OCAK 2020 Yüksek Lisans Tezi- Matematik CELİLE YÜZBAŞI

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-D MATRİSLER ÜZERİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CELİLE YÜZBAŞI

OCAK 2020

4-D MATRİSLER ÜZERİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN

İkinci Danışman

Doç. Dr. Necati OLGUN

Celile YÜZBAŞI

Ocak 2020

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK

Tezin Başlığı : 4-D Matrisler Üzerinde Cebirsel İşlemler

Öğrencinin Adı Soyadı: Celile YÜZBAŞI

Sınav Tarihi : 16.01.2020

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Necati OLGUN
İkinci Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Memet ŞAHİN	…………………..
Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN	…………………..
Dr. Öğr. Üyesi Ali KARAKUŞ	…………………..

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Celile YÜZBAŞI

ABSTRACT

ALGEBRAIC OPERATIONS ON 4-D MATRICES

YÜZBAŞI, Celile
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Özge ÖZTEKİN
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necati OLGUN

January 2020
57 pages

In this thesis, information about matrices, 3-D matrices and 4-D matrices are given. For the definition of algebraic operations on 4-D matrices, 3-D matrices were examined . We have defined 3-D matrices and 4-D matrices and proved that these matrices are commutative groups on addition. As the application area of the defined matrices, we aimed to expand the tomography to 4-D matrices by analyzing the old image and the current image at the same time in Matlab to obtain faster ideas about the change of the diseased region and to minimize the human errors.

Key Words: Matrices, 3-D Matrices, 4-D Matrices, Matlab, Tomography

ÖZET

4-D MATRİSLER ÜZERİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

YÜZBAŞI, Celile
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN
İkinci Danışman: Doç. Dr. Necati OLGUN
Ocak 2020
57 sayfa

Bu tezde, matrisler, 3-D matrisler ve 4-D matrislerle ilgili bilgilere yer verilmiştir. 4-D matrisler üzerinde cebirsel işlemlerin tanımı için 3-D matrisler incelendi. 3-D matrisler ve 4-D matrisler tanımlanıp bu matrislerin toplama işlemi üzerinde değişmeli grup olduğunu ispatladık. Tanımlanan matrislerin uygulama alanı olarak tomografi 4-D matrislere genişletilerek eski görüntü ve güncel görüntüyü aynı anda Matlabta çözümleyerek hastalıklı bölgenin değişimi hakkında daha hızlı fikirler elde etmeyi ve bununla birlikte insani hataları en aza indirmeyi hedefledik.

Anahtar Kelimeler: Matrisler, 3-D Matrisler, 4-D Matrisler, Matlab, Tomografi

''Canım babama''

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN ve Doç. Dr. Necati OLGUN'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında ve yorumlamasında desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşım Fizik Mühendisi Hacı Ömer Özyürek'e çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{\alpha}$	Alfa
$\boldsymbol{\beta}$	Beta
$\forall$	Her
$\exists$	En Az Bir
$\in$	Elemanıdır

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Amacı

Matris, her alanda kullandığımız uygulama alanı çok geniş olan matematiksel bir kavramdır. Matematikte matris dikdörtgen bir sayılar tablosudur. Satırlar çift değişkenli verilerin kaydedilmesi amacı ile kullanılır. Satırlar üzerinde dört işlem yapılabilmesi lineer cebirde temel kavram olmasını mümkün kılmıştır. Lineer denklemler sisteminin kullanımı M.Ö. 300'lü yıllara dayanmaktadır. Bununla birlikte bu tarihte yapılan çalışmalardan diğer matemetikçiler haberdar olmamıştır. M.Ö. 300'lü yıllarda yapılan çalışmadan yaklaşık 2000 yıl sonra Avrupalı matematikçiler matris kavramını ilk kez kullanmışlardır.

Ayrıca matrisler ;

- Bilgisayar programlama,
- Şifreler algoritması,
- Optimizasyon problemleri ,
- Excel uygulamalarının hücresel yapısı,
- Görüntü işleme(tanıma) algoritması,

gibi önemli alanlarda da uygulama alanlarına sahiptir.

Örneğin; bir sinemada, birinci sırada oturan insanların yerleri A ile gösterilir. Bunların baştan kaçıncı sırada oturduklarını ifade etmek için A'nın yanına 1,2,… sayıları getirilir. Bu koordinat olarak bilinir ama bunu a_{11} olarak gösterdiğimizde(ya da A_1), 1. sıra 1. sütunda oturtan kişi olarak anlarız. Bütün salon bu şekilde bir matris haline getirilebilir. Bir sınıf, otopark, yani yer bulma kavramının gerekli olduğu durumlarda kullanılır.

Bu tezde ilk olarak matris ile ilgili literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölümde matrislerle ilgili bazı temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 4-D matrisleri ve cebirsel işlemleri tanımlamak için 3-D matrislerin tanımını ve 3-D matrisler üzerinde cebirsel işlemlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 4-D matrisler ve 4-D matrisler üzerinde cebirsel işlemler tanımlanmıştır. Beşinci bölümde önceki bölümlerdeki tanımların uygulanabilirliği açısından örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde tomografinin alt yapısı olan matrisi kullanarak eski görüntü ve güncel görüntüyü aynı anda çözümleyerek hastalıklı bölgenin değişimi hakkında fikir elde edebileceğimiz uygulamaya yer verilmiştir. Tezin son bölümü olan yedinci bölümde, bu tezde elde edilen sonuçlara ayrılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIMLAR

Bu kısımda ilerleyen kısımlarda karşımıza çıkacak olan bazı temel kavramlar hakkında bilgi verilmektedir. Daha fazla bilgi için [1-2] kaynaklarına bakılabilir.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: $\boldsymbol{G}$ üzerinde ikili işlem :$*$

$*: \boldsymbol{G} * \boldsymbol{G} \quad \Rightarrow$ fonksiyonuna bir ‘ikili işlem

’ denir

i) $\forall p, r, s, t \in \boldsymbol{G}$ için $p = r, s = t \Rightarrow p * r = s * t$ ‘dir.

ii) $\forall p, r \in \boldsymbol{G}$ için $p * r \in \boldsymbol{G}$ ise * işlemine kapalıdır denir.

Tanım 2.1.2: $\boldsymbol{G}$ boştan farklı olan bir küme, üzerinde ikili işlemin tanımlandığı $\boldsymbol{G}$ kümesine cebirsel yapı denir.

Tanım 2.1.3: $\boldsymbol{G}$ boş olmayan bir küme ve * , G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun.

(G1) Her $p, r, s \in \boldsymbol{G}$ için $p * (r * s) = (p * r) * s$

(G2) Her $p \in \boldsymbol{G}$ için $p * e = e * p = p$ olacak şekilde e ∈ G vardır.

(G3) Her $p \in \boldsymbol{G}$ için $p * x = x * p = e$ olacak şekilde $x \in \boldsymbol{G}$ vardır.

(G4) Her $p, r \in \boldsymbol{G}$ için $p * r = r * p$ dır.

özelliklerinden yalnız (G1) sağlanıyorsa $\boldsymbol{G}$ kümesine * ikili işlemi altında yarı grup, (G1) ve (G2) koşulları sağlanıyorsa $\boldsymbol{G}$ kümesine * ikili işlemi altında monoid, (G1), (G2), ve (G3) koşulları sağlanıyorsa $\boldsymbol{G}$ kümesine * ikili işlemi altında bir grup denir.

Eğer bir $\boldsymbol{G}$ grubu (yarı grubu,monoidi) (G4) özelliğini sağlıyorsa * işlemi altında değişmeli grup (değişmeli yarı grup, değişmeli monoid) denir.

Teorem 2.1.1:$(\boldsymbol{G},*)$ bir grup olsun. O zaman

i) $p \in G$ ve $p * p = p$ ise $p = e$ dir.

ii) $\forall p, r, s \in G$ için

$$p * r = p * s \Rightarrow r = s$$
$$r * p = s * p \Rightarrow r = s$$

iii) Her bir $p \in G$, ters eleman p^{-1} dir.

iv) Her bir $p \in G$ için $(p^{-1})^{-1} = p$ dır.

v) $p, r \in G$ için $(p * r)^{-1} = r^{-1} * p^{-1}$ dır.

vi) $p, r \in G$ için

$p * x = r$ ve $y * p = r$

denklemlerinin G grubu içinde çözümleri vardır ve bunlar $x = p^{-1} * r$ ve $y = r * p^{-1}$ dir.

İspat:

i) $p \in G$ için $p * p = p$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} e &= p^{-1} * p \\ &= p^{-1} * (p * p) \\ &= (p^{-1} * p) * p \\ &= e * p \\ &= p \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde $e = p$ olur.

ii) $p, r, s \in G$ için $p * r = p * s$ olsun. Bu eşitlik sol taraftan p elemanının tersi p^{-1} ile çarpılırsa $p^{-1} * (r * s) = p^{-1} * (r * s)$ elde edilir. Tanım 2.1.3'ten (G1)ve (G3) kullanılırsa son eşitlikten $(p^{-1} * p) * r = (p^{-1} * p) * s$ ve böylece $e * r = e * s$ bulunur. Tanım 2.1.3 (G2) den $r = s$ olur. $r * p = s * p$ ise benzer şekilde $r = s$ olduğu görülür.

iii) r ve p^{-1} elemanları p elemanının tersi olsun. $r = p^{-1}$ olduğunu göstereceğiz. r ve p^{-1} elemanları p elemanının tersi olduğundan $p * r = r * p = e$ ve $p * p^{-1} = p^{-1} * p = e$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden

$r * p = p * p^{-1}$ elde edilir. Burada (ii) kullanılırsa $r = p^{-1}$ olduğu görülür. O halde p elemanının tersi teklikle bellidir.

iv) Her $p \in G$ için $p * p^{-1} = p^{-1} * p = e$ olduğundan p^{-1} elemanının tersi olur. Bu $(p^{-1})^{-1} = p$ eşitliğinin sağlanması demektir.

v) $p, r \in G$ için

$$\begin{aligned}(p * r) * (r^{-1} * p^{-1}) &= p * (r * r^{-1}) * p^{-1}\\ &= p * e * p^{-1}\\ &= p * p^{-1}\\ &= e \text{ dir}\end{aligned}$$

Benzer şekilde $(r^{-1} * p^{-1}) * p * r = e$ olduğu görülür. Buradan $(p * r^{-1}) = r^{-1} * p^{-1}$ elde edilir.

vi) $p * x = r$ olsun. G grup olduğundan p elemanının tersi $p^{-1} \in G$ vardır ve tektir. Çarpma G üzerinde ikili işlem olduğundan $p * x = r$ eşitliği $p^{-1} * (p * x) = p^{-1} * r$ olmasını gerektirir. Burada (G1) dikkate alınırsa $(p^{-1} * p) * x = p^{-1} * r$ eşitliği elde edilir. Son eşitlikte sırasıyla (G3) ve (G1) kullanılırsa $e * x = x = p^{-1} * r$ mevcuttur. Öyleyse $x = p^{-1} * r$ olur Bununla birlikte $y * p = r$ eşitliği $y = r * p^{-1}$ hesaplanır.

Teorem 2.1.2: $(M_{m\times n}(F), +)$ bir değişmeli gruptur.

İspat: Matrislerin tanımından anlaşılacağı gibi $M_{m\times n}(F)$ de gerçekleştiğini görüyoruz.

$a_{kl} \in M_{m\times n}(F), b_{kl} \in M_{m\times n}(F) \Rightarrow c_{kl} = a_{kl} + b_{kl} \in F \quad k = 1,2,\dots,m \quad l = 1,2,\dots,n$

1) Birleşme özelliği

$$A = (a_{kl}), B = (b_{kl}), C = (c_{kl}) \in M_{m\times n}(F) \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$$

$(A + B) + C = [(a_{kl} + b_{kl})] + (c_{kl})$

$= (a_{kl} + b_{kl}) + (c_{kl})$

$= (a_{kl} + b_{kl} + c_{kl})$

$= (a_{kl}) + (b_{kl} + c_{kl})$

$= (a_{kl}) + [(b_{kl} + c_{kl})]$

$= A + (B + C)$ dir.

