T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORTOGONAL POLİNOMLARIN MATRİS ÖZELLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEMET DURMUŞ

MUĞLA, 2010

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. Mehmet SEZER danışmanlığında Demet DURMUŞ tarafından hazırlanan Ortogonal Polinomların Matris Özellikleri ve Bazı Uygulamaları başlıklı tez, 03/02/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Mehmet SEZER	İmza	:
Üye	: Zeynep Fidan KOÇAK	İmza	:
Üye	: Nesrin ÖZSOY	İmza	:

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın yürütülmesinde bana yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen, kaynak ve fikirlerinden daima istifade ettiğim, gerek ders aşamasında, gerek tez aşamasında verdiği bilgiler açısından, kazandırdığı araştırma azmi ve çalışma gayreti bakımından tez danışmanım, değerli hocam Prof.Dr. Mehmet SEZER'e, Muğla Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve ders arkadaşlarıma, öğrenim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşime, tezimin hazırlanmasında her zaman yanımda olan nişanlıma, dershanedeki öğretmen arkadaşlarıma ve öğrencilerime teşekkürlerimi bir borç biliyorum.

Demet DURMUŞ

Muğla, Ocak 2010

İÇİNDEKİLER

ORTOGONAL POLİNOMLARIN MATRİS ÖZELLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

DEMET DURMUŞ

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
2010

ÖZET

Bu çalışmada, ortogonal polinomlar tanımlanmış; Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomlarının veya özel fonksiyonlarının önemli özellikleri ve rekürans bağıntıları, matris formlarına dönüştürülmüş ve aralarındaki matris bağıntıları bulunmuştur. Polinomlar arasında matris bağıntıları kurularak taban dönüşümleri yapılmıştır. Aynı zamanda ortogonal polinomların temel özellikleri ve bunlara dayalı matris yöntemi kullanılarak sabit katsayılı yüksek mertebe bazı differensiyel denklemlere uygulanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Ortogonal polinomlar, Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomları, Matris özellikleri

Sayfa Adedi :45

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Mehmet SEZER

THE MATRİX PROPERTİES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND SOME APPLİCATİONS

(M.Sc.Thesis)

DEMET DURMUŞ

UNIVERSITY OF MUĞLA
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

2010

ABSTRACT

In this study, orthogonal polynomials have been defined; the important features and recurrence relations of Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel and Bernstein's polynomials or their special functions have been transformed into matrix forms and the matrix relations among them have been found. Establishing matrix relations among polynomials, their bases transformations have been done. By using the matrix method based on the fundamental matrix relations of orthogonal polynomials, examples are applied to differential equations with constant coefficients. The results of study are discussed.

Key Words : Ortogonal polinomlar, Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polynomials, Matrix properties

Page Numbers :45

Advisor : Prof. Dr. Mehmet SEZER

ŞEKİL DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T_n(x)$: Chebyshev polinomları

$P_n(x)$: Legendre polinomları

$L_n(x)$: Laguerre polinomları

$H_n(x)$: Hermit polinomları

$J_n(x)$: Bessel polinomları

$B_{n,N}(x)$: Bernstein polinomları

D : Chebyshev Polinomu İçin Katsayılar Matrisi

M : Legendre Polinomları İçin Katsayılar Matrisi

Π : Laguerre Polinomları İçin Katsayılar Matrisi

F : Hermite Polinomları İçin Katsayılar Matrisi

S : Bessel Polinomları İçin Katsayılar Matrisi

θ : Bernstein Polinomları İçin Katsayılar Matrisi

1.GİRİŞ

1.1 Ön Bilgiler

Ortogonal polinomlar, ortogonal polinomlar adı altında olmasa bile 19. yüzyılda sonsuza giden kesir ve moment problemlerinde kullanılmaya başlandı. Ortogonal teorisi de tellerin titreşimi ile ilgili tartışmalarla ortaya çıktı. Bu polinomların kullanım alanları zamanla genişledi; özellikle günümüzde bilgisayarların gelişi ile araştırma alanları hızla arttı. Ortogonal polinomların uygulama alanı ise matematiksel fizik, mühendislik, bilgisayar bilimleri olup matematiğin de aktif bir araştırma alanıdır. Bu alanlardaki problemlerin matematiksel modelleri adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile integral denklemler olur. Bu tip denklemlerin bazıları elementer yöntemlerle çözülebilir; fakat çoğunun tam çözümlerinin bulunması ya çok zor ya da mümkün değildir. Bu durumlarda genellikle seri çözümlere başvurulur. Bu seriler, klasik ortogonal polinomlar veya özel fonksiyonlar olan Chebyshev, Legendre, Laguarre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomlarına veya fonksiyonlarına dayalı serilerdir.

1.2 Ortogonal Polinomların Tanımı

W(x), x reel değişkenli negatif olmayan bir reel fonksiyon; (a ,b),

x-ekseninde sabit bir aralık;

n=0,1,2,3,… için

$$\int_a^b x^n w(x)\, dx$$

integrali mevcut ve

$$\int_a^b w(x)\, dx$$

integrali pozitif olsun. Buna göre, aşağıdaki koşullarla tek olarak belirlenen bir

$P_o(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x)\ \ldots$

polinomlar dizisi vardır:

1. $P_n(x)$ **,** n. dereceden bir polinomdur ve bu polinomdaki x^n in katsayısı pozitiftir.

2. $P_o(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ ortonormaldir;

yani,

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)W(x)\,dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

Bu durumda, $P_n(x)$ polinomlarına, W(x) ağırlık fonksiyonuna göre, (a,b) aralığında bir ortogonal polinom sistemi denir.

1.3. Sturm-Liouville Sınır-Değer Problemi ve Ortogonallik

Bir $a \leq$ x $\leq$ b aralığında

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0$$

diferansiyel denklemi ve

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$$
$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

sınır koşullarından oluşan sisteme Sturm-Liouville sınır-değer problemi denir. Burada p(x)>0, q(x) ve r(x)>0 (ağırlık fonksiyonu) verilen fonksiyonlar; a_1, a_2, b_1 ve b_2 verilen sabitler; λ özdeğeri belirsiz bir parametredir. Sturm-Liouville sınır-değer probleminin sıfır olmayan $\phi_n(x)$, n=1,2,3… çözümleri, yalnız λ_n, n=1,2,3… özdeğerlerinde vardır ve $\phi_n(x)$ 'e özfonksiyon denir.

Bir Sturm-Liouville sınır-değer probleminin özdeğerleri negatif olmayan reel sayılardır. Ayrıca $\phi_n(x)$ özfonksiyonları r(x) ağırlık fonksiyonuna göre herbiri diğerine ortogonaldir:

$$\int_a^b r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n \;; \quad m,n = 1,2,3...$$

$\phi_n(x)$ çözümler kümesi, $a\leq x\leq b$ aralığında bir tam ortogonal fonksiyonlar kümesidir. Dolayısıyla, parçalı sürekli bir f(x) fonksiyonu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) = \begin{cases} f(x); & f(x) \ \textit{sürekli iken} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & \textit{süreksizlik noktalar} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_n(x)\,dx}$$

olacak şekilde, $\phi_n(x)$, n=1,2,3,… cinsinden ifade edilebilir. Tamlık, parçalı sürekli bir fonksiyonun özfonksiyonları cinsinden belirlenmesine izin verir ki bu esnada ortogonallik tek ve kompakt olmasına izin verir. Ayrıca, ortogonal serilerin en kullanışlı seriler olduğu gösterilebilir. Bu özellikler, klasik $\sin\lambda_n x$ ve $\cos\lambda_n x$ Fourier serilerini tam ortogonal $\phi_n(x)$ serilerine geneller. Böyle serilere genelleştirilmiş Fourier serileri adı verilir. Genel Fourier serileri ile elde edilen çözüm yöntemine özfonksiyon açılım yöntemi adı verilir ki; bu kısmi diferansiyel denklemleri çözmede önemli bir tekniktir.

