

**T.C.**  
**MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**İNTEGRAL DENKLEMLERİN UYARLANABİLİR**  
**İNCELTME KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜM VE**  
**UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ**

**NEBİYE KORKMAZ**

**KASIM 2013**

**MUĞLA**

# MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

## Fen Bilimleri Enstitüsü

### TEZ ONAYI

NEBİYE KORKMAZ tarafından hazırlanan İNTEGRAL DENKLEMLERİN UYARLANABİLİR İNCELTME KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜM VE UYGULAMALARI başlıklı tezinin, 12/11/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda doktora derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

#### TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mehmet SEZER (Jüri Başkanı)

Matematik Anabilim Dalı,  
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

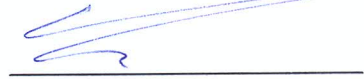
İmza:



Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY (Danışman)

OFMA Matematik Eğitimi Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Doç. Dr. Mustafa GÜLSU (Üye)

Matematik Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (Üye)

Matematik Anabilim Dalı,  
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

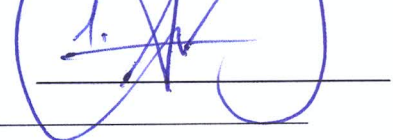
İmza:



Yrd. Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ (Üye)

Matematik Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



#### ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

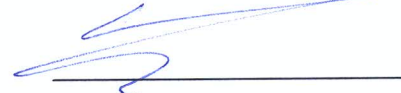
İmza:



Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

Danışman, OFMA Matematik Eğitimi Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Savunma Tarihi: 12/11/2013

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara da atıf yapıldığını beyan ederim.

Nebiye KORKMAZ  
12/11/2013

## ÖZET

### İNTEGRAL DENKLEMLERİN UYARLANABİLİR İNCELTME KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜM VE UYGULAMALARI

Nebiye KORKMAZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

Kasım 2013, 116 sayfa

Bu çalışmada ikinci tip Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Galerkin yöntemine ve bu yöntem ile elde edilen yaklaşık çözüme uygulanan Sloan iterasyon yöntemine uyarlanabilir inceltme uygulanmıştır. Yaklaşımlar için baz fonksiyonları olarak şapka fonksiyonları olarak adlandırılan doğrusal fonksiyonlar ile dereceleri en az 2'ye eşit olan integre edilmiş Legendre polinomları kullanılmıştır. 3.1. bölümde bir kaba ağdan bir ince ağ elde etmek için izlenecek yol verilmiştir. Bölüm 3.2 ve 3.3'te oluşan bu yeni ince ağ üzerinde Galerkin yöntemi ile yaklaşık çözüm elde edilmiş ve bu yaklaşık çözüme Sloan iterasyonu uygulanmıştır. Bölüm 3.4 ve 3.5'te kaba ağ ile ince ağ arasında oluşabilecek dört farklı ağ üzerine yaklaşık çözümlerin  $L^2$ -izdüşümleri hesaplanmış ve bu izdüşümlerin kullanıldığı (3.4.1) ile verilen optimizasyon problemi ile en uygun inceltme seçimi yapılmıştır. Elde edilen hata değerlerine bağlı olarak bu işlemler tekrarlanabilir veya ard arda yapılan inceltmeler sonucunda elde edilen ağlara ve hatalara bağlı olarak oluşturulan farklı ağlar üzerinde yaklaşık çözümler incelenebilir.

**Anahtar Kelimeler:** İntegre edilmiş Legendre polinomları, ikinci tip Fredholm integral denklemler, Galerkin yöntemi, Sloan iterasyonu, uyarlanabilir inceltme.

## ABSTRACT

### NUMERICAL SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS USING ADAPTIVE REFINEMENT METHOD AND ITS APPLICATIONS

Nebiye KORKMAZ

Doctor of Philosophy (Ph.D.)

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

November 2013, 116 pages

In this study adaptive refinement is applied to Galerkin method and to the Sloan iteration applied to approximate solution obtained from this method in order to obtain approximate solutions of Fredholm integral equations of the second kind. The linear functions which are called hat functions and integrated Legendre polynomials are used as base functions for the approximations. In section 3.1 the way which should be followed to obtain a fine mesh from a coarse mesh is given. In section 3.2 and 3.3 approximate solutions are obtained by Galerkin method on this fine mesh and Sloan iteration is applied to this approximate solution. In sections 3.4 and 3.5  $L^2$  projections of approximate solutions on four different meshes which could be formed between coarse mesh and fine mesh are calculated and the most appropriate refinement is chosen by the optimization problem (3.4.1) in which these projections are used. Related to obtained error values these procedure could be repeated or approximate solutions could be examined on different meshes which are formed related to meshes and errors obtained from refinements one after another.

**Key Words:** Integrated Legendre polynomials, Fredholm integral equations of the second kind, Galerkin method, Sloan iteration, adaptive refinement.

## ÖNSÖZ

Doktora eğitimimin her aşamasında yanımda olduğunu hissettiren, bilgi, destek, ilgi ve sabrını hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY'e, yardım ve ilgisinden dolayı Prof. Dr. Mehmet SEZER'e, yardımlarını esirgemeyen ve her zaman destek olan Yrd. Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ'a, YÖK tarafından burslu olarak görevlendirmem esnasında yardımlarını sunan Dr. Veronika PILLWEIN, Dr. Stefan KINDERMANN ve sevgili arkadaşım Dr. Madalina ERASCU'ya, sağladığı burs imkanından dolayı YÖK'e, bu fırsatları değerlendirmemizi destekleyen Eğitim Fakültesi ve üniversite yönetimimize, hayatımın her anında bana güç veren, sevgileri ile beni bir an yalnız bırakmayan çok kıymetli annem, babam, kardeşim ve tüm aileme, bu zorlu süreçte sabırları ve ilgileri ile yanımda olan tüm kıymetli arkadaşlarıma teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xiii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ÖZETLERİ .....</b>	<b>4</b>
2.1. Metrik Uzaylar, Tam Uzaylar ve Tamlaştırma .....	4
2.2. Normlu Lineer Uzaylar ve Banach Uzayları .....	7
2.3. Lineer İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları .....	9
2.4. Ortogonal Polinomlar .....	11
2.5. Legendre Polinomları ve İntegre Edilmiş Legendre Polinomları .....	13
2.6. İntegral Denklemler .....	16
2.7. Kompakt İntegral Operatörleri .....	18
2.7.1. $C(D)$ Üzerinde Kompakt İntegral Operatörler .....	19
2.7.2. Kompakt İntegral Operatörlerin Özellikleri .....	19
2.7.3. $L^2(D)$ Üzerinde Kompakt İntegral Operatörler .....	20
2.8. Projeksiyon Yöntemleri .....	21
2.8.1. Genel Teori .....	21
2.8.2. Galerkin Yöntemi .....	22
2.9. Yinelenmiş İzdüşüm Yöntemleri ve Sloan Yineleme Yöntemi .....	25
2.10. $L^2$ İzdüşümü .....	27
2.11. $hp$ -Uyarlanabilir Sonlu Elemanlar .....	31
2.11.1. $C(D)$ Bir Boyutlu $hp$ Sonlu Elemanlar Yöntemi .....	31
2.11.2. Birinci Boyutta Ağ İnceltmeleri .....	35
2.11.3. Bir Boyutlu Otomatik $hp$ -Uyarlanabilirlik .....	38
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>	<b>39</b>
3.1. Ağ İnceltme .....	39
3.1.1. Kaba Ağ ve İnce Ağ Düğüm Noktaları ve Yaklaşım Polinomlarının Mertebeleri Arasındaki Bağlantılar .....	40
3.1.2. Ağ Aralıklarındaki Yaklaşım Baz Fonksiyonlarının Tanımlanması	41
3.2. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemlerin Uyarlanabilir İnceltme Kullanılarak Galerkin Yöntemi ile Çözümü .....	45
3.3. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemlerin Uyarlanabilir İnceltme Kullanılarak Galerkin Yöntemi ile Çözümüne Sloan İterasyonu Uygulanması .....	48
3.4. Galerkin İzdüşüm Yöntemi için Optimal Ağ Seçimi .....	50
3.4.1. İnce Ağ Galerkin İzdüşüm Yöntemi Çözümünün Kaba Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması .....	53
3.4.2. İnce Ağ Galerkin İzdüşüm Yöntemi Çözümünün Optimal Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hpopt}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması .....	55
3.5. Galerkin İzdüşüm Yöntemine Uygulanan Sloan İterasyonu için Optimal Ağ Seçimi .....	64
3.5.1. İnce Ağ Sloan İterasyon Çözümünün Kaba Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması .....	65
3.5.2. İnce Ağ Sloan İterasyon Çözümünün Optimal Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşü- mü $\Pi_{hpopt}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması .....	67

<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b> .....	73
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR</b> .....	106
<b>KAYNAKLAR</b> .....	108
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	115



## ÇİZELGELER DİZİNİ

4.1. Örnek 4.1 için hata değerleri tablosu . . . . .	73
4.2. Örnek 4.2 için hata değerleri tablosu . . . . .	81
4.3. Örnek 4.3 için hata değerleri tablosu . . . . .	86
4.4. Örnek 4.4 için hata değerleri tablosu . . . . .	91
4.5. Örnek 4.5 için hata değerleri tablosu . . . . .	97

## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Tek elemandan oluşan ağ kullanılması sonucu elde edilen çözüm ve bu elemanın ikiye bölünmesi ile elde edilen iki elemandan oluşan ağ üzerindeki çözüm grafikleri . . . . .	36
3.1. $[-1, 1]$ aralığı üzerinde tanımlanmış şapka fonksiyonları ve 2. derece integre edilmiş Legendre polinomu . . . . .	43
3.2. $[-1, \frac{2}{5}]$ ve $[\frac{2}{5}, 1]$ ağ aralıklarındaki baz fonksiyonları (şapka fonksiyonları ve tanım kümeleri modifiye edilmiş olan 2. ve 3. derece integre edilmiş Legendre polinomları) . . . . .	43
4.1. Örnek 4.1 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	74
4.2. Örnek 4.1 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	74
4.3. Örnek 4.1 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	75
4.4. Örnek 4.1 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	75
4.5. Örnek 4.1 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	76
4.6. Örnek 4.1 için VI. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	76
4.7. Örnek 4.1 için VII. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	77
4.8. Örnek 4.1 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	77
4.9. Örnek 4.1 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	78
4.10. Örnek 4.1 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	78
4.11. Örnek 4.1 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	79
4.12. Örnek 4.1 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	79
4.13. Örnek 4.1 için VI. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	80
4.14. Örnek 4.1 için VII. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	80
4.15. Örnek 4.2 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	81
4.16. Örnek 4.2 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	82
4.17. Örnek 4.2 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	82
4.18. Örnek 4.2 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	83
4.19. Örnek 4.2 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	83
4.20. Örnek 4.2 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	84

4.21. Örnek 4.2 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	84
4.22. Örnek 4.2 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	85
4.23. Örnek 4.2 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	85
4.24. Örnek 4.2 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	86
4.25. Örnek 4.3 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	87
4.26. Örnek 4.3 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	88
4.27. Örnek 4.3 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	88
4.28. Örnek 4.3 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	89
4.29. Örnek 4.3 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	89
4.30. Örnek 4.3 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	90
4.31. Örnek 4.3 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	90
4.32. Örnek 4.3 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	91
4.33. Örnek 4.4 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	92
4.34. Örnek 4.4 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	93
4.35. Örnek 4.4 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	93
4.36. Örnek 4.4 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	94
4.37. Örnek 4.4 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	94
4.38. Örnek 4.4 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	95
4.39. Örnek 4.4 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	95
4.40. Örnek 4.4 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	96
4.41. Örnek 4.4 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	96
4.42. Örnek 4.4 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	97
4.43. Örnek 4.5 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	99
4.44. Örnek 4.5 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	99
4.45. Örnek 4.5 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	100

4.46. Örnek 4.5 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	100
4.47. Örnek 4.5 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	101
4.48. Örnek 4.5 için VI. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	101
4.49. Örnek 4.5 için VII. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	102
4.50. Örnek 4.5 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	102
4.51. Örnek 4.5 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	103
4.52. Örnek 4.5 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	103
4.53. Örnek 4.5 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	104
4.54. Örnek 4.5 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	104
4.55. Örnek 4.5 için VI. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	105
4.56. Örnek 4.5 için VII. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği . . . . .	105

## SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığından $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$B(A)$	$A$ kümesinden $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$L^2_\omega[a,b]$	$\omega$ ağırlık fonksiyonuna göre $[a,b]$ aralığı üzerinde kare integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2[a,b]$	$C[a,b]$ uzayının tamlanışı
$P_n$	$n$ . derece Legendre polinomu
$L_n$	$n$ . derece integre edilmiş Legendre polinomu
$\Pi_{hp}u$	$u$ fonksiyonunun kaba ağ üzerine $L^2$ -izdüşümü
$\Pi_{hp_{opt}}u$	$u$ fonksiyonunun optimal ağ üzerine $L^2$ -izdüşümü
$N_{hp}$	Kaba ağ üzerindeki yaklaşım fonksiyonları sayısı
$N_{hp_{opt}}$	Optimal ağ üzerindeki yaklaşım fonksiyonları sayısı
$G_{max}$	Galerkin yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümün maksimum hata değeri
$G_{L^2}$	Galerkin yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümün $L^2$ -normuna göre hata değeri
$S_{max}$	Sloan iterasyonu ile elde edilen yaklaşık çözümün maksimum hata değeri
$S_{L^2}$	Sloan iterasyonu ile elde edilen yaklaşık çözümün $L^2$ -normuna göre hata değeri

# 1. GİRİŞ

Bu çalışma, ikinci tip Fredholm integral denklemlerini çözmek için kullanılan Galerkin izdüşüm yöntemini ve bu yöntem ile elde edilen çözüme uygulanan Sloan iterasyonunun uyarlanabilir inceltme ile birlikte kullanımını incelemeyi ve elde edilen verileri değerlendirmeyi hedef almıştır.

İntegral denklemler teorisinin matematiğin birçok farklı alanı ile yakın temas noktaları mevcuttur. Bunların başında diferansiyel denklemler ve operatör teorisi gelir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler alanlarında pek çok problem integral denklem olarak yeniden biçimlendirilebilir. Matematiksel fizikteki birçok problem integral denklemler şeklinde ifade edilebilir. Uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin integral denklemlerin rol oynamadığı neredeyse hiçbir alanının olmadığını söylemek mümkündür (Hochstadt, 1973). İntegral denklemler üzerine yapılan çok sayıda çalışmada bu tür denklemlerin yaygın kullanıldığı alanlar belirtilmiştir. İkinci tip Fredholm integral denklemlerin en kullanışlı integral denklem türlerinden biri olduğunu belirten S. Rahbar ve E. Hashemizadeh, integral denklemlerin uygulamalı matematik, fizik ve mühendisliğin farklı alanlarında oldukça kullanışlı olduğunu, özellikle mekanik, jeofizik, elektrik ve manyetizma, gazların kinetik teorisi, biyolojide kalıtsal olaylar, kuantum mekaniği, matematiksel ekonomi ve kuyruk teorisinde yaygın olarak kullanıldığını vurgulamışlar ve integral denklemlerin uygulanabilir olduğu bazı alanları çeşitli kaynaklar ile sıralamışlardır (Rahbar ve Hashemizadeh, 2008): Otomatik kontrol teorisi, ağ teorisi, nükleer reaktörlerin dinamikleri (Pachpatte, 1998); ses bilim, optik ve lazer teorisi, potansiyel teorisi, ışınım teorisi, kardiyoloji, akışkanlar mekaniği, istatistik (Baker, 1977; Muthuvalu ve Sulaiman, 2008); sürekli ortam mekaniği, yineleme teorisi, radyasyon, optimizasyon, optimal kontrol sistemleri, iletişim teorisi, matematiksel iktisat, popülasyon genetiği, tıp, ışınım dengesi, astrofizik ve reaktör teorisi parçacık ulaşım sorunları, kararlı durum ısı iletimi, kırılma mekaniği, ışınım ısı transferi problemleri (Wang, 2006; Muthuvalu ve Sulaiman, 2011).

İntegral denklemlerin matematik tarihinde dikkate değer bir öneme sahip olduğunu belirten B.G. Pachpatte, integral denklemler teorisinin başlangıcının mekanik bir problemden yola çıkarak 1812’de bir integral denklem bulan N.H. Abel’e kadar takip edilebilir olduğunu belirtmiştir (Pachpatte, 1998). Pachpatte, matematiksel literatürün iyi bir

anlaşma sağladığını ve bu konudaki mükemmel bir hesabının Burton (Burton, 1983), Miller (Miller, 1971), Corduneanu (Corduneanu, 1973; Corduneanu, 1977; Corduneanu, 1991), Gripenberg et al. (Gripenberg, Londen ve Staffans, 1990), Krasnoselskii (Krasnoselskii, 1964) ve Tricomi (Tricomi, 1957) tarafından yazılan monografilerde (tek bir konuyu inceleyen yazı) bulunabileceğini belirtmiştir (Pachpatte, 1998). Fakat M. Bocher, ilk olarak B. Reymond'un 1888 yılında bir çalışmasında integral denklem kavramına yer verdiğini belirtmiştir (Bocher, 1913). Abel 1823 yılında mekanik problemlerin genel formülü olan

$$f(x) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} dy, \quad f(0) = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

integral denklemini formüle edip 1826'da çözümünü vermiştir. İntegral sınırlarından birinin değişken olduğu lineer integral denklemlere ilişkin çalışmalar 1860-1940 yılları arasında yaşamış Volterra tarafından yayınlanmıştır (Aksoy, 1998; Ekici, 2010). Fredholm'un

$$x(s) - \int_0^1 K(s,t)x(t) dt = y(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

ve

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)x(t) dt = y(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

denklemlerinin çözümlerinin varlıklarını ve çeşitlerini açıkladığı makalesi (Fredholm, 1903) Acta Mathematica'da yayınlanmıştır (Lonseth, 1954).

Asadzadeh ve Eriksson, ikinci tip Fredholm integral denklemlerin uyarlanabilir sonlu eleman yöntemleri ile çözümleri üzerine yaptıkları çalışmada özel olarak zayıf çekirdekli ikinci tip Fredholm integral denklemleri temel almışlar ve hesapların somutluğu adına özel olarak Neumann sınır koşulları ile verilen Laplace denklemi için tek katmanlı potansiyel probleminden yola çıkarak hata değerlerini ağırlıklı  $L_1$ -normuna göre incelemişlerdir. Ayrıca sonlu eleman yöntemlerinin integral denklemleri çözmek için pek çok kişi tarafından çalışıldığını belirtmişler ve bunlarla ilgili referansları (Atkinson, 1976), (Ikebe, 1972), (Nedelec, 1977), (Sloan, 1978) ve (Wendland, 1985) olarak sıralamışlardır. İntegral denklemler için uyarlanabilir sonlu eleman yöntemleri üzerine o dönemde yapılan başlıca çalışmalar olarak (Graham, Shaw ve Spence, 1989), (Rank, 1986), (Wendland, 1985) ve (Yu, 1987) verilmiştir (Asadzadeh ve Eriksson, 1994).

Babuska eliptik kısmi diferansiyel denklemler için basit fakat karakteristik bir model problem üzerine kısıtlama yaptığını belirttiği ve sonlu eleman çözümü hatası için enerji

normunu kullandığı çalışmasında (Babuska, 1988) sonlu eleman yönteminin  $p$  ve  $h - p$  versiyonlarındaki ilerlemeler üzerinde durmuştur. Bu metinde sonlu eleman yönteminin üç versiyonunu temel olarak şöyle sıralamıştır:

- (i)  $h$ -versiyonu : Yaklaşım polinomlarının derecelerinin sabit olduğu (genelde  $p = 1, 2$ ), ağ aralıklarının inceltildiği durum
- (ii)  $p$ -versiyonu : Ağ aralık uzunluklarının sabit tutulduğu ve yaklaşım polinomlarının derecelerinin arttırıldığı durum.
- (iii)  $h - p$  versiyonu : Aynı anda hem ağ aralıklarının inceltildiği hem de yaklaşım polinomlarının derecelerinin arttırıldığı durum.

Sonlu eleman yönteminin  $h$ -versiyonu standart bir yöntem olduğu belirtilirken  $p$  ve  $h - p$  versiyonlarının ise daha sonra geliştiği belirtilmiştir. Sonlu eleman yönteminin  $p$ -versiyonu ile ilgili ilk teorik yayın (Babuska, Szabo ve Katz, 1981) ve  $h - p$  versiyonu ile ilgili yayın (Babuska ve Dorr, 1981) 1981 yılında ortaya çıkmış, çeşitli sonuçlar daha sonra elde edilmiştir (Babuska, 1988).

Uyarlanabilir sonlu eleman yöntemlerinin kullanıldığı durumlara özellikle kısmi diferansiyel denklemler çözümlerinde sıkça rastlanır; ancak literatürde farklı problem türlerinde, farklı çalışma alanlarında sıkça ele alındığı görülmektedir. Bu çalışmalara verilebilecek pek çok örnekten bazıları aşağıda verilmiştir:

Hidrodinamik (Berger ve Coella, 1989), optimal tasarım (Schiermeier ve Szabo, 1987), eliptik stokastik denklemler (Larsen, 1986), parabolik problemler (Eriksson ve Johnson, 1991), parabolik sistemler (Moore, 1995), eliptik problemler (Demkowicz, Rachowicz ve Devloo, 2002), eliptik kısmi diferansiyel denklemler (Houston ve Suli, 2005), eliptik sınır değer problemleri (Hoppe ve Kieweg, 2010), (He ve Zhou, 2011), elektrostatik (Pardo et.al., 2006), elektromagnetik problemler (Stephan, Maischak ve Leydecker, 2007), biyolojik akışlar (Botti et.al., 2010), Laplace özdeğer problemi (Hoppe, Wu ve Zhang, 2010).



## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

Yaklaşım teorisinin temel amaçlarından biri gerçek çözüme olabildiğince yakın çözümlere ulaşmak, başka bir deyişle gerçek çözüm ile yaklaşık çözümler arasındaki hatayı minimize etmektir. Bazı çalışmalarda bu minimizasyon için, bu tezde olduğu gibi optimizasyon problemlerinden yararlanılmaktadır. Bu hesaplamalar sırasında metrik fonksiyonu, norm fonksiyonu, iç çarpım fonksiyonu, tam uzaylar gibi temel kavramlar ile sıkça karşılaşılmaktadır. Bu kavramlar ile ilgili temel tanım ve teoremler fonksiyonel analiz ve metrik uzaylar üzerine yazılmış birçok eserde bulunabilir (örneğin Güney, 2003; Kreyszig, 1989).

### 2.1. Metrik Uzaylar, Tam Uzaylar ve Tamlaştırma

**Tanım 2.1.1**  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar ise  $d$  fonksiyonuna  $X$  kümesi üzerinde bir metrik fonksiyon (ya da metrik) ve  $(X, d)$  ikilisine bir metrik uzay denir:

- (i)  $x, y \in X \Rightarrow d(x, y) \geq 0$
- (ii)  $x, y \in X \Rightarrow (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
- (iii)  $x, y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$
- (iv)  $x, y, z \in X \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Örnek 2.1**  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  fonksiyonu gerçel sayılar kümesi  $\mathbb{R}$  üzerinde bir metriktir ve bu metriğe mutlak değer metriği denir.

**Örnek 2.2**  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  fonksiyonu Öklid (Euclid) düzlemi  $\mathbb{R}^2$  üzerinde bir metriktir ve bu metriğe Öklid metriği denir.

Daha genel olarak  $n$ -boyutlu Öklid metriği  $\mathbb{R}^n$  kümesi üzerinde şöyle tanımlanır:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (2.1.1)$$

**Örnek 2.3**  $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$  olmak üzere

$$d : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \quad (2.1.2)$$

fonksiyonu  $C[a, b]$  kümesi üzerinde bir metriktir.

**Örnek 2.4**  $B(A) = \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı}\}$  olmak üzere

$$d : B(A) \times B(A) \rightarrow \mathbb{R}, d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

fonksiyonu  $B(A)$  kümesi üzerinde bir metriktir.

**Tanım 2.1.2**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $x_0 \in X$  ve  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \mid d(x, x_0) < \varepsilon, x \in X\}$$

kümesine  $x_0$  noktasının  $\varepsilon$  yarıçaplı komşuluğu (veya kısaca  $\varepsilon$ -komşuluğu) denir.

$B(x_0, \varepsilon)$   $\varepsilon$ -komşuluğu,  $x_0$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı açık yuvar olarak da adlandırılır.

**Tanım 2.1.3**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $M \subset X$  olmak üzere

$$M \text{ açık küme} \Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists \varepsilon > 0)(B(x, \varepsilon) \subset M)$$

$$M \text{ kapalı küme} \Leftrightarrow M^C = X \setminus M \text{ açık küme}$$

**Tanım 2.1.4**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $x_0 \in U$  ve  $U \subset X$  olmak üzere

$$U, x_0 \text{ 'ın komşuluğu} \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(B(x_0, \varepsilon) \subset U)$$

$x_0$ 'ın komşuluklar ailesi  $\Leftrightarrow \mathcal{N}(x_0) = \{U \mid (\exists \varepsilon > 0)(B(x_0, \varepsilon) \subset U)\}$

**Tanım 2.1.5**  $(X, d)$  ve  $(Y, \tilde{d})$  metrik uzaylar,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olmak üzere

$$f, x_0 \text{ 'da sürekli} :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

$$f, X \text{ 'de sürekli} :\Leftrightarrow (\forall x \in X)(f, x \text{ 'de sürekli})$$

**Tanım 2.1.6**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $M \subset X$  ve  $x_0 \in X$  olmak üzere

$$x_0, M \text{ 'nin yığılma noktası} :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)((B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap M \neq \emptyset)$$

$$M \text{ kümesinin türev kümesi} :\Leftrightarrow D(M) = \{x \mid (\forall \varepsilon > 0)((B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset)\}$$

**Tanım 2.1.7**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $M \subset X$  olmak üzere  $M \cup D(M)$  kümesine  $M$  kümesininin kapanışı denir ve  $\overline{M}$  ile gösterilir.

$$\overline{M} = M \cup D(M)$$

**Tanım 2.1.8**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $M \subset X$  olmak üzere

$$M, X \text{ 'de yoğun} :\Leftrightarrow \overline{M} = X$$

**Tanım 2.1.9**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi ve  $x \in X$  olmak üzere

$$x_n \rightarrow x :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$$

$$(x_n), ((X, d) \text{ 'de}) \text{ yakınsak} :\Leftrightarrow (\exists x \in X)(x_n \rightarrow x)$$

**Tanım 2.1.10**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $(x_n)$ , bu uzayda bir dizi olmak üzere

$$(x_n), \text{ Cauchy dizisi} :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

**Tanım 2.1.11** Bir  $(X, d)$  metrik uzayındaki tüm Cauchy dizileri yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

$$(X, d) \text{ tam} :\Leftrightarrow [((x_n), (X, d) \text{ 'de Cauchy dizisi}) \Rightarrow (\exists x \in X)(x_n \rightarrow x)] \quad (2.1.3)$$

**Örnek 2.5**  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  ve  $\mathcal{C}[a, b]$  uzayları tam uzaydırlar.

**Örnek 2.6**  $d(x, y) = |x - y|$  kuralı ile verilen  $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\mathbb{Q}$  kümesi üzerinde bir metriktir. Ancak  $(\mathbb{Q}, d)$  metrik uzayı tam uzay değildir.

**Örnek 2.7**  $X = \{p \mid p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ polinom}\}$  olmak üzere  $d(p, q) = \max_{x \in [a, b]} |p(x) - q(x)|$  kuralı ile verilen  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $X$  kümesi üzerinde bir metriktir. Ancak  $(X, d)$  metrik uzayı tam uzay değildir.

**Örnek 2.8**  $\mathcal{C}[0, 1] = \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$  olmak üzere

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad (2.1.4)$$

kuralı ile verilen  $d : \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\mathcal{C}[0, 1]$  kümesi üzerinde bir metriktir. Ancak  $(\mathcal{C}[0, 1], d)$  metrik uzayı tam uzay değildir.

Yukarıda verilen tam olmayan metrik uzaylar bir tam uzaya genişletilebilir ve buna tam olmayan uzayın tamlanışı denir.

**Tanım 2.1.12**  $(X, d)$  ve  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  metrik uzaylar ve  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  fonksiyon olmak üzere,

(i)  $f$ , izometri  $\Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x, y))$

(ii)  $X$  ile  $\tilde{X}$  izometrik  $\Leftrightarrow (\exists f : X \rightarrow \tilde{X}$  örten, izometri)

### **Teorem 2.1.1**

$(\forall (X, d) \text{ metrik uzay})(\exists (\hat{X}, \hat{d}) \text{ tam metrik uzay})(\exists W \subset \hat{X}; W, \hat{X}'\text{de yoğun})(W \text{ ile } X \text{ izometrik})$

## **2.2. Normlu Linear Uzaylar ve Banach Uzayları**

**Tanım 2.2.1**  $X := [(X, +), \bullet, (F, \oplus, \odot)]$ ,  $(F, \oplus, \odot)$  cismi üzerinde lineer uzay  $\Leftrightarrow$

- (i)  $(F, \oplus, \odot)$  cisim
- (ii)  $(X, +)$  deęişmeli grup
- (iii)  $\bullet : F \times X \rightarrow X$
- (iv)  $(\forall \alpha \in F)(\forall x, y \in X)(\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y)$
- (v)  $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall x \in X)((\alpha \oplus \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x)$
- (vi)  $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall x \in X)((\alpha \odot \beta) \bullet x = \alpha \bullet (\beta \bullet x))$
- (vii)  $(\forall x \in X)(1 \bullet x = x)$

**Tanım 2.2.2**  $X, F$  cisimi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşığıdaki özellikleri sağlarsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  lineer uzayı üzerinde bir norm fonksiyonu ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de bir normlu lineer uzay denir:

- (i)  $x \in X \Rightarrow \|x\| \geq 0$
- (ii)  $x \in X \Rightarrow (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- (iii)  $(\alpha \in F)(x \in X) \Rightarrow \|\alpha \bullet x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- (iv)  $x, y \in X \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Önerme 2.2.1**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzay olmak üzere  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$  kuralı ile verilen  $d$  fonksiyonu  $X$  üzerinde bir metrik tanımlar.

Norm fonksiyonu yardımı ile elde edilen metriklere normun ürettiği metrik denir. Her normlu lineer uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır.

**Tanım 2.2.3**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu lineer uzay olmak üzere  $X$  üzerinde tanımlanan normun ürettiği metriğe göre  $(X, d)$  uzayı tam uzay ise  $(X, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzayına Banach uzayı denir.

**Örnek 2.9**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  uzayları  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  olmak üzere  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  normuna göre Banach uzaydırlar. Aslında bu uzaylar üzerlerinde tanımlanan normun ürettiği metrik, 2.2 örneğindeki (2.1.1) metriğidir ve bu uzaylar bu metriğe göre tam uzaylardır.

**Örnek 2.10**  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  olmak üzere  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$  normuna göre  $\mathcal{C}[a, b]$  Banach uzayıdır. Bu uzay üzerinde tanımlanan normun ürettiği metrik, 2.3 örneğindeki (2.1.2) metriğidir ve bu uzay bu metriğe göre tam uzaydır.

**Örnek 2.11**  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$  olmak üzere  $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$  normuna göre  $\mathcal{C}[0, 1]$  Banach uzayı değildir. Bu uzay üzerinde tanımlanan normun ürettiği metrik, 2.8 örneğindeki (2.1.4) metriğidir ve bu uzay bu metriğe göre tam uzay değildir.

**Örnek 2.12**  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  olmak üzere

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.2.1)$$

kuralı ile verilen  $\|\cdot\| : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\mathcal{C}[a, b]$  üzerinde bir normdur. Fakat bu uzay tam uzay değildir. Ancak teorem 2.1.1 'de de belirtildiği gibi bu uzay tamlanabilir, ve tamlanışı  $L^2[a, b]$  ile gösterilir. Daha genel olarak herhangi sabit bir  $p \geq 1$  gerçel sayısı için  $L^p[a, b]$  Banach uzayı,  $\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$  normuna göre  $\mathcal{C}[a, b]$  uzayının tamlanışıdır.

**Teorem 2.2.1** Her  $(X, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzayı için en az bir  $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{X}})$  Banach uzayı ve  $X$  uzayından  $\widehat{X}$  uzayında yoğun bir  $W$  alt kümesine tanımlı örten bir izometri vardır.  $\widehat{X}$  uzayı izometrilere dışında tektir.

