

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI
DİFERANSİYEL-FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR SIRALAMA
YÖNTEMİ

DOKTORA TEZİ

ELÇİN GÖKMEN

TEMMUZ 2014

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

ELÇİN GÖKMEN tarafından hazırlanan **YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL-FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ** başlıklı tezinin, 04/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda doktora derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY (**Jüri Başkanı**)

OFMA Matematik Eğitimi,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Prof. Dr. Mehmet SEZER (**Danışman**)

Matematik Anabilim Dalı,
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

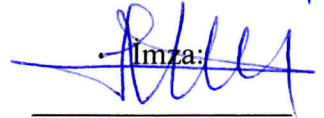
İmza:



Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

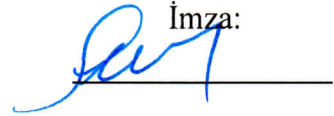
İmza:



Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı,
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

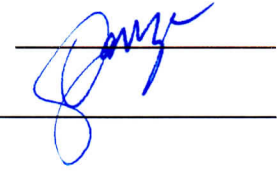
İmza:



Yrd. Doç. Dr. Gamze YÜKSEL (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

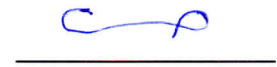


ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA

Matematik Anabilim Dalı Başkan V.
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

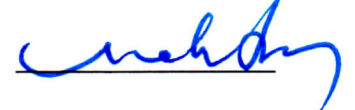
İmza:



Prof. Dr. Mehmet SEZER

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

İmza:



Savunma Tarihi: 04/07/2014

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.



Elçin GÖKMEN

04/07/2014

ÖZET
YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL-FARK
DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR
SIRALAMA YÖNTEMİ

Elçin GÖKMEN

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Temmuz 2014, 130 sayfa

Bu çalışmada, yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklem sistemlerinin ve lineer olmayan fonksiyonel diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan modellerin nümerik çözümleri için sıralama yöntemi ve Taylor polinomlarına dayalı bir matris yöntemi verilmiştir. Oluşturulan sıralama yönteminin hata hesabı yapılmış ve yöntemin tutarlılığını, etkinliğini göstermek üzere literatürde sıkça karşılaşılan problemler üzerinde çalışılmıştır. Sonuçlar daha önceki araştırmacıların sonuçları ile karşılaştırılarak, yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri, Lineer Olmayan Fonksiyonel Denklem Sistemleri, Taylor Matris Metot, Taylor Sıralama Noktaları

ABSTRACT
TAYLOR COLLOCATION METHOD FOR SYSTEM OF HIGH ORDER
DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS WITH VARIABLE
COEFFICIENTS

Elçin GÖKMEN

Doctor of Philosophy (Ph.D.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

July 2014, 130 pages

In this study, a numerical approach based on collocation method and Taylor polynomials are proposed to obtain the approximate solutions of the system of linear differential-difference equations. Also, this method is applied to some models of nonlinear functional equations systems. The error analysis of the method is presented. The effectiveness and consistency of the method are illustrated via several numerical experiments which are frequently encountered in the literature. The results are compared with the results of the previous researchers and also discussed as well.

Keywords: Linear Differential-Difference Equation System, System of Nonlinear Functional Equation, Taylor Matrix Method, Taylor Collocation Points

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tamamlanmasında bilgisini, desteğini, tecrübesini esirgemeyen, çalışma azmi, anlayışı ve sabrı ile bizlere örnek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet Sezer'e, manevi anlamda desteklerini her zaman hissettiğim değerli hocalarım Prof. Dr. Mustafa Gülsu ve Yrd. Doç. Dr. Ummahan Acar'a, yüksek lisansa başladığım ilk günden itibaren yanımda olan, iş ortamında çok az rastlanan saygı, sevgi, dayanışma, yardımlaşma ve güven gibi çok önemli değerleri kendileriyle koşulsuz paylaşabildiğim sevgili dostlarım Yrd. Doç. Dr. Gamze Yüksel'e ve Yrd. Doç. Dr. Osman Raşit Işık'a, lisansüstü eğitim sürecimin en zorlu aşamasında elimden tutan ve bu günlere kadar ilerleyebilmemde çok önemli bir yeri olan yüksek lisans tez danışmanım, saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Murat Atmaca'ya, tezime son şeklini vermekte bana yardımcı olan, bilgisini ve imkanlarını paylaşmaktan kaçınmayan sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Murad Özkoç'a ve matematik bölümünün tüm değerli öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Tezin düzenlenme aşamasında emeği geçen İsmail Aksoy'a ve canım dostum, bu süreçteki en büyük destekçilerimden Sezil Aliyazıcıoğlu'na, varlıkları benim için çok değerli olan ve beni her zaman yüreklendiren Çağlar Özbek'e, Nida Gökçe'ye ve Hatice Özkoç'a çok teşekkür ederim.

Tüm yaşantım boyunca en büyük desteğim olan, beni koruyan, kollayan, benim için hayatı kolaylaştıran, ilgilerini, sevgilerini her daim yanı başımda hissettiğim en kıymetlilerim sevgili anneme, babama ve kardeşime sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SEMBOLLER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	8
2.1. Fonksiyonel Denklemler	8
2.2. Sapma Argümanlı Diferansiyel Denklemler	9
2.2.1. Sapma argümanlı diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması.....	10
2.3. Diferansiyel-Fark Denklemleri	11
2.4. Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri	13
2.4.1. Vektör-matris gösterimi.....	15
2.4.2. Karakteristik denklemler	15
2.5. Çözümün Tanımı.....	19
2.6. Polinom Yaklaşımı.....	21
2.6.1. En iyi yaklaşım	23
2.7. Lineer Denklem Sistemleri	26
2.8. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri	27
2.8.1. Gauss eliminasyon metodu ile çözüm.....	27
2.9. Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri.....	27
2.9.1. Newton metodu.....	28
2.10. Taylor Serisi ve Temel Teoremler	29
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	32
3.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri İçin Taylor Sıralama Yöntemi	32
3.1.1. Temel matris bağıntıları.....	33

3.1.2. Koşulların matris bağıntıları	35
3.1.3. Çözüm yöntemi.....	37
3.1.4. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı	40
3.2. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Genişletilmiş Lineer Diferansiyel- Fark Denklemleri İçin Taylor Sıralama Yöntemi	41
3.2.1. Temel matris bağıntıları.....	42
3.2.2. Sistemin temel matris gösterimi	45
3.2.2.1. <i>Diferansiyel kısmın matris gösterimi</i>	46
3.2.2.2. <i>Fark argümanı içeren kısmın matris gösterimi</i>	47
3.2.3. Koşulların matris bağıntıları	48
3.2.4. Çözüm yöntemi.....	49
3.2.5. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı	51
3.3. Biyolojik Türlerin Bir Arada Yaşamını Modelleyen Lineer Olmayan Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Sıralama Yöntemi	52
3.3.1. Temel matris bağıntıları.....	53
3.3.2. Sistemin temel matris gösterimi	55
3.3.3. Taylor matris-sıralama metodu.....	56
3.3.4. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı	58
3.4. Lineer Olmayan İkinci Mertebe Diferansiyel Denklemlerinin Sınır Değer Problemi İçin Taylor Sıralama Yöntemi	59
3.4.1. Temel matris bağıntıları.....	60
3.4.2. Sistemin temel matris gösterimi	61
3.4.3. Taylor sıralama metodu	62
3.4.4. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı	64
3.5. Gecikmeli Lotka Volterra Av-Avcı Modeli İçin Taylor Sıralama Yöntemi....	65
3.5.1. Temel matris bağıntıları.....	66
3.5.2. Sistemin temel matris gösterimi	68
3.5.3. Taylor sıralama metodu	70

3.5.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini	71
4.ARAŞTIRMA BULGULARI.....	74
4.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri İçin Örnekler	74
4.2. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Genişletilmiş Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri İçin Örnekler	86
4.3. Biyolojik Türlerin Bir Arada Yaşamını Modelleyen Lineer Olmayan Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklem Sisteminin Yaklaşık Çözümü İçin Örnekler	92
4.4. Lineer Olmayan İkinci Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi İçin Örnekler	101
4.5. Gecikmeli Lotka Volterra Av-Avcı Modeli İçin Örnekler	108
5.TARTIŞMA VE SONUÇLAR	120
KAYNAKLAR	122
ÖZGEÇMİŞ.....	129

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.3.'ün $y_1(t)$ çözümlerinin karşılaştırılması.....	78
Çizelge 4.2. Örnek 4.1.3.'ün $y_2(t)$ çözümlerinin karşılaştırılması.....	79
Çizelge 4.3. Örnek 4.1.3.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6, 8, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları.....	79
Çizelge 4.4. Örnek 4.1.3.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6, 8, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları.....	79
Çizelge 4.5. Örnek 4.1.3.'ün $N = 6, 8$ için çözümlerinin doğruluğu.....	81
Çizelge 4.6. Örnek 4.1.3.'ün $e_{1,8}(t_i)$ hata fonksiyonunun farklı aralıklarda nümerik sonuçları.....	81
Çizelge 4.7. Örnek 4.1.3.'ün $e_{2,8}(t_i)$ hata fonksiyonunun farklı aralıklarda nümerik sonuçları.....	81
Çizelge 4.8. Örnek 4.1.4.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları.....	84
Çizelge 4.9. Örnek 4.1.4.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları.....	85
Çizelge 4.10. Örnek 4.2.2.'nin $N = 7, 8, 9$ için $y_{1,N}(t)$ yaklaşık çözümleri ve mutlak hatalar.....	89
Çizelge 4.11. Örnek 4.2.2.'nin $N = 7, 8, 9$ için $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümleri ve mutlak hatalar.....	89
Çizelge 4.12. Örnek 4.3.2.'nin $y_1(t)$ çözümü için Taylor sıralama metodu, ADM, VIM ve PLM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması.....	93
Çizelge 4.13. Örnek 4.3.2.'nin $y_2(t)$ çözümü için Taylor sıralama metodu, ADM, VIM ve PLM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması.....	93
Çizelge 4.14. Örnek 4.3.2.'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5, 6, 7$ değerleri için karşılaştırılması.....	95
Çizelge 4.15. Örnek 4.3.2.'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5, 6, 7$ değerleri için karşılaştırılması.....	95
Çizelge 4.16. Örnek 4.3.3.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7, 8, 9$ değerleri için karşılaştırılması.....	98

Çizelge 4.17. Örnek 4.3.3.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7, 8, 9$ değerleri için karşılaştırılması	99
Çizelge 4.18. Örnek 4.3.3.'ün $N = 8, 9$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu.....	101
Çizelge 4.19. Örnek 4.4.3.'ün $y_1(t)$ çözümü için mutlak hatalar	104
Çizelge 4.20. Örnek 4.4.3.'ün $y_2(t)$ çözümü için mutlak hatalar.....	105
Çizelge 4.21. Örnek 4.4.4.'ün $y_1(t)$ çözümü için nümerik sonuçlar	106
Çizelge 4.22. Örnek 4.4.4.'ün $y_2(t)$ çözümü için nümerik sonuçlar.....	106
Çizelge 4.23. Örnek 4.4.4.'ün $N = 8, 10$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu	108
Çizelge 4.24. Örnek 4.5.1.'in $N = 5, 7$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu.....	112

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1.3.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması.....	80
Şekil 4.2. Örnek 4.1.3.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması.....	80
Şekil 4.3. Örnek 4.1.3.'ün $e_{1,8}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun farklı aralıklar için karşılaştırılması.....	82
Şekil 4.4. Örnek 4.1.3.'ün $e_{2,8}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun farklı aralıklar için karşılaştırılması.....	82
Şekil 4.5. Örnek 4.1.4'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5,7,10$ değerleri için karşılaştırılması.....	85
Şekil 4.6. Örnek 4.1.4'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5,7,10$ değerleri için karşılaştırılması.....	86
Şekil 4.7. Örnek 4.2.2.'nin $y_1(t)$ tam çözümü ile $N = 7,8,9$ için $y_{1,N}(t)$ yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması	90
Şekil 4.8. Örnek 4.2.2.'nin $y_2(t)$ tam çözümü ile $N = 7,8,9$ için $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması	90
Şekil 4.9. Örnek 4.2.2.'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması	91
Şekil 4.10. Örnek 4.2.2.'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması	91
Şekil 4.11. Örnek 4.3.2.'nin farklı metotlarla elde edilen $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması	94
Şekil 4.12. Örnek 4.3.2.'nin farklı metotlarla elde edilen $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması	94
Şekil 4.13. Örnek 4.3.2.'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5,6,7$ için karşılaştırılması	96
Şekil 4.14. Örnek 4.3.2.'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5,6,7$ için karşılaştırılması	96
Şekil 4.15. Örnek 4.3.3.'ün $y_{1,N}(t)$ çözümü için farklı metotlarla elde edilmiş mutlak hataların karşılaştırılması	97

Şekil 4.16. Örnek 4.3.3.'ün $y_{2,N}(t)$ çözümü için farklı metotlarla elde edilmiş mutlak hataların karşılaştırılması	98
Şekil 4.17. Örnek 4.3.3.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması	100
Şekil 4.18. Örnek 4.3.3.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması	100
Şekil 4.19. Örnek 4.4.4.'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması	107
Şekil 4.20. Örnek 4.4.4.'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması	107
Şekil 4.21. Örnek 4.5.1.'in $y_{1,5}(t)$ yaklaşık çözümü.....	110
Şekil 4.22. Örnek 4.5.1.'in $y_{2,5}(t)$ yaklaşık çözümü.....	110
Şekil 4.23. Örnek 4.5.1.'in $y_{1,7}(t)$ yaklaşık çözümü	111
Şekil 4.24. Örnek 4.5.1.'in $y_{2,7}(t)$ yaklaşık çözümü	111
Şekil 4.25. Örnek 4.5.1.'in $y_{1,N}(t)$, $N = 5,7$ yaklaşık çözümü için $E_{1,N}(t)$ ile tanımlı çözümlerin doğruluklarının karşılaştırılması	112
Şekil 4.26. Örnek 4.5.1.'in $y_{2,N}(t)$, $N = 5,7$ yaklaşık çözümü için $E_{2,N}(t)$ ile tanımlı çözümlerin doğruluklarının karşılaştırılması	113
Şekil 4.27. Örnek 4.5.1.'in $m = 10$ için $e_{1,5}$ mutlak hata tahmini	113
Şekil 4.28. Örnek 4.5.1.'in $m = 10$ için $e_{2,5}$ mutlak hata tahmini	114
Şekil 4.29. Örnek 4.5.1.'in $y_{1,5}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu.....	114
Şekil 4.30. Örnek 4.5.1.'in $y_{2,5}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu.....	115
Şekil 4.31. Örnek 4.5.2.'nin $y_{1,6}(t)$ yaklaşık çözümü	116
Şekil 4.32. Örnek 4.5.2.'nin $y_{2,6}(t)$ yaklaşık çözümü	116
Şekil 4.33. Örnek 4.5.2.'nin $m = 8$ için $e_{1,6}$ mutlak hata tahmini	117
Şekil 4.34. Örnek 4.5.2.'nin $m = 8$ için $e_{2,6}$ mutlak hata tahmini	117
Şekil 4.35. Örnek 4.5.2.'nin $y_{1,6}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu.....	118

Şekil 4.36. Örnek 4.5.2.'nin $y_{2,6}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu..... 119

SEMBOLLER DİZİNİ

LM	Lineer Multistep Metot
CRK	Sürekli Runge-Kutta Metot
SADD	Sapma Argümanlı Diferansiyel Denklem
ADM	Adomian ayrıştırma metot
DTM	Diferansiyel transform metot
VIM	Varyasyonel iterasyon metot
PLM	Pseudospektral Legendre metot
$C[a, b]$	$[a, b]$ 'den \mathbb{R} 'ye giden sürekli fonksiyonlar uzayı
$P_n(\mathbb{R})$	Derecesi en çok n olan reel değerli polinomlar uzayı
$\ x\ $	x vektörünün normu
$p_n f$	f 'nin interpolasyon polinomu
$rank(\mathbf{A})$	\mathbf{A} matrisinin satır uzayının boyutu
$M_{n \times n}(\mathbb{R})$	$n \times n$ tipinde reel değerli kare matrisler uzayı
N	Kesme Sınırı
$y_{i,N}(t)$	Taylor seri çözümü
$e_{i,N}(t)$	Hata fonksiyonu
$E_{j,N}(t_i)$	t_i noktalarında çözümün doğruluğu
$e_{i,m}^*$	$e_{i,N}$ hata fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik, biyoloji, tıp, ekonomi gibi alanlardaki birçok yaşamsal olgu, genellikle adi diferansiyel denklemlerin

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

başlangıç-değer problemi ya da Cauchy problemi ile modellenebilmektedir. Burada t_0 başlangıç noktası ve y_0 başlangıç değeri olarak verilir. Ancak adi diferansiyel denklem yardımı ile kurulan bu modelde değişim oranı sadece t zamanına bağlıdır. Halbuki, sistemin geçmiş zamandaki durumu, gelecekteki durumunu büyük ölçüde etkiler. Bu nedenle, model oluşturulurken gecikmelerin de hesaba katılması ile elde edilen yeni yapı diferansiyel-fark denklemleri ya da gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) şeklinde adlandırılır (Bellen ve Zennaro, 2003). GDD'ler $\tau > 0$ gecikmeler olmak üzere,

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t \geq t_0 \\ y(t) &= \phi(t), \quad t \leq t_0\end{aligned}\tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilir.

Birçok fiziksel ve biyolojik sistemde ve mühendislik alanında gecikme olağandır. O halde, GDD'ler mühendislik, mekanik, ekonomi ve tıp gibi alanlarda karşılaşılan gerçek olgular için temel matematik modelleri yapılandırır (Asl ve Ulsoy, 2003). Titreşim ve ses kontrolü (Olgaç vd.,1997), popülasyon modelleri, ekonomik sistemler, kentsel trafik, elektrik iletim hattı, nükleer reaktörlerin kontrol sistemleri alanlarında birçok problem gecikmeli diferansiyel denklemler yardımı ile modellenir (Abdelrahman vd. 1996). GDD'ler ilk olarak 18. yy. da Laplace ve Condorcet tarafından tanımlanmıştır (Gorecki vd.,1989). Bu denklemlere fonksiyonlar uzayında

operatörler olarak ilk yer veren ise Rus matematikçi Krasovskii'dir (Saaty, 1981). Ancak bu denklemlerin teori ve uygulamalarındaki hızlı gelişim, İkinci Dünya Savaşından sonra devam etmekle kalmayıp günümüzde de sürmektedir (Asl ve Ulsoy, 2003). İngiliz matematikçi George Boole, sonlu fark hesabı (1860) adlı kitabında karma fark denklemler dediği, türevler ve farklar içeren

$$\Delta y' - a\Delta y - by' + aby = 0$$

gibi bazı diferansiyel-fark denklem örneklerine yer vermiş ve bu denklemler için fark ve türev operatörleri arasında ilişkilerden yararlanarak çözümler bulmuştur (Boole, 1980).

Wright (1945), (1955), Markos ve Kakutani (1958), Jones (1962), Kaplan ve Yorke (1975) ve diğerleri, nüfus modeli olarak

$$y'(t) = -y(t-1)|1 + y(t)|$$

denklemini, Cooke ve Yorke (1972)

$$y'(t) = f(y(t)) - f(y(t-e))$$

denklemini kullanmıştır (Güney, 1989).

Hutchinson (1948) tarafından tek türden oluşan popülasyon dinamikleri için

$$y'(t) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K} \right)$$

modeli geliştirilmiştir (Gopalsamy, 1992).

Zaman gecikmeli av-avcı modeli, balık nüfusu üzerinde çalışmaları sonucunda ilk olarak Volterra tarafından 1925 yılında oluşturulmuştur (Volterra, 1926). Mangorsky ve Cunningham (1957) av-avcı problemi için model olarak lineer olmayan,

$$x'(t) = a_{11} \left(1 - \frac{x(t)}{P} \right) x(t) - a_{12} x(t)y(t),$$

$$y'(t) = -a_{21} y(t) + a_{22} x(t - \tau) y(t - \tau)$$

denklem sistemini incelemişlerdir. Minorsky (1947) gemi dengesi ile ilgili olarak

$$ay''(t) + by'(t) + cy'(t - \tau) + ky(t) = 0$$

modelini, Driver (1963), Driver ve Norris (1967), Travis (1975), Zdanov (1975) ve Hsing (1977) elektrodinamiğin iki cisim probleminde ortaya çıkan

$$y''(t) = f_1(y(t) - x(t - a_{11}(t)), x'(t - a_{12}(t)), y'(t)),$$

$$x''(t) = f_2(x(t) - y(t - a_{21}(t)), y'(t - a_{22}(t)), x'(t))$$

sistemini, Mackey ve Glass (1977) dolaşım sistemi içine olgun hücrenin bırakılması ile ilişkili olan

$$y'(t) = \frac{by(t - \tau)}{1 + (y(t - \tau))^n} - ay(t)$$

denklemini çalışmışlardır.

Ayrıca, Callender (1930-1940), Ilartree ve Forther (1936), Minorsky (1947, 1948, 1962) ve Lefschetz zaman gecikmeli kontrol sistemleri; Ergen (1954), Levin ve Nobel (1960), Gorjavecengo (1971), El'sgol'ts (1973) Russal ve Duncan (1982) nükleer reaktörler; Placzek (1946), Boffi ve Scozzafava (1967) nötron korunması; Sherman (1960) bir gaz boşalmasında enerji dağılımı; Miranker (1962) elektrik devrelerindeki güç kaybı (Beypınar, 2005); Norkin (1965) elektromanyetik vibratörler; Silberstein (1940) foto emilsiyonlar; Brayton (1967), Fox, Mayers, Ockendon ve Taylor (1971) geçiş hatları; Volterra (1909), Gurtin ve Sternberg (1962) elastikiyet teorisi; Lotka ve Sharpe (1923), Wilson ve Burke (1942), Wilson ve Yorke (1972), London ve Yorke (1973), Hoppensteadt ve Waltman (1970) bulaşıcı hastalıkların yayılması; Glass ve Mackey (1979)'in memelilerde solunum bozukluğundan kaynaklanan rahatsızlıklar; Kalecki (1935), Goodwin (1951), Cooke ve Yorke (1972) ekonomi ve ticaret; Longtin ve Milton (1988) insan gözbebeğinin

ışığa refleksi; Philos (1991) ekositik yüzeylerdeki kütle titreşimlerinin tanımlanması; Kuang (1993), gecikmeli popülasyon dinamiği; Caberlin (2002) biyolojik sistemler alanlarında çalışmalar yapmışlardır.

GDD'lerin genel teorisi Bellman ve Cooke (1963), Smith (1957), Pinney (1958), Halanay (1966), El'sgol'ts ve Norkin (1965, 1971), Myshkis (1972), Driver (1977), Hale (1977), Yanushevski (1978) ve Marshal (1979) tarafından detaylı biçimde incelenmiştir. GDD sistemlerinin kararlılık analizi Pontryagin (1942) tarafından geliştirilmiştir. Ayrıca Bellman ve Cooke (1963) lineer ve lineer olmayan GDD'lerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine çalışmalar yapmış, Wright (1946) lineer olmayan GDD'lerin çözümlerinin varlığını ve özelliklerini analiz etmiş, değişken katsayılı lineer GDD'lerin çözümlerinin varlık ve teklik problemi üzerine çalışmalar yapmıştır.

GDD'lerin analitik çözümü için literatürde geçen yöntemler aşağıda verilmiştir.

- *Bellman adımlar yöntemi*: İlk olarak sabit gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için Bellman tarafından geliştirilmiş olan bir yöntemdir. Bu yöntemde gecikmeli diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülerek çözüme ulaşılır. (Bellen ve Zennaro, 2003)
- *Laplace dönüşümü ile çözüm*: Sabit katsayılı lineer denklemler için Fourier seri çözümlerine dayalı klasik bir yöntemdir (Heffernan ve Corless, 2005).
- *Lambert W fonksiyonu ile çözüm*: Lambert (1758) W fonksiyonu ile çözüm metodu, sabit katsayılı homojen lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılan bir yöntemdir (Corless vd., 1996).

Ayrıca, GDD'lerin farklı koşullar altında karakteristik denklemini çözerek, analitik çözümlerini bulmak için birçok çalışma yapılmıştır. Lineer GDD'lerin analitik çözümleri ile ilgili bir çalışma da Falbo (1995) da bulunmaktadır.

GDD'lerin analitik çözümleri için kullanılan yöntemler, çözümlerin kapalı formlarının haricinde, mevcut problemlerin ancak sınırlı bir alt kümesi için uygulamaya elverişlidirler (Günel, 2006). Bu nedenle, yaklaşık çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

GDD'lerin nümerik çözümleri için kullanılan ilk yaklaşım 1950'li yılların öncesine dayanan, ADD'lerin nümerik çözümü için kullanılan lineer multistep (LM) metodu baz alan ve bilinen en basit yaklaşım olan Euler metodudur (Bellen ve Zennaro, 2003). Bu metot GDD'lere, El'sgot's (1964) tarafından uyarlanmıştır. Ancak, GDD'ler için kullanılan multistep metotların teorik ve pratikteki dezavantajlarından dolayı klasik, açık, kapalı Runge-Kutta (RK) metotları kullanılmaya başlanmıştır. Literatürdeki bilinen metotların ve mevcut yazılımların bir çoğu bu yaklaşımı baz alır (Günel, 2006). Runge-Kutta metotları uygulanırken noktalarda interpolasyon ile yaklaşık değer hesaplanması amacı ile Al-Mutip (1977) ve Shampine (1985), Hermite interpolasyonunu, Barwell (1975), Al-Mutib (1977), Zennaro (1988), In't Hout (1992), Karoui (1992), Baker ve Paul (1994) ve Hayashi (1996) farklı interpolasyon yöntemlerini kullanmışlardır (Ismail, Al-Khasawneh ve Suleiman, 2003; Bellen ve Zennaro, 2003). Runge-Kutta metodu uygulanırken gecikmeli terime yaklaşım sağlayan son teknik sürekli Runge-Kutta (CRK) yöntemidir. Runge-Kutta metodu sadece ayrı noktalarda yaklaşım sağlarken, sürekli Runge-Kutta (CRK) metodu ise çözüme sürekli yaklaşım sağlamaktadır (Ismail ve Suleiman, 2001). Literatürde Euler ve Runge-Kutta metotları dışında da birçok yaklaşım metodu kullanılmıştır. El-Gendi (1974), fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için Chebyshev serisi formunda yaklaşık çözüm bulmak için El-Gendi metodunu tanımlamış, Oberle ve Pesch (1981), GDD'lerin nümerik çözümü için Hermite interpolasyon metodunu kullanmış, Banks ve Rosen (1983), lineer nonotonom gecikmeli sistemler için, Abo-Hasha (1992), gecikmeli ve neutral gecikmeli denklemler için Spline yaklaşımını geliştirmiş, Lam (1993), Padé yaklaşımını, Strygin (1998), lineer birinci mertebe gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin bir sınır değer problemine yaklaşık çözüm bulmak için kuadratik spline yöntemini tanımlamıştır.

Son dönemlerde ise GDD'ler ve sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Adomian ayrıştırma (decomposition) (Evans, 2005; Shakeri ve Dehghan, 2010), varyasyonel iterasyon (Saadatmandi ve Dehghan, 2009), Runge-Kutta metot (Ismail ve Suleiman, 2001), homotopi perturbasyon metot (Shakeri ve Dehghan, 2008), DELSOL-nümerik kod (Willé ve Baker, 1992), spline polinom yaklaşımı (Ramadan, 2005; Ramadan vd., 2006; Ramadan vd., 2009), Taylor polinom yaklaşımı (Sezer ve

Akyüz, 2006; Gökmen ve Sezer, 2013a) ve Bessel matris ve sıralama (Yüzbaşı vd., 2011; Yüzbaşı vd., 2012) metotları kullanılmaktadır.

Taylor serisi ilk olarak 1715 yılında İngiliz matematikçi Brook Taylor tarafından ortaya atılmıştır. Taylor serisinin orijin civarında açılması durumunda Maclaurin serisi olarak adlandırılması İskoçyalı matematikçi Colin Maclaurin'den sonra olmuştur. 18. yüzyılda Taylor serilerinin özel durumları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Bülbül, 2011).

Taylor polinom yaklaşımı nümerik analizde geniş bir yer tutar; özellikle Leibniz-Maclaurin-Taylor yöntemleri, birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin herhangi bir x_0 noktası ve civarında verilen başlangıç koşuluna göre Taylor seri formunda çözümünü bulmak için kullanılmıştır. Ayrıca, Kanwal ve Liu (1989), Fredholm integral denklemlerinin çözümü için bir Taylor açılım yöntemi vermiştir. Bu yöntem 1994'de Sezer tarafından Volterra tipi integral denklemlerin, daha sonra Sezer ve çalışma arkadaşları tarafından yüksek mertebeden adi diferansiyel, integral, integro-diferansiyel, fark, diferansiyel-fark, pantograph tipi denklemlerin ve bu denklemlerin sistemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmıştır (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd. 2000; Yalçınbaş, 2002; Karamete ve Sezer, 2002; Sezer vd. 2005; Gülsu ve Sezer, 2005; Sezer vd. 2006; Gülsu vd. 2007; Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer, 2007; Kurt ve Sezer, 2008; Bülbül vd., 2010; Gökmen ve Sezer, 2013a; Gökmen ve Sezer, 2013b).

Bu tez çalışmasındaki amaç, yukarıda bahsi geçen Taylor polinom yöntemini geliştirip değiştirerek, yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denklem sistemleri ile lineer olmayan fonksiyonel denklem sistemlerinden oluşan modellerin sayısal çözümleri için sıralama yöntemi ve Taylor polinomlarına dayalı bir matris yöntemi oluşturmaktır. Bu metotla çözümü aranılan sistemler, verilen koşullar altında Taylor serileri ve Taylor sıralama noktaları yardımıyla matris denkleme dönüştürülür. Bu matris denklemi, sistemin özelliğine göre bilinmeyenleri Taylor katsayılarından oluşan lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerine dönüştürülerek çözülür. Böylece, çözümden elde edilen Taylor katsayıları ile yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklem sistemlerinin ve

lineer olmayan fonksiyonel denklem sistemlerinin verilen koşullar altında, Taylor polinom çözümleri kolaylıkla bulunur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilecek ve fonksiyonel denklemlerin sınıflandırması yapılacaktır. Fonksiyonel denklemlerin bir sınıfı olan diferansiyel-fark denklemleri ve sistemleri hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Fonksiyonel Denklemler

Fonksiyonel denklemler yapılarında türev, integral, fark ve bunların çeşitli kombinasyonlarını bulunduran veya argümanlarda ilerleme, gecikme gibi sapmaların bulunduğu denklemlerdir (Güney, 1989). Bilinmeyen fonksiyonun argüman değerleri arasındaki farklar ve fonksiyonel denklemdaki t , argüman sapması olarak adlandırılır. Denklemdaki ifade (summand) sayısını artırıp, aynı zamanda komşu argüman değerlerini arttırarak, sürekli, dağıtılmış (distributed) ve hem sürekli hem dağıtılmış argüman sapmalı fonksiyonel denklemlere ulaşılır. Bu denklemler integral fonksiyonel denklemler ya da integral-fark denklemleri olarak adlandırılır. Eğer bir fonksiyonel denklemin tüm argümanlarındaki sapma veya gecikmeler sabit ise bu denklem özel olarak fark denklemi olarak adlandırılır. Diferansiyel ve fonksiyonel denklemler kavramlarını birleştirerek, fonksiyonel diferansiyel denklem veya başka bir deyişle sapma argümanlı diferansiyel denklem (SADD) kavramı elde edilir (Kolmonovskii ve Myshkis, 1999). O halde diferansiyel denklemler, integral denklemler, fark denklemleri, diferansiyel-fark denklemleri, diferansiyel-integral-fark denklemleri fonksiyonel denklemler başlığı altında incelenir. Örneğin,

$$f(t) = F[t, g(t)]$$

şeklinde ifade edilen fonksiyonel denklemler $g(t)$ birim periyodik olarak alınırsa $g(t+1) = g(t)$ eşitliğini sağlayacağından

$$f(t+1) = F[t+1, g(t)]$$

ile tanımlı fonksiyonel-fark denkleminde indirgenir.

$$f(ct) = cf(t)f'(t)$$

şeklindeki denklemler fonksiyonel diferansiyel denklemlere bir örnektir. Bir integro fonksiyonel denklem

$$F\{t, \varphi(t), \varphi[f(t)], \int_{t_0}^t K_n(t, s, \varphi(s), \varphi[f(s)]) ds\} = 0$$

ifadesi ile verilir. İntegro diferansiyel fonksiyonel denklem ise

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = G\{t, f(g(t)), \int_a^b F[t, y, f(h(y))] dy\}$$

şeklinde örneklendirilebilir (Saaty, 1981).

2.2. Sapma Argümanlı Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.2.1.

$$F(t, y(f_{01}(t)), \dots, y(f_{0m}(t)), y'(f_{11}(t)), \dots, y'(f_{1m}(t)), \dots, y^{(n)}(f_{n1}(t)), \dots, y^{(n)}(f_{nm}(t))) = 0$$

veya kısaca $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ olmak üzere

$$F(t, y^{(i)}(f_{ij}(t))) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonel diferansiyel denklemde, $f_{ij}(t)$ argümanlarından en az ikisi farklı ise, bu denkleme n . mertebeden sapma argümanlı diferansiyel denklem (SADD) denir.

Argümanların hepsinin eşit olması halinde (2.1) denklemi, n . mertebeden

$$F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

adi diferansiyel denkleme (ADD) dönüşür (Güney, 1989). SADD'ler, gecikmeli (delay), ilerlemeli (advanced), tarafsız (neutral) diferansiyel denklemler olmak üzere üç denklem sınıfının birleşimidir (Güney, 1989).

2.2.1. Sapma argümanlı diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması

Tanım 2.2.2.

(2.1) ile verilen SADD'de $j = 1, \dots, m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0, \dots, n-1$ için

1) $f_{ij}(t) \leq f(t)$ ise (2.1) denklemi gecikmeli (delay) diferansiyel denklem (GDD),

2) $f_{ij}(t) \geq f(t)$ ise ilerlemeli (advanced) diferansiyel denklem (IDD),

3) Diğer iki durum dışında kalan SADD'ler yani

$i = 0, 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için $f_{ij}(t) \leq f(t)$ özelliğini sağlayan denklemler tarafsız (neutral) diferansiyel denklem (NDD) olarak adlandırılır (Güney, 1989; Yeniçerioğlu, 2005).