Genelleştirilmiş Fourier seri örnekleri Bessel, Bernstein gibi fonksiyonlarda ve Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite gibi ortogonal polinomlarda bulunabilir. Bu polinomların her birisi, farklı koordinatlarda veya koşullarda tam ortogonal bir kümeyi temsil eder ve Sturm-Liouville sınır değer probleminin bir özel hali olarak gözönüne alınabilir.

1.4.Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada önce, Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomlarının veya özel fonksiyonlarının önemli özellikleri ve rekürans bağıntıları, matris formlarına dönüştürülmüş (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Sarı, 2009; Albayrak, 2007; Kabakçı, 2007; Akgönüllü, 2008; Yüzbaşı, 2008) ve aralarındaki matris bağıntıları bulunmuştur. Daha sonra, bu bağıntılar yardımı ile, yüksek mertebeden sabit katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m} p_k y^{(k)}(x) = g(x)$$

diferansiyel denkleminin (1.1)

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) \right) = \lambda_j , \quad j = 0,1,2,\ldots, m-1 \tag{1.2}$$

koşullarına göre yaklaşık çözümleri,

$F_n(x)$ ortogonal polinomlar veya özel fonksiyonlar olmak üzere,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n F_n(x), \quad a \le x \le b \tag{1.3}$$

kesilmiş seri formunda araştırılmıştır.

Burada p_k , a , b , a_{jk} , b_{jk} ve λ_j uygun sabitler; g(x) , $a \le$x$\le$b aralığında sürekli fonksiyonlar; f_n bulunması gereken polinom katsayılarıdır.

Verilen (1.1) denkleminin (1.2) koşullarına göre (1.3) kesilmiş seri çözümünü bulmak için son yıllarda verilen Taylor matris yöntemleri (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd, 2000; Yalçınbaş vd, 2002) ve Chebyshev matris yöntemleri (Sezer vd, 1996; Akyüz, 1999; Akyüz, 2000) geliştirilerek ‘pratik bir matris yöntemi’ sunulmuştur.

2.POLİNOMLAR VE MATRİS ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomları ve bunlara dayalı kesilmiş serilerin matris gösterimleri elde edilecektir.

2.1 Taylor Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Bir y(x) fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olduğunu ve x=c noktasında

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} y_n (x-c)^n, \quad y_n = \frac{y^{(n)}(c)}{n!} \quad a \leq c \leq b$$

kesilmiş Taylor serisinde yazılabildiğini kabul edelim. Bu durumda y(x) fonksiyonu

$$[y(x)] = X(x)\, Y \qquad a \leq x \leq b \tag{2.1}$$

$$X(x) = \left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]$$

$$Y = \left[y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N\right]^T$$

matris formunda yazılabilir (Sezer, 1994; Yalçınbaş, 2002; Günsu, 2005).
Ayrıca (2.1)'in x'e göre birinci türevi

$$y^{(1)}(x) = X^{(1)}(x)\, Y$$
$$= X(x)\, B^T Y$$

ve yüksek mertebeden türevleri

$$y^{(2)}(x) = X^{(1)}(x)\, B^T Y = X(x) \left(B^T\right)^2 Y$$

$$y^{(3)}(x) = X^{(1)}(x) \left(B^T\right)^2 Y = X(x) \left(B^T\right)^3 Y$$

.

.

.

$$y^{(k)}(x) = X(x) \left(B^T\right)^k Y \tag{2.2}$$

olarak elde edilir. Burada $X^{(1)}(x)$ ve $X(x)$ matrisleri arasında

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$X^{(1)}(x) = X(x)\, B^T \qquad (2.3)$$

bağıntısının var olduğu bilinmektedir (Yalçınbaş, 2006; Sezer, 2002).

2.2 Chebyshev Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Ortogonal polinomların en sık kullanılanlarından birisi -1≤x≤1 aralığında

$$T_n(x) = \cos n\theta, \qquad x = \cos\theta$$

ile tanımlanan birinci tip Chebyshev polinomlarıdır ve x'e göre n. dereceden bir polinomdur. $T_n(x)$ ve x'in kuvvetleri arasında

$$x^{2n} = 2^{-2n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{n-j} T_{2j}(x)$$

$$x^{2n-1} = 2^{-2n} \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{n-j} T_{2j+1}(x)$$

bağıntıları vardır ve kesme sınırı N olmak üzere, bunlar

$$X^T(x) = D\,T^T(x) \quad \text{veya} \quad X(x) = T(x)\, D^T \qquad (2.4)$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^N \end{bmatrix}, \quad -1 \le x \le 1$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & \ldots & T_N(x) \end{bmatrix}$$

matris formunda yazılabilir; burada D matrisi (Sezer, 1996; Sezer, 1999; Akyüz, 1999 ; Albayrak, 2007)

N tek ise ;

$$D=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\binom{0}{0}}{2^1} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\binom{1}{0}}{2^0} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\binom{2}{1}}{2^1} & 0 & \frac{\binom{2}{0}}{2^1} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & & & & . & \\ 0 & \frac{\binom{N}{\frac{N-1}{2}}}{2^{N-1}} & 0 & . & . & . & 0 & \frac{\binom{N}{0}}{2^{N-1}} \end{bmatrix}$$

N çift ise;

$$D=\begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\frac{\binom{0}{0}}{2^{-1}} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
0 & \frac{\binom{1}{0}}{2^{0}} & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
\frac{1}{2}\frac{\binom{2}{1}}{2^{1}} & 0 & \frac{\binom{2}{0}}{2^{1}} & . & . & . & 0 & 0\\
. & . & . & & & & . & \\
. & . & . & . & . & . & . & \\
. & . & . & & & & . & \\
\frac{1}{2}\frac{\binom{N}{\frac{N}{2}}}{2^{N-1}} & 0 & \frac{\binom{N}{\frac{N-2}{2}}}{2^{N-1}} & . & . & . & 0 & \frac{\binom{N}{0}}{2^{N-1}}
\end{bmatrix}$$

olur.

Diğer yandan (2.4) matris denklemi

$$T(x) = X(x)\,(D^{T})^{-1}$$

olarak ve bunun k. türevi (2.2) bağıntısı yardımıyla

$$T^{(k)}(x) = X(x)\,(B^{T})^{k}\,(D^{T})^{-1}\,,\quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (2.5)$$

olarak yazılabilir.

Bir y(x) fonksiyonunun kesilmiş Chebyshev seri açılımı, N kesme sınırı olmak üzere,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x) \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

ve matris biçimi ile türevleri, (2.5) den

$$[y(x)] = T(x)A$$

$$= X(x)(D^T)^{-1}A$$

$$y^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k(D^T)^{-1}A \tag{2.6}$$

$$A = \left[\frac{1}{2}a_0 \quad a_1 \quad . \quad . \quad . \quad a_N\right]^T$$

olur.

2.3 Legendre Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Ortogonal polinomların diğer önemli bir kümesi, w(x)=1 ağırlık fonksiyonuna göre -1≤x≤1 aralığında ortogonal olan $\{P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x)\}$ Legendre polinomları kümesidir. P_n(x) Legendre polinomları, n=0,1,2,… için

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}$$

$$\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{n çiftse} \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{n tekse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Kabakçı, 2007).