Yukarıdaki teoremdeki  $\widehat{X}$  uzayı  $X$  uzayının tamlanışıdır.

### 2.3. Lineer İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

**Tanım 2.3.1**  $X, \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı bir lineer uzay olmak üzere  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  fonksiyonuna  $X$  lineer uzayı üzerinde iç çarpım fonksiyonu ve  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ikilisine de lineer iç çarpım uzayı denir:

(i)  $x \in X \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$

$$(ii) x \in X \Rightarrow (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

$$(iii) (\alpha, \beta \in \mathbb{R})(x, y, z \in X) \Rightarrow \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

**Önerme 2.3.1**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bir iç çarpım uzayı olmak üzere

(i)  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  kuralı ile verilen  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $X$  üzerinde bir norm tanımlar.

(ii)  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  kuralı ile verilen  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bir metrik tanımlar.

İç çarpım fonksiyonu yardımı ile elde edilen norma iç çarpımın ürettiği norm (ya da iç çarpım normu) denir. İç çarpım fonksiyonu yardımı ile elde edilen metriğe iç çarpımın ürettiği metrik denir.

**Tanım 2.3.2**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bir lineer iç çarpım uzayı olmak üzere  $X$  üzerindeki iç çarpım fonksiyonu yardımı ile elde edilen metriğe göre  $(X, d)$  uzayı tam uzay ise  $X$  iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Her lineer iç çarpım uzayı normlu lineer uzay ve her Hilbert uzayı da Banach uzayıdır.

**Örnek 2.13**  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$  iç çarpım fonksiyonuna göre Banach uzayıdır.

**Örnek 2.14**  $\mathbb{C}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$  olmak üzere  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \overline{y_i}$  iç çarpım fonksiyonuna göre Banach uzayıdır.

**Örnek 2.15**  $\mathcal{C}[a, b]$  uzayı bir iç çarpım uzayı değildir, dolayısı ile bir Hilbert uzayı da değildir.

**Örnek 2.16**  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  olmak üzere 2.12 örneğindeki (2.2.1) normu yine bu uzay üzerinde tanımlı olan  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$  iç çarpımı ile elde edilebilir. Bu iç çarpım yardımı ile tanımlanan metrik uzayın tamlanışı gerçel  $L^2[a, b]$  uzayıdır. Eğer  $[a, b]$  üzerinde tanımlı kompleks değerli tüm sürekli fonksiyonların vektör uzayını ele alırsak bu uzay üzerinde tanımlanan iç çarpım  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$  şeklinde tanımlanır ve buna karşılık gelen metrik uzayın tamlanışı kompleks  $L^2[a, b]$  uzayıdır.

**Tanım 2.3.3**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  ve  $(\tilde{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{X}})$  aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer iç çarpım uzayı olmak üzere bu uzaylar arasında tanımlanan bir izomorfizm, iç çarpımı koruyan biyektif bir  $\mathcal{T} : X \rightarrow \tilde{X}$  doğrusal operatördür. Burada iç çarpımın korunması, her  $x, y \in X$  için  $\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y \rangle_{\tilde{X}} = \langle x, y \rangle_X$  olması demektir.  $X$  uzayı  $\tilde{X}$  uzayına izomorftur denir. Ayrıca bu uzaylara izomorfik lineer iç çarpım uzayları denir.

**Teorem 2.3.1** Her  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  lineer iç çarpım uzayı için en az bir  $\hat{X}$  Hilbert uzayı ve  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uzayından  $\hat{X}$  uzayında yoğun bir  $W$  altkümesine tanımlı örten bir izomorfizm vardır.  $\hat{X}$  uzayı izomorfizmleri dışında tektir.

Yukarıdaki teoremden bahsedilen  $\hat{X}$  uzayı  $X$  uzayının tamlanışıdır.

**Tanım 2.3.4**  $X$  bir lineer iç çarpım uzayı ve  $x, y \in X$  olmak üzere  $\langle x, y \rangle = 0$  ise  $x$  ve  $y$  birbirine ortogondur (ya da diktir) denir ve bu durum  $x \perp y$  ile temsil edilir.

## 2.4. Ortogonal Polinomlar

**Tanım 2.4.1**  $n = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere her  $n$  için derecesi bu  $n$  değerine eşit olan polinomların  $\{\varphi_n(x)\}$  kümesine basit küme denir (Rainville, 1960).

**Tanım 2.4.2**  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  olmak üzere  $I = (a, b)$  aralığı olsun ( $I$  kapalı veya yarı-açık aralık olarak da tanımlanabilir).  $\omega(a, b)$  üzerinde  $\omega(x) > 0$  özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,  $f, g \in \mathbb{C}[a, b]$  (veya gerçel değerli fonksiyonların doğrusal uzayı) olmak üzere  $\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx$  kuralı ile verilen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\mathbb{C}[a, b]$  üzerinde bir iç çarpım tanımlar ve  $\omega(x)$  fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Bir  $I$  aralığı üzerinde kare integrallenebilir fonksiyonların kümesi

$$L_\omega^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_I f^2(x)\omega(x) dx < \infty \right\}$$

şeklinde temsil edilir (Pillwein, 2011).



$L^2_\omega(I)$  bir Hilbert uzayıdır (Işık, 2012).

**Tanım 2.4.3**  $\{\varphi_n(x)\}$  gerçel değerli polinomlardan oluşan bir basit küme olmak üzere öyle bir  $(a, b)$  aralığı ve aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir  $\omega$  fonksiyonu varsa,  $\varphi_n(x)$  polinomları  $(a, b)$  aralığı üzerinde  $\omega$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler denir:

$$(i) \quad x \in (a, b) \Rightarrow \omega(x) > 0$$

$$(ii) \quad m \neq n \Rightarrow \int_a^b \omega(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

(Rainville, 1960).

**Sonuç 2.4.1**  $\omega(x) > 0$  ve  $\varphi_n(x) \in \mathbb{R}$  olduğundan dolayı  $\int_a^b \omega(x) \varphi_n^2(x) dx \neq 0$  olur (Rainville, 1960).

**Teorem 2.4.1**  $\varphi_n(x)$  gerçel polinomları  $(a, b)$  aralığı üzerinde basit bir küme ve  $(a, b)$  aralığı üzerinde  $\omega(x) > 0$  ise  $\varphi_n(x)$  gerçel polinomlarının  $\omega$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmaları için

$$\int_a^b \omega(x) x^k \varphi_n(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

olması gerekli ve yeterlidir (Rainville, 1960).

**Sonuç 2.4.2**  $\varphi_n(x)$  polinomları  $(a, b)$  aralığı üzerinde  $\omega$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmak üzere  $\deg(P(x)) < n$  koşulunu sağlayan tüm polinomlar için

$$\int_a^b \omega(x) \varphi_n(x) P(x) dx = 0$$

olur (Rainville, 1960).

**Sonuç 2.4.3**  $\int_a^b \omega(x) \varphi_n^2(x) dx \neq 0$  olduğundan dolayı  $\int_a^b \omega(x) x^n \varphi_n(x) dx \neq 0$  olur (Rainville, 1960).

## 2.5. Legendre Polinomları ve İntegre Edilmiş Legendre Polinomları

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \quad (2.5.1)$$

kuralı ile verilen  $F$  fonksiyonu  $t$  değişkenine bağlı bir kuvvet serisi açılımı (yakınsak olması şart değil) biçiminde bir fonksiyon olsun. Genel olarak (2.5.1) ifadesinde,  $t^n$  teriminin katsayısı  $x$ 'in bir fonksiyonudur. Bu durumda,  $F(x, t)$  fonksiyonunun (2.5.1) açılımı  $f_n(x)$  kümesini üretir ve “ $F(x, t)$  fonksiyonu  $f_n(x)$  kümesi için bir üreteç fonksiyonudur” denir. Bu tanım aşağıdaki biçimde biraz daha genişletilebilir:

$n = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere  $c_n$ ,  $x$  ve  $t$ 'den bağımsız belli bir dizi olsun.

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x)t^n \quad (2.5.2)$$

ise “ $G(x, t)$  fonksiyonu  $g_n(x)$  kümesi için bir üreteç fonksiyonudur” denir. (2.5.2) ifadesindeki  $c_n$  ve  $g_n(x)$  değerleri belli ise ve  $G(x, t)$  toplamı, bir argümana bağlı sonlu sayıdaki özel fonksiyonların çarpımlarının sonlu toplamı olarak belirlenebilirse “ $G(x, t)$  üreteç fonksiyonu bilinmektedir” denir.

Üreteç fonksiyonları polinom kümeleri ile ilgili çalışmalarda büyük bir rol oynar. Legendre polinomlarını, üreteç fonksiyonları ile  $(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$  şeklinde tanımlanabilir (Rainville, 1960). Ancak Legendre polinomlarını tanımlamanın farklı ve daha basit yolları da mevcuttur. Bunlardan biri sıkça kullanılan Rodrigues formülüdür.

**Tanım 2.5.1** (*Rodrigues Formülü*)  $n \geq 0$  ve  $x \in [-1, 1]$  olmak üzere Legendre polinomları

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.5.3)$$

ile tanımlanır (Lebedev, 1965).

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $P_n(x)$  polinomunu derecesi  $n$  olduğundan Legendre polinomları basit bir dizi meydana getirir. İlk birkaç Legendre polinomu aşağıda ifade edilmiştir:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_4(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

$n$ . derece Legendre polinomunun genel formülü,  $(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} (x^{2n-2k})$  binom açılımının (2.5.3) ifadesinde kullanılması ile

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} (x^{n-2k}) \quad (2.5.4)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $\lfloor \nu \rfloor$  ifadesi  $\nu$  sayısından küçük ya da eşit olan en büyük tam sayıyı temsil etmektedir (Lebedev, 1965).

**Teorem 2.5.1**  $[-1, 1]$  aralığı üzerinde Legendre polinomları  $\omega(x) = 1$  ağırlık fonksiyonuna göre ortgonaldirler, başka bir deyişle, sıfırdan büyük veya eşit tüm  $m \neq n$  tamsayı değerleri için

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (2.5.5)$$

olur (Lebedev, 1965).

### Teorem 2.5.2

Legendre polinomları tüm  $n \geq 0$  tamsayıları için  $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$  eşitliğini sağlar (Lebedev, 1965).

**Teorem 2.5.3**  $n \geq 0$  ve  $x \in [-1, 1]$  değerleri için Legendre polinomları aşağıdaki özellikleri sağlarlar: Ayrıca tüm  $n \geq 1$  değerleri için

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

özelliği de sağlanır (Lebedev, 1965).

- (i)  $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$
- (ii)  $(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)$
- (iii)  $nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$
- (iv)  $(1-x^2)P'_n(x) = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]$

**Teorem 2.5.4** Legendre polinomları,  $[(1-x^2)u']' + n(n+1)u = 0$  diferansiyel denklemini sağlar (Lebedev, 1965). Bu diferansiyel denklem bazı kaynaklarda

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$$

biçiminde de ifade edilmektedir (Pillwein, 2011).

**Tanım 2.5.2**  $n \geq 2$  ve  $x \in [-1, 1]$  değerleri için  $n$ . derece integre edilmiş Legendre polinomları

$$L_n(x) = \int_{-1}^x P_{n-1}(s) ds$$

biçiminde tanımlanır.  $n = 0, 1$  için  $L_0(x) = -1, L_1(x) = x$  olarak tanımlıdır (Pillwein, 2008).

İlk birkaç integre edilmiş Legendre polinomu aşağıdaki ifade edilmiştir:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1), L_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)x(x+1), L_4(x) = \frac{1}{8}(x-1)(x+1)(5x^2-1)$$

**Teorem 2.5.5** İntegre edilmiş Legendre polinomları  $L_0(x) = -1, L_1(x) = x$  olmak üzere  $n \geq 2$  değerleri için

$$L_n(x) = \frac{2n-3}{n}xL_{n-1}(x) - \frac{n-3}{n}L_{n-2}(x) \quad (2.5.6)$$

yineleme bağıntısını sağlar (Pillwein, 2008).

**Teorem 2.5.6** İntegre edilmiş Legendre polinomları  $n \geq 1$  değerleri için standart Legendre polinomları cinsinden

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] \quad (2.5.7)$$

bağıntısı ile ifade edilirler (Pillwein, 2008).

**Sonuç 2.5.1**  $|i-j| \notin \{0, 2\} \Rightarrow \langle L_i, L_j \rangle_{L^2[-1,1]} = 0$

## 2.6. İntegral Denklemler

İntegral denklem tanımının ve temel integral denklem türlerinin verildiği bu bölümde geçen bilgiler Kanwal (Kanwal, 1971) ve Atkinson'ın (Atkinson, 1997) kitaplarından alınmıştır.

Bilinmeyen fonksiyonunun bir ya da daha fazla integral işaretinin altında bulunduğu bir denkleme bir integral denklem denir. Doğal olarak böyle bir denklemde farklı terimler de yer alabilir. Örneğin  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $g(s)$  bilinmeyen fonksiyon ve tüm diğer fonksiyonlar biliniyor olmak üzere

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t) dt \quad (2.6.1)$$

$$g(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)f(t) dt \quad (2.6.2)$$

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)[g(t)]^2 dt \quad (2.6.3)$$

integral denklemlerdir. Bu fonksiyonlar gerçel  $s$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı karmaşık değerli fonksiyonlar da olabilirler.

Bir integral denklem bilinmeyen fonksiyonun yalnızca bir değil, daha fazla değişkene bağlı olduğu denklem olarak da ele alınabilir. Örneğin,  $s$  ve  $t$   $n$ -boyutlu vektörler ve  $\Omega$   $n$ - boyutlu bir uzayın bir bölgesi olmak üzere

$$g(s) = f(s) + \int_{\Omega} K(s, t)f(t) dt \quad (2.6.4)$$

denklemini gibi.

Bir integral denklem bilinmeyen fonksiyona göre doğrusal (lineer) ise bu tip integral denklemlere doğrusal integral denklem denir. (2.6.1) ve (2.6.2) denklemleri doğrusal integral denklemlerdir. Ancak (2.6.3) doğrusal bir integral denklem değildir.  $L$  uygun integral operatörü olmak üzere (2.6.1) ve (2.6.2) denklemleri

$$L[g(s)] = f(s) \quad (2.6.5)$$

şeklinde yazılabilirler. Bu durumda  $c_1$  ve  $c_2$  sabit değerler olmak üzere

$$L[c_1g_1(s) + c_2g_2(s)] = c_1L[g_1(s)] + c_2L[g_2(s)] \quad (2.6.6)$$

eşitliği sağlanır.

Doğrusal integral denklemlerin farklı türlerini ayıran sınıflandırmalar mevcuttur. En sık karşılaşılan doğrusal integral denklem çeşitleri aşağıda sıralanmıştır:

Kanwal (Kanwal, 1971) temel doğrusal integral denklem tiplerini şöyle sıralamıştır:

(i) Birinci tip Volterra doğrusal integral denklemi

$$f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)g(t) dt = 0 \quad (2.6.7)$$

(ii) İkinci tip Volterra doğrusal integral denklemi

$$f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)g(t) dt = g(s) \quad (2.6.8)$$

(iii) İkinci tip homojen Volterra doğrusal integral denklemi

$$g(s) = \lambda \int_a^s K(s, t)g(t) dt \quad (2.6.9)$$

(iv) Birinci tip Fredholm doğrusal integral denklemi

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)g(t) dt = 0 \quad (2.6.10)$$

(v) İkinci tip Fredholm doğrusal integral denklemi

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)g(t) dt = g(s) \quad (2.6.11)$$

(vi) İkinci tip homojen Volterra doğrusal integral denklemi

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)g(t) dt \quad (2.6.12)$$

Atkinson (Atkinson, 1997) ise  $D \subset \mathbb{R}^m (m \geq 1)$  kapalı sınırlı bir küme olmak üzere integral denklem türlerinden bazılarını aşağıda belirtilen biçimde vermiştir:

(i) Birinci tip doğrusal Volterra integral denklemi

$$\int_a^t K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad t \geq a \quad (2.6.13)$$

(ii) Birinci tip doğrusal Fredholm integral denklemi

$$\int_D K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad t \in D \quad (2.6.14)$$

(iii) İkinci tip doğrusal Fredholm integral denklemi

$$\lambda x(t) - \int_D K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad t \in D, \lambda \neq 0 \quad (2.6.15)$$

## 2.7. Kompakt İntegral Operatörleri

İntegral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için sıkça kullanılan yöntemlerden ikisi kolakasyon (sıralama; collacation) ve Galerkin yöntemleridir. Tez için yapılan kaynak taramalarında Galerkin yöntemi için Atkinson (Atkinson, 1997)'dan yararlanılmıştır. Atkinson (Atkinson, 1997) eserinde bu yöntemlerden bahsederken kompakt integral operatörlerini kullanmıştır. Bu nedenle Galerkin yöntemi tanıtılmadan önce Atkinson'ın bu operatörler ile ilgili verdiği bazı temel bilgiler bu bölümde üç alt bölüme ayrılarak verilmiştir.  $X$  sonlu boyutlu bir vektör uzay ve  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  doğrusal bir operatör olduğu durumlarda  $\mathcal{A}x = y$  denklemi iyi gelişmiş bir çözülebilirlik teorisine sahiptir. Bu sonuçları sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirebilmek için kompakt operatörler tanımlanmıştır.

**Tanım 2.7.1**  $X$  ve  $Y$  normlu vektör uzayları ve  $\mathcal{K} : X \rightarrow Y$  doğrusal bir operatör olmak üzere  $\{\mathcal{K}x \mid \|x\|_X \leq 1\}$  kümesinin  $Y$  uzayındaki kapanışı kompakt ise  $\mathcal{K}$  operatörüne kompakt denir. Bu tanım  $X$  uzayındaki her sınırlı  $x_n$  dizisi için  $\{\mathcal{K}x_n\}$  dizisinin

$Y$  uzayında bir noktaya yakınsayan bir altdizisinin var olmasına denktir. Kompakt operatörler aynı zamanda tamamen sürekli operatörler olarak da adlandırılırlar.

(2.7.1) kompakt operatör tanımındaki  $X$  ve  $Y$  uzaylarının tam uzay olması gerekmemektedir; ancak neredeyse tüm uygulamalardaki uzaylar tamdır. Tamlık özelliği, kompakt operatörlerin bazı özelliklerinin ispatını kolaylaştırmaktadır. Bu kısımda kompakt operatörler kullanılırken  $X$  ve  $Y$  uzaylarının tam uzaylar olduğu (yani Banach uzayı oldukları) varsayılmıştır.

### 2.7.1. $\mathcal{C}(D)$ Üzerinde Kompakt İntegral Operatörler

$m \geq 1$  ve  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  kapalı, sınırlı bir küme olmak üzere

$$\mathcal{K}x(t) = \int_D K(t, s)x(s) ds, \quad t \in D, \quad x \in \mathcal{C}(D) \quad (2.7.1)$$

olsun.  $\mathcal{C}(D)$  uzayı  $\|\cdot\|_\infty$  normu ile birlikte ele alındığında  $\mathcal{K} : \mathcal{C}(D) \rightarrow \mathcal{C}(D)$  operatörü sınırlı ve kompakt olur.

### 2.7.2. Kompakt İntegral Operatörlerin Özellikleri

**Tanım 2.7.2**  $X$  ve  $Y$  vektör uzaylar olmak üzere  $\mathcal{K} : X \rightarrow Y$  lineer (doğrusal) operatörü için  $\text{Range}(\mathcal{K})$  sonlu boyutlu ise  $\mathcal{K}$  operatörüne sonlu rank operatörü denir.

**Yardımcı Teorem 2.7.1**  $X$  ve  $Y$  normlu lineer uzaylar ve  $\mathcal{K} : X \rightarrow Y$  bir sonlu rank operatörü olmak üzere  $\mathcal{K}$  sınırlı ise  $\mathcal{K}$  kompakt bir operatördür.

**Gösterim 2.7.1**  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlı sınırlı lineer operatörlerin Banach uzayı  $L[X, Y]$  ile temsil edilecektir.

**Yardımcı Teorem 2.7.2**  $\mathcal{K} \in L[X, Y]$  ve  $\mathcal{L} \in L[Y, Z]$  olmak üzere  $\mathcal{K}$  veya  $\mathcal{L}$  kompakt ise  $\mathcal{L}\mathcal{K} : X \rightarrow Z$  kompakt bir operatördür.



**Yardımcı Teorem 2.7.3**  $X$  ve  $Y$  normlu lineer uzaylar,  $Y$  tam uzay,  $\mathcal{K} \in L[X, Y]$ ,  $\mathcal{K}_n \subset L[X, Y]$  kompakt operatörlerin bir dizisi olmak üzere  $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}$ , yani  $\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}\| \rightarrow 0$  ise  $\mathcal{K}$  kompakt bir operatördür.

### 2.7.3. $L^2(a, b)$ Üzerinde Kompakt İntegral Operatörler

$X = Y = L^2(a, b)$  ve  $\mathcal{K}$ ,  $K(t, s)$  ile ilişkili integral operatörü olmak üzere  $\mathcal{K}$  kompakttır:

$$M = \left( \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \quad (2.7.2)$$

olsun ve  $M < \infty$  olduğu kabul edilsin.  $x \in L^2(a, b)$  için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}x\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(t, s)x(s) ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right) \left( \int_a^b |x(s)|^2 ds \right) dt \\ &= M^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise  $\mathcal{K}x \in L^2(a, b)$  olduğunu ve buradan

$$\|\mathcal{K}\| \leq M \quad (2.7.3)$$

olduğunu gösterir.

Daha genel çekirdek fonksiyonları için  $\mathcal{K}$  operatörünün kompaktlığını incelemek için

(i)  $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{K}_n : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  kompakt bir integral operatör)

(ii)  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \left( M_n \equiv \left( \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \rightarrow 0 \right)$

koşullarını sağlayan bir  $K_n(t, s)$  dizisi ele alınsın.  $\mathcal{K} - \mathcal{K}_n$  bir integral operatörüdür ve (2.7.2) - (2.7.3) uygulanması sonucu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$$

elde edilir. Yardımcı teorem 2.7.3 kullanılarak  $\mathcal{K}$  kompakt bir integral operatörü olduğu sonucuna varılır.

**Teorem 2.7.1**  $X$  bir Banach uzayı,  $\mathcal{K} : X \longrightarrow X$  kompakt bir integral operatörü ve  $\lambda \neq 0$  olmak üzere  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  denkleminin tek bir  $x \in X$  çözümünün olması için gerek ve yeter koşul  $(\lambda - \mathcal{K})z = 0$  homojen denkleminin tek çözümünün  $z = 0$  aşikar çözümü olmasıdır. Bu durumda  $\lambda - \mathcal{K} : X \xrightarrow{\text{biyektif}} X$  operatörünün tersi  $(\lambda - \mathcal{K})^{-1}$  sınırlıdır.

## 2.8. Projeksiyon Yöntemleri

Atkinson (Atkinson, 1997) kolakasyon (sıralama; collacation) yöntemini ve Galerkin yöntemini projeksiyon yöntemleri adı altında tanıtmıştır. Bu bölümün birinci ve ikinci alt bölümlerinde sırası ile Atkinson (Atkinson, 1997)'de geçen projeksiyon yöntemlerinin genel teorisi ve Galerkin yöntemi ile ilgili bilgiler aktarılmıştır.

$$\lambda x(t) - \int_D K(t, s)x(s) ds, \quad t \in D \quad (2.8.1)$$

integral denklemini yaklaşık olarak çözmek için (2.8.1) denkleminin gerçek çözümü  $x(s)$ 'e yakın olan  $\tilde{x}(s)$  fonksiyonunu içerdiğine inanılan sonlu boyutlu bir fonksiyon ailesi seçilir. Aranılan nümerik çözüm  $\tilde{x}(s)$ , (2.8.1) denklemini yaklaşık olarak sağlayacak şekilde seçilir.  $\tilde{x}(s)$  'nin "(2.8.1) denklemini yaklaşık olarak sağlaması" anlamına gelebilecek çeşitli algılar (senses) vardır ve bunlar farklı türden yöntemlere yol açmıştır. Bunlardan en popüler olanları kolakasyon ve Galerkin yöntemleridir.

### 2.8.1. Genel Teori

(2.8.1) integral denklemi  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  operatör formunda ifade edilsin ve  $\mathcal{K} : X \rightarrow X$  operatörü  $X$  Banach uzayı üzerinde kompakt olsun.  $X$  için en popüler tercihler  $\mathcal{C}(D)$  ve  $L^2(a, b)$  uzaylarıdır. Galerkin yöntemi ve genelleştirmeleri için  $H^r(D)$  Sobolev uzayları

da sıkça  $H^0(D) \equiv L^2(D)$  ile kullanılır. Pratikte,  $n \geq 1$ ,  $\dim(X_n) = d_n$  ve  $X_n \subset X$  olmak üzere sonlu boyutlu  $X_n$  altuzaylarının bir dizisi seçilir. Gösterim kolaylığı için  $d_n \equiv d$  olmak üzere  $X_n$  uzayının bazı  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  olsun. Bir  $x_n \in X_n$  fonksiyonu seçilsin. Bu fonksiyon,

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j, t \in D \quad (2.8.2)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade (2.8.1) ifadesine yerleştirilir ve  $\{c_1, \dots, c_d\}$  katsayıları denklemin bir anlamda neredeyse tam olmaya zorlayacak şekilde belirlenir. Daha sonra kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} r_n(t) &= \lambda x_n(t) - \int_D K(t, s) x(s) ds - y(t) \\ &= \sum_{j=1}^d c_j \left\{ \lambda \phi_j(t) - \int_D K(t, s) \phi_j(s) ds \right\} - y(t), t \in D \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyona  $x \approx x_n$  kullanılarak yapılan denklemin yaklaşımındaki artık (residual) fonksiyon denir. Sembolik olarak

$$r_n = (\lambda - \mathcal{K})x_n - y$$

biçimde ifade edilebilir.

$\{c_1, \dots, c_d\}$  katsayıları  $r_n(t)$  fonksiyonunun bir anlamda yaklaşık olarak sıfır olmasına zorlanması yoluyla seçilir. Beklenti, elde edilen  $x_n(t)$  fonksiyonunun gerçek çözüm  $x(t)$  fonksiyonuna iyi bir yaklaşım olmasıdır.

## 2.8.2. Galerkin Yöntemi

$X = L^2(D)$  veya herhangi bir Hilbert uzayı ve  $(\cdot, \cdot)$   $X$  uzayı için iç çarpım fonksiyonu olmak üzere  $r_n$  artık fonksiyonunun

$$(r_n, \phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, d_n \quad (2.8.4)$$

eşitliğini sağlaması gerekmektedir.

(2.8.4) eşitliğinin sol tarafı  $r_n$  artık fonksiyonunun  $\phi_i$  ile ilişkili Fourier katsayısıdır.  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  fonksiyonları  $X$  uzayında tam olan bir  $\Phi \equiv \{\phi_1, \dots, \phi_d, \dots\}$  ortonormal ailesinin önde gelen üyeleri (leading members) ise (2.8.4) ifadesi  $r_n$  artık fonksiyonunun  $\Phi$  ailesine göre Fourier açılımında önde gelen terimlerinin (leading terms) sıfır olmasını gerektirir.

$x_n$  yaklaşık çözümünü bulmak için (2.8.4) ifadesi (2.8.3) ifadesine uygulanması

$$\sum_{j=1}^d c_j \left\{ \lambda(\phi_j, \phi_i) - (\mathcal{K}\phi_j, \phi_i) \right\} = (y, \phi_i), \quad i = 1, \dots, d_n \quad (2.8.5)$$

doğrusal sisteminini doğurur. Bu (2.8.1) denkleminde yaklaşık bir çözüm elde eden Galerkin yöntemidir.

(2.8.5) ifadesini daha soyut bir formda yazmak için örten  $\mathcal{P}_n : X \rightarrow X_n$  izdüşüm operatörü kullanılır. Keyfi  $x \in X$  için  $\mathcal{P}_n x$ , aşağıda verilen küçültme (minimization) probleminin çözümü olacak biçimde tanımlıdır:

$$\|x - \mathcal{P}_n x\| = \min_{z \in X_n} \|x - z\| \quad (2.8.6)$$

$X_n$  sonlu boyutlu olduğundan bu problem bir çözüme sahiptir ve  $X_n$  bir iç çarpım uzayı olduğundan bu çözüm tektir.

$\mathcal{P}_n$  izdüşüm fonksiyonunu daha iyi anlamak adına,  $\mathcal{P}_n x$  için açık bir formül verilebilir:

$\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  bazından Gram-Schmidt yöntemi kullanılarak  $X_n$  uzayı için ortonormal bir  $\{\psi_1, \dots, \psi_d\}$  bazı elde edilir.  $\psi_i$  elemanı  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  kümesinin elemanlarının bir doğrusal birleşimidir ve dahası,

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d_n$$

olur. Elde edilen bu yeni baz ile

$$\mathcal{P}_n x = \sum_{i=1}^d (x, \psi_i) \psi_i \quad (2.8.7)$$

olduğu doğrudan gösterilebilir. Bu ifade  $\mathcal{P}_n$ 'nin bir doğrusal operatör olduğunu gösterir. Bu formül ile aşağıda sıralanan sonuçlar verilebilir:

$$\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_n x\|^2 + \|x - \mathcal{P}_n x\|^2 \quad (2.8.8)$$

$$\|\mathcal{P}_n x\|^2 = \sum_{i=1}^d |(x, \psi_i)|^2$$

$$(\mathcal{P}_n x, y) = (x, \mathcal{P}_n y), \quad x, y \in X \quad (2.8.9)$$

$$((I - \mathcal{P}_n)x, \mathcal{P}_n y) = 0, \quad x, y \in X \quad (2.8.10)$$

(2.8.10) ifadesinden dolayı  $\mathcal{P}_n x$ ,  $x$ 'in  $X_n$  üzerine dik izdüşüm olarak adlandırılır.  $\mathcal{P}_n$  dik izdüşüm operatörü olarak adlandırılır. (2.8.8) ifadesi

$$\|\mathcal{P}_n\| = 1 \quad (2.8.11)$$

sonucunu doğurur. (2.8.10) ifadesi kullanılarak,

$$\|x - z\|^2 = \|x - \mathcal{P}_n x\|^2 + \|\mathcal{P}_n x - z\|^2, \quad z \in X_n \quad (2.8.12)$$

olduğu gösterilebilir. Bu da  $\mathcal{P}_n x$ 'in (2.8.6) küçültme probleminin tek çözümü olduğunu göstermektedir. (2.8.4) ifadesi  $\mathcal{P}_n r_n = 0$  biçiminde ya da buna denk olarak,

$$\mathcal{P}_n(\lambda - \mathcal{K})x_n = \mathcal{P}_n y, \quad x_n \in X_n \quad (2.8.13)$$

biçiminde yazılabilir.

### Uyarı 2.8.1

$$\mathcal{P}_n z = 0 \iff \left( \forall i \in \{1, \dots, d_n\} \right) \left( (z, \phi_i) = 0 \right) \quad (2.8.14)$$

## 2.9. Yinelenmiş İzdüşüm Yöntemleri ve Sloan Yineleme Yöntemi

Atkison (Atkinson, 2008)

$$\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t) dt = y(s), \quad a \leq s \leq b, \quad \lambda \neq 0 \quad (2.9.1)$$

formunda ele aldığı ikinci tip Fredholm integral denkleminin

$$x = \frac{1}{\lambda}(y + z), \quad z = \mathcal{K}x \quad (2.9.2)$$

biçiminde de ele alınabileceğini belirtmiştir. Verilen bir izdüşüm yöntemi çözümü  $x_n$  olmak üzere

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{\lambda}(y + \mathcal{K}x_n) \quad (2.9.3)$$

ifadesini tanımlayan Atkison (Atkinson, 2008) bu türdeki iterasyonların literatürde pek çok yerde bulunabileceğini, ancak böyle bir iterasyon yapmanın önemini ilk defa farkedenden kişinin Sloan (Sloan, 1976) olmasından dolayı bu iterasyonun sıklıkla Sloan iterasyonu olarak adlandırıldığını belirtmiştir.