GDD'ler, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümanının yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüman, bilinmeyen fonksiyonun ve onun denklemde ifade edilen türevlerinin argümanlarından daha küçük değildir (Yeniçerioğlu, 2005).

O halde $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall n_i \geq 0$, $\tau_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$y^{(n)}(t) = f(t, y^{(n_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, y^{(n_k)}(t - \tau_k(t))) \quad (2.2)$$

denkleminde $\max\{n_1, \dots, n_k\} < n$ ise; (2.2) denklemi GDD olarak adlandırılır (Kolmanosvskii ve Myshkis, 1999).

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$$

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t), y(t - \tau(t)), y'(t - \tau(t)))$$

denklemleri GDD'lere örnektir.

NDD'ler, SADD'de bilinmeyen fonksiyonun türevinin mertebesinin sapma argümanlı terimlerin türevlerinin en yüksek mertebesine eşit olduğu diferansiyel denklemlerdir. (2.2) denkleminde $\max\{n_1, \dots, n_k\} = n$ denklem NDD olarak adlandırılır.

$$y'(t) = f(t, y(t), y'(t - \tau(t)))$$

$$y'(t) = f(t, y(t - \tau_1(t)), y'(t - \tau_2(t)))$$

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t), y(t - \tau_1(t)), y'(t - \tau_2(t)), y''(t - \tau_3(t)))$$

denklemleri NDD örnekleridir.

Eğer (2.2) denkleminde $\max\{n_1, \dots, n_k\} > n$ ise denklem özel olarak ilerlemeli (advanced) diferansiyel denklem adını alır.

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), y'(t - \tau_2(t)), y''(t - \tau_3(t)))$$

$$y''(t) = f(t, y(t - \tau_1), y'(t - \tau_2), y'''(t - \tau_3))$$

2.3. Diferansiyel-Fark Denklemleri

Diferansiyel-fark denklemleri, t argümanından bir sabit sayı kadar kaydırılarak elde edilen argümanların değişken olduğu bir y bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren SADD'lerdir (Beypınar, 2005; Bellman ve Cooke, 1963).

$$y''(t) - y'(t-1) + y(t) = 0, \tag{2.3}$$

$$y'(t) - y(t+1) - y(t - \sqrt{2}) = 0 \tag{2.4}$$

denklemleri diferansiyel-fark denklemlerine örnek olarak verilebilir. Burada y , sadece tek bir bağımsız değişken t 'nin fonksiyonu olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle, denklemdeki tüm türevler adi türevdir. Diferansiyel-fark denklemlerinin mertebesi, hem türevin mertebesi hem de sapma içeren argümanların mertebesi cinsinden tanımlanabilir. Alışılmış olduğu gibi denklemin türev mertebesi, en yüksek mertebeden türevin mertebesi, fark mertebesi ise farklı argümanların (distinct arguments) sayısının bir eksiğidir (Bellman ve Cooke, 1963).

Örneğin (2.3) denklemi türevler cinsinden ikinci mertebeden, farklar cinsinden birinci mertebededir.

Türev mertebesi n , fark mertebesi m olan diferansiyel-fark denkleminin genel formu:

$$F[t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m), y'(t), y'(t-\tau_1), \dots, y'(t-\tau_m), \dots, y^{(n)}(t), y^{(n)}(t-\tau_1), \dots, y^{(n)}(t-\tau_m)] = 0 \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada F , $1+(m+1)(n+1)$ değişkenli fonksiyon ve τ_1, \dots, τ_m de aralık (spans) veya geciktirici (retardations) olarak adlandırılan sayılardır. Bu çalışmada kullanılan tüm denklemlerde F ve y fonksiyonları reel değerli fonksiyonlar ve τ_1, \dots, τ_m sayıları da reel sayılardır (Beypınar, 2005).

$m, n \in \mathbb{Z}^+$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$, $f(t)$ ve $a_{ij}(t)$ reel t ekseninin bazı aralıklarında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denklemlerinin genel gösterimi

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}(t) y^{(j)}(t-\tau_i) = f(t) \quad (2.6)$$

şeklindedir.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} y^{(j)}(t-\tau_i) = f(t) \quad (2.7)$$

formundaki lineer sabit katsayılı diferansiyel-fark denklemleri teorisi, (2.6) ile verilen değişken katsayılı lineer diferansiyel-fark denklemleri teorisinden daha basit ve daha eksiksizdir (Bellman ve Cooke, 1963).

2.4. Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri

Tanım 2.4.1. $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_{ijk}(t) y_j'(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n b_{ijk}(t) y_j(t - \tau_i) = f_k(t) \quad (2.8)$$

formundaki n denklemden oluşun ve n bilinmeyen fonksiyon içeren denklem sistemine, birinci mertebeden n bilinmeyenli lineer diferansiyel-fark denklem sistemi denir (Bellman ve Cooke, 1963).

Diferansiyel-fark denklemleri ile diferansiyel-fark denklem sistemleri arasında bağlantı kurulabilmektedir.

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(t) y^{(j)}(t - \tau_i) + f(t)$$

n . mertebeden lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denkleminde $y_j(t) = y^{(j-1)}(t)$, $j = 1, \dots, n$ dönüşümü uygulanarak,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ &\dots \\ y_1^{(n-1)}(t) &= y_n(t), \\ y_1^{(n)}(t) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j(t - \tau_i) + f(t) \end{aligned}$$

birinci mertebeden n bilinmeyenli diferansiyel-fark denklem sistemi elde edilir (Bellman ve Cooke, 1963). O halde aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.4.2. n . mertebeden her lineer diferansiyel-fark denklemi, birinci mertebeden n denklemden oluşan ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir lineer diferansiyel-fark denklem sistemine dönüştürülebilir (Driver, 1977).

Örneğin türevler cinsinden 4. mertebeden ve farklar cinsinden 2. mertebeden

$$y^{(4)}(t) = y'''(t) + 2y'''(t-1) - y'''(t-2) + 2y''(t) + y'(t-1) - 3y(t) - y(t-2) + t^2$$

sabit katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel-fark denklemini ele alalım.

$$y_j(t) = y^{(j-1)}(t), \quad j=1, \dots, 4 \text{ dönüşümü ile}$$

$$y'(t) = y_2(t)$$

$$y''(t) = y_3(t)$$

$$y'''(t) = y_4(t)$$

$$y^{(4)}(t) = y_4(t) + 2y_4(t-1) - y_4(t-2) + 2y_3(t) + y_2(t-1) - 3y_1(t) - y_1(t-2) + t^2$$

sistemi veya

$$\mathbf{Y}^*(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ y^{(4)}(t) \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \mathbf{Y}(t-j+1) = \begin{bmatrix} y_1(t-j+1) \\ y_2(t-j+1) \\ y_3(t-j+1) \\ y_4(t-j+1) \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{Y}^*(t) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}_j \mathbf{Y}(t-j+1) + \mathbf{f}(t)$$

vektörel denklemi elde edilir. Böylece dördüncü mertebeden bir diferansiyel-fark denkleminin birinci mertebeden bir diferansiyel-fark denklem sistemine dönüştürülebileceği örnek üzerinde gözlenmiştir (Güney, 1989).

2.4.1. Vektör-matris gösterimi

Vektör-matris gösterimi ile (2.8) genel lineer diferansiyel-fark denklem sistemi daha basit bir formda ifade edilebilir. Böylece,

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{Y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(t) \end{bmatrix}_{n \times 1},$$
$$\mathbf{A}_i(t) = [a_{ijk}] = \begin{bmatrix} a_{i11}(t) & a_{i12}(t) & \dots & a_{i1n}(t) \\ a_{i21}(t) & a_{i22}(t) & \dots & a_{i2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in1}(t) & a_{in2}(t) & \dots & a_{inn}(t) \end{bmatrix}_{n \times n},$$
$$\mathbf{B}_i(t) = [b_{ijk}] = \begin{bmatrix} b_{i11}(t) & b_{i12}(t) & \dots & b_{i1n}(t) \\ b_{i21}(t) & b_{i22}(t) & \dots & b_{i2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{in1}(t) & b_{in2}(t) & \dots & b_{inn}(t) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

olmak üzere (2.8) sistemi

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i(t) \mathbf{Y}^{(1)}(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^m \mathbf{B}_i(t) \mathbf{Y}(t - \tau_i) = \mathbf{f}(t) \quad (2.9)$$

şeklinde vektörel formda yazılabilir. Sistemi sınıflandırmak, çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerinde incelemeler yapabilmek için aynı ADD'ler teorisinde olduğu gibi karakteristik denklemin tanımlanmasına ve köklerinin incelenmesine ihtiyaç duyulmaktadır (Bellman ve Cooke, 1963).

2.4.2. Karakteristik denklemler

Lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin birçok özelliği aynı adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi karakteristik denklem yardımı ile analiz edilmektedir.

Tanım 2.4.3.

Sabit katsayılı, homojen bir diferansiyel-fark denkleminin Laplace dönüşümünü uygulayarak veya

$$Dy = y'(t), \quad Ey = y(t+1)$$

şeklinde tanımlanan, türev ve kayma operatörleri arasındaki $E = e^D$ bağıntısından yararlanarak ve lineer diferansiyel-fark denklemini D operatörü cinsinden yazarak ya da denklemin $y = e^{st}$ şeklinde bir çözümünün olduğunu kabul ederek, ADD'lerde olduğu gibi, karakteristik denklem denilen, verilen diferansiyel-fark denkleminin özgü bir denklem elde edilir (Güney, 1989).

Örneğin,

$$y'(t) = ay(t - \tau) \tag{2.10}$$

denkleminde operatörleri kullanarak,

$$\begin{aligned} Dy &= aE^{-\tau} y \\ Dy &= ae^{-D\tau} y \\ (D - ae^{-D\tau})y &= 0 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Parantez içindeki ifadede D operatörü yerine s yazılıp sıfıra eşitlenerek

$$s - ae^{-s\tau} = 0 \tag{2.11}$$

karakteristik denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (2.10) denkleminin $y = e^{st}$ şeklinde çözümü olduğunu kabul edilirse, $se^{st} = ae^{s(t-\tau)}$ eşitliğinden aynı karakteristik denkleme ulaşırlar.

(2.7) denkleminde $f(t) = 0$ alınarak elde edilen

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} y^{(j)}(t - \tau_i) = 0$$

lineer homojen diferansiyel-fark denkleminin karakteristik denklemi bahsi geçen yöntemlerden herhangi biri ile

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} s^j e^{-s\tau_i} = 0 \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir.

Karakteristik denklemler, homojen lineer diferansiyel-fark denklem sistemleri için de sistemin yapısı hakkında bilgi edinmek amacı ile kullanılır. (2.9) vektörel denkleminde $\mathbf{A}_i(t) = [a_{ijk}(t)]$, $\mathbf{B}_i(t) = [b_{ijk}(t)]$, $i = 0, 1, \dots, m$ matrisinin bileşenleri sabit ve $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ alınarak elde edilen

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i \mathbf{Y}^{(1)}(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^m \mathbf{B}_i \mathbf{Y}(t - \tau_i) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

denklem sisteminin ξ sabit $n \times 1$ vektör olmak üzere,

$$\mathbf{Y}(t) = e^{st} \xi$$

şeklinde çözümü olduğu kabul edilirse,

$$\left(\sum_{i=0}^m (\mathbf{A}_i s + \mathbf{B}_i) e^{-s\tau_i} \right) \xi = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

denklemini elde edilir. Sistemin sıfırdan farklı çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\det \left(\sum_{i=0}^m (\mathbf{A}_i s + \mathbf{B}_i) e^{-s\tau_i} \right) = 0 \quad (2.15)$$

olmasıdır. Elde edilen (2.15) denklemi lineer diferansiyel-fark denklem sisteminin karakteristik denklemidir (Bellman ve Cooke, 1963).

Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemlerin ve sistemlerinin çözüm problemi, karakteristik denklemin çözüm problemine dönüşmektedir (Moralı, 1988). Diferansiyel-fark denklemlerinde de benzer durum söz konusudur. Ancak görüldüğü gibi diferansiyel-fark denklemlerinin karakteristik denklemleri transandant tiptedir ve genelde tam olarak çözülemezler. Diferansiyel-fark denklemlerinin (2.12) ile verilen karakteristik denklemleri yarı polinom (quasi polynomial) denilen denklem sınıfındadır. Yarı polinom şeklindeki denklemler genel olarak sonsuz kompleks çözüme sahiptir. Her bir s değerine karşılık diferansiyel-fark denkleminin bir $y(t) = e^{st}$ çözümü elde edilir. Eğer $s \in \mathbb{R}$ ise karşılık gelen çözüm salınımsızdır. Yarı polinom denklemlerin tüm köklerinin belirlenmesi genelde mümkün değildir. Ancak köklerin kompleks düzlemdeki yerleri hakkındaki bilgi, kararlılık analizinde önemli yer tutar. Bu konu ile ilgili birçok araştırma yapılmaktadır (Saaty, 1981).

Teorem 2.4.4. $K \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$ ve $\tau > 0$ sapma argümanı olmak üzere lineer fark denklemlerinin karakteristik denklemlerinin formu olan

$$F(z) = z^n + az^{n-1} + \dots - Ke^{i\theta} e^{-\tau z} (z^m + bz^{m-1} + \dots) = 0$$

yarı polinomu verilsin. $n > m$ ise $F(z)$ 'nin pozitif gerçel kısmılı köklerinin sayısı sonludur. $K \neq 0$ ise $F(z)$ istenildiği kadar büyük negatif gerçel kısmılı sonsuz köke sahiptir. $K \neq 0$ iken $n = m$ ve $a = b$ ise $F(z)$

$$\frac{1}{\tau} (\log K + i(\theta + 2k\pi)) + o(1)$$

ile verilen sonsuz köke sahiptir. $K < 1$ olduğunda $F(z)$ pozitif gerçel kısmılı sonlu köke sahip, $K > 1$ olduğunda da negatif gerçel kısmılı köklerin sayısı sonludur. $K = 0$ ise $F(z)$ istenildiği kadar büyük pozitif gerçel kısmılı sonsuz köke sahiptir. (Saaty, 1981; Güney, 1989).

İspat: (Krall, 1964)

Bir diğerk teorem ise Borel'in teoreminin bir özel halidir.

Teorem 2.4.5. $g(z)$ tam transandant fonksiyon, $p(z)$ keyfi bir polinom olmak üzere

$$g(z) - p(z) = 0$$

denklemini sonlu sayıda köke sahip olacak şekilde, en çok bir $p(z)$ polinomu vardır (Saaty, 1981; Güney, 1989).

Bu teoremin uygulaması bir örnek üzerinde gösterilecek olursa,

Örnek 2.4.6. $g(s) = e^{-s}(as + b)$ alınırsa, $p(s) = 0$ için $g(s) - p(s) = 0$ yani $e^{-s}(as + b) = 0$ denkleminin $s = \frac{-b}{a}$ olmak üzere bir tane (sonlu sayıda) kökü vardır.

Ancak eğer $p(s) \neq 0$ alınırsa $g(s) - p(s) = 0$ denkleminin sonsuz kökü vardır.

2.5. Çözümün Tanımı

Gecikmeli diferansiyel denklemler teorisi, adi diferansiyel denklemler teorisinin basit bir uzantısı değildir. Birçok açıdan yeni kavram ve yaklaşımlara gerek duyulur (Saaty, 1981). Gecikmeli diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemlerden farklı olarak, verilen bir $t_0 \in \mathbb{R}$ için $y(t_0) = y_0$ başlangıç koşulu altında bir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çözümü olabilir. Genelde bir gecikmeli diferansiyel denklemin t_0 'ın her iki yanında nasıl çözüleceği henüz bilinmemektedir (Saaty ve Bram, 1964).

$$y''(t) + y(\pi - t) = 0$$

denkleminin bir çözümü

$$y(t) = \sin t$$

dir. Bu türden açık çözümler elde etmenin her zaman mümkün olmadığı aşikardır. Hatta çözüm elde edilse bile, çözümün yapısı hakkında tam anlamı ile bilgi edinmekte yetersiz kalınabilir. Bu gibi durumlarda analitik işlemler sırasında çözümün yapısı ile ilgili bazı sorulara cevap bulmak mümkün olabilir, böylece bir bakıma denklem çözülmüş kabul edilebilir. Ancak t_0 'ın sağında çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu durumda

$$y^{(n)}(t) = f(t, y^{(j)}(t - \tau_i(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gecikmeli diferansiyel denklemini, $t_0 < t$ için çözmek gerektiğinde, $y^{(j)}(t - \tau_i(t))$ 'lerin, argümanlarını t_0 'dan küçük kılan t değerleri için verilmiş olması gerekir. O halde, ancak $t < t_0$ için

$$y(t) = \theta(t), \quad y^{(j)}(t) = \theta^{(j)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde bir $\theta(t)$ başlangıç fonksiyonu verilirse, başlangıç fonksiyon problemini çözmek için gerekli veri elde edilmiş olur. Çözülebilirlik problemi bu aşamada söz konusudur (Güney, 1989; Yeniçerioğlu, 2005).

$$Y(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_n(t)]^T$$

olmak üzere

$$Y^{(1)}(t) = F(t, Y(t - \tau_i(t))), \quad \tau_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16)$$

gecikmeli diferansiyel denklem sistemini ele alalım. $\beta \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $t_0 < t < \beta$ için $\gamma < t - \tau_i(t) < t_0$ olacak şekilde bir $\gamma < t_0$ gerçel sayısı mevcut olsun. Ayrıca, $A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\theta: [\gamma, t_0] \rightarrow A$ verilmiş bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} t \in [\gamma, t_0] &\Rightarrow Y(t) = \theta(t) \\ t \in [t_0, \beta] &\Rightarrow Y^{(1)}(t) = F(t, Y(t - \tau_i(t))) \end{aligned} \quad (2.17)$$

olsun (Güney, 1989; Yeniçerioğlu, 2005).

Tanım 2.5.1. $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ olmak üzere, $[\gamma, \beta_1]$ de

$$\begin{aligned} t \in [\gamma, t_0] &\Rightarrow Y(t) = \theta(t) \\ t \in [t_0, \beta_1] &\Rightarrow Y^{(1)}(t) = F(t, Y(t - \tau_i(t))) \end{aligned} \quad (2.18)$$

koşullarını sağlayan $Y(t)$ fonksiyonuna, (2.16) denkleminin bir çözümü denir. Eğer herhangi iki çözüm, ikisinin birden tanımlandığı bölgede eşit ise denklemin çözümü tektir denir (Güney, 1989).

Teorem 2.5.2. F ve y_i fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olmak üzere $Y(t)$ 'nin (2.17) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$Y(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \in [\gamma, t_0] \\ \theta(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, Y(s - \tau_i(t))) ds, & t \in [t_0, \beta] \end{cases} \quad (2.19)$$

olmasıdır (Driver, 1977).

Eğer, F fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir, $i = 1, \dots, m$ için $[t_0, \beta]$ üzerinde $\gamma < r_i(t) < t$ ve r_i sürekli, $[\gamma, t_0]$ üzerinde θ ve ilk $n-1$ türevi sürekli ise $[\gamma, \beta]$ aralığında en çok bir çözümü vardır.

2.6. Polinom Yaklaşımı

Sayısal analiz yöntemleri içinde tanımlanan ve elde var olan noktalardan yola çıkılarak bu noktalar arasında, farklı bir yerde ve değeri bilinmeyen bir noktadaki olası değeri tahmin etmeye yarayan yöntemlerin tümüne verilen genel isimdir. En basit tanımı ile var olan sayısal değerleri kullanarak, diğer noktalardaki değerlerin tahmin edilmesi olarak açıklanmaktadır. O halde polinom interpolasyon, bir

fonksiyonun sonlu sayıda $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ noktasında aldığı $f(x_i) \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ değerleri bilinmek kaydıyla

$$p(x_i) = a_n(x_i)^n + \dots + a_1x_i + a_0 = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlı $p \in P_n(\mathbb{R})$ polinomunu bulma problemidir (Quarteroni vd., 2007).

Teorem 2.6.1. $X = \{x_i \mid i = 0, \dots, n\} \subset [a, b]$, $n+1$ farklı nokta, $f \in C[a, b]$ için $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ olmak üzere (2.20) denklemini sağlayan bir tek $p \in P_n$ vardır (Quarteroni vd., 2007).

$(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ noktalarından geçen n . dereceden

$$p(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \quad (2.21)$$

polinomunu belirlemek için

$$p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.22)$$

lineer denklem sistemi çözülerek a_0, a_1, \dots, a_n katsayıları belirlenir. Sistemin matris formda gösterimi

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisidir ve singüler değildir. O halde (2.22) sisteminin bir tek çözümü vardır (Philips, 2003).

Tanım 2.6.2. (2.21) denkleminde $P_n(F) = \{p(x) \mid \text{der}(p(x)) \leq n, p(x) \in F\}$ uzayının $B = \{1, x, \dots, x^n\}$ standart baz elemanları yerine

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlı Lagrange polinomları alınarak, $l_i(x)$ temel polinomları cinsinden tanımlanmış

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

f' 'nin interpolasyon polinomunun Lagrange formu elde edilir.

Teorem 2.6.3. $\{x_i \mid i = 0, \dots, n\} \subset [a, b]$, $(n+1)$ farklı nokta, $f \in C^{n+1}[a, b]$ ve $p \in P_n$, (2.22) interpolasyon şartını sağlayan polinom olsun. Bu durumda bir $x \in [a, b]$ noktasındaki hata, $\xi \in [a, b]$, x 'e bağlı bir nokta olmak üzere

$$E_n(x) = f(x) - p_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır. Burada f' 'nin interpolasyon polinomu $p_n f$ ile gösterilmektedir (Quarteroni vd., 2007).

2.6.1. En iyi yaklaşım

Bu bölümde $n \rightarrow \infty$ iken (2.23) interpolasyon hatasının davranışı analiz edilecektir.

Tanım 2.6.4. (Norm) $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olmak üzere, V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: V \rightarrow F$ fonksiyonu $\forall x, x_1, x_2 \in V$ ve $\forall \alpha \in F$ için

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $x = \theta \Leftrightarrow \|x\| = 0$ (θ , V 'nin sıfır vektörü),

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

N4) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V vektör uzayında tanımlı norm ve $(V, \|\cdot\|)$ 'a da normlu lineer uzay denir.

Fonksiyon uzayları için standart norm alternatifleri aşağıdaki şekilde verilir (Mason, 2003):

1. L_∞ norm (sonsuz norm, max norm, Chebyshev norm):

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

2. L_2 norm (en küçük kareler normu, Öklid normu):

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad w(x) \text{ negatif olmayan ağırlık fonksiyonu}$$

3. L_1 norm (1-normu, Manhattan norm):

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_a^b w(x) |f(x)| dx$$

4. L_p norm (Hölder norm):

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

5. Ağırlıklı minimax norm:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

Tanım 2.6.5. (Mason, 2003) N normlu lineer uzay, $f \in N$ olmak üzere $f(x)$ 'nin olası yaklaşım fonksiyonları $f^*(x)$ 'ler bir \mathbf{A} ailesi tanımlar ve

$$\mathbf{A} = \{f^*(x) \mid f^*(x) = p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 2.6.6. (Mason, 2003) N normlu lineer uzay, $f \in N$ ve \mathbf{A} yaklaşımlar ailesi, N 'nin bir alt uzayı olmak üzere,

1. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $f^*(x)$ varsa, $f^*(x)$ 'e \mathbf{A} da bir iyi yaklaşımdır denir.

2. $f^*(x)$, \mathbf{A} da bir yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_B^*\| \leq \|f - f^*\|$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir $f_B^*(x)$ varsa, $f_B^*(x)$ 'e \mathbf{A} da bir en iyi yaklaşımdır denir.

3. ρ pozitif gerçel sayı ve $f_B^*(x)$, \mathbf{A} da en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_N^*\| \leq (1 + \rho) \|f - f_B^*\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $f_N^*(x)$ varsa, $f_N^*(x)$ 'e \mathbf{A} da en iyiye yakın bir yaklaşımdır denir.

Bu çalışmada yaklaşım normu olarak $\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ maksimum normu kullanılacaktır. f yaklaşım yapılmak istenen fonksiyon, $p_n f$, f 'nin n . mertebeden yaklaşım polinomu, $x_i \in [a,b]$, $i = 0, 1, \dots$ olmak üzere interpolasyon hatası

$$E_{n,\infty}(x_i) = \|f - p_n f\|_\infty, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.24)$$

$p_n^* \in P_n$ en iyi yaklaşım polinomunu göstermek üzere hata, $\forall q_n \in P_n$ için

$$E_n^* = \|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty$$

şeklindedir.

2.7. Linear Denklem Sistemleri

n bilinmeyen ve m denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemi, kapalı formda

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Burada x_j 'ler bilinmeyenler, a_{ij} 'ler sistemin katsayıları, b_i 'ler de bilinen değerlerdir. (2.25) cebirsel denklem sistemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.26)$$

şeklinde matris formunda gösterilir. (2.26) lineer denklem sisteminin tek çözümünün olması için gerek ve yeter koşul \mathbf{A} katsayılar matrisinin tersinir olmasıdır. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.7.1. $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(F)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.

- 1) \mathbf{A} tersinirdir.
- 2) $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ dir.
- 3) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homojen denklem sisteminin sadece aşikar (sıfır) çözümü vardır.

2.8. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Bu bölümde tezin uygulama kısmında kullanılan direkt yöntemlerden bazıları sunulmaktadır.

2.8.1 Gauss eleminasyon metodu ile çözüm

n bilinmeyen n denklemden oluşan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemi ele alınsın. Katsayılar matrisi $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tekil olmayan matris olmak üzere, Gauss eleminasyon metodu, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sistemini elemanter satır işlemleri yardımı ile kendine satırca denk olan $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ üst üçgensel sistemine dönüştürme yöntemine dayanır. \mathbf{U} tekil olmayan matris olmak üzere $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ sistemi geriye yerine koyma yöntemi ile kolayca çözümlenerek bilinmeyen katsayılar hesaplanır.

2.9 Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Doğal yaşamda karşılaşılan pek çok olgu lineer olmayan denklem veya denklem sistemleri ile modellenebilmektedir. Ancak lineer olmayan denklemleri ve sistemlerini, analitik olarak çözmek kolay değildir. Bu sebeple, bu tip sistemlerin

yaklaşık çözümlerini bulmak için bazı iterasyon metodları kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları Newton yöntemleri, yarı Newton yöntemleri, Broyden metodu, homotopi metodudur. Ancak, bu iterasyon yöntemleri bile tüm denklemler için istenilen sonucu vermemektedir.

Lineer olmayan denklem sistemi

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya daha kısa olarak

$$F(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n] = 0; \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

biçiminde ifade edilir (Bülbul, 2011).

2.9.1 Newton metodu

Tanım 2.9.1.

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisine F' 'nin Jakobiyen matrisi denir.

Newton metodu $F(x) = 0$ ile belirtilen lineer olmayan denklem sistemini

$$f_i(x) = f_i(x_k) + \nabla f_i(x_k)(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2)$$

şeklinde tanımlı Taylor formülünü kullanarak çözer. Jakobiyen matrisini kullanarak ifade

$$F(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2)$$

şekline dönüşür. Buradan

$$J(x_k)(x - x_k) = -F(x_k) \quad (2.27)$$

yazılabilir. Eğer Jakobiyen matrisi tersinir ise (2.27)'nin tek bir x_{k+1} çözümü vardır ve

$$x_{k+1} - x_k = -J(x_k)^{-1} F(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)$$

sistemine Newton metodu denir. Newton metodu

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k) \quad x_{k+1} = x_k + s_k$$

ile gösterilir (Kemancı, 2007).

2.10. Taylor Serisi ve Temel Teoremleri

Teorem 2.10.1. (Taylor Teoremi): $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ve f , $|x - \alpha| < r$ aralığında $m+1$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\exists c \in (\alpha, x)$ öyle ki

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x - \alpha)^n + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)(x - \alpha)^{m+1} \quad (2.28)$$

dir (Simon, 2008).

İspat: (Simon, 2008) $0 < x - \alpha < r$ olsun. ($-r < x - \alpha < 0$ olması durumunda benzer işlemler yapılır). $|t - \alpha| < r$ için

$$g(t) = f(t) - \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (t - \alpha)^n - M(t - \alpha)^{m+1} \quad (2.29)$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada M bir sabit ve $g(x) = 0$ olduğu düşünülürse (2.29) denkleminde

$$M = \frac{f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x - \alpha)^n}{(x - \alpha)^{m+1}}$$

elde edilir. Ayrıca (2.29) denkleminde doğrudan hesaplamalarla,

$$\begin{cases} g^{(n)}(\alpha) = 0, \forall n = 0, \dots, m \\ g^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}(t) - M(m+1)!, |t - \alpha| < r \end{cases} \quad (2.30)$$

elde edilir. Burada $g(x) = g(\alpha) = 0$ olduğundan ortalama değer teoremine göre, $g'(c_1) = 0$ olacak şekilde $c_1 \in (\alpha, x)$ vardır. Benzer şekilde $g'(x) = g'(\alpha) = 0$ olduğundan $g''(c_2) = 0$ olacak şekilde $c_2 \in (\alpha, x)$ vardır. Bu işlem $m+1$ adım için tekrarlanırsa $(m+1)$. adımda $g^{(m+1)}(c_{m+1}) = 0$ olacak şekilde bir $c_{m+1} \in (\alpha, x)$ sabiti olduğu sonucu çıkarılır. Ancak, (2.30) denkleminde $g^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}(t) - M(m+1)!$ dir. Böylece

$$M = \frac{f^{(m+1)}(c_{m+1})}{(m+1)!}$$

ifadesi elde edilir.

M 'in tanımından, $c = c_{m+1}$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.10.2. (Simon, 2008) $f(x)$ fonksiyonu $|x - \alpha| < r$ aralığında tüm mertebelerden türevlenebilir ve

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| r^n \leq C, \quad \forall n \geq 0, |x - \alpha| < r \quad (2.31)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcut ise, $|x - \alpha| < r$ özelliğindeki her x için

$\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x - \alpha)^n$ serisi $f(x)$ 'e yakınsar.

İspat: (2.31) koşulu ile (2.28) denkleminin sağındaki $\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x - \alpha)^{(m+1)}$ terimi için

$$\left| \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x - \alpha)^{(m+1)} \right| \leq C \left(\frac{|x - \alpha|}{r} \right)^{m+1}$$

eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Böylece (2.30) ifadesinde $m = N$ için $N \rightarrow \infty$ iken

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x - \alpha)^n \right| \leq C \left(\frac{|x - \alpha|}{r} \right)^{(N+1)} \rightarrow 0$$

olur. Buradan, $|x - \alpha| < r$ iken

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n = f(x)$$

yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n = f(x), \quad |x - \alpha| < r$$

elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde literatürde, adi diferansiyel denklemler, integral denklemler, integro-diferansiyel denklemler, diferansiyel-fark denklemlerine ve bu tip denklemlerden oluşan sistemlere uygulanmış olan Taylor matris ve sıralama metodu, geliştirilip değiştirilerek lineer diferansiyel-fark denklem sistemleri ve lineer olmayan fonksiyonel denklem sistemlerinden oluşan modellere uygulanmıştır. Taylor sıralama metodu ile verilen sistem bir matris denklemine dönüştürülerek bilinmeyen Taylor katsayıları hesaplanır ve böylece kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

Ayrıca sunulan yöntemin hassasiyetini ve çözümlerin doğruluğunu göstermek amacı ile hata analizi yapılmıştır. Verilen problemlerin tam çözümleri biliniyorsa, yaklaşım teorisi gereğince yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki fark ölçülebilir.

$y_i(t)$ ve $y_{i,N}(t)$ sırasıyla, tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere, hata analizinde kullanılan hata normlarından bazıları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

1. L_2 hata = $\left(\sum_{i=0}^n (y_i(t) - y_{i,N}(t))^2 \right)^{1/2}$,
2. L_∞ hata = $\max_{t \in [a,b]} |y_i(t) - y_{i,N}(t)|$.

3.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri için Taylor Sıralama Yöntemi

Çalışmamızın ilk bölümünde, P'_{ji} , ve f_j fonksiyonları, $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\sum_{r=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^r(t) y_i^{(r)}(\lambda t + \mu) = f_j(t), \quad j=1,2,\dots,k \quad (3.1)$$

m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denklem sisteminin, a_{rj}, b_{rj}, c_{rj} ve λ_{nr} uygun reel sabitler ve $a \leq c \leq b$, $r=0,1,\dots,m-1$, $n=1,2,\dots,k$ için

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{rj}^n y_n^{(j)}(a) + b_{rj}^n y_n^{(j)}(b) + c_{rj}^n y_n^{(j)}(c) = \lambda_{nr} \quad (3.2)$$

karışık koşulları altında yaklaşık çözümlerini elde etmek için Taylor sıralama metodu oluşturulacaktır. Taylor sıralama metodunda amaç; (3.1) denklem sisteminin (3.2) koşulları altında

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{in}(t-c)^n, \quad y_{in} = \frac{y_i^{(n)}(c)}{n!}, \quad i=1,2,\dots,k, \quad a \leq c \leq b \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlı N . mertebeden kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümünü elde etmektedir. Burada N pozitif tamsayı ve serinin kesme sınırı, y_{in} 'ler de belirlenecek olan Taylor katsayılarıdır.