Kesme sınırı N için bu polinomlar,

$$P(x) = [P_0(x) \quad P_1(x) \quad \cdots \quad P_N(x)]$$

$$X(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad . \quad . \quad x^N]$$

olmak üzere,

$$P(x) = X(x)M^T \tag{2.7}$$

matris formunda yazılabilir; burada M matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

N tek için;

$$M=\begin{bmatrix} \frac{(-1)^{0}}{2^{0}}\binom{0}{0}\binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{0}}{2^{1}}\binom{1}{0}\binom{2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)(1)^{1}}{2^{2}}\binom{2}{1}\binom{2}{2} & 0 & \frac{-{}^{0}}{2^{2}}\binom{2}{0}\binom{4}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{1}}{2^{3}}\binom{3}{1}\binom{4}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{(-1)(1)^{\frac{N}{2}}}{2^{N}}\binom{N}{\frac{N}{2}} & 0 & \frac{-{}^{\frac{N-2}{2}}}{2^{N}}\binom{N}{\frac{N-2}{2}}\binom{N+1}{N} & \cdots & \frac{(-1)^{0}}{2^{N}}\binom{N}{0}\binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

N çift için;

$$M=\begin{bmatrix} \frac{(-1)^{0}}{2^{0}}\binom{0}{0}\binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{0}}{2^{1}}\binom{1}{0}\binom{2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)(1)^{1}}{2^{2}}\binom{2}{1}\binom{2}{2} & 0 & \frac{-{}^{0}}{2^{2}}\binom{2}{0}\binom{4}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{1}}{2^{3}}\binom{3}{1}\binom{4}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \frac{(-1)(1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^{N}}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}\binom{N+1}{N} & 0 & \cdots & \frac{-{}^{0}}{2^{N}}\binom{N}{0}\binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

Ayrıca (2.7) ve (2.3) bağıntılarından

$$P^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)\,M^T$$

$$= X(x)\left(B^T\right)^k M^T \qquad (2.8)$$

elde edilir.

Bir y(x) fonksiyonunun kesilmiş Legendre serisi; N kesme sınırı için,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x) \qquad , \qquad -1 \le x \le 1$$

ve bunun matris formu ile türevleri,

$$\left[y(x)\right] = P(x)\,C$$

$$= \mathrm{X(x)}\,M^T C$$

(2.8) den

$$\left[y^{(k)}(x)\right] = P^{(k)}(x)\,C$$

$$= X^{(k)}(x)\,M^T C$$

$$= X(x)\left(B^T\right)^k M^T C \qquad (2.9)$$

sonucu çıkar. Bu bağıntılarda C Legendre matrisi

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_N \end{bmatrix}^T$$

olarak tanımlanır.

2.4 Laguerre Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Fen ve mühendislik alanlarında bir matematik model olarak sıkça karşılaşılan

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \qquad n \in N$$

tipindeki denklemlere Lagueree diferansiyel denklemi denir. Verilen bir n değeri için, lineer bağımsız bir seri çözümü vardır ve bu n.dereceden bir polinomdur. Bu polinoma n.dereceden Laguerre polinomu denir ve

$$L_n(x) = \sum_{r=o}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\binom{n}{r} x^r \qquad , \qquad 0 \le x < \infty \qquad (2.10)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Sarı, 2009).

(2.10) bağıntısı kullanılarak,n=0,1,2,…,N için,

$L(x) = \left[L_0(x) \quad L_1(x) \quad \cdots \quad L_N(x) \right]$

$X(x) = \left[1 \quad x \quad x^2 \quad . \quad . \quad x^N \right]$

olmak üzere, bu polinomlar

$$L(x) = X(x)\,\Pi^T \tag{2.11}$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada Π matrisi

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!}\binom{0}{0} & 0 & 0 & . \; . \; . & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!}\binom{1}{0} & \frac{(-1)^1}{1!}\binom{1}{1} & 0 & . \; . \; . & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!}\binom{2}{0} & \frac{(-1)^1}{1!}\binom{2}{1} & \frac{(-1)^2}{2!}\binom{2}{2} & . \; . \; . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & & . \\ \frac{(-1)^0}{0!}\binom{N}{0} & \frac{(-1)^1}{1!}\binom{N}{1} & \frac{(-1)^2}{2!}\binom{N}{2} & . \; . \; . & \frac{(-1)^N}{N!}\binom{N}{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Sarı, 2009) .

Ayrıca, (2.11)’in k. türevi (2.3) bağıntısı yardımı ile

$$\begin{aligned} L^{(k)}(x) &= X^{(k)}(x)\,\Pi^T \\ &= X(x)\left(B^T\right)^k \Pi^k \end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir.

Türev rekürans bağıntısı olarak bilinen

$L_n(x) = L_{n-1}^{(1)}(x) - L_{n-1}(x)$, n=0,1,2,…

ifadesinden,

$$L^{(1)}(x) = L(x)E^T \tag{2.13}$$

matris denklemi elde edilir. Burada E matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Sarı, 2009) :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & & & & . & .. & . \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.13) bağıntısından, ardışık türev alarak,

$L^{(1)}(x) = L(x)E^T$

$L^{(2)}(x) = L^{(1)}(x)E^T = L(x)\left(E^T\right)^2$

$L^{(3)}(x) = L^{(2)}(x)E^T = L(x)\left(E^T\right)^3$

.

.

.

$$L^{(k)}(x) = L(x)\left(E^T\right)^k \tag{2.14}$$

bulunur.

Bir y(x) fonksiyonunun kesilmiş Laguarre serisi, N kesme sınırı olmak üzere,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n L_n(x), \qquad 0 \leq x \leq b < \infty$$

ve bunun matris biçimi ile türevleri, (2.12) ve (2.14) den

$$y^{(k)}(x)=L^{(k)}(x)A$$

$$=X(x)(B^T)^k\Pi^T A \qquad (2.15)$$

veya

$$y^{(k)}(x)=L^{(k)}(x)A$$

$$=L(x)E^T A \qquad (2.16)$$

olarak bulunur. Burada

$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_N \end{bmatrix}^T$

matrisi Laguerre katsayılar matrisidir.

2.5 Hermite Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Hermit polinomları,

$y''+2y'+2ny=0$, n=0,1,2,…

şeklinde tanımlanan Hermite diferansiyel denkleminin çözümleridirler ve

$$H_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]}(-1)^m\frac{n!\,2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}x^{n-2m} \quad , \quad -\infty<x<+\infty \qquad (2.17)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Akgönüllü, 2008).

n=0,1,2,3,… için, açık olarak,

$H_0(x)=1$

$H_1(x)=4x^2-2$

$H_2(x)=8x^3-12x$

$H_3(x)=16x^4-48x^2+12$

$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$

.

.

.

$$H_{2n}(x)=(-1)^n(2^n)\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(2m)!}x^{2m}$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n(2^n)\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(2n+1)!}{(n-m)!(2m+1)!}x^{2m+1}$$

yazılabilir.

$H_n(x)$ Hermite polinomları x cinsinden n. dereceden polinomlardır ve $-\infty<x<+\infty$ aralığında $W(x)=e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Ayrıca $H_n(x)$ ve $H_n^{(1)}(x)$ arasında

$$H_n^{(1)}(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \tag{2.18}$$

bağıntısı da bulunmaktadır (Akgönüllü, 2008).

Hermite polinomları ile ilgili (2.17) ve (2.18) rekürans bağıntıları aşağıdaki biçimde matris denklemlerine dönüştürülebilir: (2.17) ve (2.3)'den

$$\begin{aligned}
&H(x) = X(x)F^T \\
&H^{(1)}(x) = X(x)B^T F^T \\
&H^{(2)}(x) = X(x)\left(B^T\right)^2 F^T \\
&. \\
&. \\
&. \\
&H^{(k)}(x) = X(x)\left(B^T\right)^k F^T
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ve (2.18)'den

$$\begin{aligned}
&H_0^{(1)}(x) = 0 \\
&H_1^{(1)}(x) = 2.1.H_0(x) \\
&H_2^{(1)}(x) = 2.2.H_1(x) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&H_N^{(1)}(x) = 2.N.H_{N-1}(x)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
&H^{(1)}(x) = H(x)Q^T \\
&H^{(2)}(x) = \left(H^{(1)}(x)\right)Q^T = H(x)\left(Q^T\right)^2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&H^{(k)}(x) = H(x)\left(Q^T\right)^k
\end{aligned} \tag{2.20}$$

matrisleri kurulur.

Hermit polinomları ve türevleri arasındaki (2.19) ve (2.20) matris bağıntılarında verilen H(x), F ve Q matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Akgönüllü, 2008).