Atkinson (Atkinson, 1997) yinelenmiş izdüşüm yöntemlerinden ve yinelenmiş izdüşüm çözümünün izdüşüm çözümüne yakınsama hızı ile ilgili kısaca aşağıdaki biçimde bahsetmiştir.

$$(\lambda - \mathcal{K})x = y$$

integral denklemini için

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda} \left[ y + \mathcal{K}x^{(k)} \right], \quad k = 0, 1, \dots$$

yinelemesi (iteration) göz önüne alınsın. Geometrik seri teoreminden bu tekrarlanmanın  $\|\mathcal{K}\| < |\lambda|$  koşulu sağlandığı takdirde  $x$  çözümüne yakınsadığı ve bu durumda

$$\|x - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|\mathcal{K}\|}{|\lambda|} \|x - x^{(k)}\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Sloan (Sloan, 1976) başlangıç tahmininin Galerkin yöntemi ile elde edilen çözüm olması

durumunda böyle bir yinelemenin  $\|\mathcal{K}\|$ 'nin büyüklüğüne bakılmaksızın her zaman iyi bir fikir olduğunu göstermiştir.

$(\lambda - \mathcal{P}_n \mathcal{K})x_n = \mathcal{P}_n y$  izdüşüm denkleminin çözümü  $x_n$  olsun. Yinelemiş izdüşüm çözümü

$$\hat{x}_n = \frac{1}{\lambda}[y + \mathcal{K}x_n] \quad (2.9.4)$$

olarak tanımlansın. Bu yeni yaklaşım çoğunlukla  $x_n$  üzerinde bir iyileştirme, gelişmedir. Ayrıca, gerçek izdüşüm çözümünün davranışını daha iyi anlamak için de kullanılır.  $\mathcal{P}_n$  operatörünün (2.9.4) eşitliğinin her iki yanına uygulanması sonucu

$$\mathcal{P}_n \hat{x}_n = \frac{1}{\lambda}[\mathcal{P}_n y + \mathcal{P}_n \mathcal{K}x_n] = x_n$$

$$\mathcal{P}_n \hat{x}_n = x_n \quad (2.9.5)$$

elde edilir. Bu nedenle  $\hat{x}_n$ 'nin  $X_n$  içine izdüşümü  $x_n$  olur. (2.9.4) ifadesine yerleştirme yapılması ve terimlerin yeniden düzenlenmesi ile,  $\hat{x}_n$

$$(\lambda - \mathcal{K} \mathcal{P}_n) \hat{x}_n = y \quad (2.9.6)$$

denklemini sağlayan  $\hat{x}_n$  çözümüne sahip olunur.

Çoğunlukla bu denklem doğrudan analiz edilebilir ve (2.9.5) ifadesinin uygulanması ile  $x_n$  üzerindeki bilgi elde edilebilir. Özel olarak,

$$x - \hat{x}_n = \frac{1}{\lambda}[y + \mathcal{K}x] - \frac{1}{\lambda}[y + \mathcal{K}x_n] = \frac{1}{\lambda}\mathcal{K}(x - x_n)$$

$$\|x - \hat{x}_n\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\| \|x - x_n\| \quad (2.9.7)$$

Bu  $\hat{x}_n$ 'nin  $x$ 'e yakınsama hızının en az  $x_n$ 'nin  $x$ 'e yakınsamasındaki kadar olduğunu ispatlar. Çoğunlukla bu daha hızlı olacaktır. Çünkü  $x - x_n$  üzerinde  $\mathcal{K}$  ile çalışmak integrallemenin düzgünleştirme davranışına (smoothing behaviour of integration) bağlı olarak ihmale yol açar.

## 2.10. $L^2$ -İzdüşümü

Fonksiyonlara yaklaşım tekniklerinden biri olan  $L^2$ -izdüşümü tekniğinin uygulanışının ve bunun için gerekli temel bazı tanım ve bilgilerin verildiği bu bölümün hazırlanmasında Larson ve Bengzon' nun kitabından (Larson ve Bengzon, 2010) faydalanılmıştır.

$L^2$ -izdüşümü fonksiyonlara yaklaşım yapma tekniğidir. Düğüm noktalarında yaklaşım yapılmak istenen fonksiyon ile aynı değerleri alan interpolasyon tekniği ile karşılaştırıldığında  $L^2$ -izdüşüm tekniği ortalama yaklaşımda daha iyi sonuçlar vermektedir. Ayrıca  $L^2$ -izdüşümü interpolasyonun aksine yaklaşım yapılmak istenen fonksiyonun sürekli olmasını ya da iyi-tanımlı düğüm noktalarına sahip olmasını gerektirmez.

$[x_0, x_1]$  bir aralık ve  $\mathcal{P}_1(I)$   $I$  üzerinde tanımlı olan doğrusal fonksiyonların,

$$\mathcal{P}_1(I) = \{v : v(x) = c_0 + c_1x, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\} \quad (2.10.1)$$

şeklinde tanımlanan vektör uzayı olsun.

$[a, b]$  bir aralık olmak üzere  $n + 1$  adet  $\{x_i\}_{i=0}^n$  düğüm noktası (node points), bu aralığın her biri  $h_i = x_i - x_{i-1}$  uzunluğunda ve  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) formunda olan  $n$  adet alt aralığa parçalanışını

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (2.10.2)$$

biçiminde tanımlasın. Bölüntüler ile bir ağ aralığı (mesh) kastedilmiştir.

$I$  aralığında tanımlı olan sürekli fonksiyonların uzayı  $\mathcal{C}^0(I)$  ve  $I_i$  aralığında tanımlı olan tanımlı doğrusal fonksiyonların uzayı  $\mathcal{P}_1(I_i)$  olmak üzere bir ağ aralığı üzerindeki parçalı doğrusal sürekli (continuous piecewise linear) fonksiyonların uzayı  $V_h$  aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$V_h = \{v : v \in \mathcal{C}^0(I), v|_{I_i} \in \mathcal{P}_1(I_i)\} \quad (2.10.3)$$

$V_h$  uzayında inşa edilen fonksiyonlar her bir  $I_i$  alt aralığında doğrusaldırlar ve  $I$  aralığı üzerinde süreklidirler.  $V_h$  uzayındaki herhangi bir  $v$  fonksiyonu kendisine ilişkin

$$\left\{ v(x_i) \right\}_{i=0}^n \quad (2.10.4)$$



düğüm değerleri (nodal values) ile tek biçimde belirlidir ve tersine verilen herhangi bir  $\left\{ \alpha(x_i) \right\}_{i=0}^n$  düğüm değerleri kümesi için  $V_h$  uzayında bu düğüm değerlerine sahip bir  $v$  fonksiyonu vardır. Bu gözlemden yola çıkılarak düğüm değerleri ile serbestlik derecesi (degree of freedom) tanımlansın ve  $V_h$  uzayı için elemanları düğüm noktalarında aşağıda verilen değerleri alan  $\left\{ \varphi_j \right\}_{j=0}^n$  tabanı (bazı) tanıtılsın:

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (2.10.5)$$

Şekillerinden dolayı  $\varphi_i$  baz fonksiyonları genellikle “Şapka Fonksiyonları (Hat Functions)” olarak adlandırılır. Her biri sürekli, parçalı doğrusal fonksiyonlardır ve birim değerini (unit value) kendi düğüm noktası  $x_i$ 'de alırken diğer tüm düğüm noktalarında sıfır değerini alır. Bu nedenle  $\varphi_i$  fonksiyonu yalnızca  $x_i$  düğüm noktasını içeren  $I_i$  ve  $I_{i+1}$  aralıkları üzerinde sıfırdan farklıdır.  $I_i \cup I_{i+1}$  birleşimine  $\varphi_i$  baz fonksiyonunun dayanağı (support) denir. Buradaki istisnalar sırası ile  $a = x_0$  ve  $b = x_n$  sol ve sağ düğüm noktalarındaki dayanakları tek aralıktan oluşan yarım şapka (half hat)  $\varphi_0$  ve  $\varphi_n$  fonksiyonlarıdır.

Şapka fonksiyonlarından oluşan bazın yapısından dolayı  $V_h$  uzayındaki herhangi bir  $v$  fonksiyonu  $\left\{ \varphi_i \right\}_{i=0}^n$  şapka fonksiyonlarının ve bunlara karşılık gelen ve  $v$  fonksiyonunun düğüm değerleri  $\alpha_i = v(x_i)$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) değerlerine eşit olan  $\left\{ \alpha_i \right\}_{i=0}^n$  kat-sayılarının doğrusal birleşimi olarak yazılabilir:

$$v(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x) \quad (2.10.6)$$

Şapka fonksiyonlarının açık gösterimleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\varphi_i = \begin{cases} (x - x_i)/h_i, & x \in I_i \text{ ise} \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1}, & x \in I_{i+1} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.10.7)$$

Verilen bir  $f \in L^2(I)$  fonksiyonunun  $L^2$ -izdüşümü  $P_h f \in V_h$ ,

$$\int_I (f - P_h f)v \, dx = 0, \forall v \in V_h \quad (2.10.8)$$

biçiminde tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ 'nin altuzayları üzerine yapılan izdüşümlere benzer şekilde  $f - P_h f$  farkının  $V_h$  uzayındaki tüm  $v$  fonksiyonlara dik olması gerektiğinden, (2.10.8)  $f$  fonksiyonunun  $V_h$  üzerine bir izdüşüm tanımlar.

$P_h f$   $L^2$ -izdüşümü  $\min_{v \in V_h} \|f - v\|_{L^2(I)}$  optimizasyon probleminin küçültücüsüdür (minimize) ve bu nedenle  $f$  fonksiyonuna en küçük kareler mantığında yaklaşım yapar.

$P_h f$   $L^2$ -izdüşümünü hesaplamak için öncelikle (2.10.8) tanımının,  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) şapka baz fonksiyonları olmak üzere

$$\int_I (f - P_h f)\varphi_i \, dx = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (2.10.9)$$

ifadesine denk olduğu göz önüne alınmalıdır. Bu durum (2.10.8) ifadesinin  $v$ 'nin herhangi bir şapka fonksiyonu olarak seçimi için sağlanırsa şapka fonksiyonlarının herhangi bir doğrusal birleşimi için de sağlanacağı ve tersine herhangi bir  $v \in V_h$  şapka fonksiyonlarının doğrusal birleşimi olduğundan (2.10.8) ifadesinin (2.10.9)'yi gerektirmesinin bir sonucudur.

$P_h f$  izdüşümü  $V_h$  uzayına ait olduğundan, belirlenecek olan  $n + 1$  adet bilinmeyen  $\xi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) katsayıları ile birlikte

$$\sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \quad (2.10.10)$$

doğrusal birleşimi olarak yazılabilir.

(2.10.10) ifadesinin (2.10.8) ifadesine yerleştirilmesi sonucu,

$$\begin{aligned} \int_I f \varphi_i \, dx &= \int_I \left( \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i \, dx \\ &= \sum_{j=0}^n \xi_j \int_I \varphi_j \varphi_i \, dx, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.10.11)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$M_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (2.10.12)$$

ve

$$b_i = \int_I f \varphi_i dx, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.10.13)$$

gösterimlerinin tanıtılması ile  $(n + 1)$  adet  $\xi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) bilinmeyenli  $(n + 1) \times (n + 1)$  boyutlu doğrusal sistemi

$$b_i = \sum_{j=0}^n M_{ij} \xi_j, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.10.14)$$

elde edilir.  $M$  bileşenleri (2.10.12) ifadesi ile tanımlanan  $(n + 1) \times (n + 1)$  boyutlu matris ve  $b$  bileşenleri (2.10.13) ifadesi ile tanımlanan  $(n + 1) \times 1$  boyutlu vektör olmak üzere (2.10.14) ifadesi

$$M\xi = b \quad (2.10.15)$$

matris formunda yazılabilir. Böylece (2.10.10) ifadesindeki  $\xi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) katsayıları-

nın  $L^2$ -izdüşümü  $P_h f$ 'yi elde etmek için çözülmesi gerekli olan bir doğrusal sistemi sağladığı sonucuna varılır. Aşağıdaki algoritma  $P_h f$   $L^2$ -izdüşümünü hesaplamak için gerekli temel adımları özetlemektedir:

(i)  $I$  aralığı üzerinde  $n$ -elemanlı bir ağ (mesh) oluşturulur ve karşılık gelen sürekli parçalı doğrusal fonksiyonların uzayı  $V_h$  uzayı tanımlanır.

(ii) Bileşenleri sırası ile

$$M_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx \text{ ve } b_i = \int_I f \varphi_i dx \quad (2.10.16)$$

olan  $(n + 1) \times (n + 1)$ -boyutlu  $M$  matrisi ve  $(n + 1) \times 1$ -boyutlu  $b$  vektörü hesaplanır.

(iii)

$$M\xi = b \quad (2.10.17)$$

doğrusal sistemi çözülür.

(iv) Bulunan katsayılar izdüşümün hesaplanması için

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \quad (2.10.18)$$

şeklinde yerleştirilir.

## 2.11. hp-Uyarlanabilir Sonlu Elemanlar

Bu bölüm bir boyutlu sonlu elemanlar yöntemi, birinci boyutta ağ inceltmeleri ve bir boyutlu otomatik  $hp$ -uyarlanabilirlik olmak üzere üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde Galerkin yöntemi için uygun olan baz fonksiyonlarının tasarımı tanıtılmıştır. İkinci alt bölümde  $h$  ve  $p$  ağ inceltmeleri üzerinde durulmuştur. Son olarak üçüncü alt bölümde ise ince ağ çözümü ve optimal ağ seçimi olmak üzere iki temel bileşenden oluşan  $hp$ - algoritmasından bahsedilmiştir. Buradaki bilgiler Demkowicz'in kitabından (Demkowicz, 2005) alınmıştır.

### 2.11.1. Bir Boyutlu hp Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde bir boyutlu  $hp$  sonlu elemanlar yönteminin esaslarından biri olan "Eleman şekil fonksiyonları (Element Shape Functions) kullanılarak Galerkin yöntemi için uygun olan taban fonksiyonlarının tasarımı" tanıtılacaktır.

#### Bir Boyutlu hp Ayrıklaştırması

Sonlu elemanlar yöntemi Galerkin yönteminin özel bir halidir ve Galerkin yönteminin diğer çeşitlerinden taban fonksiyonlarının tasarlanış biçiminden dolayı farklılaşır. Sonlu elemanlar (SE) taban fonksiyonları birkaç bitişik komşu eleman dışında, tanım kümesinin geriye kalan kısmına sıfır olacak biçimde genişletilerek eleman şekil fonksiyonlarının birleşimi olarak tasarlanır. Bir SE taban fonksiyonunun dayanağı daima sadece birkaç elemanın içinde bulunur (kapsanır).

$(0, l)$  aralığı  $N$  adet alt aralığa parçalanır:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_K < x_{K+1} < \dots < x_N = l \quad (2.11.1)$$

Her bir  $(x_K, x_{K+1})$ ,  $K = 0, 1, \dots, N$  elemanı bir sonlu eleman olarak adlandırılır ve kendisi ile ilişkili iki parametreye sahiptir: Eleman uzunluğu  $h_K = x_{K+1} - x_K$  ve elemanda yaklaşım yapılırken kullanılan en büyük polinom derecesi (yaklaşımın eleman yerel polinom derecesi (order))  $p_K$ . Yöntemin yakınsaklığına hem eleman boyu küçültülerek  $h_K \rightarrow 0$ , hem de polinom derecesini yükselterek  $p_K \rightarrow \infty$  ulaşılır. Her bir  $(x_K, x_{K+1})$  elemanı için derecesi  $p_K$ 'ye eşit veya  $p_K$ 'den küçük olan polinomların  $\mathcal{P}^{p_K}$  uzayını geren polinom şekil fonksiyonları  $p_K+1$  olarak tanımlansın. Gösterim kolaylığı için bir  $(x_K, x_{K+1})$  sonlu elemanı kısaca  $K$  ile  $p_K$  ise  $K$  indisi atılarak  $p$  biçiminde kullanılacaktır. Burada  $p$  derecesinin yerel olarak elemandan elemana değişebileceğine dikkat edilmelidir.

### **Bir Boyutlu $p$ . Dereceden Baş (Master) Eleman**

$K$  SE ağında bir eleman olsun. Şekil fonksiyonlarını fiziksel eleman olarak adlandırılan  $K$  üzerinde doğrudan tanımlamak yerine genel (eşdeğer, kapsamlı) bir baş elemanı gözüne alıp baş eleman şekil fonksiyonlarını tanımlamak ve daha sonra fiziksel eleman için şekil fonksiyonlarını tanımlamak için parametrik eleman fikrini kullanmak daha uygundur.

Geometrik anlamda bir boyutlu baş eleman  $\widehat{K}$  birim aralık olan  $(0, 1)$  aralığına karşılık gelir. Şekil fonksiyonlarının eleman uzayı  $X(\widehat{K})$  dereceleri  $p$ . dereceye kadar olan polinomlar olarak tanımlanır:

$$X(\widehat{K}) = \mathcal{P}^p(\widehat{K}) \quad (2.11.2)$$

$p$ . dereceye kadar olan polinomları geren farklı tabanlar da bulunabilir. Peano hiyerarşik şekil fonksiyonlarınca önerilen en basit seçim aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_1(\xi) &= 1 - \xi \\ \widehat{\chi}_2(\xi) &= \xi \\ \widehat{\chi}_3(\xi) &= (1 - \xi)\xi \\ \widehat{\chi}_l(\xi) &= (1 - \xi)\xi(2\xi - 1)^{l-3}, \quad l = 4, \dots, p + 1 \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Fonksiyonlar basit bir yineleme formülünü sağlar:

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}_1(\xi) &= 1 - \xi \\
\widehat{\chi}_2(\xi) &= \xi \\
\widehat{\chi}_3(\xi) &= \widehat{\chi}_1(\xi)\widehat{\chi}_2(\xi) \\
\widehat{\chi}_l(\xi) &= \widehat{\chi}_{l-1}(\xi)(\widehat{\chi}_2(\xi) - \widehat{\chi}_1(\xi)), \quad l = 4, \dots, p+1
\end{aligned} \tag{2.11.4}$$

İlk iki doğrusal fonksiyon hariç diğer şekil fonksiyonları eleman uç noktalarında sıfır olur. Bu nedenden dolayı sıklıkla baloncuk fonksiyonları (bubble functions) olarak adlandırılırlar. Doğrusal şekil fonksiyonları da birinci (sol) ve ikinci (sağ) eleman köşe (vertex) düğümlerine karşılık gelmek üzere köşe düğüm şekil fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Geriye kalan baloncuk fonksiyonları elemanın içine karşılık gelir.

İntegre edilmiş Legendre polinomları bir boyutlu eleman şekil fonksiyonları için çok daha iyi bir seçimdir.  $P_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  Legendre polinomları,

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] = n(n+1)P_n, \quad x \in (-1, 1) \tag{2.11.5}$$

Legendre operatörünün özvektörleridir.

Legendre operatörü  $L^2(-1, 1)$  uzayında özeşlenik (self-adjoint) olduğundan Legendre polinomları  $L^2$  normuna göre diktirler ve  $L^2(-1, 1)$  uzayında  $L^2$ -dik ( $L^2$ -orthogonal) taban oluştururlar. Yani her bir  $u(x)$   $L^2$  fonksiyonu (genelleştirilmiş) bir Fourier serisi biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n(x) \tag{2.11.6}$$

$L^2$ 'deki herhangi bir fonksiyon için yakınsaklık sadece  $L^2$  anlamında algılanır.  $u_n$  katsayıları (2.11.6) açılım formülünün her iki tarafının keyfi bir  $P_n$  Legendre polinomu ile çarpılması ( $L^2$  anlamında çarpım) sonucu elde edilebilir. Legendre polinomlarının normları  $L^2$  normuna göre

$$\|P_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \tag{2.11.7}$$

biçiminde ölçülürken  $x = 1$  noktasında genelde 1 olarak ölçülürler.

Legendre polinomlarının tanım kümesi olan  $(-1, 1)$  aralığını  $(0, 1)$  aralığına dönüştürerek

$$l_n(t) = P_n(x), \quad x = -1 + 2t \quad (2.11.8)$$

biçiminde tekrar düzenlenir ise yüksek dereceden şekil fonksiyonları Legendre polinomlarının integralleri olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_1(\xi) &= 1 - \xi \\ \hat{\chi}_2(\xi) &= \xi \\ \hat{\chi}_n(\xi) &= \int_0^\xi l_{n-2}(t) dt, \quad n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.11.9)$$

### Keyfi Dereceden Bir Boyutlu Parametrik Eleman

$K = [x_l, x_r] \subset [0, l]$  keyfi kapalı aralığı göz önüne alınsın.  $K$  elemanı  $\hat{K}$  baş elemanın, baş eleman doğrusal şekil fonksiyonlarını kullanılarak uygun biçimde tanımlanabilecek olan basit bir afin dönüşümü altındaki görüntüsüdür:

$$\begin{aligned} x_K(\xi) &= x_l \hat{\chi}_1(\xi) + x_r \hat{\chi}_2(\xi) \\ &= x_l(1 - \xi) + x_r \xi \\ &= x_l + \xi(x_r - x_l) \\ &= x_l + \xi h_K \end{aligned} \quad (2.11.10)$$

Buradaki  $h_K = x_r - x_l$  eleman uzunluğudur. Dönüşüm tersi  $x_K^{-1}$  olmak üzere tersinirdir. Şekil fonksiyonlarının eleman uzayı  $X(K)$   $x_K^{-1}$  ters dönüşümü ve baş eleman üzerinde tanımlanan fonksiyonların bileşimleri olarak tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} X(K) &= \{\hat{u} \circ x_K^{-1} \mid \hat{u} \in X(\hat{K})\} \\ &= \{u(x) = \hat{u}(\xi) \mid x_K(\xi) = x, \hat{u} \in X(\hat{K})\} \end{aligned} \quad (2.11.11)$$

Sonuç olarak eleman şekil fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\chi_k(x) = \hat{\chi}_k(\xi), \quad x_k(\xi) = x, \quad k = 1, \dots, p + 1 \quad (2.11.12)$$

Bir afin dönüşümünün tersi de bir afin dönüşümü olduğundan eleman şekil fonksiyonları yine fiziksel  $x$  koordinatında  $p$ . dereceye kadar olan polinomlardır ve karşılık gelen eleman şekil fonksiyonları uzayı polinom uzayı ile örtüşür:

$$X(K) = \mathcal{P}^p(K) \quad (2.11.13)$$

### **Bir Boyutlu hp Sonlu Eleman Uzayı**

$(0, l)$  aralığı ayrık  $K = (x_{K-1}, x_K)$  elemanlarından oluşan bir sonlu eleman ağı ile örtülmüş olsun.  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = l$  koordinatları ile verilen eleman uç noktaları köşe düğümleri olarak adlandırılmıştır.  $X_h$  bir boyutlu hp sonlu eleman uzayı, global sürekli olan ve  $K$  elemanına kısıtlanışları eleman şekil uzayı ( $X(K)$ ) içinde yer alan tüm fonksiyonların ailesi olarak tanımlanır:

$$X_h = \{u_h(x) \mid u \text{ sürekli ve her } K \text{ elemanı için } u|_K \in X(K)\} \quad (2.11.14)$$

Global taban fonksiyonları iki grupta sınıflandırılmışlardır:

- Köşe düğüm taban fonksiyonları,
- Orta düğüm baloncuk taban fonksiyonları.

Bir  $x_K$  köşe düğümüne karşılık gelen taban fonksiyonu, ortak köşeye karşılık gelen diğer yerlerde sıfır değerini alan iki bitişik eleman şekil fonksiyonunun bileşimi olarak tanımlanmıştır. Orta düğüm taban fonksiyonlarının inşası daha kolaydır. Eleman orta düğüm şekil fonksiyonları eleman uç noktalarında sıfırlandığından sadece diğer yerlerde sıfır fonksiyonunca genişletilmeleri yeterlidir. Bir köşe düğüm taban fonksiyonunun da yanağı iki bitişik eleman üzerinde genişlerken bir baloncuk fonksiyonu sadece bir elemana kısıtlanmıştır.

### **2.11.2. Birinci Boyutlu Ağ İnceltmeleri**

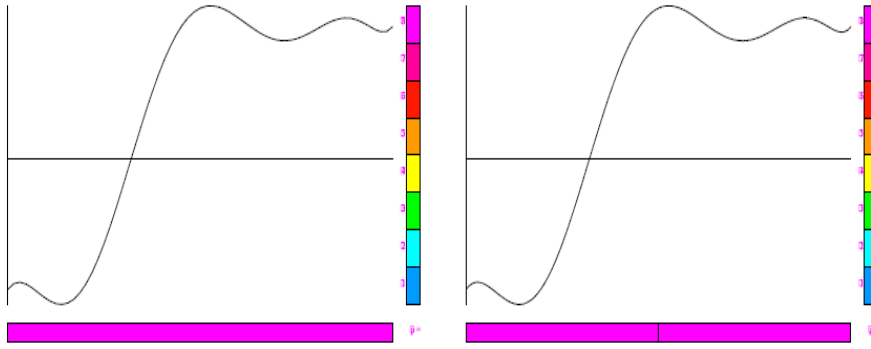
Bu bölümde  $h$  ve  $p$  ağ inceltmeleri üzerinde durulmuştur.  $h$ -inceltmesine karşılık gelen genişletme operatörü (extension operator) ile başlangıç yapılmış, daha sonra eleman orta düğümleri (element middle nodes) için  $p$  mertebesinin değişikliği (modification)



tartışılmış ve bu doğal olarak izdüşüme dayalı interpolasyon (projection based interpolation) düşüncesine neden olmuştur.

***h*-genişletme operatörü: Kısıtlı yaklaşım katsayıları (Constrained approximation coefficients)**

Demkowicz L.’in (Demkowicz, 2005) “hp-Adaptive Finite Elements, I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems” adlı eserinde şekil 5.1 ile verilen ve aşağıda gösterilen grafik *p*. mertebeden tek bir büyük elemandan oluşan bir ağ kullanılarak elde edilen bir SE çözümünü göstermektedir. Eleman iki yavru elemana bölündüğünde aynı



**Şekil 2.1. Tek elemandan oluşan ağ kullanılması sonucu elde edilen çözüm ve bu elemanın ikiye bölünmesi ile elde edilen iki elemandan oluşan ağ üzerindeki çözüm grafikleri**

fonksiyon görölmektedir. Ancak bu kez aynı fonksiyon  $p = 8$ . mertebeden iki küçük elemandan oluşan bir ağ üzerinde desteklenmektedir. Ağın grafiksel gösterimi haricinde hiçbir şey değışmemiştir. SE çözümünün büyük eleman ağ gösterimi

$$U_h(x) = U_1 e_1^{\text{büyük}}(x) + U_2 e_2^{\text{büyük}}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} U_{3,j} e_{3,j}^{\text{büyük}}(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2.11.15)$$

biçimindedir. Burada  $e_i^{\text{büyük}}$ ,  $i = 1, 2$  sağ ve sol köşe düğüm baz fonksiyonlarını (vertex nodes basis functions),  $e_{3,j}^{\text{büyük}}$ ,  $j = 1, \dots, p - 1$  orta düğümlerin baz fonksiyonlarını ve  $U_i, U_{3,j}$  bunlara karşılık gelen serbestlik derecelerini (degree of freedom) temsil etmektedir.

Çözümün ilk küçük eleman içerisindeki gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$u_h(x) = u_1 e_1^{\text{küçük}}(x) + u_2 e_2^{\text{küçük}}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} u_{3,j} e_{3,j}^{\text{küçük}}(x), \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.11.16)$$

Ancak ilk eleman içerisindeki baz fonksiyonları birinci eleman şekil fonksiyonlarına (first element shape functions) dönüştürülmüştür. Şekil fonksiyonları gösterimine geçiş yapılması sonucu

$$u_h(x) = u_1\chi_1^{\text{küçük}}(x) + u_2\chi_2^{\text{küçük}}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} u_{3,j}\chi_{3,j}^{\text{küçük}}(x), \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.11.17)$$

elde edilir. Baş eleman şekil fonksiyonları (master element shape functions) ve koordinatları cinsinden

$$\hat{u}_h(\xi) = u_1\hat{\chi}_1^{\text{küçük}}(\xi) + u_2\hat{\chi}_2^{\text{küçük}}(\xi) + \sum_{j=1}^{p-1} u_{3,j}\hat{\chi}_{3,j}^{\text{küçük}}(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad x = \frac{1}{2}\xi \text{ veya } \xi = 2x \quad (2.11.18)$$

ifadesi elde edilir.

Büyük eleman serbestlik dereceleri  $U_1, U_2, U_{3,j}$  için aynı fonksiyonu temsil eden küçük eleman  $u_1, u_2, u_{3,j}$  serbestlik derecelerini belirleyen operatöre  $h$ -inceltme genişletme operatörü ( $h$ -refinement extension operator) denir. Bu (operatör), her iki fonksiyonun ilk eleman içerisinde düzgün dağıtılmış (uniformly distributed) olan  $p + 1$  adet noktada sıralanması (collacating) ile belirlenir:

$$\hat{u}_h(\xi_l) = u_h(x_l) = U_h(x_l), \quad l = 0, \dots, p, \quad \xi_l = \frac{1}{p}, \quad x_l = \frac{1}{2}\xi_l = \frac{1}{2p} \quad (2.11.19)$$

Bu işlem herbir büyük eleman serbestlik derecesi seçimi için yapılmalıdır. Yani bir serbestlik derecesi (büyük eleman şekil fonksiyonu) bir zamanda aktive edilir ve karşılık gelen  $p + 1$  adet doğrusal denklemden oluşan sıralama sistemi (collacation system) küçük eleman serbestlik derecesi için çözülür.

### **Bir Boyutlu İzdüşüme Dayalı İnterpolasyon**

**$p$ -inceltmeleri** Bir önceki bölümde ele alınan ve  $h$ -inceltmesini destekleyen katsayılar,  $h$ -inceltmesi süresince yaratılan yeni düğüm noktalarına ilişkin serbestlik derecelerinin oluşturulması (initiating) için kullanılır: iki yeni orta düğüm noktası ve bir köşe düğüm noktası.  $p$ -inceltmesi halinde (bir orta düğümün mertebesini  $p_{eski}$ 'den  $p_{yeni}$ 'ye ( $p_{yeni} > p_{eski}$ ) arttırmak istenildiğinde) durum daha kolaydır.

$$u_h^{eski} = u_1\chi_1(x) + u_2\chi_2(x) + \sum_{j=1}^{p_{eski}-1} U_{3,j}\chi_{3,j}(x), \quad (2.11.20)$$

gösteriminden

$$u_h^{yeni} = u_1\chi_1(x) + u_2\chi_2(x) + \sum_{j=1}^{p_{yeni}-1} U_{3,j}\chi_{3,j}(x) \quad (2.11.21)$$

gösterimine geçilmelidir. Aşamalı (Sıra düzenli-Hiyerarşik) şekil fonksiyonları ile ilgili varsayımdan dolayı çözüm çok kolaydır. Eski serbestlik dereceleri korunur ve yeni serbestlik dereceleri  $U_{3,j}, = p^{eski}, \dots, p^{yeni-1}$  sıfır ile başlatılır. Karşılık gelen fonksiyonlar özdeş (identical) olacaklardır.

### 2.11.3. Bir Boyutlu Otomatik $hp$ -Uyarlanabilirlik

Bu bölümde sadece üstel yakınsaklığı (exponential convergence) değil, ayrıca tüm ön-asimptotik bölgede (preasymptotic region) en iyi ağları da temin eden bir ağ dizisini otomatik olarak üreten bir tasarı olan bir boyutlu  $hp$ -algoritması üzerinde durulmuştur.

#### **$hp$ Algoritması**

Algoritma iki temel bileşenden oluşur.

#### **İnce Sistem Çözümü**

Var olan (kaba) bir ağ verilsin. İlk olarak daha ince bir ağ elde etmek için ağ hem  $h$  ve hem de  $p$  'ye bağlı olarak inceltir. Bu inceltmenin ardından problem bu ince ağ üzerinde çözülür ve ince ağ çözümü elde edilir.