2) $A = (a_{kl}) \in M_{m\times n}(F), \exists 0 = (0_{kl}), A + 0 = 0 + A$

$A + 0 = \{(a_{kl} + 0_{kl}) | k = 1,2,\ldots,m; l = 1,2,\ldots,n\}$

$= \{(0_{kl} + a_{kl}) | k = 1,2,\ldots,; l = 1,2,\ldots,n\}$

$= \{(a_{kl}) | k = 1,2,\ldots,m; l = 1,2,\ldots,n\}$

$= A$

3) $A = (a_{kl}) \in M_{m\times n}(F), \exists -A = (a_{kl}), A + (-A) = 0$

$A + (-A) = \{(a_{kl}) + (-a_{kl}) | k = 1,2,\ldots,m; l = 1,2,\ldots,n\}$

$= \{0_{kl} | k = 1,2,\ldots,m; l = 1,2,\ldots,n\}$

$= 0$

4) Değişme özelliği

$A = (a_{kl}), B = (b_{kl}) \in M_{m\times n}(F), A + B = B + A$ *dır.*

$A + B = (a_{kl}) + (b_{kl})$

$= (a_{kl} + b_{kl})$

$= (b_{kl} + a_{kl})$

$= B + A$

dır.

Tanım 2.1.4: Bir ***G*** kümesi üzerinde toplama ve çıkarma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(\boldsymbol{G}, +, \bullet)$ yapısına cisim denir. Cismin elemanlarına skaler adı verilir.

1) $(G, +)$ değişmeli grup

2) $(G, \bullet)$ değişmeli grup

3) $\forall p, r, s \in G$ için $\bullet$ işleminin $+$ işlemine her iki taraftan da dağılma özelliği mevcuttur.

i) $p \bullet (r + s) = (p + r) \bullet s$

ii) $(p + r) \bullet s = p \bullet s + r \bullet s$ dir.

Tanım 2.1.5: $\boldsymbol{G}$ bir cisim olsun $\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{G}$, G boş olmayan kümesi için $\boldsymbol{H}$ kümesi $\boldsymbol{G}$ deki işlemlere göre cisim ise bu cisme $\boldsymbol{G}$ cisminin 'alt cismi' denir.

Tanım 2.1.6: F bir cisim ve $a_{kl} \in F(1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n)$ olmakla birlikte;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Şekil 2.1 $m \times n$ tipinde matris

Şekil 2.1'e matris denir. $k = 1,2,3, \dots, m$;

$$\begin{bmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

ifadesine matrisin dizeyleri ve $l = 1,2,3, \dots, n$ için ;

$$\begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{bmatrix}$$

şekline de matrisin dikeyleri denir. m dizeyli n dikeyli bir matrise $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ matris denir.

Tanım 2.1.7: Determinant, eş dörtgen matrisleri tek sayıya eşitleyen fonksiyondur. detA veya $|A|$ ile gösterilir.

- Determinant sıfır veya negatif olabilir.

Tanım 2.1.8: A, $n \times n$ eş dörtgen matrisinin k ıncı dizey ve l inci dikey ihmal edilerek $n - 1$ eş dörtgen matrisi elde edilir. Bu matris M_{kl} ile gösterilirse, $|M_{kl}|$ determinantına A matrisinin a_{kl} öğesinin minörü denir.

Tanım 2.1.9: A,$n \times n$ eş dörtgen matris ve $|M_{kl}|$, a_{kl} öğesinin minörü olmak üzere a_{kl} öğesinin A_{kl} kofaktörü,

$$A_{ij} = (-1)^{k+l} |M_{kl}|$$

olarak tanımlanır.

2.2. Determinant Alma Kuralları

1) $D = [d]_{1*1} \Rightarrow |D| = d$

2) $D = \begin{bmatrix} k & m \\ n & l \end{bmatrix} \Rightarrow |D| = k.l - m.n$

3) $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$ $\quad d_{31}.d_{22}.d_{13} + d_{11}.d_{32}.d_{23} + d_{21}.d_{12}.d_{33} = T_1$

$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{matrix}$ $\quad d_{11}.d_{22}.d_{33} + d_{21}.d_{32}.d_{13} + d_{31}.d_{12}.d_{23} = T_2$

$$|D| = T_1 - T_2$$

4) Eş dörtgen matriste d_{kl} öğesinin minörü m_{kl} olsun d_{kl} öğesinin hareketli minörü (kofaktörü) ;

$$D_{kl} = (-1)^{k+l}.m_{kl}$$

$\boldsymbol{D = [d_{kl}]_{n*n}}$ matrisi verilsin.

Matrisin determinantı rastgele dizey yada dikey öğeleri aynı öğelerin kofaktörlerinin çarpımlarının toplamına eşittir.

k. dizey göre determinant ;

$$|D| = d_{k1}.D_{k1} + d_{k2}.D_{k2} + \cdots + d_{kn}.D_{kn}$$

l. dikey göre determinant ;

$$|D| = d_{1l}.D_{1l} + d_{2l}.D_{2l} + \cdots + d_{nl}.D_{nl}$$

2.3. İki Matrisin Toplamı (Farkı)

D ile E $m \times n$ şeklindeki iki matris ise

$$d_{kl} \pm e_{kl} = c_{kl}$$

olacak şekilde elde edilen $c = [c_{kl}]$ matrisine D ile E matrisinin toplamı veya farkı denir.

2.4. Bir Matrisin Skaler ile Çarpımı

Bir matrisin $\boldsymbol{c}$ gibi bir sayı ile çarpıldığında matrisin tüm öğeleri c ile çarpılır.

$$D = [d_{kl}]_{m*n}$$

$$c.D = [c.d_{kl}]_{m*n}$$

2.5. Matris Çarpımı

D ve E matrislerinin çarpılabilmesi D matrisinin dikeyi ile sayısı E matrisinin dizey sayısına eşit olaması ile mümkündür.

$D = [d_{kl}]_{m*n}$ise $E = [e_{kl}]_{n*p}$ olmalıdır.

$$D.E = C$$

$C = [c_{kl}]_{m*p}$ biçiminde bir matristir.

Çarpma ilk matrisin dizeyleri ve ikinci matrisin dikeyleri çarpılıp toplanarak yapılır.

$$c_{11} = d_{11}.e_{11} + d_{12}.e_{12} + \cdots + d_{1n}.e_{n1}$$

$$c_{12} = d_{11}.e_{21} + d_{12}.e_{22} + \cdots + d_{1n}.e_{n2}$$

$$\vdots$$

$c_{kl} = d_{k1}.e_{kl} + d_{k2}.e_{2l} + \cdots + d_{kn}.e_{nl}$ ... $\mathrm{c_{mp}} = \mathrm{d_{m1}}.\mathrm{e_{1p}} + \mathrm{d_{m2}}.\mathrm{e_{2p}} + \cdots + \mathrm{d_{mn}}.\mathrm{e_{np}}$

Matris Çarpımının Özellikleri

1) $D.E \neq E.D$ dır. Yani herhangi iki matrisin çarpımının değişme özelliği yoktur. Aşağıdaki spesifik durumlarda eşitlik sağlanır:

$$\begin{cases} D.I = I.D \\ D.D^{-1} = D^{-1}.D \end{cases}$$

2) $D.(E.C) = (D.E).C$

3) $D.(E + C) = D.E + D.C \quad (E + C).D = E.D + C.D$

4) $D.E = E \Rightarrow D = I$ olmak zorunda değildir.

5) $D.E = 0 \Rightarrow D = 0$ veya $E = 0$ olmak zorunda değildir.

6) $(D.E)^T = E^T.D^T \qquad (D_1 D_2 \ldots D_n)^T = D_n{}^T.D_{n-1}{}^T.\ldots D_2{}^T.D_1{}^T$

2.6. Matrisin Transpozu (Devriği)

Bir matrisin transpozu, satırların sütun, sütunların satır haline getirilmesi ile oluşan matrislerdir.

A matrisinin devriği D^T, D^t, D' şekilleri ile gösterilebilir.

$D = [d_{kl}]_{m*n}$ ise

$$D = [d_{lk}]_{n*m}$$

olur.

Matrisin Transpozunun Özellikleri

1) $D + E = E + D$ *(Değişmelidir)*

2) $D + (E + C) = (D + E) + C$ *(Birleşmelidir)*

3) $k_1, k_2, \ldots, k_n \in R \begin{cases} k.(D + E) = k.D + k.E \\ (k_1 + k_2).D = k_1.D + k_2.D \\ (k_1.k_2).D = k_1.(k_2.D) \end{cases}$

4) $\left(D^T\right)^T = D$

5) $(D + E)^T = D^T + E^T$

6) $(D - E)^T = D^T - E^T$

7) $(k.D^T) = k.D^T$

8) $(D.E)^T = E^T.D^T$

2.7. Bazı Özel Matrisler

1) **Kare Matris:** Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrislerdir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) **Sıfır Matris:** Tüm elemanları sıfır olan matristir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) **Köşegen Matris:** Köşegendeki elemanlar hariç diğer elemanları sıfır olan matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4) **Skaler Matris:** Köşegendeki bütün elemanların birbirine eşit olan matristir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

5) **Birim Matris:** Köşegendeki tüm elemanları 1 olan matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) **Simetrik Matris:** A eş dörtgen matris kabul edilsin. $a_{ij} = a_{ji}$ eşitliği sağlanıyorsa Aya simetrik matris denir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

7) **Ters-Simetrik Matris:** A bir kare matris olsun. Eğer $a_{ij} = -a_{ji}$ eşitliği tüm $i \neq j$ elemanları için sağlanıyor ise veya $-A = A^T$ oluyorsa Aya ters simetrik matris denir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

NOT : A matrisi n*n kare matris olsun

$$P = \frac{1}{2}.(\mathrm{A} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}})$$

ve

$$Q = \frac{1}{2}.(\mathrm{A}\text{-}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$$

şeklinde tanımlanan P ve Q matrisleri sırası ve simetrik ve ters simetrik matrislerdir.

8) Periyodik Matris: A bir kare matris olsun. $k \in N^{+}$olmak üzere ;

$$A^{k+1} = A$$

ise A matrisine periyodik matris denir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) İdempotent Matris:A eş dörtgen matris kabul edilsin.

$$A^2 = A$$

eşitliği sağlanıyorsa A matrisi idempotenttir.Birim matris bir idempotent matris örneğidir.

$$A^2 = 0$$

ise A matrisi nilpotenttir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

10) Üst Üçgensel ve Alt Üçgensel Matris: Bir kare matrisin asal köşegeninin altında (üstünde) kalan tüm elemanlar sıfır ise üst üçgensel (alt üçgensel) matris denir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

üst üçgensel matrise örnektir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alt üçgensel matrise örnektir.

11) Ortogonal Matris: A bir kare matris olsun.

$$A.A^T = I$$

ise A ortogonal matristir.

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2.8. Ek Matris (Adjoint Matris)

Herhangi matrisin yerine, o öğeleri işaretli minörlerinin yazılıp transpozu alınarak elde edilen matrise ek matris denir.

Ek(D) veya adj(D) ile gösterilir.

2.9. Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersi

$D = [D_{kl}]_{n*n}$, çarpma işlemine göre tersini $\boldsymbol{D^{-1}}$ ile gösterelim. Determinantı sıfır olmayan her matrisin tersi mevcuttur.

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}.ek(D), \ (|D|) \neq 0$$

Özellikler

1) $D.D^{-1} = D^{-1}.D = I$
2) $(D^{-1})^{-1} = D$
3) $(D^{-1})^{T} = (D^{T})^{-1}$
4) $(k.D)^{-1} = \frac{1}{k}.D^{-1}$
5) $(D.E)^{-1} = E^{-1}.D^{-1}$
6) $D.Ek(D) = Ek(D).D$
   $= det(D).I$
7) $Ek(D.E) = Ek(D).Ek(E)$

Tanım 2.1.10: $(K,+,\circ)$ bir cisim, V üzerinde $*: V \times V \to V$ iç ve $\circ: K \times V \to V$ dış işlemleri tanımlanan bir küme olduğunu varsayalım. Aşağıdaki aksiyomlar gerçekleşiyorsa V ye K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

$\boldsymbol{V_1}$)$\forall x, y, z \in V$için $(x * y) * z = x * (y * z)$ dir.