$H(x) = \left[H_0(x) \quad H_1(x) \quad \cdots \quad H_N(x) \right]$

N tek için;

$$F = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ (-1)^{\frac{N-5}{2}} 2^0 \frac{(N-1)!}{0!(\frac{N-1}{2})!} & 0 & . & . & . & 0 & 2^{N-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{N-1}{2}} 2^1 \frac{N!}{1!(\frac{N-1}{2})!} & . & . & & 0 & 2^N \end{bmatrix}$$

N çift için;

$$F = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & (-1)^{(\frac{N-2}{2})} 2^1 \frac{(N-1)!}{1!(\frac{N-2}{2})!} & . & . & & 0 & 0 \\ (-1)^{(\frac{N-4}{2})} 2^0 \frac{N!}{0!(\frac{N}{2})!} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
Q=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
2.1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
0 & 2.2 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
0 & 0 & 2.3 & . & . & . & 0 & 0\\
. & . & . & & & & . & .\\
. & . & . & & & & . & .\\
. & . & . & & & & . & .\\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 2.N & 0
\end{bmatrix}
$$

Bir y(x) fonksiyonunun, $H_n(x)$ Hermite polinomları cinsinden kesilmiş Hermite serisi; N kesme sınırı olmak üzere,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n H_n(x), \quad -\infty < a \le x \le b < +\infty$$

biçiminde olsun. Bu durumda y(x) ve $y^{(k)}(x)$ türevinin matris biçimi, (2.19) dan

$$y(x)=[H(x)]A = X(x)F^T A$$

$$y^{(k)}(x)=[H^{(k)}(x)]A$$

$$= X(x)(B^T)^k F^T A \qquad (2.21)$$

ve (2.20) den

$$y^{(k)}(x)=[H^{(k)}(x)]A$$

$$= H(x)(Q^T)^k A \qquad (2.22)$$

olarak elde edilebilir.

2.6 Bessel Polinomları ve Serilerinin Matris Özellikleri

Bessel diferansiyel denklemi

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left(x^2 - n^2\right) y(x) = 0$$

biçiminde verilir ve $J_n(x)$ çözümü, n mertebeli birinci tür Bessel fonksiyonu

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n \geq 0$$

olarak tanımlanır (Yüzbaşı, 2008). Eğer $n \in N$, n=0,1,2,…,N alınırsa, bir y(x) fonksiyonunun Bessel seri açılımı

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x)$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\left|\frac{N-n}{2}\right|\right]} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \qquad n = 0,1,\ldots,N$$

olarak yazılabilir. y(x)'in kesilmiş Bessel serisinin matris formu,

$$J(x) = X(x)\, S^T \tag{2.23}$$

olmak üzere,

$$y(x)=J(x)A \text{ veya } y(x)=X(x)\, S^T A \tag{2.24}$$

biçiminde konulabilir (Yüzbaşı,2008; Bilgiç, 2004) :

$$J(x) = \left[J_0(x) \quad J_1(x) \quad \ldots \quad J_N(x) \right]$$

$$A = \left[a_0 \quad a_1 \quad . \quad . \quad . \quad a_N \right]^T$$

$$X(x) = \left[1 \quad x \quad . \quad . \quad x^N \right]$$

N tek için;

$$S=\begin{bmatrix}
\frac{1}{0!0!2^0} & 0 & -\frac{1}{1!1!2^2} & . \; . \; . & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\
0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & . \; . \; . & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N}} \\
0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & . \; . \; . & \frac{(-1)^{\frac{N-3}{2}}}{(\frac{N-3}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\
. & . & . & & . & . \\
. & . & . & & . & . \\
. & . & . & & . & . \\
0 & 0 & 0 & . \; . \; . & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & . \; . \; . & 0 & \frac{1}{0!N!2^N}
\end{bmatrix}$$

N çift için;

$$S=\begin{bmatrix}
\frac{1}{0!0!2^0} & 0 & -\frac{1}{1!1!2^2} & . \; . \; . & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N}} \\
0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & . \; . \; . & (-1)^{\frac{N-2}{2}}0 & \\
0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & . \; . \; . & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!2^{N}} \\
. & . & . & & . & . \\
. & . & . & & . & . \\
. & . & . & & . & . \\
0 & 0 & 0 & . \; . \; . & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & . \; . \; . & 0 & \frac{1}{0!N!2^N}
\end{bmatrix}$$

Ayrıca J(x) ve y(x)'in k. türevleri, (2.3), (2.23) ve (2.24) den

$$J^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k S^T \tag{2.25}$$

ve

$$y^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k S^T A \tag{2.26}$$

matris bağıntıları olarak elde edilir.

2.7 Bernstein Polinomlarının Matris Özellikleri

N. dereceden Bernstein polinomlarının genel formu, n=0,1,…,N için,

$$B_{n,N}(x) = \binom{N}{n}\frac{x^n (R-x)^{N-n}}{R^N}, \quad 0 \le x \le R$$

ile tanımlanır (M.Idrees Bhatti, P. Bracker, 2007) .

Binom açılımından

$$(R-x)^{N-n} = \sum_{k=0}^{N-n}\binom{N-n}{k} R^{N-n-k}(-1)^k x^k$$

yazılarak Bernstein polinomu, x'in kuvvetleri cinsinden,

$$B_{n,N}(x) = \sum_{k=0}^{N-n}\frac{(-1)^k}{R^{n+k}}\binom{N}{n}\binom{N-n}{k} x^{n+k} \tag{2.27}$$

haline gelir. Burada n<0 ve n>N için $B_{n,N}(x) = 0$ kabul edilir. Örneğin n=0,1,2,…,N

N=2 için

$$B_{0,2}(x) = 1 - \frac{2}{R}x + \frac{1}{R^2}x^2$$

$$B_{1,2}(x) = \frac{2}{R}x - \frac{2}{R^2}x^2$$

$$B_{2,2}(x) = \frac{1}{R^2}x^2$$

bulunur.

Bernstein polinomunun (2.27) formunda n=0,1,2,…,N alarak aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$B_N(x) = X(x)\,\theta^T, \quad 0 \le x \le R \tag{2.28}$$

$B_N(x) = \left[B_{0,N}(x) \quad B_{1,N}(x) \quad \cdots \quad B_{N,N}(x) \right]$

$$\theta = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{R^0}\binom{N}{0}\binom{N}{0} & \frac{(-1)^1}{R^1}\binom{N}{0}\binom{N}{1} & \frac{(-1)^2}{R^2}\binom{N}{0}\binom{N}{2} & \cdots & \frac{(-1)^N}{R^N}\binom{N}{0}\binom{N}{N} \\ 0 & \frac{(-1)^0}{R^1}\binom{N}{1}\binom{N-1}{0} & \frac{(-1)^1}{R^2}\binom{N}{1}\binom{N-1}{1} & \cdots & \frac{(-1)^{N-1}}{R^N}\binom{N}{1}\binom{N-1}{N-1} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^0}{R^2}\binom{N}{2}\binom{N-2}{0} & \cdots & \frac{(-1)^{N-2}}{R^N}\binom{N}{2}\binom{N-2}{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)^0}{R^N}\binom{N}{N}\binom{0}{0} \end{bmatrix}$$

$B_N(x)$ matrisinin k. türevi, (2.3) ve (2.28) ‘den

$$B_N^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)\,\theta^T$$
$$= X(x)\left(B^T\right)^k \theta^T, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.29)$$

Bir y(x) fonksiyonunun $B_{n,N}(x)$ Bernstein polinomları cinsinden kesilmiş seri açılımının

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n B_{n,N}(x), \quad 0 \le x \le R$$

olduğu kabul edilirse, bu durumda

$$y(x) = B_N(x)\,A$$
$$= X(x)\,\theta^T A$$

ve (2.29) dan

$$
\begin{aligned}
y^{(k)}(x) &= B_N^{(k)}(x)\, A \\
&= X^{(k)}(x)\, \theta^T A \\
&= X(x) \left(B^T\right)^{(k)} \theta^T A
\end{aligned}
\qquad (2.30)
$$

matris denklemleri elde edilir.