#### **Optimal (En Uygun) Ağ Seçimi**

Verilen ince ağ çözümü, izdüşüme dayalı interpolasyon hatası minimize edilerek kaba ağın optimal ağ inceltmelerinin belirlenmesi için kullanılır. Daha kesin bir ifade ile  $u = u_{u/2,p+1}$  ince ağ üzerindeki temsil etmek üzere aşağıdaki ayrık optimizasyon problemi (discrete optimization problem) çözülür :

Öyle bir  $hp_{opt}$  optimal ağı bulun ki,

$$\frac{|u - \prod_{hp} u|_{H^1(0,l)}^2 - |u - \prod_{hp_{opt}} u|_{H^1(0,l)}^2}{N_{hp_{opt}} - N_{hp}} \rightarrow min. \quad (2.11.22)$$

Burada  $\prod_{hp} u, \prod_{hp_{opt}} u$  ince ağ çözümünün sırası ile orijinal ağ ve belirlenecek olan yeni optimal ağ üzerindeki interpolantlarını temsil etmektedir ve  $N_{hp}, N_{hp_{opt}}$  sırası ile bu ağlara karşılık gelen serbestlik derecelerini temsil etmektedir. Bu nedenle optimizasyon problemi, interpolasyon hatasındaki küçülme oranını maksimize etmeyi amaçlamaktadır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ikinci tip Fredholm integral denklemlerin uyarlanabilir inceltme kullanılarak Galerkin izdüşüm yöntemi ve Sloan iterasyonu ile çözümleri tanıtılmıştır. Öncelikle bir kaba ağın alt (ağ) aralıklara bölünmesi sonucu ince ağın nasıl elde edildiği üzerinde durulmuştur. Kaba ağdaki düğüm noktalarının hangi konumlara kaydığı ve yeni oluşan düğüm noktalarının hangi konumlara yerleştiği açıklanmıştır. Düğüm noktalarının konumlarının değişmesi sonucu indisleri de değişmektedir ve bu durum yaklaşımda kullanılacak sıralı baz fonksiyonlarının hangi ağ aralığına nasıl bir düzende yerleştirileceğinin belirlenmesinde önem taşımaktadır. Daha sonra sıralı baz elemanlarının (fonksiyonlarının) ağa yeni ağ aralıkları eklenmesi sonucu nasıl değiştikleri üzerinde durulmuş, ince ağa ilişkin sıralı baz elemanlarının (fonksiyonlarının) kuruluşu açıklanmıştır. Verilen bir ağdan daha ince bir ağ elde edildikten sonra bu yeni ağ üzerinde sırası ile Galerkin izdüşüm yöntemi ve Sloan iterasyonu kullanılarak problemin yaklaşık çözümünün hesaplanmasında ihtiyaç duyulan matrisler her iki yöntem için de verilmiştir. Son olarak ağ inceltmelerinde optimal ağ seçimi için kullanılan optimizasyon probleminin çözüm algoritması açıklanmıştır.

#### 3.1. Ağ İnceltme

Bu bölümde bir kaba ağdan nasıl bir ince ağ elde edileceği açıklanmıştır. İki aşamalı olan bu işlem için öncelikle her iki ağ arasındaki düğüm noktalarının ve yaklaşım polinomlarının mertebelerinin arasındaki ilişki üzerinde durulmuş, daha sonra yaklaşım polinomları olarak seçilen doğrusal şapka fonksiyonlarının ve baloncuk fonksiyonlarının (modifiye integre edilmiş Legendre polinomlarının) inceltme esnasında ağ aralıklarında nasıl değişim gösterdiği ve tanımlandığı anlatılmıştır.

### 3.1.1. Kaba Ağ ve İnce Ağ Düğüm Noktaları ve Yaklaşım Polinomlarının Mertebeleri Arasındaki Bağlantılar

$t_1^{kaba} < t_2^{kaba} < \dots < t_n^{kaba}$  olmak üzere  $n - 1$  adet ağ aralığından oluşan kaba ağın düğüm noktaları listesi

$$L_{kaba} = [t_1^{kaba} \quad t_2^{kaba} \dots t_n^{kaba}] \quad (3.1.1)$$

olsun. Bu ağın alt aralıklarını orta noktalarından bölerek

$$L_{ince} = [t_1^{kaba} \quad (t_1^{kaba} + t_2^{kaba})/2 \quad t_2^{kaba} \dots t_{n-1}^{kaba} \quad (t_{n-1}^{kaba} + t_n^{kaba})/2 \quad t_n^{kaba}] \quad (3.1.2)$$

ince ağını oluşturalım. Kaba ağın düğüm noktası sayısı  $n$  olduğundan ince ağdaki düğüm noktası sayısı  $2n - 1$  olur. Daha açık olarak bir ağdaki düğüm noktalarını liste biçiminde  $L$  listesi ile temsil eder ve bu listedeki eleman sayısını  $S(L)$  ile temsil edecek olursak

$$S(L_{ince}) = 2S(L_{kaba}) - 1 \quad (3.1.3)$$

olacaktır. İnce ağdaki düğüm noktalarının konumları ise kaba ağa bağlı olarak aşağıdaki biçimde belirlidir:

$$t_{2k-1}^{ince} = t_k^{kaba}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

$$t_{2k}^{ince} = (t_k^{kaba} + t_{k+1}^{kaba})/2, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.5)$$

Çözüme yaklaşım yapmak için kaba ağa ait aralıkların herbirinde o aralıkta tanımlanan şapka fonksiyonları ve sırası ile  $p_1^{kaba}, p_2^{kaba}, \dots, p_{n-1}^{kaba}$  mertebeye kadar olan baloncuk fonksiyonları verilsin. Her bir kaba ağ aralığını ikiye bölünce elde edilen iki ince ağ aralığında yaklaşım için kullanacağımız baloncuk fonksiyonlarının mertebesi, böldüğümüz kaba ağa ait polinom mertebesinden bir fazla olacak biçimde belirlensin. Bu durumda ince ağdaki  $2n - 2$  adet ağ aralığındaki baloncuk fonksiyonlarının mertebeleri aşağıdaki biçimde belirlenir:

$$p_{2k-1}^{ince} = p_k^{kaba} + 1, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.6)$$

$$p_{2k}^{ince} = p_{2k-1}^{ince} = p_{2k-1}^{kaba} + 1, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.7)$$

Kısaca bir ağa ait ağ aralıklarında yaklaşımda kullanılan polinom mertebelerini bir liste biçiminde  $D$  ile temsil edersek kaba ağ ve bu ağın tüm ağ aralıklarının bir kez ortadan bölünmesi ile elde edilen ince ağ arasındaki düğüm noktaları ve baloncuk fonksiyonlarının mertebe listelerinin arasındaki ilişki aşağıdaki biçimdedir:

$$L^{ince}(2k - 1) = L^{kaba}(k), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1.8)$$

$$L^{ince}(2k) = \frac{L^{kaba}(k) + L^{kaba}(k + 1)}{2}, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.9)$$

$$D^{ince}(2k - 1) = D^{kaba}(k) + 1, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.10)$$

$$D^{ince}(2k) = D^{ince}(2k - 1) = D^{kaba}(k) + 1, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.11)$$

### 3.1.2. Ağ Aralıklarında Yaklaşım Baz Fonksiyonlarının Tanımlanması

$[a, b]$  aralığının bir parçalanışı olarak

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (3.1.12)$$

parçalanışını ele alalım. Parçalanışta,  $n - 1$  adet

$$I_i = [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (3.1.13)$$

alt aralık oluşacaktır. Parçalanışı oluşturan  $x_i$  noktaları ağımızın düğüm noktaları, her bir  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  alt aralığı ise ağımızın bir aralığı olacaktır. Yaklaşımda kullanılacak bazı, her bir ağ aralığında tanımlanan şapka fonksiyonları ve baloncuk fonksiyonlarının tümü oluşturacaktır. Ağ aralıklarında tanımlanacak baloncuk fonksiyonlarının mertebelerinin listesini

$$D = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \dots \quad p_{n-2} \quad p_{n-1}] \quad (3.1.14)$$

olarak alalım. Herbir ağ aralığındaki yaklaşım baz fonksiyonlarını aşağıdaki biçimde tanımlayacağız:

### Şapka fonksiyonları:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} (x_2 - t)/(x_2 - x_1), & t \in [x_1, x_2] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} (t - x_i)/(x_{i+1} - x_i), & x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ ise} \\ (x_{i+1} - t)/(x_{i+1} - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (3.1.16)$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} (t - x_{n-1})/(x_n - x_{n-1}), & t \in [x_{n-1}, x_n] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.1.17)$$

### Baloncuk fonksiyonları (Modifiye integre edilmiş Legendre polinomları):

İntegre edilmiş Legendre polinomlarının tanım kümesi olan  $[-1, 1]$  aralığının herhangi bir  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) ağ aralığına dönüştürülerek değiştirilmesi, ilgili integre edilmiş Legendre polinom fonksiyonunun aşağıda tanımlanan  $\psi$  fonksiyonu ile bileşkesi alınarak elde edilir:

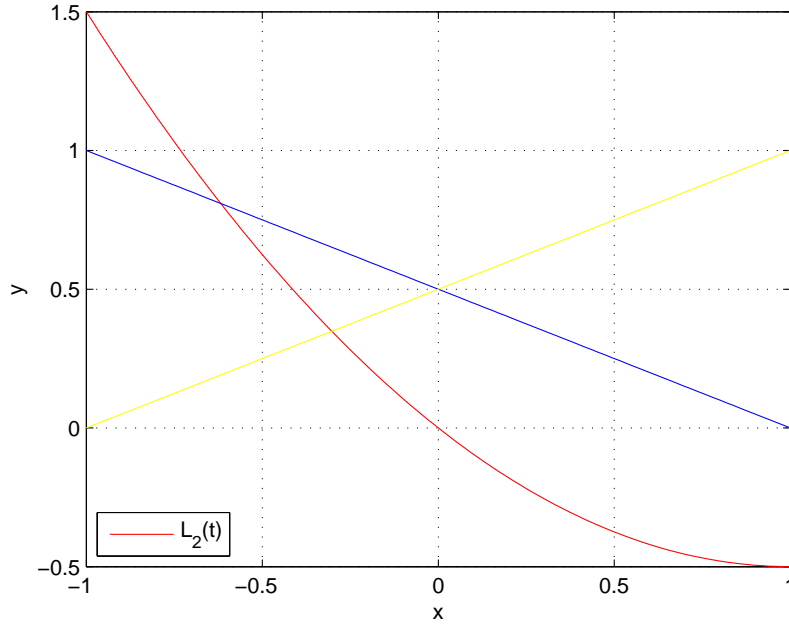
$$\begin{aligned} \psi : [x_i, x_{i+1}] &\rightarrow [-1, 1] \\ t &\rightarrow \phi(t) = \frac{2t - (x_{i+1} + x_i)}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$L_p$   $p$ . dereceden integre edilmiş Legendre polinomu olsun. Ağ aralıklarında kullanacağımız baloncuk baz fonksiyonları ağ aralığı içinde (3.1.18) ifadesindeki biçimde tanımlanan fonksiyon ile  $L_p$  fonksiyonunun bileşkesi olarak, ağ aralığı dışında ise sıfır değerini alacak biçimde tanımlanır:

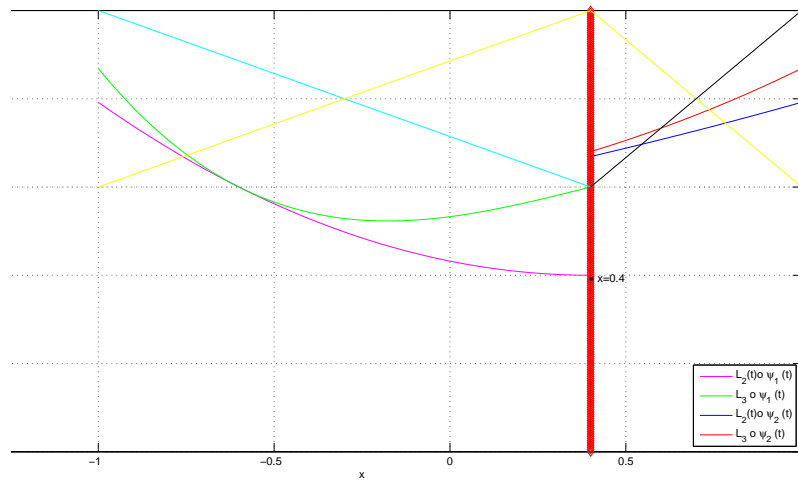
$$\varphi_{i,p}(t) = \begin{cases} L_p \circ \psi(t), & t \in [x_{i-1}, x_i] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad i = 2, \dots, n, \quad p \geq 2 \quad (3.1.19)$$

Aşağıda şekil (3.1.)'de tek bir ağ aralığından oluşan  $[-1, 1]$  ağında (yani bölünmemiş bir aralık) tanımlı şapka fonksiyonları ve 2. mertebe baloncuk fonksiyonu görülmektedir. Yani bu ağdaki baloncuk fonksiyonlarının mertebesi 2 olarak alınmıştır.  $[-1, 1]$  ağı  $x = 0.4$  noktasında ikiye bölünsün ve oluşan  $[-1, 0.4]$  ve  $[0.4, 1]$  ince ağ aralıklarında kul-

lanılacak baloncuk fonksiyonlarının mertebesi kaba ağda kullanılan baloncuk fonksiyonlarının mertebelerine bir eklenerek arttırılsın. Bu durumda her iki ince ağ aralığındaki baloncuk fonksiyonu mertebeleri 3 olacaktır. Bu şekilde oluşturulan yeni ince ağ aralıklarının herbirindeki baz fonksiyonları yukarıda açıklanan biçimlerde (3.1.15, 3.1.16, 3.1.17, 3.1.19) yeniden tanımlanır ve ince ağın grafiği şekil (3.2.)’deki gibi görünür:



**Şekil 3.1.**  $[-1, 1]$  aralığı üzerinde tanımlanmış şapka fonksiyonları ve 2. derece integre edilmiş Legendre polinomu



**Şekil 3.2.**  $[-1, \frac{2}{5}]$  ve  $[\frac{2}{5}, 1]$  ağ aralıklarındaki baz fonksiyonları (şapka fonksiyonları ve tanım kümeleri modifiye edilmiş olan 2. ve 3. derece integre edilmiş Legendre polinomları)



Uyarlanabilir inceltme sırasında her bir inceltmede yaklaşım için kullanılan baz değişime uğrayacağından, çözüm için gerekli matrislerin hesaplanmasının kolaylığı adına söz konusu yaklaşım baz fonksiyonları belli bir sıraya göre indislenmiştir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

olmak üzere  $n$  adet düğüm noktasına ve  $n-1$  adet ağ aralığına sahip ağ ele alalım. Bu ağa ilişkin düğüm noktaları ve ağ aralıklarındaki yaklaşım polinomlarının mertebeleri sırası ile aşağıda belirtilen  $L$  ve  $D$  listeleri ile verilsin.

$$L = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \quad (3.1.20)$$

$$D = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \cdots \quad p_{n-2} \quad p_{n-1}] \quad (3.1.21)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$  olmak üzere  $i$ . elemanı ile  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  ağ aralığından önceki tüm ağ aralıklarındaki toplam baloncuk fonksiyonu sayısını veren liste  $S$  ile temsil edilsin:

$$S = [0 \quad p_1 - 1 \quad p_1 + p_2 - 2 \quad \cdots \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-2} - (n - 2)] \quad (3.1.22)$$

İlk  $n$  adet  $\phi_1, \dots, \phi_n$  fonksiyonları ile doğrusal şapka fonksiyonlarını temsil edeceğiz. Baloncuk fonksiyonlarının indislerinin belirlenmesi için  $S$  ve  $D$  listelerini kullanacağız.  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  olmak üzere  $i$ . ağ aralığında tanımlanan baloncuk fonksiyonları  $k = 2, \dots, D(i)$ , ( $D(i) = p_i$ ) için  $\phi_{n+(k-1)+S(i)}$  olarak indislenir. Buna göre  $i$ . ağ aralığındaki baloncuk baz fonksiyonları

$$\phi_{n+1+S(i)}, \quad \phi_{n+2+S(i)}, \dots, \phi_{n+(p_i-1)+S(i)} \quad (3.1.23)$$

olacaktır.

## 3.2. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemlerin Uyarlanabilir İnceltme Kullanılarak Galerkin Yöntemi ile Çözümü

İkinci tip Fredholm integral denklemini ele alalım:

$$\lambda x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s) ds = f(t) \quad (3.2.1)$$

$[a, b]$  aralığı üzerinde  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  şartını sağlayan düğüm noktaları listesi ve  $n - 1$  adet ağ aralığındaki yaklaşım polinomlarının mertebelerinin listesi (3.1.20) ve (3.1.21) ifadelerindeki gibi olan ağ üzerinde Galerkin izdüşüm yöntemi ile yaklaşım yapacağız. Böyle bir ağdaki toplam yaklaşım baz fonksiyonu sayısı  $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 1$  kadardır. Bu toplamı kısaca  $d$  ile temsil edelim. Baz fonksiyonları cinsinden aradığımız yaklaşık çözüm (2.8.2) ifadesine benzer biçimde

$$x(t) = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j(t), \quad t \in [a, b] \quad (3.2.2)$$

formundadır. (2.8.3) ifadesini (3.2.2) yaklaşık çözümüne uygulayarak

$$\begin{aligned} r(t) &= \lambda x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s) ds - f(t) \\ &= \sum_{j=1}^d c_j \left\{ \lambda \phi_j(t) - \int_a^b K(t, s)\phi_j(s) ds \right\} - f(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde ederiz. (2.8.4) ifadesini (3.2.3) ile birlikte uygulayarak her  $i = 1, \dots, n$  için (2.8.5) ifadesine benzer biçimde

$$\begin{aligned}
0 = \langle r, \phi_i \rangle &= \int_a^b r(t) \phi_i(t) dt \\
&= \int_a^b \left( \sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \phi_j(t) - \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) ds \right] - f(t) \right) \phi_i(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \int_a^b \phi_j(t) \phi_i(t) dt - \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) \phi_i(t) ds dt \right] \\
&\quad - \int_a^b f(t) \phi_i(t) dt
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

elde edilir. (3.2.4) ifadesini düzenlersek her  $i = 1, \dots, n$  için,

$$\sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \int_a^b \phi_j(t) \phi_i(t) dt - \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) \phi_i(t) ds dt \right] = \int_a^b f(t) \phi_i(t) dt \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Her  $i$  için açık açık yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi bulunur:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \int_a^b \phi_j(t) \phi_1(t) dt - \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) \phi_1(t) ds dt \right] &= \int_a^b f(t) \phi_1(t) dt \\
\sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \int_a^b \phi_j(t) \phi_2(t) dt - \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) \phi_2(t) ds dt \right] &= \int_a^b f(t) \phi_2(t) dt \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^d c_j \left[ \lambda \int_a^b \phi_j(t) \phi_d(t) dt - \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) \phi_d(t) ds dt \right] &= \int_a^b f(t) \phi_d(t) dt
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Bu denklem sistemini aşağıda tanımlayacağımız matrisleri kullanarak daha kısa biçimde ifade ederiz:

$$E = \begin{bmatrix} \lambda \int_a^b \phi_1(t) \phi_1(t) dt & \cdots & \lambda \int_a^b \phi_d(t) \phi_1(t) dt \\ \lambda \int_a^b \phi_1(t) \phi_2(t) dt & \cdots & \lambda \int_a^b \phi_d(t) \phi_2(t) dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \int_a^b \phi_1(t) \phi_d(t) dt & \cdots & \lambda \int_a^b \phi_d(t) \phi_d(t) dt \end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

$$K = \begin{bmatrix} \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_1(s)\phi_1(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_d(s)\phi_1(t) ds dt \\ \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_1(s)\phi_2(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_d(s)\phi_2(t) ds dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_1(s)\phi_d(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s)\phi_d(s)\phi_d(t) ds dt \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$F = \begin{bmatrix} \int_a^b f(t)\phi_1(t) dt \\ \int_a^b f(t)\phi_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f(t)\phi_d(t) dt \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

(3.2.6) denklem sistemi yukarıdaki  $E$ ,  $K$ ,  $F$  ve  $C$  matrisleri aracılığı ile kısaca

$$(E - K).C = F \quad (3.2.11)$$

biçiminde ifade ederiz. Bu durumda aradığımız (3.2.2) yaklaşık çözümüne ilişkin  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$  katsayılarını

$$C = (E - K)^{-1}.F \quad (3.2.12)$$

denklemini aracılığı ile elde ederiz.

### 3.3. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemlerin Uyarlanabilir İnceltme Kullanılarak Galerkin Yöntemi ile Çözümüne Sloan İterasyonu Uygulanması

(3.2.1) ile verilen

$$\lambda x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s) ds = f(t)$$

integral denklemini (2.9.4) ifadesine benzer biçimde düzenleyelim :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ \int_a^b K(t, s)x(s) ds + f(t) \right] \quad (3.3.1)$$

Bölüm (3.2)'de tanıtilan ince ağı ele alalım. Galerkin izdüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen ince ağ çözümünü ve (3.3.1) ifadesini kullanarak bu çözümün yinelenmiş (iterated) halinin nasıl elde edildiğini açıklayacağız.

Öncelikle kullandığımız kavramları hatırlayalım: Kaba ağ, kaba ağdan elde edilen ince ağ ve Galerkin izdüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen ince ağ çözümü.

$a = t_1^{kaba} < t_2^{kaba} < \dots < t_n^{kaba} = b$  olmak üzere

**Kaba ağ:**

$$L_{kaba} = [t_1^{kaba} \quad t_2^{kaba} \quad \dots \quad t_n^{kaba}] \quad (3.3.2)$$

$$D_{kaba} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \dots \quad p_{n-2} \quad p_{n-1}] \quad (3.3.3)$$

**İnce ağ:**

$$\begin{aligned} L_{ince} &= [t_1^{kaba} \quad (t_1^{kaba} + t_2^{kaba})/2 \quad t_2^{kaba} \quad \dots \quad t_{n-1}^{kaba} \quad (t_{n-1}^{kaba} + t_n^{kaba})/2 \quad t_n^{kaba}] \\ &= [t_1^{ince} \quad t_2^{ince} \quad t_3^{ince} \quad \dots \quad t_{2n-2}^{ince} \quad t_{2n-1}^{ince}] \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$d = 2(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}) + 2n - 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{ince} &= [p_1^{kaba} + 1 \quad p_1^{kaba} + 1 \quad p_2^{kaba} + 1 \quad p_2^{kaba} + 1 \quad \dots \quad p_{n-1}^{kaba} + 1 \quad p_{n-1}^{kaba} + 1] \\ &= [p_1^{ince} \quad p_2^{ince} \quad p_3^{ince} \quad \dots \quad p_{d-1}^{ince} \quad p_d^{ince}] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

**Galerkin izdüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen ince ağ çözüümü:**

$$x(t) = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j(t), \quad t \in [a, b]$$

(3.3.1) eşitliğinin sağ tarafına (3.2.2) ifadesini yerleştirerek aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) + \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) ds \right] \quad (3.3.6)$$

(3.3.6) ifadesi (3.2.2) ince ağ çözüümüne Sloan iterasyonu uygulanması sonucu elde edilen yaklaşık çözüümdür. İster ince ağdaki düğüm noktası sayısı kadar ister daha fazla noktada fonksiyon değerleri hesaplanarak yaklaşık çözüüme ilişkin değerler elde edilip ilgili çözüümlerin gerçek çözüümleri ile karşılaştırmalar yapılabilir. Durumu genellemek adına (3.3.6) yinelenmiş çözüümünün ince ağdaki düğüm noktalarının sayısından daha büyük veya eşit olacak biçimde seçeceğimiz  $N$  sayısı kadar noktadaki değerlerini hesaplayalım:

$$a = \bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{t}_3 \dots \quad \bar{t}_{N-1} \quad \bar{t}_N, \quad N \geq n,$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(\bar{t}_1) &= \frac{1}{\lambda} \left[ f(\bar{t}_1) + \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b K(\bar{t}_1, s) \phi_j(s) ds \right] \\ \hat{x}(\bar{t}_2) &= \frac{1}{\lambda} \left[ f(\bar{t}_2) + \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b K(\bar{t}_2, s) \phi_j(s) ds \right] \\ &\vdots \\ \hat{x}(\bar{t}_N) &= \frac{1}{\lambda} \left[ f(\bar{t}_N) + \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b K(\bar{t}_N, s) \phi_j(s) ds \right] \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

(3.3.7) denklem sistemini aşağıda tanımlanan matrisleri kullanarak matris formunda daha sade bir biçimde ifade edebiliriz:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}(\bar{t}_1) \\ \hat{x}(\bar{t}_2) \\ \vdots \\ \hat{x}(\bar{t}_N) \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

$$M = \begin{bmatrix} \int_a^b K(\bar{t}_1, s)\phi_1(s) ds & \cdots & \int_a^b K(\bar{t}_1, s)\phi_d(s) ds \\ \int_a^b K(\bar{t}_2, s)\phi_1(s) ds & \cdots & \int_a^b K(\bar{t}_2, s)\phi_d(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b K(\bar{t}_N, s)\phi_1(s) ds & \cdots & \int_a^b K(\bar{t}_N, s)\phi_d(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

$$F = \begin{bmatrix} f(\bar{t}_1) \\ f(\bar{t}_2) \\ \vdots \\ f(\bar{t}_N) \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

$C$  matrisi (3.2.10) ifadesinde belirtilen katsayılar matrisi olmak üzere Galerkin izdüşüm yöntemi ile elde edilen çözümün Sloan iterasyon mantığı ile yinelenmesi (iterate) sonucu elde edilen (3.3.7) değerleri yukarıda tanımlanan (3.3.9), (3.3.10) matrisleri de kullanılarak matris formunda kısaca aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{X} = \frac{1}{\lambda}(F + M.C) \quad (3.3.11)$$

### 3.4. Galerkin İzdüşüm Yöntemi için Optimal Ağ Seçimi

2.11.3. kısımda (2.11.22) sayılı optimizasyon problemini hatırlayalım:

$$\frac{\|u - \Pi_{hp} u\|_{H^1(0,l)}^2 - \|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{H^1(0,l)}^2}{N_{hp_{opt}} - N_{hp}} \rightarrow \min.$$

Buradaki ifadede tanım kümesinin  $(0, l)$  aralığı olarak alınmasının nedeni, referans alınan kaynakta çalışılmış olan problemin tanım kümesinin  $(0, l)$  aralığı formunda olmasıdır. Biz çözmek istediğimiz problemin tanım kümesine bağlı kalacağımız için bunu yerine keyfi  $(a, b)$  aralıkları üzerinde çalışacağız. Optimal ağ seçiminde ise kısım 2.8.2’de açıklandığı gibi izdüşüm yöntemlerinden Galerkin izdüşüm yöntemi kullanılırken üzerinde çalışılan Hilbert uzayı  $L^2(a, b)$  olduğundan bu uzay üzerinde tanımlı olan  $L^2$  normunu kullanacağız. Bu durumda optimizasyon problemi aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$\frac{\|u - \Pi_{hp}u\|_{L^2(a,b)}^2 - \|u - \Pi_{hp_{opt}}u\|_{L^2(a,b)}^2}{N_{hp_{opt}} - N_{hp}} \rightarrow \min. \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) ifadesinin değerini hesaplayabilmek için  $L^2$ -iç çarpımını ve  $L^2$ -izdüşümünü kullanacağız. Optimal ağı belirlerken ilk ağ aralığından başlayarak tüm ağ aralıklarını sıra ile tarayacağız. Yani her ağ aralığında (3.4.1) problemini çözerek o ağ aralığındaki optimal seçimi belirleyeceğiz.

Hesaplamaların kolayca anlaşılabilmesi için kaba ağıımızı bölünmemiş bir aralık olarak seçelim:

$$a \leq b, \quad p \geq 2 \quad \text{olmak üzere} \quad L_{kaba} = [a \quad b], \quad D_{kaba} = [p] \quad (3.4.2)$$

Bu kaba ağı bir kez orta noktasından bölerek ve oluşan yeni ağ aralıklarındaki yaklaşım baz fonksiyonlarının mertebelerine 1 ekleyerek ince ağı oluşturalım:

$$L_{ince} = [a \quad \frac{a+b}{2} \quad b], \quad D_{ince} = [p+1 \quad p+1] \quad (3.4.3)$$

Bu iki ağ arasında dört farklı optimal ağ adayı oluşur:

Aralığı bölmeden yalnızca yaklaşım baz fonksiyonlarının mertebesine 1 eklenmesi ile oluşan ağ

$$L_{opt} = [a \quad b], \quad D_{opt} = [p+1] \quad (3.4.4)$$

veya

aralığı orta noktasından bölerek, fakat oluşan yeni ağ aralıklarındaki yaklaşım baz fonk-



siyonlarının mertebelerini kaba ağdaki ile aynı değer olarak oluşan ağ

$$L_{opt} = [a \quad \frac{a+b}{2} \quad b], \quad D_{opt} = [p \quad p] \quad (3.4.5)$$

veya

aralığı orta noktasından bölerek oluşan yeni ağ aralıklarından yalnızca birinde yaklaşım baz fonksiyonlarının mertebesine 1 ekleyerek ve diğerini kaba ağdaki ile aynı değer olarak oluşan ağlar

$$L_{opt} = [a \quad \frac{a+b}{2} \quad b], \quad D_{opt} = [p \quad p+1] \quad (3.4.6)$$

$$L_{opt} = [a \quad \frac{a+b}{2} \quad b], \quad D_{opt} = [p+1 \quad p] \quad (3.4.7)$$

İlk olarak  $u$  ince ağ çözümünün, sırası ile kaba ağ ve optimal ağ aralığı seçimi üzerine  $L^2$ -izdüşümlerini hesaplayacağız.  $\Pi_{hp}u$  ve  $\Pi_{hp_{opt}}u$  fonksiyonları sırası ile kaba ağ ve ele alınan optimal ağ aralığı seçimi üzerine  $L^2$ -izdüşümleri olsunlar.  $d^{kaba}$  ve  $d^{opt}$  sırası ile kaba ağ aralığı ve ele alınan optimal ağ aralığı seçimi üzerindeki yaklaşım baz fonksiyonların sayılarını temsil etmektedirler.

$$u = \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince} \quad (3.4.8)$$

$$\Pi_{hp}u = \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \quad (3.4.9)$$

$$\Pi_{hp_{opt}}u = \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \quad (3.4.10)$$

(3.4.8), (3.4.9) ve (3.4.10) ifadelerine ilişkin katsayıları aşağıdaki matrisler ile temsil ede-

$$\text{lim: } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{d^{ince}} \end{bmatrix}, \quad \xi^{kaba} = \begin{bmatrix} \xi_1^{kaba} \\ \xi_2^{kaba} \\ \vdots \\ \xi_{d^{kaba}}^{kaba} \end{bmatrix}, \quad \xi^{opt} = \begin{bmatrix} \xi_1^{opt} \\ \xi_2^{opt} \\ \vdots \\ \xi_{d^{opt}}^{opt} \end{bmatrix} \quad L^2\text{-izdüşümlerine ilişkin yu-}$$

karındaki katsayı matrislerini hesaplayabilmek için kısım 2.10'da geçen (2.10.11) ifadesinden yararlacağız.

### 3.4.1. İnce Ağ Galerkin İzdüşüm Yöntemi Çözümünün Kaba Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması

(2.10.11) ifadesinde  $f$  yerine (3.4.8) ile verilen  $u$  ince ağ çözümü yerleştirilim ve kaba ağ üzerindeki  $\left\{ \phi_j^{kaba} \right\}_{j=1}^{d^{kaba}}$  yaklaşım baz fonksiyonlarını göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \int_a^b u \phi_k^{kaba} &= \int_a^b \Pi_{hp}u \phi_k^{kaba}, \quad \forall k = 1, \dots, d^{kaba} \\ \int_a^b \left( \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince} \right) \phi_k^{kaba} &= \int_a^b \left( \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right) \phi_k^{kaba}, \quad \forall k = 1, \dots, d^{kaba} \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_k^{kaba} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( \xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba} \phi_k^{kaba} \right), \quad \forall k = 1, \dots, d^{kaba} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

(3.4.11) ifadesini her  $k$  değeri açıkça yazarak oluşan sistemi matris formunda ifade ederek ince ağ çözümü kaba ağ üzerine  $L^2$ -izdüşümünün katsayılar matrisi olan  $\xi^{kaba}$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz. Her  $k = 1, \dots, d^{kaba}$  değeri için (3.4.11) eşitliğini açıkça yazalım:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_1^{kaba} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( \xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba} \phi_1^{kaba} \right), \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_2^{kaba} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( \xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba} \phi_2^{kaba} \right), \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_{d^{kaba}}^{kaba} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( \xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba} \phi_{d^{kaba}}^{kaba} \right) \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

(3.4.12) sistemini matris formuna aşağıdaki biçimde getiririz:

$$Z^{kaba} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{kaba}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{kaba}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{kaba}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{kaba}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.13)$$

ve

$$M^{kaba} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{kaba}(s) \phi_1^{kaba}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{kaba}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{kaba}(s) \phi_1^{kaba}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{kaba}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) \phi_1^{kaba}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.14)$$

olmak üzere  $\xi^{kaba}$  katsayı matrisi

$$Z^{kaba} . C = M^{kaba} . \xi^{kaba} \quad (3.4.15)$$

$$\xi^{kaba} = (M^{kaba})^{-1} . Z^{kaba} . C \quad (3.4.16)$$

şeklinde elde edilir. Kaba ağ üzerinde tanımlı yaklaşım baz fonksiyonlarını matris formunda

$$B^{kaba} = \begin{bmatrix} \phi_1^{kaba} & \phi_2^{kaba} & \cdots & \phi_{d^{kaba}}^{kaba} \end{bmatrix}$$

olarak alırsak  $\Pi_{hp}u$  izdüşüm fonksiyonunu

$$\Pi_{hp}u = B^{kaba} . \xi^{kaba}$$

olarak ifade edebiliriz.