$\boldsymbol{V_2}$)$\forall x \in V$ için $x * \theta = x = \theta * x$ olacak şekilde $\exists \theta \in V$ mevcuttur.

$\boldsymbol{V_3}$)$\forall x \in V$ için $x * x^{-1} = \theta = x^{-1} * x$ olacak şeklinde $\exists x^{-1} \in V$'dir.

$\boldsymbol{V_4}$)$\forall x, y \in V$ için $x * y = y * x$ dir.

$\boldsymbol{V_5}$)$\forall a \in K$ ve $\forall x, y \in V$için $a \circ (x * y) = (a \circ x) * (a \circ y)$ dir.

$\boldsymbol{V_6}$)$\forall a, b \in K$ve $\forall x \in V$ için $(a * b) \circ x = (a \circ x) * (b \circ x)$ dir.

$\boldsymbol{V_7}$)$\forall a, b \in K$ ve $\forall x \in V$ için $(a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x)$ dir.

$\boldsymbol{V_8}$)$\forall x \in V$ için $I \circ x = x$ dir.

Tanım 2.1.11: V vektör uzayı W,$V'nin$ boştan farklı olan bir alt kümesi olsun. W,Vde ki işlemlere göre bir vektör uzayı ise, bu durumda W,$V'nin$ bir alt uzayı şeklinde isimlendirilir.

Tanım 2.1.12: V ile W aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun.

$$T: V \rightarrow W$$

bir dönüşüm olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in V$ ve $c \in F$ için,

$$T(c.\alpha + \beta) = c.T(\alpha) + T(\beta)$$

sağlanıyorsa Tye lineer dönüşüm denir.

2.10. Lineer Dönüşümlerin Matris Gösterimi

U vektör uzaylı m boyutlu ve V vektör uzayı da n boyutlu iki vektör uzayı olsunlar. Buna göre $x = [x_1 x_2 \dots x_n] \in U$ve

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$

bununla birlikte;

$$x.D = [x_1 x_2 \dots x_n] * \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 y_2 \dots y_n]$$

$$= y \in V$$

olur. Ayrıca , $u_1, u_2 \in U$ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$(\alpha.u_1 + \beta.u_2).D = \alpha.u_1.D + \beta.u_2.D$$

$$= \alpha.u_1 + \beta.u_2 \in U$$

olduğunu görmek kolaydır. Öte yandan, $y = [y_1 y_2 \dots y_n]^T \in$ bununla birlikte

$$\mathrm{D}{*}y=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x \in U$$

elde edilir. Yine $u_1, u_2 \in U$ ve $\lambda, \mu \in K$ olmak üzere

$$D.(\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.D.u_1 + \mu.D.u_2$$

$$= \lambda.u_1 + \mu.u_2 \in U$$

bulunur.

Aynı bir K cismi üzerinde tanımlı Uve Vvektör uzayları verilmiş olsun. U vektör uzayının boyutu m, ve Vvektör uzayının boyutu da n olmak üzere $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, Uvektör uzayının bir bazı ve $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ vektörleride, V vektör uzayının da bir bazı olsun. Buna göre $F: U \rightarrow V$ bir lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım.

$u_k \in U$ ve $v_l \in V$ olmak üzere ;

$$F(M_l) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} d_{kl} v_l; \ (l = 1,2,3, \dots, m) \quad \dots (2.1)$$

olacak şekilde $d_{kl} \in K$ skaleri vardır. (2.1) eşitliğini açık olarak yazarsak ;

$$F(u_1) = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 + \dots + d_{n1}v_n$$

$$F(u_2) = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 + \dots + d_{n2}v_n \qquad \dots (2.2)$$

$$F(u_n) = d_{1m}v_1 + d_{2m}v_2 + \dots + d_{nm}v_n$$

olup bunu da matris formunda yazarsak ;

$$\begin{bmatrix} F(u_1) \\ F(u_2) \\ \vdots \\ F(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Herhangi bir x ∈ u için $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_mu_m = \sum_{k=1}^{m} x_ku_k$ olmak üzere ;

$$F(x) = F(x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_mu_m)$$

$$= x_1F(u_1) + x_2F(u_2) + \ldots + x_mF(u_m)$$

olur ve iki ifadedeki değerler yerine yazılırsa,

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{x}_1((\mathrm{d}_{11}\mathrm{v}_1 + \mathrm{d}_{21}\mathrm{v}_2 + \ldots + \mathrm{d}_{1n}\mathrm{v}_\mathrm{n}) + \mathrm{x}_2(\mathrm{d}_{12}\mathrm{v}_1 + \mathrm{d}_{22}\mathrm{v}_2 + \ldots + \mathrm{d}_{n2}\mathrm{v}_\mathrm{n}) + \ldots$$

$$+x_m(d_{1m}v_1 + d_{2m}v_2 + \ldots + d_{nm}v_n)$$

$$= (d_{11}.x_{11} + d_{12}.x_{12} + \ldots + d_{1m}.x_m).v_1 + (d_{21}.x_1 + d_{22}.x_2 + \ldots + d_{2m}.x_m).v_2 + \ldots$$

$$+(d_{n1}.x_1 + d_{n2}.x_2 + \ldots + d_{nm}.x_m)v_n$$

olur.

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n$ ve iki vektörün eşitliğinde ;

$$F(x) = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}.x_1 + d_{12}.x_2 + \cdots + d_{1m}.x_m \\ d_{21}.x_1 + d_{22}.x_2 + \cdots + d_{2m}.x_m \\ \vdots \\ d_{n1}.x_1 + d_{n2}.x_2 + \cdots + d_{nm}.x_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nm} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada *U* uzayındaki baza göre yazılan $F(x) \in U$ vektörü, sütunları $F(u_l)$ olan

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \ldots & d_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots \; (2.3)$$

$n \times m$ tipideki matris ile U uzayındaki baza göre yazılan $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ koordinat vektörünün çarpımıdır. İşte bu D matrisi $F: U \to V$ lineer dönüşümü temsil ettiğinden bu matrise ;

$$f = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

$$g = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

bazlarına göre F lineer dönüşümünün matris gösterimi denir.

(2.3) matrisine dikkat edilirse, (2.2) ifadesindeki matrisin transpozesidir. O halde

$F: U \to V$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulmak için ;

1. U vektör uzayının baz vektörlerinin F altındaki görüntüleri bulunur.

2. Bulunan bu görüntüler U uzayının baz vektörlerinin lineer toplamı olarak yazılır.

Bu lineer toplam matris formunda yazılıp matrisin transpozesi alınır.

BÖLÜM 3

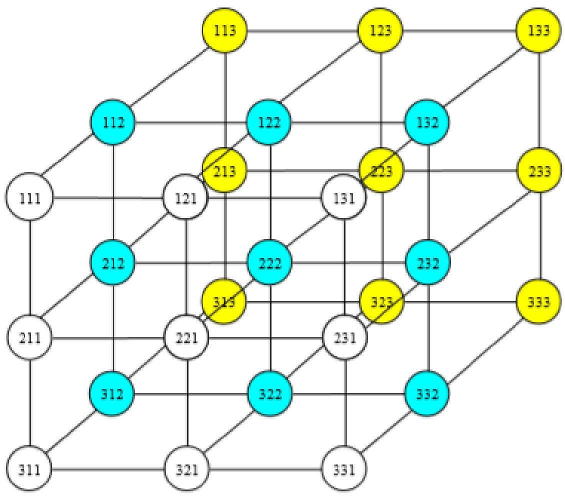
3-D MATRİSLER ÜZERİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

Bu bölümde diğer bölümde kullanacağımız 4-D matrisi tanımlama da kullandığımız 3-D matrislerle ilgili tanımlar verilecektir. Daha fazla bilgi için [3] kaynağına bakılabilir.

3.1. 3-D Matris

Tanım 3.1.1.1: 3-Boyutlu $3*3*3$ tipindeki matris diye şöyle adlandırılır. $(F,+,*)$ bir cisim olsun.

$$M_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$$



Şekil 3.1 3-D matrislerin 3 boyutlu düzlemdeki görüntüsü

Bu matrisin reeldeki görüntüsü ise aşağıdaki şekildeki gibi olacaktır ;

$$A = \left\| \begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \end{matrix} \right\|$$

$$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\}$$

Tanım 3.1.1.2: $3 * 3 * 3$ tipindeki sıfır matrisler, 3-D tüm elemanları sıfır olan matrislerdir.

$$0_{3*3*3}(F) = \{(0_{ijk}) | 0_{ijk} \in F;\ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\}$$

olarak tanımlanır ve burada $-a_{ijk}, a_{ijk} \in F$ nin ters elemanıdır.

Tanım 3.1.1.3: 3-D A matrisi

$$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\}$$

olmak üzere bu matrislerinin toplama işlemine göre tersi ;

$$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\} \text{ dir.}$$

Buradan;

$(a_{ijk}) + (-a_{ijk}) = 0_F$ olmak üzere

$$A_{3*3*3} + (-A_{3*3*3}) = \{(a_{ijk}) + (-a_{ijk}) | i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\}$$

$$= \{(0_{ijk}) | i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3\}$$

$= 0_{3*3*3}$ dır.

3.1.1. 3-D Matrislerde Toplama İşlemi

A ve B, 3-D matris olmak üzere

$$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk})|i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$$

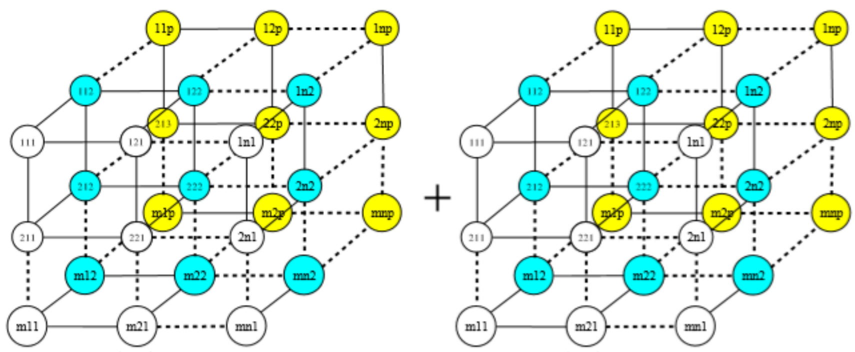
$$B_{3*3*3}(F) = \{(b_{ijk})|i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$$

dir. Bu matrislerin toplamı

$$\left(\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \\ a_{312} & a_{322} & a_{332} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{bmatrix}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{131} \\ b_{211} & b_{221} & b_{231} \\ b_{311} & b_{321} & b_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{112} & b_{122} & b_{132} \\ b_{212} & b_{222} & b_{232} \\ b_{312} & b_{322} & b_{332} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{113} & b_{123} & b_{133} \\ b_{213} & b_{223} & b_{233} \\ b_{313} & b_{323} & b_{333} \end{bmatrix}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{111}+b_{111} & a_{121}+b_{121} & a_{131}+b_{131} \\ a_{211}+b_{211} & a_{221}+b_{221} & a_{231}+b_{231} \\ a_{311}+b_{311} & a_{321}+b_{321} & a_{331}+b_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{112}+b_{112} & a_{122}+b_{122} & a_{132}+b_{132} \\ a_{212}+b_{212} & a_{222}+b_{222} & a_{232}+b_{232} \\ a_{312}+b_{312} & a_{322}+b_{322} & a_{332}+b_{332} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{113}+b_{113} & a_{123}+b_{123} & a_{133}+b_{133} \\ a_{213}+b_{213} & a_{223}+b_{223} & a_{233}+b_{233} \\ a_{313}+b_{313} & a_{323}+b_{323} & a_{333}+b_{333} \end{bmatrix}\end{array}\right)$$

$$C_{3*3*3}(F) = \left\{c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk} | \forall_{ijk} \in \{1,2,3\}\right\}$$

şeklindedir. Bu yapılan toplama işleminin 3-D olarak görümü ise



Şekil 3.2 3-D matislerde toplama işlemi

olacaktır.