3.ORTOGONAL POLİNOMLAR ARASINDAKİ MATRİS BAĞINTILARI VE DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, ikinci bölümde bazı matris özellikleri verilen Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomlarının aralarındaki matris bağıntıları kurularak taban dönüşümleri yapılacaktır. Bu işlemlerde, standart taban olarak kabul edilen $X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & . & . & \ldots & x^n \end{bmatrix}$ matrisi kullanılacaktır. Bu da Taylor (Maclaurin) açılımının temelidir.

Bölüm 2 de (2.4), (2.7), (2.11), (2.19), (2.23), ve (2.28) ile tanımlanan matris bağıntıları kullanılarak, bahsedilen polinomlar arasındaki matris dönüşümleri elde edilir.

3.1 Kullanılan Matris Gösterimleri:

$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & . & . & x^N \end{bmatrix}$ (Taylor)

$T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & \ldots & T_N(x) \end{bmatrix}$ (Chebyshev)

$P(x) = \begin{bmatrix} P_0(x) & P_1(x) & P_2(x) & \ldots & P_N(x) \end{bmatrix}$ (Legendre)

$L(x) = \begin{bmatrix} L_0(x) & L_1(x) & L_2(x) & \ldots & L_N(x) \end{bmatrix}$ (Laguerre)

$H(x) = \begin{bmatrix} H_0(x) & H_1(x) & H_2(x) & \ldots & H_N(x) \end{bmatrix}$ (Hermite)

$J(x) = \begin{bmatrix} J_0(x) & J_1(x) & J_2(x) & \ldots & J_N(x) \end{bmatrix}$ (Bessel)

$B_N(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & B_{2,N}(x) & \ldots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix}$ (Bernstein)

3.2 Dönüşümler

(2.4) $\Rightarrow$ $T(x) = X(x)\left(D^T\right)^{-1}$

$X(x) = T(x)\,D^T$ $\qquad$ $-1 \leq x \leq 1$

(2.7) $\Rightarrow$ $P(x) = X(x)\,M^T$

$X(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}$ $\qquad$ $-1 \leq x \leq 1$

(2.4) ve (2.7) $\Rightarrow$ $T(x)\,D^T = P(x)\left(M^T\right)^{-1}$

$T(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$

$P(x) = T(x)\,D^T M^T$

(2.11) $\Rightarrow$ $L(x) = X(x)\,\Pi^T$

$X(x) = L(x)\left(\Pi^T\right)^{-1}$ $\qquad$ $0 \leq x < +\infty$

(2.4) ve (2.11) $\Rightarrow$ $T(x)\,D^T = L(x)\left(\Pi^T\right)^{-1}$

$T(x) = L(x)\left(\Pi^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$

$L(x) = T(x)\,D^T \Pi^T$

(2.19) $\Rightarrow$ $H(x) = X(x)\,F^T$

$X(x) = H(x)\left(F^T\right)^{-1}$ $\qquad$ $-\infty < x < +\infty$

(2.4) ve (2.19) $\Rightarrow$ $T(x)\,D^T = H(x)\left(F^T\right)^{-1}$

$T(x) = H(x)\left(F^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$

$H(x) = T(x)\,D^T F^T$

(2.23) $\Rightarrow$ $J(x) = X(x)\,S^T$

$X(x) = J(x)\left(S^T\right)^{-1}$ $\qquad$ $0 \leq x < \infty$

(2.4) ve (2.23) $\Rightarrow T(x)D^T = J(x)\left(S^T\right)^{-1}$

$$T(x) = J(x)\left(S^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$$

$$J(x) = T(x)\,D^T S^T$$

(2.28) $\Rightarrow B_N(x) = X(x)\,\theta^T$

$$X(x) = B_N(x)\left(\theta^T\right)^{-1} \qquad 0 \leq x \leq R$$

(2.4) ve (2.28) $\Rightarrow T(x)D^T = B_N(x)\left(\theta^T\right)^{-1}$

$$T(x) = B_N(x)\left(\theta^T\right)^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$$

$$B_N(x) = T(x)\,D^T\theta^T$$

(2.7) ve (2.11) $\Rightarrow P(x)\left(M^T\right)^{-1} = L(x)\left(\Pi^T\right)^{-1}$

$$P(x) = L(x)\left(\Pi^T\right)^{-1}M^T$$

$$L(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}\Pi^T$$

(2.7) ve (2.19) $\Rightarrow P(x)\left(M^T\right)^{-1} = H(x)\left(F^T\right)^{-1}$

$$P(x) = H(x)\left(F^T\right)^{-1}M^T$$

$$H(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}F^T$$

(2.7) ve (2.23) $\Rightarrow P(x)\left(M^T\right)^{-1} = J(x)\left(S^T\right)^{-1}$

$$P(x) = J(x)\left(S^T\right)^{-1}M^T$$

$$J(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}S^T$$

(2.7) ve (2.28) $\Rightarrow P(x)\left(M^T\right)^{-1} = B_N(x)\left(\theta^T\right)^{-1}$

$$P(x) = B_N(x)\left(\theta^T\right)^{-1}M^T$$

$$B_N(x) = P(x)\left(M^T\right)^{-1}\theta^T$$

(2.11) ve (2.19) $\Rightarrow L(x)(\Pi^T)^{-1} = H(x)(F^T)^{-1}$

$$L(x) = H(x)(F^T)^{-1}\Pi^T$$

$$H(x) = L(x)(\Pi^T)^{-1}F^T$$

(2.11) ve (2.23) $\Rightarrow L(x)(\Pi^T)^{-1} = J(x)(S^T)^{-1}$

$$L(x) = J(x)(S^T)^{-1}\Pi^T$$

$$J(x) = L(x)(\Pi^T)^{-1}S^T$$

(2.11) ve (2.28) $\Rightarrow L(x)(\Pi^T)^{-1} = B_N(x)(\theta^T)^{-1}$

$$L(x) = B_N(x)(\theta^T)^{-1}\Pi^T$$

$$B_N(x) = L(x)(\Pi^T)^{-1}\theta^T$$

(2.19) ve (2.23) $\Rightarrow H(x)(F^T)^{-1} = J(x)(S^T)^{-1}$

$$H(x) = J(x)(S^T)^{-1}F^T$$

$$J(x) = H(x)(F^T)^{-1}S^T$$

(2.19) ve (2.28) $\Rightarrow H(x)(F^T)^{-1} = B_N(x)(\theta^T)^{-1}$

$$H(x) = B_N(x)(\theta^T)^{-1}F^T$$

$$B_N(x) = H(x)(F^T)^{-1}\theta^T$$

(2.23) ve (2.28) $\Rightarrow J(x)(S^T)^{-1} = B_N(x)(\theta^T)^{-1}$

$$J(x) = B_N(x)(\theta^T)^{-1}S^T$$

$$B_N(x) = J(x)(S^T)^{-1}\theta^T$$

4. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ORTOGONAL POLİNOMLARA DAYALI ÇÖZÜM YÖNTEMİNİN ANA HATLARI

4.1 Temel Matris Denkleminin Kuruluşu

Birinci bölümde tanımlanan sabit katsayılı yüksek mertebeden (1.1) diferansiyel denkleminin, yani

$$\sum_{k=0}^{m} P_k y^{(k)}(x) = g(x), \quad a \leq x \leq b$$

denkleminin, (1.3) kesilmiş serisi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n F_n(x) \qquad a \leq x \leq b$$

biçiminde bir çözümünün var olduğu kabul edilsin. Burada $F_n(x)$,(n=0,1,…,N), fonksiyonları, ortogonal polinomlar veya özel fonksiyonlardan birisi olarak tanımlanır ve f_n ,(n=0,1,…,N), sabitleri belirlenecek katsayılardır.

Önce y(x) çözüm fonksiyon ve bunun $y^{(k)}(x)$ türevi arasındaki matris bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir.