3.1.1. Temel matris bağıntıları

(3.1) ile ifade edilen m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denklem sisteminin (3.3) formunda yaklaşık çözümünü elde etmek amacıyla, bilinmeyen Taylor katsayılarının bulunması gerekmektedir. Bu nedenle (3.1) denklemindeki terimlerin matris formu oluşturulmalıdır. Bu amaçla ilk olarak (3.3) ile tanımlı çözüm fonksiyonu ve türevlerinin matris formu $i=1,2,\dots,k$ ve $r=0,1,\dots,m$ için

$$y_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{A}_i, \quad (3.4)$$

$$y_i^{(r)}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^r \mathbf{A}_i, \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & (t-c) & (t-c)^2 & \dots & (t-c)^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.4) denkleminde $t \rightarrow \lambda t + \mu$ yazılarak

$$\mathbf{y}_i(\lambda t + \mu) = \mathbf{T}(\lambda t + \mu) \mathbf{A}_i \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{T}(\lambda t + \mu)$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{B}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \lambda^0 \mu^0 & \binom{1}{0} \lambda^0 \mu^1 & \binom{2}{0} \lambda^0 \mu^2 & \dots & \binom{N}{0} \lambda^0 \mu^N \\ 0 & \binom{1}{1} \lambda^1 \mu^0 & \binom{2}{1} \lambda^1 \mu^1 & \dots & \binom{N}{1} \lambda^1 \mu^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \lambda^N \mu^0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere

$$\mathbf{T}(\lambda t + \mu) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda, \mu) \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir. (3.7) eşitliğinin her iki tarafının t 'ye göre türevi alınır ve (3.5)

eşitliği kullanılırsa $i = 1, 2, \dots, k$, $r = 0, 1, \dots, m$ olmak üzere

$$\mathbf{y}_i^{(r)}(\lambda t + \mu) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(\lambda, \mu)\mathbf{B}^r \mathbf{A}_i \quad (3.8)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece $\mathbf{y}^{(r)}(\lambda t + \mu)$, $r = 0, 1, \dots, m$ matrisleri

$$\mathbf{T}^*(t) = \text{diag}[\mathbf{T}(t) \quad \mathbf{T}(t) \quad \dots \quad \mathbf{T}(t)]_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{B}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\lambda, \mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\lambda, \mu) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}(\lambda, \mu) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}^r \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

ile tanımlanmak üzere

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda t + \mu) = \mathbf{T}^*(t)\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu)\tilde{\mathbf{B}}^r \mathbf{A} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir.

3.1.2. Koşulların matris bağıntıları

Bu kısımda, (3.2) ile ifade edilen koşulların matris formları oluşturulacaktır. (3.2) bağıntısını açık olarak yazılarak,

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{rj}^1 y_1^{(j)}(a) + b_{rj}^1 y_1^{(j)}(b) + c_{rj}^1 y_1^{(j)}(c)] = \lambda_{1r}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{rj}^2 y_2^{(j)}(a) + b_{rj}^2 y_2^{(j)}(b) + c_{rj}^2 y_2^{(j)}(c)] = \lambda_{2r}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{rj}^k y_k^{(j)}(a) + b_{rj}^k y_k^{(j)}(b) + c_{rj}^k y_k^{(j)}(c)] = \lambda_{kr}$$

denklem sistemi $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için

$$\mathbf{K}_{rj} = \begin{bmatrix} a_{rj}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{rj}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rj}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{rj} = \begin{bmatrix} b_{rj}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{rj}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rj}^k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{rj} = \begin{bmatrix} c_{rj}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{rj}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rj}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(j)}(\eta) = \begin{bmatrix} y_1^{(j)}(\eta) \\ y_2^{(j)}(\eta) \\ \vdots \\ y_k^{(j)}(\eta) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_r = \begin{bmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{kr} \end{bmatrix},$$

olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{K}_{0j} \mathbf{y}^{(j)}(a) + \mathbf{L}_{0j} \mathbf{y}^{(j)}(b) + \mathbf{M}_{0j} \mathbf{y}^{(j)}(c) = \boldsymbol{\lambda}_0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{K}_{1j} \mathbf{y}^{(j)}(a) + \mathbf{L}_{1j} \mathbf{y}^{(j)}(b) + \mathbf{M}_{1j} \mathbf{y}^{(j)}(c) = \boldsymbol{\lambda}_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{K}_{m-1,j} \mathbf{y}^{(j)}(a) + \mathbf{L}_{m-1,j} \mathbf{y}^{(j)}(b) + \mathbf{M}_{m-1,j} \mathbf{y}^{(j)}(c) = \boldsymbol{\lambda}_{m-1}$$

şeklinde ifade edilir. Kısaca,

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0j} \\ \mathbf{K}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{m-1,j} \end{bmatrix}_{mk \times k}, \quad \mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{0j} \\ \mathbf{L}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{m-1,j} \end{bmatrix}_{mk \times k}, \quad \mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{0j} \\ \mathbf{M}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{m-1,j} \end{bmatrix}_{mk \times k}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_{m-1} \end{bmatrix}_{mk \times k}$$

olmak üzere koşulların matris denklemi

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{K}_j \mathbf{y}^{(j)}(a) + \mathbf{L}_j \mathbf{y}^{(j)}(b) + \mathbf{M}_j \mathbf{y}^{(j)}(c) = \boldsymbol{\lambda} \quad (3.10)$$

ile tanımlanır. \mathbf{A} katsayılar matrisine bağlı $\mathbf{y}^{(j)}(a)$, $\mathbf{y}^{(j)}(b)$, $\mathbf{y}^{(j)}(c)$ bağıntıları (3.10) matris denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{K}_j \mathbf{T}^*(a) + \mathbf{L}_j \mathbf{T}^*(b) + \mathbf{M}_j \mathbf{T}^*(c)] \tilde{\mathbf{B}}^j \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. \mathbf{V} matrisi

$$\mathbf{V} = \sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{K}_j \mathbf{T}^*(a) + \mathbf{L}_j \mathbf{T}^*(b) + \mathbf{M}_j \mathbf{T}^*(c)] \mathbf{B}^j$$

şeklinde tanımlanmak üzere koşulların matris formu

$$\mathbf{V} \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \quad (3.12)$$

şekline indirgenir.

3.1.3. Çözüm yöntemi

(3.1) sisteminin matris formu

$$\mathbf{P}_r(t) = \begin{bmatrix} P_{11}^r(t) & P_{12}^r(t) & \dots & P_{1k}^r(t) \\ P_{21}^r(t) & P_{22}^r(t) & \dots & P_{2k}^r(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1}^r(t) & P_{k2}^r(t) & \dots & P_{kk}^r(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda t + \mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(r)}(\lambda t + \mu) \\ \mathbf{y}_2^{(r)}(\lambda t + \mu) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^{(r)}(\lambda t + \mu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\sum_{r=0}^m \mathbf{P}_r(t) \mathbf{y}^{(r)}(\lambda t + \mu) = \mathbf{f}(t) \quad (3.13)$$

şeklindedir. $a \leq t \leq b$ ve $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olmak üzere

$$t_l = a + \frac{b-a}{N} l, \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.14)$$

ile tanımlı Taylor sıralama noktaları (3.13) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{r=0}^m \mathbf{P}_r \mathbf{Y}^{(r)} = \mathbf{F} \quad (3.15)$$

formunda sıralama noktalarına bağlı yeni sistem elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_r(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_r(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

$$\mathbf{Y}^{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(r)}(\lambda t_0 + \mu) \\ \mathbf{y}^{(r)}(\lambda t_1 + \mu) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(r)}(\lambda t_N + \mu) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

şeklindedir. (3.9) denklemini ve (3.14) sıralama noktalarını kullanarak,

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda t_l + \mu) = \mathbf{T}^*(t_l) \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu) \tilde{\mathbf{B}}^r \mathbf{A} \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece

$$\mathbf{T}^*(t_l) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_l) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t_l) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{T}(t_l) \end{bmatrix}_{k \times k(N+1)}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^*(t_0) \\ \mathbf{T}^*(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}^*(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}$$

olmak üzere (3.16) sistemi

$$\mathbf{Y}^{(r)} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu)\tilde{\mathbf{B}}^r \mathbf{A} \quad (3.17)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir. (3.17) ifadesi, (3.15) denklem sisteminde yerine yazılarak sistemin temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{r=0}^m \mathbf{P}_r \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu)\tilde{\mathbf{B}}^r \right\} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{r=0}^m \mathbf{P}_r \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu)\tilde{\mathbf{B}}^r, \quad p, q = 1, 2, \dots, k(N+1) \quad (3.19)$$

olmak üzere, $k(N+1)$ denklemden oluşan $k(N+1)$ bilinmeyenli lineer denklem sistemi kısaca

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak, \mathbf{W} ve \mathbf{F} matrislerinin son satırları \mathbf{V} ve λ ile yer değiştirilerek (3.1) sisteminin (3.2) koşullarına bağlı matris denklemi

$$\overline{\mathbf{W}}\mathbf{A}=\overline{\mathbf{F}} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\mathbf{W}}$ ve $\overline{\mathbf{F}}$ matrisleri

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,k(N+1)} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k,1} & w_{k,2} & \cdots & w_{k,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k(N-m+1),1} & w_{k(N-m+1),2} & \cdots & w_{k(N-m+1),k(N+1)} \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,k(N+1)} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{mk,1} & v_{mk,2} & \cdots & v_{mk,k(N+1)} \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_k) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_{N-m+1}) \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

ile ifade edilir. Eğer $\overline{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir ise (3.21) denklem sistemi çözülerek

$$\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{W}})^{-1} \overline{\mathbf{F}}$$

y_{in} , ($n = 0, 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, k$) katsayıları kolayca hesaplanır. Elde edilen katsayılar (3.3) ifadesinde yerine yazılarak

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{in}(t-c)^n \quad (3.22)$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

3.1.4. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı

$y_i(t)$ ve $y_{i,N}(t)$ sırasıyla, tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere mutlak hata fonksiyonları, verilen aralıkların seçilmiş noktalarında

$$e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Çözümlerin doğrulunu kontrol etmek için (3.22) ile elde edilen yaklaşık çözümler (3.1) denkleminde yerine yazılır. (3.22) polinom çözümü sistemin bir çözümü olduğundan denklem (3.1)'i sağlamalıdır. Yani

$j = 1, 2, \dots, k$, $t = t_q \in [a, b]$, $q = 0, 1, 2, \dots$ için

$$E_{j,N}(t_q) = \left| \sum_{r=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^r(t_q) y_{i,N}^{(r)}(\lambda t_q + \mu) - f_j(t_q) \right| \cong 0, \quad (3.24)$$

veya

$$E_{j,N}(t_q) \leq 10^{-k_q} \quad (k_q \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\text{Max} 10^{-k_q} = 10^{-k}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) önceden belirlenerek $E_{j,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır.

Diğer yandan hata fonksiyonun grafiği $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$E_{j,N}(t) = \sum_{r=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^r(t) y_{i,N}^{(r)}(\lambda t_q + \mu) - f_j(t_q), \quad (3.25)$$

ile elde edilir. Eğer (3.25) fonksiyonun grafiği N kesme sınırı artarken $y = 0$ doğrusuna yaklaşıyorsa çözümün hatası sifıra yaklaşıyor demektir.

3.2. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Genişletilmiş Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri için Taylor Sıralama Yöntemi

Bu bölümde, bir önceki bölümde sunulmuş lineer diferansiyel-fark denklem sistemi genişletilerek P_{ji}^n , Q_{ji}^r , f_j fonksiyonları, $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar ve $R \leq m$ olmak üzere m . mertebeden k bilinmeyenli

$$\sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^n(t) y_i^{(n)}(t) + \sum_{r=0}^R \sum_{i=1}^k Q_{ji}^r(t) y_i^{(r)}(\lambda_{ri} t + \mu_{ri}) = f_j(t), \quad (3.26)$$

lineer değişken katsayılı diferansiyel-fark denklem sistemi ele alınmıştır. a_{rj}, b_{rj}, c_{rj} ve λ_{nr} uygun reel sabitler ve $a \leq c \leq b$, $r = 0, 1, \dots, m-1$, $n = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere (3.26) sisteminin

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{rj}^n y_n^{(j)}(a) + b_{rj}^n y_n^{(j)}(b) + c_{rj}^n y_n^{(j)}(c) = \lambda_{nr} \quad (3.27)$$

karişık koşulları altında temel matris gosterimleri oluşturularak Taylor sıralama metodu ile yaklaşık cözümleri elde edilecektir. Sistemin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{in} (t-c)^n, \quad y_{in} = \frac{y_i^{(n)}(c)}{n!}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad a \leq c \leq b \quad (3.28)$$

şeklinde N . mertebeden kesilmiş Taylor serisi cinsinden cözümünün olduğu kabul edilecektir. Burada y_{in} 'ler belirlenecek olan Taylor katsayılarıdır.

3.2.1. Temel matris bağıntıları

(3.26) denkleminin (3.27) koşulları altında (3.28) formunda yaklaşık cözümünü elde etmek için denklemdaki terimlerin matris formları oluşturulmalıdır. Bu amaçla ilk olarak (3.28) ile verilen cözüm fonksiyonu,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & (t-c) & (t-c)^2 & \dots & (t-c)^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} y_{i0} & y_{i1} & y_{i2} & \dots & y_{iN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}^T$$

olmak üzere

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{A}_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.29)$$

şeklinde, cözüm fonksiyonunun türevleri de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere

$$\mathbf{y}_i^{(n)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^n \mathbf{A}_i, \quad n=0,1,\dots,m, \quad i=1,2,\dots,k \quad (3.30)$$

şeklinde matris formda ifade edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(n)}(t) \\ \mathbf{y}_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^n \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^n \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^n \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

veya kısaca

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^*(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}^n &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}^n \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{y}^{(n)}(t) = \mathbf{T}^*(t)\mathbf{B}^n \mathbf{A}, \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (3.31)$$

eşitliği elde edilir.

(3.26) denkleminin sapma argümanı içeren kesiminde bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin matris gösterimini bulmak için (3.29) denkleminde $t \rightarrow \lambda_{ri}t + \mu_{ri}$ alınarak

$$\mathbf{y}_i(\lambda_{ri}t + \mu_{ri}) = \mathbf{T}(\lambda_{ri}t + \mu_{ri})\mathbf{A}_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.32)$$

matris denklemi elde edilir.

$\mathbf{T}(\lambda_{ri}t + \mu_{ri})$ ile $\mathbf{T}(t)$ arasındaki bağıntı $\lambda_{ri} \neq 0$, $\mu_{ri} \neq 0$ için

$$\mathbf{B}(\lambda_{ri}, \mu_{ri}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \lambda_{ri}^0 \mu_{ri}^0 & \binom{1}{0} \lambda_{ri}^0 \mu_{ri}^1 & \binom{2}{0} \lambda_{ri}^0 \mu_{ri}^2 & \dots & \binom{N}{0} \lambda_{ri}^0 \mu_{ri}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \lambda_{ri}^1 \mu_{ri}^0 & \binom{2}{1} \lambda_{ri}^1 \mu_{ri}^1 & \dots & \binom{N}{1} \lambda_{ri}^1 \mu_{ri}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \lambda_{ri}^N \mu_{ri}^0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{T}(\lambda_{ri}t + \mu_{ri}) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(\lambda_{ri}, \mu_{ri}), \quad i = 1, \dots, k \quad (3.33)$$

şeklindedir. (3.33) ifadesinin her iki tarafının t 'ye göre türevi alınıp (3.30) bağıntısı kullanılarak $r = 0, 1, \dots, R$ için

$$\mathbf{y}_i^{(r)}(\lambda_{ri}t + \mu_{ri}) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(\lambda_{ri}, \mu_{ri})\mathbf{B}^r \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.34)$$

ifadesine ulaşılır. Böylece $i = 1, \dots, k$ için

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda_r t + \mu_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(r)}(\lambda_{r1} t + \mu_{r1}) \\ \mathbf{y}_2^{(r)}(\lambda_{r2} t + \mu_{r2}) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^{(r)}(\lambda_{rk} t + \mu_{rk}) \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda_{r1}, \mu_{r1}) \mathbf{B}^r \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda_{r2}, \mu_{r2}) \mathbf{B}^r \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda_{rk}, \mu_{rk}) \mathbf{B}^r \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

veya kısaca

$$\mathbf{T}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{k \times k(N+1)},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\lambda_{r1}, \mu_{r1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\lambda_{r2}, \mu_{r2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}(\lambda_{rk}, \mu_{rk}) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}^r \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

ve $r = 0, 1, \dots, R$ olmak üzere

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda_r t + \mu_r) = \mathbf{T}^*(t) \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) \tilde{\mathbf{B}}^r \mathbf{A}, \quad j = 1, \dots, k \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.2. Sistemin temel matris gösterimi

İlk olarak (3.26) sistemi, diferansiyel ve fark argümanı içeren kısımları ayrılarak, yani

$$\begin{aligned}
D_j(t) &= \sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^n(t) y_i^{(n)}(t), \quad j=1, \dots, k \\
H_j(t) &= \sum_{r=0}^R \sum_{i=1}^k Q_{ji}^r(t) y_i^{(r)}(\lambda_{ri}t + \mu_{ri}), \quad R \leq m
\end{aligned} \tag{3.36}$$

olmak üzere

$$D_j(t) + H_j(t) = f_j(t), \quad j=1, \dots, k \tag{3.37}$$

şeklinde iki parçalı yapıda ifade edilebilir.

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) \\ \mathbf{D}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_k(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \quad \mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(t) \\ \mathbf{H}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_k(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

olmak üzere (3.37) sistemi kapalı formda

$$\mathbf{D}(t) + \mathbf{H}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (3.26) sisteminin temel matris gösterimini elde etmek için (3.38) deki sistemlerin ayrı ayrı matris gösterimleri bulunmalıdır.

3.2.2.1 Diferansiyel kısmın matris gösterimi

Diferansiyel kısmın matris gösterimi,

$$\mathbf{P}_n(t) = \begin{bmatrix} P_{11}^n(t) & P_{12}^n(t) & \dots & P_{1k}^n(t) \\ P_{21}^n(t) & P_{22}^n(t) & \dots & P_{2k}^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1}^n(t) & P_{k2}^n(t) & \dots & P_{kk}^n(t) \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad \mathbf{y}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{(n)}(t) \\ y_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ y_k^{(n)}(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ \vdots \\ D_k(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(t) \mathbf{y}^{(n)}(t) \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilir. (3.31) bağıntısı (3.39) de yerine yazılacak olursa,

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(t) \mathbf{T}^*(t) \mathbf{B}^n \mathbf{A} \quad (3.40)$$

bağıntısına ulaşılır.

3.2.2.2. Fark argümanı içeren kısmın matris gösterimi

(3.26) denkleminin fark argümanı içeren kesimi açık olarak yazılırsa $j=1,2,\dots,k$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j(t) = & \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_{j1}^r(t) \mathbf{y}_1^{(r)}(\lambda_{r1}t + \mu_{j1}) + \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_{j2}^r(t) \mathbf{y}_2^{(r)}(\lambda_{r2}t + \mu_{r2}) + \\ & \dots + \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_{jk}^r(t) \mathbf{y}_k^{(r)}(\lambda_{rk}t + \mu_{rk}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.34) ifadesi (3.41) da yerine yazılırsa

$$\mathbf{H}_j(t) = \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_{ji}^r(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda_{ri}, \mu_{ri}) \mathbf{B}^r \quad (3.42)$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$\mathbf{Q}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11}^r(t) & \mathcal{Q}_{12}^r(t) & \dots & \mathcal{Q}_{1k}^r(t) \\ \mathcal{Q}_{21}^r(t) & \mathcal{Q}_{22}^r(t) & \dots & \mathcal{Q}_{2k}^r(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Q}_{k1}^r(t) & \mathcal{Q}_{k2}^r(t) & \dots & \mathcal{Q}_{kk}^r(t) \end{bmatrix}_{k \times k},$$

$$\mathbf{y}^{(r)}(\lambda_r t + \mu_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(r)}(\lambda_{r1} t + \mu_{r1}) \\ \mathbf{y}_2^{(r)}(\lambda_{r2} t + \mu_{r2}) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^{(r)}(\lambda_{rk} t + \mu_{rk}) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ \vdots \\ H_k(t) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_r(t) \mathbf{T}^*(t) \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) \mathbf{B}^r \mathbf{A} \quad (3.43)$$

matris bağıntısına ulaşılır.

3.2.3. Koşulların matris gösterimi

Koşullar, Bölüm 3.1’de verilen koşulların aynısı olduğundan matris gösterimleri, bölüm 3.1.2’de verilen (3.10) ifadesi ile

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{K}_j \mathbf{T}^*(a) + \mathbf{L}_j \mathbf{T}^*(b) + \mathbf{M}_j \mathbf{T}^*(c)] \tilde{\mathbf{B}}^j \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$$\mathbf{V} = \sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{K}_j \mathbf{T}^*(a) + \mathbf{L}_j \mathbf{T}^*(b) + \mathbf{M}_j \mathbf{T}^*(c)] \mathbf{B}^j$$

şeklinde tanımlanmak üzere koşulların matris formu (3.12) ile verilen

$$\mathbf{V} \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}$$

şekline indirgenir.

3.2.4. Çözüm Yöntemi

(3.40) ve (3.43) matris formları (3.38) matris denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left\{ \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(t) \mathbf{T}^*(t) \mathbf{B}^n + \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_r(t) \mathbf{T}^*(t) \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) \mathbf{B}^r \right\} \mathbf{A} = \mathbf{f}(t) \quad (3.44)$$

denklemini elde edilir. $a \leq t \leq b$ ve $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olmak üzere

$$t_l = a + \frac{b-a}{N} l, \quad l = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlı Taylor sıralama noktaları (3.44) denkleminde yerine yazılarak

$$\left(\sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n \mathbf{T} \mathbf{B}^n + \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) \mathbf{B}^r \right) \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.45)$$

formunda sıralama noktalarına bağlı yeni sistem elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_n(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_n(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_n(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^*(t_0) \\ \mathbf{T}^*(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}^*(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_r(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_r(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\lambda_{r1}, \mu_{r1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\lambda_{r2}, \mu_{r2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}(\lambda_{rk}, \mu_{rk}) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n \mathbf{T} \tilde{\mathbf{B}}^n + \sum_{r=0}^R \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_r, \mu_r) \tilde{\mathbf{B}}^r, \quad p, q = 1, \dots, k(N+1) \quad (3.46)$$

olmak üzere, $k(N+1)$ denklemden oluşan $k(N+1)$ bilinmeyenli lineer denklem sistemi kısaca

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.47)$$

Sonuç olarak, \mathbf{W} ve \mathbf{F} matrislerinin son satırları \mathbf{V} ve λ matrisleri ile yer değiştirilerek (3.26) sisteminin (3.27) koşullarına bağlı matris denklemi

$$\overline{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \overline{\mathbf{F}} \quad (3.48)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\mathbf{W}}$ ve $\overline{\mathbf{F}}$ matrisleri

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,k(N+1)} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k,1} & w_{k,2} & \cdots & w_{k,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k(N-m+1),1} & w_{k(N-m+1),2} & \cdots & w_{k(N-m+1),k(N+1)} \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,k(N+1)} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,k(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{mk,1} & v_{mk,2} & \cdots & v_{mk,k(N+1)} \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_k) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_{N-m+1}) \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

ile ifade edilir. Eğer $\overline{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir ise (3.48) denklem sistemi çözülerek

$$\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{W}})^{-1} \overline{\mathbf{F}}$$

y_{in} , ($n = 0, 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, k$) katsayıları kolayca hesaplanır. Elde edilen katsayılar (3.28) ifadesinde yerine yazılarak

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{in}(t-c)^n \quad (3.49)$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

3.2.5. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı

y_i ve $y_{i,N}$ sırasıyla, tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere mutlak hata fonksiyonları, verilen aralıkların seçilmiş noktalarında

$$e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Çözümlerin doğrulunu kontrol etmek için (3.49) ile elde edilen yaklaşık çözümler (3.26) denkleminde yerine yazılır. (3.49) polinom çözümleri sistemin bir çözümü olduğundan denklem (3.26) yı sağlamalıdır. Yani

$j = 1, 2, \dots, k$, $t = t_q \in [a, b]$, $q = 0, 1, 2, \dots$ için

$$E_{j,N}(t_q) = \left| \begin{aligned} & \sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^n(t_q) y_{i,N}^{(n)}(t_q) \\ & + \sum_{r=0}^R \sum_{i=1}^k Q_{ji}^r(t_q) y_{i,N}^{(r)}(\lambda_{ji} t_q + \mu_{ji}) - f_j(t_q) \end{aligned} \right| \cong 0, \quad (3.51)$$

veya

$$E_{j,N}(t_q) \leq 10^{-k_q} \quad (k_q \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\text{Max } 10^{-k_q} = 10^{-k}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) önceden belirlenerek $E_{j,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı arttırılır.

Diğer yandan hata fonksiyonun grafiği $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
E_{j,N}(t) = & \sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^k P_{ji}^n(t_q) y_{i,N}^{(n)}(\lambda t_q + \mu) \\
& + \sum_{r=0}^R \sum_{i=1}^k Q_{ji}^r(t_q) y_{i,N}^{(r)}(\lambda_{ji} t_q + \mu_{ji}) - f_j(t_q),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

ile elde edilir. Eğer (3.52) fonksiyonun grafiği N kesme sınırı artarken $y=0$ doğrusuna yaklaşıyorsa çözümün hatası sifira yaklaşıyor demektir.

3.3. Biyolojik Türlerin Bir Arada Yaşamını Modelleyen Lineer Olmayan Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklem Sisteminin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Sıralama Yöntemi

Çalışmamızın bu bölümünde biyolojik türlerin bir arada yaşamını modelleyen lineer olmayan gecikmeli integro diferansiyel denklem sistemi ele alınacaktır. Bu amaçla, t anında iki ayrı $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ türleri düşünölsün. Bu türler bir araya getirildiğinde, varsayalım ki ikinci tür birinci tür ile beslensin. Bu durumda ikinci tür $y_2(t)$ 'nin oranındaki değişim (artış) $\frac{dy_2(t)}{dt}$ ile gösterilir. Bu değişim, yalnızca $y_1(t)$ 'nin şu andaki popölasyonuna değil, aynı zamanda şimdiiye kadar mevcut olduğu tüm nüfus değerlerine de bağlıdır. İki tür arasındaki etkileşim dengeye ulaştığında, etkileşim $h_1, \gamma_1, h_2, \gamma_2 > 0, 0 \leq t \leq b$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1(t) \left[h_1 - \gamma_1 y_2(t) - \int_{t-T_0}^t f_1(t-\tau) y_2(\tau) d\tau \right] + g_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2(t) \left[-h_2 + \gamma_2 y_1(t) + \int_{t-T_0}^t f_2(t-\tau) y_1(\tau) d\tau \right] + g_2(t) \end{cases} \tag{3.53}$$

denklem sistemi ile

$$y_1(0) = \alpha_1, \quad y_2(0) = \alpha_2 \tag{3.54}$$

başlangıç koşulları altında ifade edilir. Şimdiye kadar (3.53) sistemi Adomian decomposition metot (ADM) (Babolian ve Biazar, 2002), rasyonel Chebyshev tau metot (Parand ve Razzaghi, 2004), varyasyonel iterasyon metot (VIM), pseudospectral Legendre metot (PLM) (Shakeri ve Dehghan, 2008) ve Legendre multiwavelet metot (Yousefi, 2011) ile yaklaşık olarak çözülmüştür.

Bu çalışmada amaç, daha önce kullanılmış olan Taylor sıralama ve matris metotlarını değiştirip geliştirerek (3.53)–(3.54) sisteminin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} t^n, \quad y_{i,n} = \frac{y_i^{(n)}(0)}{n!}, \quad i=1,2, \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.55)$$

kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümünü bulmaktır. Burada ($n=0,1,\dots,N, i=1,2$) için $y_{i,n}$ 'ler belirlenmesi gereken Taylor katsayılarıdır.

3.3.1. Temel matris bağıntıları

Bu bölümde (3.53) sisteminin (3.54) başlangıç koşulları altında kesilmiş Taylor polinomu cinsinden yaklaşık çözümünü elde etmek için sistemdeki tüm terimlerin matris formu oluşturulmalıdır. Bu amaçla ilk olarak (3.55) ile verilen çözüm fonksiyonunun matris gösterimi ele alınacak olursa,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i,N} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$y_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.56)$$

$$y_i^{(1)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_i, \quad (3.57)$$

bağıntıları elde edilir.

Benzer şekilde sistemdeki lineer olmayan $y_1(t)y_2(t)$, $y_1(t)y_2(\tau)$ ve $y_1(\tau)y_2(t)$ terimleri de

$$\mathbf{T}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = \begin{bmatrix} y_{2,0}\mathbf{Y}_1 & y_{2,1}\mathbf{Y}_1 & \dots & y_{2,N}\mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1},$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = \begin{bmatrix} y_{1,0}\mathbf{Y}_2 & y_{1,1}\mathbf{Y}_2 & \dots & y_{1,N}\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_1(t)y_2(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ &= \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$y_1(t)y_2(\tau) = \mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad (3.59)$$

$$y_1(\tau)y_2(t) = \mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad (3.60)$$

şeklinde matris forma indirgenir.

Çekirdek fonksiyonu $K_i(t, \tau) = f_i(t - \tau)$, $i = 1, 2$

$$k_{m,n}^i = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_i(0, 0)}{\partial t^m \partial \tau^n}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2$$

olmak üzere,

$$K_i(t, \tau) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{m,n}^i t^m \tau^n, \quad i = 1, 2 \quad (3.61)$$

şeklinde kesilmiş Taylor serisi cinsinden ifade edilir. Bu durumda (3.61)'in matris formu

$$\mathbf{T}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N]$$

olmak üzere

$$\mathbf{K}_i(t, \tau) = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_i\mathbf{T}^T(\tau), \quad \mathbf{K}_i = [k_{m,n}^i], \quad m, n = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2 \quad (3.62)$$

şeklindedir.

3.3.2. Sistemin temel matris gösterimi

Bir önceki bölümde tanımlanmış olan (3.56)-(3.60) ve (3.62) bağıntıları (3.53) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_1 &= h_1\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_1 - \gamma_1\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} - \int_{t-T_0}^t \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_1\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} d\tau + g_1(t) \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_2 &= -h_2\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_2 + \gamma_2\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} + \int_{t-T_0}^t \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_2\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} d\tau + g_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde iki matris denklemi ya da

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \int_{t-T_0}^t \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{T}(\tau) d\tau = [q_{m,n}(t)], \quad m, n = 0, 1, \dots, N, \\ [q_{m,n}(t)] &= \frac{t^{m+n+1} - (t-T_0)^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} (\mathbf{T}(t)\mathbf{B} - h_1\mathbf{T}(t))\mathbf{Y}_1 + (\gamma_1\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_1\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}^*(t))\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = g_1(t) \\ (\mathbf{T}(t)\mathbf{B} + h_2\mathbf{T}(t))\mathbf{Y}_2 + (-\gamma_2\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_2\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}^*(t))\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = g_2(t) \end{cases} \quad (3.63)$$

sistemi elde edilir. Böylece (3.53) sisteminin matris gösterimi

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{B} - h_1\mathbf{T}(t), \\ \mathbf{D}_2(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{B} + h_2\mathbf{T}(t), \\ \mathbf{A}_1(t) &= \gamma_1\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_1\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}^*(t), \\ \mathbf{A}_2(t) &= -\gamma_2\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_2\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}^*(t)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{A}_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = g_1(t) \\ \mathbf{D}_2(t)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{A}_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = g_2(t) \end{cases} \quad (3.64)$$

şeklindedir. Sonuç olarak (3.53) sisteminin temel matris denklemi,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \\ \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (3.65)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir.

3.3.3. Taylor matris-sıralama metodu

Bu bölümde

$$t_s = \frac{b}{N}s, \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

şeklinde tanımlı sıralama noktalarını (3.65) matris denkleminde yerine yazarak,

$$\mathbf{D}(t_s)\mathbf{Y} + \mathbf{A}(t_s)\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t_s), \quad s = 0, 1, \dots, N \quad (3.66)$$

yeni denklem sistemini elde ederiz. Böylece yeni temel matris denklemi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}} \\ \overline{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}^* + \mathbf{A}\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \quad (3.67)$$

şekline gelir.

Denklem (3.56) yi kullanarak koşulların matris formunu

$$\mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_1 = \alpha_1 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_2 = \alpha_2 \quad (3.69)$$

şeklinde elde ederiz. (3.68) ve (3.69) satır matrisleri (3.67)'in herhangi iki satırı ile değiştirilerek, koşullara bağlı matris denklemi elde edilir. Böylece (3.53) sisteminin (3.54) başlangıç koşulları altında temel matris denklemi, $n = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve denklem (3.55)'de yerine yazılırsa

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} t^n, \quad i = 1, 2 \quad (3.70)$$

Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur.

3.3.4 Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı

$y_i(t)$ ve $y_{i,N}(t)$ sırasıyla, (3.53) sisteminin tam ve yaklaşık çözümlerini göstermek üzere mutlak hata fonksiyonları, verilen aralıkların seçilmiş noktalarında

$$e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|, \quad i = 1, 2 \quad (3.71)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Çözümlerin doğrulunu kontrol etmek için (3.70) ile elde edilen yaklaşık çözümler (3.53) denkleminde yerine yazılır. (3.70) polinom çözümleri sistemin çözümleri olduğundan denklem (3.53)'ü sağlamalıdır. Yani

$i = 1, 2 \quad t = t_q \in [0, b], \quad q = 0, 1, \dots$ için

$$\begin{aligned} E_{1,N}(t_q) &= \left| \frac{dy_{1,N}(t_q)}{dt} - y_{1,N}(t_q) \left[\begin{array}{l} h_1 - \gamma_1 y_{2,N}(t_q) \\ - \int_{t-T_0}^t f_1(t_q - \tau) y_{2,N}(\tau) d\tau \end{array} \right] - g_1(t_q) \right| \cong 0, \\ E_{2,N}(t_q) &= \left| \frac{dy_{2,N}(t_q)}{dt} - y_{2,N}(t_q) \left[\begin{array}{l} h_2 - \gamma_2 y_{1,N}(t_q) \\ - \int_{t-T_0}^t f_2(t_q - \tau) y_{1,N}(\tau) d\tau \end{array} \right] - g_2(t_q) \right| \cong 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

veya

$$E_{i,N}(t_q) \leq 10^{-k_q} \quad (k_q \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\text{Max } 10^{-k_q} = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ önceden belirlenerek $E_{i,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır.

3.4. Lineer Olmayan İkinci Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi için Taylor Sıralama Yöntemi

Çalışmamızın bu bölümünde $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(t)y_1' + a_2(t)y_1 + a_3(t)y_2'' + a_4(t)y_2' + a_5(t)y_2 \\ \quad + N_1(y_1, y_2) = f_1(t), \\ y_2'' + b_1(t)y_2' + b_2(t)y_2 + b_3(t)y_1'' + b_4(t)y_1' + b_5(t)y_1 \\ \quad + N_2(y_1, y_2) = f_2(t), \end{cases} \quad (3.73)$$

ile tanımlı lineer olmayan ikinci mertebe diferansiyel denklem sistemlerinin sınır değer problemi

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_1(1) = 0, \\ y_2(0) &= y_2(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

sınır koşulları altında ele alınmıştır. Burada $0 \leq t \leq 1$, N_1 ve N_2 lineer olmayan fonksiyonlar, $a_i, b_i, i = 1, \dots, 5$ sürekli fonksiyonlar ve f_1, f_2 bilinen fonksiyonlardır.