3-D matrislerde çıkarma işlemi de toplama işlemine benzer olarak ;

$$C_{3*3*3}(F) = \left\{c_{ijk} = a_{ijk} - b_{ijk} | \forall_{ijk} \in \{1,2,3\}\right\}$$

şeklinde yapılır.

3.1.2. 3-D Matrislerde Çarpma İşlemi

A ve B, 3-D matris olmak üzere

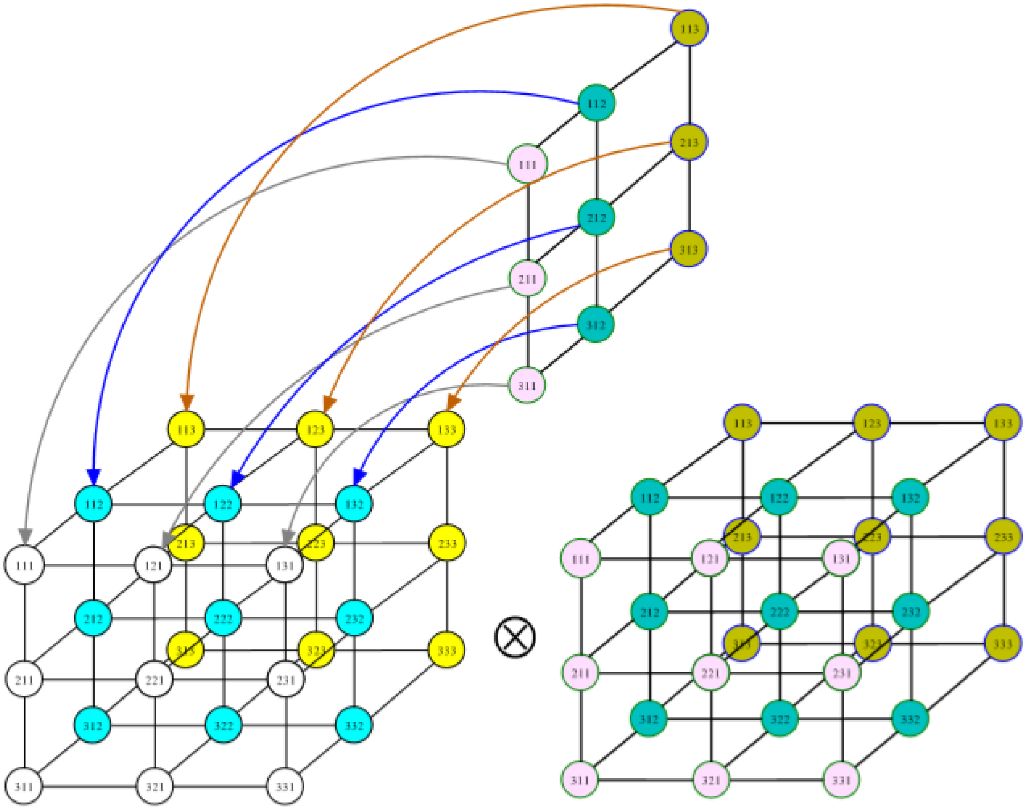
$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$

$B_{3*3*3}\ (F) = \{(b_{ijk}) | i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$'dir.

Bu matrislerin çarpımı

$$C_{3*3*3}(F) = \left\{c_{ijk} = a_{ijk} * b_{ijk} | \forall_{ijk} \in \{1,2,3\}\right\}$$

şeklindedir.



Şekil-3.3 3-D matrisin çarpımı [1]

3.1.3. 3-D Matrislerde Skaler Çarpım

F bir cisim ve $\boldsymbol{\alpha} \in F$ olsun.

$A_{3*3*3}(F) = \{(a_{ijk}) | i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3\}$

matrisi için

$$\alpha . A = \left\{\alpha . (a_{ijk}) \middle| a_{ijk}, \forall ijk \in \{1,2,3\}\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem : $(M_{m*n*p}(F), +)$ değişmeli bir gruptur.

İspat : $M_{m*n*p}(F)$ 3–D matrislerinin işlemlerini gerçeklediğini görürüz.

Çünkü ;

1) Birleşme Özelliği :

$A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}), C = (c_{ijk}) \in M_{m*n*p} \in (F) \quad \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

dir.

$$(A + B) + C = ((a_{ijk} + b_{ijk})) + (c_{ijk})$$

$$= (a_{ijk} + b_{ijk}) + c_{ijk}$$

$$= (a_{ijk} + b_{ijk} + c_{ijk})$$

$$= (a_{ijk}) + (b_{ijk} + c_{ijk})$$

$$= (a_{ijk}) + ((b_{ijk} + c_{ijk})$$

$= A + (B + C)$ dir.

2) $A = (a_{ijk}) \in M_{m*n*p*r}(F), A + 0 = 0 + A$

$$A + 0 = \{(a_{ijk}) + (0_{ijl}) | i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, p\}$$

$$= \{(a_{ijk} + 0_F) | i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, p\}$$

$$= \{a_{ijk} | i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, p\}$$

$$= A$$

3) $A = (a_{ijk}) M_{m*n*p}(F), \exists(-A) = (-a_{ijk}) \in M_{m*n*p}, A + (-A) = 0$

$$A + (-A) = \{(a_{ijk}) + (-a_{ijk}) | i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, p\}$$

$$= \{0_{ijk} | i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, p\}$$

$$= 0$$

4) Değişme Özelliği

$A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in M_{m*n*p}(F), A + B = B + A$ dır.

$$A + B = (a_{ijk}) + (b_{ijk})$$

$$= (a_{ijk}) + (b_{ijk})$$

$= (b_{ijk}) + (a_{ijk})$ *((IR, +) değişmeli olduğundan)*

$$= B + A$$

- 3-D matrisinin vektör uzayı olduğunu gösterelim.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{bmatrix}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{131} \\ b_{211} & b_{221} & b_{231} \\ b_{311} & b_{321} & b_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{131} \\ b_{211} & b_{221} & b_{231} \\ b_{311} & b_{321} & b_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{131} \\ b_{211} & b_{221} & b_{231} \\ b_{311} & b_{321} & b_{331} \end{bmatrix}\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{111} & c_{121} & c_{131} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{111} & c_{121} & c_{131} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{111} & c_{121} & c_{131} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} \end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

A, B ve C elemanları vektörlerden oluşan 3-D matrisler olsunlar.

1) $A, B, C, \in U \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

$$(A + B) + C = ((a_{ijk} + b_{ijk})) + (c_{ijk})$$

$= (a_{ijk} + b_{ijk}) + c_{ijk}$

$= (a_{ijk} + b_{ijk} + c_{ijk})$

$= (a_{ijk}) + (b_{ijk} + c_{ijk})$

$= (a_{ijk}) + ((b_{ijk} + c_{ijk})$

$= A + (B + C)$ dir.

2) $A \in U$ ve $0 = (0_{ijk}) \in U \Rightarrow A + 0 = 0 + A = A$ dır.

$A + 0 = a_{ijk} + 0_{ijk}$

$= 0_{ijk} + a_{ijk}$

$= a_{ijk}$

$=A$ dır.

3) $A \in U$ve $-A \in U$ için $A + (-A) = 0$ dır.

$A + (-A) = a_{ijk} - a_{ijk}$

$= 0$

4) $A, B \in U \Rightarrow \quad A + B = B + A$ dır.

$A + B = a_{ijk} + b_{ijk}$

$= b_{ijk} + a_{ijk}$

$= B + A$dır.

3-D matris toplamaya göre değişmeli gruptur.

5) $A, B \in U$ ve $m \in F$için ;

$$m.(A + B) = m.(a_{ijk} + b_{ijk})$$

$= \mathrm{m.a_{ijk}} + \mathrm{m.b_{ijk}}$

$= m.A + m.B$ dir.

6) $A \in U$ ve $m, n \in F$ için ;

$$(m + n).A = (m + n).a_{ijk}$$

$= m.a_{ijk} + n.a_{ijk}$

$= m.A + n..A$dır.

7) $A \in U$ve $I \in F$ için ;

$I.A = I.a_{ijk}$

$= a_{ijk}$

$= A$ dır.

BÖLÜM 4

4-D MATRİSLER ÜZERİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

4.1. 4-D Matris

Tanım 4.1.1: 4 - boyutlu $4*4*1*2$ tipindeki matris şöyle adlandırılır;

$(F,+,*)$ bir cisim olsun.

$$M_{4*4*1*2} = \{(a_{ijkl})|(a_{ijkl}); i = 1,2,3,4: j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

Bu matrisin görüntüsü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\left[\begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1211} & a_{1311} & a_{1411} \\ a_{2111} & a_{2211} & a_{2311} & a_{2411} \\ a_{3111} & a_{3211} & a_{3311} & a_{3411} \\ a_{4111} & a_{4211} & a_{4311} & a_{4411} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1112} & a_{1212} & a_{1312} & a_{1412} \\ a_{2112} & a_{2212} & a_{2312} & a_{2412} \\ a_{3112} & a_{3212} & a_{3312} & a_{3412} \\ a_{4112} & a_{4212} & a_{4312} & a_{4412} \end{bmatrix}\right]$$

Tanım 4.1.2: $4*4*4*4$ tipindeki sıfır matrisleri, 4-D tüm elemanları sıfır olan matrislerdir.

$$0_{4*4*4*4}(F) = \{(0_F)_{ijkl}|i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

Tanım 4.1.3: Bir 4-D A matrisi

$$A_{4*4*4*4}(F) = \{(a_{ijkl})|a_{ijkl} \in F için; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

şeklinde olmak üzere bu matrislerinin toplama işlemine göre tersi ;

$$-A_{4*4*4*4}(F) = \{(-a_{ijkl}) | -a_{ijkl} \in F için; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

dir. Ayrıca burada $(-a_{ijkl}), a_{ijkl} \in F$nin ters elemanıdır.

Buradan;

$$a_{ijkl} + (-a_{ijkl}) = 0_F$$

$$(A_{4*4*4*4}) + (-A_{4*4*4*4}) = \{(a_{ijkl}) + (-a_{ijkl}) | i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

$$= \{(0_{ijkl}) | i = 1,2,34; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$$

$$= 0_{4*4*4*4} \text{dır.}$$

4.1.1. 4-D Matrislerde Toplama İşlemi

Tanım 4.1.1.1: A ve B matrisleri 4-D matris olmak üzere

$A_{4*4*4*4}(F)$=$\{(a_{ijkl}) | a_{ijkl} \in F için; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$

$B_{4*4*4*4}(F)$=$\{(b_{ijkl}) | b_{ijkl} \in F için; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4\}$

şeklindedir. Bu matrislerin toplamı

$C_{4*4*4*4}(F)$=$\{(c_{ijkl}) = (a_{ijkl} + b_{ijkl}) | i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$

Örneğin; $\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}7 & 10\\8 & 11\\9 & 12\end{bmatrix}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8\\4 & 10\\6 & 12\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}14 & 20\\16 & 22\\18 & 24\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 12\\6 & 15\\9 & 18\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}21 & 30\\24 & 33\\27 & 36\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

şeklindedir. 4-D matrislerde çıkarma işlemi de toplama işlemine benzer olarak;

$C_{4*4*4*4}(F)$={$(c_{ijkl}) = (a_{ijkl} - b_{ijkl}) | i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4$}

şeklinde yapılır.

4.1.2. 4-D Matrislerde Çarpma İşlemi

Tanım 4.1.2.1: A ve B matrisleri 4-D matris olmak üzere

$A_{4*4*4*4}(F)$={$(a_{ijkl}) | a_{ijkl} \in Fiçin; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4$}

$B_{4*4*4*4}(F)$={$(b_{ijkl}) | b_{ijkl} \in Fiçin; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4$}

şeklindedir. Bu matrislerin çarpımı

$C_{4*4*4*4}(F)$={$(c_{ijkl}) = (a_{ijkl} * b_{ijkl}) \in Fiçin; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4$}

şeklindedir.