- $$y(x) = F(x)\, F^* \qquad (4.1\text{-a})$$

$F(x) = [F_0(x) \quad F_1(x) \quad \dots \quad F_N(x)]$

$F^* = [f_0 \quad f_1 \quad . \quad . \quad . \quad f_N]^T$

$F_n(x)$ ortogonal polinomlar

- F(x) matrisinin X(x) cinsinden ifadesi, 2. bölümde açıklandığı gibi,

$$F(x) = X(x)\, \mathrm{P}^* \qquad (4.1\text{-b})$$

ise, y(x) ve $y^{(k)}(x)$ in matris formları

$$y(x) = X(x)\, \mathrm{P}^* F^*$$

ve

$$y^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)\, P^* F^* \tag{4.2}$$

- (2.3) ve (4.2) den, k=0,1,2,…, için

$$y^{(k)}(x) = X(x)\left(B^T\right)^k P^* F^* \tag{4.3}$$

- Denklemin ikinci yanındaki g(x) fonksiyonunun matris formu:

$$g(x)=X(x)G; \tag{4.4}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & . & . & . & g_N \end{bmatrix}^T$$

$$g_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad , \text{ n=0,1,…,N}$$

- Verilen denklemde (4.3) ve (4.4) ifadeleri konularak ve gerekli sadeleştirme yapılarak

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)\left(B^T\right)^k P^* F^* = G \tag{4.5}$$

temel matris denklemi elde edilir.

4.2 Koşulların Matris Bağıntısı

(1.2) sistemi ile tanımlanan koşulların matris formu, (4.3) den (j=0,1,…,m-1)

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} X(a)\left(B^T\right)^k + b_{jk} X(b)\left(B^T\right)^k \right\} P^* F^* = \lambda_j \tag{4.6}$$

matris denklemler sistemi olarak elde edilir.

Burada

X(a)=$\begin{bmatrix} 1 & a & . & . & . & a^N \end{bmatrix}$

X(b)=$\begin{bmatrix} 1 & b & . & . & . & b^N \end{bmatrix}$

4.3 Problemin Çözümü

(1.1) diferansiyel denkleminin (1.2) koşullarına göre, (1.3) kesilmiş serisi şeklinde yaklaşık çözümünü bulmak için, önce (1.1) ve (1.3)'e karşı gelen temel matris denklemleri, (4.5) den

$$WF^{*} = G \quad \text{veya} \quad [W;G] \tag{4.7}$$

$$W = \left[w_{pq} \right] = \sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k P^{*} \quad ; (p,q=0,1,\ldots,N)$$

$$G = \left[g_0 \quad g_1 \quad . \quad . \quad . \quad g_N \right]^T, \quad g_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad , \; n=0,1,\ldots,N$$

$$F^{*} = \left[f_0 \quad f_1 \quad . \quad . \quad . \quad f_N \right]^T$$

ve (4.6) dan

$$U_j F^{*} = \lambda_j \quad \text{veya} \quad \left[U_j ; \lambda_j \right], \; (j=0,1,\ldots,m-1) \tag{4.8}$$

$$U_j = \left[U_{j0} \quad U_{j1} \quad . \quad . \quad . \quad U_{jN} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} X(a) + b_{jk} X(b) \right) (B^T)^k P^{*}$$

biçimine dönüştürülür. Sonra (4.7) arttırılmış matrisinin koşul sayısı kadar olan m satırı silinerek, yerine (4.8) satır matrisleri konularak aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$\left[\overset{\omega}{W};\overset{\omega}{G}\right]=\begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & . & . & . & W_{0N} & ; & g_0 \\ W_{10} & W_{11} & . & . & . & W_{1N} & ; & g_1 \\ . & . & & & & . & & . \\ . & . & & & & . & & . \\ . & . & & & & . & & . \\ W_{N-m,0} & W_{N-m,1} & & & & W_{N-m,N} & & g_{N-m} \\ U_{00} & U_{01} & . & . & . & U_{0N} & ; & \lambda_0 \\ U_{10} & U_{11} & . & . & . & U_{0N} & ; & \lambda_1 \\ . & . & & & & . & & . \\ . & . & & & & . & & . \\ . & . & & & & . & & . \\ U_{m-1,0} & U_{m-1,1} & . & . & . & U_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

Eğer rank $\overset{\omega}{W}$ =rank $\left[\overset{\omega}{W};\overset{\omega}{G}\right]$ =N+1

ise, bu durumda seri katsayılar matrisi

$$F^{*}=(\overset{\omega}{W})^{-1}\overset{\omega}{G}$$

$$F^{*}=\left[f_0 \quad f_1 \quad . \quad . \quad . \quad f_N\right]^{T}$$

olarak hesaplanır. Böylece f_n, (n=0,1,…,N) katsayıları , (4.9) matris denkleminden tek olarak belirlenir; Problem çözümü de

$y_N(x)=F(x)F^{*}$ veya $y_N(x)=\sum_{n=0}^{N} f_n F_n(x)$ seri biçiminde elde edilir.

5.UYGULAMALAR

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde verilen ortogonal polinomlarının temel özellikleri ve bunlara dayalı matris yöntemi kullanılarak sabit katsayılı yüksek mertebe diferansiyel denklemleri incelenmiştir.

ÖRNEK 5.1.

$$y''-2y'+y=3x^2-8x+5 \tag{5.1}$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0)=7 \text{ ve } y'(0)=4 \tag{5.2}$$

koşulunda

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y = G \tag{5.3}$$

temel matris denkleminden yararlanarak Laguerre polinomları cinsinden çözümünü elde edelim.

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k \Pi^T A = G \tag{5.4}$$

$$\left\{(B^T)^2\Pi^T - 2B^T\Pi^T + \Pi^T\right\} A = G$$

şeklinde açarsak

$$W = \left\{(B^T)^2\Pi^T - 2B^T\Pi^T + \Pi^T\right\}$$

için denklemi (5.1)’i

W.A=G $\Rightarrow [W;G]$

halinde getirmiş oluruz. Burada bize lazım olan matrisleri bu örnek için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matris denklemini (5.4)’ de yerine koyarsak

$$[W;G]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & ; & 5 \\ 0 & -1 & -4 & ; & -8 \\ 0 & 0 & 1/2 & ; & 3 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar için arttırılmış matris

$$[U_0;\lambda_0]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & ; & 7\end{bmatrix}$$

$$[U_1;\lambda_1]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2 & ; & 4\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

olarak bulunur.(5.5) matrisinin son iki satırı silinip (5.6) koşul matrisini koyarak

$$\begin{bmatrix}\tilde{W};\tilde{G}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & ; & 5 \\ 1 & 1 & 1 & ; & 7 \\ 0 & -1 & -2 & ; & 4 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

arttırılmış matrisinin son hali elde edilmiş olur. $\det(\tilde{W}) \neq 0$ olduğundan,(5.7)'nin diğer bir ifadesi

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemden

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 \\ -16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

katsayılar bulunur. Böylece bu katsayılar (5.3)'de yerine yazılarak (5.1) probleminin Laguerre polinomları cinsinden çözümü

$$y(x)=L_0(x)a_0+L_1(x)a_1+L_2(x)a_2$$

$$y(x)=1.17+(1-x).(-16)+\left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right).6$$

düzenlenirse

$$y(x)=3x^2+4x+7$$

olarak bulunur. Buda verilen (5.1) diferansiyel denkleminin (5.2) koşullarına göre çözümüdür.

ÖRNEK 5.2.

$$y''-2y'+y=3x^2-8x+5 \tag{5.8}$$

diferansiyel denkleminin

y(0)=7 ve y'(0)=4 (5.9)

koşulunda

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y = G \tag{5.10}$$

matris denkleminden yararlanarak Legendre polinomları cinsinden çözümünü elde edelim.