İkinci mertebe başlangıç değer problemlerini çözmek için birçok analitik metot kullanılmaktadır (Wazwaz, 2002; Ramos, 2005). Ancak, bu metotlar ikinci mertebe sınır değer problemlerine uygulanamamaktadır. Bu sebeple nümerik çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmuştur. Geng (2007), (3.73)-(3.74) probleminin analitik çözümünü, varsayım altında, çekirdek uzayında seri çözümü formunda vermiştir. (3.73) sistemini şimdiye kadar Lu (2007), varvasyonel iterasyon metod ile Dehghan ve Saadatmandi (2007), sinc-sıralama temelli bir nümerik metodla, Saadatmandi ve Farsangi (2007), Chebyshev sonlu farklar metodu ile çözmüşlerdir. Dehghan ve Lakestani (2008), sistemin çözümünü bulmak için kübik B-spline ölçekleme fonksiyonlarına dayalı bir nümerik metot önermişlerdir ve Saadatmandi v.d. (2009), sistemin çözümü için He's homotopi perturbasyon metodunu sunmuşlardır.

Bizim amacımız, daha önce kullanılmış olan Taylor sıralama ve matris metotlarını değiştirip geliştirerek (3.73) –(3.74) sisteminin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} t^n, \quad y_{i,n} = \frac{y_i^{(n)}(0)}{n!}, \quad i=1,2, \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.75)$$

kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümünü bulmaktır. Burada ($n=0,1,\dots,N, i=1,2$) için $y_{i,n}$ 'ler belirlenmesi gereken Taylor katsayılarıdır.

3.4.1. Temel matris bağıntıları

Bu kesimde, (3.73) denklemindeki tüm terimlerin matris formu oluşturulacaktır. Bu amaçla ilk olarak (3.75) ile ifade edilen Taylor seri çözümleri ve türevlerinin matris gösterimi ele alınacak olursa,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i,N} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$y_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.76)$$

$$y_i^{(n)}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^n \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.77)$$

bağıntıları elde edilir.

(3.73) sisteminin lineer olmayan kısmı $N_i(y_1, y_2)$, $i, j = 1, 2$ nümerik örnekler içinde $y_i^2(t)$ ve $y_i(t)y_j(t)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$ biçimlerinde yer almaktadır. Lineer olmayan ifadelerin matris gösterimleri de $i, j = 1, 2$ için

$$\mathbf{T}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{ii} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \mathbf{Y}_i & y_{i,1} \mathbf{Y}_i & \dots & y_{i,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{ij} = \begin{bmatrix} y_{j,0} \mathbf{Y}_i & y_{j,1} \mathbf{Y}_i & \dots & y_{j,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y_i^2(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{T}^*(t) \bar{\mathbf{Y}}_{ii}, \quad (3.78)$$

$$y_i(t) y_j(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{T}^*(t) \bar{\mathbf{Y}}_{ij} \quad (3.79)$$

$$y_j(t) y_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{T}^*(t) \bar{\mathbf{Y}}_{ji}$$

şeklinde matris forma indirgenir.

3.4.2. Sistemin temel matris gösterimi

Bir önceki bölümde tanımlanmış olan (3.76)-(3.79) matris bağıntıları (3.73) sisteminde yerine yazılarak

$$\begin{cases} \mathbf{T}(t) [\mathbf{B}^2 + a_1(t) \mathbf{B} + a_2(t) \mathbf{I}] \mathbf{Y}_1 + \mathbf{T}(t) [a_3(t) \mathbf{B}^2 + a_4(t) \mathbf{B} + a_5(t) \mathbf{I}] \mathbf{Y}_2 \\ \quad + \mathbf{N}_1(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = f_1(t), \\ \mathbf{T}(t) [\mathbf{B}^2 + b_1(t) \mathbf{B} + b_2(t) \mathbf{I}] \mathbf{Y}_2 + \mathbf{T}(t) [b_3(t) \mathbf{B}^2 + b_4(t) \mathbf{B} + b_5(t) \mathbf{I}] \mathbf{Y}_1 \\ \quad + \mathbf{N}_2(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = f_2(t) \end{cases} \quad (3.80)$$

matris sistemi elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1(t) &= \mathbf{T}(t)[\mathbf{B}^2 + a_1(t)\mathbf{B} + a_2(t)\mathbf{I}], \\ \mathbf{D}_2(t) &= \mathbf{T}(t)[a_3(t)\mathbf{B}^2 + a_4(t)\mathbf{B} + a_5(t)\mathbf{I}], \\ \mathbf{E}_1(t) &= \mathbf{T}(t)[b_3(t)\mathbf{B}^2 + b_4(t)\mathbf{B} + b_5(t)\mathbf{I}], \\ \mathbf{E}_2(t) &= \mathbf{T}(t)[\mathbf{B}^2 + b_1(t)\mathbf{B} + b_2(t)\mathbf{I}]\end{aligned}$$

olmak üzere (3.80) sisteminin matris gösterimi

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{D}_2(t)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{N}_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = f_1(t) \\ \mathbf{E}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{E}_2(t)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{N}_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = f_2(t) \end{cases} \quad (3.81)$$

şekline dönüşür.

Sonuç olarak (3.81) sisteminin temel matris denklemleri,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) & \mathbf{D}_2(t) \\ \mathbf{E}_1(t) & \mathbf{E}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \\ \mathbf{N}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}, \quad i, j = 1, 2\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(t) \quad (3.82)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir.

3.4.3. Taylor sıralama metodu

Bu bölümde

$$t_s = \frac{b}{N} s, \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (3.82) matris denkleminde yerine yazılarak,

$$\mathbf{P}(t_s)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t_s)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(t_s), \quad s = 0, 1, \dots, N \quad (3.83)$$

yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{N}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} \quad (3.84)$$

şekline dönüşür.

Son olarak (3.74) ile tanımlanan sınır koşullarının matris gösterimini bulmak için denklem (3.76) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_1 &= 0, & \mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_2 &= 0 \\ \mathbf{T}(1)\mathbf{Y}_1 &= 0, & \mathbf{T}(1)\mathbf{Y}_2 &= 0 \end{aligned}$$

satır matrisleri elde edilir. Böylece koşulların temel matrisi,

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(0) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(1) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}$$

olmak üzere sırası ile

$$\mathbf{J}_0 \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3.86)$$

şeklinde ifade edilir. (3.84) denklemindeki \mathbf{W} matrisinin herhangi iki satırı (3.85) ve (3.86) matrisleri ile değiştirilerek, koşullara bağlı matris denklemi elde edilir. Böylece (3.73) sisteminin (3.74) sınır koşulları altında temel matris denklemi, $n=0,1,\dots,N$ için $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür.

Bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve denklem (3.75) da yerine yazılırsa, sistemin

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} t^n, \quad i=1,2 \quad (3.87)$$

şeklinde Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur.

3.4.4. Çözümlerin doğruluğu ve hata hesabı

$y_i(t)$, $i=1,2$ ve $y_{i,N}(t)$, $i=1,2$ sırasıyla, (3.73) sisteminin tam ve yaklaşık çözümlerini göstermek üzere mutlak hata fonksiyonları, verilen aralıkların seçilmiş noktalarında

$$e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|, \quad i=1,2 \quad (3.88)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Çözümlerin doğrulunu kontrol etmek için (3.87) ile elde edilen yaklaşık çözümler (3.73) denkleminde yerine yazılır. (3.87) polinom çözümleri, sistemin çözümleri olduğundan denklem (3.73)'ü sağlamalıdır. Yani

$$i=1,2 \quad t = t_q \in [0, b], \quad q = 0,1,\dots \text{ için}$$

$$E_{1,N}(t_q) = \begin{vmatrix} y''_{1,N}(t_q) - a_1(t_q)y'_{1,N}(t_q) + a_2(t_q)y_{1,N}(t_q) \\ +a_3(t_q)y''_{2,N}(t_q) + a_4(t_q)y'_{2,N}(t_q) + a_5(t_q)y_{2,N}(t_q) \\ +N_1(y_{1,N}(t_q), y_{2,N}(t_q)) - f_1(t_q) \end{vmatrix} \cong 0, \quad (3.89)$$

$$E_{2,N}(t_q) = \begin{vmatrix} y''_{2,N}(t_q) - b_1(t_q)y'_{2,N}(t_q) + b_2(t_q)y_{2,N}(t_q) \\ +b_3(t_q)y''_{1,N}(t_q) + b_4(t_q)y'_{1,N}(t_q) + b_5(t_q)y_{1,N}(t_q) \\ +N_2(y_{1,N}(t_q), y_{2,N}(t_q)) - f_2(t_q) \end{vmatrix} \cong 0, \quad (3.90)$$

veya

$$E_{i,N}(t_q) \leq 10^{-k_q} \quad (k_q \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\text{Max } 10^{-k_q} = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ önceden belirlenerek $E_{i,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır.

3.5. Gecikmeli Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli için Taylor Sıralama Yaklaşımı

Çalışmamızın bu bölümünde Lotka-Volterra av-avcı modeli olarak adlandırılan lineer olmayan gecikmeli denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için Taylor polinom yaklaşımı oluşturulacaktır. Av-avcı etkileşimi, popülasyon dinamiklerinin temel yapısıdır. Modellerin dinamik davranışlarını yansıtabilmek için sistemlerin geçmişleri ile bağlantı kurulmalıdır. Bu sebeple modellere zaman gecikmeleri dahil edilmelidir. Gecikmeli av-avcı modelleri ilk olarak Volterra (1931) tarafından tanımlanmıştır. Fakat zamanla bu model, Brelot (1931), May (1973), Cushing (1977), MacDonald (1978), Dai (1981), Farkas vd. (1988), Kuang (1993) tarafından değiştirilip geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, ilk olarak May (1973) tarafından ortaya atılan tek ayrık (discrete) gecikmeli,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t)[r_1 - a_{11}y_1(t - \tau) - a_{12}y_2(t)], \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t)[-r_2 + a_{21}y_1(t) - a_{22}y_2(t)], \end{cases} \quad 0 \leq t \leq b < \infty \quad (3.91)$$

av-avcı modeli ele alınacaktır. Biyolojik terminolojide, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ sırası ile av ve avcının popülasyon yoğunlukları, $r_1 > 0$, avcının yokluğunda avın büyüme oranı, $r_2 > 0$, avın yokluğunda avcının ölüm oranı olarak ifade edilir. $a_{11} > 0$, avın kendi kendini düzenleme (self-regulation) sabiti, $a_{12} > 0$, avcının av tarafından avlanma oranı, $a_{21} > 0$, avcılar için değişim oranıdır. $a_{22} > 0$, avcılar arasındaki tür içi rekabeti tanımlar ve τ , av jenerasyonunu göstermektedir (Ruan, 2009).

Bu çalışmada amaç, daha önce kullanılmış olan Taylor sıralama ve matris metotlarını değiştirip geliştirerek (3.91) sisteminin

$$y_1(0) = \alpha_1, \quad y_2(0) = \alpha_2 \quad (3.92)$$

başlangıç koşulları altında

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{in}(t-c)^n, \quad y_{in} = \frac{y_i^{(n)}(c)}{n!}, \quad i=1,2, \quad a \leq t \leq b \quad (3.93)$$

şeklinde tanımlı kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümünü bulmaktır. Burada $(n=0,1,\dots,N, i=1,2)$ için $y_{i,n}$ 'ler belirlenmesi gereken Taylor katsayılarıdır.

3.5.1. Temel matris bağıntıları

Bu bölümde, (3.91) ile verilen sistem (3.92) başlangıç koşulları altında bir matris sisteme dönüştürülecektir. Bu amaçla ilk olarak (3.93) şeklinde ifade edilen Taylor seri çözümleri ve türevlerinin matris gösterimi,

$$\mathbf{T}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N],$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i,N} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.94)$$

$$\mathbf{y}'_i(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B} \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.95)$$

bağıntıları ile ifade edilir. (3.94) bağıntısında $t \rightarrow \lambda t + \tau$ alınırsa,

$$\mathbf{y}_i(\lambda t + \tau) = \mathbf{T}(\lambda t + \tau) \mathbf{Y}_i, \quad i=1,2 \quad (3.96)$$

bağıntısı elde edilir. $\mathbf{T}(\lambda t + \tau)$ ve $\mathbf{T}(t)$ matrisleri arasındaki ilişki

$$\mathbf{B}(\lambda, \tau) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \lambda^0 \tau^0 & \binom{1}{0} \lambda^0 \tau^1 & \binom{2}{0} \lambda^0 \tau^2 & \dots & \binom{N}{0} \lambda^0 \tau^N \\ 0 & \binom{1}{1} \lambda^1 \tau^0 & \binom{2}{1} \lambda^1 \tau^1 & \dots & \binom{N}{1} \lambda^1 \tau^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \lambda^N \tau^0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere

$$\mathbf{T}(\lambda t + \tau) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\lambda, \tau) \quad (3.97)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, (3.96) ve (3.97) bağıntıları kullanılarak

$$\mathbf{y}_i(\lambda t + \tau) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(\lambda, \tau)\mathbf{Y}_i \quad (3.98)$$

ifadesine ulaşılır. Diğer yandan, sistemin $y_1(t)y_2(t)$, $y_2(t)y_1(t)$, $y_1(t)y_1(t-\tau)$, $[y_2(t)]^2$ lineer olmayan terimlerinin matris formları

$$\mathbf{T}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{1,1} = \begin{bmatrix} y_{1,0} \mathbf{Y}_1 & y_{1,1} \mathbf{Y}_1 & \dots & y_{1,N} \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{2,2} = \begin{bmatrix} y_{2,0} \mathbf{Y}_2 & y_{2,1} \mathbf{Y}_2 & \dots & y_{2,N} \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = \begin{bmatrix} y_{1,0} \mathbf{Y}_2 & y_{1,1} \mathbf{Y}_2 & \dots & y_{1,N} \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = \begin{bmatrix} y_{2,0} \mathbf{Y}_1 & y_{2,1} \mathbf{Y}_1 & \dots & y_{2,N} \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

olmak üzere sırası ile

$$y_1(t)y_2(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2}, \quad (3.99)$$

$$y_2(t)y_1(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1}, \quad (3.100)$$

$$y_1(t)y_1(t-\tau) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(1, -\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,1}, \quad (3.101)$$

$$[y_2(t)]^2 = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,2} \quad (3.102)$$

şeklinde ifade edilir.

3.5.2. Sistemin temel matris gösterimi

Bir önceki bölümde tanımlanmış olan (3.94)-(3.102) ifadeleri (3.91) sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_1 = r_1\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_1 - a_{11}\mathbf{T}(t)\mathbf{B}(1, -\tau)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,1} - a_{12}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2}, \\ \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_2 = -r_2\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_2 + a_{21}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} - a_{22}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,2} \end{cases} \quad (3.103)$$

matris denklem sistemi elde edilir. Böylece, (3.104) sisteminin matris gösterimi

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{B} - r_1\mathbf{T}(t), & \mathbf{D}_2(t) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{B} + r_2\mathbf{T}(t), \\ \mathbf{A}_1(t) &= a_{12}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t), & \mathbf{A}_2(t) &= -a_{21}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t), \\ \mathbf{H}_1(t) &= a_{11}\mathbf{T}(t)\mathbf{B}(1, -\tau)\mathbf{T}^*(t), & \mathbf{H}_2(t) &= a_{22}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}^*(t), \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{A}_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} + \mathbf{H}_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,1} = 0, \\ \mathbf{D}_2(t)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{A}_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} + \mathbf{H}_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{2,2} = 0 \end{cases} \quad (3.104)$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak, (3.104) sistemi

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, & \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, & \mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \\ \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, & \bar{\mathbf{Y}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}, \\ \mathbf{H}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, & \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,2} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{H}(t)\mathbf{Y} = \mathbf{f}(t) \quad (3.105)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir.

3.5.3. Taylor matris-sıralama metodu

Bu bölümde,

$$t_s = \frac{b}{N} s, \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (3.105) matris denkleminde yerine yazılarak,

$$\mathbf{D}(t_s)\mathbf{Y} + \mathbf{A}(t_s)\overline{\mathbf{Y}} + \mathbf{H}(t_s)\mathbf{Y} = \mathbf{f}(t_s), \quad s = 0, \dots, N \quad (3.106)$$

yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece, yeni temel matris denklemini

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}} \\ \overline{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1},$$

olmak üzere

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}^* + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{Y}} + \mathbf{H}\mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad (3.107)$$

şekline dönüşür.

(3.94) matris bağıntısı kullanılarak, (3.92) ile tanımlanan koşulların matris gösterimi yapılacak olursa

$$\mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_1 = \alpha_1 \quad (3.108)$$

$$\mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_2 = \alpha_2 \quad (3.109)$$

matrisleri elde edilir. (3.108) ve (3.109) satır matrisleri, (3.107) sisteminin katsayılar matrisinin herhangi iki satırı ile değiştirilerek koşullara bağlı matris denklemi elde edilir. Böylece, (3.91) sisteminin (3.92) başlangıç koşulları altında temel matris denklemi, $n = 0, 1, \dots, N$ için $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür.

Sonuç olarak, bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve denklem (3.93)'te yerine yazılırsa, sistemin ,

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} t^n, \quad i = 1, 2 \quad (3.110)$$

şeklinde tanımlı Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur.

3.5.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini

Çözümlerin doğruluğu, elde edilen (3.110) çözümleri, sistem (3.91)'de yerine yazılarak kontrol edilir. O halde $t \in [0, b]$ için

$$\begin{aligned} E_{1,N}(t) &= \left| \frac{dy_{1,N}(t)}{dt} - y_{1,N}(t) [r_1 - a_{11}y_{1,N}(t-\tau) - a_{12}y_{2,N}(t)] \right|, \\ E_{2,N}(t) &= \left| \frac{dy_{2,N}(t)}{dt} - y_{2,N}(t) [-r_2 + a_{21}y_{1,N}(t) - a_{22}y_{2,N}(t)] \right| \end{aligned} \quad (3.111)$$

dir. Sıralama noktalarında $E_{i,N}(t) = 0$ olması beklenir. $t \in [0, b]$ için $y_i(t) \cong y_{i,N}(t)$ ise $E_{i,N}(t) \cong 0$ dir.

Yaklaşık çözümlerin doğruluğu mutlak hata hakkında herhangi bir bilgi vermeyebilir. Bu kısıtlamayı kaldırmak için tam çözümün bilinmediği durumlarda, Oliveira (1980), Çelik (2005) ve Shahmorad (2005) tarafından verilen kalan doğrulaması (residual correction) (3.91) sistemi için düzenlenerek, hata tahmini yapılabilir. Üstelik, bu prosedür ile minimal mutlak hatayı veren optimal n hesaplanır. Bu yöntem (3.91) sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} e_{1,N}(t) &= y_1(t) - y_{1,N}(t), \\ e_{2,N}(t) &= y_2(t) - y_{2,N}(t), \\ R_1 &= y'_{1,N}(t) - y_{1,N}(t) [r_1 - a_{11}y_{1,N}(t-\tau) - a_{12}y_{2,N}(t)], \\ R_2 &= y'_{2,N}(t) - y_{2,N}(t) [-r_2 + a_{21}y_{1,N}(t-\tau) - a_{22}y_{2,N}(t)] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} e'_{1,N}(t) - r_1 e_{1,N}(t) + a_{11} [e_{1,N}(t) + y_{1,N}(t)] e_{1,N}(t-\tau) \\ + a_{11} y_{1,N}(t-\tau) e_{1,N}(t) + a_{12} e_{1,N}(t) y_{2,N}(t) \\ + a_{12} [e_{1,N}(t) + y_{1,N}(t)] e_{2,N}(t) = -R_1 \end{aligned} \quad (3.112)$$

ve

$$\begin{aligned} e'_{2,N}(t) - r_2 e_{2,N}(t) - a_{21} y_{2,N}(t) e_{1,N}(t) - a_{21} e_{2,N}(t) [e_{1,N}(t) + y_{1,N}(t)] \\ + a_{22} [e_{2,N}(t)]^2 + 2a_{22} e_{2,N}(t) y_{2,N}(t) = -R_2 \end{aligned} \quad (3.113)$$

denklemleri elde edilir.

(3.112) ve (3.113)'ün Taylor seri çözümleri $e_{1,m}^*$ ve $e_{2,m}^*$ olsun. Yeteri kadar küçük ε_1 ve ε_2 için

$$\|e_{1,N} - e_{1,m}^*\| < \varepsilon_1$$

$$\|e_{2,N} - e_{2,m}^*\| < \varepsilon_2$$

oluyorsa mutlak hatalar, $e_{1,m}^*$ ve $e_{2,m}^*$ yardımıyla tahmin edilebilir. Bunun sonucu olarak, $i=1,2$ için $\min_n \|e_{i,n}\|_\infty$ ifadesini sağlayan n sayısının seçimi, $\|e_{i,m}^*\|_\infty$ ölçülerek hesaplanabilir. Açıkça, $y_{i,N} + e_{i,m}^*$, $i=1,2$, (3.91) sisteminin bir yaklaşık çözümdür ve farklı m değerleri için daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir. Uygulamada $m \geq n$ seçilmesi daha tutarlı sonuçlar verebilir.

Sonuç 3.5.1. $y_{1,N}$ ve $y_{2,N}$ (3.91) sisteminin Taylor seri çözümleri ise, $y_{1,N} + e_{1,m}^*$ ve $y_{2,N} + e_{2,m}^*$ da (3.91)'in yaklaşık çözümleridir ve hataları $e_{1,N} - e_{1,m}^*$ ve $e_{2,N} - e_{2,m}^*$ kadardır.

$\{y_{1,N} + e_{1,m}^*, y_{2,N} + e_{2,m}^*\}$ yaklaşık çözüm kümesinin, $\{y_{1,N}, y_{2,N}\}$ 'e göre daha iyi bir yaklaşım olduğu unutulmamalıdır. Burada, $y_{1,N} + e_{1,m}^*$ ve $y_{2,N} + e_{2,m}^*$ düzeltilmiş Taylor seri çözümleri olarak adlandırılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, m . mertebeden k bilinmeyenli lineer diferansiyel-fark denklem sistemleri ile bazı lineer olmayan fonksiyonel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için sıralama noktalarına dayalı Taylor matris metodu sunulmaktadır. Metodun doğruluğunun (tutarlılığının) ve etkinliğinin gösterilebilmesi için literatürde sıkça karşılaşılan örnekler verilmektedir ve sunulan yöntem başka metotların sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu bölümde kullanılan tüm nümerik hesaplamalar Maple 15’de yazılan programlar kullanılarak elde edilmiştir.

4.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri İçin Örnekler

Örnek 4.1.1. (Gökmen ve Sezer, 2013a) İlk olarak, tam çözümleri $y_1(t) = (t-1)^2$, $y_2(t) = -(t-1)^2$ olan

$$\begin{cases} 2ty_1'(t+1) - 3y_1(t+1) + y_2(t+1) = 0, \\ 2ty_2'(t+1) + y_1(t+1) - 3y_2(t+1) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 5$$

değişken katsayılı lineer denklem sistemini

$$y_1(2) = 1, \quad y_2(2) = -1$$

koşulu altında ele alalım.

Sistem,

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2t & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)}(t+1) \\ y_2^{(0)}(t+1) \\ y_1^{(1)}(t+1) \\ y_2^{(1)}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formda yazılabilir. Buradan sistemin temel matris denklemini

$$\left(\mathbf{P}_0 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,1) + \mathbf{P}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,1) \mathbf{B} \right) \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

şeklinindedir. $N = 2$ için sıralama noktaları $\{t_0 = 0, t_1 = 5/2, t_2 = 5\}$ olmak üzere bölüm (3.1.4) de sunulan yöntem uygulanır son satırlar koşul satırları ile değiştirilirse,

$$\bar{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & \frac{-11}{2} & \frac{-7}{4} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{49}{4} \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{49}{4} & -3 & \frac{-11}{2} & \frac{-7}{4} \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

matrisleri elde edilir.

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{W}}^{-1} \bar{\mathbf{F}}$$

ile istenilen Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -1]^T$$

olarak hesaplanır. Elde edilen katsayılar denklem (3.3)'de yerine yazılırsa

$$y_{1,2} = (t-1)^2, \quad y_{2,2} = -(t-1)^2$$

tam çözümlerine ulaşılır.

Örne 4.1.2. (Gökmen ve Sezer, 2013a) İkinci örneğimizde $-3 \leq t \leq 4$ aralığında tanımlı

$$\begin{cases} y_1'(t-1) + y_2'(t-1) = 2t, \\ y_1'(t-1) - y_3'(t-1) = 2t-1, \\ y_1'(t-1) + y_3(t-1) = t-1, \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini ele alalım. $N = 3$ için sistemin temel matrisleri,

$$\mathbf{P}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t-1 \\ t-1 \end{bmatrix}$$

ve Taylor sıralama noktaları $\{t_0 = -3, t_1 = -2/3, t_2 = 5/3, t_3 = 4\}$ olmak üzere Bölüm 3.1.4'de sunulan yöntem uygulanırsa, koşullara bağlı temel matris

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 & 48 & 0 & 1 & -8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & -48 \\ 0 & 1 & -8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{3} & \frac{25}{3} & 0 & 1 & \frac{-10}{3} & \frac{25}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{3} & \frac{25}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{-25}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{3} & \frac{25}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{25}{9} & \frac{-125}{27} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{12 \times 12}, \quad \overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ -4 \\ -4 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12 \times 1}$$

şeklindedir.

Buradan istenilen Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$$

veya açıkça

$$\mathbf{A}_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \quad \mathbf{A}_2 = [0 \ 2 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{A}_3 = [0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$$

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan katsayılar denklem (3.3)'de yerine yazılırsa $\{y_{1,3}(t) = t^2, y_{2,3}(t) = 2t, y_{3,3}(t) = -t\}$ çözüm kümesi elde edilir ki bu çözümler başlangıç-değer probleminin tam çözümleridir.

Örnek 4.1.3. (Thangmoon ve Pusjuso, 2010; Yüzbaşı vd., 2011; Gökmen ve Sezer, 2013a)

Tam çözümü $y_1(t) = e^{-t} - 1$, $y_2(t) = 2 - e^{-t}$ olan

$$\begin{aligned} y_1^{(1)}(t) + y_2^{(1)}(t) + y_1(t) + y_2(t) &= 1 \\ y_2^{(1)}(t) - 2y_1(t) - y_2(t) &= 0, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1$$

lineer diferansiyel denklem sistemini $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$,

başlangıç koşulları altında ele alalım. Burada

$k = 2$, $m = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = 0$, $P_{11}^0(t) = 1$, $P_{12}^0(t) = 1$, $P_{21}^0(t) = -2$,

$P_{22}^0(t) = -1$, $P_{11}^1(t) = 1$, $P_{12}^1(t) = 1$, $P_{21}^1(t) = 0$, $P_{22}^1(t) = 1$ dir.

(3.18)'den sistemin temel matris denklemi

$$\{\mathbf{P}_0 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,0) + \mathbf{P}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,0) \mathbf{B}\} \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

şeklinde ifade edilir. Bölüm 3.1.4'de tanımlanan prosedür takip edilerek $N = 6, 8, 10$ için yaklaşık çözümler Maple 15 yardımıyla hesaplanmıştır. Elde edilen yaklaşık

çözümler literatürde kullanılan diğer yaklaşım metotları ile kıyaslanmaktadır. Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2.'de tam çözüm, diferansiyel transform (Thangmoon ve Pusjuso, 2010), Bessel polinom (Yüzbaşı vd., 2011) ve Taylor polinom metodu ile elde edilmiş yaklaşık çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.3. ve Çizelge 4.4.'de N 'in farklı değerleri için adı geçen metotlar ile elde edilmiş mutlak hata fonksiyonları $e_{i,N}$ 'ler kıyaslanmış ve Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.'de aynı düzlemde çizdirilmiştir. Çizelge 4.1.-4.4., Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.'den elde edilen verilere göre Taylor polinom metodu (Gökmen ve Sezer, 2013) gerçek çözüme, diferansiyel transform metot (Thangmoon ve Pusjuso, 2010) ve Bessel polinom metotdan (Yüzbaşı vd., 2011) daha yakın çözümler vermektedir. Ayrıca N değeri arttıkça Taylor polinom metodu ile elde edilen sonuçların tam çözüme daha yakın olduğu gözlemlenmiştir. Çizelge 4.5.'te $N = 6, 8$ için çözümün doğruluğu incelenmiştir. Ayrıca Çizelge 4.6., Çizelge 4.7., Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.'te de metodun mutlak hatası $N = 8$ için farklı aralıklarda incelenmiştir. Sonuçlar doğrultusunda çözümün arandığı $c \in [a, b]$ noktasını kapsayan en küçük aralıkta hatanın diğer aralıklara göre daha az olduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.3'ün $y_1(t)$ çözümlerinin karşılaştırılması

t_i	Tam Çözüm	Transform Metot	Bessel Polinom Metot	Taylor sıralama metodu	
	$y_1(t_i) = e^{-t_i} - 1$	$N = 6, y_{1,6}(t_i)$	$N = 6, y_{1,6}(t_i)$	$N = 6, y_{1,6}(t_i)$	$N = 10, y_{1,10}(t_i)$
0	0	0	0	0	0
0.2	-0.181269246922	-0.165693777777	-0.18151351351	-0.18126927538	-0.18126924692
0.4	-0.329679953964	-0.278471111111	-0.32994594594	-0.32967997178	-0.32967995396
0.6	-0.451188363905	-0.34969200000	-0.45113513513	-0.45118837658	-0.45118836390
0.8	-0.550671035882	-0.384369777777	-0.55091891891	-0.55067106945	-0.55067103588
1	-0.632120558828	-0.398611111111	-0.63513513513	-0.63211987225	-0.63212055884

Çizelge 4.2. Örnek 4.1.3'ün $y_2(t)$ çözümlerinin karşılaştırılması

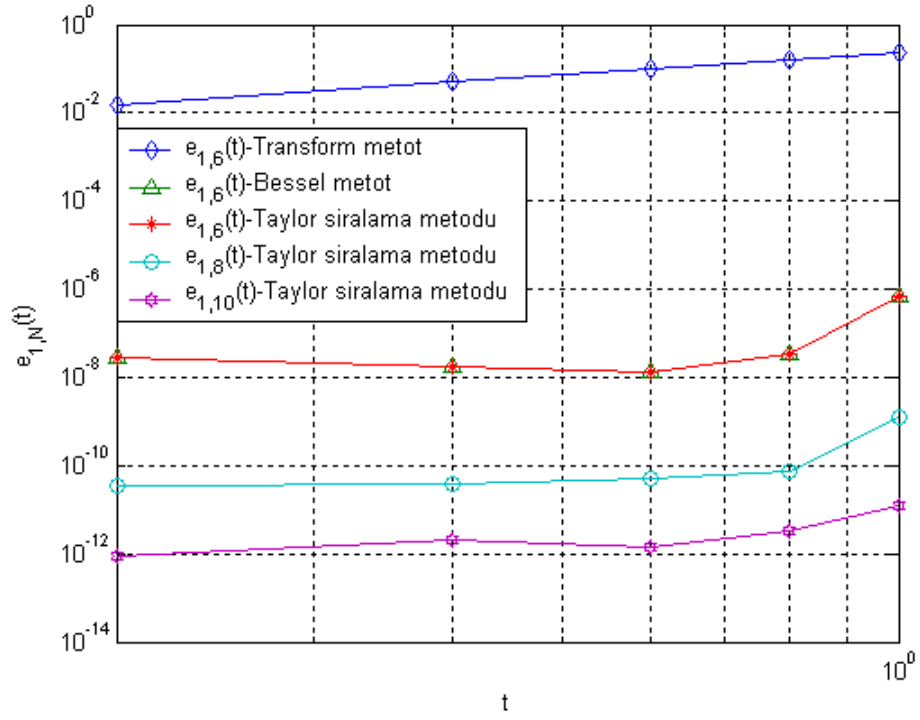
t_i	Tam Çözüm	Transform Metot	Bessel Polinom Metot	Taylor sıralama metodu	
	$y_2(t_i) = 2 - e^{-t_i}$	$N = 6, y_{2,6}(t_i)$	$N = 6, y_{2,6}(t_i)$	$N = 6, y_{2,6}(t_i)$	$N = 10, y_{2,10}(t_i)$
0	1	1	1	1	1
0.2	1.1812692469220	1.1835954666	1.1812692753	1.181269275381	1.181269246921
0.4	1.3296799539643	1.3465472000	1.3296799717	1.329679971786	1.329679953962
0.6	1.4511883639059	1.5056872000	1.4511883765	1.451188376582	1.451188363904
0.8	1.5506710358827	1.6826154666	1.5506710694	1.550671069450	1.550671035886
1	1.6321205588285	1.9125000000	1.6321198722	1.632119872256	1.632120558841

Çizelge 4.3. Örnek 4.1.3'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6, 8, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları

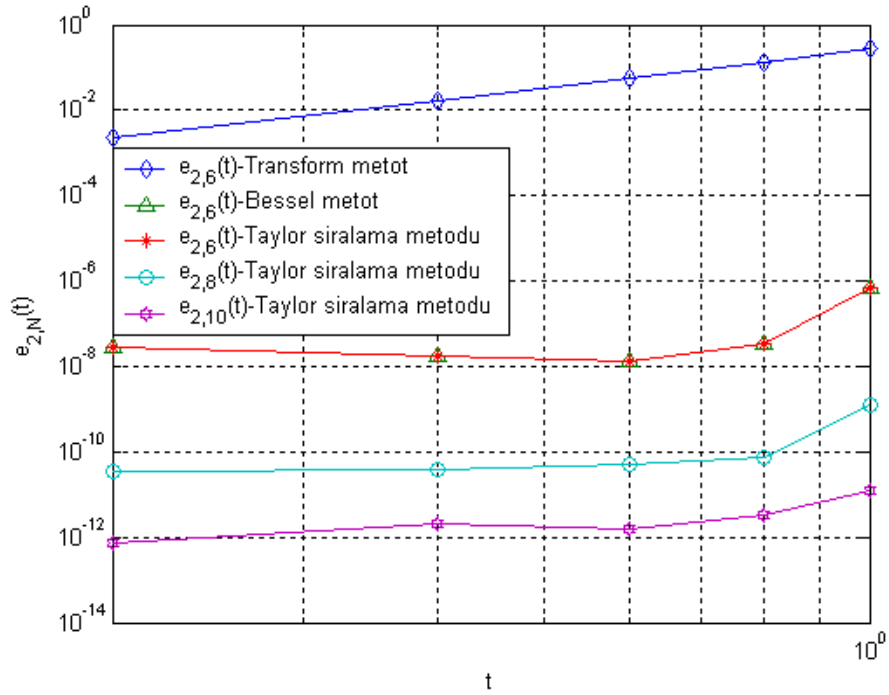
t_i	Transform Metot	Bessel Polinom Metot	Taylor sıralama metodu		
	$e_{1,6}(t_i)$	$e_{1,6}(t_i)$	$e_{1,6}(t_i)$	$e_{1,8}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$
0	0	0	0	0	0
0.2	1.5575e-002	2.8460e-008	2.845945e-008	3.437e-011	8.6e-013
0.4	5.1209e-002	1.7820e-008	1.782165e-008	3.836e-011	2.07e-012
0.6	1.0150e-001	1.2668e-008	1.267680e-008	5.040e-011	1.37e-012
0.8	1.6630e-001	3.3538e-008	3.356743e-008	7.267e-011	3.31e-012
1	2.3351e-001	6.8657e-007	6.865716e-007	1.26584e-009	1.242e-011

Çizelge 4.4. Örnek 4.1.3'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6, 8, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları

t_i	Transform Metot	Bessel Polinom Metot	Taylor sıralama metodu		
	$e_{2,6}(t_i)$	$e_{2,6}(t_i)$	$e_{2,6}(t_i)$	$e_{2,8}(t_i)$	$e_{2,10}(t_i)$
0	0	0	0	0	0
0.2	2.3262e-003	2.8460e-008	2.84595e-008	3.43e-011	0.7e-012
0.4	1.6867e-002	1.7820e-008	1.78216e-008	3.84e-011	2.1e-012
0.6	5.4499e-002	1.2668e-008	1.26768e-008	5.03e-011	1.5e-012
0.8	1.3194e-001	3.3538e-008	3.35675e-008	7.27e-011	3.2e-012
1	2.8038e-001	6.8657e-007	6.865717e-007	1.2659e-009	1.24e-011



Şekil 4.1. Örnek 4.1.3'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması



Şekil 4.2. Örnek 4.1.3'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması

Çizelge 4.5. Örnek 4.1.3'ün $N = 6,8$ için çözümlerinin doğruluğu

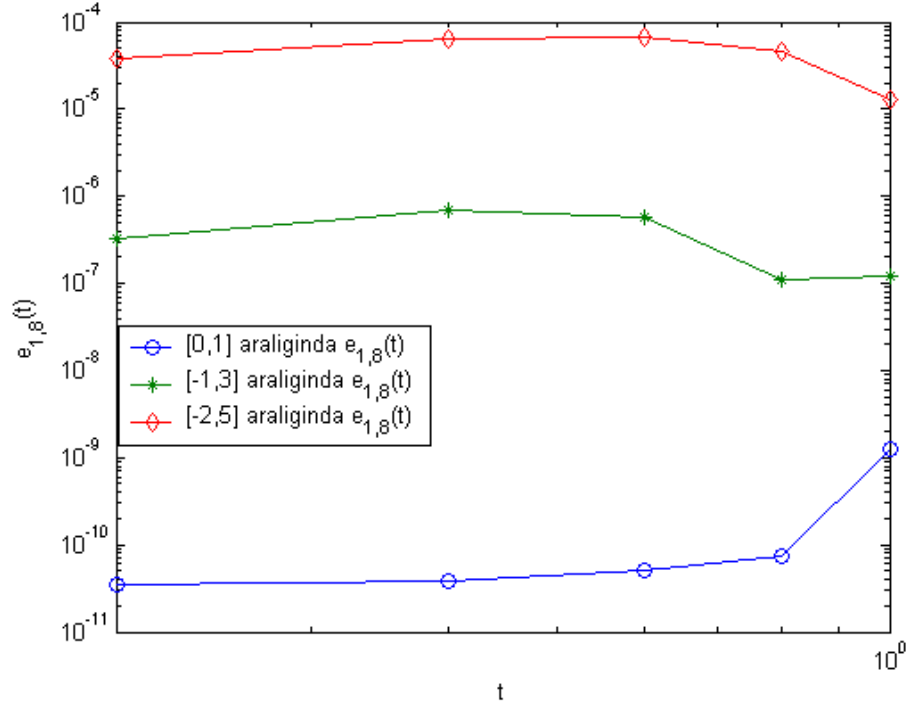
t_i	Taylor sıralama metodu			
	$E_{1,6}(t_i)$	$E_{1,8}(t_i)$	$E_{2,6}(t_i)$	$E_{2,8}(t_i)$
0	0	0	0	0
0.2	0.128e-014	0.4e-010	0.7282426675e-007	0.73193894e-010
0.4	0.4096e-013	0.8e-010	0.66224615e-007	0.4441007e-010
0.6	0.31104e-012	0.12e-009	0.9972312e-007	0.1616883e-009
0.8	0.131072e-011	0.16e-009	0.2908e-006	0.599938e-009
1	0.4e-011	0.20e-009	0.142457679e-004	0.3875268e-007

Çizelge 4.6. Örnek 4.1.3'ün $e_{1,8}(t_i)$ hata fonksiyonunun farklı aralıklarda nümerik sonuçları

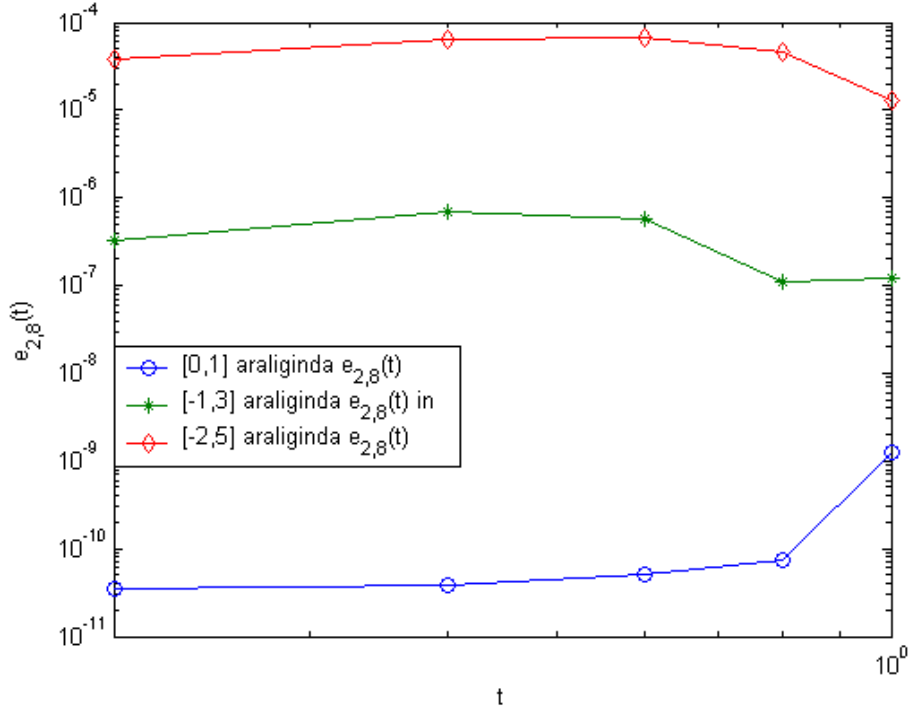
t_i	Taylor sıralama metodu		
	[0,1] aralığında	[-1,3] aralığında	[-2,5] aralığında
	$e_{1,8}(t_i)$	$e_{1,8}(t_i)$	$e_{1,8}(t_i)$
0	0	0	0
0.2	3.437e-011	0.328203e-006	0.38648148e-004
0.4	3.836e-011	0.696805e-006	0.64842987e-004
0.6	5.040e-011	0.566291e-006	0.67259605e-004
0.8	7.267e-011	0.110589e-006	0.46476664e-004
1	1.26584e-009	0.122400e-006	0.12661370e-004

Çizelge 4.7. Örnek 4.1.3'ün $e_{2,8}(t_i)$ hata fonksiyonunun farklı aralıklarda nümerik sonuçları

t_i	Taylor sıralama metodu		
	[0,1] aralığında	[-1,3] aralığında	[-2,5] aralığında
	$e_{2,8}(t_i)$	$e_{2,8}(t_i)$	$e_{2,8}(t_i)$
0	0	0	0
0.2	3.43e-011	0.32822e-006	0.3864814e-004
0.4	3.84e-011	0.69680e-006	0.6484298e-004
0.6	5.03e-011	0.56629e-006	0.6725960e-004
0.8	7.27e-011	0.11058e-006	0.4647666e-004
1	1.2659e-009	0.12240e-006	0.1266138e-004



Şekil 4.3. Örnek 4.1.3'ün $e_{1,8}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun farklı aralıklar için karşılaştırılması



Şekil 4.4. Örnek 4.1.3'ün $e_{2,8}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun farklı aralıklar için karşılaştırılması

Örnek 4.1.4. (Davies ve Crann, 1999; Akyüz ve Sezer, 2003)

Bu bölümün son örneği olarak tam çözümü,

$$y_1(t) = e^{-t} + 3e^{-t/3} - 3, \quad y_2(t) = -(1/2)e^{-t} + (3/2)e^{-t/3} - 1 + t$$

olan

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(t) + y_2^{(1)}(t) + y_2(t) = t - e^{-t}, \\ y_1^{(1)}(t) + 4y_2^{(1)}(t) + y_1(t) = 1 + 2e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini düşünelim. (3.18)'den sistemin temel matris denklemi

$$\left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,0) + \mathbf{P}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}(1,0) \mathbf{B}^1 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

şeklindedir. Bölüm 3.1.4'deki prosedürü uygulayarak $N = 5, 7, 10$ değerleri için Taylor polinom çözümleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} y_{1,5}(t) &= 1 - 2t + 0.6665429598t^2 - 0.1843402211t^3 + (0.4095180302e - 1)t^4 \\ &\quad - (0.5694828091e - 2)t^5, \\ y_{2,5}(t) &= t - 0.1666053905t^2 + (0.7365566401e - 1)t^3 - (0.1894354950e - 1)t^4 \\ &\quad + (0.2757276764e - 2)t^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,7}(t) &= 1 - 2t + 0.6666662214t^2 - 0.1851801604t^3 + (0.4318550997e - 1)t^4 \\ &\quad - (0.8373674385e - 2)t^5 + (0.1305192835e - 2)t^6 - (0.1297489179e - 3)t^7, \\ y_{2,7}(t) &= t - 0.1666664467t^2 + (0.7407158423e - 1)t^3 - (0.2004962809e - 1)t^4 \\ &\quad + (0.4084113717e - 2)t^5 - (0.6470362351e - 3)t^6 + (0.6467460440e - 4)t^7, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y_{1,10}(t) &= 1 - 2t + 0.6666666829t^2 - 0.1851854363t^3 + (0.4321163482e - 1)t^4 \\
&- (0.8443106326e - 2)t^5 + (0.1410946829e - 2)t^6 - (0.2225960903e - 3)t^7 \\
&+ (0.4587929804e - 4)t^8 - (0.1296382293e - 4)t^9 + (0.2331859420e - 5)t^{10}, \\
y_{2,10}(t) &= t - 0.1666666852t^2 + (0.7407437955e - 1)t^3 - (0.2006395778e - 1)t^4 \\
&+ (0.4124238592e - 2)t^5 - (0.7134888939e - 3)t^6 + (0.1318266769e - 3)t^7 \\
&- (0.4189317618e - 4)t^8 + (0.1603315221e - 4)t^9 - (0.3208042653e - 5)t^{10}
\end{aligned}$$

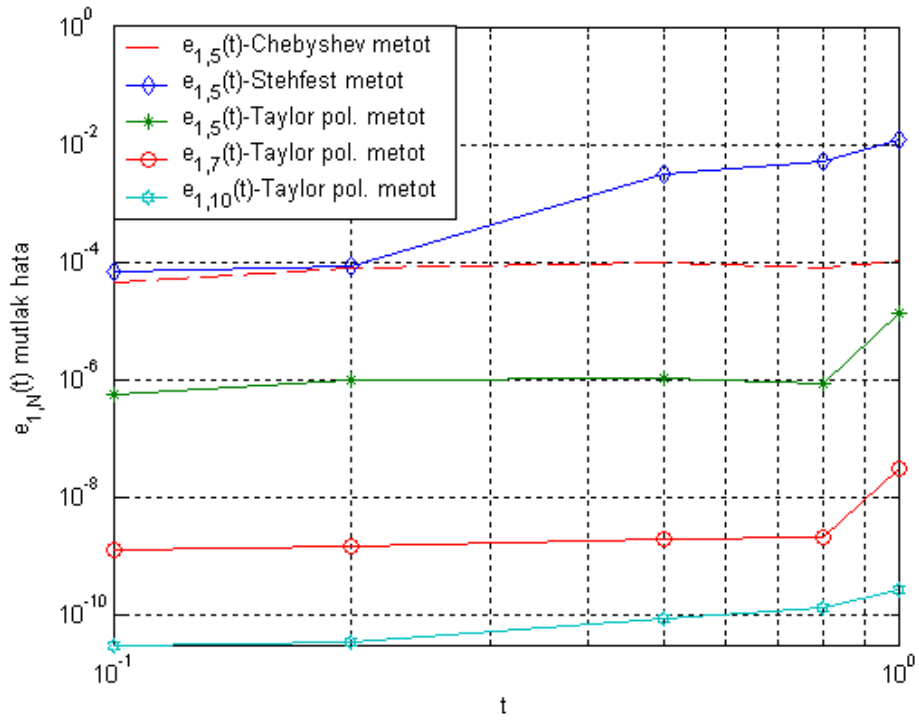
şeklinde hesaplanır. Çizelge 4.8., Çizelge 4.9.'da ve Şekil 4.5., Şekil 4.6.'da Stehfest metot (Davies ve Crann, 1999), Chebyshev metot (Akyüz ve Sezer, 2003) ve Taylor sıralama metodu ile elde edilen hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerleri için kıyaslamaları verilmiştir. Çizelge 4.8., Çizelge 4.9. ve Şekil 4.5., Şekil 4.6.'dan Taylor sıralama metodu ile elde edilen sonuçların diğer metotlarla elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu gözlemlenebilir. Ayrıca Şekil 4.5. ve Şekil 4.6. gösterir ki N değeri arttıkça hatalar hızlı bir şekilde azalmaktadır.

Çizelge 4.8. Örnek 4.1.4'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları

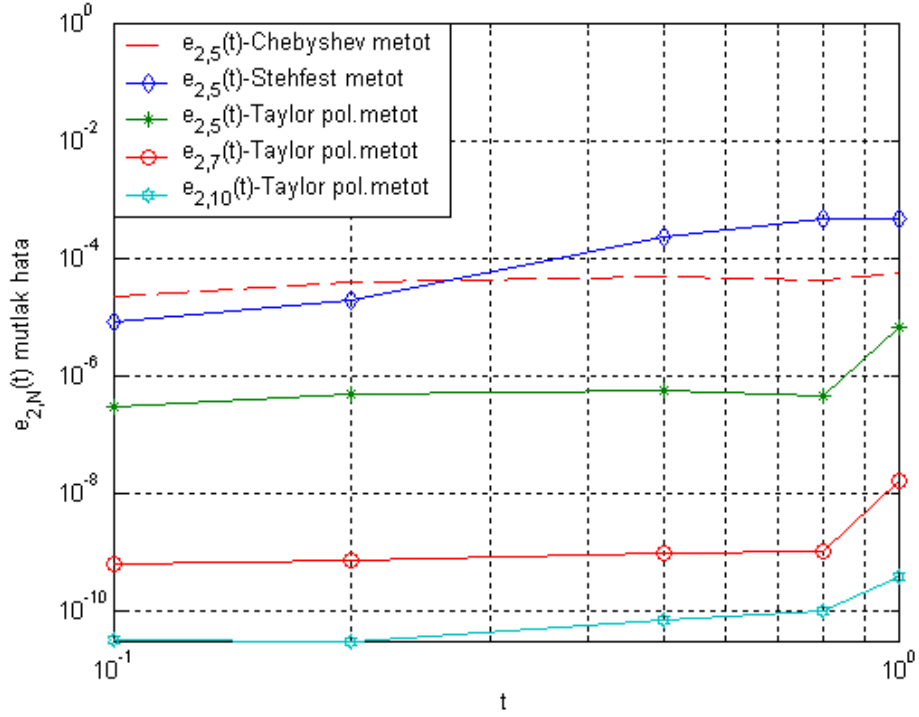
	Chebyshev metot	Stehfest metot	Taylor sıralama metodu		
t_i	$e_{1,5}(t_i)$	$e_{1,5}(t_i)$	$e_{1,5}(t_i)$	$e_{1,7}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$
0.1	4.510522e-005	6.7614e-005	5.9187308e-007	1.32192e-009	3.226e-011
0.2	7.985043e-005	8.4949e-005	1.01100986e-006	1.48840e-009	3.681e-011
0.5	9.719089e-005	3.18972e-003	1.09776099e-006	2.06118e-009	9.215e-011
0.8	8.006002e-005	5.20283e-003	9.0089427e-007	2.22850e-009	1.3808e-010
1	1.067677e-004	1.193776e-002	1.36592638e-005	3.23907e-008	2.7443e-010

Çizelge 4.9. Örnek 4.1.4'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerlerinde nümerik sonuçları

t_i	Chebyshev metot	Stehfest metot	Taylor sıralama metodu		
	$e_{2,5}(t_i)$	$e_{2,5}(t_i)$	$e_{2,5}(t_i)$	$e_{2,7}(t_i)$	$e_{2,10}(t_i)$
0.1	2.247723e-005	8.4086e-006	2.93271808e-007	6.49969e-010	3.1571e-011
0.2	3.984701e-005	1.9575e-005	5.0133303e-007	7.2639e-010	3.139e-011
0.5	4.890662e-005	2.242e-004	5.4595180e-007	1.00138e-009	7.246e-011
0.8	4.064222e-005	4.647e-004	4.5113956e-007	1.04729e-009	1.0270e-010
1	5.390356e-005	4.710e-004	6.75549902e-006	1.625132e-008	3.9660e-010



Şekil 4.5. Örnek 4.1.4'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerleri için karşılaştırılması



Şekil 4.6. Örnek 4.1.4'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 5, 7, 10$ değerleri için karşılaştırılması

4.2. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Genişletilmiş Lineer Diferansiyel-Fark Denklem Sistemleri İçin Örnekler

Bu kesimde, Bölüm 3.2'de verilen yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel-fark denklem sistemi için Taylor seri çözümleri elde edilecektir.

Örnek 4.2.1. İlk olarak $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ başlangıç koşullarına sahip

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(t) - t y_2^{(1)}(t) + y_1(t) - 2 y_2(t) + y_1(t-1) - y_2(t-1) = -2t - 2 \\ t y_1^{(1)}(t) + y_2^{(1)}(t) - y_1(t) - y_2(t) - y_1(t-1) + y_2(t-1) = -t + 1, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

denklem sistemini ele alalım.

Sistemin matris formu,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -t \\ -1 & -1 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-2 \\ -t+1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -t \\ -1 & -1 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{bmatrix}$$

sistemin diferansiyel kısmı ve

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{bmatrix}$$

de sistemin fark argümanı içeren kısmıdır. Bu durumda $N=2$ için sıralama noktaları $\{t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1\}$ dir. Bölüm 3.2.4'de sunulan yöntem uygulanarak, sıralama noktaları temel matris bağıntısında yerine yazılır ve koşul satırları uygun satırlarla değiştirilirse,

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & 5 & -8 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. $[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{F}}]$ cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde Taylor katsayı matrisi,

$$\mathbf{A} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$$

şeklinde hesaplanır. Böylece yaklaşık çözümler

$$y_{1,2}(t) = t, \quad y_{2,2}(t) = 1+t$$

elde edilir. Bu çözümler aynı zamanda sistemin tam çözümleridir.

Örnek 4.2.2. İkinci örneğimizde tam çözümü, $y_1(t) = t + e^{t+1}$, $y_2(t) = 1 + 2e^{t+1}$ olan

$$\begin{cases} y_1'(t-1) + y_2'(t-1) + y_2(t-1) = e^t, \\ y_1'(t-1) - 2y_2'(t-1) + y_1(t-1) = t - e^t \end{cases}$$

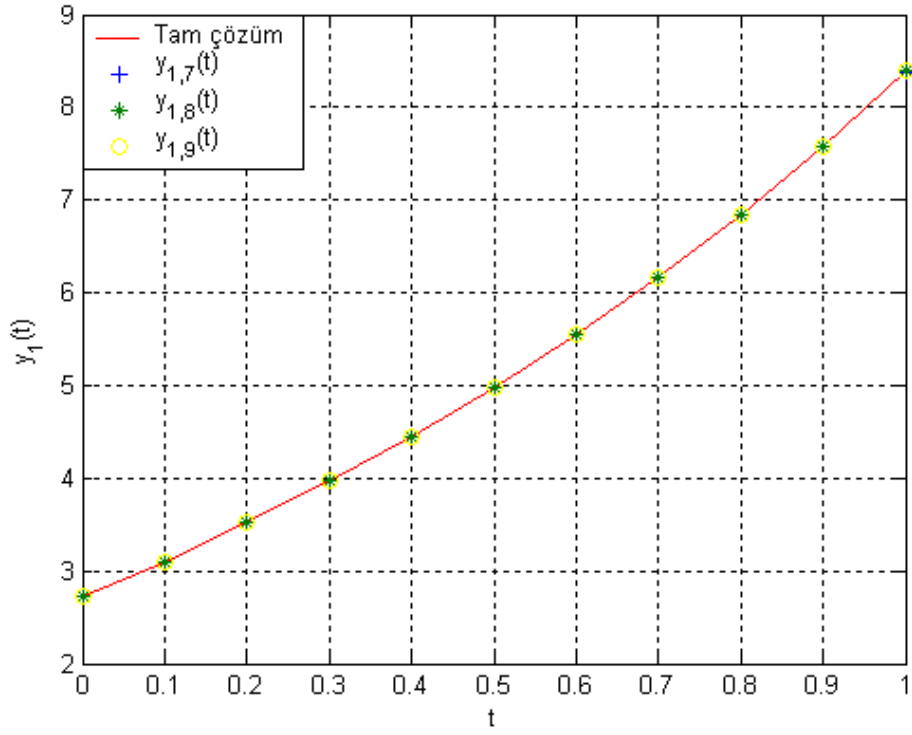
denklemlerini $y_1(-1) = 0$, $y_2(-1) = 3$ koşulları altında düşünelim. Bölüm 3.2.4 de sunulan yöntem ile $N = 7, 8, 9$ değerleri için denklemler sistemi yaklaşık olarak çözüldüğünde, Çizelge 4.10. ve Çizelge 4.11.'deki nümerik sonuçlar elde edildi. Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.'de $y_i(t)$, $i = 1, 2$ tam çözümleri ve $N = 7, 8, 9$ için $y_{i,N}(t)$ yaklaşık çözümleri aynı düzlemde çizildi. Şekil 4.9. ve Şekil 4.10.'da $e_{i,N}$, $i = 1, 2$ hata fonksiyonlarının grafiklerini $N = 7, 8, 9$ değerleri için çizdirdik. Çizelge ve şekillerden görülebileceği gibi N değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaşmakta olduğu ve hata fonksiyonlarının grafiklerinin sıfır doğrusuna yaklaştığı gözlemlenmektedir.

Çizelge 4.10. Örnek 4.2.2'nin $N = 7, 8, 9$ için $y_{1,N}(t)$ yaklaşık çözümleri ve mutlak hataları

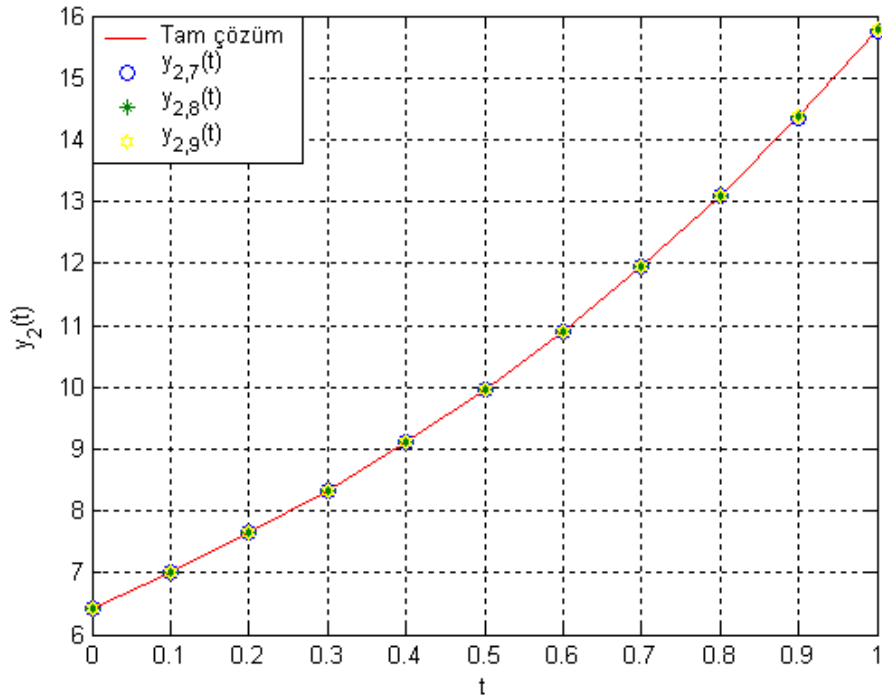
t_i	Tam çözüm	$y_{1,7}(t_i)$	$e_{1,7}(t_i)$	$y_{1,8}(t_i)$	$e_{1,8}(t_i)$	$y_{1,9}(t_i)$	$e_{1,9}(t_i)$
0.0	2.7182818	2.71826943	0.12397E-4	2.71828078	0.1040E-5	2.71828177	0.52E-7
0.1	3.1041660	3.10412954	0.36479E-4	3.10416238	0.3638E-5	3.10416579	0.225E-6
0.2	3.5201169	3.52002796	0.88963E-4	3.52010681	0.10104E-4	3.52011618	0.734E-6
0.3	3.9692966	3.96910404	0.192624E-3	3.96927228	0.24380E-4	3.96929464	0.203E-5
0.4	4.4551999	4.45481679	0.383175E-3	4.45514670	0.53263E-4	4.45519498	0.498E-5
0.5	4.9816890	4.98097456	0.714502E-3	4.98158111	0.107956E-3	4.98167787	0.112E-4
0.6	5.5530324	5.55176700	0.126541E-2	5.55282626	0.206156E-3	5.55300895	0.235E-4
0.7	6.1739473	6.17179920	0.214819E-2	6.17357245	0.374939E-3	6.17390089	0.465E-4
0.8	6.8496474	6.84612820	0.351926E-2	6.84899289	0.654565E-3	6.84955968	0.877E-4
0.9	7.5858944	7.58030202	0.559241E-2	7.58479097	0.110346E-2	7.58573535	0.1591E-3
1.0	8.3890560	8.38004011	0.865497E-2	8.38725139	0.180470E-2	8.38877779	0.2783E-3

Çizelge 4.11. Örnek 4.2.2'nin $N = 7, 8, 9$ için $y_2(t)$ yaklaşık çözümleri ve mutlak hatalar

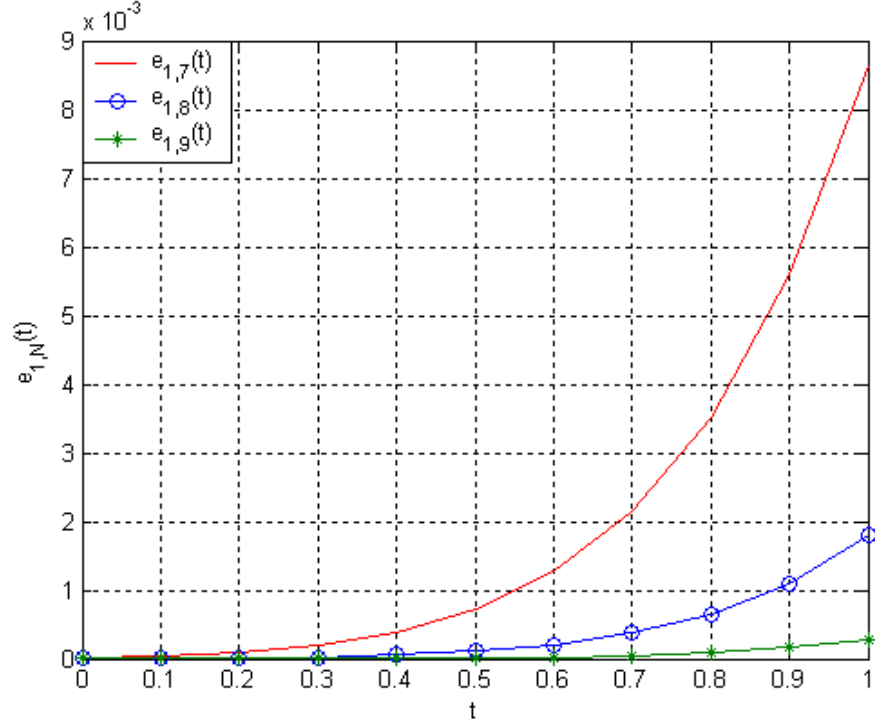
t_i	Tam çözüm	$y_{2,7}(t_i)$	$e_{2,7}(t_i)$	$y_{2,8}(t_i)$	$e_{2,8}(t_i)$	$y_{2,9}(t_i)$	$e_{2,9}(t_i)$
0.0	6.43656365	6.436537952	0.25704E-4	6.436561509	0.2147E-5	6.436563470	0.186E-6
0.1	7.00833205	7.008256963	0.75085E-4	7.008324592	0.7456E-5	7.008331282	0.766E-6
0.2	7.64023385	7.640051551	0.182295E-3	7.640213214	0.20632E-4	7.640231452	0.2394E-5
0.3	8.33859334	8.338199851	0.393485E-3	8.338543690	0.49646E-4	8.338586968	0.6368E-5
0.4	9.11039993	9.109619041	0.780893E-3	9.110291687	0.108247E-3	9.110384783	0.15151E-4
0.5	9.96337814	9.961924737	0.145340E-2	9.963159103	0.219037E-3	9.963345007	0.33133E-4
0.6	10.9060648	10.90349475	0.257010E-2	10.90564712	0.41773E-3	10.90599707	0.6778E-4
0.7	11.9478948	11.94353732	0.435746E-2	11.94713586	0.75892E-3	11.94776352	0.13126E-3
0.8	13.0992949	13.09216418	0.713075E-2	13.09797126	0.132367E-2	13.09905202	0.24291E-3
0.9	14.3717888	14.36046825	0.01132063	14.36955922	0.222966E-2	14.37135655	0.43233E-3
1.0	15.7781122	15.76060671	0.01750549	15.77446819	0.364401E-2	15.77736830	0.74390E-3



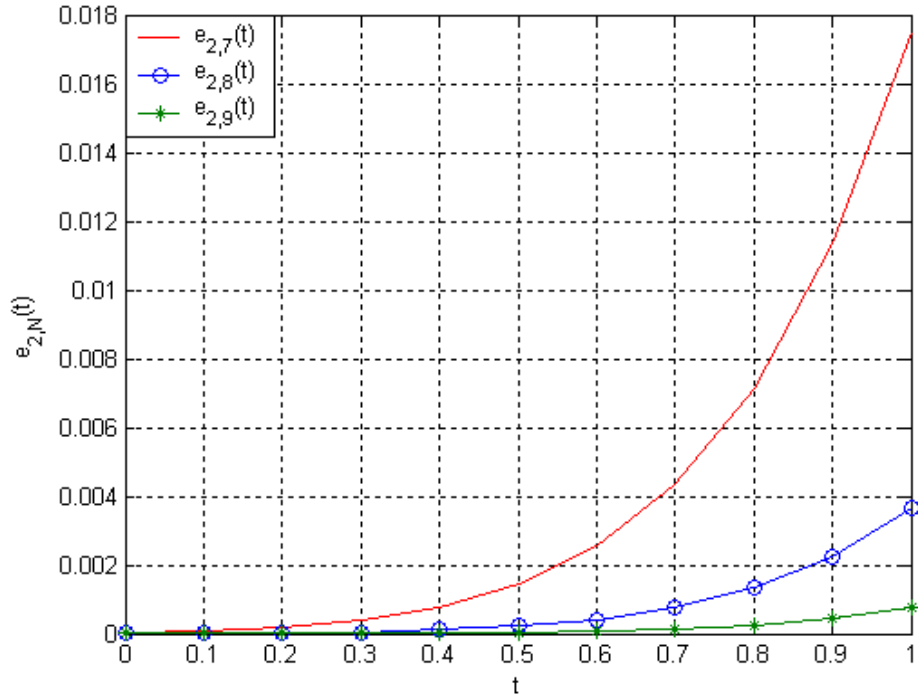
Şekil 4.7. Örnek 4.2.2'nin $y_1(t)$ tam çözümü ile $N = 7, 8, 9$ için $y_{1,N}(t)$ yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması



Şekil 4.8. Örnek 4.2.2'nin $y_2(t)$ tam çözümü ile $N = 7, 8, 9$ için $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümlerinin kıyaslanması



Şekil 4.9. Örnek 4.2.2'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması



Şekil 4.10. Örnek 4.2.2'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonlarının $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması

4.3. Biyolojik Türlerin Bir Arada Yaşamını Modelleyen Lineer Olmayan Delay İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Örnekler

Bu bölümde modifiye edilmiş Taylor sıralama metodunun doğruluğunu ve etkinliğini belirtmek amacı ile sayısal örnekler verilmiştir. Verilen aralıkların seçilmiş noktalarında $y_i(t)$, $i=1,2$, tam çözümleri, $y_{i,N}(t)$, $i=1,2$, yaklaşık çözümleri ve $e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|$, $i=1,2$, mutlak hata fonksiyonları hesaplanmış ve sonuçlar tablo ve şekillerle gösterilmiştir. Ayrıca sonuçlar, Adomian decomposition (ADM) (Babolian ve Biazar, 2002), varyasyonel iteration (VIM) ve pseudospectral Legendre metot (PLM) (Shakeri ve Dehghan, 2008) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.3.1. İlk olarak tam çözümünü $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1$ olan

$$f_1(t) = f_2(t) = 1, \quad h_1 = h_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad T_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad g_1(t) = 1 + t \text{ ve}$$

$$g_2(t) = \frac{3}{2} - 2t \text{ ile tanımlanan sistemi ele alalım.}$$

Bölüm 3.3.3'de sunulan Taylor sıralama metodu $N=2$ için uygulandığında $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1$ tam çözümlerine ulaşılır.