Örneğin; $$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13 & 15 & 17\\ 14 & 16 & 18\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{bmatrix},\begin{bmatrix}19 & 21 & 23\\ 20 & 22 & 24\end{bmatrix}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}24 & 21\\ 23 & 20\\ 22 & 19\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12 & 9\\ 11 & 8\\ 10 & 7\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}18 & 15\\ 17 & 14\\ 16 & 13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 3\\ 5 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1*24+3*23+5*22 & 1*21+3*20+5*19\\ 2*24+4*23+6*22 & 2*21+4*20+6*19\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}13*12+15*11+17*10 & 13*99+15*8+17*7\\ 14*12+16*11+18*10 & 14*9+16*8+18*7\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}203 & 176\\ 272 & 236\end{bmatrix},\begin{bmatrix}491 & 356\\ 524 & 380\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}455 & 374\\ 506 & 416\end{bmatrix},\begin{bmatrix}311 & 122\\ 326 & 128\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

4.1.3. 4-D Matrislerde Skaler Çarpım

Tanım 4.1.3.1: *F* bir cisim, $\boldsymbol{\alpha} \in F$ olsun.

$A_{4*4*4*4}(F)$=$\{(a_{ijkl})|a_{ijkl} \in F için; i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\}$

matrisi için;

$$\alpha.A = \left\{\alpha.(a_{ijkl})|\forall_{i,j,k,l} \in \{1,2,3,4\}\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Örneğin; $$5*\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7 & 10\\ 8 & 11\\ 9 & 12\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 20\\ 10 & 25\\ 15 & 30\end{bmatrix},\begin{bmatrix}35 & 50\\ 40 & 55\\ 45 & 60\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Teorem 4.1.3.1: $(\mathrm{M}_{4*4*4*4}(\mathrm{F}), +)$ bir değişmeli gruptur.

İspat : 4-D matrislerin tamamından anlaşılacağı gibi ;

$M_{4*4*4*4}(F)$ - de gerçeklediğini görüyoruz.

Çünkü ;

$a_{ijkl} \in (F)$, $b_{ijkl} \in (F) \Rightarrow \; c_{ijkl} = a_{ijkl} + b_{ijkl} \ni F \forall i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$

1) Birleşme Özelliği

$A = (a_{ijkl}), B = (b_{ijkl}), C = (c_{ijkl}) \in M_{4*4*4*4}(F) \Rightarrow \; (A+B)+C = A+(B+C)$

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left[(a_{ijkl}+b_{ijkl})\right] + (c_{ijkl}) \\
&= (a_{ijkl}+b_{ijkl}) + (c_{ijkl}) \\
&= (a_{ijkl}+b_{ijkl}+c_{ijkl}) \\
&= (a_{ijkl}) + (b_{ijkl}+c_{ijkl}) \\
&= (a_{ijkl}) + \left[(b_{ijkl}+c_{ijkl})\right] \\
&= A+(B+C) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

2) $A = (a_{ijkl}) \in F, \exists 0 = (0_{ijkl}), A+0 = 0+A$

$$
\begin{aligned}
A+0 &= \left\{(a_{ijkl}+0_{ijkl}) \mid i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\right\} \\
&= \left\{(a_{ijkl}+0_{ijkl}) \mid i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\right\} \\
&= \left\{(a_{ijkl}) \mid i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\right\}
\end{aligned}
$$

3) $A = (a_{ijkl}) \in M_{4*4*4*4}, \exists -A = (-a_{ijkl}), A+(-A) = 0$

$$
\begin{aligned}
A+(-A) &= \left\{(a_{ijkl}) + (-a_{ijkl}) \mid i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\right\} \\
&= \left\{(0_{ijkl}) \mid i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4) Değişme Özelliği

$A = (a_{ijkl}), B = (b_{ijkl}) \in M_{4*4*4*4}(F), A+B = B+A$' dır.

$$
\begin{aligned}
A+B &= (a_{ijkl}) + (b_{ijkl}) \\
&= (a_{ijkl}+b_{ijkl})
\end{aligned}
$$

$= (b_{ijkl} + a_{ijkl})$

$= B + A$dir.

Teorem 4.1.3.2: $(M_{m*n*p*r}(F), +)$ değişmeli bir gruptur**.**

İspat : $M_{m*n*p*r}(F)$ 4D – matrislerinin işlemlerini gerçeklediğini görürüz.

Çünkü;

1) ***Birleşme Özelliği :***

$A = (a_{ijkl}), B = (b_{ijkl}), C = (c_{ijkl}) \in M_{m*n*p*r} \in (F)$ $\Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$ dir.

Gerçekten;

$(A + B) + C = \left[(a_{ijkl}) + (b_{ijkl})\right] + (c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl} + b_{jkl}) + (c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl} + b_{ijkl} + c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl}) + (b_{ijkl} + c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl}) + \left[(b_{ijkl}) + (c_{ijkl})\right]$

$= A + (B + C)$ dir.

2)

$$A = (a_{ijkl}) \in M_{m*n*p*r}(F), A + 0 = 0 + A$$

Gerçekten;

$A + 0 = \{(a_{ijkl}) + (0_{ijkl}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; l = 1, \dots, r\}$

$= \{(a_{ijkl} + 0_F) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; l = 1, \dots, r\}$

$= \{a_{ijkl} | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; l = 1, \dots, r\}$

$= A$

3)

$A = (a_{ijkl}) M_{m*n*p*r}(F), \exists (-A) = (-a_{ijkl}) \in M_{m*n*p*r}, A + (-A) = 0$

Gerçekten;

$$A + (-A) = \{(a_{ijkl}) + (-a_{ijkl}) | i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n; k = 1,\dots,p; l = 1,\dots,r\}$$

$$= \{0_{ijkl} | i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n; k = 1,\dots,p; l = 1,\dots,r\}$$

$$= 0$$

4)Değişme Özelliği

$A = (a_{ijkl}), B = (b_{ijkl}) \in M_{4*4*4*4}(F), A + B = B + A$ dır.

Gerçekten;

$$A + B = (a_{ijkl}) + (b_{ijkl})$$

$= (a_{ijkl}) + (b_{ijkl})$

$= (b_{ijkl}) + (a_{ijkl})$ *((IR, +) değişmeli olduğundan)*

$= B + A$

- **4-D matrisin vektör uzayı olduğunu gösterelim :**

$$\mathbf{A}=\left[\begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1211} & a_{1311} & a_{1411} \\ a_{2111} & a_{2211} & a_{2311} & a_{2411} \\ a_{3111} & a_{3211} & a_{3311} & a_{3411} \\ a_{4111} & a_{4211} & a_{4311} & a_{4411} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1112} & a_{1212} & a_{1312} & a_{1412} \\ a_{2112} & a_{2212} & a_{2312} & a_{2412} \\ a_{3112} & a_{3212} & a_{3312} & a_{3412} \\ a_{4112} & a_{4212} & a_{4312} & a_{4412} \end{bmatrix}\right]$$

$$\mathrm{B} = \left[\begin{bmatrix} b_{1111} & b_{1211} & b_{1311} & b_{1411} \\ b_{2111} & b_{2211} & b_{2311} & b_{2411} \\ b_{3111} & b_{3211} & b_{3311} & b_{3411} \\ b_{4111} & b_{4211} & b_{4311} & b_{4411} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{1112} & b_{1212} & b_{1312} & b_{1412} \\ b_{2112} & b_{2212} & b_{2312} & b_{2412} \\ b_{3112} & b_{3212} & b_{3312} & b_{3412} \\ b_{4112} & b_{4212} & b_{4312} & b_{4412} \end{bmatrix}\right]$$

$$\mathrm{C} = \left[\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1211} & c_{1311} & c_{1411} \\ c_{2111} & c_{2211} & c_{2311} & c_{2411} \\ c_{3111} & c_{3211} & c_{3311} & c_{3411} \\ c_{4111} & c_{4211} & c_{4311} & c_{4411} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1212} & c_{1312} & c_{1412} \\ c_{2112} & c_{2212} & c_{2312} & c_{2412} \\ c_{3112} & c_{3212} & c_{3312} & c_{3412} \\ c_{4112} & c_{4212} & c_{4312} & c_{4412} \end{bmatrix}\right]$$

A, *B* ve *C* elemanları vektörlerden oluşan 4–D matrisler olsunlar.

1) $A, B, C \in U \Rightarrow \ (A+B)+C = A+(B+C)$

$(A+B)+C = \left[(a_{ijkl})+(b_{ijkl})\right]+(c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl}+b_{ijkl})+(c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl}+b_{ijkl}+c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl})+(b_{ijkl}+c_{ijkl})$

$= (a_{ijkl})+\left[(b_{ijkl})+(c_{ijkl})\right]$

$= A+(B+C)$ dir.

2) $A \in U, 0 = (0_{ijkl}) \in U \Rightarrow \ A+0 = 0+A$

$A+0 = (a_{ijkl})+(0_{ijkl})$

$= (0_{ijkl})+(a_{ijkl})$

$= a_{ijkl}$

$= A$

3) $A, B \in U \Rightarrow A+B = B+A$

$A+B = a_{ijkl}+b_{ijkl}$

$= \ b_{ijkl}+a_{ijkl}$

$= B+A$

dır.

4) $A \in U, -A \in U \Rightarrow \ A+(-A) = 0$

$A+(-A) = a_{ijkl}+(-a_{ijkl})$

$= a_{ijkl}-a_{ijkl}$

$= \mathbf{0}$

4-D matris toplamaya göre değişmeli gruptur.

5) $A, B \in U$ ve $m \in F$ skaleri için ;

$m(A+B) = m(a_{ijkl}+b_{ijkl})$

$= m.a_{ijkl}+m.b_{ijkl}$

$= \ m.A+m.B$

6) $A \in U$ ve $m, n \in F$ skaleri için ;

$(m+n).A = (m+n).a_{ijkl}$

$= m.a_{ijkl} + n.a_{ijkl}$

$= m.A + n.A$

7) $A \in U$ ve $I \in F$ skaleri için ;

$I.A = I.a_{ijkl}$

$= a_{ijkl}$

$= A$ dır

BÖLÜM 5

BAZI MATRİS UYGULAMALARI

Örnek 5.1: $\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} + \mathrm{t} = 3$

$\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 2\mathrm{z} + 3\mathrm{t} = 4$ denklem sistemini çözelim.

$\mathrm{x} + \mathrm{y} + 2\mathrm{z} + 2\mathrm{t} = 5$

$\mathrm{y} + \mathrm{z} + 4\mathrm{t} = 7$

Bu sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. İlk satırı, ikinci ve üçüncü satırlardan çıkararak a_{11} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

şimdide, ikinci satırı dördüncü satırdan çıkararak a_{22} elemanının altındaki tüm elemanların sıfır olmasını sağlayalım ;

Bu durumda ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x + y + z + t = 3 \, , y + z + 2t = 1$

$\Rightarrow z + t = 1 \, , 2t = 6$

elde edilir ki buradan;

$t = 3 \, , z = -1 \, , y = -4 \, , x = 5$

Örnek 5.2: $x + y + z = 3$

$$3x + 2y + 3z = 4$$

$$2x + y + z = 5$$

denklem sistemini çözelim.

Bu sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Birinci satırın üç katını ikinci satırdan, iki katını da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

üçüncü satırdan çıkararak a_{11} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

şimdide, ikinci satırı üçüncü satırdan çıkararak a_{22} elemanının altındaki tüm elemanların sıfır olmasını sağlayalım. Bu durumda ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\ x + y + z = 3, -y = -5\ , 0 = -4$

elde edilir ki ,buradan $0 = -4$ çelişkisi çıkar. Bu denklemin çözümünün olmadığını gösterir.

Örnek 5.3: $\begin{matrix} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{matrix}$ denklem sistemini çözelim. Verilen lineer denklem sisteminin genelleştirilmiş katsayılar matrisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi bu matrise karşılık gelen değerleri bulalım:

Birinci satırı -2 ile çarpıp ikinci satıra ekleyelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & -5 & \vdots & -5 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi birinci satırı -3 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & -5 & \vdots & -5 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -11 \end{bmatrix}$$

Son olarakta ikinci satırı -1 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & -5 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

-2z=-6	5y-5z=-5	x-2y+3z=4
z=3	5y-15=5	x-4+9=4
	5y=10	x=-1
	y=2	

değerleri elde edilir.