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k M^T A = G \tag{5.11}$$

$$\left\{ (B^T)^2 M^T - 2B^T M^T + M^T \right\} A = G$$

şeklinde açarsak

$$W = \left\{ (B^T)^2 M^T - 2B^T M^T + M^T \right\}$$

için denklemi (5.8)'i

W.A=G $\Rightarrow [W;G]$ (5.12)

halinde getirmiş oluruz. Burada bize lazım olan matrisleri bu örnek için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matris denklemini (5.11)' de yerine koyarsak

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5/2 & ; & 5 \\ 0 & 1 & -4 & ; & -8 \\ 0 & 0 & 3/2 & ; & 3 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar için arttırılmış matris

$$[U_0;\lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & ; & 7 \end{bmatrix}$$

$$[U_1;\lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ; & 4 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

olarak bulunur.(5.13) matrisinin son iki satırı silinip (5.14) koşul matrisini koyarak

$$\left[\tilde{W};\tilde{G}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5/2 & ; & 5 \\ 1 & 0 & -1/2 & ; & 7 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 4 \end{bmatrix}$$

(5.15)

arttırılmış matrisinin son hali elde edilmiş olur. $\det(\tilde{W}) \neq 0$ olduğundan,(5.15)'nin diğer bir ifadesi

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemden

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

katsayılar bulunur. Böylece bu katsayılar (5.10)'da yerine yazılarak (5.8) probleminin Legendre polinomları cinsinden çözümü

$$y(x) = P_0(x)\,a_0 + P_1(x)\,a_1 + P_2(x)\,a_2$$

$$y(x) = 1.8 + 4.x + \frac{1}{2}(3x^2 - 1).2$$

düzenlenirse

$$y(x) = 3x^2 + 4x + 7$$

olarak bulunur. Buda verilen (5.8) diferansiyel denkleminin (5.9) koşullarına göre çözümüdür.

ÖRNEK 5.3.

$$y'' - 3y' + y = -2e^{x} + 3 \tag{5.16}$$

diferansiyel denkleminin

y(0)=5 ve y'(0)=2 (5.17)

koşulunda

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y = G \tag{5.18}$$

matris denkleminden yararlanarak Chebyshev polinomları cinsinden çözümünü elde edelim.

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k D^T A = G \tag{5.19}$$

$$\left\{(B^T)^2 D^T - B^T D^T + D^T\right\} A = G$$

şeklinde açarsak

$$W = \left\{(B^T)^2 D^T - B^T D^T + D^T\right\}$$

için denklemi (5.16)'ı

W.A=G$\Rightarrow [W;G]$ (5.20)

halinde getirmiş oluruz. Burada bize lazım olan matrisleri bu örnek için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

matris denklemini (5.18)' de yerine koyarsak

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & ; & 1 \\ 0 & 1 & -12 & ; & -2 \\ 0 & 0 & 2 & ; & -1 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar için arttırılmış matris

$$[U_0;\lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & ; & 5 \end{bmatrix}$$

$$[U_1;\lambda_1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & ; & 2\end{bmatrix} \tag{5.22}$$

olarak bulunur.(5.21) matrisinin son iki satırı silinip (5.22) koşul matrisini koyarak

$$\begin{bmatrix}\overset{\omega}{W};\overset{\omega}{G}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & ; & 1\\ 1 & 0 & -1 & ; & 5\\ 0 & 1 & 0 & ; & 2\end{bmatrix} \tag{5.23}$$

arttırılmış matrisinin son hali elde edilmiş olur. $\det(\widetilde{W})\neq 0$ olduğundan,(5.23)'nin diğer bir ifadesi

$$\begin{bmatrix}1/2a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemden

$$\begin{bmatrix}1/2a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/2\\ 2\\ 1/2\end{bmatrix}$$

katsayılar bulunur. Böylece bu katsayılar (5.18)'da yerine yazılarak (5.16) probleminin Chebyshev polinomları cinsinden çözümü

$$y(x)=T_0(x)\frac{1}{2}a_0+T_1(x)a_1+T_2(x)a_2$$

$$y(x)=\frac{11}{2}.1+2x+(2x^2-1).\frac{1}{2}$$

düzenlenirse

$$y(x)=x^2+2x+5$$

olarak bulunur. Buda verilen (5.16) diferansiyel denkleminin (5.17) koşullarına göre çözümüdür. Tam çözümü ise;

$y(x)=2e^x+3$ olur.

ÖRNEK 5.4.

$$y''-3y'+y=-2e^{x}+3 \tag{5.24}$$

diferansiyel denkleminin

y(0)=5 ve y'(0)=2 (5.25)

koşulunda

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y = G \tag{5.26}$$

matris denkleminden yararlanarak Laguerre polinomları cinsinden çözümünü elde edelim.

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k \Pi^T A = G \tag{5.27}$$

$$\left\{ (B^T)^2 \Pi^T - \ B^T \Pi^T + \Pi^T \right\} A = G$$

şeklinde açarsak

$$W = \left\{ (B^T)^2 \Pi^T - \ B^T \Pi^T + \Pi^T \right\}$$

için denklemi (5.24)'i

W.A=G $\Rightarrow [W;G]$ (5.28)

halinde getirmiş oluruz. Burada bize lazım olan matrisleri bu örnek için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

matris denklemini (5.26)' da yerine koyarsak

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & ; & 1 \\ 0 & -1 & -5 & ; & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & ; & -1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar için arttırılmış matris

$$[U_0;\lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ; & 5 \end{bmatrix}$$

$$[U_1;\lambda_1]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2 & ; & 2\end{bmatrix} \tag{5.30}$$

olarak bulunur.(5.29) matrisinin son iki satırı silinip (5.30) koşul matrisini koyarak

$$\begin{bmatrix} \overset{\omega}{W};\overset{\omega}{G} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 8 & ; & 1\\ 1 & 1 & 1 & ; & 5\\ 0 & -1 & -2 & ; & 2\end{bmatrix} \tag{5.31}$$

arttırılmış matrisinin son hali elde edilmiş olur. $\det(\widetilde{W})\neq 0$ olduğundan,(5.31)'nin diğer bir ifadesi

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemden

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -6\\ 2\end{bmatrix}$$

katsayılar bulunur. Böylece bu katsayılar (5.26)'da yerine yazılarak (5.24) probleminin Laguerre polinomları cinsinden çözümü

$$y(x)=L_0(x)\,a_0+L_1(x)\,a_1+L_2(x)\,a_2$$

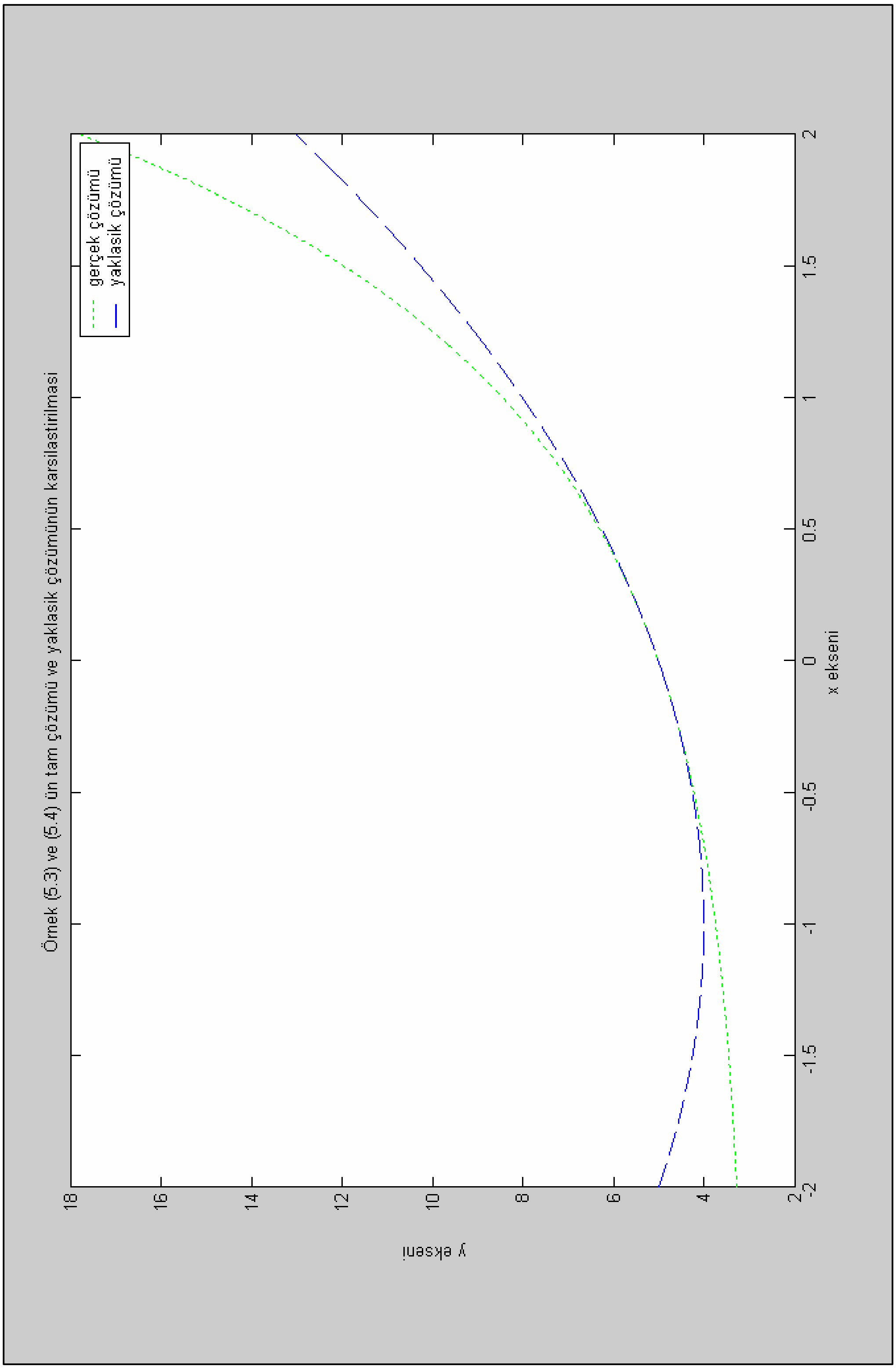
$$y(x)=9.1+(-6).(1-x)+2(1-2x+\frac{x^2}{2})$$

