n)^2 z^{-n}$$

$$= \frac{1}{(p-q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (p^{2n} - 2p^n q^n - q^{2n}) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{(p-q)^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} z^{-n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} p^n q^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} z^{-n}\right)$$

$$= \frac{1}{(p-q)^2} \left(\frac{z}{z-p^2} - 2\frac{z}{z-pq} - \frac{z}{z-q^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(p-q)^2} \frac{z(q^2 - 2pq + p^2)(z + pq)}{(z - p^2)(z - pq)(z - q^2)}$$

$$= \frac{z(z + pq)}{\left(\frac{z}{p} - p\right)_{p,q}^{3}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.7 farklı biçimde ifade edilirse

$$Z\left([n]_{p,q}^{2}\right) = \frac{1}{(p-q)^2} z \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} (-1)^l \frac{1}{z - p^{2-l} q^l}$$

elde edilir. Daha sonra

$$Z\left([n]_{p,q}^{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [n]_{p,q}^{3} z^{-n} = \frac{1}{(p-q)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (p^n - q^n)^3 z^{-n}$$

$$= \frac{1}{(p-q)^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{3}{0} p^{3n} - \binom{3}{1} p^{2n} q^n + \binom{3}{2} p^n q^{2n} - q^{3n} \right) z^{-n} \right)$$

$$= \frac{1}{(p-q)^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{0} p^{3n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{1} p^{2n} q^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{2} p^n q^{2n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n} z^{-n} \right)$$

$$= \frac{1}{(p-q)^3} \left(\frac{z}{z - p^3} - \frac{3z}{z - p^2 q} + \frac{3z}{z - pq^2} - \frac{z}{z - p^3} \right)$$

$$= \frac{z}{(p-q)^3} \left(\sum_{l=0}^{3} \binom{3}{l} (-1)^l \frac{1}{z - p^{3-l} q^l} \right)$$

olur ve genellenirse $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için

$$Z\left([n]_{p,q}^{\alpha}\right) = \frac{z}{(p-q)^{\alpha}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} (-1)^l \frac{1}{z - p^{\alpha-l} q^l} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla sıradaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.2.8: $\alpha \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$Z\left([n]_{p,q}^{\alpha}\right) = \frac{z}{(p-q)^{\alpha}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha}{l}(-1)^{l}\frac{1}{z-p^{\alpha-l}q^{l}}\right)$$

dir [13].

Teorem 3.2.9: $k \geq 3$ için

$$Z\left([n]_{p,q}^{2} * \left(\frac{q^3}{p}\right)^{n}[1]_{p,q} * \left(\frac{q^4}{p^2}\right)^{n}[1]_{p,q} * \dots * \left(\frac{q^k}{p^{k-2}}\right)^{n}[1]_{p,q}\right) = \frac{z^{k-1}p^{\frac{k(k-1)}{2}-1}(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{k+1}}$$

dir [13].

İspat: Tümevarım yöntemiyle;

$k = 3$ için

$$Z\left([n]_{p,q}^{2} * \left(\frac{q^3}{p}\right)^{n}[1]_{p,q}\right) = Z\left([n]_{p,q}^{2}\right)Z\left(\left(\frac{q^3}{p}\right)^{n}[1]_{p,q}\right)$$

$$= \left(\frac{z(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{3}}\right)\left(\frac{z}{z-\frac{q^3}{p}}\right)$$

$$= \left(\frac{z(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{3}}\right)\left(\frac{zp^2}{zp^2-qp^3}\right)$$

$$= \frac{z^2(z+pq)p^2}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{4}}$$

olur. Daha sonra k için doğruluğunu kabul edip $k+1$ için

$$Z\left([n]_{p,q}^{2} * \left(\frac{q^3}{p}\right)^{n}[1]_{p,q} * \dots * \left(\frac{q^k}{p^{k-2}}\right)^{n}[1]_{p,q} * \left(\frac{q^{k+1}}{p^{k-1}}\right)^{n}[1]_{p,q}\right)$$