İnce ağ çözümünün olası dört optimal ağ seçeneklerinden herhangi biri üzerine yapılan  $L^2$ -izdüşümü de benzer şekilde elde edilir.

### 3.4.2. İnce Ağ Galerkin İzdüşüm Yöntemi Çözümünün Optimal Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp_{opt}}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması

(2.10.11) ifadesinde  $f$  yerine (3.4.8) ile verilen  $u$  ince ağ çözümü yerleştirilim ve optimal ağ üzerindeki  $\left\{ \phi_j^{opt} \right\}_{j=1}^{d^{opt}}$  yaklaşım baz fonksiyonlarını göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \int_a^b u \phi_k^{opt} &= \int_a^b \Pi_{hp_{opt}}u \phi_k^{opt}, \quad \forall k = 1, \dots, d^{opt} \\ \int_a^b \left( \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince} \right) \phi_k^{opt} &= \int_a^b \left( \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right) \phi_k^{opt}, \quad \forall k = 1, \dots, d^{opt} \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_k^{opt} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt} \phi_k^{opt} \right), \quad \forall k = 1, \dots, d^{opt} \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

(3.4.17) ifadesini her  $k$  değeri açıkça yazarak oluşan sistemi matris formunda ifade ederek ince ağ çözümünün kaba ağ üzerine  $L^2$ -izdüşümünün katsayılar matrisi olan  $\xi^{opt}$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz. Her  $k = 1, \dots, d^{opt}$  değeri için (3.4.17) eşitliğini açıkça yazalım:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_1^{opt} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt} \phi_1^{opt} \right), \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_2^{opt} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt} \phi_2^{opt} \right), \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_{i=1}^{d^{ince}} \left( c_i \int_a^b \phi_i^{ince} \phi_{d^{opt}}^{opt} \right) &= \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt} \phi_{d^{opt}}^{opt} \right) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

(3.4.18) sistemini matris formuna aşağıdaki biçimde getiririz:

$$Z^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_1^{ince}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

ve

$$M^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.20)$$

olmak üzere  $\xi^{opt}$  katsayı matrisi

$$Z^{opt} \cdot C = M^{opt} \cdot \xi^{opt}$$

$$\xi^{opt} = (M^{opt})^{-1} \cdot Z^{opt} \cdot C \quad (3.4.21)$$

şeklinde elde edilir. Kaba ağ üzerinde tanımlı yaklaşım baz fonksiyonlarını matris formunda

$$B^{opt} = \begin{bmatrix} \phi_1^{opt} & \phi_2^{opt} & \cdots & \phi_{d^{opt}}^{opt} \end{bmatrix}$$

olarak alırsak  $\Pi_{h_{p_{opt}}} u$  izdüşüm fonksiyonunu,

$$\Pi_{h_{p_{opt}}} u = B^{opt} \cdot \xi^{opt}$$

olarak ifade edebiliriz.

(3.4.1) optimizasyon problemini çözerken ihtiyaç duyacağımız  $\|u - \Pi_{h_p} u\|_{L^2(a,b)}^2$  ve

$\|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{L^2(a,b)}^2$  değerlerinin hesaplanması aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u - \Pi_{hp} u, u - \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - 2\langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} + \langle \Pi_{hp} u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u - \Pi_{hp_{opt}} u, u - \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - 2\langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} + \langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

$$\begin{aligned} \langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \left\langle \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \int_b^a \left( \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince}(s) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba}(s) \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^{d^{ince}} \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( c_i \xi_j^{kaba} \int_b^a \phi_i^{ince}(s) \phi_j^{kaba}(s) ds \right) \\ &= (\xi^{kaba})^T . Z^{kaba} . C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \left\langle \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \int_b^a \left( \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \phi_i^{ince}(s) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt}(s) \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^{d^{ince}} \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( c_i \xi_j^{opt} \int_b^a \phi_i^{ince}(s) \phi_j^{opt}(s) ds \right) \\ &= (\xi^{opt})^T . Z^{opt} . C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \left\langle \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j, \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j \right\rangle_{L^2(a,b)} \\
&= \int_b^a \left( \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j(s) \right) \left( \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j(s) \right) ds \\
&= \sum_{i=1}^{d^{opt}} \sum_{j=1}^{d^{opt}} \left( \xi_i^{opt} \xi_j^{opt} \int_b^a \phi_i^{opt}(s) \phi_j^{opt}(s) ds \right) \\
&= (\xi^{opt})^T . M^{opt} . \xi^{opt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_{hp} u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \left\langle \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j, \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j \right\rangle_{L^2(a,b)} \\
&= \int_b^a \left( \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j(s) \right) \left( \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j(s) \right) ds \\
&= \sum_{i=1}^{d^{kaba}} \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \left( \xi_i^{kaba} \xi_j^{kaba} \int_b^a \phi_i^{kaba}(s) \phi_j^{kaba}(s) ds \right) \\
&= (\xi^{kaba})^T . M^{kaba} . \xi^{kaba}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki hesaplamaların sonuçlarını daha kısa ve düzenli bir biçimde yazalım:

$$\langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} = (\xi^{kaba})^T . Z^{kaba} . C \quad (3.4.24)$$

$$\langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} = (\xi^{opt})^T . Z^{opt} . C \quad (3.4.25)$$

$$\langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} = (\xi^{opt})^T . M^{opt} . \xi^{opt} \quad (3.4.26)$$

$$\langle \Pi_{hp} u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} = (\xi^{kaba})^T . M^{kaba} . \xi^{kaba} \quad (3.4.27)$$

(3.4.24) ve (3.4.27) ifadelerini (3.4.22) eşitliğinde; (3.4.25) ve (3.4.26) ifadelerini de (3.4.23) eşitliğinde yerleştirelim:

$$\begin{aligned}
\|u - \Pi_{hp}u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u, u \rangle - 2(\xi^{kaba})^T . Z^{kaba} . C + (\xi^{kaba})^T . M^{kaba} . \xi^{kaba} \\
&= \langle u, u \rangle - 2C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba} . C \\
&\quad + C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . M^{kaba} . (M^{kaba})^{-1} . Z^{kaba} . C \\
&= \langle u, u \rangle - 2C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba} . C \\
&\quad + C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba} . C \\
&= \langle u, u \rangle - C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba} . C
\end{aligned}$$

$$\|u - \Pi_{hp}u\|_{L^2(a,b)}^2 = \langle u, u \rangle - C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba} . C \quad (3.4.28)$$

$$\begin{aligned}
\|u - \Pi_{hp_{opt}}u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u, u \rangle - 2(\xi^{opt})^T . Z^{opt} . C + (\xi^{opt})^T . M^{opt} . \xi^{opt} \\
&= \langle u, u \rangle - 2C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} . C \\
&\quad + C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . M^{opt} . (M^{opt})^{-1} . Z^{opt} . C \\
&= \langle u, u \rangle - 2C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} . C \\
&\quad + C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} . C \\
&= \langle u, u \rangle - C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} . C
\end{aligned}$$

$$\|u - \Pi_{hp_{opt}}u\|_{L^2(a,b)}^2 = \langle u, u \rangle - C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} . C \quad (3.4.29)$$

Böylece (3.4.1) optimizasyon probleminde 3.4.28 ve 3.4.29 ifadelerinin kullanılması ile küçültme uygulanacak ifade aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{C^T . [(Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T . Z^{opt} - (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T . Z^{kaba}] . C}{d^{opt} - d^{kaba}} \quad (3.4.30)$$



(3.4.30) değeri daha önce bahsedilen dört optimal ağ seçeneği için hesaplanır ve kaba ağ en küçük değeri veren optimal ağ biçiminde yenilenir. İşlemlerin daha kolay anlaşılması için öncelikle tek bir aralıktan oluşan bir kaba ağı bir kez bölerek çalışacağımızı belirtmiştik. Bu işlem oluşan ince ağın kaba ağ olarak ele alınması ile tekrarlanabilir. Bu durumda kaba ağ birden fazla ağ aralığından oluşabilir ya da ele alınan ilk kaba ağ birden fazla ağ aralığına sahip olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda yukarıdaki işlemler her ağ aralığı için sırayla tekrarlanır. Yani kaba ağın keyfi bir ağ aralığından elde edilen ince ağa ait iki ağ aralığı ve olası optimal durumlar belirlenerek çözümün bu iki ince ağ aralığı üzerindeki kısmının kaba ağ aralığı ve optimal durumlar üzerine izdüşümleri hesaplanarak yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Her işlem sonunda elde edilen optimal ağ seçimi sıra ile birbirine eklenerek yeni bir ağ elde edilir. Ancak bu eklemeler yapılırken ağın tamamında oluşacak olan izdüşüm fonksiyonun kaba ağa ilişkin düğüm noktalarında sürekliliğini sağlamak için hesaplanan izdüşüm fonksiyonları ile ince ağ çözüm fonksiyonu  $u$ 'nun bu noktalardaki değerlerini eşit alacağız. İlk olarak (3.4.4) optimal ağ seçimi üzerine yapılan  $\Pi_{hp_{opt}} u$  izdüşümünü ele alalım.  $\Pi_{hp_{opt}} u$  izdüşüm fonksiyonu ile ince ağ çözümü  $u$ 'nun kaba ağın düğüm noktalarındaki aldığı değerleri eşitleyelim:

$$\begin{aligned}\Pi_{hp_{opt}} u(a) &= u(a) \\ \xi_1^{opt} \cdot \phi_1^{opt}(a) + 0 &= c_1 \cdot \phi_1^{ince}(a) + 0 \\ \xi_1^{opt} &= c_1 \\ \Pi_{hp_{opt}} u(b) &= u(b) \\ \xi_2^{opt} \cdot \phi_2^{opt}(b) + 0 &= c_3 \cdot \phi_3^{ince}(b) + 0 \\ \xi_2^{opt} &= c_3\end{aligned}$$

Bu durumda  $\xi^{opt}$  katsayılar matrisinde  $\xi_1^{opt}$  ve  $\xi_2^{opt}$  dışındaki katsayıları hesaplamak yeterli olacaktır. Bunun için öncelikle (3.4.20) ile verilen  $M^{opt}$  matrisini üç kısma ayıralım:

$$M_1^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_1^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_1^{opt}(s) ds \\ \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_1^{opt}(s) ds \end{bmatrix}, \quad M_2^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds \\ \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.31)$$

$$M_3^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_3^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_3^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_3^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.32)$$

$\xi^{opt}$  matrisinin geriye kalan katsayılarının oluşturduğu matrisi  $R$  ile gösterelim:

$$R = \begin{bmatrix} \xi_3^{opt} \\ \xi_4^{opt} \\ \vdots \\ \xi_{d^{opt}}^{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1, 1) \\ R(2, 1) \\ \vdots \\ R(d^{opt} - 2, 1) \end{bmatrix} \quad (3.4.33)$$

Bu durumda

$$c_1.M_1^{opt} + c_3.M_2^{opt} + M_3^{opt}.R = Z^{opt}.C$$

olduğundan  $R$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$R = (M_3^{opt})^{-1}.[Z^{opt}.C - c_1.M_1^{opt} + c_3.M_2^{opt}]$$

Böylelikle  $\xi^{opt}$  matrisi  $R$  matrisinde hesaplanan yeni katsayı değerleri ve sırası ile  $c_1$  ve  $c_3$ 'ye eşit alınan  $\xi_1^{opt}$  ve  $\xi_2^{opt}$  değerleri eski konumlarına yerleştirilerek aşağıdaki gibi elde

$$\text{edilir: } \xi^{opt} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ R(1, 1) \\ \vdots \\ R(d^{opt} - 2, 1) \end{bmatrix}$$

(3.4.2) kaba ağı üzerine yapılan  $\Pi_{hp}u$  izdüşüm fonksiyonunun kaba ağa ilişkin düğüm noktalarında sürekliliğini sağlamak için de yukarıdaki işlemler kaba ağa ilişkin elemanlar için tekrarlanır. Çünkü (3.4.2) kaba ağı ve (3.4.4) optimal ağ seçeneği bölünmemiş tek bir aralıktan oluştukları için yapısal olarak benzemektedirler.  $\xi^{opt}$  ve  $M^{opt}$  yerine sırası ile  $\xi^{kaba}$  ve  $M^{kaba}$  alınarak,  $d^{opt}$  yerine  $d^{kaba}$ , optimal ağ seçimindeki baz fonksiyonları yerine kaba ağ üzerinde tanımlanan baz fonksiyonları kullanılır.

Optimal ağ seçeneklerinden geriye kalan (3.4.5), (3.4.6) ve (3.4.7) optimal ağ seçenekleri de kendi aralarında yapısal olarak benzemektedirler. Bu nedenle bunlardan herhangi biri üzerine yapılan  $\Pi_{hp_{opt}}u$  izdüşüm fonksiyonunun kaba ağa ilişkin düğüm noktalarında sürekliliği benzer işlemler sonucu sağlanır.

Kaba ağın ikiye bölünmesi sonucu elde edilen iki ağ aralığından oluşan bu ağların, ağ aralıklarında kullanılan yaklaşım baz fonksiyonlarının mertebelerinin seçimleri ile farklılık gösterdiklerini hatırlayalım.  $p_1, p_2 \in \{d^{kaba}, d^{kaba} + 1\}$  olmak üzere  $p_1$  ve  $p_2$  sırası ile optimal ağ seçiminin 1. ve 2. ağ aralığında kullanılan yaklaşım baz fonksiyonlarının mertebelerini gösterebilir. Bu durumda  $d^{opt} = p_1 + p_2 + 1$  olur.

$$\begin{aligned}\Pi_{hp_{opt}}u(a) &= u(a) \\ \xi_1 \cdot \phi_1^{opt}(a) + 0 &= c_1 \cdot \phi_1^{ince}(a) + 0 \\ \xi_1 &= c_1 \\ \Pi_{hp_{opt}}u(b) &= u(b) \\ \xi_3 \cdot \phi_3^{opt}(b) + 0 &= c_3 \cdot \phi_3^{ince}(b) + 0 \\ \xi_3 &= c_3\end{aligned}$$

Bu durumda  $\xi^{opt}$  katsayılar matrisinde  $\xi_1$  ve  $\xi_3$  dışındaki katsayıları hesaplamak yeterli olacaktır. Bunun için öncelikle (3.4.20) ile verilen  $M^{opt}$  matrisini iki kısma ayıralım:

$$M_1^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_1^{opt}(s) \phi_3^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_2^{opt}(s) \phi_3^{opt}(s) ds \\ \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_1^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s) \phi_3^{opt}(s) ds \end{bmatrix}, \quad (3.4.34)$$

$$M_2^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_4^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_1^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_4^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_2^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_2^{opt}(s) ds & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_4^{opt}(s) ds & \cdots & \int_a^b \phi_{d^{opt}}^{opt}(s)\phi_{d^{opt}}^{opt}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.4.35)$$

$\xi^{opt}$  matrisinin geriye kalan katsayılarının oluşturduğu matrisi  $R$  ile gösterelim:

$$R = \begin{bmatrix} \xi_2^{opt} \\ \xi_4^{opt} \\ \vdots \\ \xi_{d^{opt}}^{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1, 1) \\ R(2, 1) \\ \vdots \\ R(d^{opt} - 2, 1) \end{bmatrix} \quad (3.4.36)$$

Bu durumda

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} . M_1^{opt} + M_2^{opt} . R = Z^{opt} . C$$

olduğundan  $R$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$R = (M_2^{opt})^{-1} . [Z^{opt} . C - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} . M_1^{opt}]$$

Böylelikle  $\xi^{opt}$  matrisi  $R$  matrisinde hesaplanan yeni katsayı değerleri ve sırası ile  $c_1$  ve  $c_3$ 'e eşit alınan  $\xi_1^{opt}$  ve  $\xi_3^{opt}$  değerleri eski konumlarına yerleştirilerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\xi^{opt} = \begin{bmatrix} c_1 \\ R(1, 1) \\ c_3 \\ R(2, 1) \\ \vdots \\ R(d^{opt} - 2, 1) \end{bmatrix}$$

Herhangi bir ağ aralığı için hesaplamalarda kullanılan bazı temel öğeler şöyle değişir: (3.3.2), (3.3.3) listeleri ile verilen kaba ağdan bir kez bölünme ile elde edilen ve (3.3.4), (3.3.5) listeleri ile tanımlı ince ağı göz önüne alalım. Kaba ağa ait keyfi bir  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  ağ aralığının bölünmesi ile ince ağda buna karşılık iki adet ağ aralığı oluşur:

$$I_{2i-1} = [t_{2i-1}, t_{2i}] \text{ ve } I_{2i} = [t_{2i}, t_{2i+1}]$$

Kaba ağ aralığında  $1 + D(i)$  adet, ince ağda bu ağ aralığına karşılık gelen iki ince ağ aralığında toplam  $3 + 2D(i)$  adet yaklaşım baz fonksiyonu vardır. Bu durumda  $d^{kaba} = 1 + D(i)$ ,  $d^{ince} = 3 + 2D(i)$  olur. İnce ağda tanımlı olan baz fonksiyonları kullanılarak Galerkin izdüşüm yöntemi ile elde edilen çözüme ilişkin  $C$  katsayılar matrisinin yalnızca  $2i - 1$ . ve  $2i$ . ağ aralıklarındaki baz fonksiyonlarına karşılık gelen  $3 + 2D(i)$  adet katsayı ile bir  $C^{yemel}$  katsayılar matrisi oluşturulur ve bu matris optimizasyon problemi-nin çözümündeki katsayılar matrisi  $C$  yerine kullanılır. Optimal durumlar için ise benzer şekilde söz konusu optimal ağ aralığında kaç adet yaklaşım baz fonksiyonu oluşuyor ise  $d^{opt}$  bu sayıya eşit değer alır:

(3.4.4) durumunda  $d^{opt} = 2 + D(i)$ , (3.4.5) durumunda  $d^{opt} = 1 + 2D(i)$ , (3.4.6) ve (3.4.7) durumlarında ise  $d^{opt} = 2 + 2D(i)$  olacaktır.

### 3.5. Galerkin İzdüşüm Yöntemi Çözümüne Uygulanan Sloan İterasyonu için Optimal Ağ Seçimi

Bu bölümde Galerkin izdüşüm yöntemi çözümüne Sloan iterasyonun uygulanması ile elde çözüme uyarlanabilir inceltme uygulayacağız. Burada da işlemlerin kolay anlaşılabilmesi adına 3.4. bölümde olduğu gibi (3.4.2) kaba ağını, bundan türeyen (3.4.3) ince ağını, (3.4.4), (3.4.5), (3.4.6) ve (3.4.7) optimal ağ durumlarını kullanacağız. (3.2.2) ifadesi ile verilen Galerkin yöntemi ile elde edilen ince ağ çözümüne, verilen Sloan iterasyonu uygulanması sonucu elde edilen (3.3.6) çözümünü hatırlayalım. (3.4.1) ile verilen optimi-

zasyon probleminde  $u$  olarak bu çözümü alacağız:

$$u(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) + \sum_{j=1}^d c_j \int_a^b K(t, s) \phi_j(s) ds \right], t \in [a, b] \quad (3.5.1)$$

Öncelikle  $u$  ince ağ çözümünün, sırası ile kaba ağ ve optimal ağ aralığı seçimi üzerine  $L^2$ -izdüşümlerini hesaplayacağız. Kaba ve optimal ağ seçimleri üzerine yapılan izdüşümleri hatırlayalım:

$$\Pi_{hp} u = \sum_{j=1}^{d^{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba}$$

$$\Pi_{hp^{opt}} u = \sum_{j=1}^{d^{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt}$$

Bu fonksiyonlara ait katsayıların matrislerini yine bir önceki bölümde olduğu gibi  $C$ ,  $\xi^{kaba}$  ve  $\xi^{opt}$  olarak temsil edeceğiz.

### 3.5.1. İnce Ağ Sloan İterasyon Çözümünün Kaba Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp} u$ Fonksiyonunun Hesaplanması

(2.10.11) ifadesinde  $f$  yerine (3.5.1) ile verilen  $u$  ince ağ çözümünü yerleştirelim ve kaba ağ üzerindeki  $\left\{ \phi_j^{kaba} \right\}_{j=1}^{d^{kaba}}$  yaklaşım baz fonksiyonlarını göz önüne alalım:  
Her  $k = 1, \dots, d^{kaba}$  değeri için,

$$\int_a^b u \phi_k^{kaba}(t) dt = \int_a^b \Pi_{hp} u \phi_k^{kaba}(t) dt$$

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_k^{kaba}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_i^{ince}(s) \phi_k^{kaba}(t) ds dt \right] \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{d^{kaba}} (\xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba}(t) \phi_k^{kaba}(t) dt) dt \quad (3.5.2)$$

eşitlikleri sağlanır. (3.5.2) ifadesini her  $k$  değeri açıkça yazarak oluşan sistemi matris formunda ifade ederek ince ağ çözümünün kaba ağ üzerine  $L^2$ -izdüşümünün katsayılar matrisi olan  $\xi^{kaba}$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz. Her  $k = 1, \dots, d^{kaba}$  değeri için

(3.5.2) eşitliğini açıkça yazalım:

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_1^{kaba}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i^{ince}(s) \phi_1^{kaba}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{kaba}} (\xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba}(t) \phi_1^{kaba}(t) dt)$$

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_2^{kaba}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i^{ince}(s) \phi_2^{kaba}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{kaba}} (\xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba}(t) \phi_2^{kaba}(t) dt)$$

⋮

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i^{ince}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{kaba}} (\xi_j^{kaba} \int_a^b \phi_j^{kaba}(t) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) dt) \quad (3.5.3)$$

(3.5.3) sistemini, (3.4.14) ifadesi ile verilen  $M^{kaba}$  matrisini ve aşağıda tanımlanan yeni matrisleri kullanarak daha sade bir formda yazabiliriz :

$$Z^{kaba} = \begin{bmatrix} \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_1^{ince}(s) \phi_1^{kaba}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_1^{kaba}(t) ds dt \\ \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_1^{ince}(s) \phi_2^{kaba}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_2^{kaba}(t) ds dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_1^{ince}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) ds dt \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

ve

$$F^{kaba} = \begin{bmatrix} \int_a^b f(t) \phi_1^{kaba}(t) dt \\ \int_a^b f(t) \phi_2^{kaba}(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f(t) \phi_{d^{kaba}}^{kaba}(t) dt \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

olmak üzere (3.5.3) sistemini

$$\frac{1}{\lambda}(F^{kaba} + Z^{kaba} \cdot C) = M^{kaba} \cdot \xi^{kaba}$$

formunda yazabiliriz. Buradan da  $\xi^{kaba}$  katsayı matrisi

$$\xi^{kaba} = \frac{1}{\lambda}(M^{kaba})^{-1} \cdot (F^{kaba} + Z^{kaba} \cdot C) \quad (3.5.6)$$

elde edilir. Kaba ağ üzerinde tanımlı yaklaşım baz fonksiyonlarını matris formunda

$$B^{kaba} = \begin{bmatrix} \phi_1^{kaba} & \phi_2^{kaba} & \dots & \phi_{d^{kaba}}^{kaba} \end{bmatrix}$$

olarak alırsak  $\Pi_{hp}u$  izdüşüm fonksiyonunu

$$\Pi_{hp}u = B^{kaba} \cdot \xi^{kaba}$$

olarak ifade edebiliriz.

İnce ağ çözümünün olası dört optimal ağ seçeneklerinden herhangi biri üzerine yapılan  $L^2$ -izdüşümü de benzer şekilde elde edilir.

### 3.5.2. İnce Ağ Sloan İterasyon Çözümünün Optimal Ağ Üzerine $L^2$ -İzdüşümü $\Pi_{hp_{opt}}u$ Fonksiyonunun Hesaplanması

(2.10.11) ifadesinde  $f$  yerine (3.5.1) ile verilen  $u$  ince ağ çözümünü yerleştirelim ve optimal ağ üzerindeki  $\left\{ \phi_j^{opt} \right\}_{j=1}^{d^{opt}}$  yaklaşım baz fonksiyonlarını göz önüne alalım:

$$\int_a^b u(t) \phi_k^{opt}(t) dt = \int_a^b \Pi_{hp_{opt}}u(t) \phi_k^{opt}(t) dt$$



$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_k^{opt}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_i^{ince}(s) \phi_k^{opt}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt}(t) \phi_k^{opt}(t) dt \right) \quad (3.5.7)$$

(3.5.7) ifadesini her  $k$  değeri açıkça yazarak oluşan sistemi matris formunda ifade ederek ince ağ çözümünün kaba ağ üzerine  $L^2$ -izdüşümünün katsayılar matrisi olan  $\xi^{opt}$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz. Her  $k = 1, \dots, d^{opt}$  değeri için (3.5.7) eşitliğini açıkça yazalım:

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_1^{opt}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_i^{ince}(s) \phi_1^{opt}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt}(t) \phi_1^{opt}(t) dt \right)$$

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_2^{opt}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_i^{ince}(s) \phi_2^{opt}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt}(t) \phi_2^{opt}(t) dt \right)$$

⋮

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\lambda} \left[ f(t) \phi_{d^{opt}}^{kaba}(t) + \sum_{i=1}^{d^{ince}} c_i \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_i^{ince}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(t) ds dt \right] \right) = \sum_{j=1}^{d_{opt}} \left( \xi_j^{opt} \int_a^b \phi_j^{opt}(t) \phi_{d^{opt}}^{opt}(t) dt \right) \quad (3.5.8)$$

(3.5.8) sistemini, (3.4.20) ifadesi ile verilen  $M^{opt}$  matrisini ve aşağıda tanımlanan yeni matrisleri kullanarak daha sade bir formda yazabiliriz :

$$Z^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_1^{ince}(s) \phi_1^{opt}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_1^{opt}(t) ds dt \\ \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_1^{ince}(s) \phi_2^{opt}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_2^{opt}(t) ds dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_1^{ince}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(t) ds dt & \cdots & \int_a^b \int_a^b K(t, s) \phi_{d^{ince}}^{ince}(s) \phi_{d^{opt}}^{opt}(t) ds dt \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

ve

$$F^{opt} = \begin{bmatrix} \int_a^b f(t) \phi_1^{opt}(t) dt \\ \int_a^b f(t) \phi_2^{opt}(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f(t) \phi_{d^{opt}}^{kaba}(t) dt \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

olmak üzere (3.5.8) sistemini

$$\frac{1}{\lambda} (F^{opt} + Z^{opt} \cdot C) = M^{opt} \cdot \xi^{opt}$$

formunda yazarız. Buradan da  $\xi^{opt}$  katsayı matrisi

$$\xi^{opt} = \frac{1}{\lambda} (M^{opt})^{-1} \cdot (F^{opt} + Z^{opt} \cdot C) \quad (3.5.11)$$

elde edilir. Kaba ağ üzerinde tanımlı yaklaşım baz fonksiyonlarını matris formunda

$$B^{opt} = \begin{bmatrix} \phi_1^{opt} & \phi_2^{opt} & \cdots & \phi_{d^{opt}}^{opt} \end{bmatrix}$$

olarak alırsak  $\Pi_{h_{p_{opt}}} u$  izdüşüm fonksiyonunu

$$\Pi_{h_{p_{opt}}} u = B^{opt} \cdot \xi^{opt}$$

olarak ifade edebiliriz.

(3.4.1) optimizasyon problemini çözerken ihtiyaç duyacağımız  $\|u - \Pi_{h_p} u\|_{L^2(a,b)}^2$  ve

$\|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{L^2(a,b)}^2$  değerlerinin hesaplanması aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u - \Pi_{hp} u, u - \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - 2\langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} + \langle \Pi_{hp} u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u - \Pi_{hp_{opt}} u, u - \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - 2\langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} + \langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} \langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \frac{1}{\lambda} \left\langle f + \sum_{i=1}^{d_{ince}} c_i \int_b^a K \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d_{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\langle f, \sum_{j=1}^{d_{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle \sum_{i=1}^{d_{ince}} c_i \int_b^a K \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d_{kaba}} \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{d_{kaba}} \xi_j^{kaba} \left\langle f, \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{d_{ince}} \sum_{j=1}^{d_{kaba}} c_i \xi_j^{kaba} \left\langle \int_b^a K \phi_i^{ince}, \xi_j^{kaba} \phi_j^{kaba} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{d_{kaba}} (\xi_j^{kaba} \int_a^b f(t) \phi_j^{kaba}(t) dt) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{d_{ince}} \sum_{j=1}^{d_{kaba}} c_i \xi_j^{kaba} \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i^{ince}(s) \phi_j^{kaba}(t) ds dt \\ &= \frac{1}{\lambda} (\xi^{kaba})^T . F^{kaba} + \frac{1}{\lambda} (\xi^{kaba})^T . Z^{kaba} . C \\ &= \frac{1}{\lambda} (\xi^{kaba})^T . (F^{kaba} + Z^{kaba} . C) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} ((F^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T + \\ &\quad + C^T . (Z^{kaba})^T . ((M^{kaba})^{-1})^T) . (F^{kaba} + Z^{kaba} . C) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} ((F^{kaba})^T + C^T . (Z^{kaba})^T) . ((M^{kaba})^{-1})^T . (F^{kaba} + Z^{kaba} . C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} &= \frac{1}{\lambda} \left\langle f + \sum_{i=1}^{d_{ince}} c_i \int_b^a K \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d_{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\
&= \frac{1}{\lambda} \left\langle f, \sum_{j=1}^{d_{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle \sum_{i=1}^{d_{ince}} c_i \int_b^a K \phi_i^{ince}, \sum_{j=1}^{d_{opt}} \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{d_{opt}} \xi_j^{opt} \left\langle f, \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{d_{ince}} \sum_{j=1}^{d_{opt}} c_i \xi_j^{opt} \left\langle \int_b^a K \phi_i^{ince}, \xi_j^{opt} \phi_j^{opt} \right\rangle_{L^2(a,b)} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{d_{opt}} (\xi_j^{opt} \int_a^b f(t) \phi_j^{opt}(t) dt) + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{d_{ince}} \sum_{j=1}^{d_{kaba}} c_i \xi_j^{kaba} \int_a^b \int_a^b K(t,s) \phi_i^{ince}(s) \phi_j^{opt}(t) ds dt \\
&= \frac{1}{\lambda} (\xi^{opt})^T . F^{opt} + \frac{1}{\lambda} (\xi^{opt})^T . Z^{opt} . C \\
&= \frac{1}{\lambda} (\xi^{opt})^T . (F^{opt} + Z^{opt} . C) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} ((F^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T + \\
&\quad + C^T . (Z^{opt})^T . ((M^{opt})^{-1})^T) . (F^{opt} + Z^{opt} . C) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} ((F^{opt})^T + C^T . (Z^{opt})^T) . ((M^{opt})^{-1})^T . (F^{opt} + Z^{opt} . C)
\end{aligned}$$

**Kısaca**

$$\langle u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)} = \frac{1}{\lambda^2} ((F^{kaba})^T + C^T . (Z^{kaba})^T) . ((M^{kaba})^{-1})^T . (F^{kaba} + Z^{kaba} . C) \quad (3.5.14)$$

ve

$$\langle u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} = \frac{1}{\lambda^2} ((F^{opt})^T + C^T . (Z^{opt})^T) . ((M^{opt})^{-1})^T . (F^{opt} + Z^{opt} . C) \quad (3.5.15)$$

olur.