düzenlenirse

$$y(x)=x^2+2x+5$$

olarak bulunur. Buda verilen (5.24) diferansiyel denkleminin (5.25) koşullarına göre çözümüdür. Tam çözümü ise;

$y(x)=2e^x+3$ olur.


Örnek (5.3) ve (5.4) ün tam çözümü ve yaklasik çözümünün karsilastirilmasi
gerçek çözümü
yaklasik çözümü
x ekseni
y ekseni

Şekil 1

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada verilen yöntem yüksek mertebeden sabit katsayılı differensiyel denklemlerin matris formlarına çevrilmesi ve aralarındaki matris bağıntılarının bulunması ve uygulanmasıdır.

Bu çalışmanın birinci bölümde ortogonal polinomların tanımı yapıldı. Sturm-Liouville sınır-değer problemleri ve ortogonallik açıklandı. Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomlarının veya özel fonksiyonlarının önemli özellikleri ve rekürans bağıntıları, matris formlarına dönüştürüldü ve aralarındaki matris bağıntıları bulundu. Daha sonra, bu bağıntılar yardımı ile yüksek mertebeden sabit katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m} p_k y^{(k)}(x) = g(x) \qquad \text{diferansiyel denkleminin}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1) \right) = \lambda_j, \quad j = 0,1,2,\ldots,m-1$$

koşullarına göre yaklaşık çözümleri araştırıldı.

İkinci bölümde ise Taylor, Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomları ve bunlara dayalı serilerin matris gösterimleri elde edildi.

Üçüncü bölümde bazı matris özellikleri verilen Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Bessel ve Bernstein polinomları arasındaki matris bağıntıları kurularak taban dönüşümleri yapıldı.

Dördüncü bölümde ise differensiyel denklemlerin ortogonal polinomlara dayalı çözüm yöntemi ana hatlarıyla açıklandı. Bu açıklamada, koşulların matris bağıntısı elde edildi.

Beşinci bölümünde ise ortogonal polinomların temel özellikleri ve bunlara dayalı matris yöntemi kullanılarak sabit katsayılı yüksek mertebe differensiyel denklem örnekleri incelendi. 5.1 ve 5.2 deki örneklerde aynı differensiyel denklemin Laguerre ve Legendre polinomları şeklinde farklı polinomlarla çözülmesine rağmen aynı sonuç elde edildiği görüldü ve tam sonuç sağlandı. 5.3 ve 5.4 deki örneklerde ise aynı differensiyel denklemin Chebyshev ve Laguerre polinomları şeklinde farklı polinomlarla çözülmesine rağmen aynı sonuç elde edildiği görüldü ama tam sonuç sağlanamadı. 5.3 ve 5.4 deki örneklerin tam sonucu ve yaklaşık çözümü aynı grafik üzerinde gösterildi.

Bu çalışmada önerilen yöntem yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer adi differensiyel denklemler, kısmi differensiyel denklemler, integral ve integro differensiyel denklemler için geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

M.L.Boas (1966), Mathematical methods in the physical sciences, John Wiley and Sons,Inc. New York**.**

Y.L.Luke(1969), The Special Functions and their approximations, Vol I-II, ,Academic Pres, New York.

Sezer, M., Kaynak,M., Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations, Int.J.Math.Educ.Sci.Technol., 27(4),(1996)607-618.

Karamete, A., Sezer,M., A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations, Intern.J.Computer Math.,79(9), (2002)987-1000.

Basu, N.K. (1971). A Chebyshev series method for the numerical solution of Fredholm integral equations with associated eigen-value problem. SIAM J. Numer. Anal, 10, 1, 57-68.

Bloom, F. (1980). Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of electomanyetic theory. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 73, 2, 524-542.

Clenshaw, C.W. & Curtis, A. R. (1960). A method for numerical integrationtion on an automatic computer. Numerische Math., 2, 197-205.

El-gendi, S.E. (1969). Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations. Computer Journal, 12, 282-287.

Elliot, D. (1963). A Chebyshev series method for the numerical solution of Fredholm iintegral equations. Computer journal, 6, 102-111.

Murray R. Spiegel, (1974) , Shaum's Outline Series Theory and Problems Of Fourier Analysis with Applications to Boundry Value Problems.

Fox, L., Parker, I., (1968). Chebyshev Polynamials in Numerical Analysis, Clarendon Pres., Oxford.

Akyüz, A., (2006) .A Chebyshev polynomial approach for
linear Fredholm–Volterra integro-differential equations in the most general
form,Appl. Math. Comput., 181, 103-112.

I. Lamiri, A. Ouni, (2008) .d-Orthogonality of Hermite type polynomials, Appl. Math. Comput.,202, 24-43.

Akyüz, A., (2004). Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of Linear Integral Equations., Appl. Math. Comput., 151, 221-232.

Sezer, M., (1994) , Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations, INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL., 25,5, 625-633

Sezer, M., (1996) , A Method for the Approximate solution of the Second Order Linear Differential Equations in terms of Taylor Polynomials, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.27, 6, 821-834

Akyüz, A., Sezer, M., (1999) , A Chebyshev Collocation Method for the Solution of Linear Integro-differential Equations, Intern. J. Computer Math. 72, 4, 491-507.

Gülsu, M., Sezer, M., (2006) A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations, J. Comput. App. Math.,186(2006),349-364.

Bhatti, M., Brocker,P., (2007) Solution of Differential Equations in a Bernstein Polynomials Basis, Journel of Computational and Applied Math Volume, 205,issue 1, (2007),272-280.

Yüzbaşı, Ş.,(2008) , Lineer Diferansiyel ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bessel Polinom ve Çözümleri, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Akgönüllü, N., (2008) , Lineer Diferansiyel ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Hermite Polinom ve Çözümleri, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kabakçı, F., (2007) , Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegrodiferansiyel Denklemlerin Legendre polinom Çözümleri, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Sarı, H., (2009) , Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinom Çözümleri, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Albayrak,F., (2007) , Chebyshev Polinomlarının Matris Özellikleri ve Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulaması, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Demet DURMUŞ
Doğum Yeri	: Fethiye
Doğum Tarihi	: 1981
Medeni Hali	: Bekar

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise	: Burdur Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	: Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Yabancı Dil	: İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

Uğur Dershanesinde Matematik Öğretmeni