$$= Z\left([n]_{p,q}^{2} * \left(\frac{q^3}{p}\right)^n [1]_{p,q} * \dots * \left(\frac{q^k}{p^{k-2}}\right)^n [1]_{p,q}\right) Z\left(\left(\frac{q^{k+1}}{p^{k-1}}\right)^n [1]_{p,q}\right)$$

$$= \left(\frac{z^{k-1} p^{\frac{k(k-1)}{2}-1}(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{k+1}}\right)\left(\frac{z}{z-\frac{q^{k+1}}{p^{k-1}}}\right)$$

$$= \left(\frac{z^{k-1} p^{\frac{k(k-1)}{2}-1}(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{k+1}}\right)\left(\frac{zp^k}{\frac{z}{p}p^{k+1}-q^{k+1}p}\right)$$

$$= \frac{z^{k} p^{\frac{k(k+1)}{2}-1}(z+pq)}{\left(\frac{z}{p}-p\right)_{p,q}^{k+2}}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM IV

SONUÇLAR

Bu tezde, q-Analiz ve (p, q)-Analizin temel kavramları, bazı özellikleri ve bunlarla ilgili teoremler incelenmiştir. Ayrıca Z-dönüşümleri ve Z-dönüşümlerinin q-Analiz ve (p, q)-Analizdeki bazı uygulamaları incelenmiştir.

Fizik, istatistik ve mühendislikte q-Analiz ve Z-dönüşümlerinin birçok kullanım alanı vardır. Bundan dolayı bu iki konuyu birleştirerek daha çok fayda sağlayabilmek için Z-dönüşümlerinin q-Analiz ve (p, q)-Analizdeki uygulamaları incelenmiştir. Özellikle [10] ile [12] nolu kaynaklar incelenerek yeni sonuçlar türetilmiştir. [10] nolu kaynakta q-Paskal ve q-Lucas matrislerinden bahsedilmiştir. (p, q)-Paskal ve (p, q)-Lucas matrislerine ulaşabilmek için birkaç teorem bulunmuştur[13]. Bu durum ileri bir araştırma konusu olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Kac, V., Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*, Springer, New York.

[2] Duran, U. (2002). Post Quantum Calculus Yüksek Lisans Tezi (Department of mathematics) University of Gaziantep Graduate school of naturel & Applied sciences.

[3] Chakrabarti, R., Jagannathan, R. (1991). A (p,q)-oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *Journal of Physics A:Mathematical and General*. **24**, 13.

[4] Arik, M., Demircan, E., Turgut, T., Ekinci, L., Mungan, M., (1992). Fibonacci oscillators. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields.* **55**, 89-95.

[5] Brodimas, G., Jannussis, A., Mignanı, R. (1991). Two-parameter quantum groups. *Universita di Roma Preprint.* **820**, 1-16.

[6] Sadjang, P.N. (2013). On the fundamental theorem of (p,q)-calculus and some (p,q)-Taylor formulas. *arXiv:1309.3934v**1** [math.QA]*.

[7] Duran, U., Acikgoz, M., Araci, S. (2019). A Study on Some New Results Arising from (p,q)-Calculus. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics,* **10** (2).

[8] Jury, E.I.(1973). *Theory and Application of the Z-Transform Method*. Krieger Publishing Company, New York.

[9] Altunbeg, Özlem. (2005) Z-Dönüşümleri ve özellikleri üzerine yüksek lisans tezi, (Matematik) Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara

[10] Yeşil, F., Tuğlu, N. and Kızılateş, C. (2015). Some q-Matrices Related to Z-Transform, *Mathematical Sciences And Applications E-Notes,* **3**, 18-24.

[11] Pita R.V, Claudio de J. (2013). Some Number Arroys Related to Pascal and Lucas Triangles. *Journal of Integer Sequences* **16**.

[12] Agyüz E. and Acikgoz M. (2016). Applications of Z-transform to Some Elemantary Functions in q and (p, q)-Calculus, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, **14**(6), 164-167.

[13] Yağmur, D., Acikgoz M., Ateş, R. (2019). Applications of Z-transforms to (p,q)-calculus, *Journal for Algebra and Number Theory Academia*, **9** (2).