Örnek 5.4:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{cases} \mathrm{x}_1 - 2\mathrm{y}_1 + 2\mathrm{z}_1 = 3 \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{y}_1 - \mathrm{z}_1 = 3 \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{y}_1 + \mathrm{z}_1 = 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}_2 = \begin{cases} \mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_2 + \mathrm{z}_2 = 3 \\ -\mathrm{y}_2 + 2\mathrm{z}_2 = 2 \\ \mathrm{x}_2 - \mathrm{y}_2 = 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}_3 = \begin{cases} \mathrm{y}_3 + 2\mathrm{z}_3 = 3 \\ -2\mathrm{x}_3 + \mathrm{y}_3 + \mathrm{z}_3 = 3 \\ \mathrm{x}_3 + \mathrm{y}_3 + \mathrm{z}_3 = 1 \end{cases}$$

3-boyutlu A matrisinin elemanları olan $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ matrislerinin denklem sistemlerini genişletilmiş katsayılar matrisi kullanarak çözünüz.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Birinci satırı -1 ile çarpıp ikinci ve üçüncü satıra ekleyerek a_{11} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

şimdi de, ikinci satırı, üçüncü satırdan çıkararak a_{22} elemanının altındaki tüm elemanların sıfır olmasını sağlayalım;

Bu durumda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ x + 2y + z = 3$$

$$-3y - 3z = 0$$

$$2z = 0$$

elde edilir. Buradan ; $x_1 = 3$, $y_1 = 0$,$z_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. İlk satırı -1 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim. a_{11} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdide, ikinci satırı -1 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim a_{22} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 = 3 \\ -y_2 + 2z_2 = 2 \\ -5z_2 = -4 \end{cases}$$

$5z_2 = 4 \ \Rightarrow z_2 = 4/5$ $\qquad x_2 + y_2 + z_2 = 3$

$-y_2 + 2z_2 = 2$ $\qquad x_2 - 18/5 - 4/5 = 3$

$-y_2 + 8/5 = 2$ $\qquad x_2 - 22/5 = 3$

$-y_2 = 2 + 8/5$

$-y_2 = 18/5 \qquad x_2 = 3 + 22/5$

$y_2 = -18/5 \quad , \quad x_2 = 37/5 \ , \quad z_2 = -4/5$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Birinci satır ile üçüncü satırın yerini değiştirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Birinci satırı 2 ile çarpıp ikinci satıra ekleyelim. a_{11} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Şimdi de ikinci satırı $-\frac{1}{3}$ ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim. a_{22} elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 14/3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 + y_3 + z_3 = 1$$

$$3y_3 + 3z_3 = 5$$

$$z_3 = 14/3$$

$y_3 + z_3 = 5/3 \ \Rightarrow \ y_3 = 5/3 - 14/3$

$y_3 = -9/3$

$1y_3 = -3$

$x_3 + y_3 + z_3 = 1$

$x_3 - 9/3 - 14/3 =$

$x_3 = 23/3 + 1$

$x_3 = 26/3$

Örnek 5.5: $A_1 = \begin{cases} x_1 + 2y_1 + z_1 = 3 \\ x_1 + 3y_1 + 4z_1 = 4 \ , \\ x_1 + 4y_1 + 7z_1 = 5 \end{cases}$

$$A_2 = \begin{cases} x_2 + 2y_2 + z_2 = 5 \\ y_2 + 3z_2 = 1 \end{cases},$$

$$A_3 = \begin{cases} x_3 + 3y_3 + z_3 = 5 \\ 2x_3 + y_3 - 3z_3 = 15 \\ x_3 + 7y_3 + 5z_3 = 1 \end{cases}$$

3-boyutlu A matrisinin elemanları olan A_1, A_2, A_3 matrislerinin denklem sistemlerini genişletilmiş katsayılar matrisi kullanarak çözünüz.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 4 \\ 1 & 4 & 7 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Birinci satırı ve ikinci ve üçüncü satırdan çıkararak $\boldsymbol{a_{11}}$ elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi de ikinci satırı -2 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim $\boldsymbol{a_{22}}$ elemanının altındaki tüm elemanları sıfır yapalım ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 3 \\ y_1 + 3z_1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$z_1 = k$ olsun . $x_1 + 2(1 - 3k) + k = 3$

$$y_1 = 1 - 3k$$

$$x_1 + 2 - 6k + k = 3$$

$$x_1 = 1 + 5k$$

elde edilir;

$$x_1 = 1 + 5k$$

ise bu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır ve

$$y_1 = 1 - 3k$$

$$z_1 = k$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.a_{11} ve a_{22} elemanlarının altındaki tüm elemanlar sıfır olduğundan satır-sütün işlemlerini yapılmasına gerek kalmamıştır. O halde;

$$\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{y}_2 + \mathrm{z}_2 = 3$$

$\mathrm{y}_2 + 3\mathrm{z}_2 = 1$ $\quad$ $z_2 = t$ olsun.

$$y_2 = 1 - 3t$$

$$x_2 = 1 + 5t$$

elde edilir. Buradan,

$$x_2 = 1 - 5t\,, \quad y_2 = 1 - 3t\ \ , \quad z_2 = t$$

ise bu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır ve

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & -3 & \vdots & 15 \\ 1 & 7 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Birinci satırı -2 ile çarpıp ikinci satıra eklenir. a_{11} elemanının altındaki tüm elemanlar sıfır olur;

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & -5 & -5 & \vdots & 5 \\ 1 & 7 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 2.satırı -5’e bölelim

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & 7 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 3.satırdan 1.satırı çıkarıp 3.satıra yazılır

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 4 & 4 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{3.satırı 4 e bölelim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 + y_3 + z_3 = 5$ $\qquad$ $x_3 = 8 + 2m$

$y_3 + z_3 = -1$ $\qquad$ $y_3 = -1 - m$

$z_3 = m$ olsun. $\qquad$ $z_3 = m$

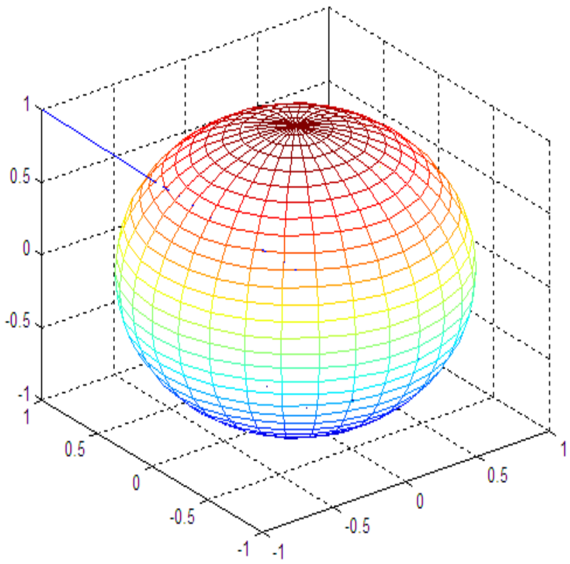
$$y_3 = -1 - m$$

$$x_3 + 3(-1 - m) + m = 5$$

$$x_3 - 3 - 2m = 5 \Rightarrow x_3 = 8 + 2m$$

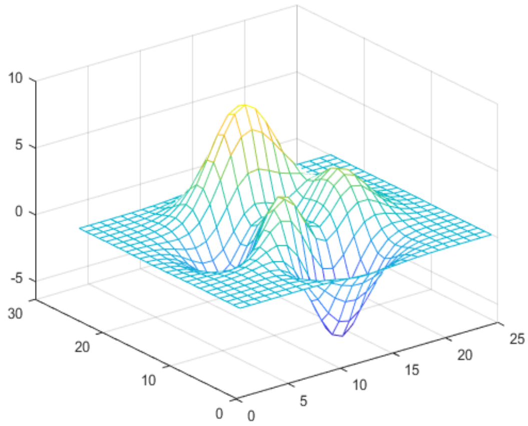
Matris kullanımı işlemsel olarak değil grafiksel olarak da kullanılabilir. Dünya'nın sıcaklık dağılımını grafikselleştirmek , yayın uzunluğunu grafikselleştirmek , eksenlerin birbiri etrafındaki dönme durumunu grafikleştirmek, herhangi bir şehrin sıcaklık dağılımını ay ve yıllara göre grafikselleştirmek, bir bölgedeki yükseltinin alçak ve yüksek kısımlarını görselde daha anlaşılır kılmak için grafik haline getirmek tabanı 3-D matrise dayanan bir görselleştirme sistemidir.Bu grafikleştirme işlemi için Matlabtan yararlanacağız. Matlabta hazırlanan bu grafikleri inceleyelim:

Örnek 5.6: Dünyanın kutuplardaki ve ekvatordaki güneş ışığını alma açısına göre gösterdiği farklılıklar Matlab ile çizilmiştir.



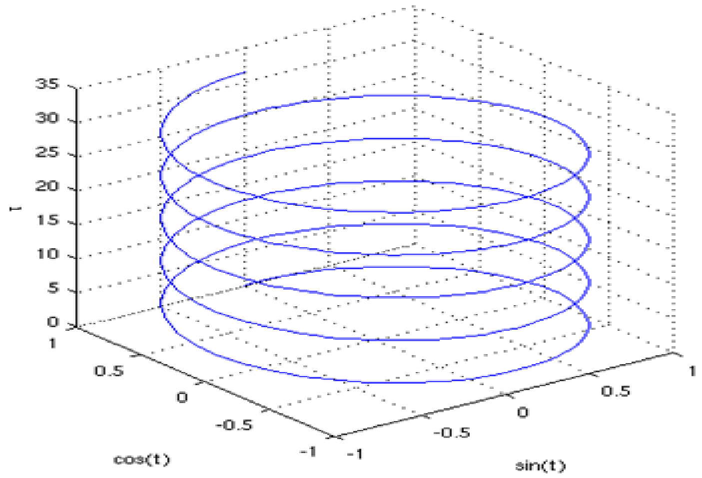
Şekil 5.1 Dünyanın güneş ışığı açısına göre grafiği

Örnek 5.7:



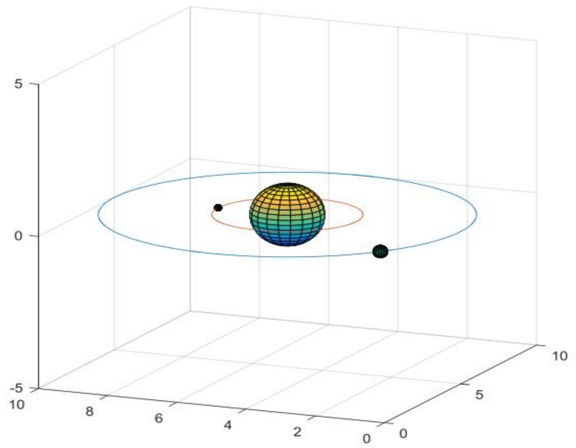
Şekil 5.2 f fonksiyonu Matlab grafik

Örnek 5.8: cos(t) ve sin(t) fonksiyonlarının ortak açılardaki değerlerin grafikleri ortak grafik elde edilmiştir.



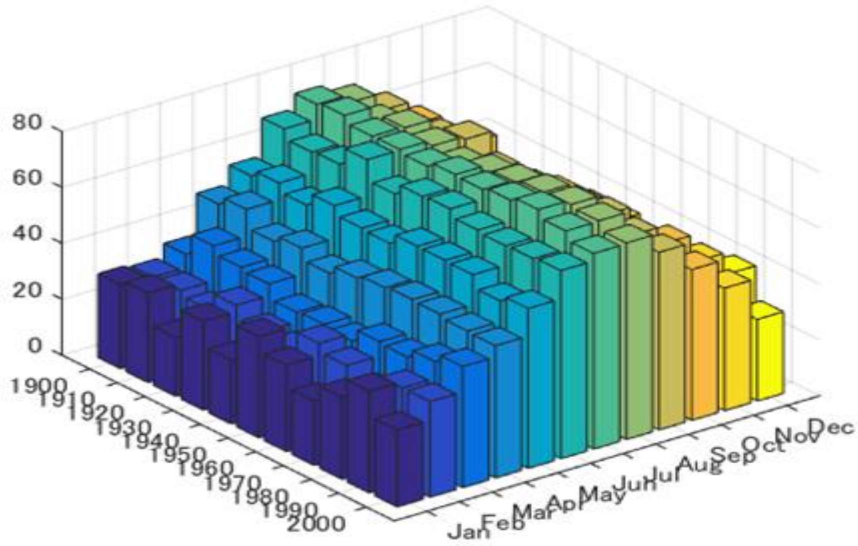
Şekil 5.3 Trigonometrik fonksiyonların aynı değerdeki değişimleri

Örnek 5.9: Gezegenlerin birbirleri etrafında dönmesi Matlab yardımıyla çizilmiştir. Şekilde görüldüğü üzere yörüngeler de göz önünde bulundurulmuştur.