$\langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)}$  ve  $\langle \Pi_{hp} u, \Pi_{hp} u \rangle_{L^2(a,b)}$  iç çarpımları (3.4.27) ve (3.4.26) ifadele-

rindeki biçimde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{hp_{opt}} u, \Pi_{hp_{opt}} u \rangle_{L^2(a,b)} &= (\xi^{opt})^T . M^{opt} . \xi^{opt} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left( (F^{opt})^T + C^T . (Z^{opt})^T \right) . ((M^{opt})^{-1})^T . \left( F^{opt} + Z^{opt} . C \right) \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{hp_{kaba}} u, \Pi_{hp_{kaba}} u \rangle_{L^2(a,b)} &= (\xi^{kaba})^T . M^{kaba} . \xi^{kaba} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left( (F^{kaba})^T + C^T . (Z^{kaba})^T \right) . ((M^{kaba})^{-1})^T . \left( F^{kaba} + Z^{kaba} . C \right) \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

(3.5.14) ve (3.5.17) ifadelerini (3.5.12) eşitliğinde; (3.5.15) ve (3.5.16) ifadelerini de (3.5.13) eşitliğinde yerleştirerek

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - \\ &\quad \frac{1}{\lambda^2} \left( (F^{kaba})^T + C^T . (Z^{kaba})^T \right) . ((M^{kaba})^{-1})^T . \left( F^{kaba} + Z^{kaba} . C \right) \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{hp_{opt}} u\|_{L^2(a,b)}^2 &= \langle u, u \rangle_{L^2(a,b)} - \\ &\quad \frac{1}{\lambda^2} \left( (F^{opt})^T + C^T . (Z^{opt})^T \right) . ((M^{opt})^{-1})^T . \left( F^{opt} + Z^{opt} . C \right) \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (3.4.1) optimizasyon probleminde 3.5.18 ve 3.5.19 ifadelerinin kullanılması ile küçültme uygulanacak ifade aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left( \left( (F^{opt})^T + C^T . (Z^{opt})^T \right) . ((M^{opt})^{-1})^T . \left( F^{opt} + Z^{opt} . C \right) - \right. \\ \left. \left( (F^{kaba})^T + C^T . (Z^{kaba})^T \right) . ((M^{kaba})^{-1})^T . \left( F^{kaba} + Z^{kaba} . C \right) \right) \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

3.4. kısmın sonunda (3.4.30) ifadesi için açıklandığı biçimde (3.5.20) değeri de daha önce bahsedilen dört optimal ağ seçeneği için hesaplanır ve kaba ağ en küçük değeri veren optimal ağ biçiminde yenilenir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### Örnek 4.1

$$x(s) - \int_0^1 e^{-\frac{(s-t)^2}{4}} x(t) dt = e^{\frac{t^2}{4}} - 2 \frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{te^{\frac{t^2}{4}}}, \quad -\pi \leq s \leq \pi$$

probleminin gerçek çözümü  $e^{\frac{t^2}{4}}$  fonksiyonudur. Kaba ağ  $L = [0 \ 1]$ ,  $D = [2]$  olsun. Ard arda yedi kez Galerkin izdüşüm yöntemi ve bu çözüme uygulanan Sloan iterasyonu sonucu elde edilen yeni ağlar,  $L^2$  hata değerleri, maksimum mutlak hata değerleri ve mutlak değer hata değerlerinin grafikleri aşağıda verilmiştir:

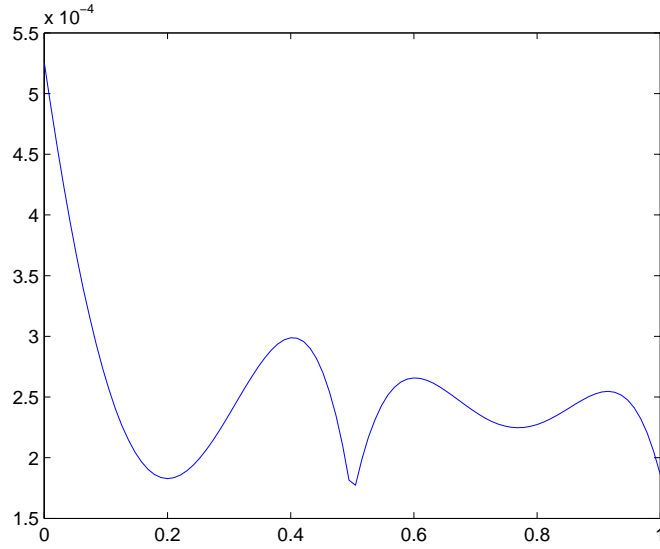
**Çizelge 4.1. Örnek 4.1 için hata değerleri tablosu**

Yürütme	$G_{L^2}$	$G_{max}$	$S_{L^2}$	$S_{max}$
I	0.000260	0.000525	0.010419	1.000233
II	0.000282	0.001273	0.006251	1.000233
III	0.000306	0.002258	0.003473	1.000233
IV	0.000352	0.004276	0.002842	1.000233
V	0.002076	0.012989	0.002404	1.000233
VI	0.003143	0.016375	0.002084	1.000267
VII	0.003837	0.032605	0.001645	1.000341

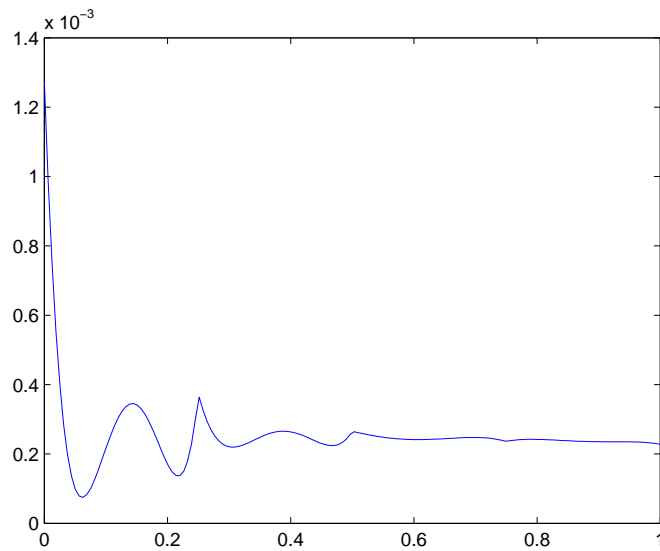
Sloan iterasyonu uygulanması sonucu elde edilen sonuçlarda sifıra yakın değerlerde çözüm fonksiyonunun üstel bir fonksiyon olmasından dolayı fark 1 değerine yakındır. Ancak hata grafiklerine bakılırsa bu noktalar dışında hata sifıra çok yakın değerlere ulaşmaktadır. Galerkin izdüşüm yönteminin yedi defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ 80 adet düğüm noktasından oluşmaktadır. Bu ağa ilişkin ağ aralıklarında kullanılan yaklaşım polinomlarına ait en yüksek mertebe 5'tir. Sloan iterasyonun yedi defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = [0 \ 1.2500e - 01 \ 2.5000e - 01 \ 3.7500e - 01 \ 5.0000e - 01 \\ 6.2500e - 01 \ 7.5000e - 01 \ 8.1250e - 01 \ 8.7500e - 01 \\ 9.3750e - 01 \ 1.0000e + 00]$$

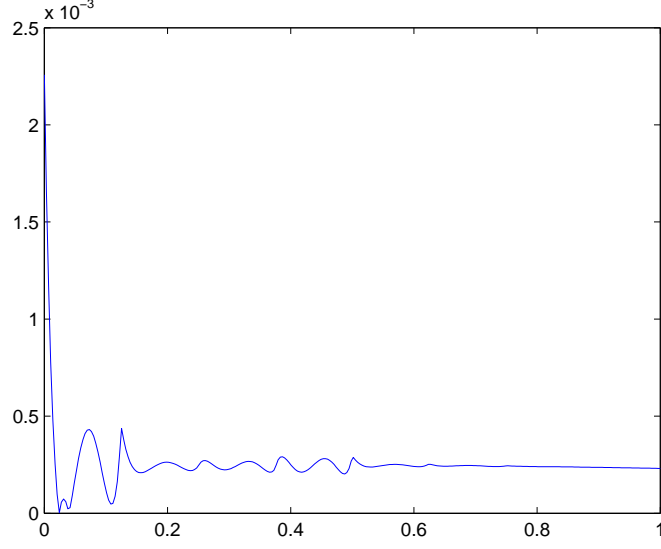
$$D = [7 \ 6 \ 8 \ 7 \ 7 \ 7 \ 6 \ 7 \ 5 \ 6]$$



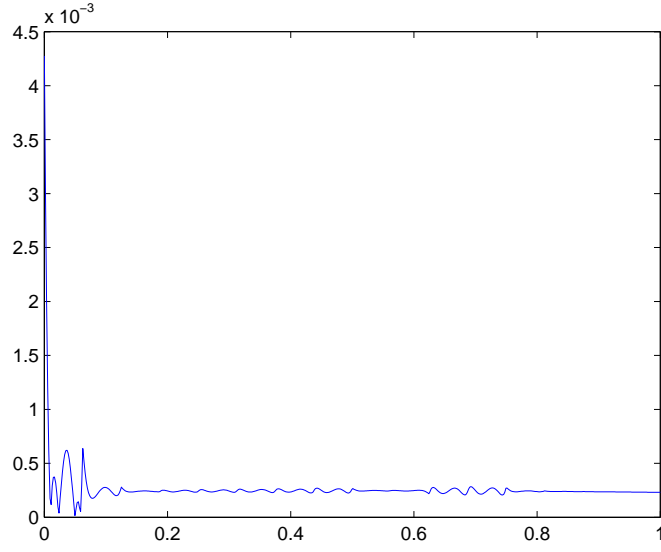
**Şekil 4.1. Örnek 4.1 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.2. Örnek 4.1 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

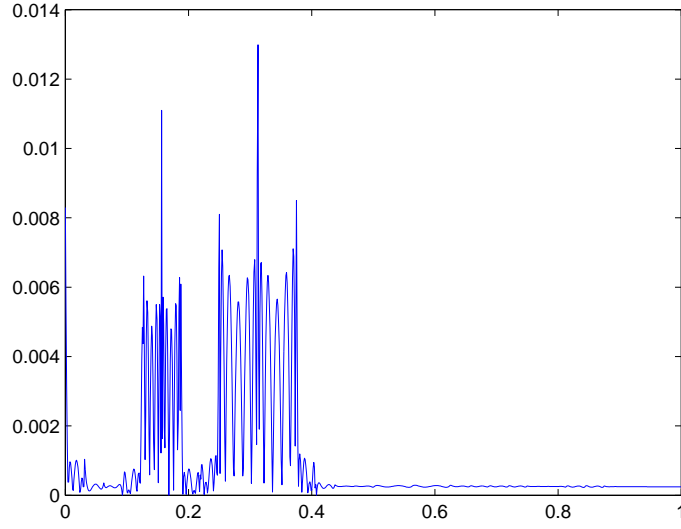


**Şekil 4.3. Örnek 4.1 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

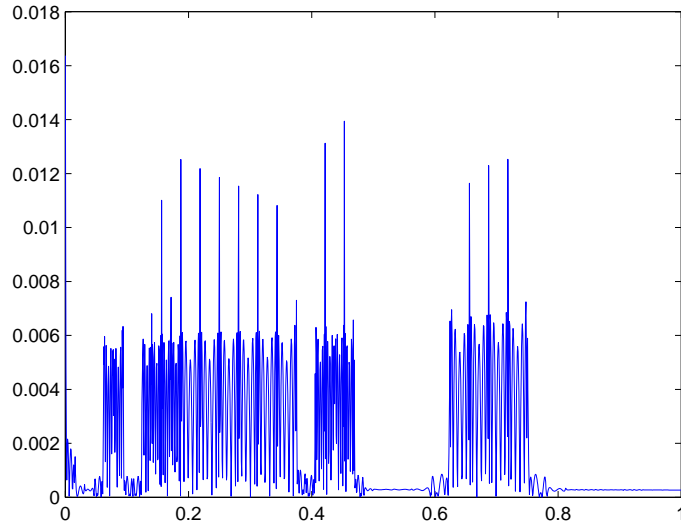


**Şekil 4.4. Örnek 4.1 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

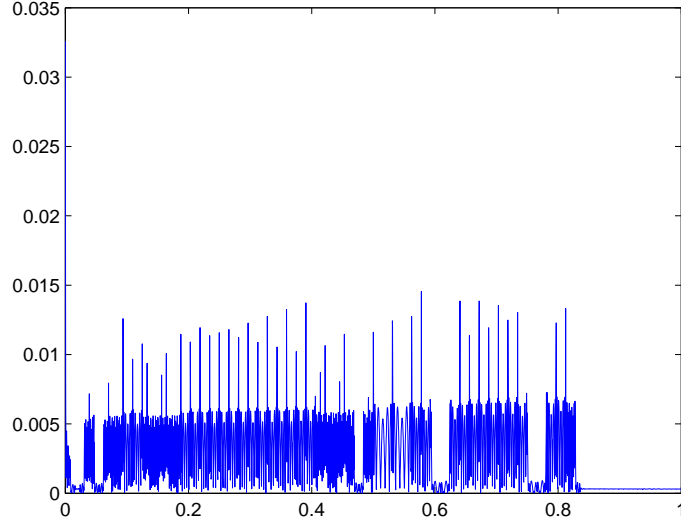




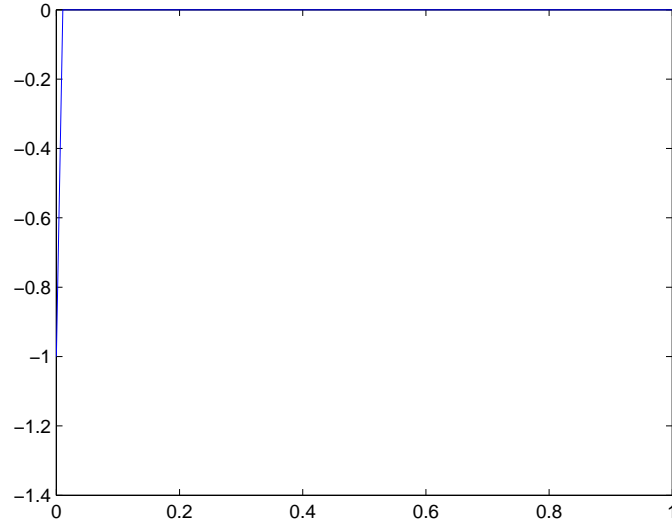
**Şekil 4.5. Örnek 4.1 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



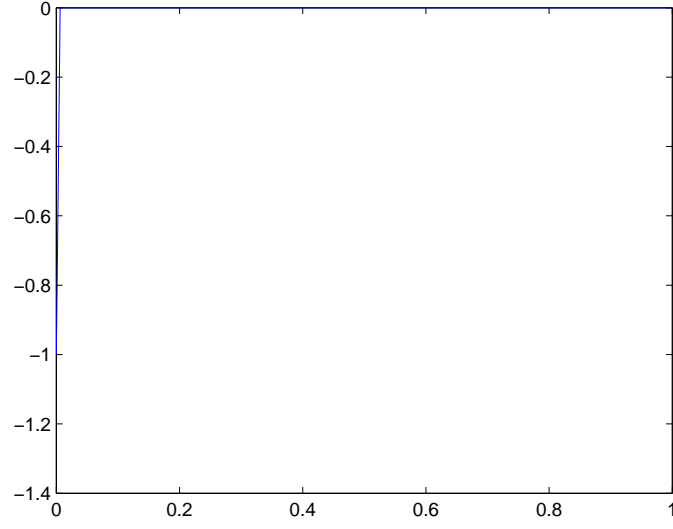
**Şekil 4.6. Örnek 4.1 için VI. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



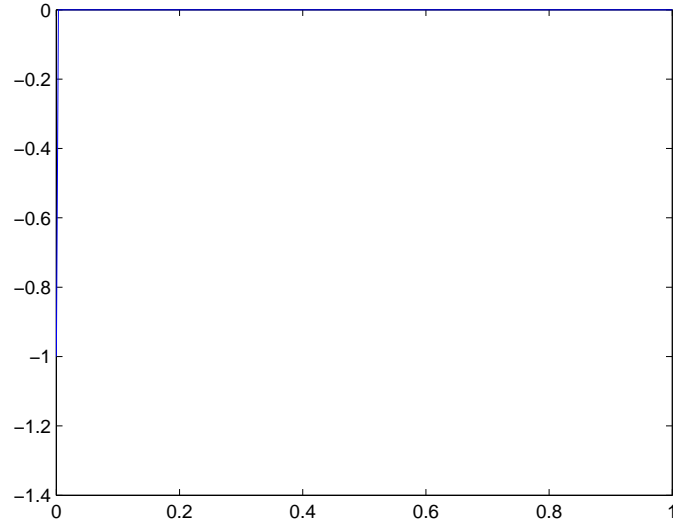
**Şekil 4.7. Örnek 4.1 için VII. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



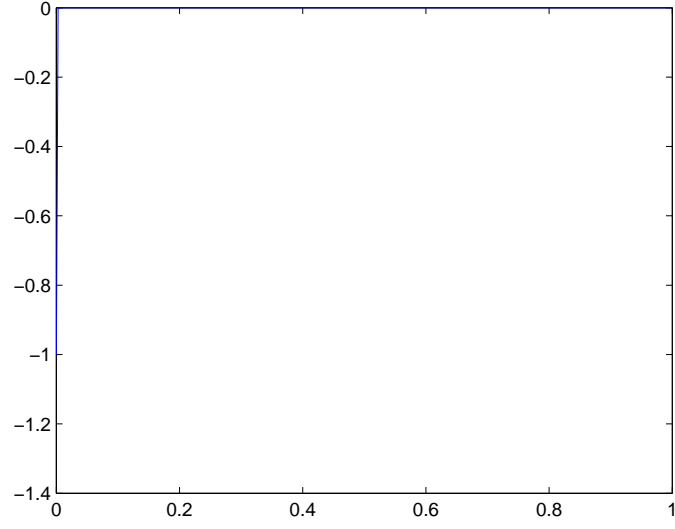
**Şekil 4.8. Örnek 4.1 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



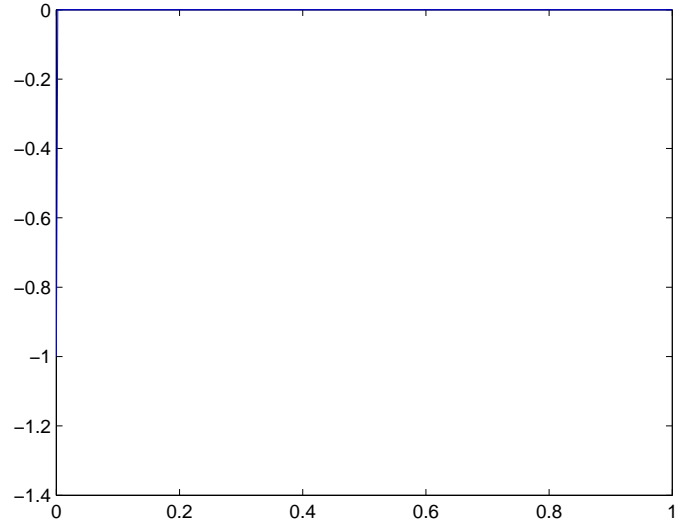
**Şekil 4.9. Örnek 4.1 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



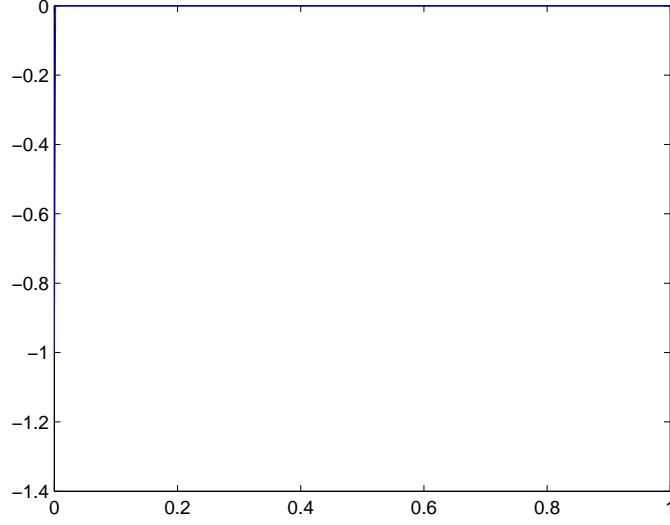
**Şekil 4.10. Örnek 4.1 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



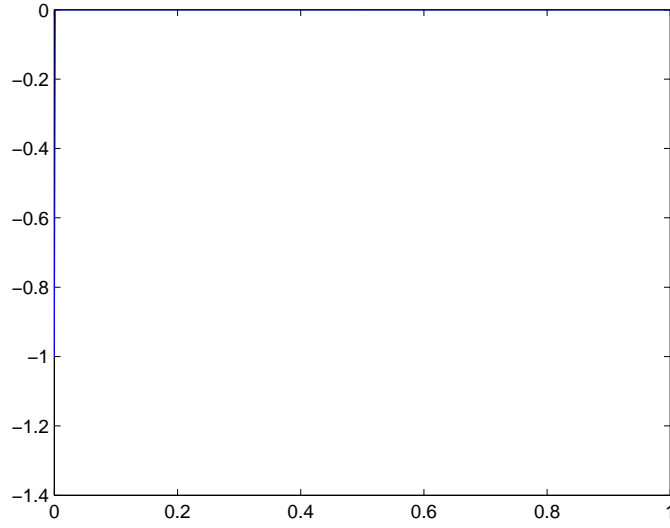
**Şekil 4.11. Örnek 4.1 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.12. Örnek 4.1 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.13. Örnek 4.1 için VI. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.14. Örnek 4.1 için VII. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

#### Örnek 4.2

$$x(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{0.3}{1 - 0.64 \cos^2\left(\frac{s+t}{2}\right)} x(t) dt = 25 - 16 \sin(s^2), \quad -\pi \leq s \leq \pi$$

probleminin gerçek çözümü  $x(t) = \frac{17}{2} + \frac{128}{7} \cos(2t)$  fonksiyonu ile verilmektedir.

Kaba ağ  $L = [-\pi \quad \pi]$ ,  $D = [2]$  olsun. Ard arda beş kez Galerkin izdüşüm yöntemi ve

bu çözüme uygulanan Sloan iterasyonu sonucu elde edilen yeni ağlar,  $L^2$  hata değerleri, maksimum mutlak hata değerleri ve mutlak değer hata grafikleri aşağıda verilmiştir:

**Çizelge 4.2. Örnek 4.2 için hata değerleri tablosu**

Yürütme	$G_{L^2}$	$G_{max}$	$S_{L^2}$	$S_{max}$
I	3.807778	3.962758	0.061422	0.040544
II	0.368150	0.473480	0.000014	0.000010
III	0.039806	0.067508	0.000014	0.000010
IV	0.001231	0.002006	0.000005	0.000005
V	0.001706	0.003876	0.000000	0.000000

Galerkin izdüşüm yönteminin beş defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

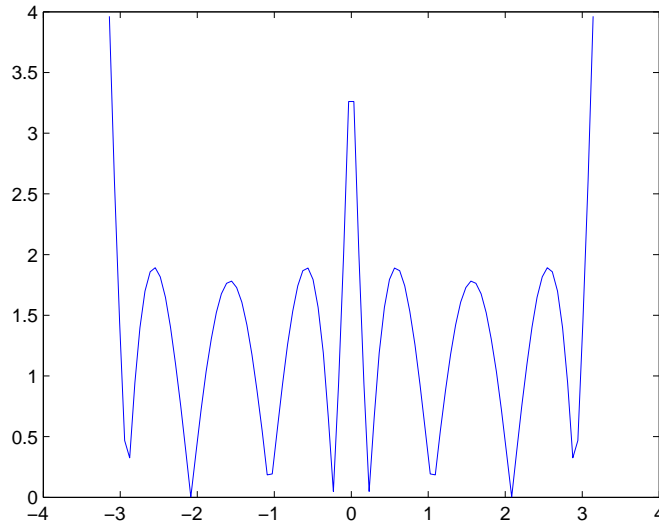
$$L = [-3.1416e + 00 \quad -2.7489e + 00 \quad -2.3562e + 00 \quad -1.5708e + 00 \\ -7.8540e - 01 \quad 0 \quad 1.5708e + 00 \quad 3.1416e + 00]$$

$$D = [5 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7]$$

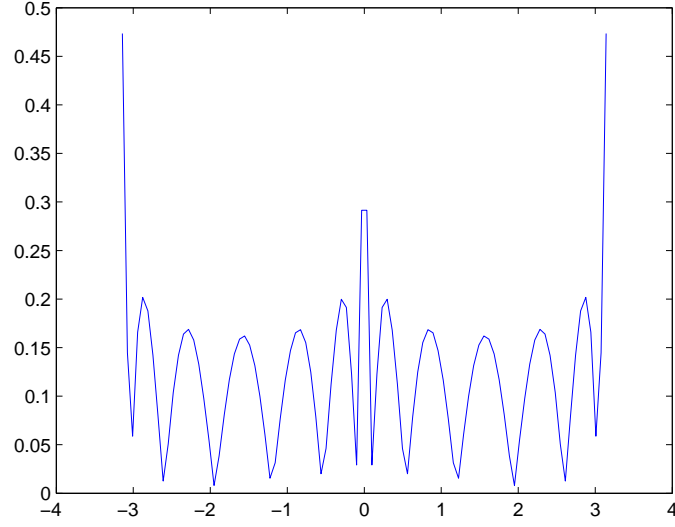
Sloan iterasyonunun beş defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = [-3.1416e + 00 \quad -1.5708e + 00 \quad -7.8540e - 01 \quad 0 \\ 1.5708e + 00 \quad 2.3562e + 00 \quad 3.1416e + 00]$$

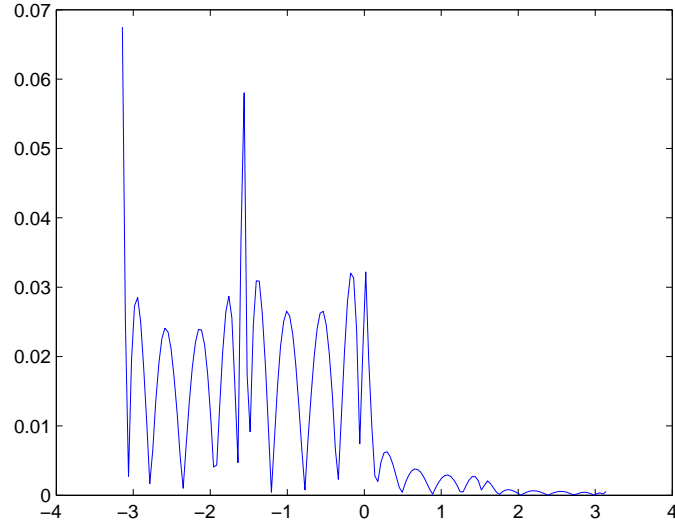
$$D = [5 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 4]$$



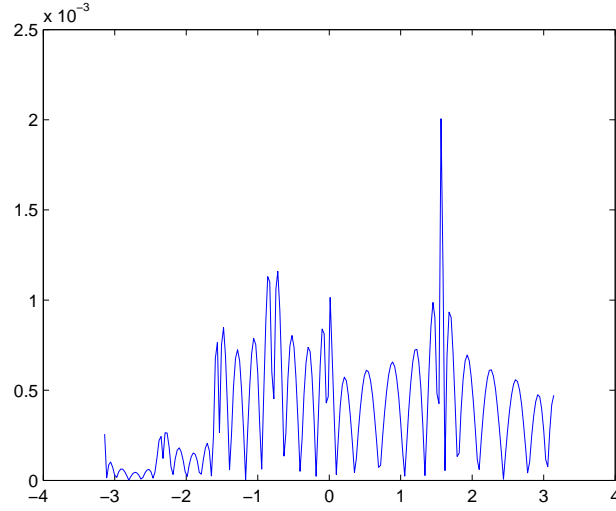
**Şekil 4.15. Örnek 4.2 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



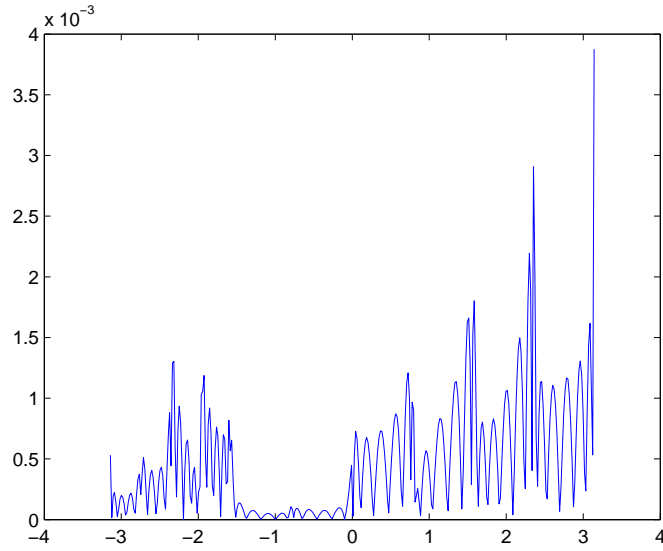
**Şekil 4.16. Örnek 4.2 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.17. Örnek 4.2 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

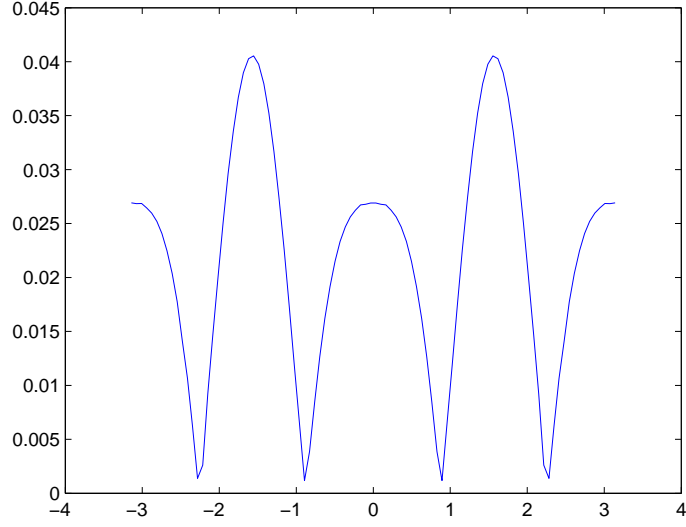


**Şekil 4.18. Örnek 4.2 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

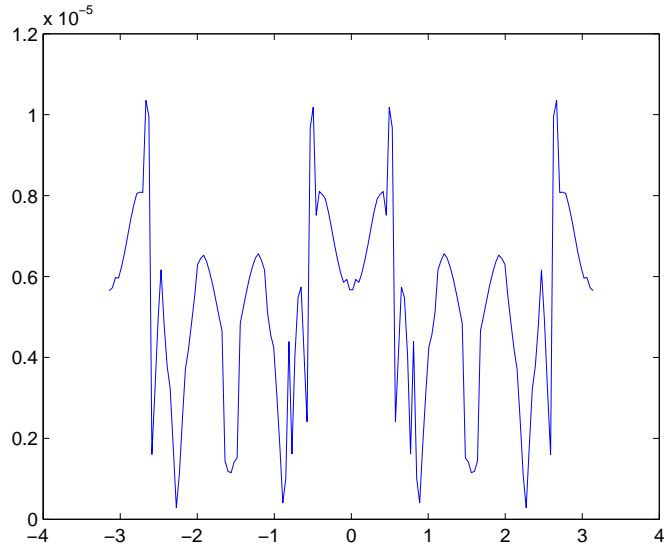


**Şekil 4.19. Örnek 4.2 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

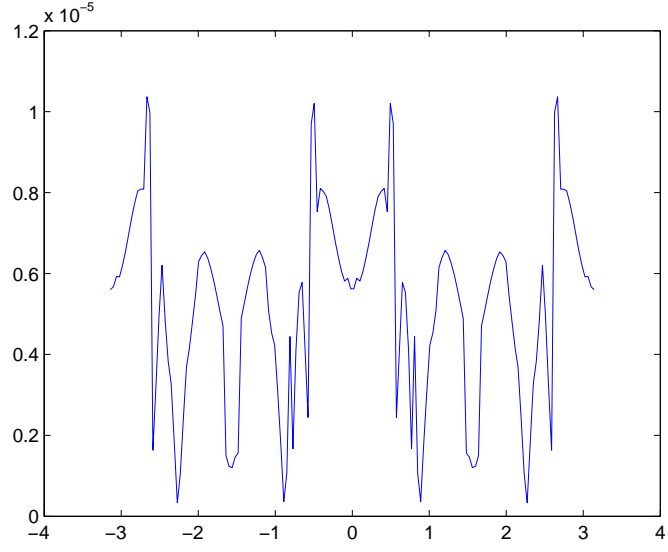




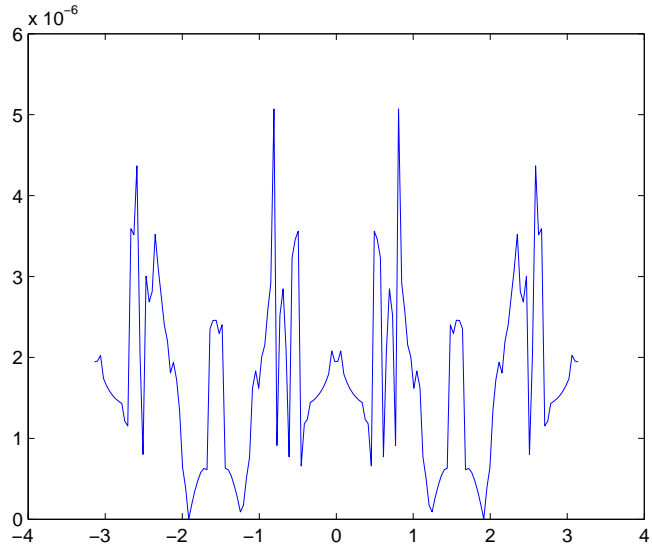
**Şekil 4.20. Örnek 4.2 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



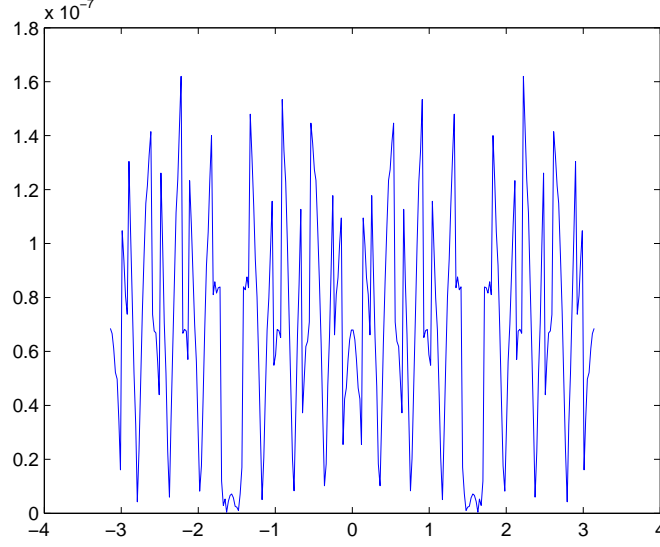
**Şekil 4.21. Örnek 4.2 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.22. Örnek 4.2 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.23. Örnek 4.2 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.24.** Örnek 4.2 için V. yürütmeye Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği

### Örnek 4.3

$$-\frac{x(s)}{2} - \int_0^1 \frac{0.1}{0.01 + (s-t)^2} x(t) dt = f(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

probleminin gerçek çözümü  $x(t) = 0.06 - 0.8t + t^2$  fonksiyonudur.