Örnek 4.3.2. (Shakeri ve Dehghan, 2008) İkinci örneğimizde tam çözümleri

$$y_1(t) = -3t + 1, \quad y_2(t) = t^2 - t \text{ olan ve } f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = t - 1, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 2,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = 1, \quad T_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad g_1(t) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{49}{12}t^2 + \frac{17}{12}t - \frac{23}{6} \text{ ve}$$

$$g_2(t) = \frac{15}{8}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - 1 \text{ verileri ile tanımlanan sistemi ele alalım.}$$

Bölüm 3.3.3'deki yöntemi uygulayarak sistemin Taylor polinom çözümü $N = 5, 6, 7$ için hesaplanmıştır. Çizelge 4.12., Çizelge 4.13. ve Şekil 4.11., Şekil 4.12.'de, VIM'dan, ADM'den ve PLM'den ve $N = 5$ için hesaplanan Taylor sıralama metodundan elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır. Ayrıca Çizelge 4.14.,

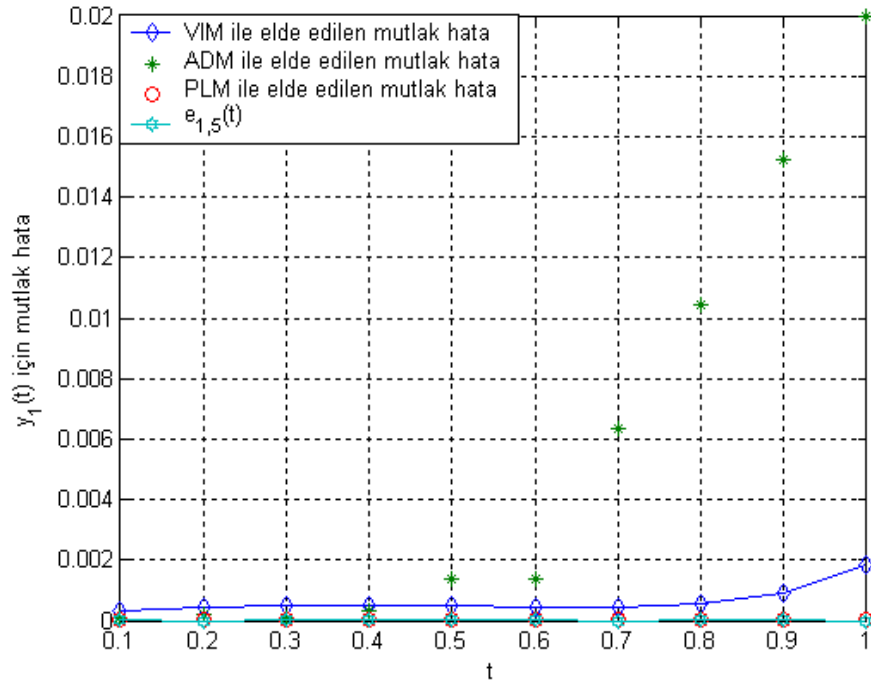
Çizelge 4.15. ve Şekil 4.13., Şekil 4.14.'de farklı N değerleri için uygulanan Taylor sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler sunulmuştur. Tablo ve şekillerden görüleceği gibi Taylor sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözüme diğer metotlarla elde edilen yaklaşık çözümlerden daha yakındır ve N kesme sınırı büyüdükçe, mutlak hata hızlı bir şekilde azalmaktadır.

Çizelge 4.12. Örnek 4.3.2'nin $y_1(t)$ çözümü için Taylor sıralama metodu, ADM, VIM ve PLM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

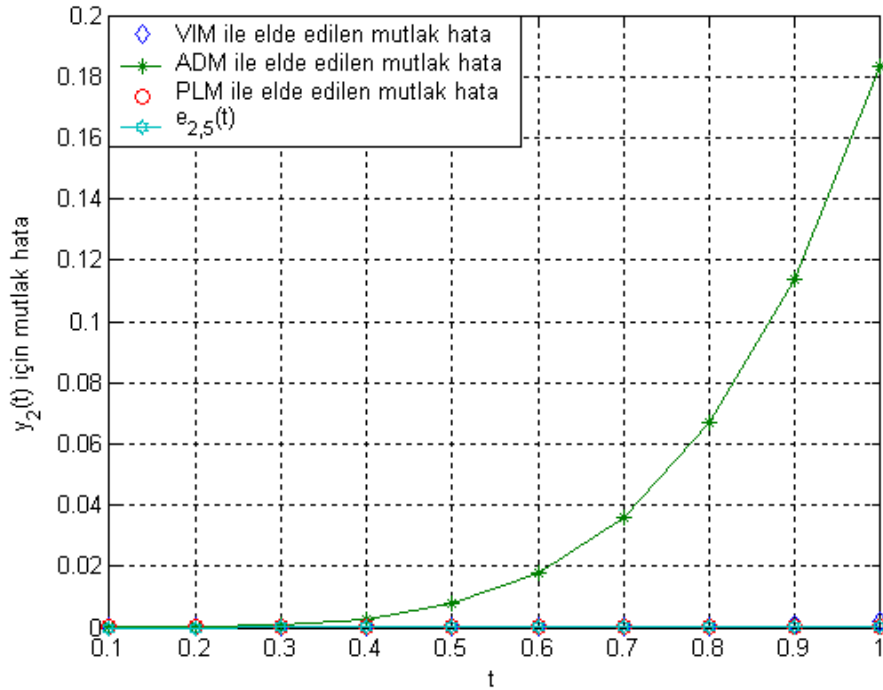
	Tam çözüm	VIM ile elde edilen mutlak hata değerleri	ADM ile elde edilen mutlak hata değerleri	PLM ile elde edilen mutlak hata değerleri	N=5 için Taylor sıralama metodu ile elde edilen mutlak hata
t_i	$y_1(t_i) = -3t_i + 1$				$e_{1,5}(t_i)$
0.10	0.7000000000000000	0.3151885369e-3	0.109175381411e-3	0.198626164824e-12	0.1e-14
0.20	0.4000000000000000	0.4272891164e-3	0.178892082938e-3	0.323115399996e-12	0
0.30	0.1000000000000000	0.4733131802e-3	0.108361785364e-3	0.361580649915e-12	0.17e-14
0.40	-0.2000000000000000	0.4855402332e-3	0.309482560599e-3	0.321317278395e-12	0.1e-14
0.50	-0.5000000000000000	0.4743631682e-3	0.00135621442726	0.209620649247e-12	0.2e-14
0.60	-0.8000000000000000	0.4459812605e-3	0.00135621442726	0.337861262862e-13	0.2e-14
0.70	-1.1000000000000000	0.4368226112e-3	0.00637023644866	0.198890926677e-12	0
0.80	-1.4000000000000000	0.5358143476e-3	0.01046626665686	0.481115145828e-12	0.1e-13
0.90	-1.7000000000000000	0.9100016161e-3	0.01522647918089	0.805591167355e-12	0.1e-13
1.00	-2.0000000000000000	0.1829471578e-2	0.01994495324168	0.116502362744e-11	0

Çizelge 4.13. Örnek 4.3.2'nin $y_2(t)$ çözümü için Taylor sıralama metodu, ADM, VIM ve PLM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

	Tam çözüm	VIM ile elde edilen mutlak hata değerleri	ADM ile elde edilen mutlak hata değerleri	PLM ile elde edilen mutlak hata değerleri	N=5 için Taylor sıralama metodu ile elde edilen mutlak hata
t_i	$y_2(t_i) = t_i^2 - t_i$				$e_{2,5}(t_i)$
0.10	-0.0900000000000000	0.3151885369e-3	0.109175381411e-3	0.198626164824e-12	0
0.20	-0.1600000000000000	0.4272891164e-3	0.178892082938e-3	0.323115399996e-12	0
0.30	-0.2100000000000000	0.4733131802e-3	0.108361785364e-3	0.361580649915e-12	0.1e-14
0.40	-0.2400000000000000	0.4855402332e-3	0.309482560599e-3	0.321317278395e-12	0.1e-14
0.50	-0.2500000000000000	0.4743631682e-3	0.00135621442726	0.209620649247e-12	0.2e-14
0.60	-0.2400000000000000	0.4459812605e-3	0.00135621442726	0.337861262862e-13	0.1e-14
0.70	-0.2100000000000000	0.4368226112e-3	0.00637023644866	0.198890926677e-12	0.3e-14
0.80	-0.1600000000000000	0.5358143476e-3	0.01046626665686	0.481115145828e-12	0.3e-14
0.90	-0.0900000000000000	0.9100016161e-3	0.01522647918089	0.805591167355e-12	0.37e-14
1.00	0	0.1829471578e-2	0.01994495324168	0.116502362744e-11	0.459213e-14



Şekil 4.11. Örnek 4.3.2'nin farklı metotlarla elde edilen $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması



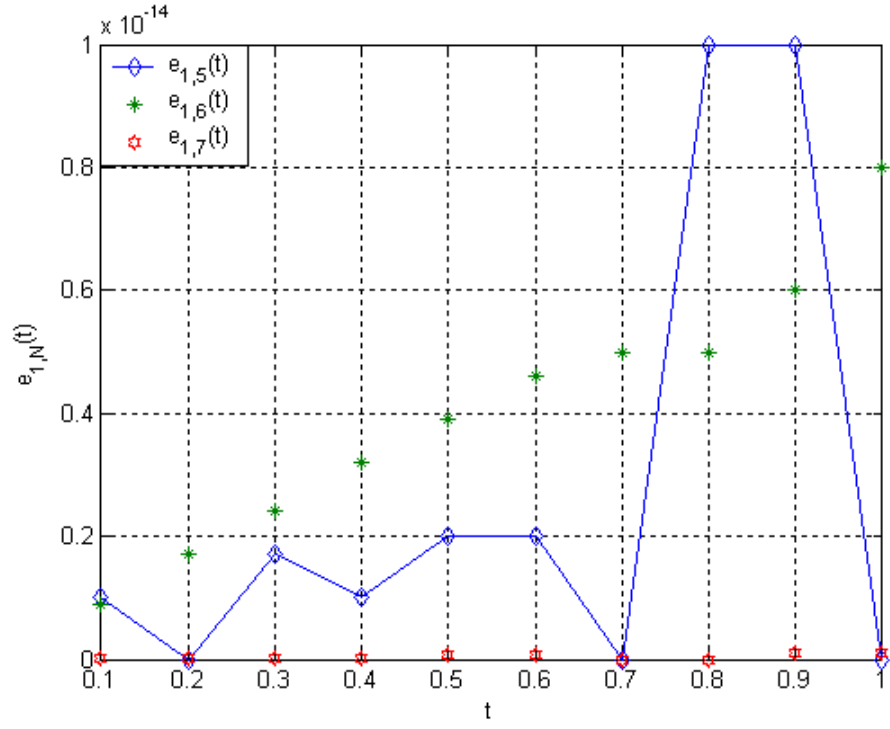
Şekil 4.12. Örnek 4.3.2'nin farklı metotlarla elde edilen $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması

Çizelge 4.14. Örnek 4.3.2'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5, 6, 7$ değerleri için karşılaştırılması

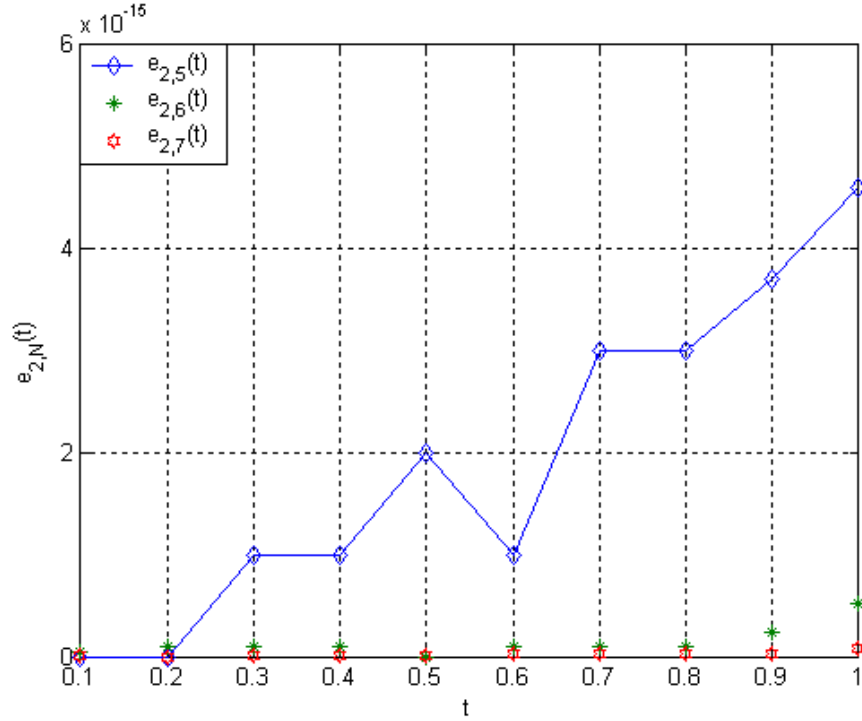
Taylor Sıralama Metodu ile Elde Edilen Mutlak Hatalar			
t_i	$e_{1,5}(t_i)$	$e_{1,6}(t_i)$	$e_{1,7}(t_i)$
0.1	0.1e-14	0.9e-15	0.2e-16
0.2	0	0.17e-14	0.1e-16
0.3	0.17e-14	0.24e-14	0.14e-16
0.4	0.1e-14	0.32e-14	0.1e-16
0.5	0.2e-14	0.39e-14	0.7e-16
0.6	0.2e-14	0.46e-14	0.6e-16
0.7	0	0.5e-14	0
0.8	0.1e-13	0.5e-14	0
0.9	0.1e-13	0.6e-14	0.1e-15
1.0	0	0.8e-14	0.1e-15

Çizelge 4.15. Örnek 4.3.2'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 5, 6, 7$ değerleri için karşılaştırılması

Taylor Sıralama Metodu ile Elde Edilen Mutlak Hatalar			
t_i	$e_{2,5}(t_i)$	$e_{2,6}(t_i)$	$e_{2,7}(t_i)$
0.1	0	0.5e-16	0.2e-17
0.2	0	0.1e-15	0
0.3	0.1e-14	0.1e-15	0.1e-16
0.4	0.1e-14	0.1e-15	0.1e-16
0.5	0.2e-14	0	0.1e-16
0.6	0.1e-14	0.1e-15	0.2e-16
0.7	0.3e-14	0.1e-15	0.2e-16
0.8	0.3e-14	0.1e-15	0.3e-16
0.9	0.37e-14	0.23e-15	0.32e-16
1.0	0.4592130396e-14	0.52420010192157e-15	0.8240483082682e-16



Şekil 4.13. Örnek 4.3.2'nin $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N=5, 6, 7$ için karşılaştırılması



Şekil 4.14. Örnek 4.3.2'nin $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N=5, 6, 7$ için karşılaştırılması

Örnek 4.3.3. (Shakeri ve Dehghan, 2008) Şimdiki örneğimizde tam çözümleri

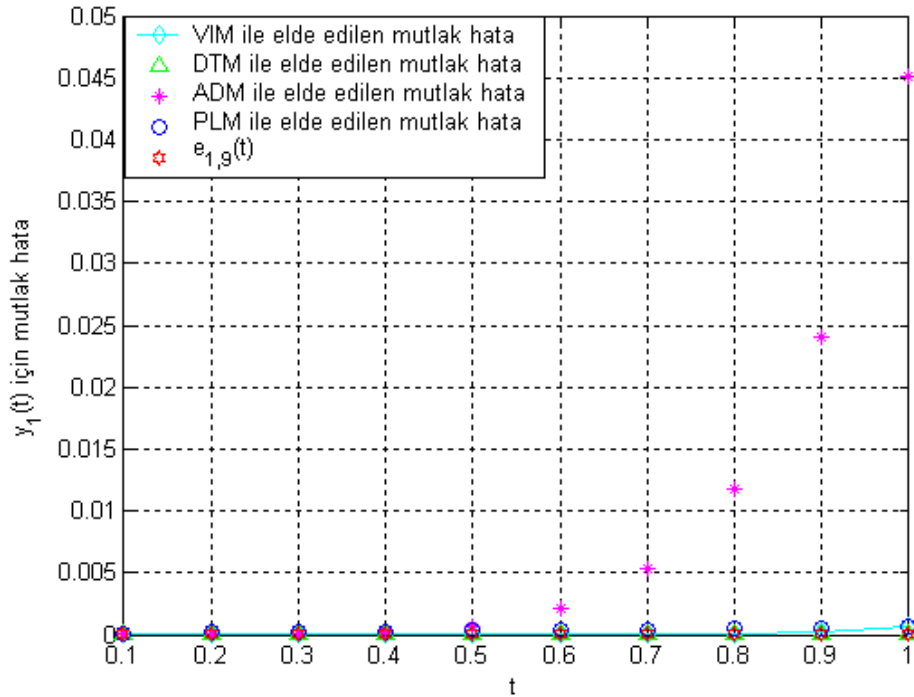
$$y_1(t) = -t^2, \quad y_2(t) = \frac{1}{2}te^{-t} \quad \text{olan} \quad f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = t, \quad h_1 = h_2 = 2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1,$$

$$T_0 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

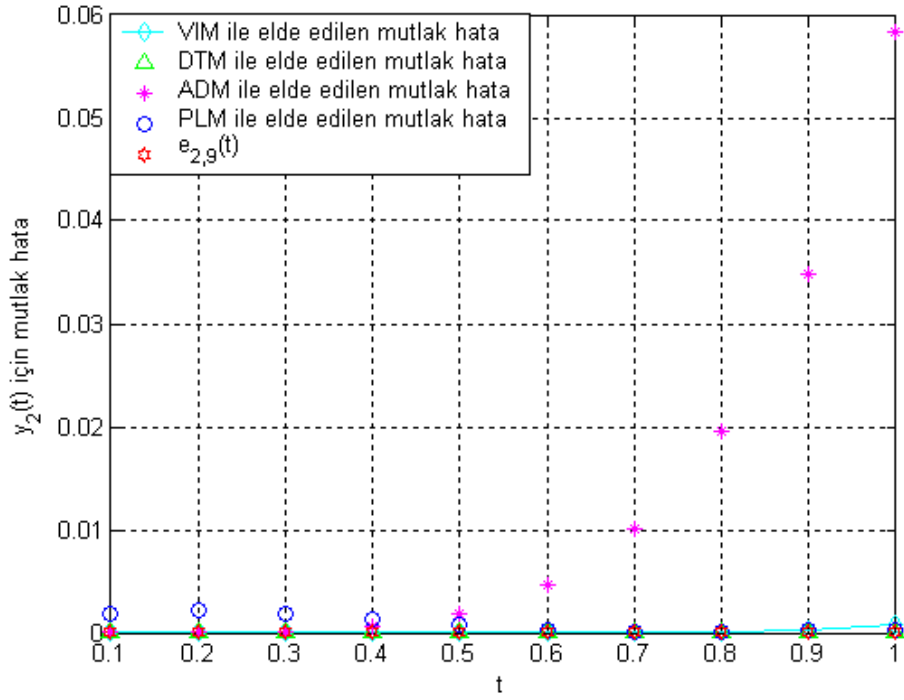
$$g_1(t) = t^2 \left(2 - 3te^{-t} - \frac{7}{2}e^{-t} + \frac{13}{6}te^{\frac{1}{3}-t} + \frac{22}{9}e^{\frac{1}{3}-t} \right) - 2t \quad \text{ve}$$

$$g_2(t) = \frac{1}{648}e^{-t} (324t^3 - 8t^2 + 325t + 324) \quad \text{sistemi düşünöldü.}$$

Bölüm 3.3.3'de sunulan Taylor sıralama metodu $N = 7, 8, 9$ için uygulanarak $y_{1,N}(t)$ ve $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümleri hesaplandı. Tam çözümler, Taylor sıralama metodu ve diğere yaklaşımlar metotları ile elde edilmiş olan mutlak hataların karşılaştırılması Şekil 4.15. ve Şekil 4.16.'da yapılmıştır. Çizelge 4.16., Çizelge 4.17. ve Şekil 4.17.-Şekil 4.18.'de Taylor sıralama metodunun farklı N değereeri için mutlak hata değereeri verilmiştir. Ayrıca, Çizelge 4.18.'de seçilmiş noktalarda çözümlerin doğruluğu gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Örnek 4.3.3'ün $y_{1,N}(t)$ çözümleri için farklı metotlarla elde edilmiş mutlak hataların karşılaştırılması



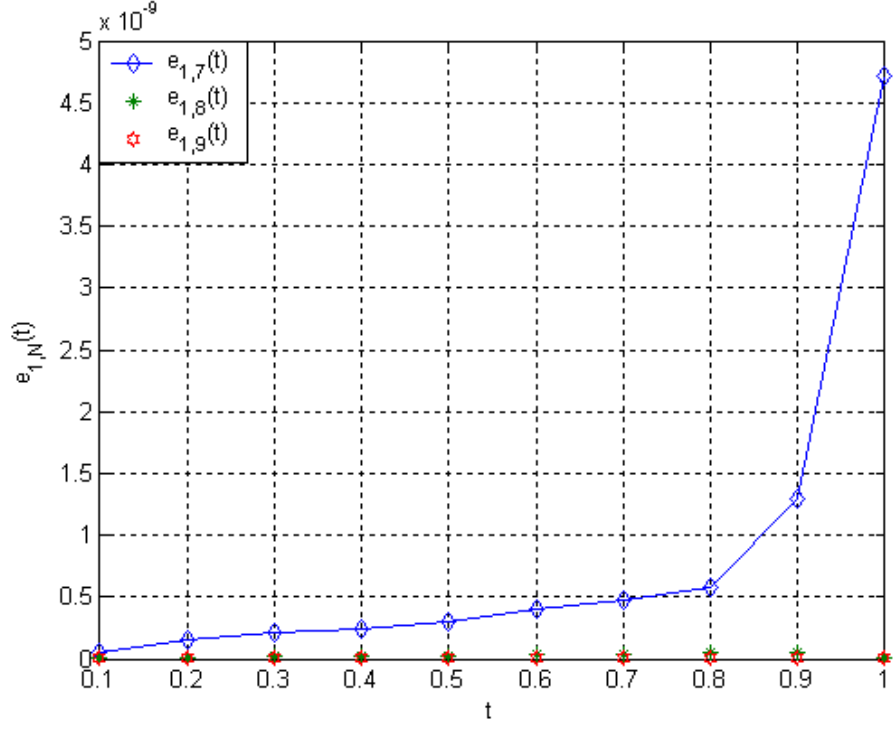
Şekil 4.16. Örnek 4.3.3'ün $y_{2,N}(t)$ çözümü için farklı metotlarla elde edilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

Çizelge 4.16. Örnek 4.3.3'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7, 8, 9$ değerleri için karşılaştırılması

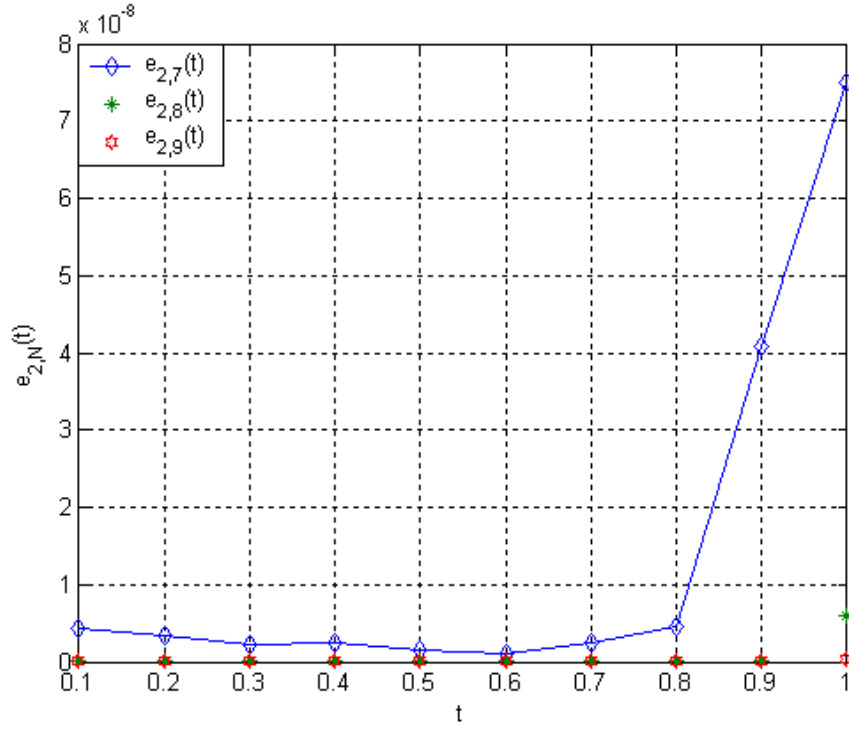
Taylor sıralama metodu				
t_i	Tam çözüm $y_1(t)$	$e_{1,7}(t_i)$	$e_{1,8}(t_i)$	$e_{1,9}(t_i)$
0.1	-0.010000000000	0.5461790e-10	0.709735e-11	0.54621e-12
0.2	-0.040000000000	0.14796565e-9	0.1432477e-10	0.103513e-11
0.3	-0.090000000000	0.20549045e-9	0.1815547e-10	0.130287e-11
0.4	-0.160000000000	0.2411574e-9	0.220830e-10	0.15896e-11
0.5	-0.250000000000	0.3069964e-9	0.274994e-10	0.19494e-11
0.6	-0.360000000000	0.4059928e-9	0.337797e-10	0.23863e-11
0.7	-0.490000000000	0.4782768e-9	0.416153e-10	0.29375e-11
0.8	-0.640000000000	0.5705779e-9	0.527492e-10	0.35725e-11
0.9	-0.810000000000	0.12988953e-8	0.584030e-10	0.45035e-11
1.0	-1	0.4714350e-8	0.7797e-11	0.8311e-11

Çizelge 4.17. Örnek 4.3.3'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7,8,9$ değerleri için karşılaştırılması

Taylor sıralama metodu				
t_i	Tam çözüm $y_2(t_i)$	$e_{2,7}(t_i)$	$e_{2,8}(t_i)$	$e_{2,9}(t_i)$
0.1	0.04524187090180	0.434756143e-8	0.16058984e-9	0.594778e-11
0.2	0.08187307530780	0.349666241e-8	0.11001843e-9	0.382128e-11
0.3	0.11112273310226	0.21396338e-8	0.872505e-10	0.34042e-11
0.4	0.13406400920713	0.24005294e-8	0.784700e-10	0.26107e-11
0.5	0.15163266492816	0.15742853e-8	0.512789e-10	0.21271e-11
0.6	0.16464349082821	0.9457157e-9	0.553099e-10	0.16516e-11
0.7	0.17380485632699	0.24452969e-8	0.220715e-10	0.11407e-11
0.8	0.17973158564689	0.45216675e-8	0.405498e-10	0.15007e-11
0.9	0.18295634688327	0.408948078e-7	0.902790e-10	0.44028e-11
1.0	0.18393972058572	0.748574986e-7	0.60301322e-8	0.2518797e-9



Şekil 4.17. Örnek 4.3.3'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7, 8, 9$ değerleri için karşılaştırılması



Şekil 4.18. Örnek 4.3.3'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 7, 8, 9$ değerleri için karşılaştırılması

Çizelge 4.18. Örnek 4.3.3'ün $N = 8,9$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu

t_i	$E_{1,8}(t_i)$	$E_{1,9}(t_i)$	$E_{2,8}(t_i)$	$E_{2,9}(t_i)$
0	0	0	0	0
0.1	0.806584461e-10	0.255e-10	0.86000006e-9	0.6000517404e-10
0.2	0.719508141e-10	0.532e-10	0.47999997e-9	0.1999601427e-10
0.3	0.343505686e-9	0.220e-9	0.18000124e-9	0.2007735870e-10
0.4	0.364979109e-9	0.15e-9	0.5998097e-10	0.6059128040e-10
0.5	0.446603860e-9	0.16e-9	0.10015322e-9	0.1028384404e-9
0.6	0.48728944e-9	0.10e-9	0.26081783e-9	0.5009288648e-10
0.7	0.6897561e-9	0.39e-9	0.2767199e-9	0.905070594e-11
0.8	0.2655416e-9	0.21e-9	0.18906488e-8	0.1915105741e-9
0.9	0.449297e-9	0.2e-9	0.68306403e-8	0.1838402061e-9
1	0.781939e-8	0.7e-9	0.183328948e-6	0.8389655597e-8

4.4. Lineer Olmayan İkinci Mertebe Diferansiyel Denklemlerin Sınır Değer Problemi İçin Örnekler

Bu bölümde modifiye edilmiş Taylor sıralama metodunun doğruluğunu ve etkinliğini belirtmek amacı ile sayısal örnekler verilmiştir. Verilen aralıkların seçilmiş noktalarında $y_i(t)$, $i = 1, 2$ tam çözümleri, $y_{i,N}(t)$, $i = 1, 2$ yaklaşık çözümleri, çözümlerin doğruluğu ve mutlak hata fonksiyonları hesaplanmış ve sonuçlar tablo ve şekillerle gösterilmiştir. Ayrıca sonuçlar, Bölüm 3.4'de belirtilen diğer nümerik metotlarla karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.4.1. (Lu, 2007; Saadatmandi vd., 2009; Gökmen ve Sezer, 2013b)

İlk olarak $y_1(0) = y_1(1) = 0$, $y_2(0) = y_2(1) = 0$

sınır koşullarına sahip

$$\begin{cases} y_1''(t) + t y_1(t) + t y_2(t) = 2, \\ y_2''(t) + 2t y_2(t) + 2t y_1(t) = -2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

lineer ikinci mertebe sınır değer problemini düşünelim. Problemin tam çözümleri sırası ile $y_1(t) = t^2 - t$ ve $y_2(t) = t - t^2$ dir. Eğer sisteme Bölüm 3.4'de tanımlanan

metot $N=2$ için uygulanırsa, sıralama noktaları $\left\{t_0=0, t_1=\frac{1}{2}, t_2=1\right\}$ şeklinde

hesaplanır ve denklem (3.80)'den problemin temel matris gösterimi

$$\begin{cases} [\mathbf{T}(t)\mathbf{B}^2 + t\mathbf{T}(t)]\mathbf{Y}_1 + t\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_2 = 2, \\ 2t\mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_1 + [\mathbf{T}(t)\mathbf{B}^2 + 2t\mathbf{T}(t)]\mathbf{Y}_2 = -2. \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.83)'den sistemin kapalı formu

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 & 2+t^3 & t & t^2 & t^3 \\ 2t & 2t^2 & 2t^3 & 2t & 2t^2 & 2+2t^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} = \mathbf{f}(t)$$

şeklinde yazılır. Bu temel matris denklemini için arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

şekindedir. Denklem (3.85) ve (3.86)'den sınır koşulların matris gösterimi,

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_0; 0] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{J}_1; 0] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde olup, koşullara bağlı yeni arttırılmış matris

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Sistem çözülerek Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y} = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T$$

veya

$$\mathbf{Y}_1 = [0 \quad -1 \quad 1]^T, \quad \mathbf{Y}_2 = [0 \quad 1 \quad -1]^T$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu sütun matrisler denklem (3.76)'de yerine yazılarak,

$$y_1(t) = t^2 - t, \quad y_2(t) = t - t^2$$

şeklinde Taylor polinomu cinsinden çözüm kümesi elde edilir ki bu çözümler sistemin tam çözümleridir.

Örnek 4.4.2. (Lu, 2007; Gökmen ve Sezer, 2013b)

İkinci örnekte $y_1(0) = y_1(1) = 0$, $y_2(0) = y_2(1) = 0$ sınır koşulları altında

$$\begin{cases} y_1''(t) - t y_2'(t) + y_1(t) = f_1(t), \\ y_2''(t) + t y_1'(t) + y_1(t) y_2(t) = f_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

lineer olmayan sistemini düşünelim. Burada $f_1(t) = t^3 - 2t^2 + 6t$ ve $f_2(t) = t^5 - t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 2$ dir. $N = 3$ için Bölüm 3.4'deki yöntem uygulandığında, $y_1(t) = t^3 - t$, $y_2(t) = t^2 - t$ tam çözümlerine ulaşılır.