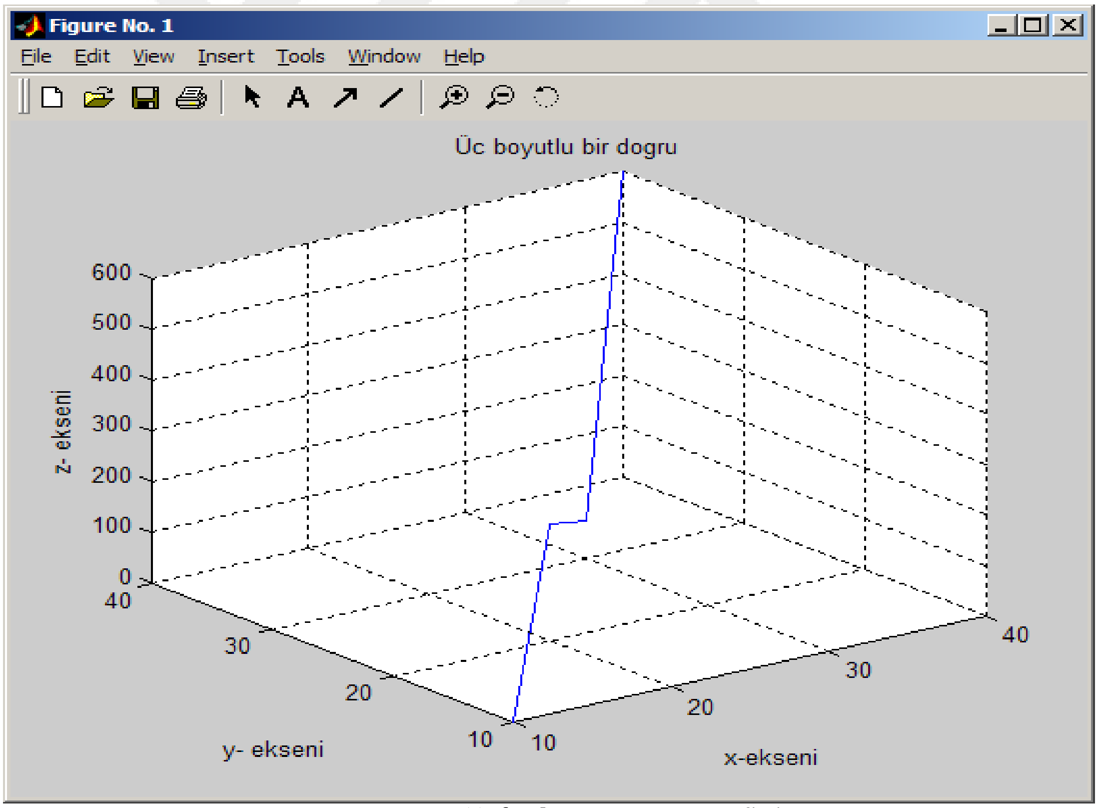
Şekil 5.4 Gezegenlerin birbirleri etrafında dönmesi

Örnek 5.10: Bir şehrin aylara ve yıllara göre sıcaklık değişimini incelemk için 3-D Matlab çizimi kullanılmıştır. Bu çalışma sonucunda Haziran, Temmuz ve Ağustos aylarında daha çok sıcak yaşandığını ortaya koymuştur.



Şekil 5.5 Sıcaklık değişimi grafiği

Örnek 5.11:



Şekil 5.6 y(t) fonksiyonunun grafiği

Örnek 5.12: Bir hava istasyonunda sıcaklık-nem-basınç değişimlerinin sırasıyla 23:53, 23:54. 23:55, 23:56, 23:57 uçuşlarına göre sırasıyla ölçülmesi ve bu ölçümler sonunda uçuşların gerçekleşebileceğinin ya da aksi durumun olmasının gözlenmesi grafiği yapılmıştır.

Şekil 5.7 Hava istasyonu sıcaklık-nem-basınç değişim grafiği

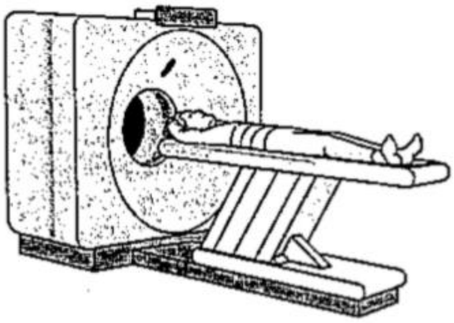
BÖLÜM 6

4-D MATRİSLERİN UYGULAMA ALANI

Bu bölümde 4-D matrislerinin uygulama alanı üzerinde durulacaktır. Sağlık sektöründe önemli bir yer alan tomografinin 4-D matrisler yardımıyla önceki ve sonraki alınan verilerinin karşılaştırarak aynı anda çözüm almayı sağlamak hedeflenmiştir. Öncesinde tomografinin işleyişine bir bakalım:

6.1. Bilgisayarlı Tomografi

Bilgisayarlı tomografinin temel problemi, kesit boyunca geçen x-ışınlarından toplanan verileri kullanarak insan vücudunun bir kesitinin görüntüsünü resmetmektir. x-ışınları taramalarının analizi ile bir insan vücudunu kesitsel resmetmek görüntünün sayısal gösterimi için tutarsız lineer sisteme yol açar. x-ışınlarından toplanan veriler bir bilgisayar ile analiz edilir ve bu kesit bir video monitörde gösterilir.



Şekil 6.1 x-ışın tomografisine hazırlanan bir hasta

Şekil 6.2 Bir hasta kafatasının bilgisayar destekli tomografi görüntüsü

Şekil 6.2 de ki görüntü oluşumunda çıkan data işlenip, matris formuna dönüştürülüyor. Görüntüde oluşan değişimler Matlab programıyla inceleniyor.

Matlab programı tomografi görüntüsündeki sorunlu bölgenin matris formatını farklı zaman aralıklarla kontrol etmemizi sağlayıp, değişim sonucu hakkında yorum yapmamızı sağlıyor.

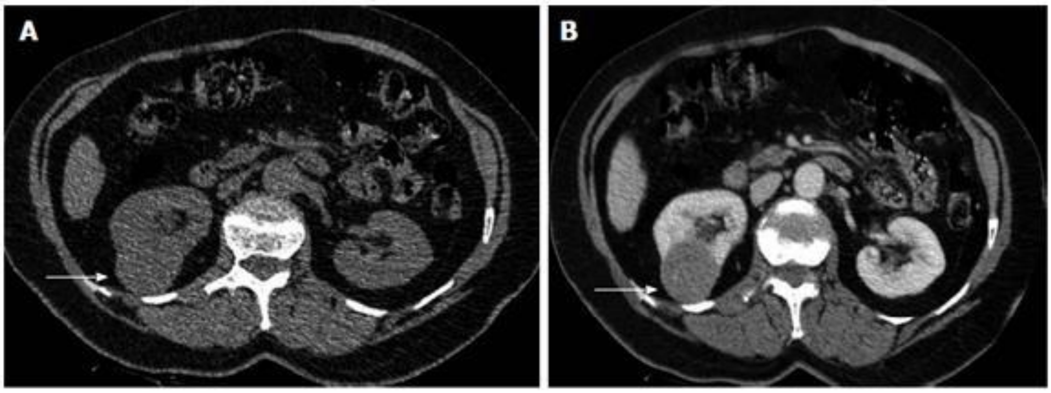
Matlab programı kullanılarak matrislerin arasındaki farkları, boyut olarak artmış, azalmış veya değişmemiş kararını veren kod;

```
clear; clc;
m=input('1.Matris Sütun Sayisi= ')
n=input('1.Matris Satir Sayisi= ')
for i=1:m;
   for j=1:n;
      a(i,j)=input('1.Matris Elemanlari= ');
   end
end
```

```
a=reshape(a,m,n)
        for l=1:m;
          r(l)=input('1.Matris Esitligi= ');
        end

                for v=1:m;
                  for c=1:n;
                     q(v,c)=input('2.Matris Elemanlari= ');
                   end
                end
q=reshape(q,v,c)
        for p=1:m;
           z(p)=input('2.Matris Esitligi= ');
        end


b=r';
h=z';
o=[a b];
u=[q h];
k=rref(o);
d=rref(u);


        for t=1:n;
                f(1,t)= k(t,end);
                f2(1,t)=d(t,end);
        end
f
f2
```

```
A1='Artmis %';
A2='Azalmis %';
A3='Degismemis %';


x=abs( ((f(1,1)-f2(1,1))/f(1,1))*100)
y=abs( ((f(1,2)-f2(1,2))/f(1,2))*100)
z=abs( ((f(1,3)-f2(1,3))/f(1,3))*100)
        if(x<3 && y<3 && z<3) disp(A3)
                else
                        for t=1:n;

   if ( f(1,t) == f2(1,t) ) disp(A3)
   end
      if ( f(1,t) > f2(1,t) ) disp(A2)
      end
         if ( f(1,t) < f2(1,t) ) disp(A1)
         end
end
end
```

Örnek 6.1:



Şekil 6.3 Böbrek tomografisi fark görüntüsü

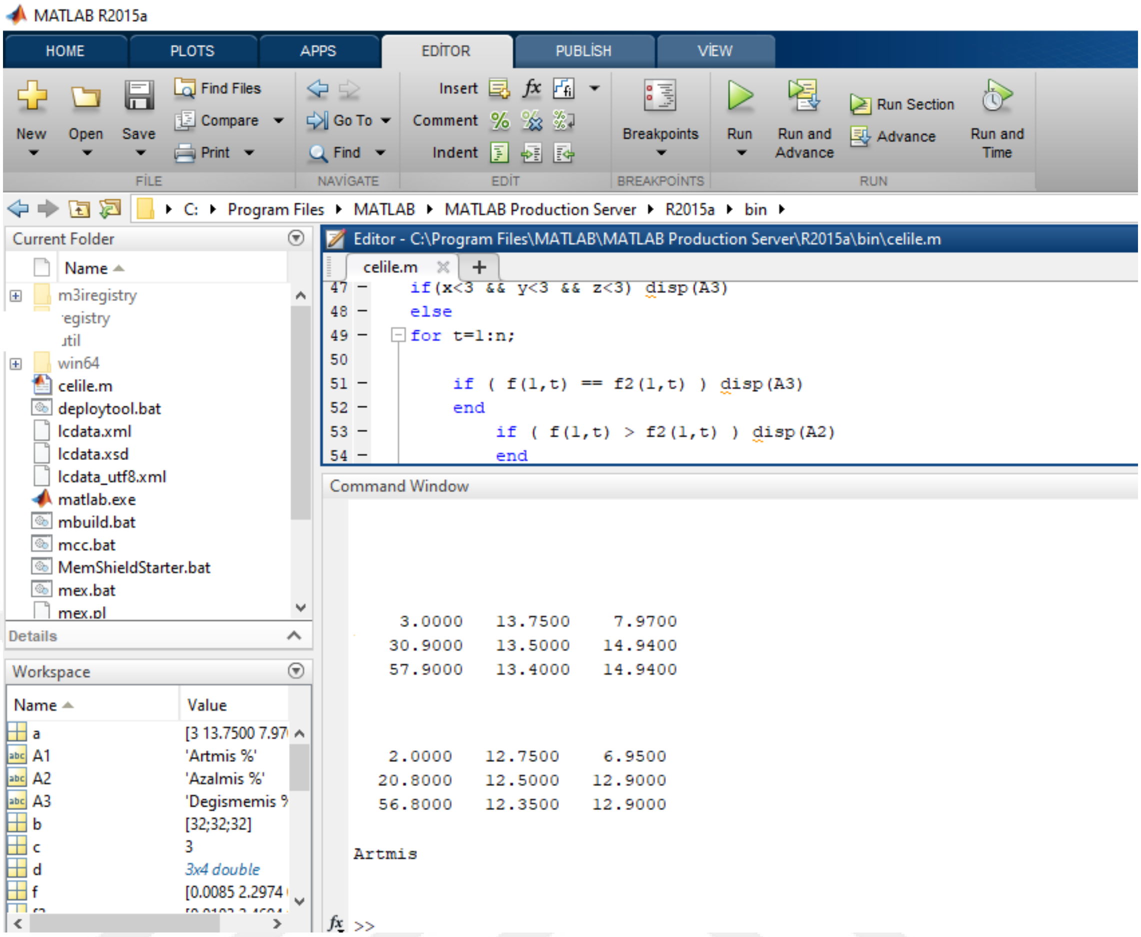
Bir A hastasından Ocak ayında çekilen böbrek tomografisi datası

$$\begin{bmatrix} 3 & 18.75 & 7.97 & \vdots & 32 \\ 30.9 & 13.5 & 14.94 & \vdots & 32 \\ 57.9 & 13.4 & 14.94 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Aynı hastanın Temmuz ayında çekilen böbrek tomografisi datası ise