Kaba ağ  $L = [01]$ ,  $D = [2]$  olsun. Ard arda dört kez Galerkin izdüşüm yöntemi ve bu çözüme uygulanan Sloan iterasyonu sonucu elde edilen yeni ağlar,  $L^2$  hata değerleri, maksimum hata değerleri ve mutlak değer hata grafikleri aşağıda verilmiştir:

**Çizelge 4.3.** Örnek 4.3 için hata değerleri tablosu

Yürütme	$G_{L^2}$	$G_{max}$	$S_{L^2}$	$S_{max}$
I	0.000012	0.000048	0.000001	0.000021
II	0.000011	0.000079	0.000000	0.000049
III	0.000023	0.000084	0.000000	0.000001
IV	0.000024	0.000089	0.000000	0.000000

Galerkin izdüşüm yönteminin dört defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = [0 \quad 6.2500e-02 \quad 1.2500e-01 \quad 1.8750e-01 \quad 2.5000e-01 \\ 3.7500e-01 \quad 4.3750e-01 \quad 5.0000e-01 \quad 6.2500e-01 \\ 7.5000e-01 \quad 8.1250e-01 \quad 8.7500e-01 \quad 9.3750e-01]$$

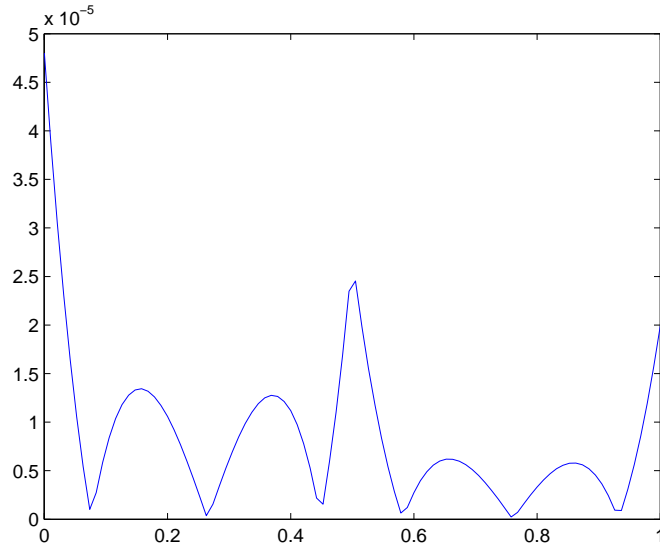
1.0000e + 00]

$$D = [4 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 3 \ 4]$$

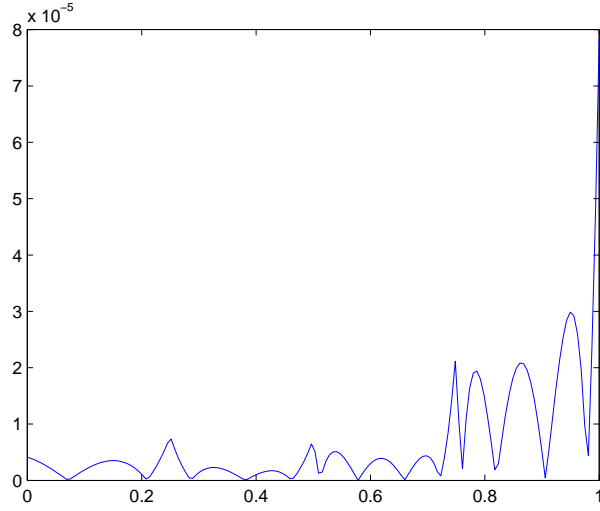
Sloan iterasyonun dört defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 6.2500e - 02 & 1.2500e - 01 & 1.8750e - 01 & 2.5000e - 01 \\ 3.1250e - 01 & 3.7500e - 01 & 4.3750e - 01 & 5.0000e - 01 & \\ 5.6250e - 01 & 6.2500e - 01 & 6.8750e - 01 & 7.5000e - 01 & \\ 8.1250e - 01 & 8.7500e - 01 & 9.3750e - 01 & 1.0000e + 00] \end{bmatrix}$$

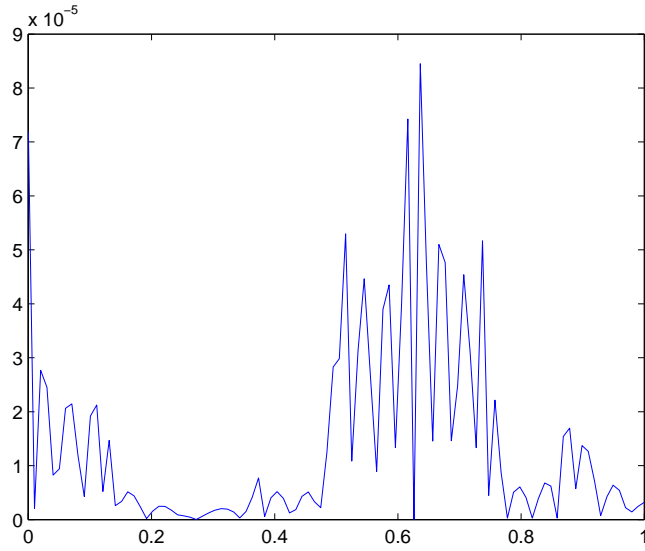
$$D = [3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 4]$$



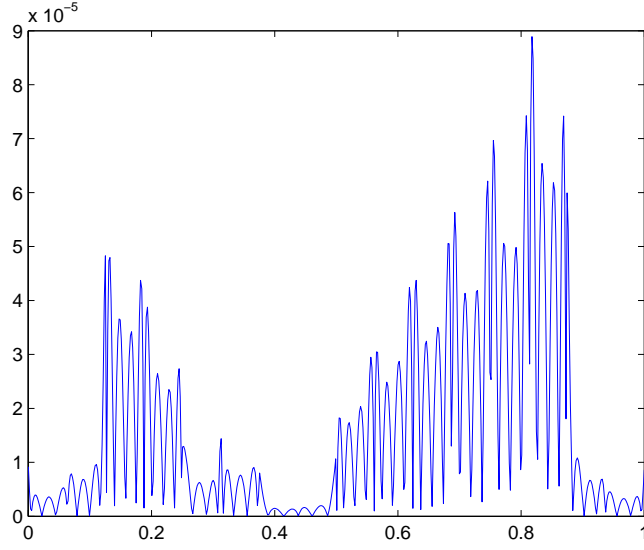
**Şekil 4.25. Örnek 4.3 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



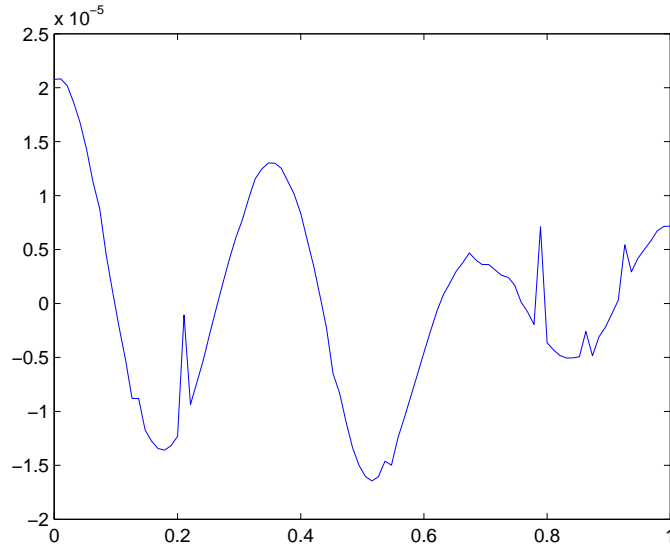
**Şekil 4.26. Örnek 4.3 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



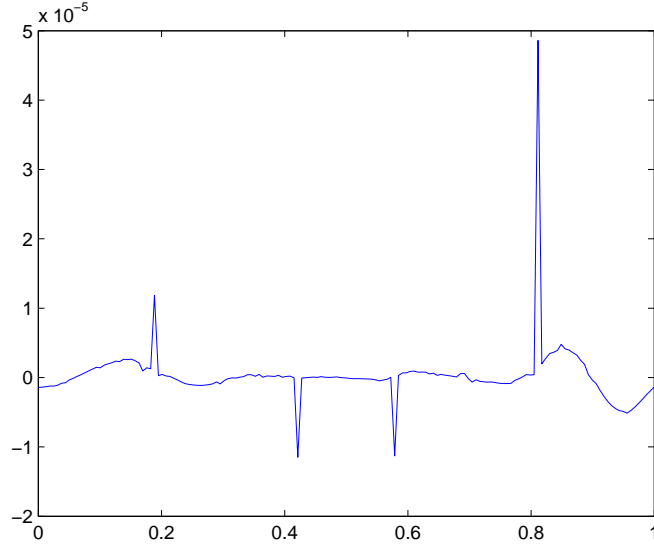
**Şekil 4.27. Örnek 4.3 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



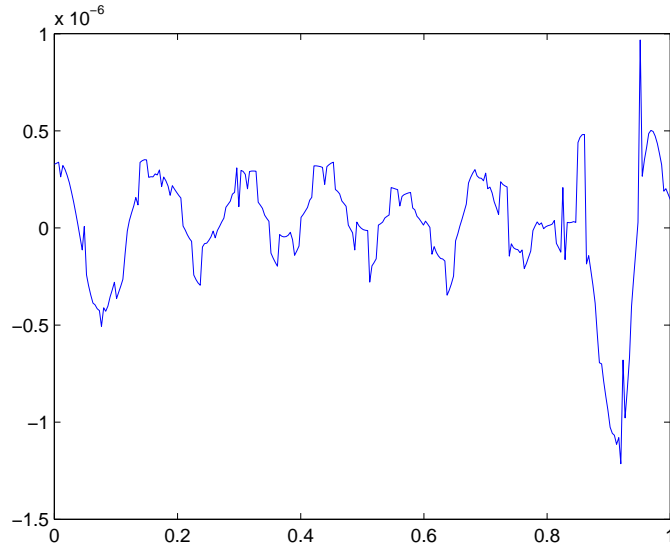
**Şekil 4.28. Örnek 4.3 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



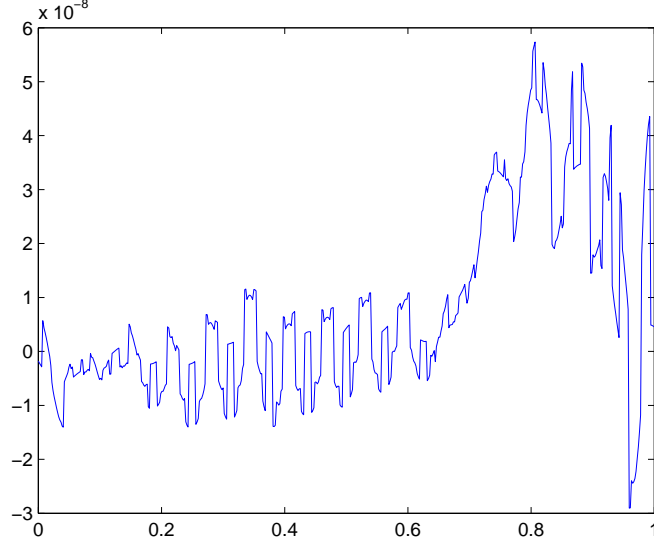
**Şekil 4.29. Örnek 4.3 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.30. Örnek 4.3 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.31. Örnek 4.3 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.32. Örnek 4.3 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

**Örnek 4.4** Gerçek çözümü  $x(t) = t$  fonksiyonu olan

$$x(s) - \int_0^1 |s - t|x(t) dt = -\frac{2s^3 - 9s + 2}{6}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

problemi ele alınsın.

Kaba ağ  $L = [01]$ ,  $D = [2]$  olsun. Ard arda beş kez Galerkin izdüşüm yöntemi ve bu çözüme uygulanan Sloan iterasyonu sonucu elde edilen yeni ağlar,  $L^2$  hata değerleri, maksimum hata değerleri ve mutlak değer hata grafikleri aşağıda verilmiştir:

**Çizelge 4.4. Örnek 4.4 için hata değerleri tablosu**

Yürütme	$G_{L^2}$	$G_{max}$	$S_{L^2}$	$S_{max}$
I	0.000005	0.000013	0.000010	0.249971
II	0.000061	0.000217	0.000003	0.249989
III	0.000081	0.000410	0.000003	0.249999
IV	0.000068	0.000412	0.000003	0.249999
V	0.000292	0.002121	0.000003	0.250000

Galerkin izdüşüm yönteminin beş defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = [0 \quad 6.2500e - 02 \quad 1.2500e - 01 \quad 2.5000e - 01 \quad 3.7500e - 01 \\ 4.3750e - 01 \quad 5.0000e - 01 \quad 5.6250e - 01 \quad 6.2500e - 01$$



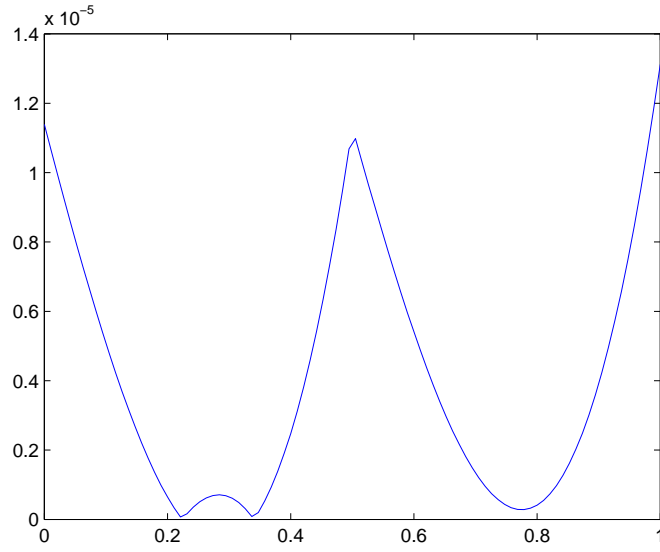
$6.8750e - 01$   $7.5000e - 01$   $8.1250e - 01$   $8.7500e - 01$   
 $9.3750e - 01$   $1.0000e + 00]$

$D = [4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 3 \ 4 \ 4 \ 3 \ 5 \ 5 \ 4 \ 5]$

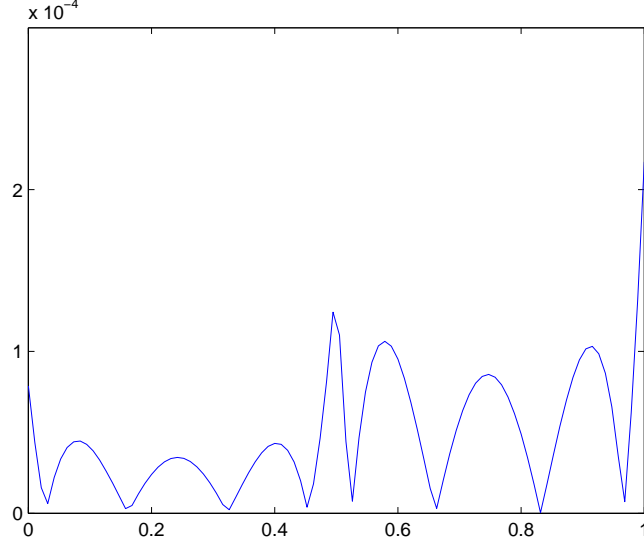
Sloan iterasyonun beş defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$L = [0 \ 6.2500e - 02 \ 1.2500e - 01 \ 2.5000e - 01 \ 3.7500e - 01$   
 $5.0000e - 01 \ 7.5000e - 01 \ 1.0000e + 00]$

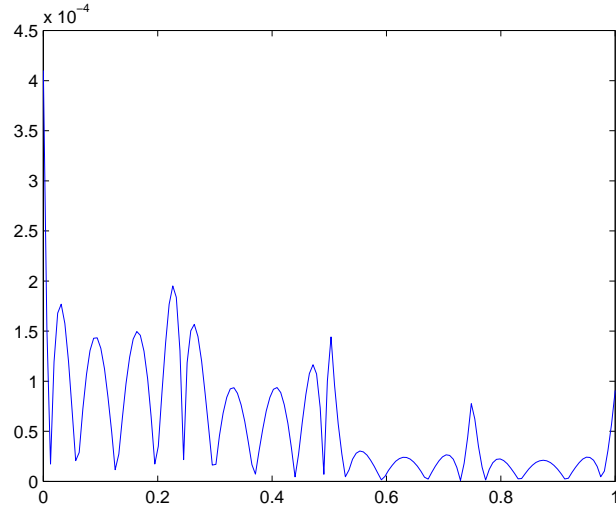
$D = [3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 7 \ 6]$



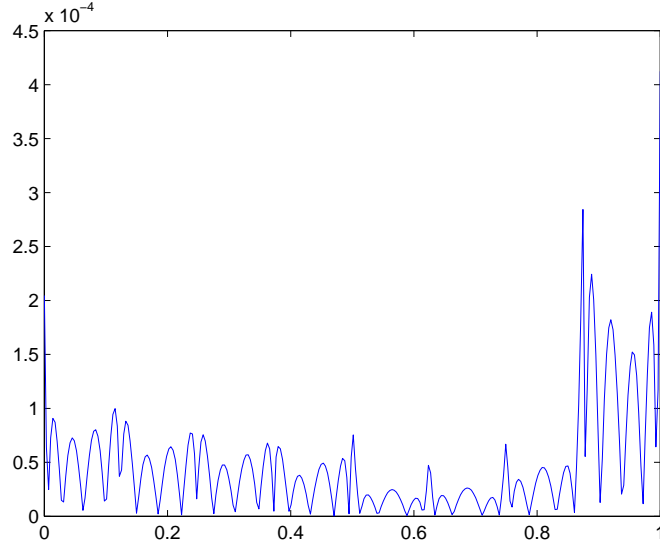
**Şekil 4.33. Örnek 4.4 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



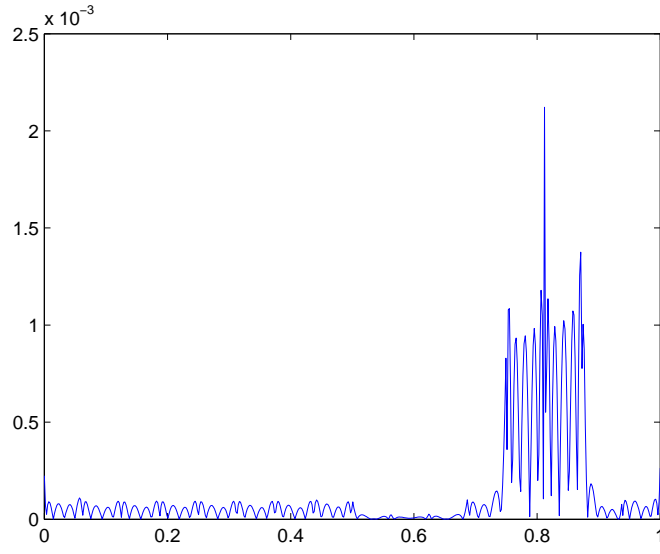
**Şekil 4.34. Örnek 4.4 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



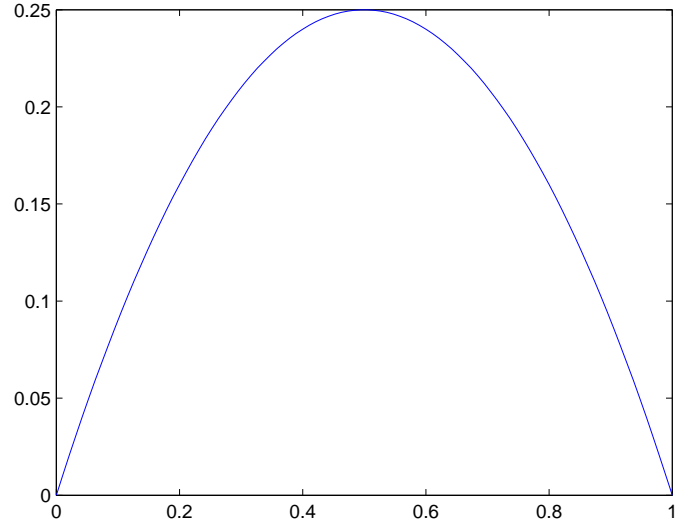
**Şekil 4.35. Örnek 4.4 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



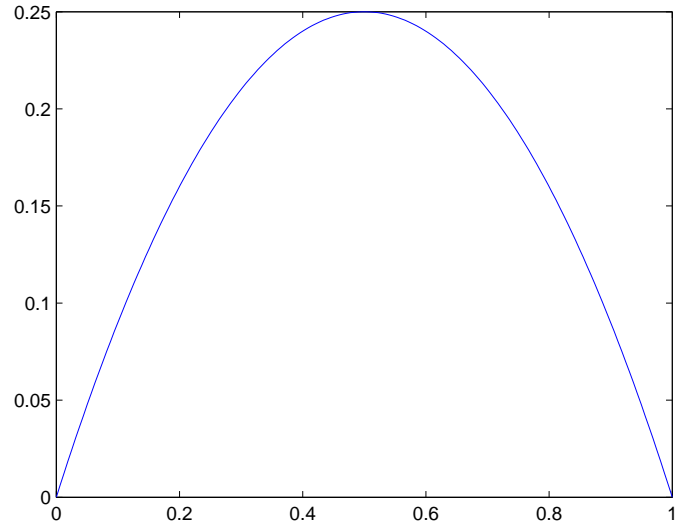
**Şekil 4.36. Örnek 4.4 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



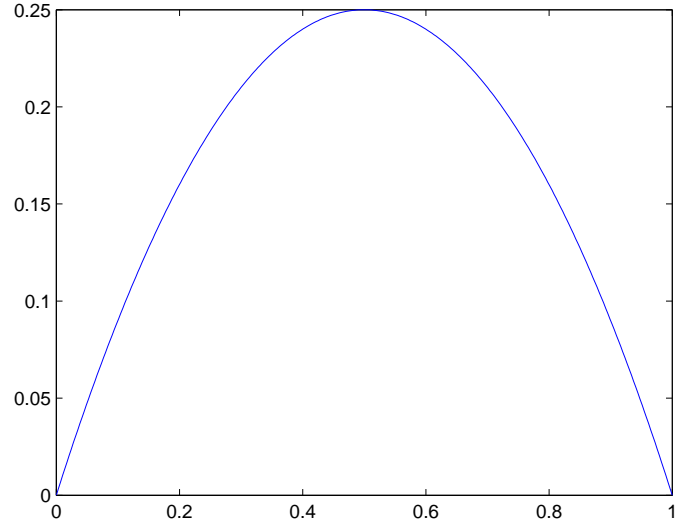
**Şekil 4.37. Örnek 4.4 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



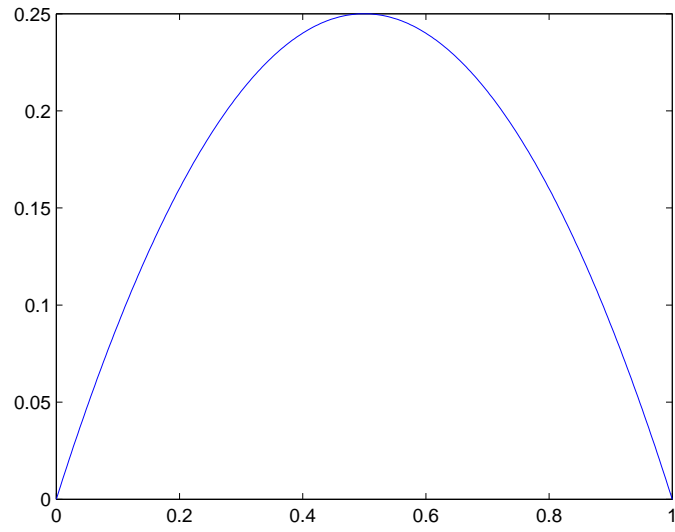
**Şekil 4.38. Örnek 4.4 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



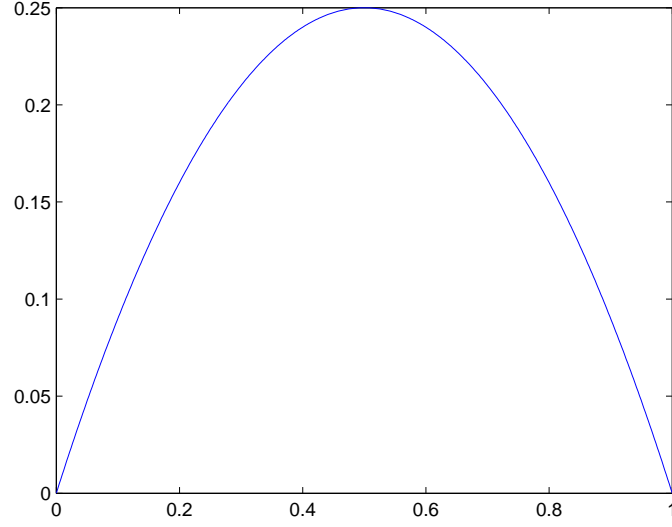
**Şekil 4.39. Örnek 4.4 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.40. Örnek 4.4 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.41. Örnek 4.4 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.42. Örnek 4.4 için V. yürütmeye Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

**Örnek 4.5** Çekirdek fonksiyonu,

$$k(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & s \leq t \\ t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

olan

$$x(s) - \int_0^1 |s-t|x(t) dt = -\frac{2s^3 - 9s + 2}{6}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

probleminin gerçek çözümü  $x(t) = \sin(\pi t)$  fonksiyonudur. Kaba ağ  $L = [0, 1]$ ,  $D = [2]$  olsun. Ard arda yedi kez Galerkin izdüşüm yöntemi ve bu çözüme uygulanan Sloan iterasyonu sonucu elde edilen yeni ağlar,  $L^2$  hata değerleri, maksimum hata değerleri ve mutlak değer hata grafikleri aşağıda verilmiştir:

**Çizelge 4.5. Örnek 4.5 için hata değerleri tablosu**

Yürütme	$G_{L^2}$	$G_{max}$	$S_{L^2}$	$S_{max}$
I	0.002323	0.004179	0.000311	0.011130
II	0.002240	0.004424	0.000061	0.003294
III	0.000649	0.001541	0.000013	0.000913
IV	0.000274	0.000776	0.000005	0.000586
V	0.000431	0.001326	0.000003	0.000563
VI	0.000540	0.002551	0.000003	0.000574
VII	0.000625	0.004555	0.000001	0.000238

Galerkin izdüşüm yönteminin yedi defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

$$L = [0 \quad 6.2500e - 02 \quad 1.2500e - 01 \quad 1.5625e - 01 \quad 1.8750e - 01 \\ 2.1875e - 01 \quad 2.5000e - 01 \quad 2.6563e - 01 \quad 2.8125e - 01 \\ 2.9688e - 01 \quad 3.1250e - 01 \quad 3.2813e - 01 \quad 3.4375e - 01 \\ 3.5938e - 01 \quad 3.7500e - 01 \quad 3.9063e - 01 \quad 4.0625e - 01 \\ 4.2188e - 01 \quad 4.3750e - 01 \quad 4.5313e - 01 \quad 4.6875e - 01 \\ 4.8438e - 01 \quad 5.0000e - 01 \quad 5.3125e - 01 \quad 5.6250e - 01 \\ 5.7813e - 01 \quad 5.9375e - 01 \quad 6.0938e - 01 \quad 6.2500e - 01 \\ 6.4063e - 01 \quad 6.5625e - 01 \quad 6.7188e - 01 \quad 6.8750e - 01 \\ 7.0313e - 01 \quad 7.1875e - 01 \quad 7.3438e - 01 \quad 7.5000e - 01 \\ 7.6563e - 01 \quad 7.8125e - 01 \quad 7.9688e - 01 \quad 8.1250e - 01 \\ 8.2813e - 01 \quad 8.4375e - 01 \quad 8.5938e - 01 \quad 8.7500e - 01 \\ 8.9063e - 01 \quad 9.0625e - 01 \quad 9.2188e - 01 \quad 9.3750e - 01 \\ 9.5313e - 01 \quad 9.6875e - 01 \quad 9.8438e - 01 \quad 1.0000e + 00]$$

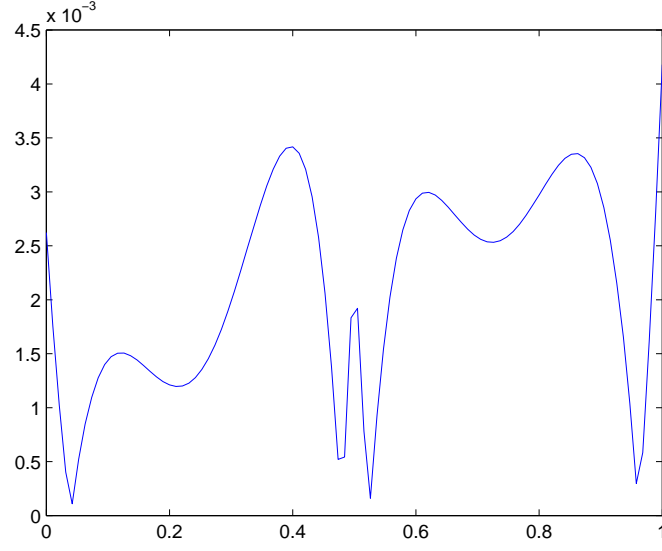
$$D = [7 \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4]$$

Sloan iterasyonun yedi defa ard arda yürütülmesi sonucunda elde edilen ağ:

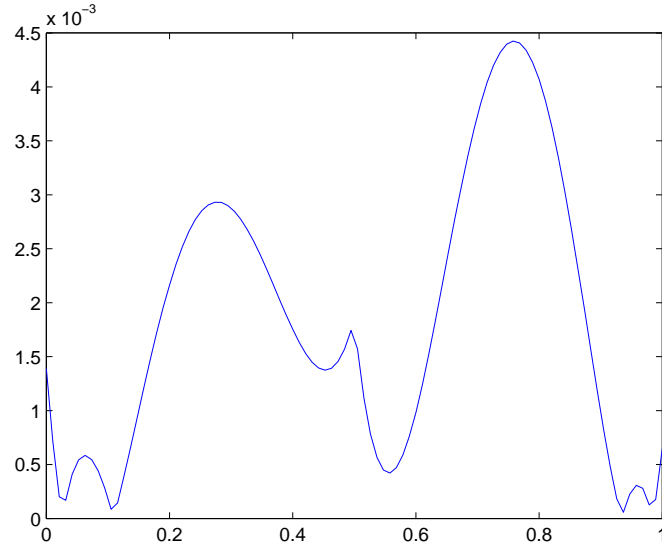
$$L = [0 \quad 1.2500e - 01 \quad 1.8750e - 01 \quad 2.5000e - 01 \quad 3.1250e - 01 \\ 3.7500e - 01 \quad 3.9063e - 01 \quad 4.0625e - 01 \quad 4.3750e - 01 \\ 4.6875e - 01 \quad 5.0000e - 01 \quad 5.3125e - 01 \quad 5.6250e - 01 \\ 5.7813e - 01 \quad 5.9375e - 01 \quad 6.2500e - 01 \quad 6.5625e - 01 \\ 6.8750e - 01 \quad 7.1875e - 01 \quad 7.5000e - 01 \quad 8.1250e - 01 \\ 8.4375e - 01 \quad 8.7500e - 01 \quad 9.0625e - 01 \quad 9.3750e - 01 \\ 9.4531e - 01 \quad 9.5313e - 01 \quad 9.6875e - 01 \quad 9.7656e - 01 \\ 9.8438e - 01 \quad 9.9219e - 01 \quad 1.0000e + 00]$$

$$D = [7 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5]$$

4 5 3 4 5 4 5 5 6]

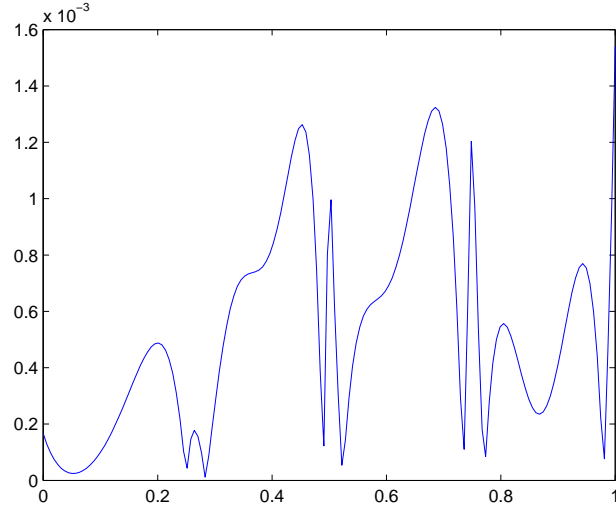


**Şekil 4.43. Örnek 4.5 için I. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

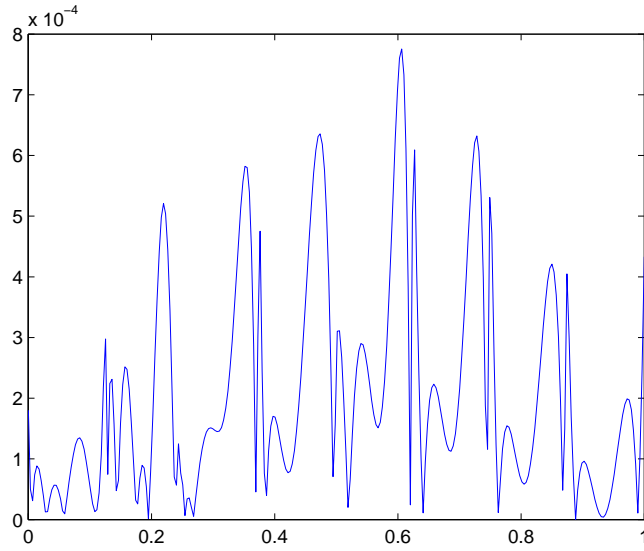


**Şekil 4.44. Örnek 4.5 için II. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

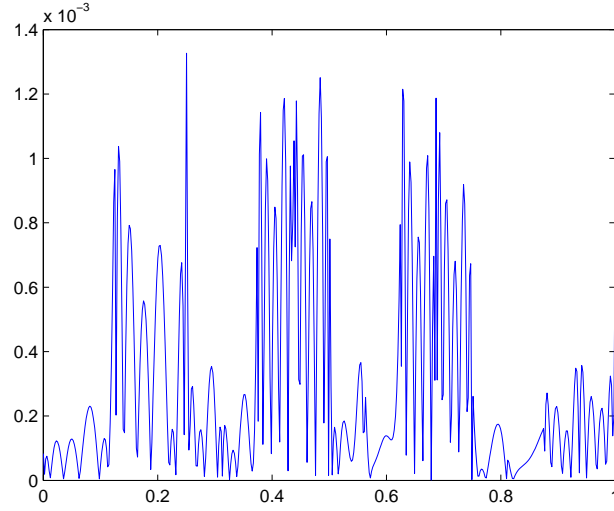




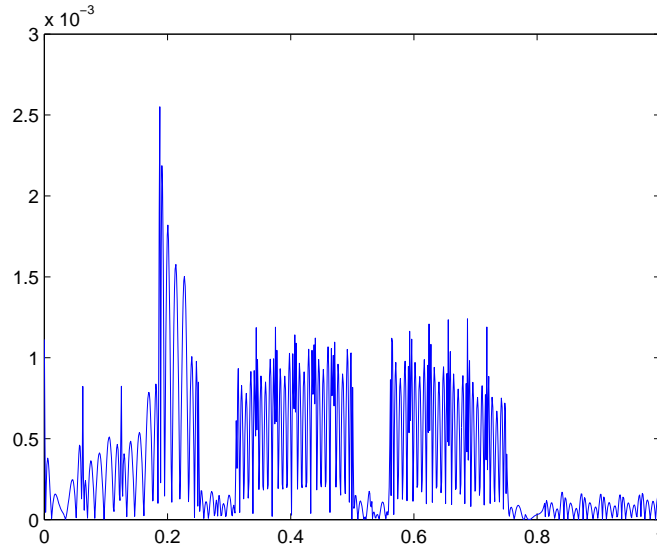
**Şekil 4.45. Örnek 4.5 için III. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



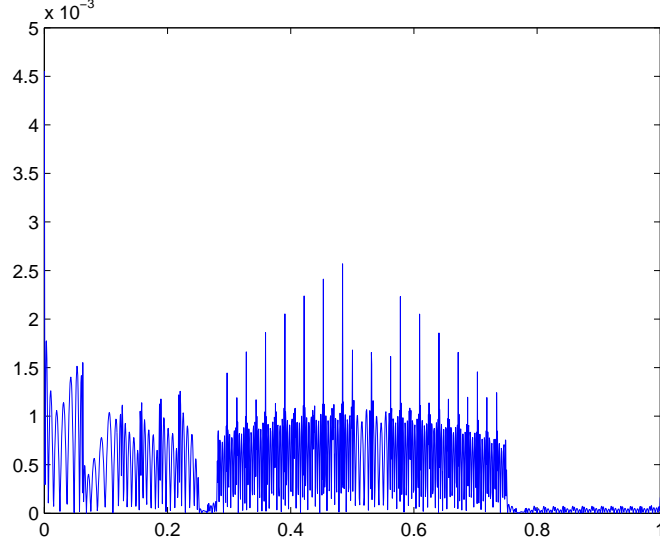
**Şekil 4.46. Örnek 4.5 için IV. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



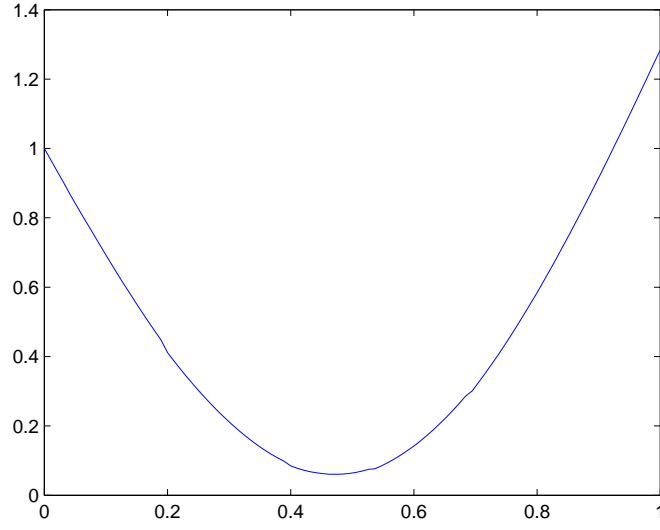
**Şekil 4.47. Örnek 4.5 için V. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



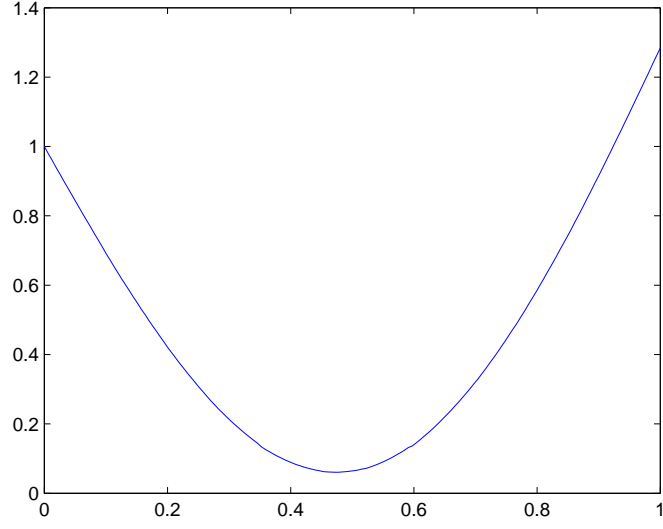
**Şekil 4.48. Örnek 4.5 için VI. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



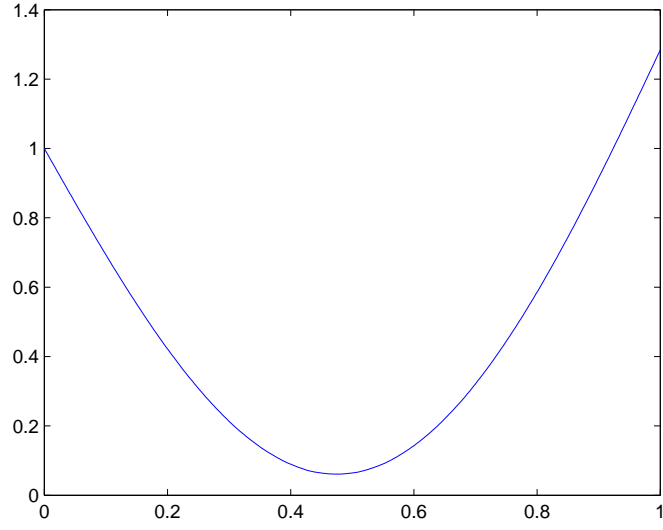
**Şekil 4.49. Örnek 4.5 için VII. yürütmede Galerkin izdüşüm yöntemi sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



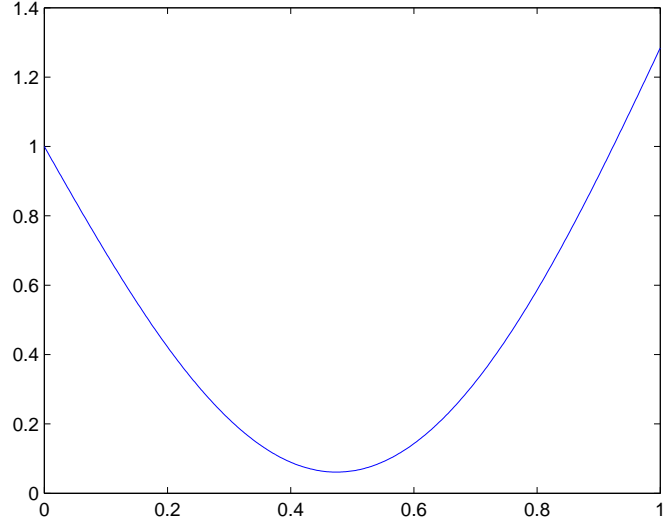
**Şekil 4.50. Örnek 4.5 için I. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



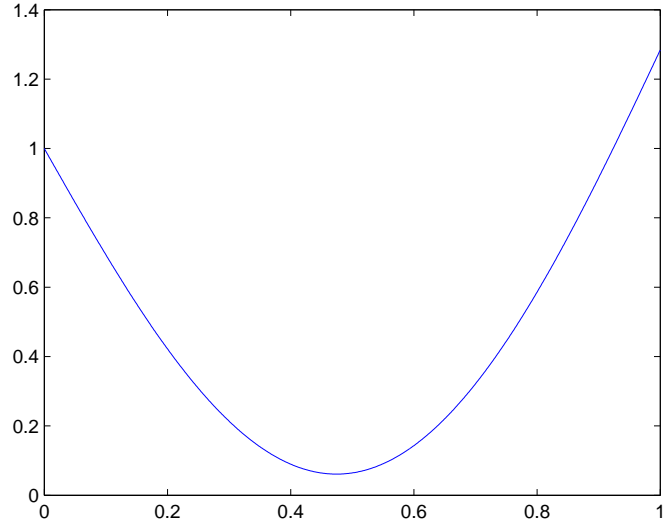
**Şekil 4.51. Örnek 4.5 için II. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



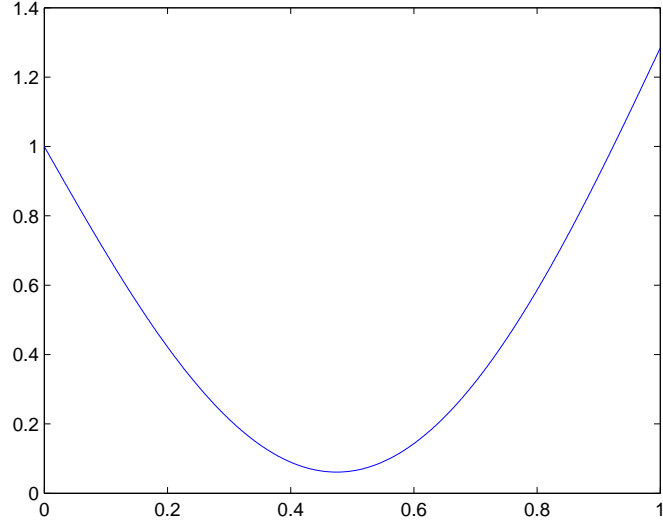
**Şekil 4.52. Örnek 4.5 için III. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



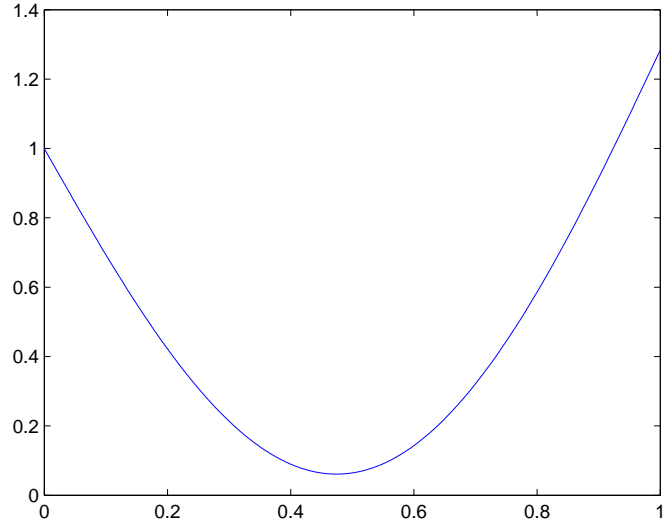
**Şekil 4.53. Örnek 4.5 için IV. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.54. Örnek 4.5 için V. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.55. Örnek 4.5 için VI. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**



**Şekil 4.56. Örnek 4.5 için VII. yürütmede Sloan iterasyonu sonucu elde edilen mutlak hata grafiği**

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezin amaçlarından ilki ikinci tip Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini, şapka fonksiyonları olarak adlandırılan doğrusal fonksiyonlar ve dereceleri 2'ye eşit veya büyük olan integre edilmiş Legendre polinomlarının yaklaşım fonksiyonları olarak kullanıldığı Galerkin yöntemine uyarlanabilir inceltme uygulayarak elde etmektir. Tezin ikinci amacı ise elde edilen bu çözümleri daha da iyileştirmek (gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki hata değerini azaltmak) için bu çözümlere Sloan iterasyonu ile birlikte uyarlanabilir inceltme uygulamaktır. Uyarlanabilir inceltmeler yapılırken Demkowicz'in (Demkowicz, 2005) Sobolev normu kullanarak çözdüğü bir optimizasyon problemi  $L^2$ -normu kullanılarak ele alınmıştır.

Bölüm 3.1'de ele alınan bir ağın bir kez bölünme ile yapısında ne tür değişiklikler olacağı, yeni oluşan ağda yaklaşım fonksiyonlarının yeniden nasıl tanımlanacağı incelenmiş ve iki ağ arasındaki yapısal ilişkiler ortaya çıkarılmıştır.

Bölüm 3.2'de verilen bir ağ üzerinde ikinci tip Fredholm integral denkleminin Galerkin yöntemi kullanarak yaklaşık çözümünün elde edilmesi için gerekli matrisler hesaplanmıştır. Burada keyfi sayıda ağ aralığından oluşan ve ağ aralıklarında keyfi dereceden integre edilmiş Legendre polinomlarının tanımlandığı bir ağ ele alınmıştır. Bölüm 3.4'te ise kaba ağdan bir kez bölünme ile elde edilen ince ağa geçiş yaparken kaba ağın her alt aralığını bölmenin veya yaklaşım polinomlarının derecelerini arttırmanın gerekliliğini belirleyen bir optimizasyon probleminin çözümü için gerekli matrisler hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken her ağ aralığı tek tek incelendiğinden temel yapı için tek bir aralıktan oluşan bir kaba ağ üzerinden hesaplamalar yapılmıştır. Optimizasyon probleminin çözümü sonunda elde edilen yeni ince ağ artık bir kaba ağ gibi ele alınıp ilgili problem buraya kadar anlatıldığı biçimde tekrar çözülebilir.

Bölüm 3.3'te ise bölüm 3.2'de elde edilen çözüme Sloan iterasyonu uygulanması sonucu elde edilen yaklaşık çözümü hesaplamak için gerekli olan matrisler verilmiştir. Bölüm 3.5'te tıpkı Galerkin yöntemi için yapılan optimal ağı belirlemek için yapılan işlemler, burada da aynı optimizasyon problemi kullanılarak Galerkin yöntemi ile elde edilen çözüme Sloan iterasyonu uygulanması sonucu elde edilen çözüm için ele alınmıştır. Yine burada da elde edilen ince ağ kaba ağ olarak alınıp ilgili problem bu ağ üzerinde tekrar çözülebi-

lir.

Yukarıdaki işlemler ilgilenilen probleme tekrar tekrar uygulanabilirler. Araştırma bulguları kısmında çözülen problemlerde ilk kaba ağ tek bir aralıktan oluşan ve üzerinde şapka fonksiyonları ile yalnızca 2. derece integre edilmiş Legendre polinomu tanımlı olan ağ olarak alınmıştır. Burada amaç yöntemin tek bir ağ aralığında minimum dereceli polinomlarla yaklaşıma etkisini incelemektir. Araştırma bulguları kısmında çözülen problemlerden ilki tarafımızca kurulmuş diğerleri ise Atkinson ve Shampine (2008)'dan alınmıştır. Özellikle Sloan iterasyonu sonucu elde edilen çözümlere uyarlanabilir inceltme uygulandıkça hatanın sıfıra yaklaştığı gözlemlenmiştir. Çözülen problemlerde yaklaşık çözümlerden herhangi birinde sıfıra yakın hata değeri elde edildiğinde ya da hata değerleri ard arda yapılan yürütmelerde birbirine çok yakın olduğunda yürütmeler durdurulmuştur. Yöntemler keyfi sayıda ağ aralığı içeren, keyfi dereceden polinomlar ile yaklaşım yapmaya müsait bir yapıdadır. İşlemlerin elde edilen sonuçlar ile tekrarlanabilmesi de bunun bir göstergesidir.

Yöntem ele alınan problemlerin yaklaşık çözümlerinin çözüm aralığının farklı bölgelelerdeki davranışlarını inceleme imkanı yaratmaktadır. Elde edilen verilere bağlı olarak daha iyi yaklaşım yapılacağı düşünülen ağlar belirlenebilir ve problemler bu ağlar üzerinde çözülebilir. Burada kastedilen belli sayıda yürütmeden sonra ağ aralıkları daha fazla bölünmüyor veya yaklaşım polinomlarının dereceleri daha fazla artmıyor veya yürütmeler arasındaki hata değerleri çok farklı değilse veya salınımlar oluşmaya başlamışsa bu noktadan önceki yaklaşımların sonuçlarına bağlı olarak bir ağın belirlenmesidir. Ağ aralığı sayısı ve yaklaşım polinomlarının dereceleri arttıkça hesaplamalar işlem sayısı arttığından doğal olarak yavaşlamaktadır. Ele alınan problem türlerinde, yaklaşım polinomlarının dereceleri yüksek değerlere ulaştığında yaklaşık çözümlerde salınımların olduğu gözlemlenmiştir.

Uyarlanabilir inceltmenin farklı yöntemler ile farklı denklem türlerine, farklı polinomlar kullanarak uygulanabilir olduğu düşünülmektedir. Ayrıca problem tipi değiştirilmeden de farklı polinomlar kullanılarak elde edilen sonuçlar da karşılaştırılabilir.



## KAYNAKLAR

Aksoy, Y. (1998) *İntegral Denklemler*, YTÜ Yayınları, İstanbul, 155s.

Asadzadeh, M. ve Eriksson, K. (1994) On Adaptive Finite Element Methods for Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *Siam J. Numer. Anal.*, 31(3): 831-855.

Atkinson, K. (1976) *A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA., 230s.

Atkinson, K.E. (1997) *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, New York, 552s.

Atkinson, K.E. ve Shampine L.F. (2008) Solving Fredholm Integral Equations of the Second Kind in MATLAB, *ACM Trans. Math. Softw.*, 34(4): 1-20.

Atkison, K. (2008) A Personal Perspective on the History of the Numerical Analysis of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *The Birth of Numerical Analysis*, 29-30 October 2007, Leuven, Belgium.

Babuska, I. (1988) Advances in the p and h-p versions of the finite element method. A Survey, *Int. Ser. Numer. Math.*, Birkhauser Verlag Basel, 86: 31-46.

Babuska, I. ve Dorr, M.R. (1981) Error estimates for the combined h- and p-versions of the finite element method, *Numer. Math.*, 37: 257-277.

Babuska, I., Szabo, B.A. ve Katz, I.N. (1981) The p-version of the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18: 515-545.

Baker, C.T.H. (1977) *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1034s.

Berger, M.J. ve Coella, P. (1989) Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, 82: 64-84.

Bocher, M. (1913) *An Introduction to Study of Integral Equations*, Hafner Pub. Co., New York, 70s.

Botti, L., Piccinelli, M., Ene-Iordache, B., Remuzzi, A. ve Antiga, L. (2010) An Adaptive Mesh Refinement Solver for Large-Scale Simulation of Biological Flows, *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 26: 86-100.

Burton, T.A. (1983) *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, 368s.

Corduneanu, C. (1973) *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 237s.

Corduneanu, C. (1977) *Principles of Differential and Integral Equations*, Chelsea Publishing Co., New York, 205s.

Corduneanu, C. (1991) *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 366s.

Demkowicz, L. (2007) *Computing with hp-Adaptive Finite Elements, I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*, Chapman & HALL/CRC, Taylor & Francis Group, USA, 389s.

Demkowicz, L., Rachowicz, W. ve Devloo, P. (2002) A Fully Automatic hp-Adaptivity, *J. Sci. Comput.*, 17: 1-4.

Ekici, M. (2010) *Lineer Singüler ve Singüler olmayan İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Fracture Mekanik*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, 93s.

Eriksson, K. ve Johnson, C. (1991) Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems I: A Linear Model Problem, *Siam J. Numer. Anal.*, 28(1): 43-77.

Fredholm, I. (1903) Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, 27: 365-390.

Graham, I. G., Shaw, R.E. ve Spence, A. (1989) Adaptive numerical solution of integral equations with application to a problem with a boundary layer, *Congressus Numerantium*, 68: 75-90.

Gripenberg, G., Londen, S. O. ve Staffans, O. (1990) *Nonlinear Volterra and Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Güney, Z. (2003) *Metrik ve Topolojik Formüller*, Muğla Üniversitesi Yayınları, Muğla, 295s.

He, L. ve Zhou, A. (2011) *Convergence and Complexity of Adaptive Finite Element Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, *Inter. J. Numer. Anal. Model.*, 8(4): 615-640.

Hochstadt, H. (1973) *Integral Equations*, A Wiley-Interscience Publication, USA, 282s.

Hoppe, R.H.W ve Kieweg, M. (2010) Adaptive Finite Element Methods for Mixed Control-State Constrained Optimal Control problems for Elliptic Boundary Value Problems, *Com-*

*put. Optim. Appl.*, 46(3): 511-533.

Hoppe, R.H.W., Wu, H. Ve Zhang Z. (2010) Adaptive Finite Element Methods for The Laplace Eigenvalue Problem, *J. Numer. Math.*, 18(4): 281-302.

Houston, P. ve Suli, E. (2005) A note on the design of hp-adaptive finite element methods for elliptic partial differential equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(2-5): 229-243.

Işık, O.R. (2012) *Lineer Fonksiyonel Denklemlerin Bernstein Polinomları ve Rasyonel Fonksiyonlara Dayalı Sıralama Yöntemi ile Çözümleri Üzerine*, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 107s.

Ikebe, Y. (1972) The Galerkin method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, *SIAM Rev.*, 14(3): 465-491.

Kanwal, R. P. (1971) *Linear Integral Equations*, Academic Press, New York, USA, 296s.

Krasnoselskii, A.M. (1964) *Positive Solutions of Operator Equation*, Groningen, Noordhoff, 381s.

Kreyzig, E. (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, USA, 688s.

Larsen, S. (1986) *Numerical Analysis of Elliptic Partial Differential Equations with Stochastic Input Data*, Ph.D. Thesis, University of Maryland, College Park, USA.

Larson M.B. Bengzon F. (2010) *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice*, Springer, New York, 385s.

Lebedev, N.N. (1965) *Special Functions and Their Applications*, Prentice Hall, Inc., USA. 308s.

Lonseth, A.T. (1954) Approximate Solutions Of Fredholm-Type Integral Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 60(5): 415-430.

Miller, R. K. (1971) *Nonlinear Volterra Integral Equations*, W. A. Benjamin, Menlo Park CA, 468s.

Moore, P.K. (1995) Comparison of Adaptive Methods for One-Dimensional Parabolic Systems, *Appl. Numer. Math.*, 16(4): 471-488.

Muthuvalu, M.S. and Sulaiman, J. (2008) Numerical Solutions of Second Kind Fredholm Integral Equations using Sweep Geometric Mean Method, *International Symposium on Information Technology*, 26-29 August 2008, Kuala Lumpur Convention Center, Malaysia, Vol III: 1927-1934.

Muthuvalu, M.S. and Sulaiman, J. (2011) Numerical solution of second kind linear Fredholm integral equations using QSGS iterative method with high-order Newton-Cotes quadrature schemes, *Malays. J. Math. Sci.*, 5(1): 85-100.

Nedelec, J. C. (1977) *Approximation des quations integrales en mcanique et physique*, Centre de Mathematiques, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 126s.

Pachpatte, B.G. (1998) *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press Limited, UK, 611s.

Pardo, D., Demkowicz, L., Torres-Verdín, C., ve Tabarovsky L. (2006) A goal-oriented hp-adaptive finite element method with electromagnetic applications, Part I: Electrostatics, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 65(8): 1269-1309.

Pillwein, V. (2008) *Computer Algebra Tools for Special Functions in High Order Finite Element Methods*, Ph.D. Thesis, Johannes Kepler Universitat, Linz-Austria, 123s.

Pillwein, V. (2011) *Orthogonal Polynomials and Symbolic Computation, Lecture Notes*, JKU, Research Institute of Symbolic Computation, 68s.;

Retrieved from: <http://www.risc.jku.at/education/courses/ss2011/ops-sc/main.pdf>

Rahbar, S., Hashemizadeh, E. (2008) A Computational Approach to the Fredholm Integral Equation of the Second Kind, *World Congress on Engineering*, 2-4 July 2008, London, UK, 2: 933-937.

Rainville, E.D. (1960) *Special Functions*, The Macmillan Company, New York, 365s.

Rank, E. (1986) Adaptivity and accuracy estimation for finite element and boundary integral element methods, 79-94, Babuska, I., Zienkiewicz O. C. et al., eds., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, New York, 393s.

Schiermeir, J. ve Szabo, B.A. (1987) Interactive Design Based on the  $p$ -version of the Finite Element Method, *Finite Elements Anal. Des.*, 3(2): 93-107.

Sloan, H.I. (1976) Improvement by Iteration for compact Operator Equations, *Math. Comput.*, 30(136): 758-764.

Sloan, I. H. (1978) A review of Numerical Methods for Fredholm Equations of the Second Kind in, 51-74, Anderssen R.S., Hook, F. de, Lukas, M., *The Application and Numerical Solution of Integral Equations, Proc. Sem.*, Sijthoff and Noordhoff, Australian Nat. Univ., Canberra, Alphen aan den Rijn.

Stephan, E. P., Maischak, M. ve Leydecker, F. (2007) An hp-Adaptive Finite Element / Boundary Element Coupling Method for Electromagnetic Problems, *Comput. Mech.*, 39: 673-680.

Tricomi, F. G. (1957) *Integral Equations*, Interscience, New York, 235s.

Wang, W. (2006) A new mechanical algorithm for solving the second kind of Fredholm integral equation, *Appl. Math. Comput.*, 172(2): 946-962.

Wendland, W. L. (1985) On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems, 193-277, Whiteman, J. R. eds., *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Academic Press, London.

Yu, D-H. (1987) A-posteriori error estimates and adaptive approaches for some boundary element methods, 241-256, Brebbia, C. A., Wendland, W.L., Kuhn, G. eds., *Boundary Element Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Ad Soyad: Nebiye KORKMAZ

Doğum Yeri ve Tarihi: İzmir, 21.04.1980

### Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum / Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	İzmir Özel Türk Koleji	1995-1997
	İzmir İnönü Lisesi	1998
Lisans	Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	2004
Yüksek Lisans	Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2007

### İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/Görev
2004-2005 Güz-Bahar	Celal Bayar Üniversitesi	Sözleşmeli Öğretim Elemanı
2005-2006 Güz/Kasım	Turgutlu MYO	
Kasım,2005-Aralık,2007	Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2007-	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi OFMA Matematik Eğitimi Anabilim Dalı	Araştırma Görevlisi

### Yabancı Dil(ler)

İngilizce	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma			x
Konuşma			x
Anlama			x
Okuma			x



Almanca	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma	x		
Konuşma	x		
Anlama	x		
Okuma	x		

### Bilimsel Faaliyetler

1. Bilgi Üniversitesi, Matematik Yaz Okulu, 2006
2. 22.nd Summer Conference On Topology And Its Applications, İspanya Castellon, 24 - 27 Temmuz, 2007, "On Contra  $\pi$ gs-Continuous Functions In Topological Spaces" Başlıklı Bildiri Sunumu (Katılımcı)
3. 2009 TMD (Türk Matematik Derneği) Şirince Yaz Okulu, 17-23 Temmuz, 2009 Nesin Matematik Köyü (Dinleyici)
4. 2010 TMD (Türk Matematik Derneği) Şirince Yaz Okulu, 16-22 Ağustos, 2010 Nesin Matematik Köyü (Dinleyici)
5. Zekeriya Güney, Nebiye Korkmaz, Osman Raşit Işık, Matematik Öğretiminde Yapılandırmacı Yaklaşımın Sakıncaları, 9. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 23-25 Eylül, 2010, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir (Poster)
6. 5th training Scholl InSymbolic Computation, 28 June - 9 July, 2010, Risc, JKU, Avusturya (Dinleyici)

### Burslar

1. TÜBİTAK, 2224 Yurt Dışı Bilimsel Etkinliklere Katılma Desteği Programı, 22.nd Summer Conference On Topology And Its Applications, İspanya Castellon, 24 - 27 Temmuz, 2007
2. YÖK Yurt Dışı Doktora Yeterlilik Sonrası Araştırma Bursu, Johannes Kepler University of Linz, Industrial Mathematics Institute, 26 Eylül 2011 - 28 Şubat 2013