Örnek 4.4.3. (Geng, 2007; Dehghan v.d. 2007; Gökmen ve Sezer, 2013b)

Şimdiki örnekte

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -2(1+t)\cos(t) + \pi\cos(\pi t) + 2t\sin(\pi t) + (4t - 2t^2 - 4)\sin(t), \\ f_2(t) &= -4(t-1)\cos(t) + 2(-t^3 + t^2 - 2)\sin(t) + (1 - \pi^2)\sin(\pi t) \end{aligned}$$

olmak üzere lineer ikinci merteye,

$$\begin{cases} y_1''(t) + y_1'(t) + ty_1(t) + y_2'(t) + 2ty_2(t) = f_1(t), \\ y_2''(t) + y_2(t) + 2ty_1'(t) + t^2y_1(t) = f_2(t), \\ y_1(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sınır-değer problemini düşünelim. Sistemin tam çözümü $y_1(t) = 2(1-t)\sin(t)$, $y_2(t) = \sin(\pi t)$ olmak üzere Taylor sıralama metot $N = 10, 20$ için uygulanarak $y_{1,N}(t)$ ve $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Çizelge 4.19. ve Çizelge 4.20.'de $N = 10, 20$ için Taylor sıralama metot, Geng'in (2007) tanımladığı metot, sinc-sıralama metot ile elde edilen mutlak hatalar karşılaştırılmıştır. Tablolardan elde edilen sonuçlara göre Taylor sıralama metodunun, tam çözüme diğer metotlardan daha yakın olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.19. Örnek 4.4.3'ün $y_1(t)$ çözümü için mutlak hatalar

t_i	Geng metot		Sinc-sıralama metot		Taylor sıralama metodu	
	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$
0.08	3.3e-003	8.0e-004	3.2e-003	3.0e-004	0.5e-007	0.1e-009
0.24	7.7e-003	1.9e-003	9.2e-004	8.5e-005	0.12e-006	0
0.40	9.7e-003	2.4e-003	2.0e-003	3.5e-004	0.16e-006	0.1e-009
0.56	9.5e-003	2.4e-003	2.2e-004	2.6e-004	0.16e-006	0.1e-009
0.72	7.3e-003	1.8e-003	4.1e-003	2.0e-004	0.14e-006	0.3e-009
0.88	3.4e-003	8.0e-004	1.0e-002	2.6e-004	0.9e-007	0.1e-009
0.96	1.1e-003	2.0e-003	2.1e-003	2.6e-003	0.4e-007	0.2e-010

Çizelge 4.20. Örnek 4.4.3'ün $y_2(t)$ çözümü için mutlak hatalar

t_i	Geng metot		Sinc-sıralama metot		Taylor sıralama metodu	
	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$	$e_{1,10}(t_i)$	$e_{1,20}(t_i)$
0.08	7.7e-003	1.9e-003	1.5e-003	2.0e-003	0.86e-007	0
0.24	2.0e-002	5.1e-003	7.0e-003	9.8e-004	0.23e-006	0
0.40	2.7e-002	7.1e-003	7.4e-003	1.1e-003	0.35e-006	0.5e-009
0.56	2.7e-002	6.9e-003	1.0e-002	1.4e-003	0.45e-006	0
0.72	2.0e-002	5.2e-003	4.4e-003	5.5e-005	0.55e-006	0.7e-009
0.88	9.4e-003	2.4e-003	2.1e-002	7.7e-004	0.63e-006	0.14e-008
0.96	3.1e-003	8.0e-003	6.9e-003	8.3e-004	0.44e-006	0.18e-008

Örnek 4.4.4. (Saadatmandi v.d., 2009; Gökmen ve Sezer, 2013b)

Son örneğimiz

$$f_1(t) = -\pi^2 \sin(\pi t) + t \sin^2(\pi t) + t^4 - 3t^3 + 2t,$$
$$f_2(t) = t \pi \cos(\pi t) + t^3 - 3t^2 + 8t - 6$$

olmak üzere $y_1(0) = y_1(1) = 0$, $y_2(0) = y_2(1) = 0$, sınır koşullarına sahip

$$\begin{cases} y_1''(t) + t y_2(t) + t y_1^2(t) = f_1(t), \\ y_2''(t) + t y_1'(t) + y_2(t) = f_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

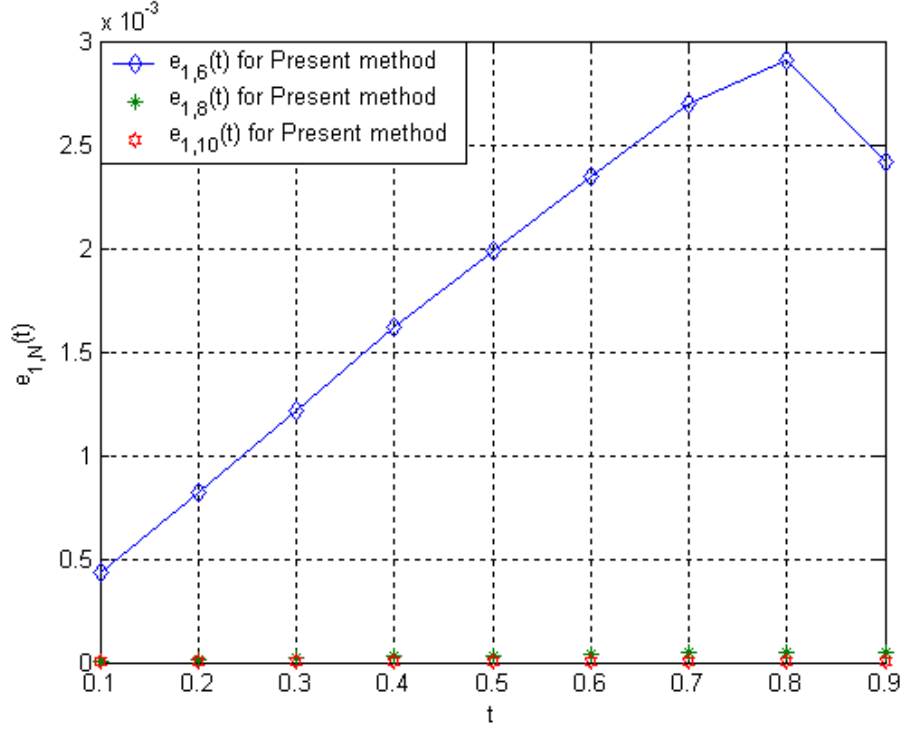
lineer olmayan sistemdir. Sistemin tam çözümleri, $y_1(t) = \sin(\pi t)$ ve $y_2(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ olmak üzere Bölüm 3.4'deki yöntem uygulanarak $y_{1,N}(t)$ ve $y_{2,N}(t)$ yaklaşık çözümleri $N = 6, 8, 10$ için hesaplanmıştır. Çizelge 4.21. ve Çizelge 4.22.'de tam çözümler ve Taylor sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır. Şekil 4.19. ve Şekil 4.20.'de farklı N değerleri için mutlak hatalar gösterilmiştir. Ayrıca Çizelge 4.23.'de denklem (3.89) ve (3.90) ile verilen çözümlerin doğruluğunun kontrolü $N = 8, 10$ değerleri için yapılmıştır. Sonuçlar göstermektedir ki, N değerleri arttıkça hatalar hızlı bir şekilde azalmaktadır.

Çizelge 4.21. Örnek 4.4.4'ün $y_1(t)$ çözümü için nümerik sonuçlar

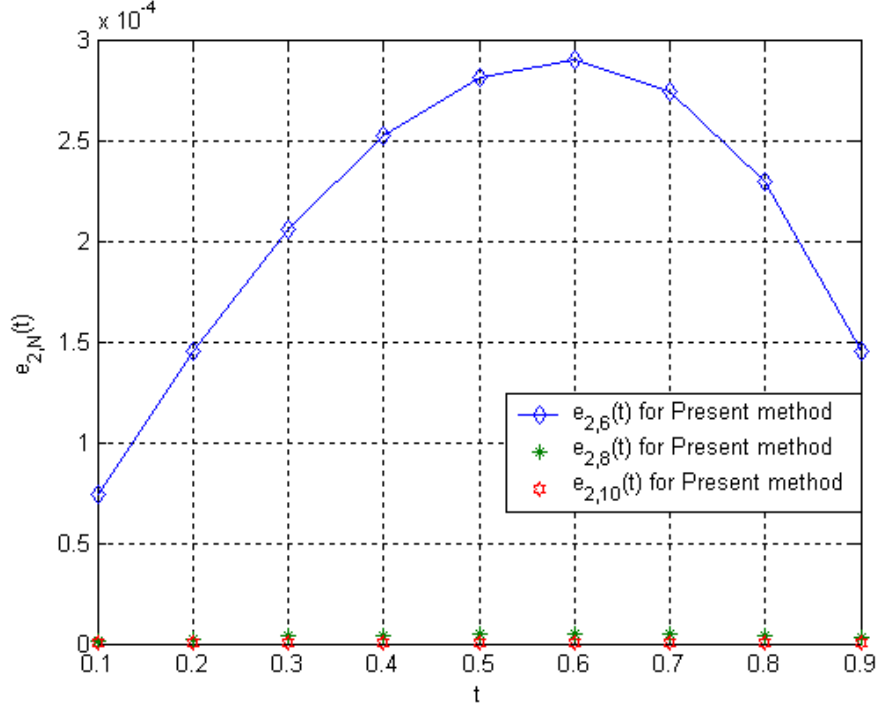
t_i	Tam çözüm $y_1(t_i) = \sin(\pi t_i)$	Taylor sıralama metodu		
		$N=6, y_{1,6}(t_i)$	$N=8, y_{1,8}(t_i)$	$N=10, y_{1,10}(t_i)$
0.1	0.3090169944	0.3085841093	0.3090243256	0.3090169105
0.2	0.5877852524	0.5869635288	0.5877994680	0.5877850874
0.3	0.8090169944	0.8077989920	0.8090382049	0.8090167485
0.4	0.9510565165	0.9494390161	0.9510845314	0.9510561908
0.5	1.0	0.9980106604	1.000034626	0.9999995978
0.6	0.9510565163	0.9487139849	0.9510973706	0.9510560420
0.7	0.8090169941	0.8063201981	0.8090635500	0.8090164533
0.8	0.5877852522	0.5848734949	0.5878372288	0.5877846485
0.9	0.3090169936	0.3065966020	0.3090671066	0.3090163656

Çizelge 4.22. Örnek 4.4.4'ün $y_2(t)$ çözümü için nümerik sonuçlar

t_i	Tam çözüm $y_2(t_i) = t_i^3 - 3t_i^2 + 2t_i$	Taylor sıralama metodu		
		$N=6, y_{2,6}(t_i)$	$N=8, y_{2,8}(t_i)$	$N=10, y_{2,10}(t_i)$
0.1	0.171	0.1709254664	0.1710012938	0.1709999851
0.2	0.288	0.2878551222	0.2880025096	0.2879999712
0.3	0.357	0.3567941626	0.3570035593	0.3569999591
0.4	0.384	0.3837474041	0.3840043670	0.3839999500
0.5	0.375	0.3747185358	0.3750048635	0.3749999444
0.6	0.336	0.3357103322	0.3360049891	0.3359999430
0.7	0.273	0.2727258226	0.2730047107	0.2729999466
0.8	0.192	0.1917704189	0.1920039970	0.1919999550
0.9	0.099	0.09885500963	0.09900267529	0.09899996937



Şekil 4.19. Örnek 4.4.4'ün $e_{1,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması



Şekil 4.20. Örnek 4.4.4'ün $e_{2,N}(t)$ mutlak hata fonksiyonunun $N = 6,8,10$ değerleri için karşılaştırılması

Çizelge 4.23. Örnek 4.4.4'ün $N = 8, 10$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu

t_i	$E_{1,8}(t_i)$	$E_{1,10}(t_i)$	$E_{2,8}(t_i)$	$E_{2,10}(t_i)$
0.1	0.38636283e-004	0.2717e-008	0.3897e-006	0.29997344e-009
0.2	0.2348542e-004	0.442e-008	0.2575e-006	0.28676425e-009
0.3	0.135312e-004	0.58e-008	0.1271e-006	0.50503154e-009
0.4	0.69530e-005	0.150e-007	0.360e-007	0.169243191e-008
0.5	0.2e-008	0.24e-007	0.171288e-009	0.193190512e-008
0.6	0.143913e-004	0.187e-007	0.1609e-006	0.196237761e-008
0.7	0.658243e-004	0.183e-007	0.1564e-005	0.52748838e-008
0.8	0.4209972e-003	0.218e-007	0.16807e-004	0.79202062e-008
0.9	0.41214521e-002	0.444069e-004	0.24904e-003	0.200696419e-005

4.5. Gecikmeli Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli İçin Örnekler

Bu bölümde, Bölüm 3.5'de sunulan Taylor sıralama metodunun etkinliği birkaç örnek üzerinde gösterilmiştir. Tablo ve figürlerde, verilen aralığın seçilmiş noktalarında farklı N değerleri için $y_{i,N}(t)$, $i = 1, 2$ yaklaşık çözümleri ve çözümlerin doğrulukları verilmiştir. Tüm nümerik hesaplamalar Maple 15 programlama dili kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 4.5.1. (Song ve Wei, 2005) İlk olarak $y_1(0) = 0.3$, $y_2(0) = 0.2$ başlangıç koşulları altında

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)[1 - y_1(t - 1.5) - 0.5 y_2(t)], \\ y_2'(t) = y_2(t)[-1 + 2y_1(t) - 4y_2(t)] \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 300$$

sistemini ele alalım. Sistem $E^* = (0.9, 0.2)$ pozitif denge noktasına sahiptir. Bölüm 3.5'de sunulan metot $N = 5, 7$ için uygulandığında,

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{in}(t)^n, \quad i = 1, 2$$

kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümler elde edilir. $N=5$ için sıralama noktalarının kümesi $\{t_0 = 0, t_1 = 60, t_2 = 120, t_3 = 180, t_4 = 240, t_5 = 300\}$ şeklindedir. Sistem çözülerek Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.00382 \\ 0.5243 \times 10^{-4} \\ -0.3309 \times 10^{-6} \\ 0.9752 \times 10^{-9} \\ -0.1085 \times 10^{-11} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.7286 \times 10^{-5} \\ 0.1752 \times 10^{-6} \\ -0.1485 \times 10^{-8} \\ 0.5309 \times 10^{-11} \\ -0.6799 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.

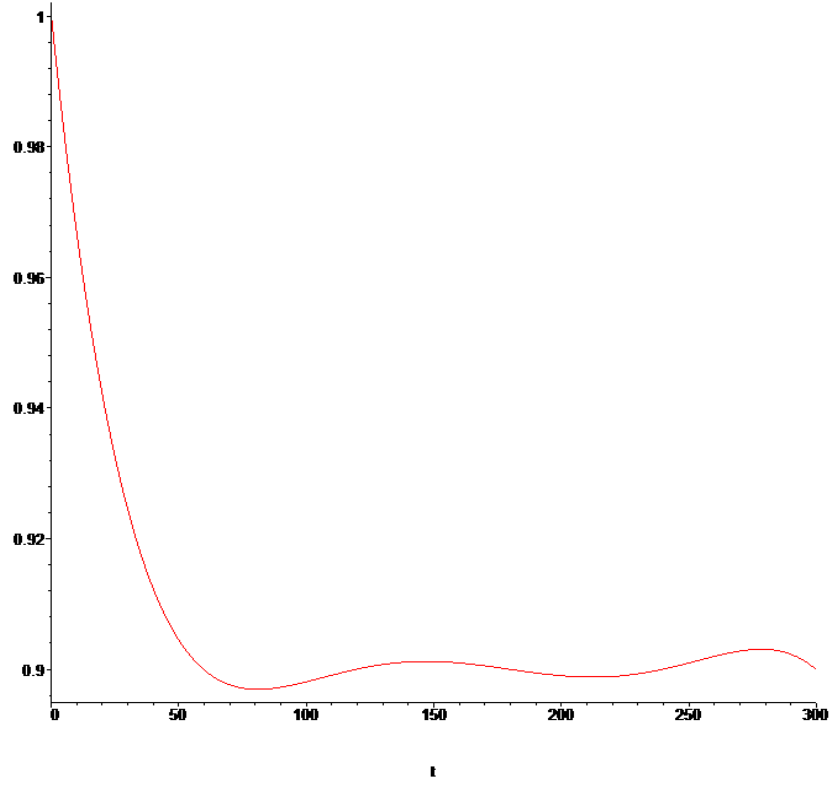
Böylece, yaklaşık çözümler

$$\begin{aligned} y_{1,5}(t) &= 1 - 0.00382t + 0.5243 \times 10^{-4}t^2 - 0.3309 \times 10^{-6}t^3 \\ &\quad + 0.9752 \times 10^{-9}t^4 - 0.01085 \times 10^{-11}t^5, \\ y_{2,5}(t) &= 0.2 - 0.7286 \times 10^{-5}t + 0.1752 \times 10^{-6}t^2 - 0.1485 \times 10^{-8}t^3 \\ &\quad + 0.5309 \times 10^{-11}t^4 - 0.6799 \times 10^{-14}t^5 \end{aligned}$$

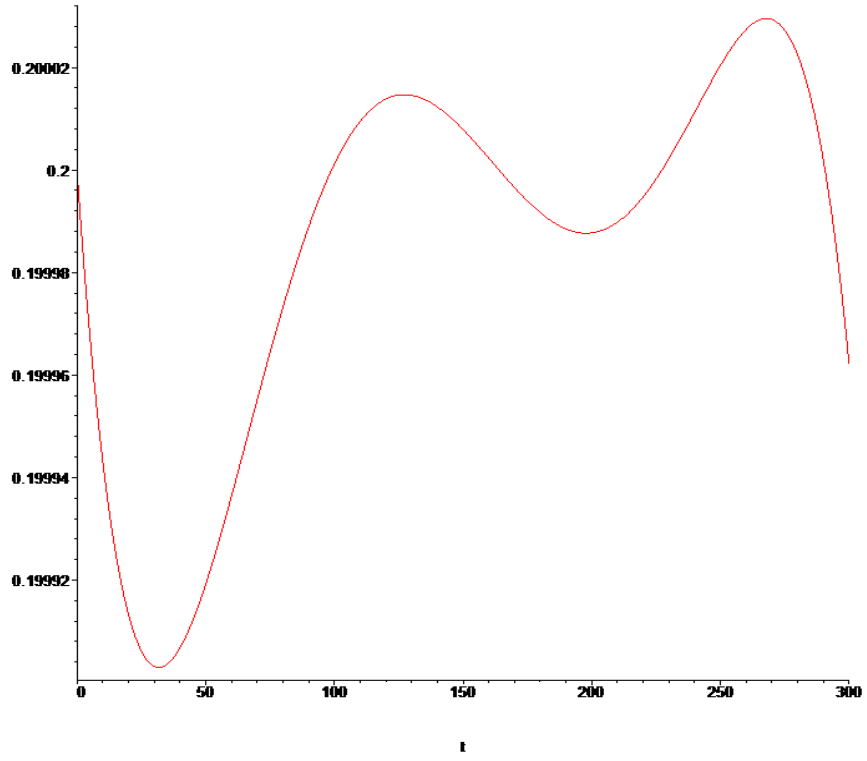
şeklinde elde edilir.

Şekil 4.21.-Şekil 4.24.'de sırasıyla $y_{1,5}(t)$, $y_{2,5}(t)$, $y_{1,7}(t)$ ve $y_{2,7}(t)$ yaklaşık çözümlerinin grafikleri verilmiştir. Şekil 4.21.-Şekil 4.24.'den sistemin $E^* = (0.9, 0.2)$ civarında salınım yaptığı gözlenmektedir. Çizelge 4.24.'de $N=5, 7$ için $E_{i,N}(t)$, $i=1, 2$ ile tanımlanan çözümlerin doğruluğu incelenmiştir. Çizelge 4.24., Şekil 4.25. ve Şekil 4.26.'dan $N=7$ için elde edilen sonuçların $N=5$ ile elde edilenlerden daha iyi olduğu görülmektedir. Şekil 4.27. ve Şekil 4.28.'de $N=5$ için (3.113) ve (3.114) denklemlerinin çözümleri olan $e_{1,10}^*$ ve $e_{2,10}^*$ mutlak hata tahminlerinin grafikleri yer almaktadır.

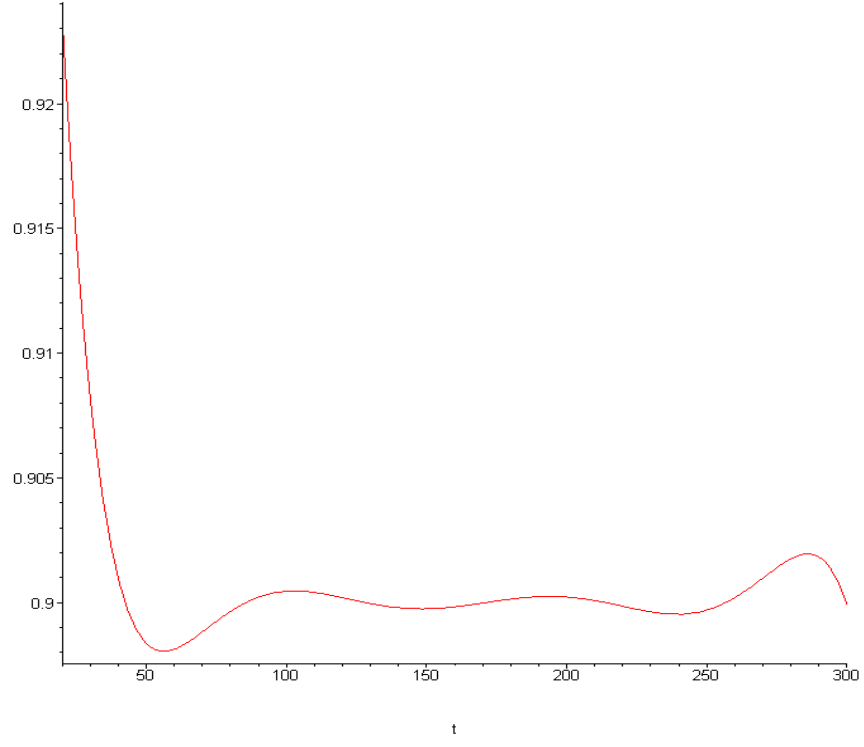
Ayrıca, Şekil 4.29. ve Şekil 4.30.'da iyileştirilmiş Taylor seri çözümlerinin ($y_{i,5} + e_{i,10}^*$, $i=1, 2$) ve yaklaşık çözümlerin doğrulukları kıyaslanmıştır.



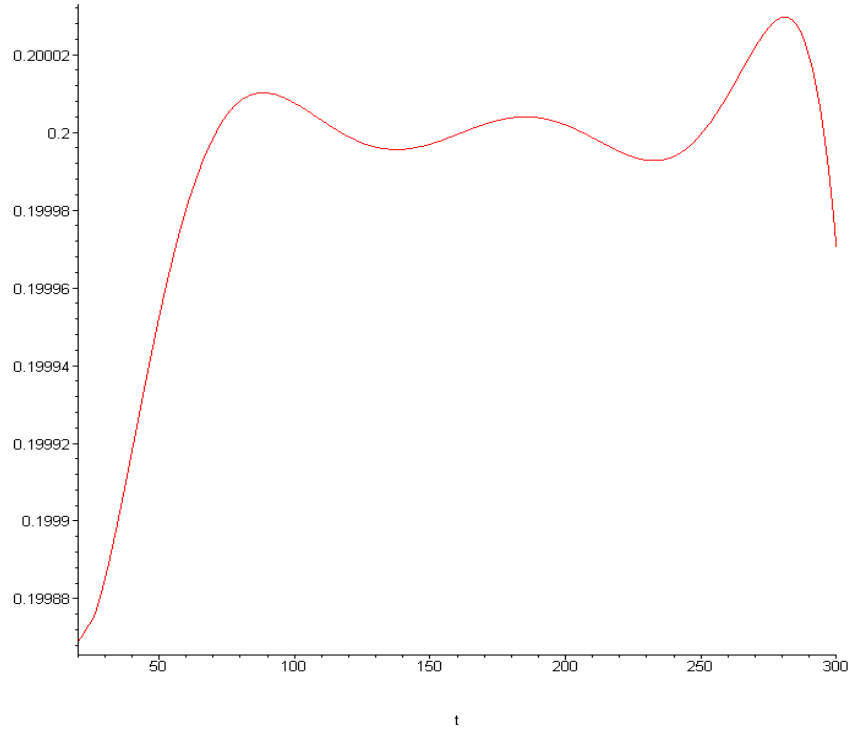
Şekil 4.21. Örnek 4.5.1'in $y_{1,5}(t)$ yaklaşık çözümü



Şekil 4.22. Örnek 4.5.1'in $y_{2,5}(t)$ yaklaşık çözümü



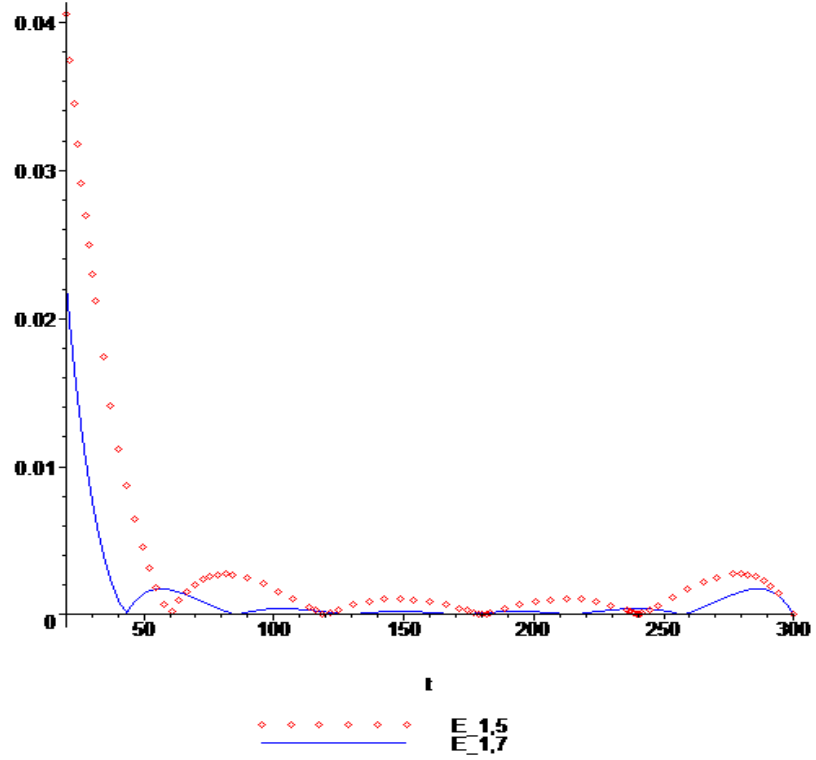
Şekil 4.23. Örnek 4.5.1'in $y_{1,7}(t)$ yaklaşık çözümü



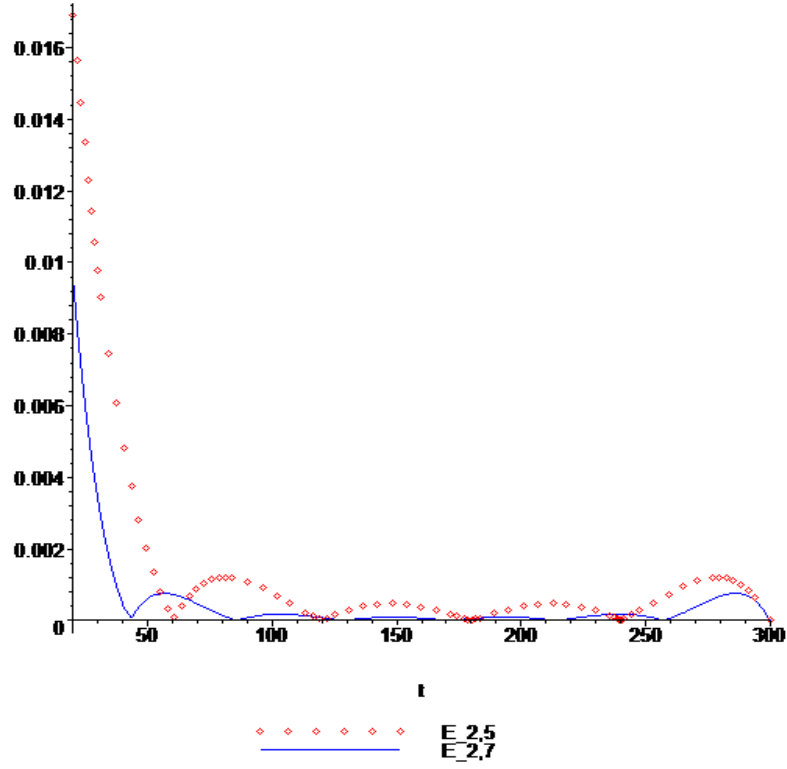
Şekil 4.24. Örnek 4.5.1'in $y_{2,7}(t)$ yaklaşık çözümü

Çizelge 4.24. Örnek 4.5.1'in $N = 5, 7$ değerleri için çözümlerinin doğruluğu

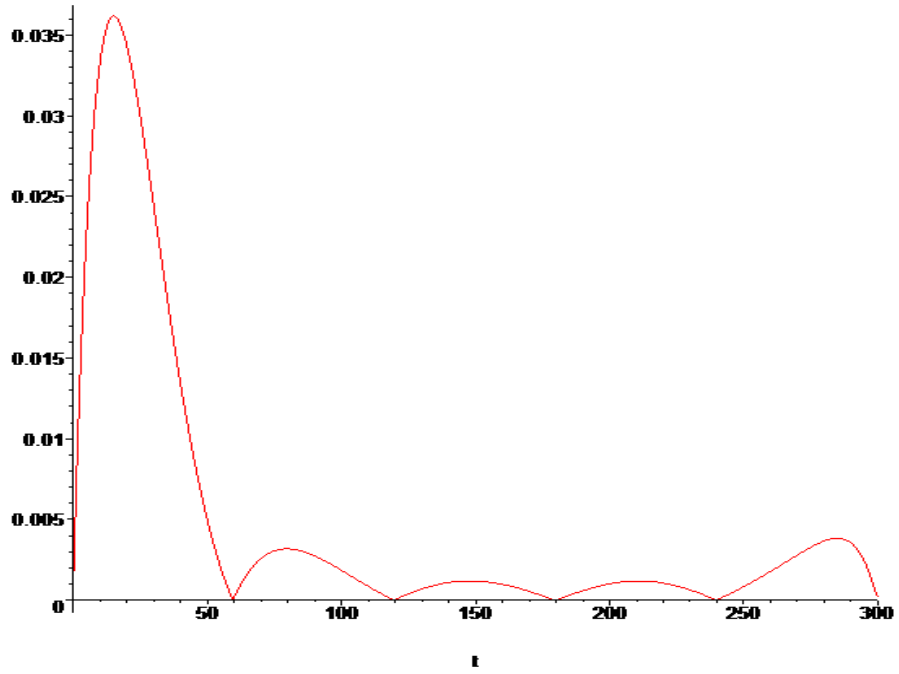
Present method				
t_i	$E_{1,5}(t_i)$	$E_{1,7}(t_i)$	$E_{2,5}(t_i)$	$E_{2,7}(t_i)$
30	0.023154277153	0.7874583 e-002	0.9840775 e-002	0.3372462 e-002
70	0.2102181 e-002	0.1085162 e-002	0.9218143 e-003	0.4705019 e-003
110	0.8462340 e-003	0.3746960 e-003	0.3706696 e-003	0.1621563 e-003
130	0.6418742 e-003	0.2873249 e-004	0.2806356 e-003	0.1244019 e-004
170	0.4907989 e-003	0.2197137 e-004	0.2145844 e-003	0.9513372 e-004
230	0.6408559 e-003	0.3306055 e-003	0.2806183 e-003	0.1431919 e-003
260	0.1759777e-002	0.1589577 e-003	0.7684206 e-003	0.6881750 e-004
280	0.2769076e-002	0.1574326 e-002	0.1207487 e-002	0.6804457 e-003



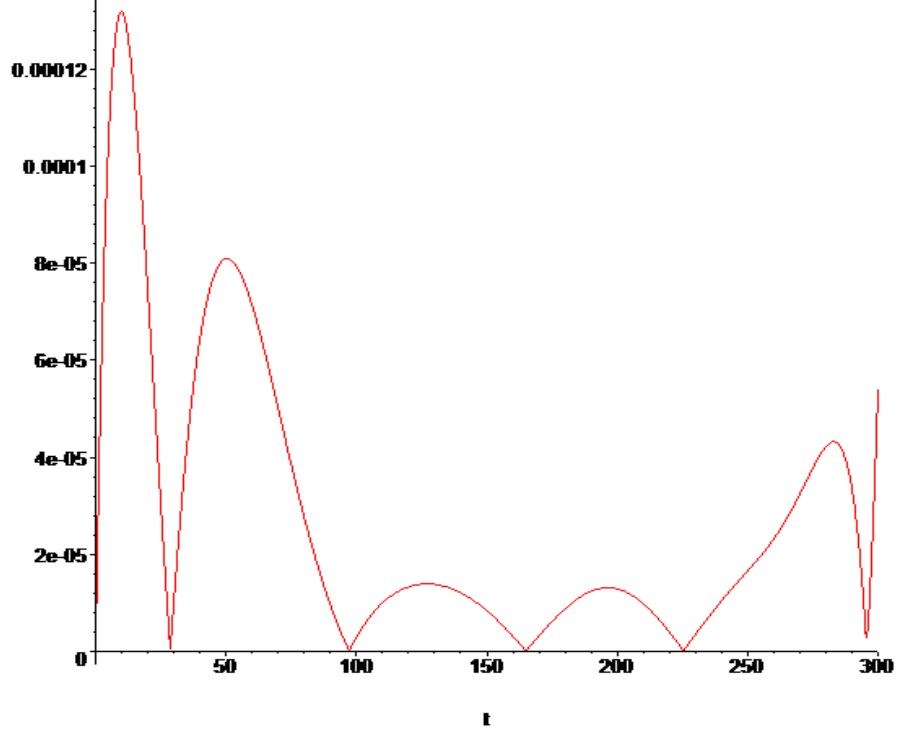
Şekil 4.25. Örnek 4.5.1'in $y_{1,N}(t)$, $N = 5, 7$ yaklaşık çözümü için $E_{1,N}(t)$ ile tanımlı çözümlerin doğruluklarının karşılaştırılması



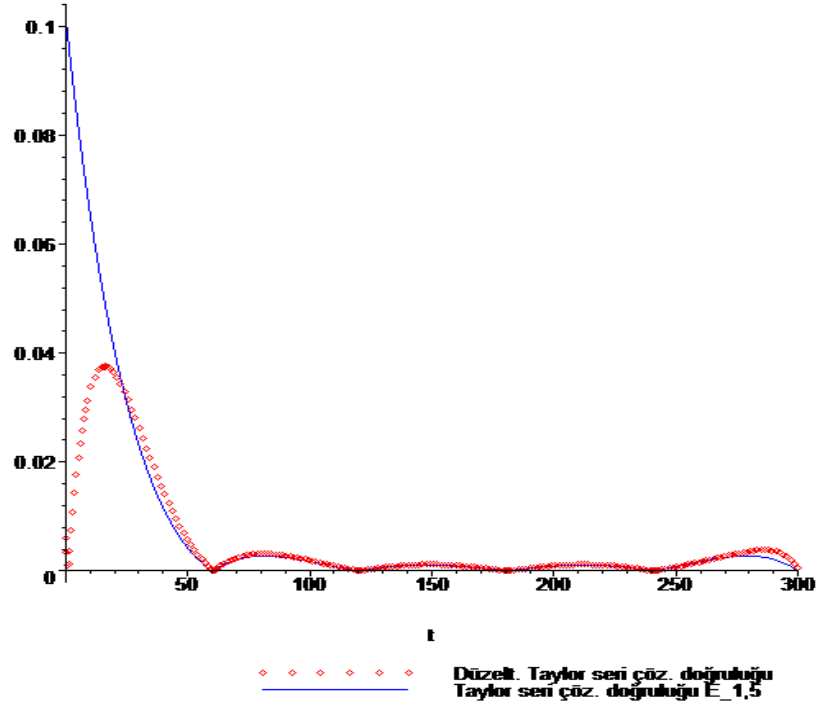
Şekil 4.26. Örnek 4.5.1'in $y_{2N}(t)$, $N = 5, 7$ yaklaşık çözümü için $E_{2,N}(t)$ ile tanımlı çözümlerin doğruluklarının karşılaştırılması



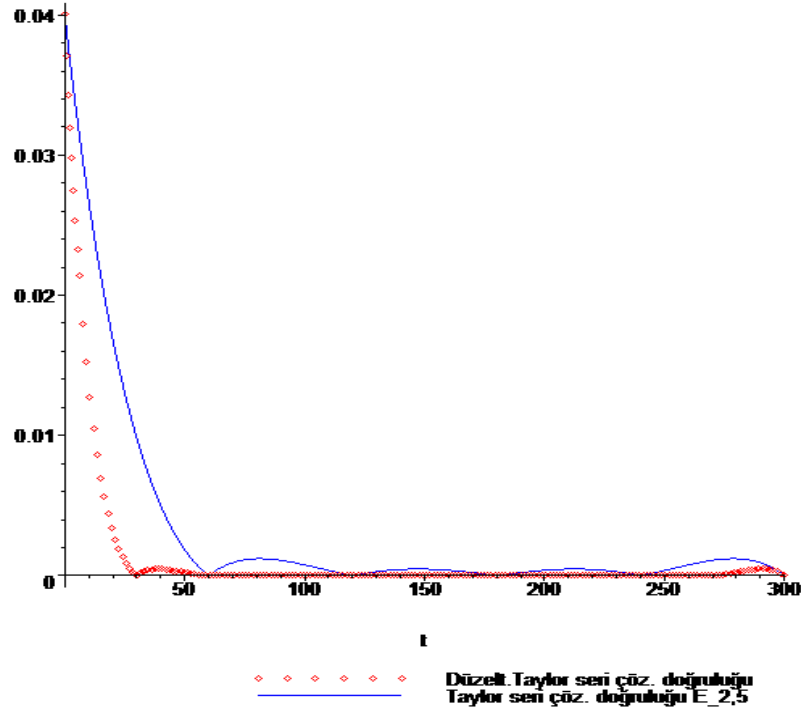
Şekil 4.27. Örnek 4.5.1'in $m = 10$ için $e_{1,5}$ mutlak hata tahmini



Şekil 4.28. Örnek 4.5.1'in $m = 10$ için $e_{2,5}$ mutlak hata tahmini



Şekil 4.29. Örnek 4.5.1'in $y_{1,5}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu



Şekil 4.30. Örnek 4.5.1'in $y_{2,5}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu

Şekil 4.29. ve Şekil 4.30.'dan görüleceği üzere iyileştirilmiş Taylor seri çözümlerinin doğruluğu, Taylor polinom çözümlerinin doğruluğuna kıyasla daha iyidir.

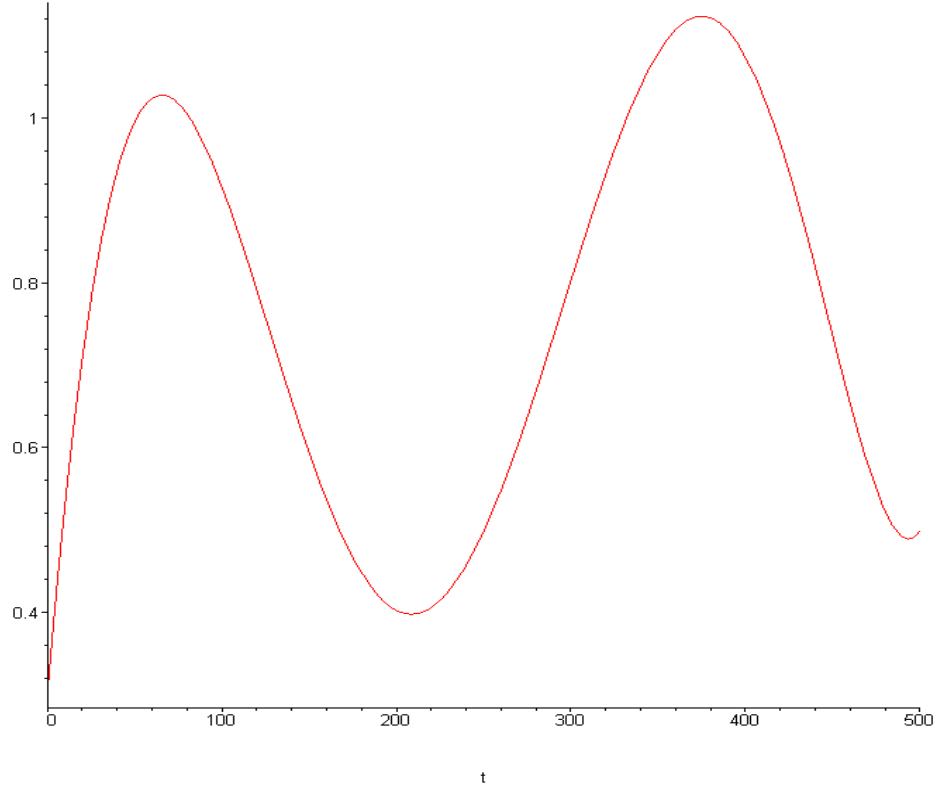
Örnek 4.5.2. (Song ve Wei, 2005) Bu bölümün son örneği olarak $y_1(0) = 0.3$, $y_2(0) = 0.9$ başlangıç koşulları altında

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)[1 - y_1(t-2) - y_2(t)], \\ y_2'(t) = y_2(t)[-1 + 3y_1(t) - y_2(t)], \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 500$$

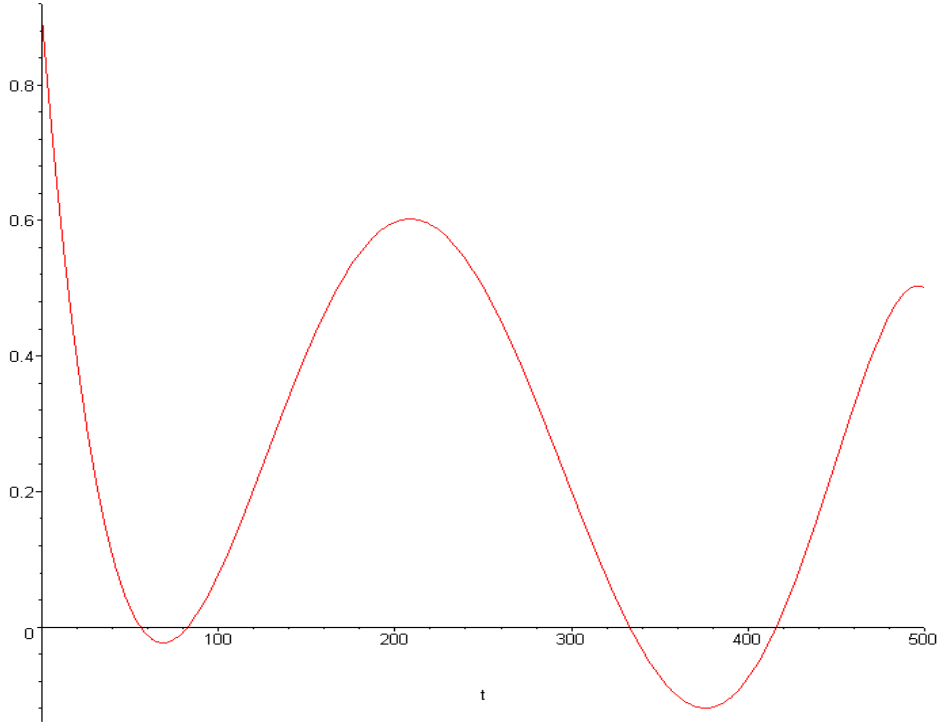
$E^* = (0.5, 0.5)$ pozitif denge noktasına sahip sistemi ele alalım.

Bölüm 3.5 de sunulan yöntem $N = 6$ için uygulandığında, Şekil 4.31. ve Şekil 4.32.'de verilen Taylor polinom çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşık çözümlerin grafiklerinden türlerin denge noktası civarında hareket ettiği gözlenmektedir.

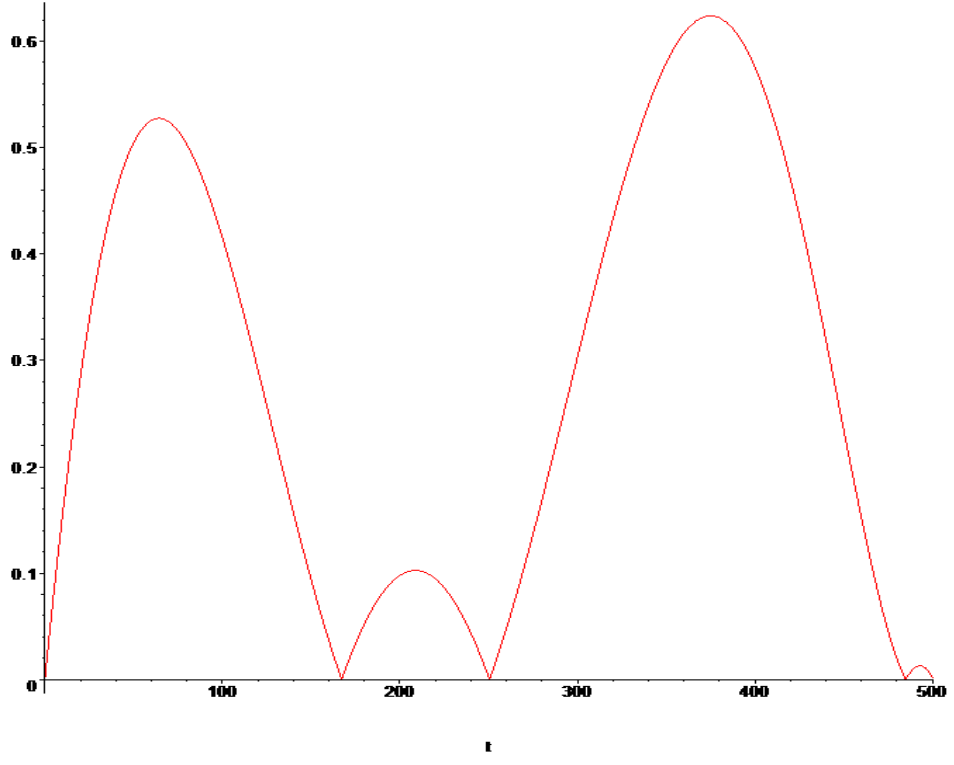
(3.113) ve (3.114) denklemlerinin çözümleri olan $e_{1,8}^*$ ve $e_{2,8}^*$ mutlak hata tahminlerinin $N = 6$ için grafikleri Şekil 4.33. ve Şekil 4.34.'de verilmiştir.



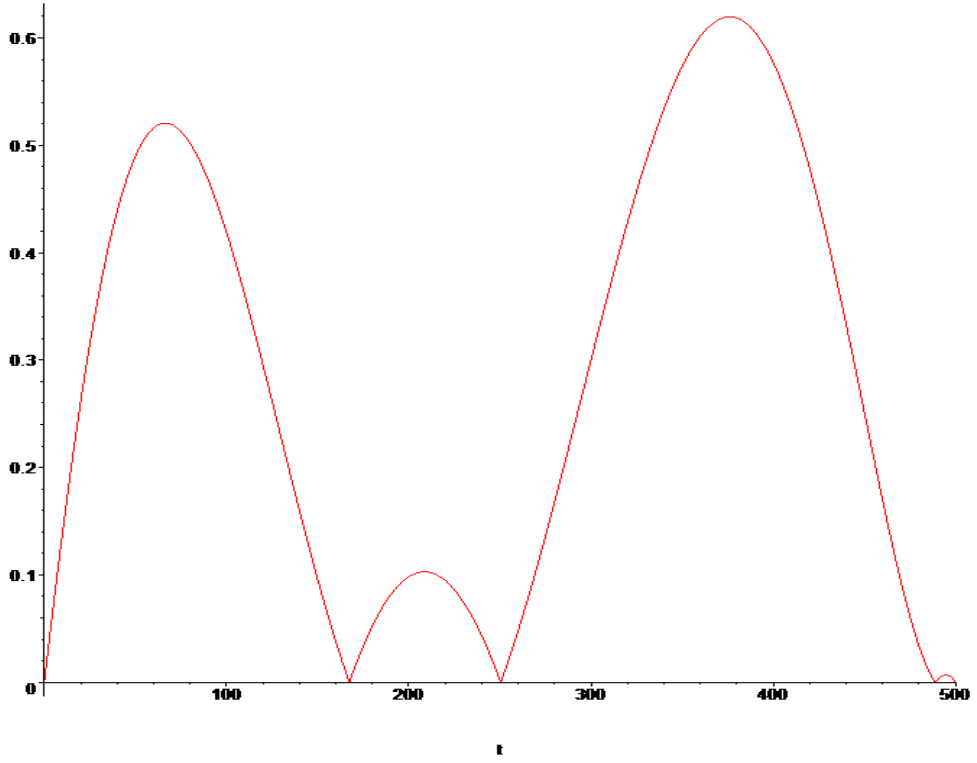
Şekil 4.31. Örnek 4.5.2'nin $y_{1,6}(t)$ yaklaşık çözümü



Şekil 4.32. Örnek 4.5.2'nin $y_{2,6}(t)$ yaklaşık çözümü

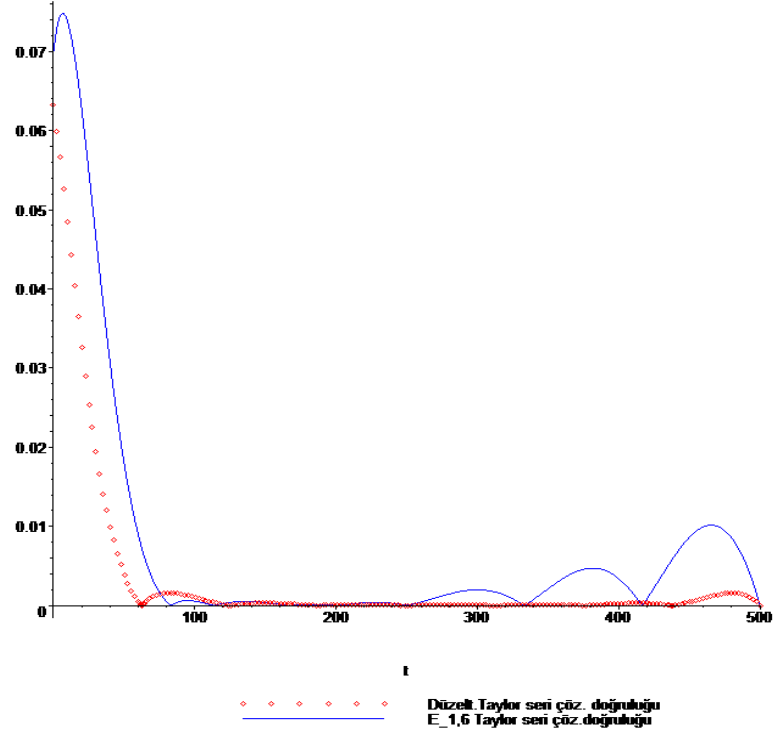


Şekil 4.33. Örnek 4.5.2'nin $m = 8$ için $e_{1,6}$ mutlak hata tahmini

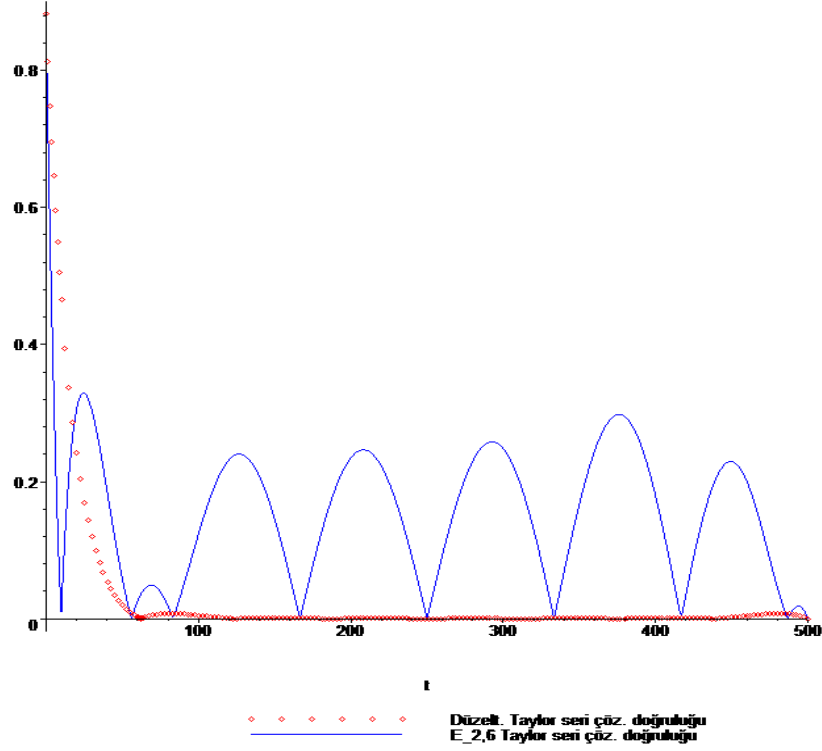


Şekil 4.34. Örnek 4.5.2'nin $m = 8$ için $e_{2,6}$ mutlak hata tahmini

$N = 6$ için iyileştirilmiş Taylor seri çözümleri ile yaklaşık çözümlerin doğruluğu Şekil 4.35. ve Şekil 4.36.'da grafiklerle sunulmuştur.



Şekil 4.35. Örnek 4.5.2'nin $y_{1,6}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu



Şekil 4.36. Örnek 4.5.2'nin $y_{2,6}(t)$ Taylor seri çözümünün ve iyileştirilmiş Taylor seri çözümünün doğruluğu

Şekil 4.35. ve Şekil 4.36.'dan görüleceği üzere iyileştirilmiş Taylor seri çözümlerinin doğruluğu, Taylor polinom çözümlerinin doğruluğuna kıyasla daha iyidir.

Bu bölümde verilen sayısal örnekler incelendiğinde, her iki örnekte de yaklaşık çözümlerin E^* denge noktası civarında salınım yaptığı gözlenmiştir. Kalan doğrulama (residual correction) prosedürü uygulandığında, mutlak hatalar tahmin edilebilmektedir. Üstelik, herhangi bir norm için minimum mutlak hatayı veren optimal N belirlenebilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezin amacı, yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklem sistemleri ile biyoloji, ekoloji, tıp alanlarında sıkça karşılaşılan lineer olmayan fonksiyonel denklem sistemleri için Taylor polinomuna dayalı sıralama yöntemi oluşturarak sistemlerin Taylor seri çözümlerini bulmaktır. Sunulan metodun her sistem için hata hesabı yapılmış ve çözümlerin doğruluğu incelenmiştir. Ayrıca, sistemlerin tam çözümlerinin bilinmediği durumlar için kalan doğrulaması (residual correction) prosedürü verilmiştir. İncelenen problemler sonucunda, Taylor matris metodun avantajları ve dezavantajları şu şekilde sıralanabilir:

1. Yöntem hem yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklem sistemlerine hem de lineer olmayan fonksiyonel modellere kolayca uygulanabilmektedir.
2. Taylor matris metodunda en iyi yaklaşımı elde edebilmek için N kesme sınırının tayini büyük önem taşımaktadır. N 'nin küçük alınması durumunda bulunan çözüm istenilen doğrulukta olmayabilir. N 'nin çok büyük seçilmesi durumunda da bilgisayarda işlem yükü artacağından, bilgisayar programları daha yavaş sonuç vermektedir. N değeri yeteri kadar büyük seçilmesi durumunda, çözüme o kadar iyi yaklaşım sağlanır.
3. Sistemin $y_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ tam çözümlerinin polinom olması durumunda, yöntemin kesme sınırı $N \geq \deg(y_i(t))$ seçildiğinde, tam çözüm elde edilir.
4. Bilgisayar yuvarlama hatalarını azaltmak için işlem basamak sayısının (digits) yüksek seçilmesi önemlidir.
5. Tam çözümün bilinmediği durumlarda, kalan doğrulaması (residual correction) verilen sistemler için düzenlenerek, hata tahmini yapılabilir. Üstelik, bu prosedür ile minimal mutlak hatayı veren optimal N hesaplanır.

Bu yöntem daha sonraki çalışmalar için, farklı viskoelastik sistemlere ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanabilir. Ayrıca sıralama metodunda farklı rasyonel fonksiyonlar kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abdelrahman, M., Moore, K. L. ve Naudi, D. S. (1996) Generalized Smith Predictor for Robust Control of Nuclear Reactors with Time Delays, *Proc. of the ANS International Topical Meeting on Nuclear Plant Instrumentation*, Pittsburg, PA, 1-6.
- Akyüz, A. ve Sezer, M. (2003) Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients, *Appl. Math. and Comput*, 144: 237-247.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A. ve Sezer, M. (2007) A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument, *Journal of Comput. and Appl. Math.*, 200: 217-25.
- Asl, F.M. ve Ulsoy, A.G. (2003) Analysis of a system of linear delay differential equations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125: 215-223.
- Babolian, E. ve Biazar, J. (2002) Solving the problem of biological species living together by Adomian decomposition method, *Applied Math. and Comput*, 129: 339-343.
- Bellen, A. ve Zennaro, M. (2003) *Numerical Methods for Delay Differential Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation Series*, Oxford Science Publication, 412s.
- Bellman, R. ve Cooke, K.L. (1963) *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 478s.
- Beypinar, S. (2005) *İkinci Mertebeden Neutral-Delay Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 118s.
- Boole, G. (1980) *D.C.L Calculus of Finite Differences*, Chelsra Publishing Company, New York.
- Brelot, M. (1931) Sur le probl'eme biologique h'er'editaire de deux espec'es d'evorante et d'evor'ee, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 9: 58-74.
- Bülbül, B. (2011) *İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri*, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 88s.

- Bülbül, B., Gülsu M. ve Sezer M. (2010) A new Taylor collocation method for nonlinear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *Numer. Meth. Part. Dif. Equ.*, 26 (5): 1006-1020.
- Caberlin, M.D. (2002) *Stiff Ordinary and Delay Differential Equations in Biological Systems*, Phd thesis, McGill University, Department of Mathematics and Statistics, Montreal.
- Corless, R., Gonnet, G.H., Hare, D., Jeffrey, D. ve Knuth D. (1996) On the Lambert ω function, *Advanced Computational Mathematics*, 5: 329 – 359.
- Cushing, J.M. (1977) *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Çelik, I. (2005) Approximate calculation of eigenvalues with the method of weighted residuals-collocation method, *Appl. Math. and Comput.*, 160 (2): 401–410.
çözümleri, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 88s.
- Dai, L. S. (1981) Nonconstant periodic solutions in predator-prey systems with continuous time delay, *Math. Biosci.*, 53: 149-157.
- Davies, A. ve Crann, D. (1999) The solution of differential equations using numerical Laplace transforms, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 30: 65-79.
- Dehghan M. ve Lakestani, M. (2008) Numerical solution of nonlinear system of second-order boundary value problems using cubic B-spline scaling funtions, *Inter. Journal of Comput. Math.*, 85 (9): 1455-1461.
- Dehghan, M. ve Saadatmandi, A. (2007) The numerical solution of a nonlinear system of second-order boundary value problems using the sinc-collocation method, *Math. Comput. Modelling*, 46: 1434–1441.
- Driver, R. D. (1977) *Ordinary and Delay Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 498s.
- El'sgol'ts, L.E. ve Norkin, S.B. (1973) *An Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 375s.
- El'sgot's, L. E. (1964) *Qualitative Methods in Mathematical Analysis*, American Mathematical Society 12, Providence, Rhode Island.
- Evans, D.J. ve Raslan, K.R. (2005) The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.*, 82: 49–54.
- Falbo, E. (1995) Analytic and numerical solutions to the delay differential equations, *Joint Meeting of the Northern and Southern California Sections of the MAA*, San Luis Obispo, CA.

- Farkas, A., Farkas M. ve Szabó, G. (1988) Multiparameter bifurcation diagrams in predator-prey models with time lag, *J. Math. Biol.*, 26, 93-103.
- Geng, F. (2007) M. Cui, Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 327: 1167–1181.
- Gopalsamy, K. (1992) *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers Netherlands, 507s.
- Gorecki, H., Fuska S., Grabowski P. ve Korytowski A. (1989) *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley and Sons, PWN-Polish Scientific Publishers-Warszawa.
- Gökmen, E. ve Sezer, M. (2013a) Taylor collocation method for systems of high order linear differential-difference equations with variable coefficients, *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 117-125.
- Gökmen, E. ve Sezer, M. (2013b) Taylor collocation method for nonlinear system of second-order boundary value problems, *Düzce University Journal of Science & Technology*, 1: 11-24.
- Gülsu, M. ve Sezer, M. (2005) The approximate solution of high-order linear difference equation with variable coefficients in terms of Taylor polynomials, *Appl. Math. Comput.*, 168: 76–88.
- Günel, K. (2006) *Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın, 100s.
- Güney Z. (1989) *Gecikmeli Diferansiyel Denklemler Üzerine*, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 45s.
- Hale, J. (1987) *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 238s.
- Heffernan, J. M. ve Corless, R. M. (2005) Solving Some Delay Differential Equations with Computer Algebra, *Applied Probability Trust*.
- Ismail, F. ve Suleiman, M. (2001) Solving delay differential equations using intervalwise partitioning by Runge-Kutta method, *Appl. Math. And Comput.*, 121: 37-53.
- Ismail, F., Al-Khasawneh, R.A. ve Suleiman, M. (2003) Comparison of interpolations used in solving delay differential equations by Runge-Kutta method, *Intern. Journal of Computer Math.*, 80 (7): 921–930.
- Karamete, A. ve Sezer, M. (2002) A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations. *Int. J. Comput. Math.*, 79, (9): 987-1000.

- Kemancı, B. (2007) *Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 131s.
- Kolmonovskii V. ve Myshkis A. (1999) *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 666s.
- Krall, A. M. (1964) On the Real Parts of Zeros of Exponential Polynomials, *Bull. American Math. Soc.* , 70 (2): 291-292.
- Kuang, Y. (1993) *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, vol. Boston. Academic Press, 400s.
- Kurt, N. ve Sezer M. (2008) Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, *J. Franklin Ins.*, 345 (8): 839–850.
- Lambert, J. H. (1758) *Observationes Varie in Mathesin Puram, Acta Helvetica, Physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, 3: 128-168.
- Lu, J. (2007) Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems, *Comput. and Math. with Appl*, 54: 1133–1138.
- MacDonald, N. (1978) *Time lags in biological models*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Mason, J.C. ve Handscomb, D.C. (2003) *Chebyshev Polynomials*, Chapman ve Hall/Crc., Washington, 341s.
- May, R. M. (1973) Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels, *Ecology*, 4: 315-325.
- Moralı, S. (1988) *Diferansiyel Denklemler*, Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Basım Ünitesi, İzmir.
- Nas, Ş., Yalçınbaş, S. ve Sezer, M. (2000) A Taylor Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 31 (2): 213-225.
- Olgaç, N., Elmalı, H., Hosek, M. ve Renzulli, M. (1997) Active Vibration Control of Distributed Systems Using Delayed Resonator With Acceleration Feedback, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 119: 380-389.
- Oliveira, F. A. (1980) Collocation and residual correction, *Numer. Math.*, 36: 27–31.
- Parand, K. ve Razzaghi, M. (2004) Rational Chebyshev tau method for solving Volterra's population model, *Applied Math. and Comput*, 149: 893-900.

- Philips, G.M. (2003) *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, New York, 312s.
- Quarteroni, A., Sacco, R. ve Saleri, F. (2007) *Numerical Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 339s.
- Ramadan, M.A. (2005) Spline solution of first order delay differential equation, *J. Egyptian Math. Soc.*, 1: 7–18.
- Ramadan, M.A., El-Sherbeiny, A.A. ve Sheriff, M.N. (2006) Numerical solution of system of first order delay differential equations using spline functions, *Int. J. Comput. Math.*, 83 (12) :925–937.
- Ramadan, M.A., El-Sherbeiny, A.A. ve Sheriff, M.N. (2009) The use of polynomial spline functions for the solution of system of second order delay differential equations, *Int. J. Comput. Math.*, 86 (7): 1167–1181.
- Ramos, J.I. (2005) Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations, *Appl. Math. Comput*, 161: 525–542.
- Ruan, S. (2009) On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay, *Math. Model. Nat. Phenom*, (4) 2: 140-188.
- Saadatmandi, A ve Farsangi, J. A. (2007) Chebyshev finite difference method for a nonlinear system of second-order boundary value problems, *Appl. Math. Comput*, 192 (2): 586-591.
- Saadatmandi, A. ve Dehghan, M. (2009) Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation, *Comput. Math. Appl.*, 58: 2190–2196.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M. ve Eftekhari, A. (2009) Application of He's homotopy perturbation method for non-linear system of second order boundary value problems, *Nonlinear Analy: Real World Appl*, 10: 1912-1922.
- Saaty, T.L. (1981) *Modern Nonlinear Equations*, New York, 471s.
- Saaty, T.L. ve Bram J. (1964) *Nonlinear Mathematics*, Mc Graw Hill Book Company, New York.
- Sezer, M. (1994) Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 25 (5): 625-633.
- Sezer, M. (1996) A method for approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 27 (6): 821-834.

- Sezer, M. ve Akyüz-Daşcıoğlu, A. (2006) Taylor polynomial solutions of general linear differential–difference equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 174: 1526–1538.
- Sezer, M., Gülsu, M. ve Tanay, B. (2006) A matrix method for solving high-order linear difference equations with mixed argument using hybrid Legendre and Taylor polynomials, *J. Franklin Ins.*, 343 (6) : 647-659.
- Sezer, M., Karamete, A. ve Gülsu, M. (2005) Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients. *Int. J. Comput. Math.*, 82 (6): 755-764.
- Shahmorad, S. (2005) Numerical solution of the general form linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by The Tau method with an error estimation, *Appl. Math. and Comput.*, 167: 1418-1429.
- Shakeri F. ve Dehghan M. (2008) Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 48: 685-699.
- Shakeri, F. ve Dehghan, M. (2008) Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method, *Math. Comput. Modelling*, 48 (3–4): 486–498.
- Shakeri, F. ve Dehghan, M. (2010) Application of the decomposition method of Adomian for solving the pantograph equation of order m , *Z. Naturforsch.*, 65a: 453–460.
- Simon, L. (2008) *An Introduction to Multivariable Mathematics*, Morgan and Claypool Publishers, Stanford University, 121p.
- Song Y. ve Wei J. (2005) Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system, *Jour. of Math. Analy. and Appl.*, 301: 1-21.
- Thangmoon, M. ve Pusjuso, S. (2010) The numerical solutions of differential transform method and Laplace transform method for a system of differential equations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4: 425-431.
- Volterra, V. (1926) Variazioni e fluttazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Mem. Acad. Sci. Lincei*, 2: 31-113.
- Volterra, V. (1931) *Lecons sur la the'orie mathematique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris.
- Wazwaz, A.M. (2002) A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations, *Appl. Math. Comput*, 128: 45–57.

- Willé, D.R. ve Baker, C.T.H. (1992) DELSOL—a numerical code for the solution of systems of delay-differential equations, *Appl. Numer. Math.*, 9: 223–234.
- Wright, E. M. (1946) The Non-Linear Difference-Differential Equation, *Quart J. Math.*, 17: 245 – 252.
- Yalçınbaş, S. (2002) Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equation, *Appl. Math. Comput.*, 127 (2): 196-206.
- Yeniçerioglu, F. (2005) *Feedback kontrollü Neutral delay diferansiyel denklemler*, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 99s.
- Yousefi, S. A. (2011) Numerical Solution of a Model Describing Biological Species Living Together by Using Legendre Multiwavelet Method, *International Journal of Nonlinear Science*, 11: 109-113.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Yıldırım, A. (2011) Numerical solutions of systems of high-order linear differential-difference equations with Bessel polynomial bases, *Zeitschrift für Naturforschung A, A Journal of Physical Sciences*, 66a: 519-532.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. (2012) A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations, *Numer. Meth. Part. Dif. Equ.*, 28 (4): 1105-1123.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Elçin Gökmen
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Marmaris/MUĞLA 13/07/1980
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 532 340 5039
E-posta : egokmen@mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Marmaris Sabancı Lisesi	1998
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2003
Yüksek Lisans	Muğla Üniversitesi	2008

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2005-	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma			X
Konuşma		X	
Anlama		X	
Okuma			X

Yayınlar

1. **Gökmen, E.**, Sezer, M. (2013) Taylor collocation method for systems of high order linear differential-difference equations with variable coefficients, *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 117-123.

2. Esteves, S., **Gökmen E.**, Oliveira J.J. (2013) Global exponential stability of nonautonomous neural network models with continuous distributed delays, *Applied Mathematics and Computation*, 219: 9296-9307.

3. **Gökmen E.**, Sezer, M. (2013) Taylor Collocation Method for Nonlinear System of Second-Order Boundary Value Problems, *Düzce University Journal of Science & Technology*, 1: 11–23.

Bildiriler

1. Atmaca M., **Gökmen E.**, Atmaca P.S. ‘Zaman Lojiğindeki Teoremlerin Lattice Teorisinde Yorumları Aynı mıdır?’, 20. Ulusal Matematik Sempozyumu, 3-6 Eylül 2007, Erzurum.

2. **Gökmen E.**, Sezer M. ‘Approximate Solution of a Model Describing Biological Species Living Together by Taylor Collocation Method’, 1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 3-7 Eylül 2012, Piriştine/ KOSOVO.

3. **Gökmen E.**, Sezer M. ‘Taylor Collocation Approach for Delayed Lotka-Volterra Predator-Prey System’, 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 26-29 Ağustos 2013, Saraybosna/ BOSNA HERSEK.

Burslar

1. Erasmus LLP (2011) Eylül 2011- Ocak 2012 Portekiz, Minho University.

2. Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Rektörlüğü Uluslararası Yayın Teşvik Ödülü (2013).

3. Tübitak Yayın Teşvik Ödülü Aralık 2013.