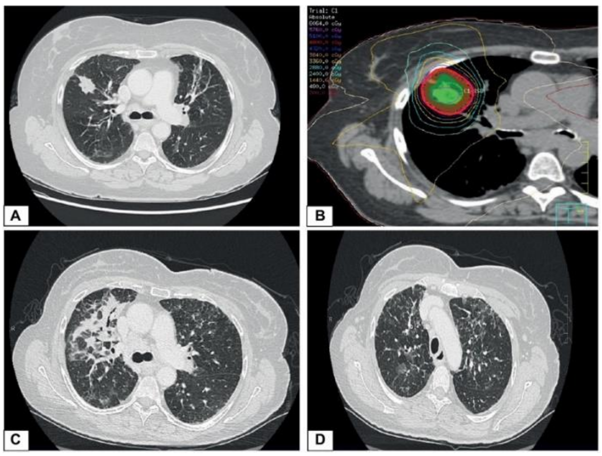
$$\begin{bmatrix} 2 & 12.75 & 6.95 & \vdots & 32 \\ 20.8 & 12.5 & 12.9 & \vdots & 32 \\ 56.8 & 12.35 & 12.9 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Bu iki datanın çözümlenmesi sonucu hastalığın arttığı saptanmıştır.



Şekil 6.4 Artmış olan dataların karşılaştırılması

Örnek 6.2:



Şekil 6.5 Karaciger tomografisi görüntüsü

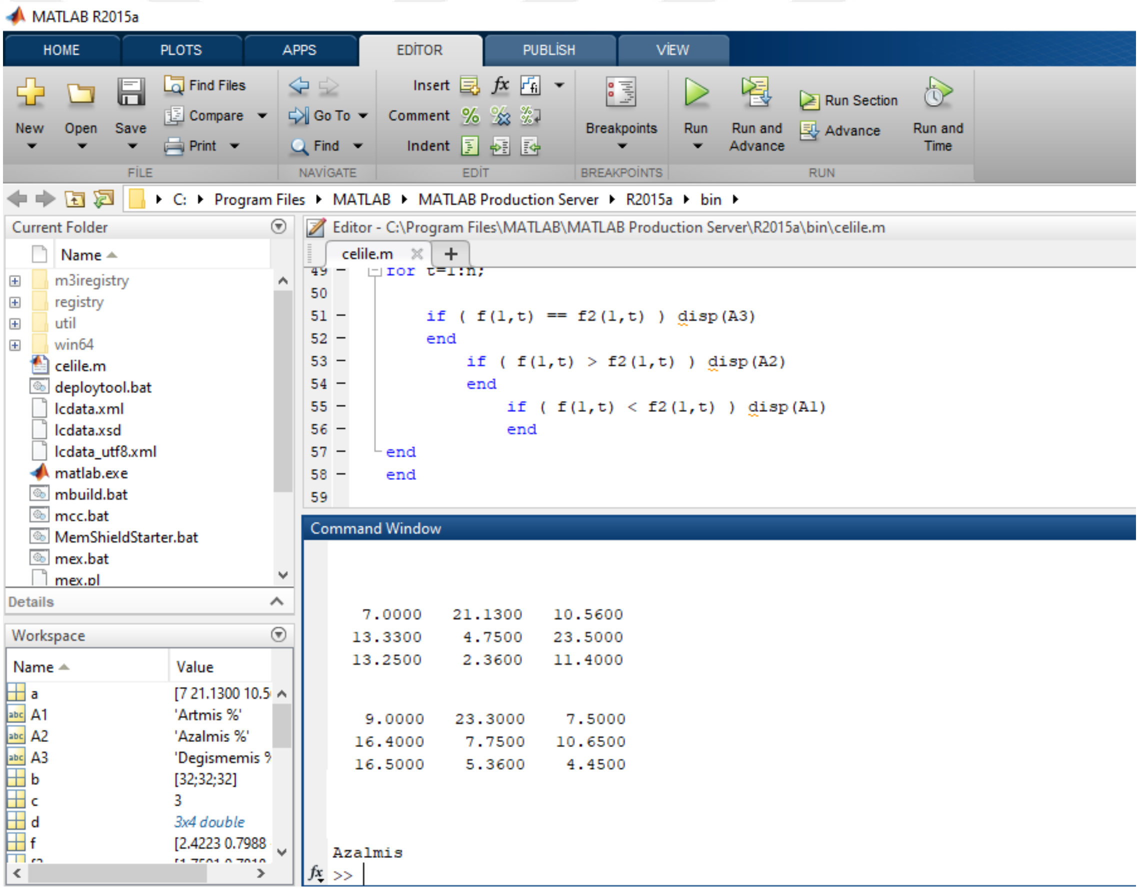
Bir B hastasının Aralık ayında çekilen karaciğer tomografisi datası

$$\begin{bmatrix} 7 & 21.13 & 10.56 & \vdots & 32 \\ 13.33 & 4.75 & 23.5 & \vdots & 32 \\ 13.25 & 2.36 & 11.4 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Aynı hastanın Haziran ayında çekilen karaciğer tomografisinin datası

$$\begin{bmatrix} 9 & 23.3 & 7.5 & \vdots & 32 \\ 16.4 & 7.75 & 10.65 & \vdots & 32 \\ 16.50 & 5.36 & 4.45 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Bu iki datanın çözümlenmesi sonucu hastalığın azaldığı saptanmıştır.



Şekil 6.6 Azalmış olan dataların karşılaştırılması

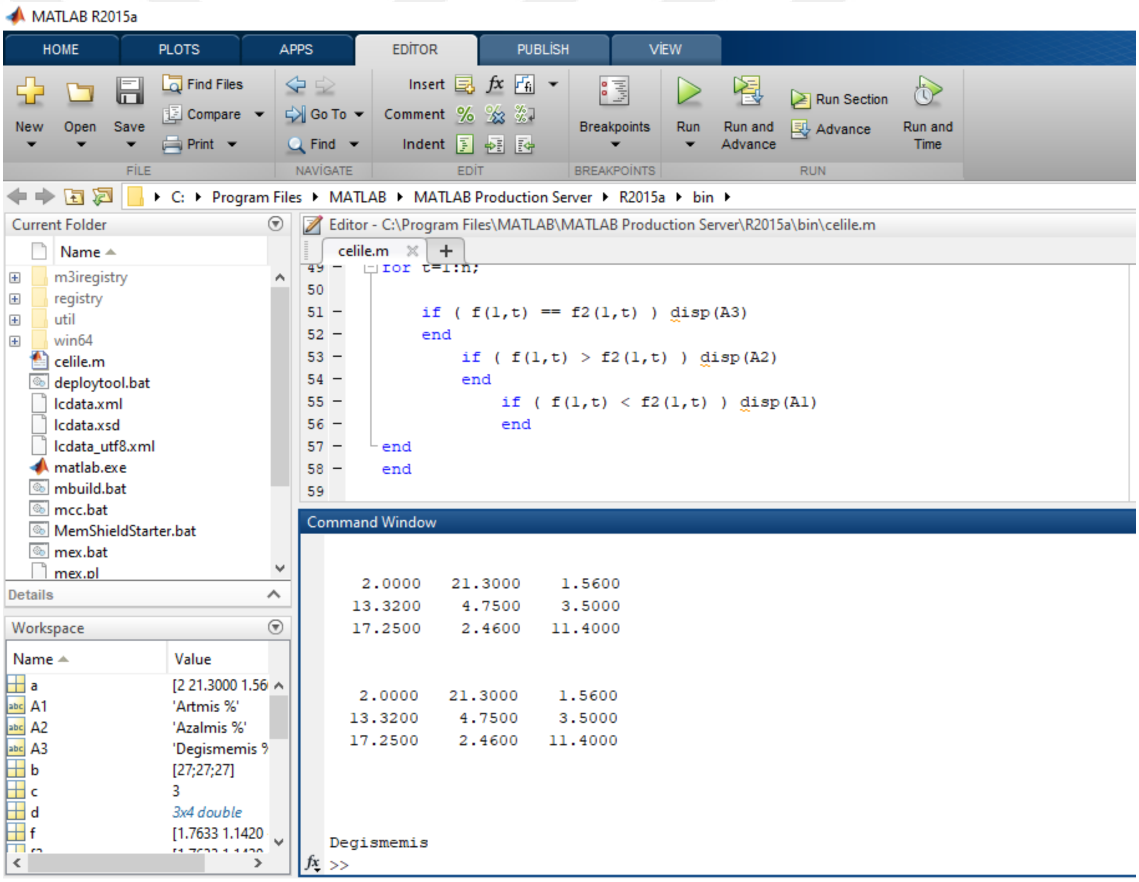
Örnek 6.3: Bir C hastasından Ağustos ayında çekilen böbrek tomografisi datası

$$\begin{bmatrix} 2 & 21.3 & 1.56 & \vdots & 32 \\ 13.32 & 4.75 & 3.5 & \vdots & 32 \\ 17.25 & 2.46 & 11.4 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Aynı hastanın Şubat ayında çekilen böbrek tomografi datası ise

$$\begin{bmatrix} 2 & 21.3 & 1.56 & \vdots & 32 \\ 13.32 & 4.75 & 3.5 & \vdots & 32 \\ 17.25 & 2.46 & 11.4 & \vdots & 32 \end{bmatrix}$$

şeklinde görüntülenmiştir. Bu iki datanın çözümlenmesi sonucu hastalığın değişmediği sabit kaldığı saptanmıştır.



Şekil 6.7 Değişmemiş olan dataların karşılaştırılması

BÖLÜM 7

SONUÇ

Bu tezde ilk olarak, matrisler, 3-D matrisler, 4-D matrislerle ilgili kavramlar tanıtılmıştır. Sonra tomografinin alt yapısı olan matrisi kullanarak eski görüntü ve güncel görüntüyü aynı anda çözümleyerek hastalıklı bölgenin değişimi hakkında fikir elde edebileceğimiz uygulamaya yer verilmiştir. Lineer denklem sistemlerini daha çözülebilir hale getiren matris formu şifreler algoritması, görüntü işleme ve bilgisayar programlanın alt yapısı gibi alanlarda kullanılmakta olup yeni çözüm metotları geliştirmeye imkan sağlamıştır.

KAYNAKLAR

[1] Aydın, N., Kandamar, H. (2013) *Soyut cebir*, Kriter Yayınevi.

[2] Kolman, B., Hill, D. R. (2000) *Elementary linear algebra*, Prentice Hall.

[3] Zaka, O. (2017). 3D Matrix Ring with a ‘Common’ Multıplication, *Open Access Library Journal,* **4**.

[4] Zaka, O. (2013). Abstract Algebra II. Vllamai, Tirana.

[5] Zaka, O, Filipi, K. (2016). One Construction of an Affine Plane over a corps. *Journal of Advances in Mathematics,* **12**

[6] Kaplan, T. (2011) Lineer Denklemler Sistemleri ve Uygulama Alanları.Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi.