

17252

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZİNCİR İZOLATÖRLERDE ELEKTRİK ALAN
DAĞILIMININ İNCELENMESİ**

Mehmet CEBECİ

DOKTORA TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

1991
ELAZIĞ

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZİNCİR İZOLATÖRLERDE ELEKTRİK ALAN
DAĞILIMININ İNCELENMESİ**

Mehmet CEBECİ

DOKTORA TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

Bu Tez, Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği / Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

(İmza)

Danışman

Prof. Dr. Sefa Akpınar

(İmza)

(İmza)

ÖZET

Doktora Tezi

**ZİNCİR İZOLATÖRLERDE ELEKTRİK ALAN
DAĞILIMININ İNCELENMESİ**

Mehmet CEBECİ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

1991, Sayfa: 123

Bu tezde, Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla yüksek gerilim hatlarında kullanılan zincir izolatörlerin elektrik alan dağılımları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, deneysel çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Bu amaçla önce, çalışmanın literatürdeki ve uygulamadaki yeri araştırılmıştır. Ayrıca Sonlu Elemanlar Yönteminin özellikleri, elektrik alan problemlerinin çözümünde sağladığı üstünlükler ve çözüm bölgesini otomatik olarak bölmelemenin gerekliliği incelenmiştir. Açık sınırlı alan özelliği gösteren izolatör problemlerinde, sınır şartlarının uygulanması esnasında ortaya çıkan sorunlar belirlenmiştir.

Daha sonra, çevre şartlarından dolayı izolatör yüzeyinde oluşan kir tabakası iletkenliğini içeren kompleks dielektrik sabiti tanımlanmış ve

hesaplara nasıl katılacağı gösterilmiştir. İzolatörlerin, statik ve dinamik elektrik alan dağılımlarının hesabı için kapasitif ve rezistif-kapasitif eşdeğer devre modelleri elde edilerek Sonlu Elemanlar Yöntemi, bu modellere uygulanmıştır.

Çözüm bölgesine ilişkin verilerin otomatik olarak üretimi için yapılan çalışmalar sonucunda, izolatörler gibi eğrisel kenarlı teçhizatın kenarlarına iyi bir şekilde uyum sağlayan bir bölmeleme tekniği ve buna ilişkin otomatik veri üretim programı geliştirilmiştir. Program, sistem denklemlerinin küçük bir band genişliğine sahip olmasını sağlayacak şekilde üretilen verileri düzenlemektedir. Ayrıca bu program yardımıyla zincir izolatör, çubuk izolatör, parafudr gibi üst üste gelen elemanları veya bölümleri, aynı şekil ve yapıya sahip olan malzemelere ilişkin çözümlerde, malzemenin elemanlarından biri veya bir bölümü için hazırlanan küçük bir başlangıç bilgisinden, çözüm bölgesine ilişkin tüm veriler üretilebilmektedir.

Zincir izolatörde, elemanları birleştiren metal bölge sınırlarında düğüm potansiyellerinin eşit olması şartı, sistem denklemlerine dahil edilerek çözümler elde edilmiştir. İki elemandan oluşan zincir izolatör için, bu sınır şartının uygulanmasında Lagrange çarpanları kullanılmıştır.

DeneySEL çalışmalar için iletken kağıt yönteminden yararlanılmıştır. Statik alan dağılımları elde edilen temiz zincir izolatörlerin deney ve bilgisayar sonuçları çizdirilerek, karşılaştırmalar yapılmıştır. Dinamik alan dağılımı hesaplanan kirli izolatörlere ilişkin bilgisayar sonuçları da ayrıca verilmiştir.

SUMMARY

Ph.D. Thesis

**THE INVESTIGATION OF ELECTRIC FIELD DISTRIBUTION
IN INSULATOR CHAINS**

Mehmet CEBECİ

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical and Electronics Engineering

1991, Page: 123

In this study, the electric field distribution has been computed in insulator chains employed in high voltage lines by using Finite Element Method (FEM). Theoretical results have been compared with the experimental results.

For this purpose, first the place of this work has been investigated in the application and the literature. Furthermore, the features of the FEM, superiority of the method in the solution of the electric field problems and the necessity of the automatic mesh generation have been analyzed. In the insulator problems showing a feature of open boundary, the problems arising in the application of the boundary conditions have been determined.

Then, the complex dielectric constant which includes the conductivity of the pollution film caused by environmental conditions has

been defined and how to take this constant into the calculations has been explained. The capacitive and the resistive-capacitive equivalent circuit models for the calculation of dynamic and static electric field distributions in the insulators have been obtained and then the FEM has been applied to these models.

As a result of studies, for the automatic generation of the data in the solution region, a mesh generation technique well-fitting to the sides of the curved boundary equipment such as insulators, and a data generation program related to this have been developed. The program organizes the generated data in order to make the band width of the resulting system equations narrow. Additionally, by using this program, the insulator units or sections are on the top of the others such as insulator chain, rod insulator, surge arrester in the solutions related with the materials which have a same shape and structures, all of the data in the solution region can be produced from a little initial information has been prepared for one of the units or one section.

In the insulator chain, the solutions have been obtained by inserting the condition that the node potentials are equal in the boundaries of the metal parts connecting the insulator units, into the system equations. For the insulator chain with two units, the Lagrange Multipliers are used to apply this boundary condition.

The conductive paper method has been employed for the experimental studies. The experimental and computer results of static field distribution obtained from clean insulators have been drawn and some comparative conclusions have been made. Additionally, the numerical results of dynamic field distribution computed have also been given for the polluted insulators.

TEŐEKKÖR

Bu tez alıőması ile ilgili temel bilgileri veren, yönlendiren, çalışma süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim, Sayın Prof.Dr.Sefa Akpınar'a yapmıő olduğu her türlü yardım ve katkılarından dolayı çok teőekkr ederim. Deėerli fikirlerinden istifade ettiğim ve ODTÜ Yüksek Gerilim laboratuvarında deneysel çalışma imkanı sağlayan Sayın Prof.Dr.Ahmet Rumeli'ye de Őükranlarımı arzederim.

Çalıőmalarım süresince bana büyük destek sağlayan Sayın Hasan Krm'e ve Bölümdeki diğer görev arkadaőlarına; bilgisayar konusundaki yardımlarından dolayı EBİM Daire Baőkanı Sayın İbrahim Uzun'a, Sistem Programcısı Sayın Mehmet Duranay'a ve bilgi işlem operatörlerine teőekkr ederim.

Ayrıca bu tezin meydana gelmesinde tüm emeėi geçenlere teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
1. GİRİŞ	1
1.1. Elektrik Alanlarını Hesaplama Yöntemleri	2
1.2. Elektrik Alanlarının Hesabında Sayısal Yöntemlerin Kullanımı	3
1.3. Alan İncelemelerinde Açık Sınırların Önemi	7
1.4. Otomatik Veri Üretimi	10
1.5. Bu Çalışmanın Amacı	12
2. YG İZOLATÖRLERİNDE KİRLENMENİN ETKİLERİ VE ELEKTRİK ALANLARININ HESABI İÇİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYON	14
2.1. Giriş	14
2.2. İzolatörler	17
2.2.1. İzolatörlerde Aranılan Temel Özellikler ve YG 'de Kullanılan İzolatör Tipleri	18
2.2.2. İzolatörlerde Kirlenme Atlaması	20
2.2.3. Kirlenme Atlaması İle İlgili Çalışmalar	23
2.3. Elektrik Alanlarının Hesabı	25
2.3.1. Statik Elektrik Alanlarının Hesabı	26
2.3.2. Dinamik Elektrik Alanlarının Hesabı	34
3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	38
3.1. Giriş	38
3.3. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh-Ritz Yöntemi	40
3.3. Galerkin Yöntemi	44

3.4.	Üçgen Elemanların Birleştirilmesi.....	47
3.5.	Alan Koordinatları ve Şekil Fonksiyonları İle İlgili Temel Özellikler	49
3.6.	Elektrik Alan Problemleri İçin Eşdeğer Devre Modelleri ve Sonlu Elemanlar Yöntemi	52
4.	OTOMATİK BÖLMELEME	57
4.1.	Genel Bilgi	57
4.2.	Otomatik Bölmeleme İçin Algoritma-I	57
4.3.	Otomatik Bölmeleme İçin Algoritma-II	65
5.	SINIR ŞARTLARI	79
5.1.	Giriş	79
5.2.	Dirichlet Tipi Sınır Şartı	79
5.3.	Neumann Tipi Sınır Şartı	79
5.4.	Karışık Tip Sınır Şartı	80
5.5.	Sonsuz Sınır Şartı	80
5.5.1.	Genel	80
5.5.2.	Dış Bölgelerin Modellenmesinde Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanılması	81
5.5.2.1.	Halka Bölgelerin Oluşturulması	81
5.5.2.2.	Eleman Çiftlerinin Birleştirilmesi	84
6.	PROGRAMLAMA	88
6.1.	Genel	88
6.2.	Ana Program	88
6.3.	Ana Programın İşlem Basamakları ve Akış Diyagramı	88

6.2.2. Başlangıç Şartlarının Denklemlerine Yerleştirilmesi	89
6.2.3. Denklem Sisteminin Elektrodlardan Başka Ara Metal Bölge Sınırlarında Eşit Potansiyelli Noktalar Elde Etmek Üzere Düzenlenmesi	93
6.2.3.1.Genel	93
6.2.3.2.Lagrange Çarpanlarının Kullanılması	94
6.2.3.3.Matrisin Eşit Potansiyelli Döğümlere Ait Satır ve Sütunlarında Operasyon Yapılması	97
6.3. Altprogramlar	98
6.3.1. Otomatik Veri Üretim Programı	98
6.3.1.1.Otomatik Veri Üretim Programının Temel Özellikleri	98
6.3.1.2.Band Yapının Oluşturulması	99
6.3.2. Matris Çözen Altprogramlar	100
7. DENEYSEL VE TEORİK SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI	105
7.1. Deneysel Çalışma	105
7.2. Sonuçların Karşılaştırılması	107
7.3. Kirli İzolatörlerin Eşpotansiyel Eğrileri İle İlgili Bilgisayar Sonuçları	113
8. SONUÇ	116
8.1. Deneysel ve Teorik Sonuçların Uyumu İle İlgili Genel Bir Değerlendirme	116
8.2. Müteakip Çalışmalar İçin Öneriler	117
YARARLANILAN KAYNAKLAR	119

SİMGELER

- A : Magnetik vektör potansiyel (wb/m).
- B : Magnetik akı yoğunluğu (wb/m²).
- D : Elektriksel akı yoğunluğu (C/m²).
- E : Elektrik alan şiddeti (V/m).
- E_d : Elektriksel delinmeye sebep olan alan şiddeti (V/m).
- E_{max} : Maksimum elektrik alan şiddeti (V/m).
- E_n : Birim vektör yönünde alan şiddeti (V/m).
- E_x, E_y, E_z : x, y, z yönlerindeki elektrik alan şiddetleri (V/m).
- ε, ε_o, ε_r : Mutlak, bağıl ve boşluk için dielektrik sabitleri (F/m).
- ε⁻, ε_r⁻ : Mutlak kompleks ve bağıl kompleks dielektrik sabitleri.
- F : Fonksiyonel.
- f : Frekans (Hz).
- φ : Potansiyel (V).
- ψ : Bir yüzeyden geçen elektrik akısı (C).
- J : Yüzeysel akım yoğunluğu (A/m²).
- ρ : Hacimsel yük yoğunluğu (C/m³).
- σ : Elektriksel iletkenlik (1/Ω m).
- σ_s : Yüzeysel deşarjın tutuştuğu andaki sıcak kir iletkenliği (1/Ω m).
- t : Zaman (s).
- ω : Açısal hız (rad/sn).
- Δ : Laplaci en operatörü.
- ∇ : Gradient operatörü.

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Bir elektrod sisteminde delinme ve atlama	15
Şekil 2.2 : Bir yalıtıcı silindir yüzeyinde atlama	17
Şekil 2.3 : Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı ..	28
Şekil 3.1 : Çözüm bölgesinin bölmelenmesi	39
Şekil 3.2 : İki üçgen eleman	47
Şekil 3.3 : Dört üçgen eleman	48
Şekil 3.4 : (a) Lineer, (b) Kuadratik ve (c) Kübik eleman	50
Şekil 3.5 : Alan ve kartezyen koordinat sistemleri arasındaki ilişki ..	51
Şekil 3.6 : İzoparametrik bölge	52
Şekil 3.7 : (a) ξ - η ve (b) normalize edilmiş koordinat sisteminde dörtgen eleman	53
Şekil 3.8 : Dörtgen bölgenin üçgen bölgeye dönüşmesi	54
Şekil 3.9 : (a) Üçgen eleman ile bölmeleme (b) kapasitif eşdeğer devre	55
Şekil 3.10: (a) Üçgen eleman ile bölmeleme (b) kapasitif-rezistif eşdeğer devre	56
Şekil 4.1 : Çözüm bölgesi içerisindeki bir üçgen eleman	58
Şekil 4.2 : Bir elemanın dört yeni elemana ayrıştırılması	58
Şekil 4.3 : Algoritma-I için akış diyagramı	60
Şekil 4.4 : Algoritma-I için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin başlangıç bölmelemesi	61
Şekil 4.5 : $NK=1$ için Silindir -düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi	62

Şekil 4.6 : N _{KI} =2 için Silindir -düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi	62
Şekil 4.7 : N _{KI} =3 için Silindir -düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi	63
Şekil 4.8 : Bir zincir izolatör elemanı	64
Şekil 4.9 : Zincir izolatör elemanının bölmelemesi	64
Şekil 4.10: Farklı M değerleri ile bir üçgen elemanın bölmelemesi	67
Şekil 4.11: Dairesel bölgenin bir üçgen ile bölmelemesi	68
Şekil 4.12: Dairesel bir bölgenin üçgen elemanlar ile bölmelemesi ...	69
Şekil 4.13: Algoritma-II için akış diyagramı	70
Şekil 4.14: Algoritma-II için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin başlangıç bölmelemesi	71
Şekil 4.15: M=2 için Silindir -düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=32, NPOIN=25)	71
Şekil 4.16: M=5 için Silindir -düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=200, NPOIN=121)	72
Şekil 4.17: M=8 için Silindir -düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=512, NPOIN=289)	72
Şekil 4.18: M=1 için zincir izolatör elemanına ait bölmeleme (NELEM=127, NPOIN=85)	73
Şekil 4.19: M=3 için zincir izolatör elemanına ait bölmeleme (NELEM=1143, NPOIN=634)	74
Şekil 4.20: M=2 için iki elemanlı izolatör zincirine ait bölmeleme (NELEM=900, NPOIN=518)	75
Şekil 4.21: M=3 için iki elemanlı izolatör zincirine ait bölmeleme (NELEM=1292, NPOIN=741)	76
Şekil 4.22: M=2 için VKNL 75/22 tipi çubuk izolatör	77

Şekil 4.23: M=2 için VKNL 75/22 tipi çubuk izolatörün bölmenmesi (NELEM=1512 , NPOIN=836)	78
Şekil 5.1 : R Bölgesini çevreleyen dış halka bölgeler	82
Şekil 5.2 : Simetrik durumlara uygulama	83
Şekil 5.3 : Dış alanların hesabı için akış diyagramı	87
Şekil 6.1 : Ana programın akış diyagramı	91
Şekil 6.2 : İzolatör zincirinde ara eşpotansiyel sınırları	94
Şekil 6.3 : DGELB 'in kullanımını sağlayan tek boyutlu dizinin oluşturulması için akış diyagramı	101
Şekil 6.4 : İki boyutlu ABDV dizisinin oluşturulması için akış diyagramı	103
Şekil 7.1 : İletken kağıt yöntemi ile potansiyel ölçülmesi.....	106
Şekil 7.2 : Tek izolatör elemanı için eşpotansiyel eğriler	108
Şekil 7.3 : Tek izolatör elemanı için deneysel olarak eşpotansiyel eğrilerin belirlendiği iletken kağıdın fotoğrafı	109
Şekil 7.4 : Sık bölmenmiş tek izolatör elemanı için eşpotansiyel eğriler	110
Şekil 7.5 : İki elemanlı zincir izolatör için eşpotansiyel eğriler	111
Şekil 7.6 : İki elemanlı zincir izolatör için deneysel olarak eşpotansiyel eğrilerin belirlendiği iletken kağıdın fotoğrafı	112
Şekil 7.7 : $\sigma=10^{-6}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri. a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu b) Üst kısmın 3 kat daha kirli olması durumu	113
Şekil 7.8 : $\sigma=10^{-5}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri. a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu	114

- Şekil 7.9 : $\sigma=10^{-2}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri.
a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu
b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu 114
- Şekil 7.10: $\sigma=10^{-5}$ S/m için iki elemanlı zincir izolatörün eğrileri.
a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu
b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu 115
- Şekil 7.11: $\sigma=10^{-2}$ S/m için iki elemanlı zincir izolatörün eğrileri.
a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu
b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu 115

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Modern güç sistemleri yüksek gerilimlerde çalışıp, üretim merkezlerinde elde edilen büyük miktarda gücü, enterkonnekte şebeke vasıtasıyla tüketim merkezlerine iletirler. Sistemin güvenilir işleyişini sağlamak için, iletim hatları ve ilgili cihazlar; yetersiz dizayn, malzeme bozuklukları veya çevresel kirlenmelerden meydana gelen başlangıç hataları gibi kötü özellikleri taşımamalıdır. İzolatörler, güç sisteminin böylesi istenmeyen durumlardan uzak tutulmasında ve elektrik gücünün sürekli ve emniyetli taşınmasını teminde önemli rol oynarlar. Ancak izolatörler; tasarım, imalat veya işletme esnasında, yukarıda bahsedilen kötü faktörlerden tamamen arındırılmamakta ve özellikle izolasyon kirliliği ve yıldırım darbeleri gibi çevre etkilerine karşı mukavemet edememektedirler.

İzolasyon kirliliği, YG (Yüksek Gerilim) izolatörlerinde yüzeysel atlama yoluyla sık sık kısa devre arızaları meydana getirir. Bu durum sahil ve endüstriyel bölgelerdeki YG izolatörlerinde görülen en önemli işletme problemidir. Çünkü bu bölgelerde izolatörlerin yüzeyleri birçok faktörlerin etkisiyle, homojen dağılımlı olmayan kir tabakası ile kaplanmaktadır. Kir tabakasının kuru olması halinde yüzeysel atlama meydana gelmez. Sadece küçük bir kapasitif kaçak akım mevcut olup, elektrik alan dağılımı statik alan dağılımı şeklindedir. Eğer a.a. (altermatif akım) şartlarında, izolatör yüzeyi yağmur, sis, çiy gibi sebeplerle nemlenirse; kir tabakası, içindeki iyonize olan tuzlardan veya kimyasal yapısı itibarıyla belirli bir iletkenliğe sahip olan maddelerden dolayı iletken hale gelir. Bu durumda izolatör yüzeyi boyunca, uygulanan gerilimle aynı fazda olan rezistif bir kaçak akım da

akmaya başlar. Bu kaçak akım, kapasitif kaçak akıma göre daha büyük olup, izolatör yüzeyindeki alan dağılımını bozar. Elektrik alan şiddetinin büyük olduğu ve kuru bandların olduğu yerlerde küçük deşarjlar başlar ve bunların yayılması sonucunda da kısa devre meydana gelir. Böyle bir arıza izolatörün tahrip olmasına, enerjinin kesilmesine ve büyük ekonomik kayba sebep olabilir (Rumeli,1973).

Bütün bu sayılan sebepler, sürekli bakım ve hatalı izolatörlerin yenileri ile değiştirilmesi gereğini ortaya çıkarır. Bu ise, çok pahalı ve zahmetli bir işlemdir. Dolayısıyla güç sistem mühendisleri daima, tasarımlarını iyileştirerek güç hattı izolatörlerinin işleyiş ömürlerini uzatmayı amaçlamışlardır.

1.1. Elektrik Alanlarını Hesaplama Yöntemleri

~~YG cihazlarının ekonomik ve iyi bir tasarımını gerçekleştirmek için elektrik alan hesaplarının yapılması, yani Laplace ve Poisson denklemlerinin çözülmesi gereklidir. Bu amaçla kullanılan yöntemler üç ana gruba ayrılır :~~

1. Analitik Yöntemler
2. Analog Yöntemler
3. Sayısal Yöntemler

Analitik yöntemler, problemin analitik çözümünün varlığı durumunda en faydalı yöntemlerdir. Çünkü sistemin bütün performansı sistem denklemleri yardımıyla verilmektedir. Fakat genellikle bu yöntemler pratik sistemlerle (karmaşık sınırlı ve çok dielektrikli sistemlerle) uğraşamaz, sadece çok basit elektrod sistemleri için geçerlidir.

Elektrolitik tank, iletken kağıt ve direnç devreleri gibi analog yöntemler daha geniş olarak kullanılmalarına rağmen, bunların da kullanım

alanları kısıtlıdır ve açık sınırlı alan problemlerinin çözümüne iyi cevap veremezler. Hassas sonuçların elde edilebilmesi için, çok fazla teçhizat ile dikkatli ölçmeler gerekir ve ancak böylece hatalar %2 sınırı içerisinde tutulabilir.

Sayısal yöntemler, yüksek hızlı sayısal bilgisayarların gelişmesi ve yardımcı cihazlarının kullanımının artmasıyla çok cazip bir hale gelmiş, böylece pratik ve karmaşık alan problemlerinin incelenmesinde önemli adımlar atılmıştır. Bu gelişmeler, izolatör tasarımcılarına;

- a) Tasarım aşamasında performansı daha hassas bir şekilde tahmin etme,
- b) Tasarım sonunda farklı izolasyon malzemeleri ile uygulama yapma ve yetersizliğe sebep olan kritik bölgeleri tesbit etme,
- c) İzolatör grubunun prototip testlerini azaltma

konularında, alan analizi imkanlarını sağlamıştır (Crowley vd, 1985).

1.2. Elektrik Alanlarının Hesabında Sayısal Yöntemlerin Kullanımı

Kısmi diferansiyel denklemlerin, Karmaşık iki veya üç boyutlu alanların, farklı dielektrik sabitli ve iletkenlikli yalıtkan malzemelerin matematiksel modellerini oluşturan Laplace ve Poisson türü kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde birçok zorluklarla karşılaşılır. Bu zorlukların aşılmasını sağlamak amacıyla araştırmacılar tarafından çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin en çok kullanılanları aşağıda verilmiştir :

- a) Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method : FEM)
- b) Sınır Elemanları Yöntemi (Boundary Element Method : BEM)
- c) Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method : FDM)
- d) Yük Simülasyon Yöntemi (Charge Simulation Method : CSM)
- e) Monte Carlo Yöntemi (Monte Carlo Method : MCM)

Günümüzde yaygın olarak kullanılanı, hiç şüphesiz Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir. Yöntemin yalıtım sistemleri ile ilgili elektrik alan problemlerine uygulanmasında, sağladığı önemli üstünlükleri vardır. Bunlar kısaca şu şekilde özetlenebilir :

- a) Homojen olmayan sistemlere (örnek olarak, farklı dielektrik sabitli ortamlara veya anizotrop sistemlere) de uygulanabilir.
- b) Elemanların şekil ve büyüklükleri sınırlara uygun keyfi olarak seçilebilir. Bölmelerin büyüklüğü, potansiyel dağılımına kolaylıkla uydurulabilir. Mesela, potansiyelin yüksek olduğu bölgelere daha küçük elemanlar yerleştirilebilir.
- c) Doğruluk, sınır koşullarını zorlaştırmadan, daha yüksek terimler kullanılarak artırılabilir.
- d) Yalıtkan ortamlarla, iletim akımlarının potansiyel dağılımını etkilediği durumlarda bile çalışılabilir. Bu, reel ve sanal kısımları olan kompleks dielektrik sabiti ($\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$) kabulü ile yapılabilir (Kuffel ve Zaengl, 1984).

YG cihazlarının tasarımı için elektrik alanlarını incelemek üzere, araştırmacılar tarafından çok sayıda çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Statik elektrik alanlarının otomatik hesabı için yapılan bir çalışmada, hem Sonlu Farklar Yöntemi hem de Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldı. İki farklı dielektrik malzemeli Silindir-Düzlem elektrod sistemine ait düğümlerin koordinatları, her bir elemanı belirleyen düğümlerin numaraları, her bir elemanın dielektrik sabiti ve sınır şartlarından oluşan giriş bilgileri uygun bir formda bilgisayara aktarılarak, hem direk ve hem de SOR (Successive Over Relaxation) iteratif yöntemi ile çözümler elde edildi. Böylece iki boyutlu aksenal simetrik alanların Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar ile çözümüne ait sonuçlar karşılaştırıldı (Flatabö ve Riege, 1972).

Diğer bir çalışmada statik elektrik alanı hesaplamalarını Sonlu Elemanlar Yöntemi ile yapmak üzere bir otomatik bölmeleme programı geliştirildi ve programın uygulaması yine Silindir-Düzlem elektrod sistemi üzerinde gösterildi. Farklı iki dielektrik malzemeli silindir-düzlem elektrod sistemine ait eşpotansiyel eğriler çizilerek, analitik çözüm ile Sonlu Elemanlar çözümünün karşılaştırılması yapıldı (Andersen, 1973).

Dinamik elektrik alanlarının incelenmesi için yine Andersen tarafından yapılan bir başka çalışmada ise, *kompleks dielektrik sabiti* kullanarak kapasitif ve rezistif potansiyel dağılımlarını hesaplayan bir program geliştirildi. Program hem düzlemsel hem de eksenel simetrik problemlere uygulanarak kompleks elektrik alan şiddetinin hesabı yapıldı. Ayrıca reel ve imajiner potansiyellerin teorik ve Sonlu Eleman çözümleri karşılaştırıldı (Andersen, 1977).

~~Yüksek gerilimli sistemlerde, yalıtım elemanlarının etrafındaki elektrik alanlarının bilgisayar simülasyonu için yapılan çalışmalardan birinde; yüzeysel ve hacimsel iletkenlik içeren dielektriklerde, 15 kV luk doğru gerilim ve 15 kV rms, 50 Hz sinüsoidal alternatif gerilim şartları altında elektrik alanlarının Sonlu Farklar Yöntemi yardımıyla sayısal hesabı gerçekleştirildi. A.a. şartlarında çözüm için kompleks dielektrik sabiti lineer denklemlerde hesaba katılarak bir yüksek gerilim buşingi için eşpotansiyel eğriler elde edildi. Bu sonuçları deneysel değerlerle karşılaştırmak üzere, bir *korona probu* yardımıyla ölçmeler yapıldı (Molinari vd, 1979).~~

Haznadar vd. (1979), tanımladıkları bir algoritma ile iletkenlerin, ark boynuzlarının, direk ve toprağın etkilerini Yük Simülasyon Yöntemi yardımıyla hesaplara kattılar. Çözüm bölgesi dışındaki alandan dolayı ortaya çıkan sınır problemini çözmek için sınır relaxation yöntemini

kullandılar. Çözüm bölgesine ait ana denklemleri ise Sonlu Farklar Yöntemi yardımıyla kurarak, denklem sistemini SOR iteratif yöntemi ile çözdüler. Hesaplama sonuçları olarak, 220 kV luk enerji iletim hattına ait 13 adet KT-120 elemanından oluşan izolatör zinciri için eşpotansiyel eğrileri ve çeşitli alan şiddeti grafiklerini çizdiler.

Kato vd. (1979), alternatif gerilim uygulanan bir izolatörün elektrik alanını yine Sonlu Elemanlar Yöntemi ile incelediler. Klasik devre yöntemine benzer bir yöntem kullanarak, yarıiletken sır ile sırlanmış olan bir porselen izolatörün 50 Hz lik alternatif gerilimde potansiyel dağılım eğrilerini çizdiler. Yüzey direncinin hesaba katılmasıyla ürettiği sonuçları, elektrolitik tank yöntemi kullanarak sağladığı deneysel sonuçlarla karşılaştırdılar.

Steinbigler (1979), iki boyutlu aksenal simetrik problemlerde Sonlu Elemanlar ve Yük Simülasyon Yöntemini birlikte kullanarak, program için iteratif çözüme ait bir akış diyagramı verdi. Tanımı yapılan *kompleks dielektrik sabiti* yardımıyla hem *kapasitif* ve hem de *rezistif* potansiyel dağılımları hesaplanabilir.

Sadovic (1979), statik ve dinamik elektrik alanlarının hesabını yaparak yüzey kirliliğinin, yalıtım sistemlerinin potansiyel dağılımı üzerindeki etkilerini gösterdi. Yüzey kirliliğinin olmadığı durum için *kapasitif potansiyel dağılımını* ve belirli bir iletkenliğe sahip yüzey kirliliği için de *kompleks potansiyel dağılımını* inceledi. Aksenal simetrik problemler için sayısal analizi, Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla gerçekleştirdi. Uygulama için kapasitif buşing ve iki elemanlı izolatör zinciri ele alarak, temiz ve kirli durumlar için eşpotansiyel eğrilerini çizdi.

Sadovic vd. (1983), kirli izolatörlerin bilgisayarla tasarımı üzerinde çalıştılar. Geliştirdikleri Makro Eleman Yaklaşımı sayesinde, giriş verileri

ve bilgisayar çalışma süresi ile çözülecek denklem sayısında azalma sağladılar. İzoparametrik Sonlu Elemanlar kullanarak, kirli izolatörlerin atlama karakteristiklerinin belirlenmesi için geliştirdikleri program ile uygulama yaptılar. Kirli bir çubuk izolatöre ilişkin uygulama sonuçlarını, eşpotansiyel eğrileri çizerek gösterdiler.

Tong ve He (1983), mikrobilgisayar kullanarak Sonlu Elemanlar Yöntemi ile elektrik alanını hesaplamak için uğraştılar. Geliştirilen yöntemde çözüm bölgesi, çokgen elemanlardan yararlanılarak üçgenler ile bölümlendi. Bilgisayar hafızası ve çalışma süresi açılarından önemli derecede üstünlükler sağlandı. Algoritmaya ilişkin akış diyagramı verildi ve yöntem, çeşitli örneklere uygulandı.

Campbell vd. (1984), mikrobilgisayarla iki ve üç boyutlu alanların incelenmesini sağlayan bir Sonlu Eleman programı geliştirdiler. Programı, ~~değişik örneklere uyguladılar. Yüksek doğru gerilimli bir taşıma hattında, zincir izolatör etrafındaki statik elektrik alanını hesaplayarak eşpotansiyel eğrileri çizdiler.~~

Gellert ve Rasmussen (1989), YG izolatörleri üzerindeki kuru ve yaş kir bölgelerinin oluşumunu tanımlayan bir model sundular. Teorik modelde nem, gerilim ve ısı dağılımlarını veren kısmi diferansiyel denklemler kullanıldı. Çözüm için Sonlu Elemanlar Yönteminden yararlanıldı. Teorik sonuçların doğruluğu, deneysel sonuçlar ile karşılaştırma yapılarak gösterildi.

Brauer (1989), dinamik elektrik alanlarını inceleyen çalışmasında, Sonlu Elemanlar Yöntemini kullanarak, farklı dielektrik kayba sahip tabakalardan oluşan bir kapasitör ile direnç tabakalı bir YG buşingi üzerinde uygulamalar yaptı. Bunun için önce temel teoriyi vererek, dinamik elektrik alanlarının hesabında esas olan *kompleks dielektrik sabitini* tanımladı.

Sonra bu temel teoriye dayalı hesaplamaların sonuçlarını; genlik, reel ve imajiner potansiyel eğrilerini çizerek verdi.

1.3. Alan İncelemelerinde Açık Sınırların Önemi

Gerek malzeme ve gerekse yapı itibariyle değişik özelliklere sahip olabilen elektrik ve magnetik alan problemlerinin çözümü esnasında, yukarıda sayılan yöntemlerin zorlandığı veya yetersiz kaldığı hususlar vardır. Sonlu Elemanlar Yöntemi, kapalı sınırlarla tanımlanan bölgelerin çözümü için çok uygundur. Ancak elektrik ve magnetik alan problemlerinin büyük çoğunluğunda sınırlar kapalı değildir. Yöntemin, açık sınırlı alan problemlerine klasik haliyle uygulanması bazı pürüzler ortaya çıkarmaktadır. Bunun sebebi, klasik Sonlu Elemanlar Yönteminde, kaynaktan ve inceleme altındaki nesneden belirli uzaklıktaki bir mesafede alanın sıfır farzedilmesidir ve bu durum genellikle bir sıfır potansiyel sınırı, sonsuz sınır şartına benzetilerek uygulanır. Böylece doğru çözüm için, ilgilenilen bölgenin uzağındaki alanların da uygun bir şekilde modellenerek hesaba katılması gereği ortaya çıkmaktadır. Minimum bilgisayar hafızası ve çalışma süresi sağlayacak şekilde uzak alan modellemesini sağlamak amacıyla değişik yöntemler kullanılmaktadır.

Bu yöntemlerden biri, Cermak ve Silvester (1970) 'ın teklif ettiği sınır relaxation analizidir. Yöntem, dönele simetrik alan problemlerine uygulanmış ve zincir izolatörün analizi yapılarak standart izolatör çeşitleri için alan çizimleri gösterilmiştir. Yönteme göre bütün uzay, yapay bir sınır yardımıyla iki kısma ayrılır. Birinci kısım bütün yüklü cisimleri ve homojen olmayan dielektrik bölgeleri içeren cihazın bulunduğu bir sonlu bölge; ikinci kısım ise, geri kalan bütün uzayı içeren bir sonsuz bölgedir. Dış bölgeden dolayı iç bölgenin dış sınırı üzerindeki düğümlere gelecek olan

potansiyeller, bir sayısal türev yardımıyla hesaplanabilir. Ancak bu türev ifadeleri uygun bir yöntemle elimine edilerek, iç ve dış bölgelere ait denklemler birleştirilir ve sonra çözüm yapılır. Bu teknik, daha önceleri iki boyutlu basit alan problemleri için kullanılan sınır relaxation tekniğinden (Cermak ve Silvester, 1968) üç ana fark ile ayrılmaktadır:

- a) Bir kaydırma operatörü sayesinde sayısal türev ifadelerini ortadan kaldıran yapay sınırın yeni bir formülasyonu kullanılır.
- b) Programlarda hesaplama zamanını en azından iki kat azaltan yeni bir ivmelendirme yöntemi kullanılır.
- c) Daha önceki programlar düzlem problemleri ile sınırlı olmalarına rağmen bu teknik ile dönele simetrik problemler de çözülebilir.

Bu özellikleriyle yöntem; iletken maddelerle izolator kirlenmesinin, dielektrik sabiti değişiminin veya diğer faktörlerin etkilerini ayrıntılı olarak incelemeye ve yeteri kadar kısa hesaplama zamanına imkan sağlar.

McDonald ve Wexler (1972), 'in sunduğu tekniğe göre de, önce iki boyutlu probleme ait bütün kaynakları, homojen ve izotrop olmayan bütün durumları içeren bir çerçeve seçilir. Daha sonra sınırsız olan dış bölgede, iç bölgenin etrafını saran ikinci sınır, iki sınır arasındaki üst üste binmiş bölgenin kaynaksız, homojen ve izotropik olması şartları sağlanacak şekilde seçilir. Uzay bölgesi içerisinde, herhangi bir noktadaki alan, bu üst üste binmiş bölge üzerindeki alana bağlamak için bir integral eşitliği kullanılır. Böylece uzay bölgesinde Green fonksiyonu yardımıyla, potansiyel denklemine gelecek ilaveler hesaplanır ve elde edilen sonuç potansiyel denklemi çözülür. Tekniğin uygulaması değişik örnekler üzerinde gösterilmiştir: Kare şeklindeki paralel plakalı kapasitör örneğinde; sonsuz uzun, ince, genişliği plakalar arası mesafeye eşit bir kondansatör ele alınmış ve buna ait eşpotansiyel eğriler çizilmiştir. Simetriden dolayı

çözüm, pozitif dörtte bir kısmı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Dielektrik tabakalı örnekte ise, kare kapasitör içinde sonsuz uzunlukta olan ve kenarlardan dışa doğru bir miktar taşan, $\epsilon_r=9$ değerindeki bir dielektrik tabaka bulunmaktadır. Ayrıca paralel plakalarda harmonik problem ve anten uygulaması da ele alınarak incelenmiştir.

Birçok araştırmacının uzak alan modellenmesine ilişkin olarak teklif ettiği diğer bir önemli yaklaşım ise; önce dış bölgede, bir merkez noktadan uzanan doğrularla kesişen halkalar teşkil eder. Bu halkaların bölmelenerek sekiz düğüm koordinatlı dörtgen elemanlar (*süper elemanlar*) oluşturulmasından sonra bir tekrarlama tekniği kullanır. Böylece dış bölgenin dış kenarını sonsuza doğru uzaklaştırır ve nihayet dış bölgenin iç kenarı olan çözüm bölgesinin sınırları üzerindeki noktalar için elde edilen değerleri, bu iç bölgenin çözümünde hesaba katar. Bu teknik, iki boyutlu elektrik ve magnetik alan problemlerinin uygulaması olarak, dikdörtgen kesitli bäralar ve paralel düzlemlı kapasitörler için (Silvester vd, 1977 ; Antunes vd, 1982), çift bara sistemi ve tek fazlı XI-çekirdekli kaldırıcı için (Lowther vd, 1978), aksenal simetrik magnetik problemler ve deri olayı problemleri olarak da dairesel bobin ve üç fazlı bara sistemi için (Brauer, 1982) kullanıldı.

Crowley vd. (1985), dış bölgeyi sonsuz küçük ölçeklendirme tekniği kullanarak modellediler. Bu yöntemde çözüme ait enerji fonksiyoneli iki kısma ayrılarak, iç bölgeyi temsil eden birinci terim için klasik Sonlu Elemanlar Yöntemi uygulanmakta, ikinci terime dış bölgeden gelecek katıklar ise potansiyelin türevi yardımıyla hesaplanmaktadır. Daha sonra her iki terimden oluşan fonksiyonelin minimizasyonu ile tüm alanın çözümünü veren cebirsel bir matris eşitliği elde edilmektedir. Bu teknik temiz ve kirli izolatör zincirlerine uygulanarak her iki durum için

espotansiyel çizimler gösterilmiş ve kirlenmemiş durum için klasik Sonlu Elemanlar Yöntemi ile elde edilen alan dağılımlarının mukayesesi yapılmıştır.

1.4. Otomatik Veri Üretimi

Herhangi bir sonlu eleman programının geliştirilmesinde esas problem onun, yeterince kullanıma uygun bir hale getirilmesidir. Bu durum, bir çeşit otomatik veri üretimini gerektirir (Andersen, 1972). Sonlu eleman programları için, verilerin otomatik üretimi hususunda oldukça fazla sayıda çalışmalar yapılmıştır :

Fredriksson ve Mackerle (1976) 'nin referans listesinde yaklaşık 250 sonlu eleman veri üretim programı vardır. Bu programların çoğu esas itibariyle çözüm alanının, dörtgen ve bazen de üçgen bölgelere el ile bölmelendirilmesiyle alakalıdır. Zienkiewicz ve Phillips (1971), ilk olarak *izoparametrik* koordinat sisteminin uygulamasını ortaya koydular. Metodun, değişik tipteki yapıların bölmelendirilmesinde çok faydalı olduğu gösterilmiştir. Durocher (1979), Zienkiewicz'in ortaya koyduğu izoparametrik haritalama fikrine dayalı bir fortran program yayınladı. Program sadece iki boyutlu problemler için veri üretir. Üç boyutlu yapılarda kullanmak için değişiklikler yapmak gerekir. Çözüm bölgesi *süper elemanlar* tarafından tanımlanmalıdır. Durocher'in programının sınırlamalarından biri, üçgen bölgeler için verimli bir şekilde kullanılamayışıdır. Fujii ve Yuki (1973), her bir bölgeyi oluşturan çizgi sayısını bölme esasına dayalı olarak, üçgen ve dörtgen bölgeleri üçgen elemanlar ile bölmelemenin yöntemini açıkladılar. Stefanou (1980) sadece, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan iki boyutlu bölgeler için kullanılabilen bir *fortran* program hazırladı. Gordon ve Hall (1973) ilk olarak, dörtgen plakalar ve eğri yüzeyler için

düğüm koordinatlarını hesaplamak amacıyla, *blending* fonksiyonunun enterpolasyonunu kullanmayı teklif ettiler. Edgebery (1969), iki boyutlu veri üretimi için Zienkiewicz'inkine benzer bir yöntem ortaya koydu. Suhara ve Fukuda (1974) ile Bykat (1976), iki boyutlu yapılar için otomatik olarak veri üreten algoritmalar geliştirdiler. Imafuku ve Kodera (1980), dörtgen bölgeler için kullanışlı bir veri üretim algoritması sundular. Bu algoritma üçgen yüzey bileşenlerine, üçgen yüzey bileşenlerinin tepelerinin kesilerek bir üçgen eleman ve bir dörtgen bloka dönüştürülmesi ile uygulanabilir, (Ghassemi, 1982).

Özellikle elektrik ve magnetik alan hesaplamalarında kullanılmak üzere yapılan bir çalışmada, elektrodların ve elektrik makinelerinin eğrisel kenarlarını iyi bir şekilde temsil eden ve bölgede üçgen elemanlar yardımıyla otomatik olarak ızgara üretimini gerçekleştiren bir algoritma sunuldu. Bunun için önce çözüm bölgesi içerisindeki elektrodların şekline ve değişik sıklıkta bölmelenmesi istenen kısımlara göre başlangıç noktaları tesbit edilir. Sonra bu noktalardan çizilen yatay ve düşey doğruların araları istenen sıklıktaki doğrularla taranır. Böylece çözüm bölgesi farklı büyüklükteki dörtgenlerle bölmelenmiş olur. Daha sonra bu dörtgenlerin birer köşegeni yardımıyla üçgen elemanlar elde edilir. Eğrisel yapıdaki elektrodları veya sınırları üçgenlerin kenarları ile çakıştırmak üzere; dörtgenlerin köşeleri, eğrisel kenar üzerinde sayısı belirlenen düğümlerle üst üste gelecek şekilde kaydırılır. Bu durumda eğrisel kenarın geçtiği yerdeki dörtgenler yamuklara dönüşür ve böylece kenar boyunca eğrilerek birleşen dörtgen köşegenleri, eğrisel kenarı uygun bir şekilde modellemiş olur (Andersen, 1973).

Sonlu Eleman analizleri için veri üretimi ile ilgili çok önemli çalışmalardan birinde, eğrisel kenarlı bölgelerin bölmelenmesi için

otomatik veri üretiminin iki farklı yöntemi takdim edilmiştir. Bunlar, her ikisi de kuadratik şekil fonksiyonu kullanan, alan ve izoparametrik koordinat sistemleridir. Önce geometriye ve malzeme değişimlerine bağlı olarak ayrıştırılmış olan kısımlar, belirli sayıda üçgen bölgeler oluşturulacak şekilde el ile bölünür. Daha sonra algoritma bu bölgeleri, üç veya altı düğümlü üçgen elemanlar ile otomatik olarak bölmeler ve farklı bölgeleri, bir Merge Algoritması kullanarak birleştirir (Ghassemi, 1982).

1.5. Bu Çalışmanın Amacı

Bu tezde amaçlanan hususlar şunlardır:

1) Aşağıdaki özelliklere sahip olan bir Otomatik Veri Üretim programı geliştirmek;

(a) El ile hazırlanacak küçük bir başlangıç bilgisi yardımıyla çözüm bölgesini istenilen uygunlukta üçgen elemanlar ile bölmeleme,

(b) Sonlu Elemanlar Yöntemine dayalı programların kolayca kullanımını sağlamak üzere, özellikle YG teçizatının eğrisel kenarlarına en uygun modellemeyi gerçekleştirme,

(c) Zincir izolator, çubuk izolator ve parafudr gibi YG teçizatında, üst üste gelen elemanlar veya siperler aynı şekil ve yapı özelliklerine sahiptir. Böyle problemlerde, bir eleman veya siperin başlangıç bilgisi yardımıyla tüm çözüm bölgesi için gerekli verileri üretme,

(d) İstenildiğinde, açık sınırlı alan problemlerinde sınır düğümlerindeki potansiyelleri hassas olarak hesaplayan bir tekniğin kullanımı için, uygun halka bölmelemeler yaparak gerekli verileri üretme,

(e) Üretilen tüm verileri uygun bir biçimde düzenleyerek, ana programda elde edilecek sonuç denklem sistemine ait band genişliğinin mümkün olan en küçüğe inmesini sağlamaktır.

2) Birinci maddede özellikleri belirtilen Otomatik Veri Üretim programını alt program olarak kullanan, aşağıdaki özelliklere sahip ana programı geliştirmek;

- (a) İzotrop bir ortamda, iki boyutlu ekstenel simetrik sistemlerin alan dağılımlarını hesaplama,
- (b) Kompleks büyüklükler ile çalışma imkânını sağlama,
- (c) Band yapıya sahip olan denklem sistemini bir vektöre aktararak ve kompleks katsayılı band matris çözen direk yöntemler kullanarak, bilgisayar belleğinden ve çalışma süresinden tasarruf sağlamaktır.

3) Açık sınırlı alan problemlerindeki sonsuza uzayan sınırların meydana getirdiği zorluğu, çözüm bölgesinin sınırını genişletmeden ve dolayısıyla denklem sayısını artırmadan, ana programın başına ilave edilecek uygun bir teknikten yararlanarak ortadan kaldırmaktır.

4) Yukarıda bahsedilen programlar kullanılarak;

- (a) Zincir izolatörlerde, çubuk izolatörlerde, parafudrlarda
- (b) YG buşinglerinde ve geçit izolatörlerinde
- (c) YG kablolarında
- (d) YG elektrod sistemlerinde
- (e) Kondansatörlerde

alan dağılımları ve kirliliğin, bu dağılımlar üzerindeki etkileri incelenebilir. Bu çalışmada zincir izolatör ve çubuk izolatörlerin alan dağılımları, temizlik ve kirlilik durumları ayrı ayrı ele alınarak incelenmektedir. Kirliliği hesaplara katmak için kompleks dielektrik sabiti kavramından yararlanılmaktadır.

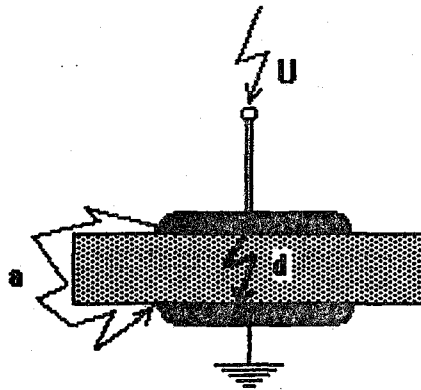
BÖLÜM 2

YG İZOLATÖRLERİNDE KİRLENMENİN ETKİLERİ VE ELEKTRİK ALANLARININ HESABI İÇİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYON

2.1. Giriş

Deşarj olayına genel bir bakış için, Şekil 2.1 de gösterilen basit levha elektrodlu sistemi ele alalım. Elektrodlar arasına katı yalıtkan bir levha yerleştirildiğini ve elektrod sisteminin de gaz veya yalıtkan sıvı bir madde içerisinde bulunduğunu farzedelim.

Elektrodlar arasına uygulanan gerilim yükseltildiğinde, gerilimin belli bir değerinde elektrodlar arasında deşarj meydana gelir. Elektrodlar, bir kıvılcım veya ark şeklinde meydana gelen deşarj olayı sonucunda kısa devre olur. Deşarj olayı, katı yalıtkan tabaka içinde d yolunu izleyerek meydana gelirse, buna "delinme"; katı yalıtkan tabakanın ortam ile teşkil ettiği sınır yüzeyde a yolunu izleyerek meydana gelirse, buna da "atlama" denir. Aslında atlama olayı, elektrod sisteminin bulunduğu yalıtkan ortam



Şekil 2.1. Bir elektrod sisteminde delinme ve atlama.

içinde meydana gelen ve fakat sınır yüzeyde gelişen bir delinme olayıdır.

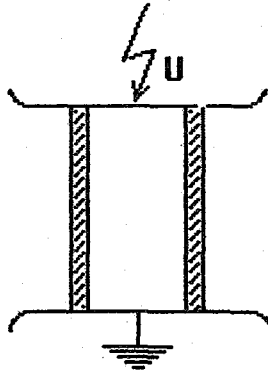
Gaz ve sıvı yalıtkan ortamlarda meydana gelen delinme olaylarında yalıtkan ortam, katı yalıtkan ortamlarda olduğu gibi büyük değişikliklere maruz kalmaz. Katı yalıtkan ortamlardaki delinmeler, çoğu zaman ortamın tahrip olmasına ve dolayısıyla elektrod sisteminin, diğer bir deyimle YG cihazının devre dışı bırakılmasına sebep olur (Gönenç, 1977). Atlamada ise deşarj kısa bir süre devam eder. Cihaz tahrip olmaz, tekrar kullanılabilir. Atlamanın cihaz bakımından zararı azdır. Fakat şebeke bakımından, devrede aşırı gerilimlerin meydana gelmesine ve sistem kesikliğine sebep olduğundan delinme kadar sakıncası vardır. Bunun için YG tesislerinde her ikisinden de kaçınmak gereklidir (Özkaya, 1988).

Bir elektrod sisteminde deşarj olaylarının başlaması ve gelişmesi, diğer faktörlerle birlikte elektrot sisteminin yapısına ve alan şekline bağlıdır. Düzgün alanda, ortamın her noktasında elektriksel zorlanma aynı değerde olacağından ve dolayısıyla delinme şartı ($E \geq E_d$) her noktada aynı anda meydana geleceğinden, bir elektrodta başlayan deşarj olayı, derhal iki elektrod arasında "tam delinme" ile sonuçlanır. Tam delinmede elektrodlar, deşarj akımının değerine göre, meydana gelen kıvılcım veya ark vasıtasıyla birleşirler, yani kısa devre olurlar. Düzgün olmayan alanda ise, delinme şartı olarak maksimum alan şiddeti esas alınır ($E_{max} \geq E_d$). Maksimum alan şiddeti, eğrilik yarıçapı küçük olan elektrod üzerinde meydana geldiğinden, ilk deşarj olayı da hiç şüphesiz eğrilik yarıçapı küçük olan elektrodan başlar. İlk deşarj olayı, belirli bir gerilimde, maksimum alan şiddetinin bulunduğu bölgede korona olayı şeklinde başlar. Gerilim değiştirilmediği sürece, bu korona olayı da devam eder. Gerilim yükseldiği takdirde, korona olayı gelişme imkanı bulur ve karakteristik deşarj safhalarını geçirdikten

sonra olay, belirli bir gerilimde tam delinme ile sonuçlanır.

Bu açıklamalardan anlaşılacağı gibi, bir YG elektrod sisteminde veya diğer bir deyimle, bir YG cihazında; gaz, sıvı ve katı yalıtkan maddelerden ikisinin veya her üçünün ve en az iki yalıtkan maddenin bir arada bulunabileceğini, bunlardan birinin daima hava olabileceğini ve ayrıca bir yalıtkan maddede, biri sınır yüzeye dik ve diğeri teğet yönde olmak üzere iki tür zorlanmanın meydana gelebileceğini, bunlardan dik yöndeki zorlanmanın yalıtkan maddenin delinmesine ve diğerrinin ise yüzeysel atlamalara sebep olacağını gözönünde tutmak gerekir. Bu itibarla bir YG cihazının hesap ve konstrüksiyonunda cihaz, hem delinmeye ve hem de atlamaya göre hesaplanır. Fakat bazı hallerde bu zorlanmalardan biri, diğerrinden daha etkili olabilir (Gönenç,1977).

Yalıtkanlar arası geçiş yüzeyinde elektrik alanının teğet bileşeni geçiş yüzeyinin her iki yanında aynıdır, fakat dik bileşenler dielektrik sabitlerinin ters oranına göre değişir. Mesela akı dik olarak porselenden ($\epsilon_r=5$) havaya ($\epsilon_r=1$) geçiyorsa, alan şiddeti hava içinde 5 misli büyük olur. Böyle bir sistemde hava daha düşük dielektrik dayanıma sahip olduğundan, uygulamada birçok zorluklar ortaya çıkmaktadır. Şekil 2.2 deki sistemi



Şekil 2.2. Bir yalıtıcı silindir yüzeyinde delinme.

gözönüne alalım. Eğer elektrik alan çizgileri silindir yüzeyine paralel ise, o zaman teorik olarak alan homojen olur ve yalıtıcı silindirin mevcudiyetinin delinme gerilimi üzerinde hiçbir tesiri olmaz. Fakat pratikte durum böyle değildir. Mesela homojen alanda 1 cm lik hava aralığı 30 kV ta delinir. Pyrex camından yapılmış bir silindirik yalıtıcı, bunu 15 kV a düşürür. Bunun sebebi, silindir yüzeyinin tam düz olmayışdır. Mikroskopik yüzey düzensizlikleri, akı çizgilerinin yüzeyi kesmesine ve dolayısıyla birçok alan çizgilerinin yayılmış olduğu zorlanmış bölgelerin ortaya çıkmasına sebep olur. Böylece delinme, daha düşük gerilimde meydana gelir (Rumeli, 1969).

2.2. İzolatörler

2.2.1. İzolatörlerde Aranılan Temel Özellikler ve YG 'de Kullanılan İzolatör Tipleri

Normal tip bir izolatör tasarımında, gerçekleştirilmek istenen üç temel özellik vardır:

- a) Yağmur ve rüzgarın etkileriyle iyi bir kendi kendine temizlenme özelliği
- b) Az kir toplama özelliği
- c) Uzun sızma aralığı

Bu özelliklerden ilk ikisi ile, izolatör yüzeyinde oluşan kir tabakası kontrol edilir. Üçüncüsü ise, izolatör yüzeyi boyunca daha düşük bir ortalama gradyan temin eder.

İyi bir kendi kendine temizlenme özelliği sağlamak için, tasarım esnasında yağmur ve rüzgar etkisine maruz kalacak şekilde meyilli ve düşey yüzeyler düşünülür. Bunlara "açık tip izolatör" denir. Spirelec diye adlandırılan böyle bir tipte, spiral bir yapı kullanılarak yağmur suyunun spiral boyunca akmasıyla izolatörün yıkanması sağlanmıştır.

Az kir toplamayı temin için, izolatör derin oyuklu ve daha fazla kapalı yüzeyli yapılır. Bu tip izolatöre "kapalı" veya "korunmuş" tip denir. Böylece hem atmosferik kirlenmelere karşı koruma temin edilmiş ve hem de daha uzun bir sızma aralığı sağlanmış olur.

YG 'li enerji taşıma hatlarında, iki tip izolatör kullanılmaktadır:

a) Zincir izolatör

b) Çubuk izolatör

Zincir izolatör, birbirine sap ve kapaklar yardımı ile eklenebilen porselen veya camdan; çubuk izolatör ise, uygun şekilde profillendirilmiş yekpare bir porselenden ibarettir.

Zincir izolatörün en önemli avantajı, uzun bir sızma aralığı temin etmesidir. Ayrıca çubuk izolatöre nazaran daha iyi bir esneklik sağlar. Zincirdeki bir elemanda meydana gelen arıza, sadece o elemanın değiştirilmesi ile giderilir. Fakat bu tip izolatörlerde, elemanlar arası bağlantıyı sağlayan fazla sayıda metal kısımların bulunması korozyon, radyo ve televizyon parazitlerine sebep olur.

Çubuk izolatörün elektriksel delinmelere karşı dayanımı çok iyidir. Üniteler arası metal bağlantılar olmadığından, korozyon tesiri azdır. Ayrıca yağmur altında iyi bir "kendi kendine temizlenme" özelliği gösterir. Fakat bu tip izolatörlerde porselenin fırınlanmasında meydana gelen boyutlardaki değişme imalat zorluğuna sebep olur. Sızma aralığının toplam izolatör yüksekliğine oranı düşüktür. İzolatörün sır tabakasındaki hafif bir zedelenme, bütün izolatörün değiştirilmesini gerektirir.

Derin oyuklu izolatörlerin imalatı, pahalı ve zordur. Böyle bir izolatör uzun süre devrede kalınca, derin oyuklarda biriken kirler buralara yapışır ve giderilmeleri çok zor olur. Bilhassa çimento sanayii civarında bu durum önemlidir. Ayrıca izolatör yüksekliğinin en büyük çapa oranı,

gözönüne alınmalıdır. Bir izolatör zincirinde veya bir çubuk izolatörde komşu elemanlar veya üniteler arası mesafe çok küçük tutulmamalıdır. Çünkü birbirine çok yakın etekler, aralarında deşarjlara sebep olacağından, böyle bir izolatör radyo ve televizyon alıcıları için parazit kaynağı olur. Diğer önemli bir husus olarak da, izolatör sızma aralığının izolatör yüksekliğine oranının yüksek olması istenir. Zincir ve çubuk tipi izolatörler için bu oran, 3.1 ve 2.1 civarındadır. Bununla beraber izolatörün profili çok daha önemlidir. Mesela aynı sızma aralıklı, fakat farklı profildeki iki izolatörün aynı kirli şartlar altında aynı performansı göstermediği bulunmuştur. Pratik tecrübelerden, iyi bir izolatör dizaynı için korunmuş ve korunmamış sızma aralıklarının eşit alınması tavsiye edilir (Rumeli,1969).

2.2.2. İzolatörlerde Kirlenme Atlaması

YG izolatörlerinde kirli ve ıslak şartlarda kısa devre arızalarının sık sık meydana geldiği görülmektedir. Kirlenmenin sonucu olan bu tür arızaya "kirlenme atlaması" veya kısaca "atlama" denilmektedir. Bu durum sahil ve endüstriyel bölgelerdeki YG izolatörlerinde görülen en önemli işletme problemidir. Böyle bir arıza izolatörün tahrip olmasına, enerjinin kesilmesine ve büyük ekonomik kayba sebep olabilir (Rumeli,1973).

Kirli bir izolatördeki atlama olayı, başlıca üç safhadan oluşur:

- a) İzolatör yüzeyinin iletken elektrolitik bir kir tabakası ile kaplanması,
- b) Kuru bölgelerin oluşması ve ön deşajların tutuşması,
- c) Ön deşajların yayılması ve kısa devre.

Servis şartlarında (a) ve (b) safhalarına sık sık rastlanmakla beraber, (c) safhası her zaman meydana gelmeyebilir.

a) İletken Elektrolitik Kir Tabakasının Oluşması: İzolatörler servis şartlarında çeşitli türde kirlere maruz kalırlar. Bu kirlere, sahip oldukları

özellikler açısından ikiye ayrılabilir. Birincisi, yapışkan ve su emici kirler; ikincisi ise, suda çözünerek iyonlarına ayrılan ve elektriksel iletkenliği sağlayan kirlerdir. İzolatörlerde atlama olayının oluşması için kir mutlaka gereklidir. Ancak kir tabakası kuru kaldığı sürece atlama olmaz. Bu durumda hemen hemen tamamı kapasitif olan küçük bir kaçak akım mevcuttur. Elektrik alan dağılımı statik alan dağılımı şeklindedir. Eğer a.a. şartlarında izolatör yüzeyi yağmur, sis, çığ vs. ile nemlenirse; kir tabakası, içindeki iyonize olan tuzlardan veya kimyasal yapısı itibarıyla belirli bir iletkenliği olan maddelerden dolayı iletken hale gelir. Bu durumda izolatör yüzeyi boyunca, uygulanan gerilimle aynı fazda olan rezistif bir kaçak akım akmaya başlar. Kapasitif kaçak akıma göre daha büyük olan bu akımın etkisiyle izolatör yüzeyindeki elektrik alan dağılımı bozulur. Böylece elektrik alan şiddetinin büyük olduğu ve kuru bandların olduğu yerlerde küçük deşarjlar başlar. Bu küçük deşarjların yayılması sonucunda da kısa devre meydana gelir.

İzolatörlerin maruz kaldığı kirler iki gruba ayrılabilir: Bunlardan birincisi endüstriyel bölge kirleridir. Endüstriyel tür kirler arasında kül, is, kömür, çimento, alkali tuz ve metal oksit tuzları ile bilhassa kükürt, flor, klor gazları ve bunların oksijen ve hidrojen bileşenleri, izolatör kirlenmesi yönünden önem arzederler. Kimyasal gazlar, sis ve yağmur olması bile, rutubetli şartlarda izolatör yüzeyinde iletken kir filmi teşkil edebilirler. Diğer kirler bilhassa sis ve çiseleyen yağmur altında izolatör yüzeyinde kolayca iletken bir kir tabakası teşkil ederek atlamalara sebep olabilirler. İkincisi ise, sahil bölge kirleridir. Denize yakın bölgelerde kir bileşimi deniz tuzundan ibarettir. Fırtınalı havalarda ve rüzgarın denizden estiği zamanlarda atomize halde tuzlu deniz suyu, bu bölgedeki izolatörleri iletken bir tuz tabakası ile kolayca kaplayarak atlamalara sebep olur.

b) Kuru Bölgelerin Oluşması ve Ön Deşarjların Tutuşması: Pratikte servis şartlarında kirli ve ıslak durumlarda izolatör yüzeylerinde deşarjların tutuştuğu ve atlamaların meydana geldiği görülmektedir. Bir izole yüzeyde, deşarjın başlaması için, herhangi bir noktadaki zorlamanın havanın dielektrik dayanımını (≈ 30 kV/cm) aşması gerekir. Halbuki servis şartları altında bir izolatör zinciri boyunca ortalama gerilim gradyanı 500 V/cm civarındadır. Kirli şartlarda deşarjın tutuşması, izolatör yüzeyinde aşırı zorlanan bölgelerin oluşması ile izah edilebilir.

İzolatör yüzeyinde homojen olmayan düzensiz dağılımlı iletken kir tabakası oluşunca, yüzey boyunca kaçak akımlar akarak enerji kaybına yol açar. Yüzeyde, enerji yoğunluğunun fazla olduğu dar kısımlarda (bir kaskat-pin izolatöründe kapak ve sap civarı gibi), kir tabakası kolayca kuruyarak yüksek dirençli kuru bölgeler oluşur. Kuru bölge izolatörün çevresini bir band tarzında sarınca, kaçak akım kesilerek bütün gerilim kuru band boyunca düşer ve ön deşaj kolayca tutuşur. Bu şekilde bir izolatör yüzeyinde birçok ön deşarjlar tutuşabilir. Deşarj türünü tesbit eden en önemli faktör, deşarj akımıdır. Kir tabakası direncinin büyük olduğu hallerde beliren deşarj mavimsi-ışılıklı türde ve yüksek gradyanlı olup, yaygın bir görünüştedir. Akımın daha büyük olması halinde deşarj ışıltılı-ark türünde ve düşük gradyanlı olup, daha konsantre görünüşte ve uçları, yüzey boyunca rastgele hareketlidir. Pratik olarak, mavimsi-ışılıklı deşarj halinde çatırtı sesleri duyulur ve kaçak akım 2 mA den azdır; ışıltılı-ark türde ise deşarj sarımsı görünüşte ve hareketli olup, tıslama sesi duyulur ve bu halde kaçak akım 25 mA civarındadır.

c) Ön Deşarjların Yayılması ve Kısa Devre: İzolatör yüzeyinde ön deşarjların yayılması, atlama olayının en karışık safhasıdır. Pratik, ön deşarjların genellikle bir süre sonra söndüğü, ancak ark türündeki deşarjların bazen

yayılmak suretiyle, kısa devre yaptığı görülmektedir. Kuru bandlar boyunca deşarjların tutuşması, sızma akımında akım darbeleri şeklinde belirir.

2.2.3. Kirlenme Atlaması İle İlgili Çalışmalar

Kirlenme atlaması konusunda yapılan çalışmaları üç ana grupta toplamak mümkündür. Birinci grup çalışmaların amacı, ele alınan bir izolatörün kirli şartlardaki davranışını ölçmeye yarayan test yöntemlerinin geliştirilmesidir. Ancak test yöntemleri,

- a) Pahalı tesisleri ve tecrübeyi gerektirmeleri,
- b) Uzun zamana ihtiyaç göstermeleri,
- c) Elde edilen sonuçların herkes tarafından aynı derecede benimsenmeyişi, gibi sebeplerden dolayı eleştirilmektedir (Rumeli ve Koraslı, 1975).

İkinci grup çalışmalar, atlamaları önleme amacını taşımaktadır. Aşırı kirlenme bölgelerinde ve salt sahası, baralar gibi kirlenme atlamasının mutlaka önlenmesi gereken yerlerde uygulanabilecek bazı yöntemler vardır. Bunlardan birincisi; sızma uzunluğu büyük olan izolatör kullanmaktır. Bunu sınırlayan asıl neden, çok büyük sızma aralıklı izolatörlerin tasarım zorluğu ve dolayısıyla izolatörlerin, en kötü servis şartlarında yeterli emniyeti sağlayabilmekten uzak oluşudur. İkincisi; İzolatör yüzeyini greslemektir. Bu işlemin beraberinde getirdiği problemler ise, zaman geçtikçe gres tabakasının iyi bir durumda tutulamaması ve periyodik olarak tekrarlanacak gresleme işlemleri esnasında sistemin, uzunca bir süre devre dışı bırakılması gereğidir. Üçüncüsü; gerilim altında yıkamaktır. Bu ise, büyük ve pahalı bir yıkama tesisi gerektirir. Dördüncüsü; izolatör yüzeyini yarıiletken sır tabakası ile kaplamaktır. Bunun uygulamada çıkardığı zorluk da, yarıiletken sır tabakasının korozyona uğraması ve bir süre sonra özelliğini kaybetmesidir (Rumeli, 1969).

Üçüncü grup çalışmalar ise, atlama olayının fiziksel mekanizması ile ilgili teorik ve deneysel araştırmalardır. Bir YG izolatörü için atlama olayı ile ilgili analitik çözümlerin elde edilmesinde birçok zorluklar vardır. İzolatörün karmaşık şeklinin de sebep olduğu bu zorlukların başlıcaları;

- (a) İzolatör yüzeyinde meydana gelen kir dağılımının homojen olmayışı ve kir karakteristiklerinin bilinmeyişi,
- (b) İzolatör yüzeyinde tutuşan deşarjların sayısının, tutuşma bölgelerinin ve deşarja kadar geçen süre içerisinde kir iletkenliğindeki değişmelerin bilinmeyişi,
- (c) İzolatör yüzeyindeki deşarjların yayılması sırasında, deşarja seri olan kir direncindeki değişimin bilinmeyişidir.

(a) 'da beliren zorluk, hesaplamalarda izolatörün homojen bir kir tabakası ile kaplandığı kabul edilerek çözümlenmektedir. Bu kabul, laboratuvar testlerinde atlama gerilimlerinin ölçülmesinde uygulandığından dolayı, test sonuçları için de geçerli olacaktır.

(b) 'deki zorluk için de gözönüne alınması gereken bazı hususlar vardır. Öncelikle deşarjın olduğu nokta önemlidir. Pratik gözlemler, genellikle deşarjın izolatörün en dar bölgelerinde tutuştuğunu göstermektedir. Bir kasket-pin izolatöründe deşarjın, kapak ve sap civarından; bir çubuk izolatörde ise en küçük yarıçaplı bölgeden başladığının kabulü, pratik şartların yeterince dikkate alınması demektir. Laboratuvar testlerinde kir kaplı izolatöre gerilimin uygulanmasından önceki (soğuk) kir iletkenliği σ , gerilim tatbikinden sonra kuru bandların ve deşarjların oluşmasına kadar değişmektedir. Deşarjların yayılmasında ve atlama olayının meydana gelmesinde, deşarjların tutuştuğu andaki (sıcak) kir iletkenliği σ_s etkilidir. Teorik hesapların geçerli olması bakımından, σ_s

nin σ cinsinden bilinmesi gerekir. Verilen bir izolatör için gerilim tatbikinden kuru bandın meydana gelmesine kadar geçen süre içinde kir tabakasında açığa çıkan enerji yardımıyla ortalama iletkenlik değişimini (σ_s/σ) elde etmek üzere çalışmalar yapılmıştır.

(c) 'de belirtilen ve deşarj yayılımı sırasında açığa çıkan enerjinin sebep olduğu deşarjlara seri kir bölgesi direncinin bilinmeyen değişimi, analitik hesaplamalarda önemli zorluğa tekabül etmektedir. Bu durum, izolatörlerin eşdeğer modelleri üzerindeki çalışmalarda bazı kabullerin ve basitleştirmelerin yapılmasını gerektirir (Rumeli ve Koraslı, 1975).

2.3. Elektrik Alanlarının Hesabı

Kısım 2.2.2 ve 2.2.3. 'te yapılan açıklamalar, izolatörlerde yüzeysel atlamayı en aza indirecek bir tasarım sağlamak üzere, alan incelemeleri yapmanın önemini göstermektedir. YG cihazlarının yalıtımında dikkate alınması gereken en önemli faktör elektrik alanıdır. ENH (Enerji Nakil Hattı) sistemlerinin gerilimleri gün geçtikçe yükseldiğinden, yalıtım malzemelerinin de daha büyük elektriksel zorlanmalar altında çalışması gerekmektedir. Sadece daha kalın yalıtım malzemesi kullanarak tatminkar sonuç almak mümkün değildir. Çünkü bu durumda hem termik empedans büyümekte ve hem de uzayan zincir boyu direk ebatlarının büyümesine ve toplam ENH maliyetinin önemli bir kısmını oluşturan direk masraflarının artmasına sebep olmaktadır. Onun için elektrik alanının dağılımı ve yüksek olduğu yerlerdeki alan şiddeti değerleri bilinmelidir (Rumeli, 1969).

D.a. şartlarında veya çok düşük frekanslarda, elektrik alanının bir yaklaşımı olarak statik elektrik alanı veya kuasi-stasyonær elektrik alanı kullanılır. Bu, dielektriklerin ve metaller gibi yüksek iletkenlikli

malzemelerin bulunduğu problemler için çözüme çok iyi bir yaklaşım sağlar. Ancak iletkenler ile dielektrikler arasında orta iletkenlikli malzemeler varsa, alternatif elektrik alanı statik elektrik alanından farklıdır. İnce yarı iletken tabaka ile kaplanmış veya kirlenmiş sınır yüzeylerinin bulunduğu böyle durumlarda statik elektrik alanı yaklaşımını uygulayamayız. Yüksek gerilimli ENH ve salt tesisleri teçhizatı ile güç kabloları bağlantılarının tasarımında alternatif elektrik alanının büyük önemi vardır (Kato vd, 1979).

Bu sebeple elektrik alanları, statik ve dinamik elektrik alanları olmak üzere iki kısımda incelenir.

2.3.1. Statik Elektrik Alanlarının Hesabı

Bir yüklü parçacık, elektrik alanının bulunduğu bir bölgede, başladığı noktaya gelecek şekilde kapalı bir yol boyunca hareket ettirilirse, toplam olarak bu parçacığa karşı ve bu parçacık tarafından iş yapılmamış olur. Bu durum, parçacığın izlediği yolun şekline bağlı değildir; daire, kare veya herhangi bir kapalı eğri olabilir. Ayrıca sonuç, elektrik alanının kaynağından da bağımsızdır (yükün hareketi anında kaynağın değişmemesi şartıyla).

Enerji kuvvetle yolun skaler çarpımına eşit ve toplam enerji de kapalı yol boyunca herbir küçük yol parçası üzerinde meydana gelen enerjilerin toplamı veya integrali olduğundan,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.1)$$

dır. F yerine qE yazılırsa

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.2)$$

olur. Burada s, integrasyon yolunu göstermektedir. Denk.(2.2) ye vektör analizinden bilinen Stokes teoremi uygulanırsa,

analizinden bilinen Stokes teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.

Denk.(2.2) nin bütün kapalı yollara, dolayısıyla denk.(2.3) ün bütün kapalı yollara karşılık olan yüzeylere uygulandığı düşünülürse, bunun tek yolunun

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{veya} \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad (2.4)$$

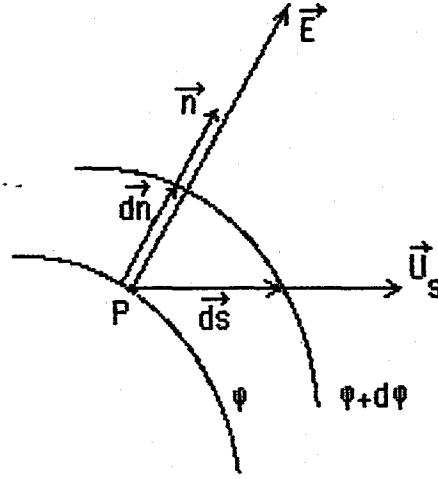
olduğu görülür. Bu sonuç gösteriyor ki, elektrik alanı rotasyonelsiz bir alandır. Rotasyonelsiz bir alan, skaler bir ϕ potansiyel alanından türer.

Statik elektrik alanı problemlerinin çözümünde, çoğu kez ϕ potansiyel alanı bilinir. Böylece ϕ yardımıyla sabit eşpotansiyel yüzeyler elde edilir (Özkaya, 1988). Bilindiği gibi, potansiyelleri birbirine eşit olan noktaları birleştiren yüzeylere eşpotansiyel yüzeyler denir. Bir eşpotansiyel yüzey üzerinde iki nokta arasındaki potansiyel fark ve dolayısıyla bu iki nokta arasında yapılan iş sifıra eşittir. Eşpotansiyel yüzeylerin belirli bir yüzey üzerindeki izleri, eşpotansiyel çizgileri verir.

Bir elektrik alanı, alan çizgileri ile gösterileceği gibi, eşpotansiyel çizgiler ile de gösterilebilir. Eşpotansiyel çizgiler sabit bir potansiyel farkı esas tutularak çizildiği takdirde elde edilen şekil, alan hakkında fikir verir. Bu çizgilerin sık veya seyrek olması, sözkonusu noktalarda alan şiddetinin büyük veya küçük olduğunu gösterir.

Şimdi potansiyelin veya daha genel olarak potansiyel fonksiyonunun bilinmesi halinde, alan şiddetinin nasıl bulunabileceğine bakalım:

Şekil 2.3 'ten görüldüğü üzere aralarında $d\phi$ kadar, sonsuz küçüklükte



Şekil 2.3. Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı.

potansiyel farkı bulunan iki eşpotansiyel yüzey verilmiş olsun. Pozitif birim yükün, eşpotansiyel yüzeyin normali yönündeki \mathbf{n} birim vektörü doğrultusunda $d\mathbf{n}$ kadar hareket etmesi halinde alan tarafından yapılan iş,

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{n} = -E_n \cdot dn \quad (2.5)$$

olur. Bu bağıntıdan,

$$E_n = -\frac{d\phi}{dn} \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada E_n , alan şiddeti vektörünün eşpotansiyel yüzeye dik \mathbf{n} birim normal vektörü yönündeki bileşenidir. E ile E_n aynı doğrultu ve aynı yönde olduğundan, bunlar birbiriyle özdeştir.

Genel olarak potansiyel, koordinat sisteminin bir fonksiyonu olduğundan, denk.(2.6) kısmi türev şeklinde

$$E_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (2.7)$$

olarak ifade edilir. Bu denklem, vektörel olarak

$$\vec{E} = -\vec{n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntılarda eksi işareti, alan şiddeti vektörünün potansiyelin azaldığı yöne yönelik olduğunu, diğer bir deyimle potansiyelin, alan şiddeti vektörü yönünde düştüğünü gösterir.

Alan şiddeti vektörünün herhangi bir u_s yönündeki E_s bileşeni

$$E_s = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2.9)$$

ile ve kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri ise,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

bağıntıları yardımıyla bulunur. Buradan, potansiyel gradyan vektörü

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (2.11)$$

olarak yazılır ve böylece, alan şiddeti ile potansiyel arasında

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \quad (2.12)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.13)$$

ve

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi \quad (2.14)$$

gözönüne alınarak denk.(2.12)

$$E = -\nabla\phi \quad (2.15)$$

şeklinde kısaca ifade edilir (Gönenç,1977).

Denk.(2.15), elektrik alanının eşpotansiyel yüzeylere dik (ortogonal) ve potansiyelin azaldığı yönde olduğunu gösterir.

Şimdi uzay için kapalı bir yüzey konulduğunu farzedelim. Kapalı yüzeyin şekli ne olursa olsun, her türlü kapalı yüzey boyunca eğrisel integralin değeri

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q \quad (2.16)$$

olacaktır. Kapalı yüzeyin içinde hiç elektrik yükü yoksa veya pozitif elektrik yüküne eşit miktarda negatif elektrik yükü varsa, bu durumda denk.(2.16),

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde yazılır. Burada ϵ_0 boşluğun dielektrik sabitidir ve değeri; $E(V/m)$, $S(m^2)$ ve $Q(C)$ cinsinden ölçülürse, $\epsilon_0=(10^{-9}/9.4\pi)=8,86.10^{-12}(F/m)$ dir.

Bu kapalı yüzey herhangi bir yalıtkan madde içerisinde bulunuyorsa, denk.(2.16) nın bütün yalıtkan maddelere uygulanabilmesi için, bu denklemi yalıtkan maddelerin bir karakteristiği olan bir katsayı ile çarpmak gerekir. ϵ_r ile gösterilen bu katsayıya, yalıtkan maddenin bağlı dielektrik sabiti adı verilir. Bu durumda denk.(2.16)

$$\epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q \quad (2.18)$$

şeklini alır. ϵ_r nin değeri yalıtkanın cinsine bağlı olup, sıcaklıkla ve diğer bazı şartlarla bir miktar değişir.

Eğer birçok yalıtkan madde içerisinde geçen kapalı bir yüzey düşünülecek olursa; bu durumda integrasyon yüzeyi kısmen hava, kısmen yağ ve kısmen bir diğer madde olabilir. Bu, bir yalıtkan maddeden diğerine geçişte ϵ_r nin değişmesi demektir. Dolayısıyla denk.(2.18), daha genel olarak

$$\oint \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ konularak

$$\oint \epsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada ϵ , sözkonusu yalıtkan maddenin mutlak dielektrik sabiti dir. Eğer

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

ile gösterilirse, denk.(2.20)

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.22)$$

şeklini alır. D ye elektriksel akı yoğunluğu veya kısaca deplasman vektörü denir. Deplasman vektörünün herhangi bir yüzey boyunca integrali, bu yüzeyden geçen elektrik akısını tanımlar ve ψ harfi ile gösterilir.

$$\psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (2.23)$$

Buna göre denk.(2.22) nin sol tarafı kapalı yüzeyden çıkan elektrik

akısını ve sağ tarafı da bu kapalı yüzey içinde kalan elektrik yükünü gösterir. Demek ki bir kapalı yüzeyden çıkan elektrik akısı, bu yüzey içinde kalan elektriksel yüklerin cebirsel toplamına eşittir:

$$\psi = Q \quad (2.24)$$

Denk.(2.22) ye vektör analizinden bilinen Green teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dv = \int (\text{div } \vec{D}) \cdot dv = Q \quad (2.25)$$

elde edilir. İçinde elektrik yükü bulunmayan bir bölgede $Q=0$ ve dolayısıyla

$$\int (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dv = \int (\text{div } \vec{D}) \cdot dv = 0 \quad (2.26)$$

ve buradan da

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \text{veya} \quad \text{div } \vec{D} = 0 \quad (2.27)$$

yazılır. Eğer $Q \neq 0$ ise, diverjans sıfır değildir ve bunu, ρ ile gösterilen hacimsel yük yoğunluğu cinsinden ifade etmek uygun olacaktır. Böylece kapalı bir yüzey içindeki elektrik yükü, yük yoğunluğunun bu yüzey içindeki hacimsel integraline eşit, yani

$$\int \rho \cdot dv = \int (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dv = \int (\text{div } \vec{D}) \cdot dv = Q \quad (2.28)$$

olduğundan

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{veya} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (2.29)$$

bulunur. Bu denklem, dielektrik sabitinin noktadan noktaya değişmediği homojen bir madde içinde

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(2.30), elektrik alanı ile yük arasındaki bağıntıyı vermektedir. Denk.(2.15), denk.(2.30) da yerine yazılırsa, potansiyel ile yük yoğunluğu arasındaki bağıntı elde edilir:

$$\nabla (\nabla \cdot \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \nabla^2 \cdot \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \text{div (grad } \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.31)$$

Denk.(2.31), ikinci dereceden diferansiyel bir denklemdir ve buna Poisson denklemi denir. Elektrik yükü bulunmayan bir uzay parçası içinde

$$\nabla^2 \cdot \phi = 0 \quad (2.32)$$

yazılabilir. Buna da Laplace denklemi denir. Laplace denklemi, kartezyen koordinat sisteminde açık olarak

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.33)$$

şeklindedir. Alanın sadece x eksenini boyunca değişmesi halinde, potansiyel

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.34)$$

ve elektrik alan şiddeti de

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.35)$$

den hesaplanabilir (Özkaya, 1988).

2.3.2. Dinamik Elektrik Alanlarının Hesabı

Statik elektrik alanına ait klasik hesaplamalarda, malzemenin elektriksel iletkenlik değerinin yalıtkan kısımlar için sıfır, iletken kısımlar için de sonsuz olduğu farzedilir. Eğer bir dielektrik ortamda elektriksel iletkenlik sıfırdan farklı ise, o zaman statik elektrik alan çözümleri hatalı olabilir. Eğer rölaksasyon zamanı ϵ/σ , enerjilendirme periyodundan daha büyük değilse; E , σ ya bağımlıdır. Böyle dinamik alan durumlarında E , genellikle bölgenin farklı kısımlarında farklı anlarda pik yapar.

E için diferansiyel eşitlik, süreklilik denkleminde türetilebilir :

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.36)$$

Burada J akım yoğunluğu, ρ hacimsel yük yoğunluğu ve t zamandır.

* Elektrik akı yoğunluğu \vec{D} 'yi tanımlayan diğer bir eşitlik ise

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.37)$$

olmak üzere

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.38)$$

şeklindedir. Denk.(2.37), denk.(2.36) da yerine konulursa

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) \quad (2.39)$$

olur. Böylece

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Ohm Kanunu olan

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.41)$$

ve denk.(2.38) kullanılarak

$$\nabla \cdot \left(\sigma \vec{E} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.42)$$

yazılır (Marshall ve Skitek, 1990). Açısal frekans $\omega = 2\pi \cdot f$ olarak, f frekanslı sinüsoidal E durumu için denk(2.42)

$$\nabla \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} = 0 \quad (2.43)$$

şekline girer. Faraday Kanunundan,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.44)$$

yazılır. Ayrıca

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.45)$$

dır. Burada \vec{B} magnetik akı yoğunluğu ve \vec{A} magnetik vektör potansiyeldir. Böylece denk.(2.44)

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.46)$$

olur. Parantez içindeki büyüklük, skalar potansiyel ϕ nin gradyantıdır :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \quad (2.47)$$

Buradan da

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.48)$$

elde edilir. Eğer sağ tarafın ikinci terimi, birinci terime göre çok küçükse

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.49)$$

yazılarak bu eşitlik, denk.(2.43) de yerine konulursa

$$\nabla \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \nabla\phi = 0 \quad (2.50)$$

ve açık olarak

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma + j\omega\epsilon) \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma + j\omega\epsilon) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (2.51)$$

elde edilir. Denk.(2.50), sinüsoidal elektrik alanları için diferansiyel eşitliktir. $(\sigma + j\omega\epsilon)$ terimi, kompleks dielektrik sabitidir. Bu ifade, kompleks bağıl dielektrik sabiti olarak $\epsilon'_r = \sigma/\epsilon_0 + j\omega\epsilon_r$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\sigma=0$ ise, statik elektrik alanları için bilinen

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla\phi = 0 \quad (2.52)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $\omega\epsilon \ll \sigma$ ise; o zaman denk.(2.50), iletken malzemelerdeki akım akışı için bilinen

$$\nabla \cdot \sigma \nabla\phi = 0 \quad (2.53)$$

denkleme dönüşür. Şu halde denk.(2.50), $(\partial\vec{A}/\partial t) \ll \phi$ olması durumunda elektrik alanları için genel bir denklemdir. Ayrıca magnetik alanların E üzerinde ihmal edilebilir bir etkiye sahip olduğu farzedilerek denk.(2.50), herhangi bir iletken ve dielektrik malzeme için sinüsoidal zaman değişkenli E 'yi hesaplar (Brauer, 1989).

Dinamik elektrik alanlarının incelenmesini sağlayan kompleks dielektrik sabiti

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (2.54)$$

(Kuffel ve Zaengl, 1984) ve

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (2.55)$$

şeklinde de verilmiştir (Denegri vd., 1975). Bağıl kompleks dielektrik sabiti ise,

$$\bar{\epsilon}_r = \epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon_0} \quad (2.56)$$

şeklinde verilmiştir (Tareev, 1978). Denk.(2.55) 'in her iki tarafı ϵ_0 ile bölünürse, denk.(2.56) 'nın bulunacağı görülmektedir.

Denk.(2.50) de eşitliğin her iki tarafı $-j$ ile çarpılıp ω ile bölünürse

$$\nabla \left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \nabla \phi = 0 \quad (2.57)$$

elde edilir. Burada $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ve $\omega = 2\pi \cdot f$ olmak üzere, parantez içindeki terim kompleks mutlak dielektrik sabitini gösterir.

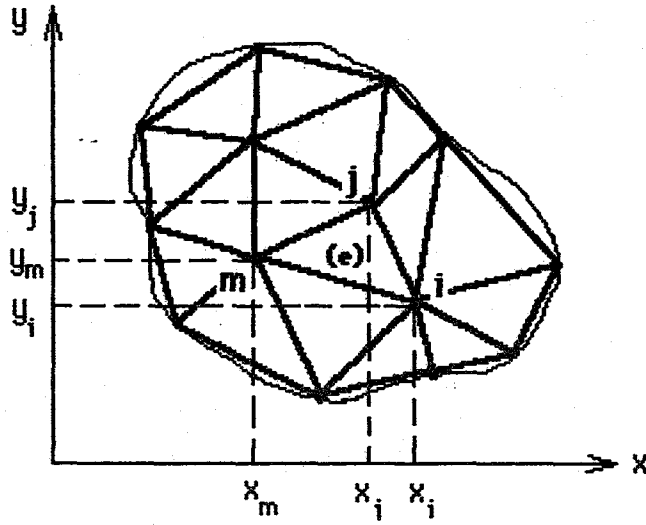
BÖLÜM 3

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

3.1. Giriş

Sonlu Elemanlar Yönteminin elektrik mühendisliğinde kullanılması, ilk olarak Winslow ile 1965 yılında başlamıştır. 1969 'dan sonra Silvester ve Chari'nin çalışmaları ile gelişerek tüm dallarda uygulama alanı bulmuştur. Bu yöntemin esası, karmaşık sınır koşulları nedeniyle tüm çözüm bölgesi için bir potansiyel fonksiyonu bulmanın mümkün olmadığı durumlarda, çözümün sonlu küçük elemanlar içinde aranmasına dayanır. Mühendislik problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile incelenmesinde, işlem basamakları olarak aşağıda açıklanan altı temel adım izlenir:

(a) Çözüm bölgesinin bölmelenmesi : Süreklilik problemlerinde alan değişkeni, çözüm bölgesindeki noktalara ilişkin bir fonksiyondur. Dolayısıyla alan değişkeninin sonsuz sayıda değerleri vardır ve problem sonsuz sayıda bilinmeyenlidir. Problemin sonlu sayıda bilinmeyenli duruma indirgenmesi amacıyla birinci adım olarak çözüm bölgesi sonlu sayıda elemanlar ile bölmelenir. Elemanlar üçgen, dörtgen, hexahedron, izoparametrik, vb. şekillerde ve değişik büyüklüklerde seçilebilir. Bu seçim, problemin tek, iki veya üç boyutlu olması durumu ve inceleme altındaki malzeme veya cihazın sınırları da gözönüne alınarak yapılır. Düzensiz şekillerde ve gelişmiş güzel bölümlendirmelerde üçgen elemanlar kolaylık sağlar. Şekil 3.1 de görüldüğü gibi, bu elemanlar sınır yüzeylere kolayca uyum sağlar. Böylece çözüm bölgesi, istenilen büyüklük ve sıklıkta elemanlar ile bölmelenerek düğüm sayısı ve dolayısıyla çözüm denklemlerinin sayısı değiştirilebilir.



Şekil 3.1. Çözüm bölgesinin bölmelenmesi.

(b) Şekil (Enterpolasyon) Fonksiyonlarının seçilmesi : İkinci adımda, her bir elemanı belirleyen düğümler yardımıyla o eleman üzerinde veya içinde alan değişkeninin değişimini gösteren Şekil Fonksiyonunun tipi seçilir. Alan değişkeni skalar, vektörel veya yüksek dereceli bir tensör olabilir. Çoğu zaman alan değişkeni için polinomlar seçilir. Çünkü bunların integral ve türevlerini almak kolaydır. Polinomlar lineer, kuadratik, kübik, vb. yapıda olabilirler.

(c) Eleman özelliklerinin bulunması : Her bir elemanın özelliklerini tanımlayan matris eşitliklerinin bulunması, üçüncü adımı oluşturur. Bunun için kullanılan yaklaşımlardan bazıları; Direk Yaklaşım, Varyasyonel Yaklaşım, Ağırlıklı Artıklar Yaklaşımı ve Enerji Dengesi Yaklaşımıdır.

(d) Eleman özelliklerinin birleştirilmesi : Tüm sistemi modelleyen özellikleri bulmak için elemanların ayrı ayrı olan özellikleri birleştirilir ve problemin sınır şartları sisteme yerleştirilerek sonuç denklem sistemi çözüme hazır duruma getirilir.

(e) Denklem sisteminin çözümü : Dördüncü adımda elde edilen sonuç denklem sistemi, alan değişkeninin bilinmeyen değerlerini hesaplamak üzere çeşitli yöntemlerden yararlanarak çözülür. Eğer denklemler lineer ise; Gauss Elimination, Cholesky Decomposition gibi direk yöntemler veya Gauss Seidel, SOR (Successive Over Relaxation) gibi iteratif yöntemler kullanılabilir. Eğer denklemler nonlineer ise, bunların çözümünü elde etmek daha zordur ve Newton-Raphson gibi iteratif yöntemlerden yararlanır.

(f) İstenen diğer hesaplamaların yapılması : Sisteme ait bazı önemli parametreleri hesaplamak için denklem sisteminin çözüm sonuçları kullanılabilir. Örnek olarak, elektrik alanlarının incelenmesini sağlayan Laplace denklemine ilişkin çözüm sonuçları sistemin potansiyel dağılımını verir. Eğer istenirse, düğümlerin potansiyel değerlerinden yararlanarak alan şiddeti, depolanan enerji ve kapasite gibi hesaplamalar da yapılabilir (Huebner ve Thornton, 1982 ; Rao, 1989).

3.2. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh- Ritz Yöntemi

Rayleigh-Ritz yöntemi, varyasyonel formda ifade edilen problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yöntemdir. Yani yöntem, problemin çözümünde Varyasyonel Yaklaşımdan yararlanır.

Şekil 3.1 deki bölmelemede bir tek üçgen elemanı gözönüne alalım.

Yöntemin uygulanması için, önce

$$\phi_{(x,y)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^2 y + \dots \quad (3.1)$$

gibi yüksek dereceli polinomlarla tanımlanan bir deneme fonksiyonu seçilmelidir. Bu deneme fonksiyonunun, basit olarak

$$\phi_{(x,y)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (3.2)$$

şeklinde birinci dereceden bir polinom olduğunu farzedelim. Eğer üçgenin köşelerinde potansiyeller ϕ_i , ϕ_j ve ϕ_m ise, deneme fonksiyonu her bir köşe noktasında, o köşenin potansiyel değerini sağlamak zorunda olacağından,

$$\phi_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$

$$\phi_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j \quad (3.3)$$

$$\phi_m = \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m$$

ifadeleri yazılabilir. Üçgenin alanı ise, köşe koordinatları cinsinden

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dir. Denk.(3.3) 'ten α_0 , α_1 ve α_2 değerleri kolayca bulunur. Aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} b_i &= y_i - y_m \\ b_j &= y_m - y_i \\ b_m &= y_i - y_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} c_i &= x_m - x_i \\ c_j &= x_i - x_m \\ c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve bu değerler Denk.(3.2) 'de yerlerine yazılırsa

$$\phi(x,y) = N_i(x,y) \phi_i + N_j(x,y) \phi_j + N_m(x,y) \phi_m \quad (3.9)$$

bulunur (Itaka vd., 1980). Burada kullanılan N fonksiyonlarına Şekil Fonksiyonları veya Enterpolasyon Fonksiyonları denir. Böylece elde edilen $\phi(x,y)$ deneme fonksiyonu, üçgenin köşeleri dâhil her tarafında geçerlidir. Her köşede o köşeye ait şekil fonksiyonunun değeri 1, diğer köşelere ait şekil fonksiyonlarının değeri sıfırdır.

Her bir üçgen eleman içinde, potansiyel fonksiyonunun Laplace diferansiyel denklemini sağladığı varsayıldığından, homojen sınır koşullarında Laplace denklemine karşı düşen fonksiyonel

$$F = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.10)$$

dir. Potansiyel fonksiyonları yerine Denk.(3.9) kullanılırsa

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial x} = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m) / 2\Delta \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial y} = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m) / 2\Delta \quad (3.12)$$

ve böylece

$$F = \left[\frac{(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy + \left[\frac{(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy \quad (3.13)$$

bulunur. Buradan

$$\Delta = \iint dx dy \quad (3.14)$$

olmak üzere

$$F = \frac{1}{4\Delta} \left[(b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_m\phi_m)^2 + (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_m\phi_m)^2 \right] \quad (3.15)$$

elde edilir. $F = f(\phi_i, \phi_j, \phi_m)$ de F yi minimum yapan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerlerini bulmak için, değişkenlere göre kısmi türevler alınırsa, ϕ_i için

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 2 \left[\frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4\Delta} \phi_i + \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta} \phi_j + \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4\Delta} \phi_m \right] \quad (3.16)$$

yazılır. Burada $S_{ji}=S_{ij}$, $S_{mi}=S_{im}$ ve $S_{mj}=S_{jm}$ olarak

$$S_{ii} = \frac{b_i^2 + c_i^2}{4\Delta} \quad (3.17)$$

$$S_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta} \quad (3.18)$$

$$S_{im} = \frac{b_i b_m + c_i c_m}{4\Delta} \quad (3.19)$$

ve benzer şekilde

$$S_{jm} = \frac{b_j b_m + c_j c_m}{4\Delta} \quad (3.20)$$

$$S_{jj} = \frac{b_j^2 + c_j^2}{4\Delta} \quad (3.21)$$

$$S_{mm} = \frac{b_m^2 + c_m^2}{4\Delta} \quad (3.22)$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \phi_i} &= 2 \left(S_{ii} \phi_i + S_{ij} \phi_j + S_{im} \phi_m \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_j} &= 2 \left(S_{ji} \phi_i + S_{jj} \phi_j + S_{jm} \phi_m \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_m} &= 2 \left(S_{mi} \phi_i + S_{mj} \phi_j + S_{mm} \phi_m \right)\end{aligned}\quad (3.23)$$

olur. Enerji fonksiyonelinin minimum yapmak için gerekli minimizasyon şartı

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi_i} + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} + \frac{\partial F}{\partial \phi_m} = 0 \quad (3.24)$$

dır ve böylece sistem denklemleri matris formda

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

olarak yazılır (Silvester ve Ferrari, 1983 ; Rao,1989).

3.3. Galerkin Yöntemi

Fonksiyonelin bilinmediği durumlarda Varyasyonel hesap yönteminden faydalanamayız. Galerkin yönteminde fonksiyonele ihtiyaç yoktur; bu yöntemde doğrudan diferansiyel denklemden çözüme gidilir.

$$\Delta \phi = -g \quad (3.26)$$

ifadesinin tam çözümü ϕ_0 olsun. Bu durumda asıl diferansiyel denklem,

$$\epsilon = \Delta \phi_0 + g = 0 \quad (3.27)$$

eşitliğinden görüldüğü gibi, tam çözüm için sifıra eşittir. Tam çözüm olmayan bir deneme fonksiyonu ϕ_d için ise, diferansiyel denklem sifırdan farklı olacaktır:

$$\epsilon = \Delta \phi_d + g \neq 0 \quad (3.28)$$

ϵ ile gösterilen fark ifadesine dik öyle bir W ağırlık fonksiyonu vardır ki, ϵ ile çarpımının integrali sıfırdır.

$$\int \epsilon W \, dx \, dy = 0 \quad (3.29)$$

W ağırlık fonksiyonuna, şekil fonksiyonu da denilebilir. ϵ fark fonksiyonu

$$\epsilon = \Delta\phi^e + g \quad (3.30)$$

ve W ağırlık fonksiyonu da

$$W = \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dır. ϵ ve W nin bu değerleri Denk.(3.29) da yerlerine yazıldığında

$$\int_R (\Delta\phi^e + g) \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} dx dy = 0 \quad (3.32)$$

elde edilir. Buradaki üç denklemden birincisini ele alalım.

$$\int_{R^*} (\Delta\phi^e + g) N_1^e \, dx \, dy = 0 \quad (3.33)$$

şeklinde olan birinci denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{R^*} \Delta\phi^e N_1^e \, dx \, dy = - \int_{R^*} g N_1^e \, dx \, dy \quad (3.34)$$

Bu ifade Green teoreminden faydalanılarak,

$$\int_{R^e} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \oint_{\Gamma^e} N_1^e \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilir.

Sağ taraftaki ikinci terim, çözüm bölgesini sınırlayan eğrinin tamamı veya bir kısmı üzerinde geçerli olan sınır şartlarını probleme dahil etmeyi sağlar. Sağ taraftaki birinci terimin çözümü için ise, ifadeler aşağıdaki gibi açık yazılırsa,

$$\nabla \phi^e = i \frac{\partial \phi^e}{\partial x} + j \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \quad (3.36)$$

$$\nabla N_1^e = i \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + j \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \quad (3.37)$$

olur. Bu ifadelerin çarpımından, sadece $i \cdot i = 1$ 'li ve $j \cdot j = 1$ 'li terimlerin katsayıları elde edilir. Diğer katsayılar, dik iki vektörün skaler çarpımı nedeni ile sıfır olacaktır. Sonuçta

$$\nabla \phi^e \nabla N_1^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \quad (3.38)$$

$$\nabla \phi^e \nabla N_1^e = \left(\phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \frac{\partial N_1}{\partial x} + \left(\phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad (3.39)$$

bulunur. Görüldüğü gibi

$$S_{11} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad (3.40)$$

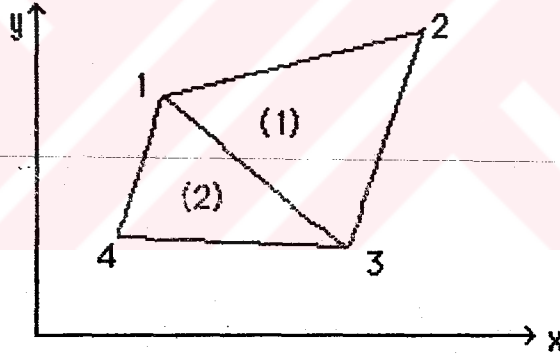
$$S_{12} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad (3.41)$$

$$S_{13} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad (3.42)$$

ifadeleri, daha önce Rayleigh-Ritz yöntemi ile elde edilen matris katsayılarına ilişkin ifadeler ile aynıdır. Denk.(3.32) 'nin diğer iki denklemine de benzer işlemler uygulanırsa, Denk.(3.25) ile verilmiş olan matrisin bütün elemanları hesaplanmış olacaktır.

3.4. Üçgen Elemanların Birleştirilmesi

Sonlu Elemanlar Yönteminde matematiksel çözümün doğruluğunu artırmak için, çözüm bölgesi çok sayıda elemana ayrıştırıldığından, elemanlar arası ilişkilerin belirlenmesi gerekir. Şekil 3.2 'de görüldüğü gibi iki eleman ile bölmelenmiş olan çözüm bölgesini ele alalım.



Şekil 3.2: İki üçgen eleman

Elemanlar arası ilişkileri belirlemek amacıyla, her bir eleman için Denk.(3.25) 'e uygun olarak ayrı ayrı hesaplanmış olan ve elemanların tüm özelliklerini belirleyen matris eşitliklerinden yararlanılır. Buna göre

$$\begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & S_{14}^1 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 & S_{24}^1 \\ S_{41}^1 & S_{42}^1 & S_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

eşitliği, (1) no.lu eleman denklemdir. (2) no.lu elemanın denklemi de

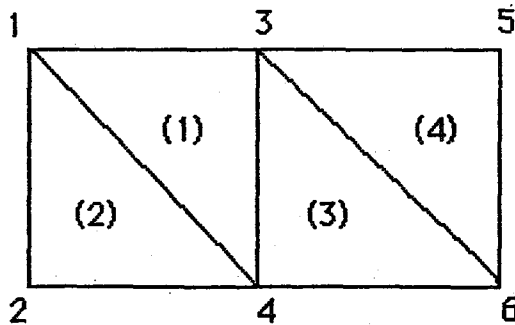
$$\begin{bmatrix} S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{31}^2 & S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

şeklinde olup, Denk.(3.43) ve Denk.(3.44) birleştirilirse

$$\begin{bmatrix} S_{11}^1 + S_{11}^2 & S_{12}^1 & S_{13}^1 + S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 & S_{23}^1 & 0 \\ S_{31}^1 + S_{31}^2 & S_{32}^1 & S_{33}^1 + S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & 0 & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

denklemler sistemi elde edilir (Chari, 1984). S terimlerinin üst indisleri eleman numaralarını, alt indisleri de düğüm numaralarını göstermektedir. Bu sonuç denklemler sisteminden anlaşılacağı gibi matrisin her bir katsayısı, bir düğüme komşu olan elemanlardan dolayı komşuluk ilişkisi bulunan diğer düğümlerden gelen katsayıların toplamından oluşmaktadır.

İkiden fazla elemanın ilişkisi de benzer şekildeki birleştirmeler ile elde edilir. Şekil 3.3 'deki dört elemanlı, altı düğümlü çözüm bölgesine ait



Şekil 3.3: Dört üçgen eleman

sonuç denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıda verilmiştir.

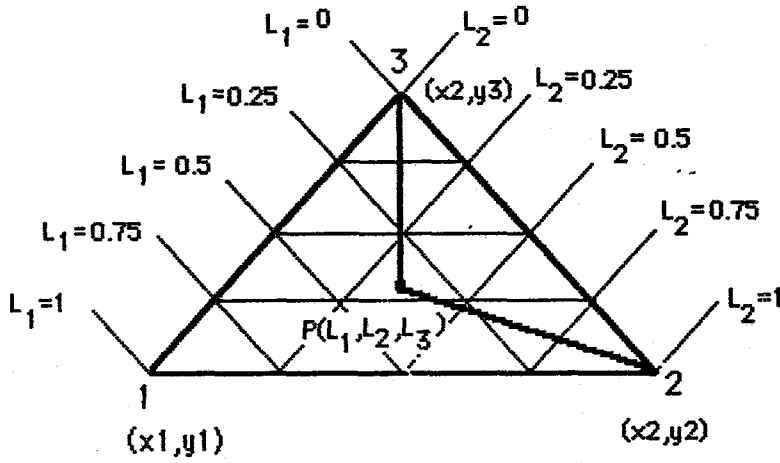
$$\begin{bmatrix}
 S_{11}^1 + S_{11}^2 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^1 + S_{14}^2 & 0 & 0 \\
 S_{21}^2 & S_{22}^2 & 0 & S_{24}^2 & 0 & 0 \\
 S_{31}^1 & 0 & S_{33}^1 + S_{33}^3 + S_{33}^4 & S_{34}^1 + S_{34}^3 & S_{35}^4 & S_{36}^3 + S_{36}^4 \\
 S_{41}^1 + S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^1 + S_{43}^3 & S_{44}^1 + S_{44}^2 + S_{44}^3 & 0 & S_{46}^3 \\
 0 & 0 & S_{53}^4 & 0 & S_{55}^4 & S_{56}^4 \\
 0 & 0 & S_{63}^3 + S_{63}^4 & S_{64}^3 & S_{65}^4 & S_{66}^3 + S_{66}^4
 \end{bmatrix}$$

Elde edilen katsayılar matrisine dikkat edilecek olursa, matrisin band yapıda olduğu görülür. Matrisin band genişliğini, bir üçgen elemanın iki düğüm numarası arasındaki fark sayısının en büyüğü olan sayı belirler. Yani band genişliğinin küçük tutulabilmesi için, komşu iki düğüm numarası arasındaki farkın mümkün olduğu kadar küçük olması gereklidir.

3.5. Alan Koordinatları, Şekil Fonksiyonları ve İzoparametrik Bölmeleme İle İlgili Temel Özellikler

Bu çalışmada, çözüm bölgesini bölmelemek için iki tip üçgen eleman kullanılmıştır. Birincisi, üç düğümlü üçgen elemanlardır. İkincisi ise, eğrisel kenarları iyi bir şekilde temsil etmek üzere izoparametrik curvilinear bölmelemeyi sağlayan altı düğümlü üçgen elemanlardır.

Üçgen elemanlar, sahip oldukları düğüm sayısına göre lineer, kuadratik, kübik, kuartik, kuintik ...vs. elemanlar olarak isimlendirilir. Bu elemanlar bir üçgen ailesi oluştururlar. Şekil 3.4 'te üçgen ailesinin elemanlarından bir kısmı gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Alan ve kartezyen koordinat sistemleri arasındaki ilişki.

(a) Doğrusal üçgen eleman için şekil fonksiyonları: Basit olarak alan koordinatlarıdır.

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2 \quad (3.48)$$

$$N_3 = L_3$$

(b) Kuadratik üçgen eleman için şekil fonksiyonları: Köşe düğümleri için

$$N_1 = (2.L_1 - 1).L_1$$

$$N_2 = (2.L_2 - 1).L_2 \quad (3.49)$$

$$N_3 = (2.L_3 - 1).L_3$$

ve kenarların ortasındaki düğümler için de

$$N_4 = 4.L_1.L_2$$

$$N_5 = 4.L_2.L_3 \quad (3.50)$$

$$N_6 = 4.L_3.L_1$$

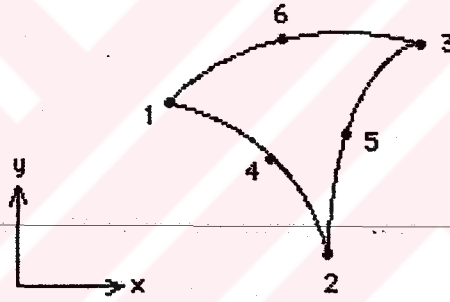
şeklindedir (Zienkiewicz, 1977 ; Ghassemi, 1982).

Şekil 3.6 'da gösterilen üçgen bölgenin altı anahtar düğümüne ait kartezyen koordinatların bilindiğini farzedelim. Eğer bu üçgen bölgede izoparametrik curvilinear bölmeleme yapılması istenirse, sınır üzerinde ve bölge içerisinde oluşturulacak düğümlerin kartezyen koordinatları,

$$X = \sum_{i=1}^6 N_i X_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^6 N_i Y_i$$
(3.51)

ile elde edilebilir.

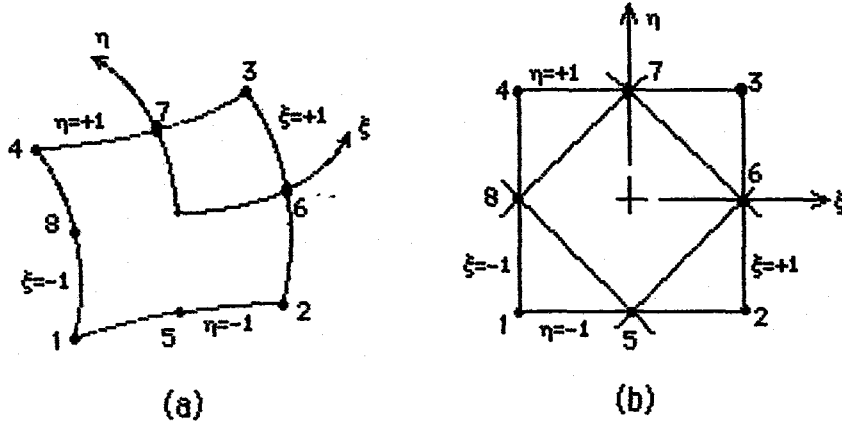


Şekil 3.6. İzoparametrik bölge.

İzoparametrik Curvilinear Bölmeleme İçin 8-Düğümlü Dörtgen Eleman Yardımıyla 6-Düğümlü Üçgen Eleman Elde Edilmesi:

8-düğümlü dörtgen eleman Serendipity ailesinin elemanlarından biridir. Düğümlerin 4 'ü elemanın köşelerinde, diğer 4 'ü de köşeleri birleştiren kenarların orta noktalarında bulunur (Şekil 3.7).

Elemanın köşe düğümleri için şekil fonksiyonlarını belirlemek üzere, örnek olarak 1 no.lu düğümü ele alalım. 1 no.lu düğümde $N_1=1$ ve diğer düğümlerde $N_1=0$ 'dır. Böylece N_1 ; $\xi=+1, \eta=+1$ ve $\xi+\eta=-1$ kenarları boyunca sıfır olur (Şekil 3.7a). Dolayısıyla N_1 ,



Şekil 3.7. (a) ξ - η ve (b) normalize edilmiş ξ - η koordinat sisteminde dörtgen eleman.

$$N_1 = c.(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (3.52)$$

olarak yazılır. 1 no.lu düğümde $N_1=1$ ve $\xi=\eta=-1$ olduğundan, bu değerler denk.(3.51) 'de yerlerine konularak $c=-1/4$ bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} N_1 &= (-1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ N_2 &= (1/4)(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_3 &= (1/4)(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_4 &= (1/4)(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta-1) \end{aligned} \quad (3.53)$$

olur. Kenarların ortasındaki düğümlerin şekil fonksiyonları ise, 5 no.lu düğüm için N_5 ; $\xi=+1$, $\eta=+1$ ve $\xi=-1$ kenarları boyunca sıfırdır. Dolayısıyla

$$N_5 = c.(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) \quad (3.54)$$

ve buradan da

$$N_5 = c.(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) \quad (3.55)$$

yazılır. Denk.(3.54) 'deki c sabiti, $\xi=0$, $\eta=-1$ 'de $N_5=1$ şartından belirlenir.

Böylece $c=1/2$ ve 5,6,7,8 no.lu düğümler için,

$$N_5 = (1/2) (1+\xi^2) (1-\eta)$$

$$N_6 = (1/2) (1+\xi) (1-\eta^2)$$

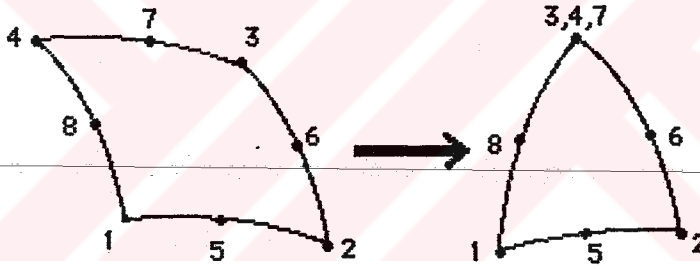
$$N_7 = (1/2) (1-\xi^2) (1+\eta)$$

(3.56)

$$N_8 = (1/2) (1-\xi) (1-\eta^2)$$

bulunur (Chandrupatla ve Belegundu, 1991).

Bir dörtgen bölgenin iki köşesinin çakıştığını düşünelim. Bu durumda dörtgen bölge bozulur ve bir üçgen bölgeye dönüşür (Şekil 3.8). Böyle bir üçgen bölge için kuadratik şekil fonksiyonu, dörtgen bölgeninki ile benzerdir.



Şekil 3.8. Dörtgen bölgenin üçgen bölgeye dönüşmesi.

Şekilden görüldüğü gibi 3, 4 ve 7 no.lu düğümler çakışmıştır. Sınır üzerine ve iç kısma gelecek düğümler, alan koordinat sistemi için denk.(3.52) ile tanımlanan yöntemle benzer şekilde üretilebilir.

3.6. Elektrik Alan Problemleri için Eşdeğer Devre Modelleri ve Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bilindiği gibi statik elektrik alanında potansiyel fonksiyonu aşağıda verilen Laplace denkleminin çözümü ile elde edilmektedir.

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$$

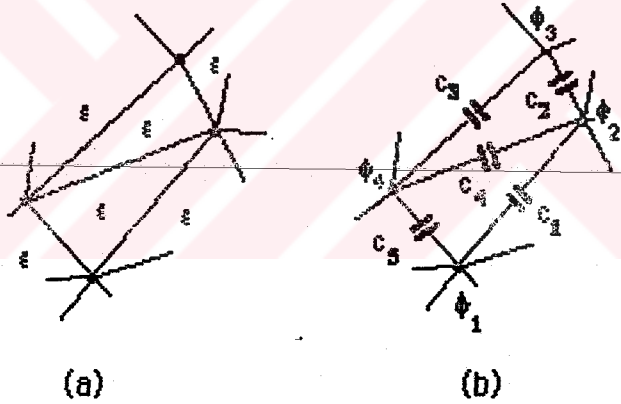
(3.57)

Dinamik elektrik alanında ise potansiyel fonksiyonu, Laplace denkleminde kompleks dielektrik sabiti kullanılmak suretiyle

$$\nabla \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \nabla \phi = 0 \quad (3.58)$$

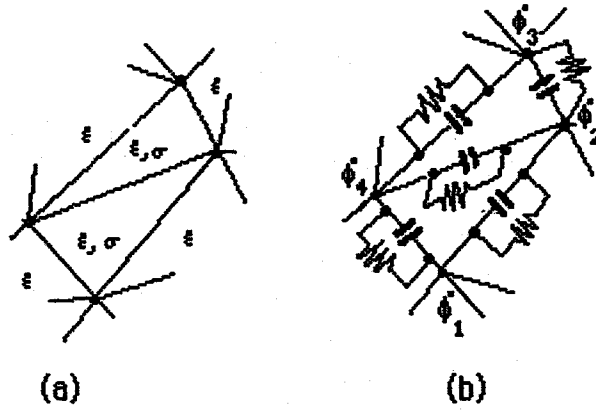
denklemini çözümlenerek hesaplanmaktadır.

Denk.(3.57) 'nin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümü, bölmeleme için kullanılan elemanın kenarları üzerindeki, yani düğümler arasındaki kapasitelerden dolayı kapasitif potansiyel dağılımını verir. Şekil 3.9, üçgen elemanların kullanıldığı bir bölgede Sonlu Eleman bölmelemesini ve kapasitif eşdeğer devreyi göstermektedir.



Şekil 3.9. (a) Üçgen eleman ile bölmeleme, (b) kapasitif eşdeğer devre.

Yüzeyi kirli veya ince yarıiletken tabakalı yalıtım cihazlarındaki potansiyel dağılımının hesaplanmasını sağlayan denk.(3.58) 'in çözümüne ilişkin Sonlu Eleman bölmelemesi ve eşdeğer devre de Şekil 3.10 'da verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi belirli bir σ iletkenliğine sahip olan elemanlarda, bu iletkenlik kapasiteye paralel bağlı birer direnç yardımıyla temsil edilmiştir. Böylece elde edilecek çözüm, kapasitif-rezistif potansiyel dağılımı olacaktır.



Şekil 3.10. (a) Üçgen eleman ile bölmeleme, (b) kapasitif-rezistif eşdeğer devre.

Şekil 3.10a 'daki sistemin Sonlu Eleman çözümü için denk.(3.58) 'e ilişkin enerji fonksiyonelini minimize etmek gerekir. Bu fonksiyonel

$$F = \vec{E} \cdot d\vec{D} \cdot dv + \frac{1}{j\omega} \cdot \sigma \cdot |\vec{E}|^2 \cdot dv \quad (3.59)$$

şeklinde dir. Birinci terim elektrik alanında depolanan enerjiyi, ikinci terim ise omik kayıplar olarak harcanan enerjiyi göstermektedir (Brauer,1989).

Şekil 3.9 'daki sistemin çözümü için ise, denk.(3.59) 'un sadece birinci terimi kullanılır. Minimizasyon için

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \quad (3.60)$$

dan yararlanılır. Bu eşitlik statik ve dinamik alanlar için Sonlu Elemanlar Yönteminin temelidir. Çözüm bölgesinin sonuç denklem sistemi olarak

$$[K][\phi] = 0 \quad (3.61)$$

elde edilir. Burada K matrisi, bölmelemenin geometrisi ve malzeme özellikleri yardımıyla belirlenmektedir.

BÖLÜM 4

OTOMATİK BÖLMELEME

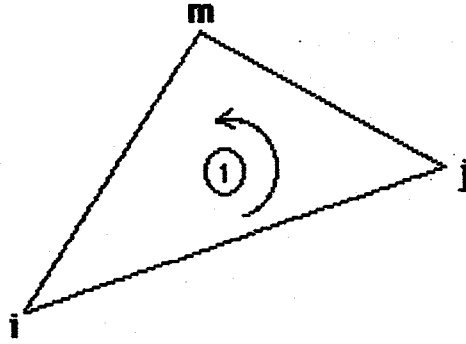
4.1. Genel Bilgi

Sonlu Elemanlar Yönteminin ortaya çıkmasıyla birlikte, otomatik veri üretimi çalışmaları da hemen başlamıştır. Çünkü yöntemin gereği olarak program, büyük miktarda giriş bilgisine ihtiyaç göstermektedir. Elemanları belirleyen düğümlerin numaraları ve koordinatları, malzeme özellikleri ve başlangıç değerleri gibi bilgilerden oluşan verilerin el ile hazırlanması ve bilgisayara girilmesi büyük zorluklara, zaman kaybına ve önemli yazım hatalarına yol açmaktadır. Bu zorluklardan kurtulmak ve Sonlu Eleman programlarının kullanımını kolaylaştırmak için otomatik veri üretimi konusunda oldukça fazla miktarda çalışmalar yapılmıştır (Kısım 1.3 e bakınız).

Bu bölümde, otomatik bölmeleme yöntemlerinden ikisi ele alınarak, özellikle eğrisel kenarlı problemlerde otomatik veri üretimi için izoparametrik elemanlardan yararlanılan ikinci yöntem üzerindeki geliştirme çalışmaları açıklanacaktır.

4.2. Otomatik Bölmeleme İçin Algoritma-I

Bu yöntemde, önce çözüm bölgesi mümkün olan en az sayıda üçgen elemanlara, el ile bölünmek suretiyle düğümlerin koordinatları, elemanları çevreleyen düğüm numaraları ve elemanların bulunduğu ortamın dielektrik sabitlerinden oluşan küçük bir başlangıç bilgisi tesbit edilir. Şekil 4.1 deki gibi tanımlanan her bir üçgen elemana aşağıdaki algoritma uygulanacaktır:



Şekil 4.1. Çözüm bölgesi içerisindeki bir üçgen eleman.

Her bir kenarın orta noktalarının birleştirilmesiyle, bir üçgen elemandan (NELEM) elde edilecek yeni eleman sayısı (NELEM_y),

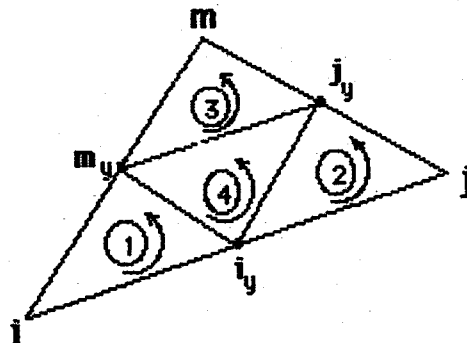
$$\text{NELEM}_y = 4 * \text{NELEM} \quad (4.1)$$

dir.

Şekil 4.2 de gösterildiği gibi uygulanan dönüş yönüne göre, elemanın ilk köşesinin bulunduğu yeni eleman birinci, ikinci köşenin bulunduğu yeni eleman ikinci, üçüncü köşenin bulunduğu yeni eleman üçüncü ve ortada meydana gelen eleman da dördüncü eleman olarak belirlenir.

Çözüm bölgesindeki toplam kenar sayısı,

$$\text{NSD} = (3 * \text{NELEM} + \text{NC}) / 2 \quad (4.2)$$



Şekil 4.2. Bir elemanın dört yeni elemana ayrıştırılması.

kadardır. Burada NC, bölgeyi sınırlayan ve aynı zamanda çevreleyen dış kenarların sayısını göstermektedir.

Elde edilecek yeni düğümlerin x_y koordinatları

$$x_{iy} = x_i + (x_j - x_i) / 2$$

$$x_{jy} = x_j + (x_m - x_j) / 2 \quad (4.3)$$

$$x_{my} = x_i + (x_m - x_i) / 2$$

olur. y_y koordinatları da x_y lerde olduğu gibi, indislerin permütasyonu yardımıyla hesaplanır.

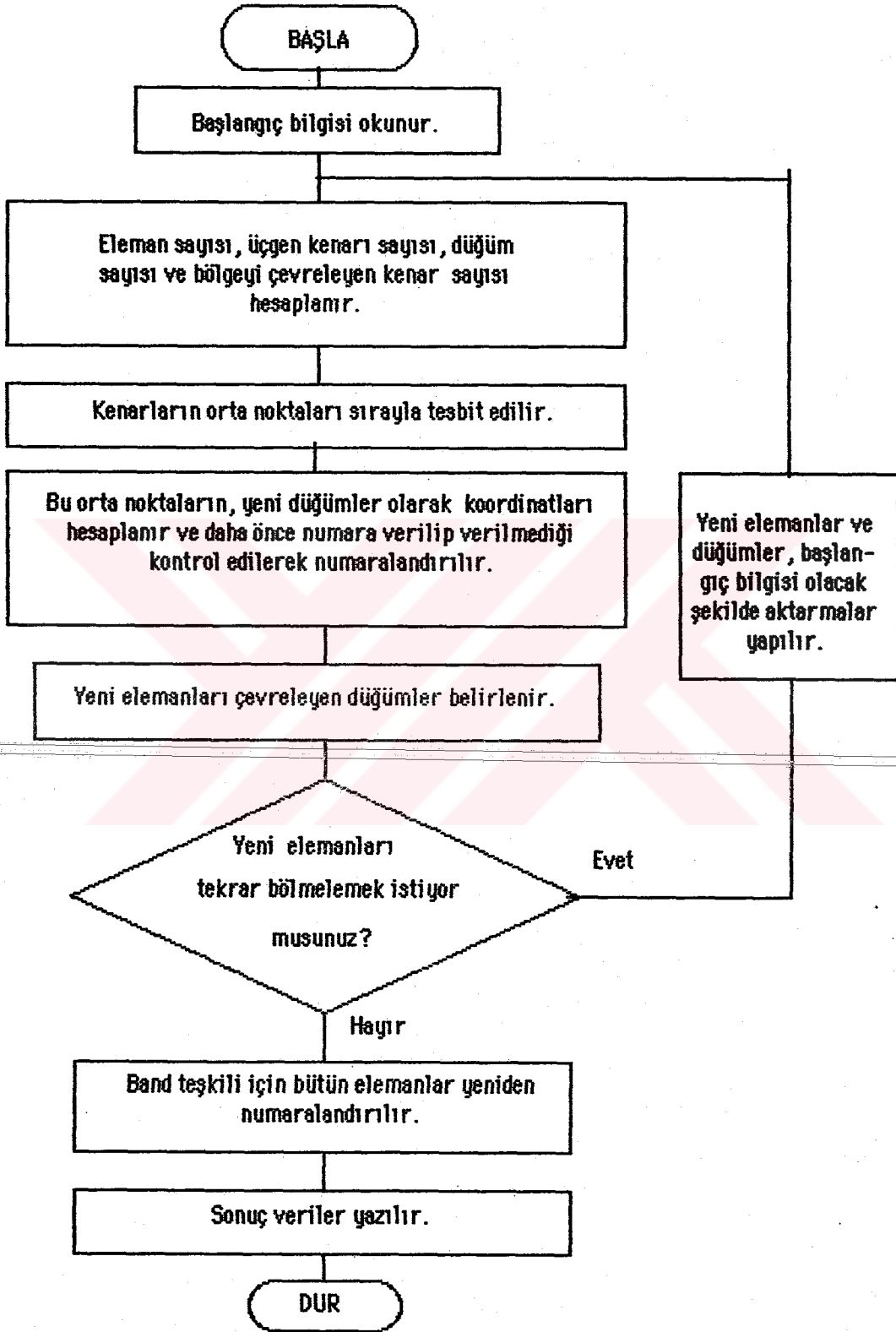
Bölmelemeden sonraki düğüm sayısı ($NPOIN_y$), bölmelemeden önceki düğüm sayısı ($NPOIN$) ile kenar sayısının toplamı (NSD) kadardır :

$$NPOIN_y = NPOIN + NSD \quad (4.4)$$

Bu bölmelemeyi sağlayan programın akış diyagramı Şekil 4.3 te verilmiştir.

Akış diyagramından da anlaşılacağı gibi program, istenilen sayıda yeniden bölmeleme yaparak eleman ve düğüm sayılarını artıracak ve sonuç verileri, band genişliği oldukça küçük olan bir band matris elde edecek şekilde geliştirilmiştir.

Matris çözümlerinde band yapının teşkili oldukça önemlidir. Bu sayede hem programda ayrılan boyut miktarları küçültülmek suretiyle çok büyük denklemlerin hafıza problemi olmaksızın direk metotlarla çözülebilmesi sağlanmakta ve hem de çözüm zamanı fevkalade kısalmaktadır. Ayrıca değişik dielektrikli bölgelerin bölmelemesi esnasında ortaya çıkan her yeni eleman için dielektrik katsayısı olarak, o bölgeye ait başlangıçtaki dielektrik katsayısı atanmaktadır.

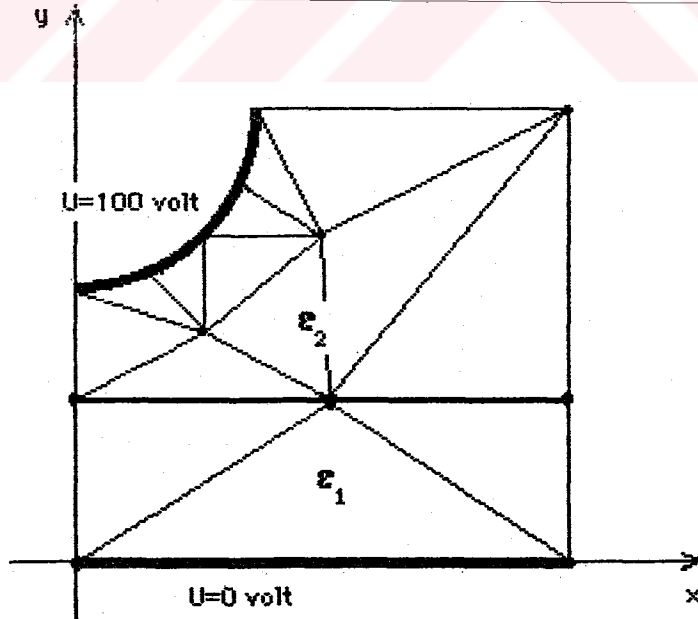


Şekil 4.3. Algoritma I için akış diyagramı.

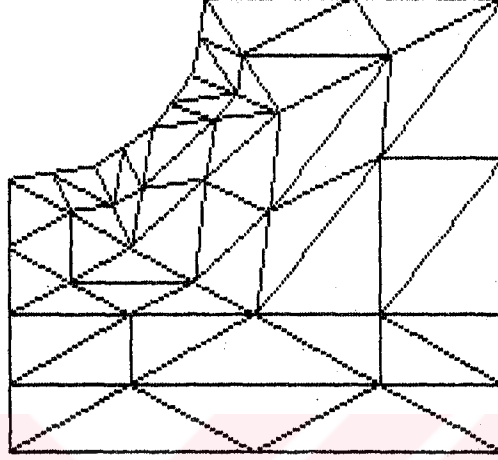
Bu yöntemle yapılan bölmelemeye bir örnek olması amacıyla Şekil 4.4 teki Silindir-Düzlem elektrod sistemi ele alınarak, 14 elemanlı ve 13 düğümlü küçük bir başlangıç bilgisi tesbit edilmiştir. Başlangıç bilgisinde, potansiyel değeri bilinen düğümler ile o düğümlerdeki potansiyel değerleri ve bütün elemanların sahip oldukları dielektrik sabiti değerleri belirlenmiştir.

Programa, otomatik bölmeleme sayısı (NKI), 1 olarak verildiğinde 56 elemanlı ve 39 düğümlü Şekil 4.5 elde edilir.

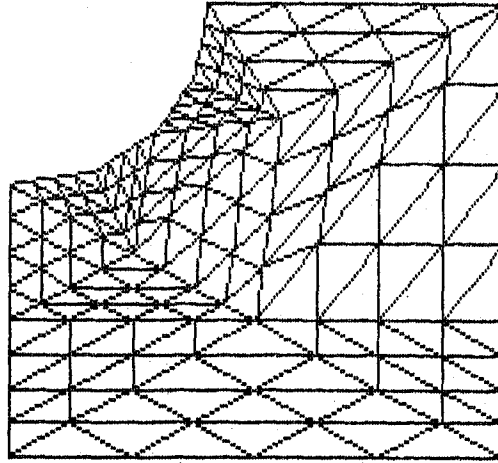
NKI=2 verilirse, 224 elemanlı ve 133 düğümlü Şekil 4.6 ve NKI=3 verilirse, 896 elemanlı ve 489 düğümlü Şekil 4.7 elde edilir. Görüldüğü gibi başlangıçta belirlenen NKI değerine göre, otomatik bölmeleme işlemi; her adımda bir elemandan dört yeni eleman oluşacak şekilde, tekrarlanarak yapılan bölmeleme ile gerçekleştirilmektedir.



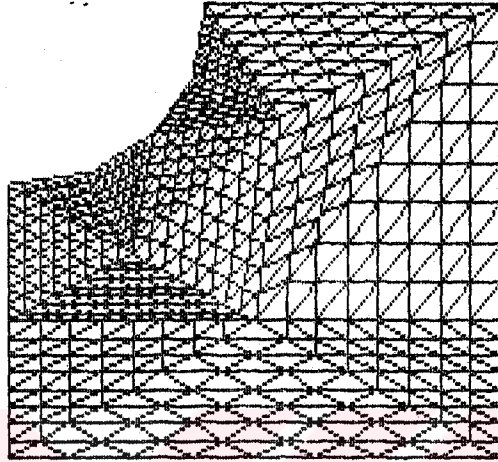
Şekil 4.4. Algoritma-I için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin başlangıç bölmelemesi.



Şekil 4.5. $NKI=1$ için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi.



Şekil 4.6. $NKI=2$ için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi.

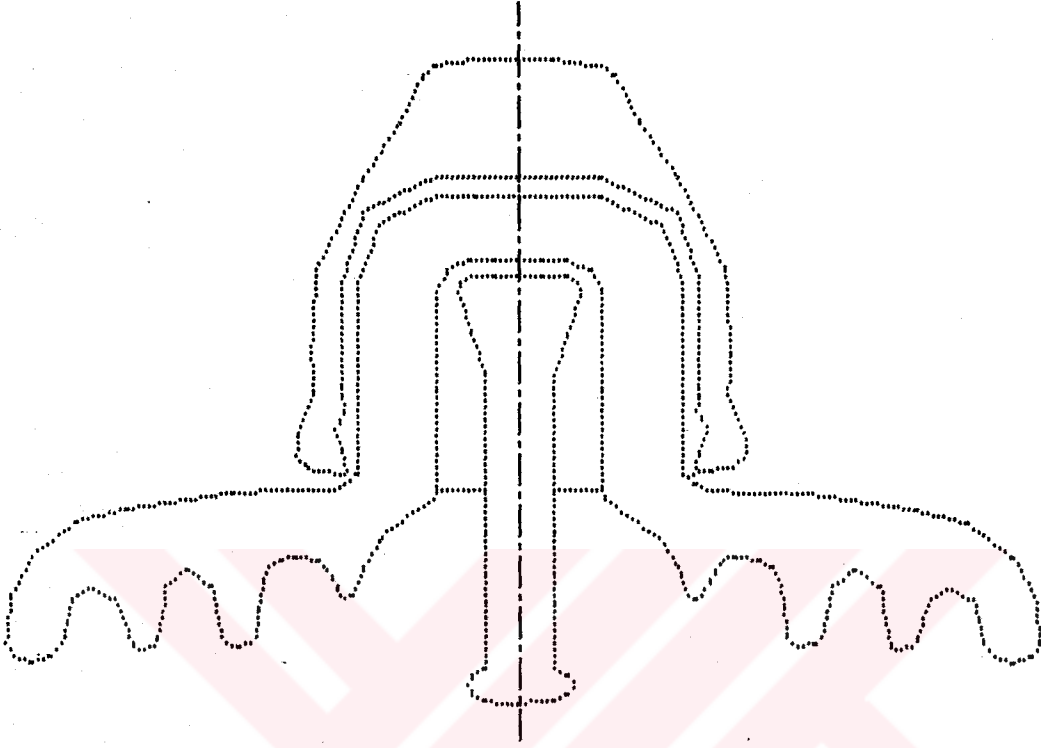


Şekil 4.7. $NK1=3$ için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin bölmelemesi.

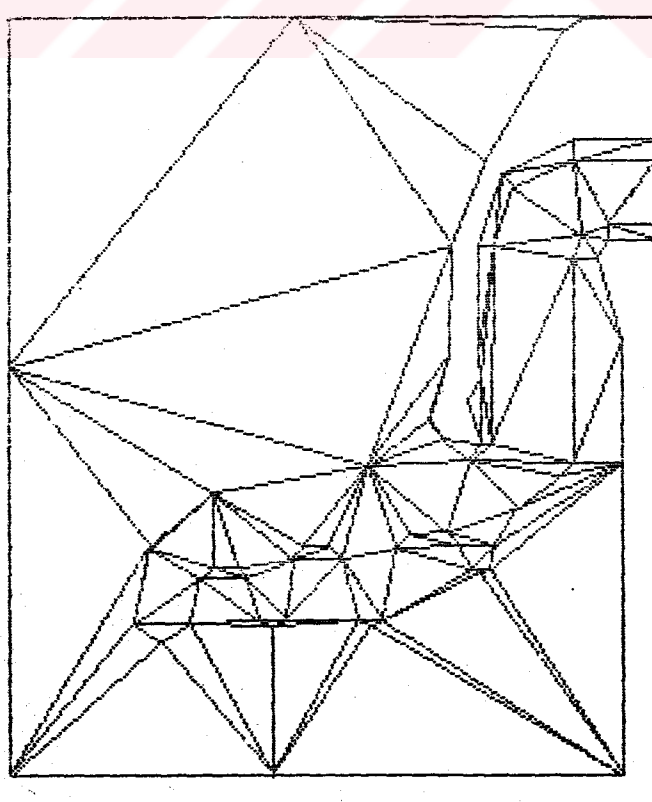
Başlangıç bilgisini değişik bir yapıda belirlemek suretiyle daha başka şekillerde otomatik bölmeleme yapmak mümkündür. Elektrodlar arasındaki değişik dielektrik malzemelerin sınırlarına uygun olarak tesbit edilen başlangıç bilgisi yardımıyla, istenen bölgelerin daha sık veya seyrek bölmelenmesi sağlanır.

Şekil 4.8 'de ele alınan örnek ise, bir zincir izolatör elemanına aittir. Eğrisel kenarların temsil edilebilmesi için 104 eleman ve 68 düğümüne sahip olan bir başlangıç bilgisi tesbit edilmiş ve Şekil 4.9 'da bu bölmeleme gösterilmiştir.

Bölmelemenin uygunluğu, başlangıç bilgisinin daha çok düğümlü (ve dolayısıyla daha çok elemanlı) olarak belirlenmesi ile sağlanabilir. Bu ise, program verilerinin hazırlanmasında önemli bir zorluk ve eğrisel kenarların temsil edilebilmesinde büyük bir dezavantajdır.



Şekil 4.8. Bir zincir izolatör elemanı.



Şekil 4.9. Zincir izolatör elemanının bölmelemesi.

4.3. Otomatik Bölmeleme İçin Algoritma-II

Bu yöntem, özellikle eğrisel kenarlı yüzeylerin üçgen elemanlar ile uygun bir şekilde bölmelenmesini sağlar.

Algoritma-I de anlatılan yöntemde, üretilen her bir yeni düğüm (ve dolayısıyla yeni üçgenlerin kenarları) başlangıç bilgisinde belirlenen kenarlar üzerindedir. Bu sebeple bir eğrinin, başlangıç bilgisinde temsil edildiği kenar sayısına bağlı olan modelleme hatası, otomatik bölmeleme sonucunda o eğri üzerindeki kenar sayısı artışından bağımsızdır ve bu artış ne kadar fazla olursa olsun, değişmemektedir.

Halbuki bu ikinci yöntem bir eğriyi, bölmeleme sonunda eşit sayıdaki doğru parçalarını eğrisel bir şekilde birleştirerek modellemektedir. Böylece çözüm bölgesi ne kadar küçük elemanlara bölünürse, bir eğri kenar da o kadar küçük doğru parçalarıyla teşkil edilmiş olacağından, çok daha iyi bir modelleme sağlanmış olur.

Algoritma-II, otomatik bölmeleme için hem Alan Koordinat Sistemini ve hem de Normalize Edilmiş Koordinat Sistemini kullanır.

Düğümler, köşelerin sayısına göre numaralandırılır. Bir kenar üzerindeki düğüm sayısı

$$INC=(NCO(2)-NCO(1)) / NDI \quad (4.5)$$

ile hesaplanır. Burada NCO(1) ve NCO(2), iki köşeyi belirleyen düğüm numaraları ve NDI, iki düğümü birleştiren kenar üzerindeki bölmeleme sayısıdır.

MERGE Algoritması

Farklı bölgeler, Merge Algoritmaları kullanılmak suretiyle birbiriyle bağlanabilir. Bu farklı bölgeler, herhangi bir sıra ile numaralanabilir. Algoritma, aynı düğümleri (aynı x,y,z koordinatlı olanları) bulacaktır.

Örnek olarak, eğer 1 ve 2 noktaları için

$$\text{ABS}(x_1 - x_2) \leq \text{ZONE}$$

$$\text{ABS}(y_1 - y_2) \leq \text{ZONE}$$

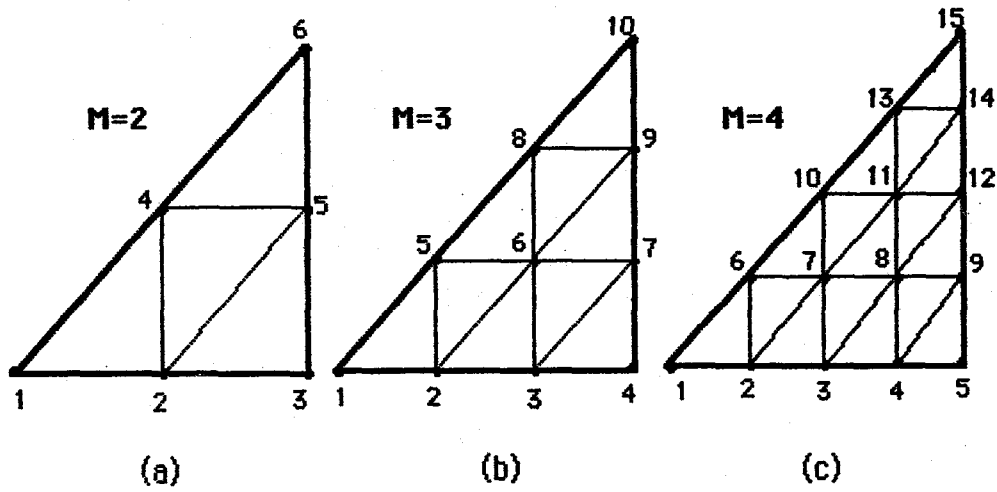
(4.6)

$$\text{ABS}(z_1 - z_2) \leq \text{ZONE}$$

ise, bu iki nokta aynıdır ve önce yüksek numaraya sahip olan düğüm, düğüm listesinden silinir. Burada ZONE, istenildiği kadar küçük seçilebilen (mesela 10^{-4} mertebesinde) bir sayıdır. Daha sonra düğüm listesi, ilk çakışan düğümden itibaren son düğüm numarasına kadar sırayla yeniden numaralanır. Elemanları çevreleyen düğümler de bu yeni numaralama dizisine uygun olarak tekrar belirlenir.

Bu bölmeleme yönteminin kullanımına ve sonuçlarına ait diğer bazı detaylar aşağıda açıklandığı gibidir :

Çözüm bölgesi, eğrisel kenarlar gözönüne alınmaksızın, mümkün olan en az sayıda üçgen elemana bölünür ve başlangıç bilgisi olarak; üçgen köşelerinin koordinatları (x_1, x_2, x_3) , kenarların orta noktalarına ait koordinatları (x_4, x_5, x_6) , her bir elemanın dielektrik sabiti $\text{EPS}(I)$, başlangıç potansiyel değeri bilinen kenar KOL ve bu potansiyelin değeri $\text{VAL}(\text{KOL})$ belirlenir. Eğer hiçbir kenar üzerinde potansiyel değeri bilinmiyorsa, KOL değeri sıfır alınır. Üçgenin herhangi bir kenarı eğrisel değil ise, o kenarın orta noktasında düğüm numarası belirlemeye gerek yoktur; x_4, x_5, x_6 için sıfır yazılır. Düğümlerin başlangıç numaraları, bir kenar üzerindeki bölmeleme sayısına bağlı olarak, uygun şekilde tesbit edilmelidir. Değişik bölmeleme durumları için düğümlerin nasıl numaralandırılacağı Şekil 4.10 'da gösterilmiştir. Burada M, üçgenin her bir kenarının kaç parçaya bölüneceğini belirleyen bölmeleme sayısıdır.



Şekil 4.10. Farklı M değerleri ile bir üçgen elemanın bölmelenmesi.

Şekil 4.10 'dan görüldüğü gibi bölmeleme sonunda elde edilecek eleman sayısı, M ile belirlenmektedir :

$$\text{NELEM} = M \cdot M \quad (4.7)$$

Bölmeleme sonunda meydana gelecek düğüm sayısı ise; M 'nin çift sayı olması durumunda ,

$$M=2 \text{ için } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M)$$

$$M=4 \text{ " } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M-1) \quad (4.8)$$

$$M=6 \text{ " } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M-2)$$

: :

şeklinde ve M 'nin tek sayı olması durumunda da,

$$M=3 \text{ için } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M-1) + (M-1)$$

$$M=5 \text{ " } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M-2) + (M-2) \quad (4.9)$$

$$M=7 \text{ " } \text{NPOIN} = (M+1) \cdot (M-3) + (M-3)$$

: :

şeklinde değişmektedir.

İki eleman birleştirildiğinde; toplam eleman sayısı iki katına yükselir, düğüm sayısı ise iki katından (M+1) kadar az olur.

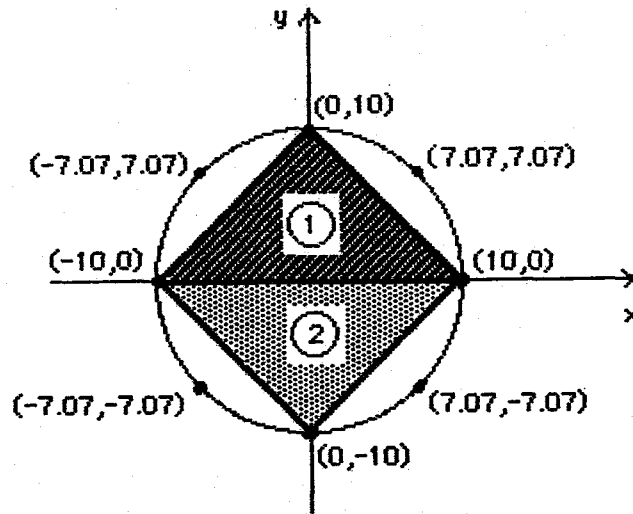
Bir çözüm bölgesi içerisindeki farklı üçgen elemanlar için, ayrı ayrı M 'ler kullanılabilir. Böylece istenen kısımların daha seyrek veya daha sık olarak üçgen elemanlara ayrıştırılması sağlanabilir. Bu yöntem ile eğrisel kenarlı bölgelerin nasıl bölmelendiğini açıklamak üzere Şekil 4.11 'i gözönüne alalım. Dairesel çözüm bölgesi el ile 2 üçgen elemana bölünerek, köşelerin koordinatları belirlenmiştir. Üçgen kenarlarının orta noktalarına ait koordinatlar, o kenarın temsil edeceği yayın orta noktasının koordinatı olarak tesbit edilir. Böylece üçgen elemanlar için köşelerin ve kenarların orta noktalarının koordinatları aşağıdaki gibi olacaktır :

1. eleman için: $(-10,0), (10,0), (0,10)$; $(0,0), (7.07,7.07), (-7.07,7.07)$

2. eleman için: $(10,0), (-10,0), (0,-10)$; $(0,0), (-7.07,-7.07), (7.07,-7.07)$

Çeşitli M değerleri kullanılmak suretiyle elde edilen program sonuçları Şekil 4.12-a-b 'de gösterilmiştir.

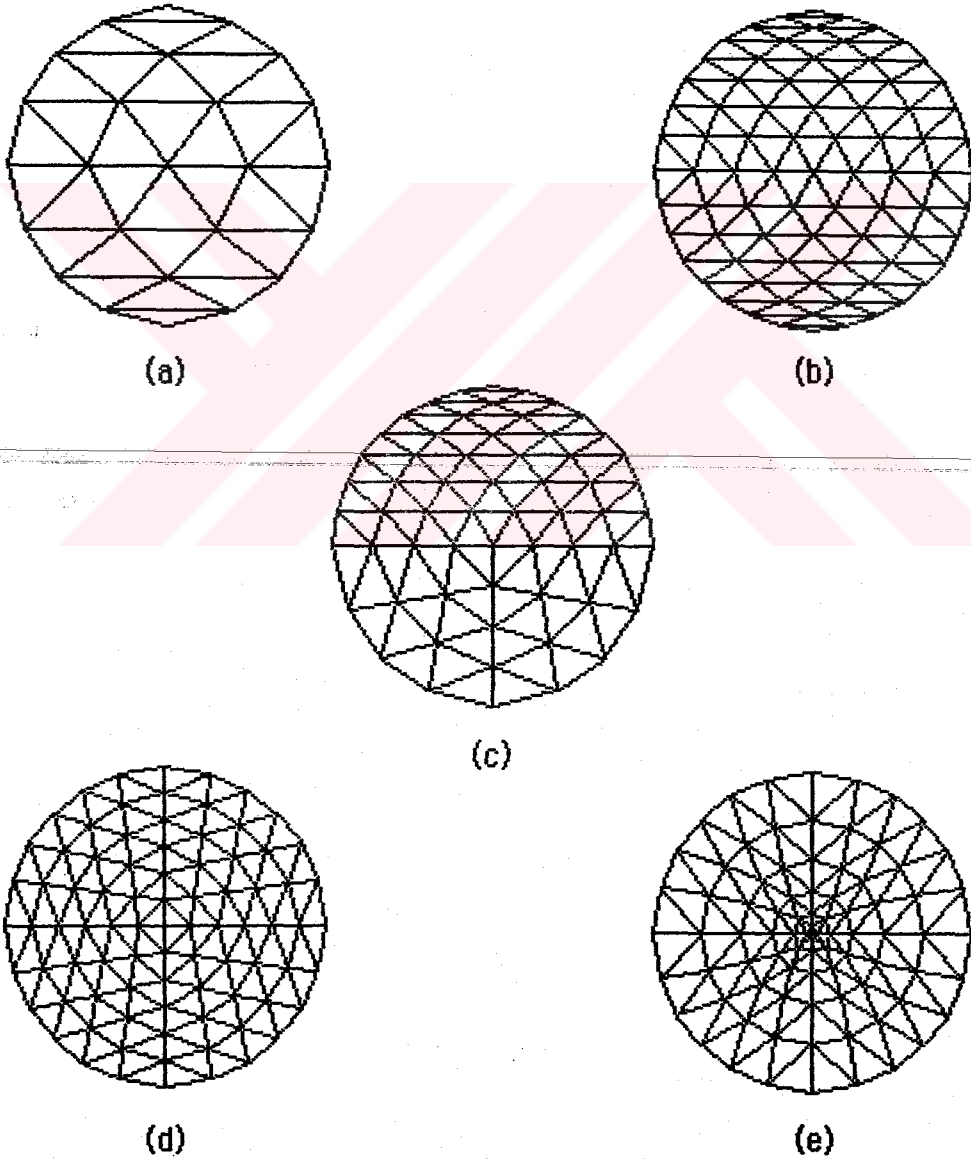
Şekil 4.11 'deki bölge, 3 üçgen veya 4 üçgen eleman ile bölmelenirse, Şekil 4.12-c-d; 4 üçgen ile bölmelenmede, kenarların orta noktalarına ilişkin koordinatlar değiştirilmek suretiyle Şekil 4.12-e elde edilir. Şekil 4.12-e



Şekil 4.11. Dairesel bölgenin iki üçgen ile bölmelenmesi.

gösteriyor ki, M değeri sabit kalmak şartıyla sadece üçgen kenarlarına ait orta noktaların koordinatları değiştirilerek farklı büyüklüklere sahip elemanlar üretilebilir ve istenen sıklıkta bölmeleme yapılabilir.

Bu algoritmayı kullanan programın akış şeması Şekil 4.13 'te verilmiştir.

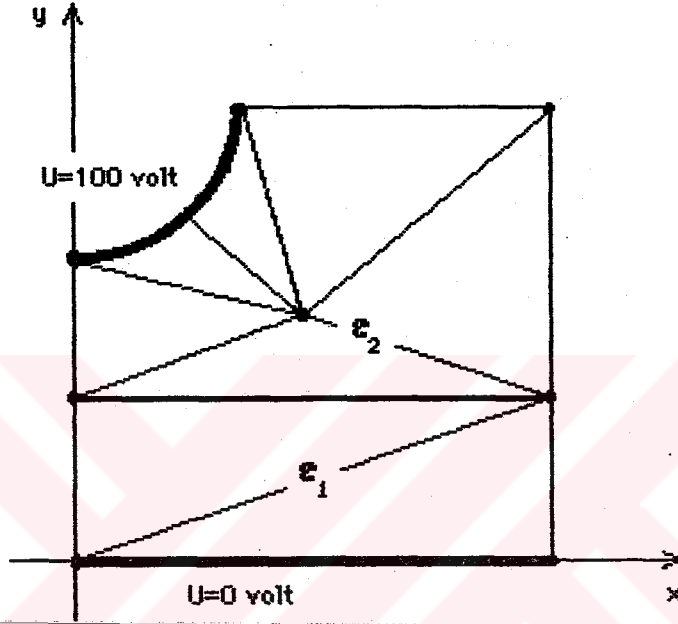


Şekil 4.11. Dairesel bir bölgenin bir üçgen elemanlar ile bölmeleme.

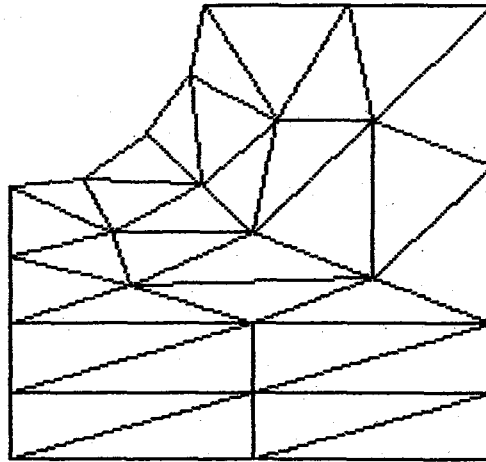


Şekil 4.13. Algoritma-II için akış diyagramı.

Bu yöntem için ikinci örnek, Algoritma-I 'deki Silindir-Düzlem elektrod sistemidir. Şekil 4.14 'e göre tesbit edilen daha küçük başlangıç bilgisinden, $M=2$ için hesaplanan değerler ile Şekil 4.15 çizilmiştir.

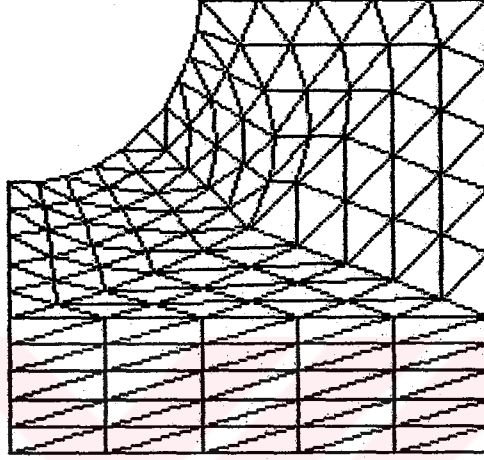


Şekil 4.14. Algoritma-II için Silindir-Düzlem elektrod sisteminin başlangıç bölmelemesi.

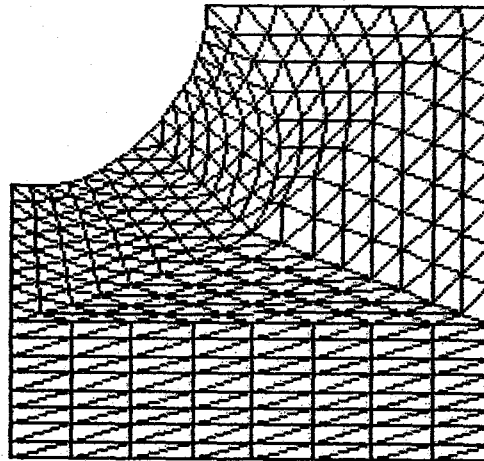


Şekil 4.15. $M=2$ için Silindir-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=32, NPOIN=25).

Değişik M değerleri için elde edilen diğer bölmelemeler Şekil 4.16 ve Şekil 4.17 'de gösterilmiştir.

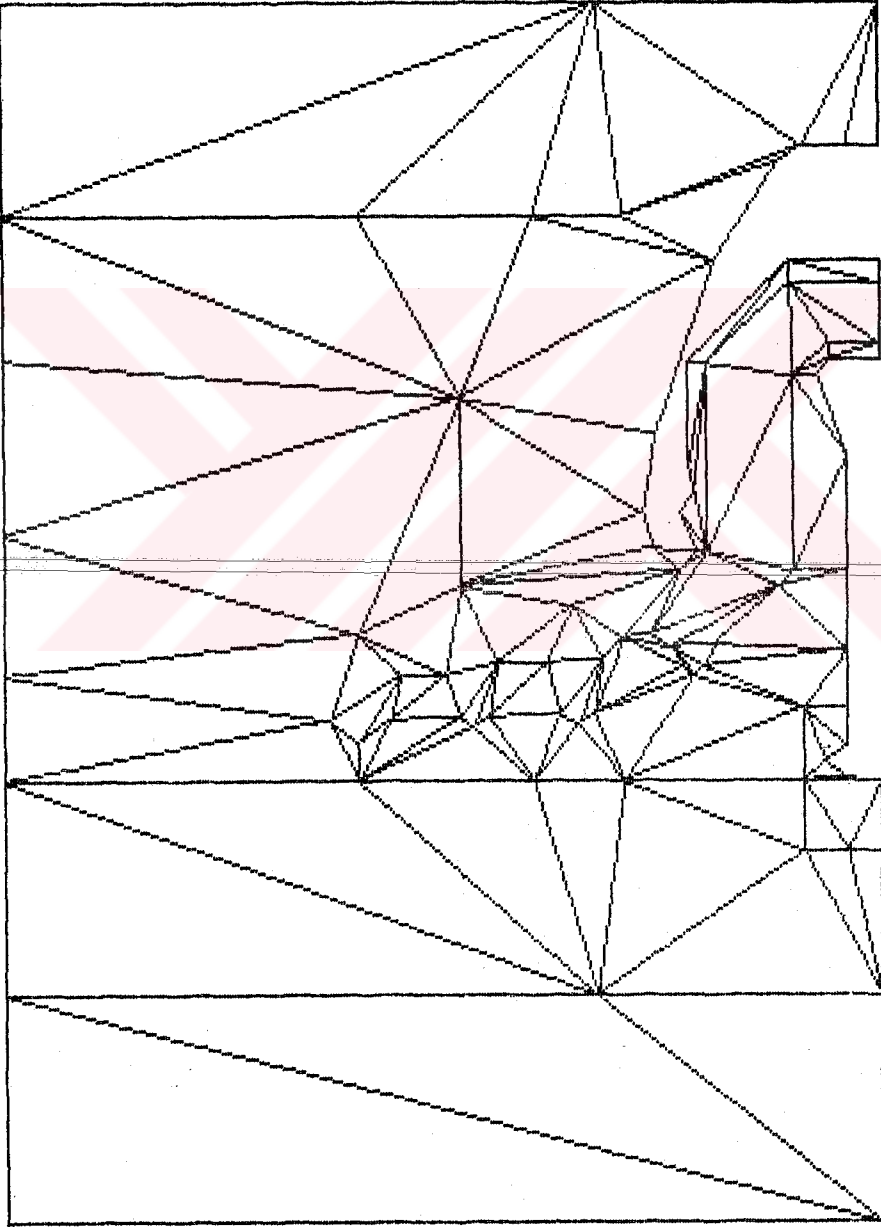


Şekil 4.16. $M=5$ için Silindir-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=200, NPOIN=121).



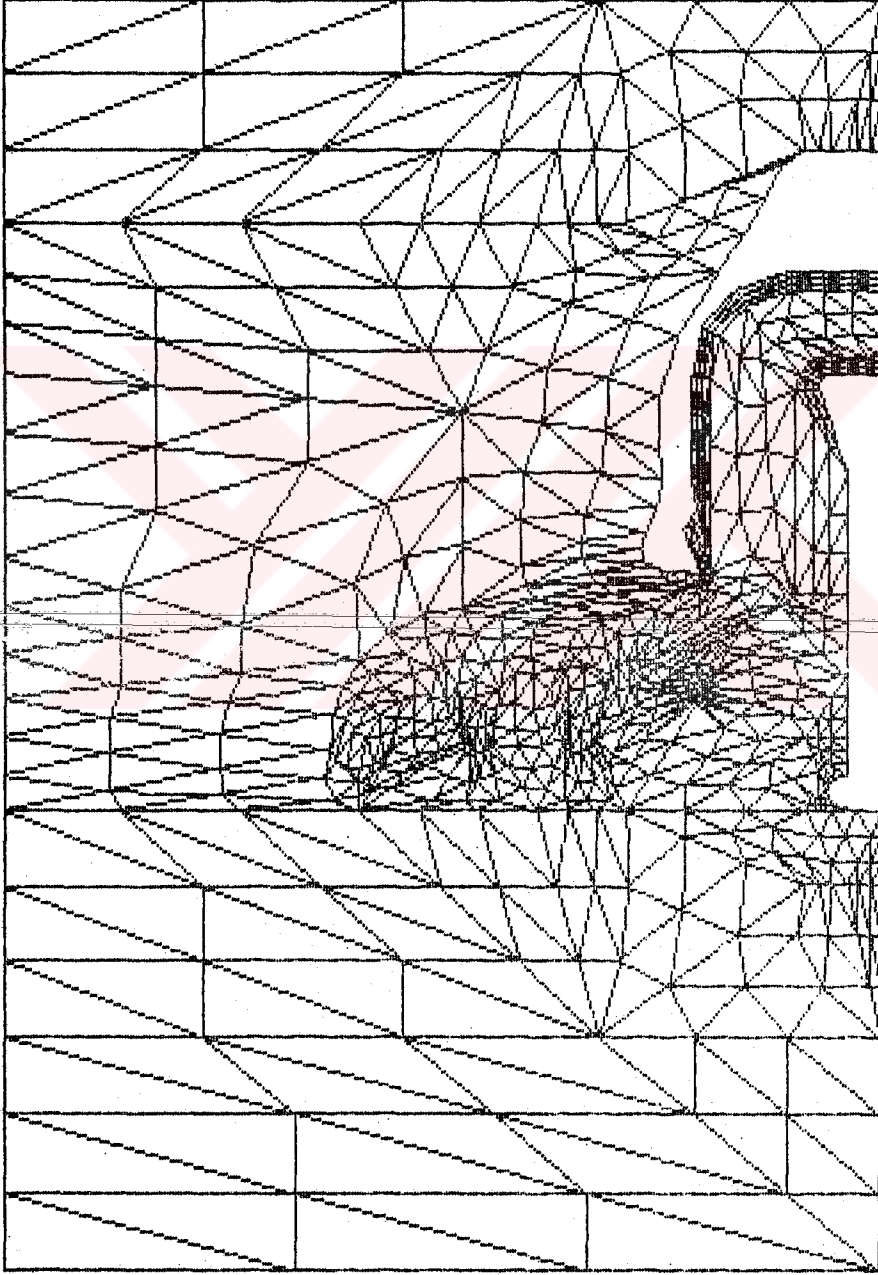
Şekil 4.17. $M=8$ için Silindir-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=512, NPOIN=289).

Yine Algoritma-I 'de gözönüne alınan zincir izolator elemanı için bir başlangıç bilgisi tesbit edilerek, $M=1$ için 127 elemanlı ve 85 düğümlü bölmelemeye ait çizim, Şekil 4.18 'de gösterilmiştir.



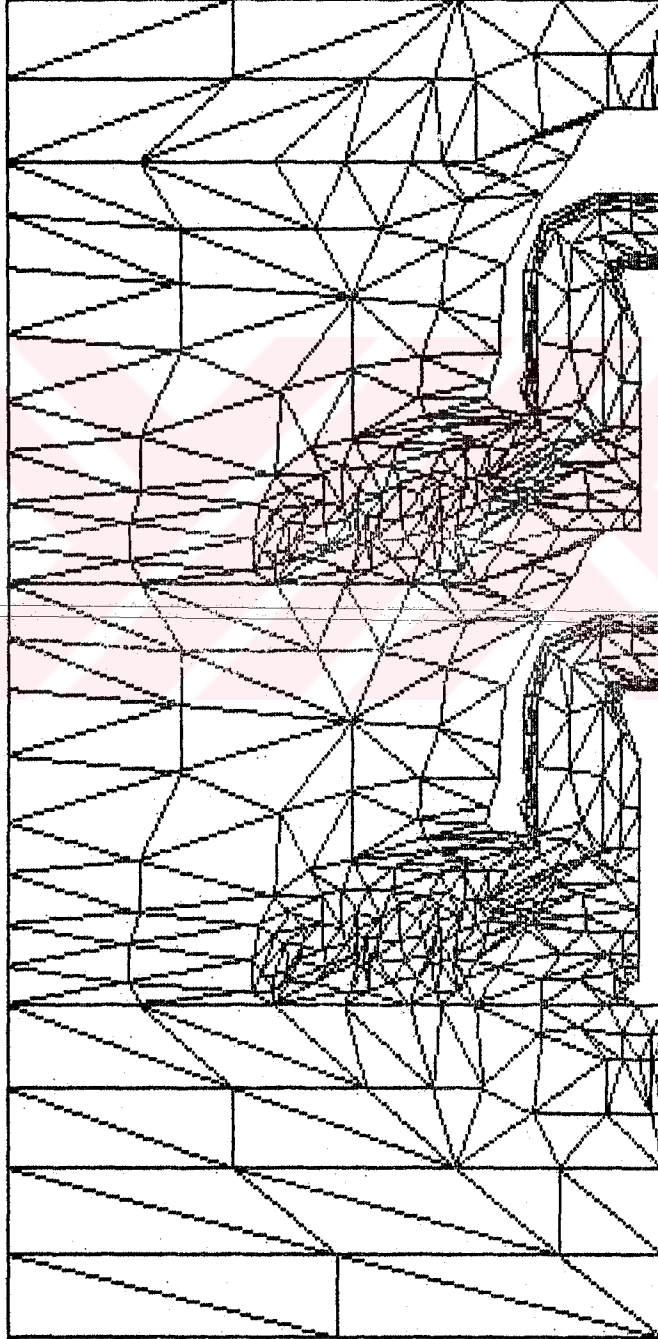
Şekil 4.18. $M=1$ için zincir izolator elemanına ait bölmeleme
(NELEM=127, NPOIN=85).

M=3 için hesaplanan 1143 elemanlı ve 634 düğümlü bölmelemeye ait çizim, Şekil 4.19 'da gösterilmiştir.

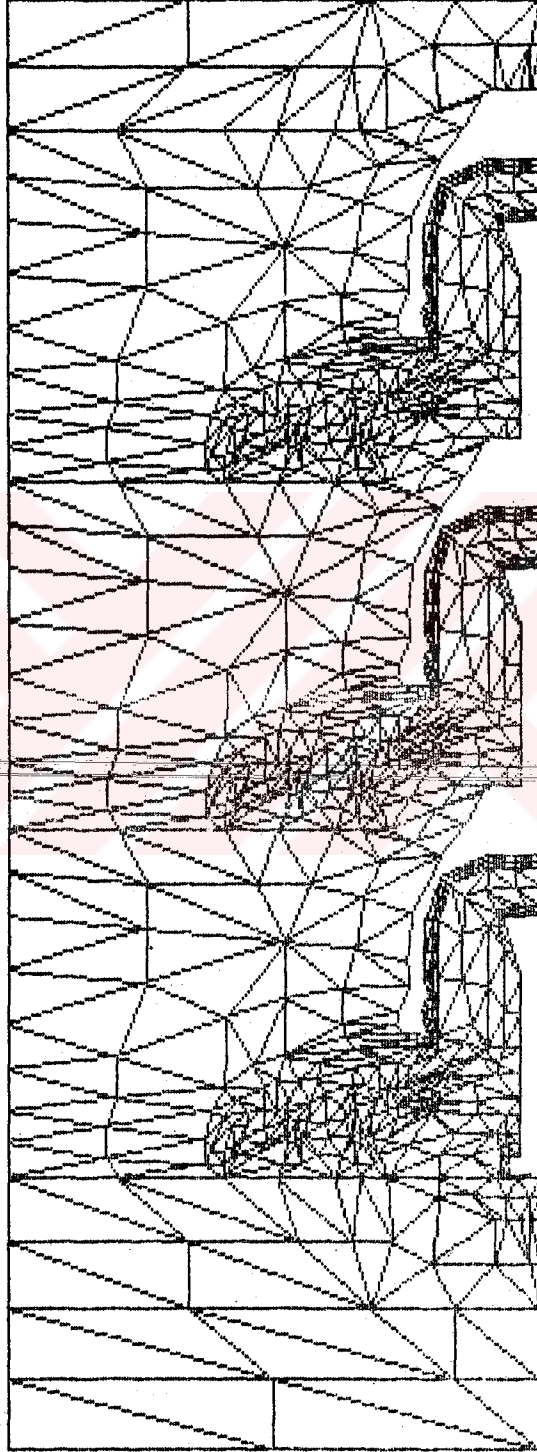


Şekil 4.19. M=3 için zincir izolator elemanına ait bölmeleme
(NELEM=1143, NPOIN=634).

Bir zincir izolatör elemanı yardımıyla, başlangıç bilgisini artırmaya gerek olmaksızın 2,3,4,5,.....elemandan meydana gelen izolatör zincirleri de bölmelelenebilir. Algoritma böyle problemlere uygun bir şekilde geliştirilmiş olup, buna ait örnekler Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 'de gösterilmiştir.

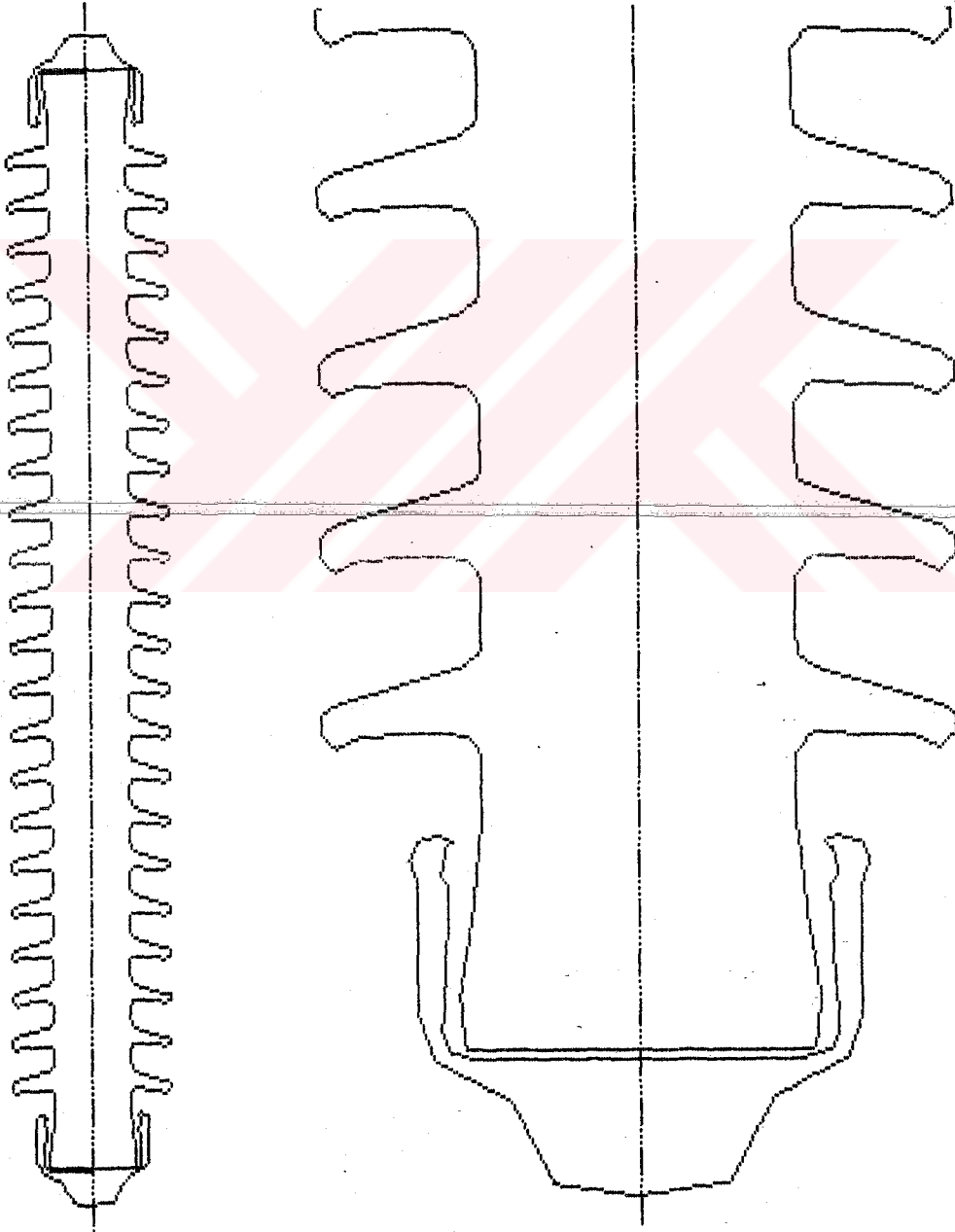


Şekil 4.20. M=2 için 2 elemanlı izolatör zincirine ait bölmeleme
(NELEM=900, NPOIN=518).

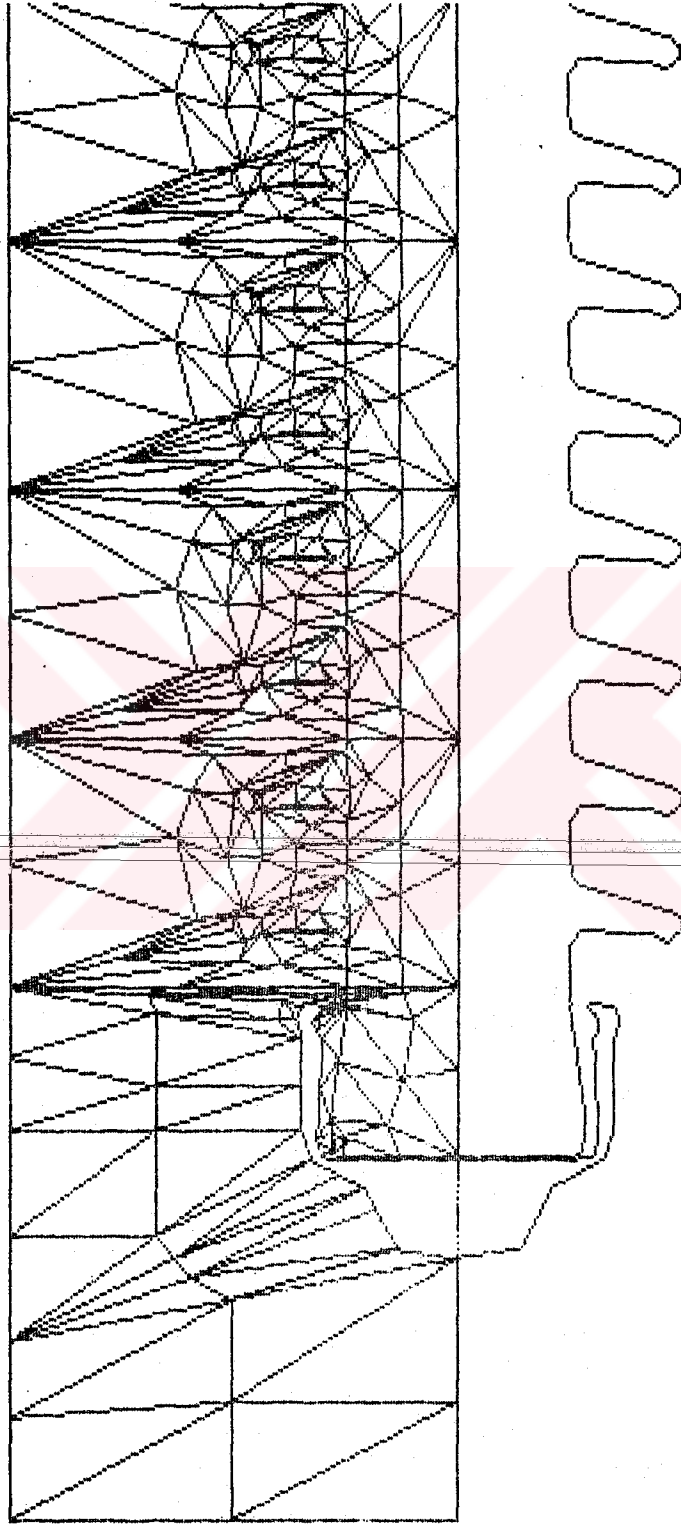


Şekil 4.21. $M=3$ için 3 elemanlı izolatör zincirine ait bölmeleme
(NELEM=1292, NPOIN=741).

Aynı algoritma yardımıyla, 22 siperli VKNL 75/22 tipi çubuk izolator de bölmelenmiş ve bununla ilgili çizimler Şekil 4.22 ve Şekil 4.23 'te gösterilmiştir. Şekil 4.23 'te bölmelemenin iyi görünebilmesi için sadece alt başlık kısmı ile 7 siperden oluşan bölümü kağıda dökülmüştür.



Şekil 4.22. M=2 için VKNL 75/22 tipi çubuk izolator.



Şekil 4.23. M=2 için VKNL 75/22 tipi çubuk izolatöre ait bölmeleme.

(NELEM=1512, NPOIN=836).

BÖLÜM 5

SINIR ŞARTLARI

5.1. Giriş

Alan problemlerinde, içlerinde yük bulunan veya bulunmayan ve sınır yüzeylerinde sınır şartları verilen sonlu uzay bölgeleri vardır. Bu sınır şartlarının uygulanması, Laplace denkleminin sınır bölgesi içerisinde tek ve fiziksel olarak uygun bir çözüm vermesini sağlar. Alan problemlerinin çözümünde genel olarak üç tip sınır şartı kullanılmaktadır. Bunlar Dirichlet, Neumann ve Karışık tip sınır şartlarıdır. Açık sınırlı alan problemleri için dördüncü olarak sonsuz sınır şartı bulunur.

5.2. Dirichlet Tipi Sınır Şartı

Bu tip sınır şartında, potansiyel fonksiyonu $\phi(s)$ sınırın belirli bir kısmında veya bütün sınır boyunca belirli bir değere sahiptir. Eğer sınır şartı sıfır ise, buna homojen Dirichlet sınır şartı denir.

5.3. Neumann Tipi Sınır Şartı

Bir yüzey üzerinde, verilen bir yüzeysel yük yoğunluğuna karşı gelen elektriksel alanın; yani, potansiyelin dik türevinin belirtilmesi ile ilgili bir sınır şartıdır. Eğer ortam izotropik ise sınıra dik doğrultudaki potansiyel,

$$K(s) \frac{\partial \phi}{\partial n} = h(s) \quad (5.1)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Burada n , sınırın dışına doğru birim vektörü göstermektedir. Bu ifade çözüm bölgesindeki alandan bağımsızdır. $h(s)=0$ olması haline, homojen Neumann sınır şartı denir.

5.4. Karışık Tip Sınır Şartı

Sınırdaki bulunan iletken bir malzeme sınıra normal doğrultuda gelen akıyı etkiler. Sınırdaki meydana gelen değişimler lineer ise, bu sınır koşulu genel olarak

$$K(s) * \frac{\delta\phi}{\delta n} = \sigma(s) (\phi_{0(s)} - \phi(s)) \quad (5.2)$$

ile ifade edilir. Burada $\sigma(s)$ sınırdaki elektriksel iletkenlik fonksiyonunu göstermektedir. Bu sınır şartı düzenlenerek

$$K(s) * \frac{\delta\phi}{\delta n} + \sigma(s) \phi(s) = \sigma(s) \phi_{0(s)} \quad (5.3)$$

$$K(s) * \frac{\delta\phi}{\delta n} + \sigma(s) \phi(s) = h(s) \quad (5.4)$$

yazılırsa, daha önceki şartları da içeren bir bağıntı elde edilir.

5.5. Sonsuz Sınır Şartı

5.5.1. Genel

Alan problemlerinin büyük çoğunluğu açık sınırlı olduğu için potansiyelin sonsuzda sıfır olması, yani $V=0$ için $x,y,z=\infty$ şartı vardır. Kapalı sınırlar ile tanımlanan bölgeler için çok iyi çözüm sağlayan Sonlu Elemanlar Yöntemi, böyle durumlarda çözüm bölgesinin uzağındaki sınırların iyi tanımlanamaması nedeniyle yetersiz kalmaktadır.

Serbest sınır çözümünde sıfır potansiyel sınırı, sonsuz sınır şartına benzetilerek uygulanır. Bu çözümün doğruluk derecesinin artırılabilmesi için, çözüm bölgesi sınırının geniş seçilmesi gereklidir. Fakat bu durumda çözüm denklemlerinin sayısı artacağından, bellek kapasitesi büyür ve

bilgisayarda hesaplama çok daha uzun zaman alır. Böyle zorlukların meydana gelmemesi için, çözüm bölgesinin dış sınırlarını küçük tutmak gerekir. Ancak bu durumda da hesap sonuçlarındaki hata oranları büyük. Dolayısıyla açık sınırlı alan problemlerinde, çözüm bölgesinin dışında kalan ve sonsuza uzanan dış bölgenin uygun teknikler yardımıyla modellenerek, iç çözüm bölgesine katılması gerekmektedir. Bu sınıftaki problemlere tipik örnekler olarak tek taraflı lineer makina, kaçak akı ve bara empedans hesaplamaları gösterilebilir (Silvester vd, 1977 ; Lowther vd, 1978).

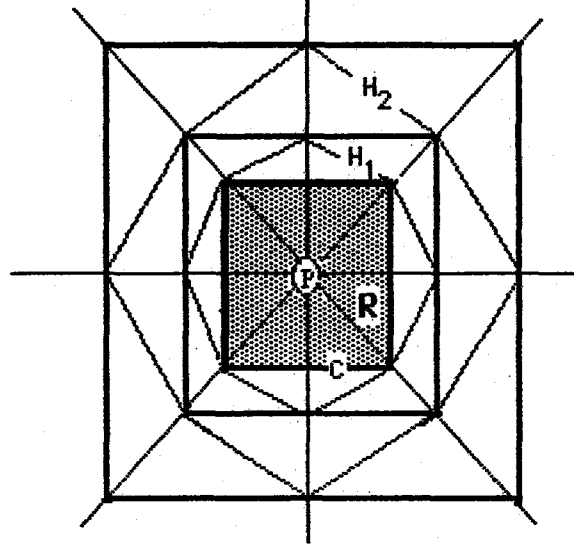
Açık sınırlı alan problemlerinin çözümünde, çözüm bölgesinin uzağındaki geniş boş alanları modellemek üzere değişik yöntemler ileri sürülmüştür. Bu bölümde, gerekli eleman sayısında artış meydana getirmeden dış bölgeyi modelleyerek iç bölge hesaplamalarında gözönüne alan ve böylece iki boyutlu açık sınırlı elektrik alan problemlerinde Sonlu Elemanlar Yönteminin iyi bir şekilde çözüme ulaşmasını sağlayan bir teknik açıklanacaktır.

5.5.2. Dış Bölgelerin Modellenmesinde Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanılması

5.5.2.1. Halka Bölgelerin Oluşturulması

Ele alınan çözüm bölgesi Şekil 5.1 deki R bölgesi gibi olsun. Bu R bölgesi, problemde istenilen dereceden elemanlara bölünmüş olup, elemanlar şekil üzerinde gösterilmemiştir. R bölgesi C eğrisi ile sınırlı olsun. Bu eğri elemanların dış kenarlarını belirler ve üzerindeki düğümler de R bölgesinin sınır düğümleridir. R bölgesi dışındaki bölge sadece boş uzay olup, bu dış bölgedeki alan saf Laplasiyendir.

Dış kısmı göstermek için ilk adım, R bölgesini çevreleyen H_1 halkası



Şekil 5.1. R bölgesini çevreleyen dış halka bölgeler.

için bir Sonlu Eleman bölmelemesi uygulamaktır. Bu halka aşağıdaki kriterleri sağlamalıdır:

- (a) H_1 'in iç ve dış sınırları üzerindeki düğüm sayıları aynı olup, P yıldız noktasından çıkan doğrular üzerinde bulunurlar. Yani P yıldız noktasından çıkan doğrular, iç ve dış sınırların herbirini sadece birer noktada keserler.
- (b) İç sınır düğümleri, R çözüm bölgesinin sınırı (C eğrisi) üzerindeki düğümlerle aynıdır.
- (c) Yıldız noktasından itibaren iç ve dış düğümlere olan uzaklıkların oranı sabittir. Böylece, eğer iç sınır üzerindeki düğümler

$$X_n^{(1)} = (x_n, y_n)^{(1)} \quad (5.5)$$

ile gösterilirse, dış sınır üzerindeki düğümler de

$$X_n^{(2)} = (x_n, y_n)^{(2)} = K \cdot X_n^{(1)} \quad (5.6)$$

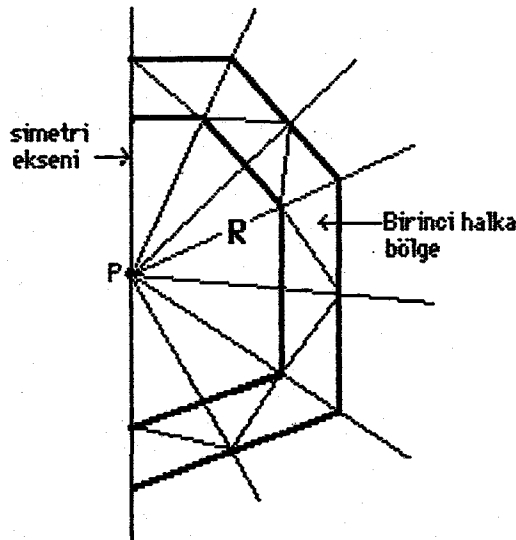
şeklinde ifade edilir. Burada K, dönüşüm oranıdır.

(d) Hesaplanacak fonksiyon, H_1 bölgesi içindeki her yerde Laplace denklemini sağlar.

Bu yöntemi, simetrik problemlerin çözümünde de kullanmak mümkündür. Bunun için halka bölgeler Şekil 5.2 'de gösterildiği gibi oluşturulur ve P yıldız noktası, simetri ekseninin ortasında alınır. Eğer her iki eksene göre de simetri varsa, bu durumda yıldız noktasının yeri, iki eksenin birleştiği orijin noktasıdır. H_1 'in sınırı üzerindeki düğümleri şu şekilde numaralandırmak kolaylık sağlayacaktır :

Önce iç sınır üzerindeki N düğüm, daha sonra da dış sınır üzerindeki N düğüm ele alınarak, sırayla numaralanır. İç sınırda koordinatları bilinen P_j düğüm, dış sınırda P_{j+N} düğüm ($j \leq N$) olarak belirlenir. Böylece H_1 halkası için $(2N \times 2N)$ boyutlu Dirichlet matrisi elde edilir.

Şekil 5.1 'de H_2 halkası, H_1 'i kapsamaktadır ve H_2 'nin iç sınırı H_1 'in dış sınırıdır. H_2 de aynı yolla elemanlara bölünür, fakat yeni bölgenin boyutu öncekine göre K defa daha büyüktür. Böylece H_2 bölgesi, H_1 ile aynı matrise



Şekil 5.2. Simetrik durumlara uygulama.

sahip olur. H_1 ve H_2 , ara sınır üzerindeki düğümlerin elimine edilmesiyle birleştirilirler. H_2 'yi çevreleyen üçüncü halka, dönüşüm oranı K^2 olmak üzere H_2 ile aynı S matrisine sahip olacak şekilde seçilir. Yani H_3 , önceki iki halkayı birleştirir. Sonraki H_4 halkası için de aynı durum devam eder.

Bu tekrarlama işleminde birbirini izleyen her adım, iki S matrisinin kombinasyonunu içerir. Bunların her biri, bir önceki alt bölgenin kombinasyonundan elde edilir. Bu işlemde amaç, her adımda halkanın ortalama dış çapını ve elemanların büyüklüğünü artırmaktır. Bu artış

$$K, K^2, K^4, K^8, \dots, K^{2m}$$

şeklinde olur. Eğer K değeri olarak, üçgen elemanlar için genellikle uygun bir oran olan 1.5 alınır, bölgeler dizisinin büyüme oranı

$$1.5, 2.25, 5.06, 25.6, 657, 43.1 \cdot 10^4, 1.86 \cdot 10^{11}, \dots$$

şeklinde artacaktır. Sonuçta, halkanın iç ve dış kenarlarındaki düğümleri bağlayan terimler hızlı olarak sifıra düşer ve birkaç adım sonra S matrisi gerçek sonsuz bölgeye yaklaşır (Silvester vd, 1977 ; Lowther vd, 1978).

5.5.2.2. Eleman Çiftlerinin Birleştirilmesi

Önce H_1 bölgesi için S Dirichlet matrisi kurulur. Yüksek mertebeden elemanlar kullanıldığında; H_1 'in iç ve dış sınırları üzerindeki düğümlerden başka, halka içerisinde de düğümler bulunacağından, matris işlemleri yapılarak bu enterpolasyon düğümleri elimine edilir. Sonuçta H_1 bölgesinin iç ve dış sınırları üzerindeki düğümler için

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

matris eşitliği elde edilir. Burada i ve d indisleri iç ve dış düğümleri, (1) indisi ise 1. halkaya ait değerleri göstermektedir.

H_2 halkası da H_1 halkasına benzer şekilde kurulabilir ve bunun iç düğümleri, H_1 'in dış düğümleridir. K dönüşüm oranı gözönüne alınmak suretiyle Denk.(5.3), H_2 halkasının da S matrisi olarak yazılır. Bu iki halka birleştirilirse

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ 0 & S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

olur. Burada c indisi iki bölgenin ortak düğümlerini gösterir. Bu denklemler, ϕ_c yi elimine etmek üzere çözülürse

$$S_{11} \phi_i + S_{12} \phi_c = 0 \quad (5.9)$$

$$S_{21} \phi_i + (S_{22} + K S_{11}) \phi_c + K S_{12} \phi_d = 0 \quad (5.10)$$

$$K S_{21} \phi_c + K S_{22} \phi_d = 0 \quad (5.11)$$

ve denk.(5.10)'dan ϕ_c 'nin değeri, denk.(5.9) ve denk.(5.11) 'de yerine konursa,

$$\begin{bmatrix} S_{11} - S_{12} (S_{22} + K S_{11})^{-1} S_{21} & -S_{12} (S_{22} + K S_{11})^{-1} K S_{12} \\ -K S_{21} (S_{22} + K S_{11})^{-1} S_{21} & K S_{22} - K S_{21} (S_{22} + K S_{11})^{-1} K S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

elde edilir. H_1 ve H_2 nin birleştirilmesinden ortaya çıkan bu yeni halka, aynı eliminasyon yöntemi uygulanarak H_3 halkası ile birleştirilir. Daha sonra H_4 , H_5 ,... vs. ile birleştirme yapılır. R bölgesinin dış sınırı üzerindeki bütün

düğüm için aynı işlemler tekrar edilir. Böylece $(n+1)$. adımdaki eleman, n . adımdaki daha küçük olan elemandan yararlanılarak, aşağıdaki tekrarlama işlemi sonucunda bulunur:

$$S^{n+1} = \begin{bmatrix} S_{11}^n & 0 \\ 0 & K S_{22}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{12}^n A^n S_{21}^n & S_{12}^n A^n K S_{12}^n \\ K S_{21}^n A^n S_{21}^n & K S_{21}^n A^n K S_{12}^n \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Burada,

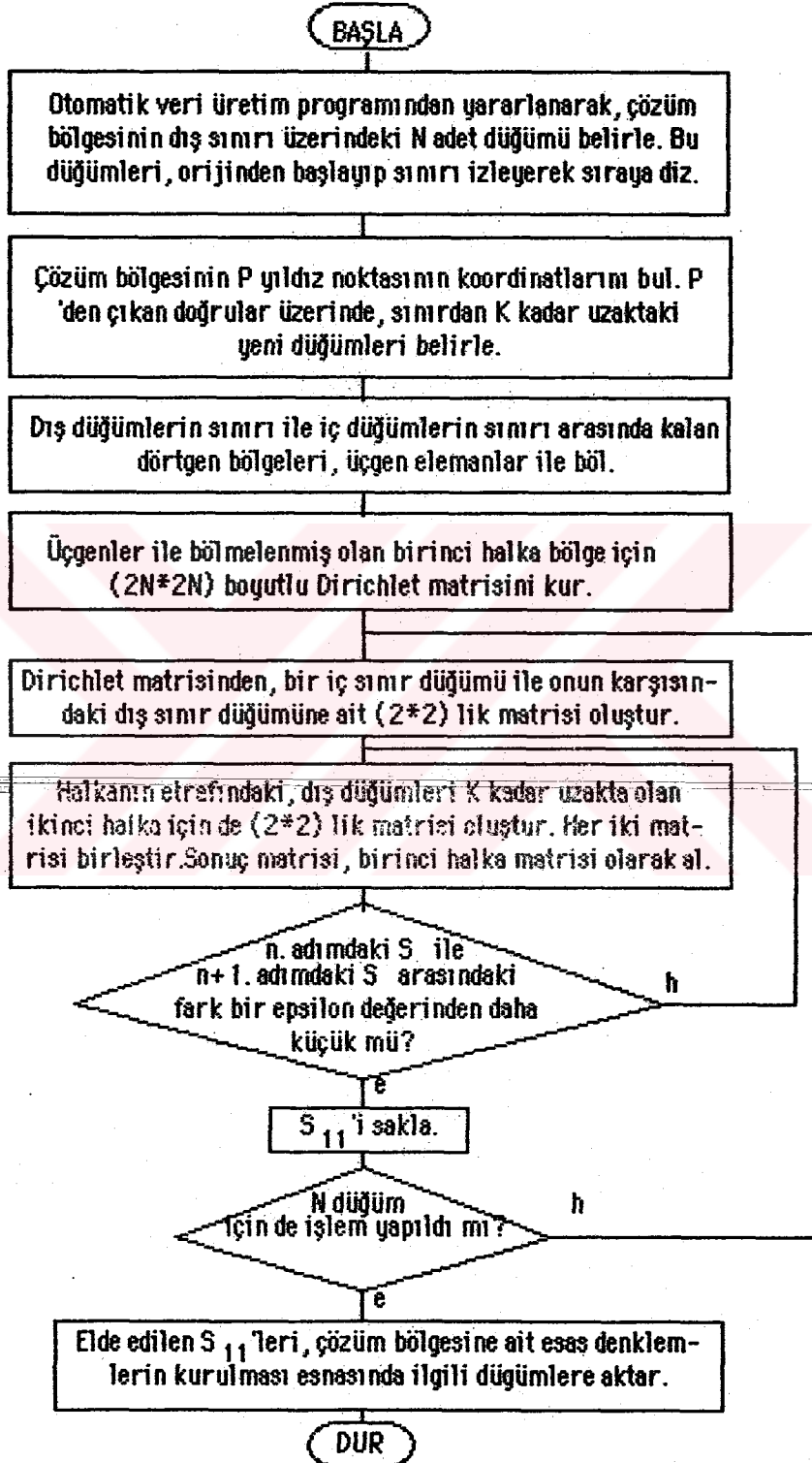
$$A^n = \left(S_{22}^n + K S_{11}^n \right)^{-1} \quad (5.14)$$

dir. Sistem hızlı olarak yakınsar ve S_{12} terimi çabucak sifıra ulaşır. Nihayet S_{11} terimleri, iç bölge çözümü esnasında C eğrisi üzerindeki ait oldukları düğümlerin değerlerine ilave edilir (Silvester vd, 1977 ; Lowther vd, 1978 ; Brauer, 1982 ; Antunes vd, 1982).

Sonuç olarak, bu yöntemin açık sınırlı alan problemlerinin çözümünde kullanılması ile üç önemli fayda elde edilmiştir:

- (1) Sınırlar sonsuza doğru genişletilmek suretiyle, çözüm bölgesinin dışındaki kısımlar da hesaba katılır ve sonuçların daha doğru olarak elde edilmesi mümkün olur.
- (2) Dış kısımlar ana çözüm bölgesinden ayrı olarak hesaplanmaktadır. Böylece denklem sayılarında artış meydana gelmeden, daha küçük bellek kapasitesi ile ve daha kısa zamanda problemin çözülmesi sağlanmış olur.
- (3) Çözüm bölgesi üzerindeki düğümlere dış alanlardan dolayı gelecek olan katkılar, yine Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak hesaplandığından; hem iç ve hem de dış bölgeye ilişkin çözümler, başka bir formülasyona gerek olmaksızın, sadece Sonlu Elemanlar Yöntemi ile elde edilmiş olur.

Algoritmaya ilişkin akış diyagramı Şekil 5.3 'te verilmiştir.



Şekil 5.3. Dış alanların hesabı için akış diyagramı.

BÖLÜM 6

PROGRAMLAMA

6.1. Genel

Bu bölümün amacı, teorisi ve çözüm yöntemine ait işlem basamakları daha önceki bölümlerde anlatılan elektrik alan problemlerinin, istenen bütün özellikleri sağlayabilecek şekilde programlanmasıdır. Geliştirilen ve kullanılan programlar temel olarak iki gruba ayrılabilir:

(a) Ana program

(b) Altprogramlar

Ana program, hem statik ve hem de dinamik elektrik alanı problemlerine uygulama ve çözüm sağlayabilecek özellikte kısımlar içermektedir. Altprogramlar ise, ana programa veri hazırlanması ve ana programda elde edilen sonuç denklemlerinin çözülmesi ile ilgili programlardır.

6.2. Ana Program

6.2.1. Ana Programın İşlem Basamakları ve Akış Diyagramı

Ana programın oluşturulmasında, bir Isı Dağılım Programı (Norrie ve de Vries, 1978) esas alınmıştır. Yapılan programlama çalışmaları sonucunda bu ısı dağılım programı, elektrik alanları ile ilgili problemlere uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir.

Elektrik alan problemleri, statik ve dinamik alan problemleri olarak iki kısma ayrılır. Statik elektrik alanı durumunda, çözüm bölgesinde $\sigma=0$ olup, sadece ϵ 'a bağlı katsayılardan oluşan bir denklemler sistemi elde edilir.

Dinamik elektrik alanı durumunda ise $\omega \neq 0$ 'dır ve uygulanan alternatif gerilime ait frekansın etkisi gözönüne alınmalıdır.

Geliştirilen ana program, her iki alan incelemesini sağlayacak biçimde düzenlenmiştir. Ana program içerisinde, statik elektrik alan durumu için sadece reel katsayılardan oluşan denklem sistemini, dinamik elektrik alanı durumu için de kompleks katsayılardan oluşan denklem sistemini çözen altprogramlar çağrılmaktadır. Bu işlemleri gerçekleştiren ana programın akış diyagramı Şekil 6.1 de verilmiştir.

6.2.2. Başlangıç Şartlarının Denklem Sistemine Yerleştirilmesi

Herhangi bir çözüm bölgesine ilişkin sonuç denklem sistemi, sistem denklemlerinin kurulduğu problem tipinden bağımsız olarak

$$\begin{matrix} n \times n & n \times 1 & n \times 1 \\ [S] & [\phi] & = [R] \end{matrix} \quad (6.1)$$

şeklindedir.

Dirichlet sınır şartlarını denk.(6.1) 'e uygulamanın değişik yolları vardır. Bunlar uygulandığı zaman düğüm değişkenlerinin ve denklemlerin sayısı etkin olarak indirgenir. Bununla birlikte bilinen düğüm denklemlerini, orijinal denklem sayısını değiştirmeyecek ve bilgisayar hafızasında temel yapı değişikliğine sebep olmaktan kaçınacak şekilde sunmak daha uygundur. Bunu yapmanın iki kestirme yolu aşağıda anlatılmıştır.

(a) Denk.(6.1) 'de değerleri bilinen düğüm değişkenlerini yerleştirmenin birinci yolu, denklem sistemi $(n \times n)$ boyutlu kalmak üzere $[S]$ ve $[R]$ matrislerini şöyle değiştirmektir:

Eğer i indisi, başlangıç şartı olarak değeri bilinen bir düğüm değişkenini gösteriyorsa, $[S]$ 'nin i . sütunu ve i . satırı sıfırlanır ve $S_{ii}=1$

BAŞLA

Şekil 4.12 'de otomatik bölmeleme için hazırlanan akış diyagramına ilişkin altprogram yardımıyla, çözüm bölgesi verileri otomatik olarak üretilir.

Eğer açık sınır şartı kullanılarak çözüm yapmak isteniyorsa; dış sınırlar ile ilgili simülasyonu gerçekleştiren Şekil 5.3 'teki akış diyagramına ilişkin altprogram yardımıyla, çözüm bölgesinin sınır düğümlerine ilişkin katsayılar hesaplanır.

Başlangıç şartlarının verildiği düğümler ve değerleri belirlenir. Eğer 2,3,.. vs. elemanlı izolatör kullanılıyorsa, birinci adımda giriş bilgisi tek eleman için hazırlandığından, direğe bağlı olan üst elemanın kapak sınırları üzerinde sıfır potansiyel olacak şekilde gerekli aktarmalar yapılır.

2,3,... vs. elemanlı izolatör için ara metal bölge sınırlarına ait düğümler ayrı ayrı belirlenir.

Verilen dielektrik sabiti ve iletkenlik değerleri yardımı ile çözüm bölgesindeki her bir üçgen elemana ait kompleks dielektrik sabiti değerleri belirlenir.

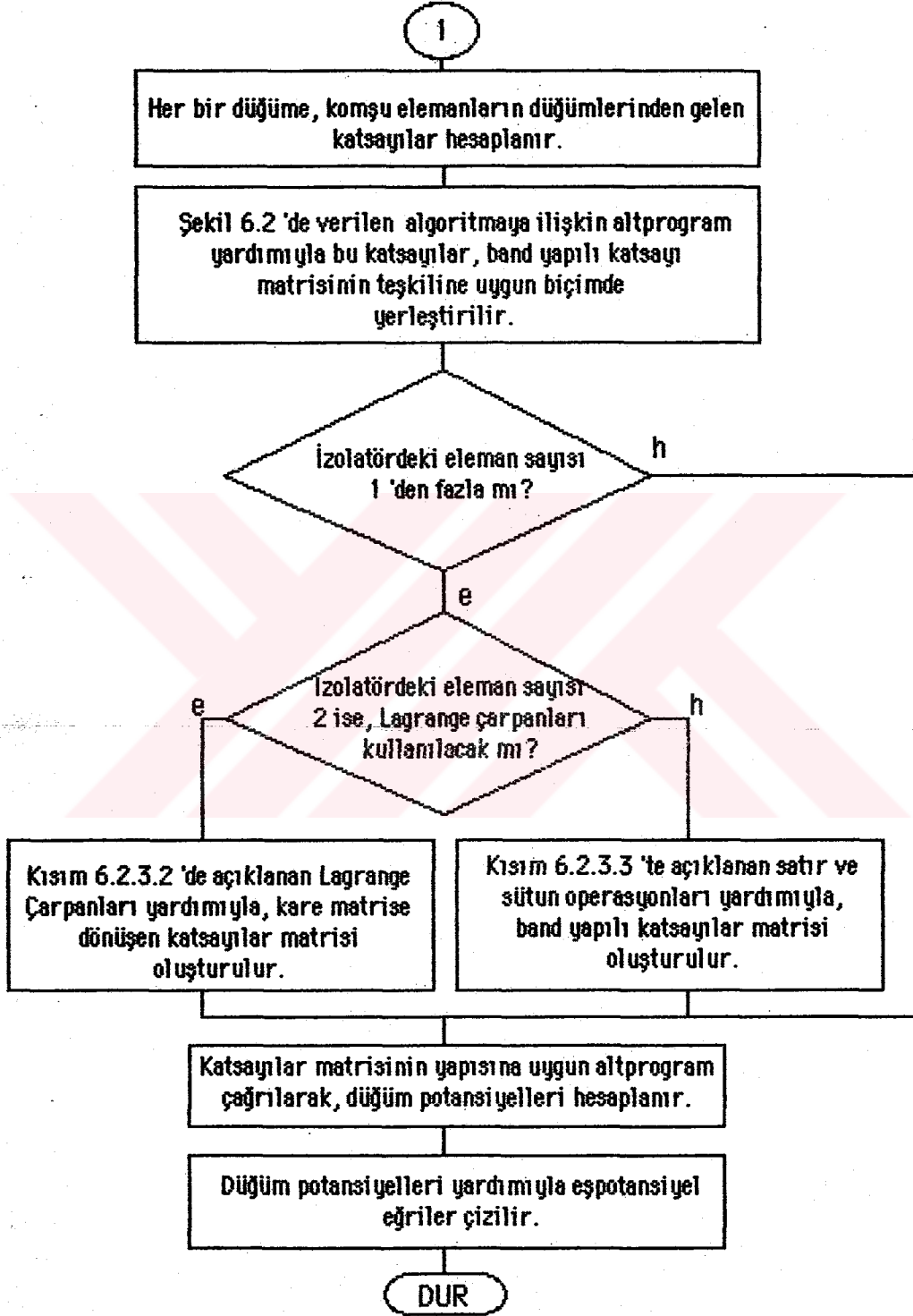
Çözüm bölgesindeki her bir düğümü çevreleyen eleman sayısı ile bu düğüme komşu olan düğümlerin sayısı belirlenir.

Bütün üçgen elemanların alanları hesaplanır.

Katsayı matrisi ve sağ taraf matrisi sıfırlanır.

Başlangıç değerleri matris sistemine yerleştirilir.

1



Şekil 6.1. Ana programın akış diyagramı

yazılır. ϕ_i 'nin bilinen değeri $[R]$ sütun vektörünün R_i 'inci teriminin yerine konulur. $[R]$ 'nin kalan terimleri ise, tanımlanmış düğüm değişkeninin değeri ile orijinal $[S]$ matrisinin uygun sütunundaki terimi çarpılarak $[R]$ 'nin kendi değerinden çıkarılmasıyla elde edilen değerle yer değiştirir. Bu işlem bütün tanımlanmış ϕ_i 'ler için tekrarlanır.

Bu işlem basamaklarını açıklamak amacıyla, sadece 4 denklemden oluşan aşağıdaki basit örneği ele alalım.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Dirichlet sınır şartı olarak başlangıçta bilinen düğüm değişkenleri ve değerleri $\phi_1 = \beta_1$ ve $\phi_3 = \beta_3$ olsun. Buna göre denk.(6.2),

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & S_{42} & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ R_2 - \beta_1 S_{21} - \beta_3 S_{23} \\ \beta_3 \\ R_4 - \beta_3 S_{41} - \beta_3 S_{43} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

şekline dönüşür. Buradan başlangıçta verilen β_1 ve β_3 değerlerine göre, ϕ_2 ve ϕ_4 değerleri belirlenmiş olur (Huebner ve Thornton, 1982).

(b) Tanımlanmış düğüm değerlerini sistem denklemlerine yerleştirmenin ikinci yolu da, Payne ve Irons tarafından önerilen yöntemi uygulamaktır. Buna göre $[S]$ 'nin, tanımlanmış düğüm denklemleri ile ilgili köşegen terimi ile bu köşegen terimine karşılık gelen $[R]$ 'nin terimi çok büyük bir sayıyla çarpılır. Böylece $[S]$ 'nin değiştirilmeyen terimleri, çarpılan terimlere göre

çok küçük kalmış olur. Bu işlem denk.(6.2) 'ye uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} S_{11} \cdot 10^{15} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \cdot 10^{15} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \cdot 10^{15} \\ R_2 \\ R_3 \cdot 10^{15} \\ R_4 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

elde edilir.

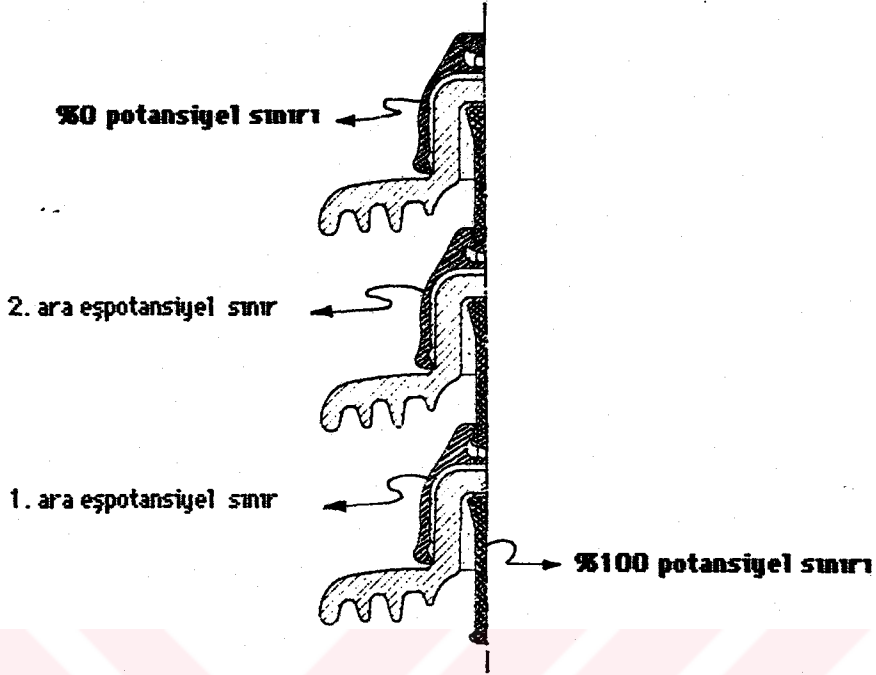
6.2.3. Denklem Sisteminin, Elektrodlardan Başka Ara Metal Bölge Sınırlarında Eşit Potansiyelli Noktalar Elde Etmek Üzere Düzenlenmesi

6.2.3.1 Genel

YG yalıtım elemanlarından zincir ve çubuk tipi izolatörlerde sınır şartları ile ilgili olarak özel bir durum ortaya çıkmaktadır:

İki veya daha fazla izolatör elemanının kullanıldığı zincir izolatörlerde alttaki elemanın sapı %100 potansiyel ve üstteki elemanın kapağı da direğe bağlı olarak %0 potansiyel değerindedir. Elemanlardan birinin sapı diğerinin kapağındaki yuvaya geçirilerek zincir teşkil edildiğinden; arada birleşen sap-kapak kısımlarının sınırları üzerine gelen düğümler, bu kısımların metal olması nedeniyle eşit potansiyel değerlerine sahip olacaktır (Şekil 6.2). Benzer durum, iki veya daha fazla çubuk izolatörün birbiri ile seri bağlanarak kullanılması halinde de ortaya çıkmaktadır.

Eşit potansiyelli düğümleri hesaplamak üzere, sonuç denklem sisteminde iki değişik matematiksel işlem uygulanabilir. Bunlardan biri



Şekil 6.2. İzolatör zincirinde ara eşpotansiyel sınırları.

Lagrange Çarpanlarını kullanmak, diğeri de eşit potansiyelli düğümlere ilişkin matris satır ve sütunlarında bazı operasyonlar yapmaktır. Bu çalışma esnasında her iki yöntem de uygulanmıştır.

6.2.3.2. Lagrange Çarpanlarının Kullanılması

Lagrange Çarpanlarının kullanımını açıklamak için, bir $f(x,y,z)$ fonksiyonunun sabit değerlerini elde etme problemi gözönüne alınır. Bu amaçla $f(x,y,z)$ fonksiyonuna ilişkin maksimum veya minimum probleminin

$$g(x,y,z) = 0 \quad (6.5)$$

$$h(x,y,z) = 0 \quad (6.6)$$

zorlayıcı şartlarına bağlı olarak çözülmesi durumunu ele alalım. Burada g ve h , fonksiyonel olarak bağımlı değildir. f , g ve h fonksiyonlarının istenen herhangi bir P noktasını kapsayan bölgedeki her yerde 1. dereceden kısmi türevlerinin bulunduğunu farzedelim.

Eğer sadece bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası için Δf 'nin Taylor açılımındaki lineer terimleri sıfır ise; f , P noktasında bir ekstremum'a sahiptir. Bu şart,

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad (x_0, y_0, z_0) \text{ 'da} \quad (6.7)$$

şeklinde yazılabilir. g ve h sabit olduğundan, herbirinin diferansiyeli sıfır olmalıdır. Dolayısıyla

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad (x_0, y_0, z_0) \text{ 'da} \quad (6.8)$$

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad (x_0, y_0, z_0) \text{ 'da} \quad (6.9)$$

ifadeleri yazılabilir. λ_1 ve λ_2 gibi iki sabit sayı, denk.(6.8) ve denk.(6.9) 'un eş terimleri ile çarpılıp, denk.(6.7) 'ye ilave edilirse; λ_1 ve λ_2 'nin herhangi değerleri için (x_0, y_0, z_0) 'da

$$(f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x) dx + (f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y) dy + (f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z) dz = 0 \quad (6.10)$$

olur. Şimdi λ_1 ve λ_2 'yi öyle tesbit edelim ki, denk.(6.10) 'daki parantezlerin ikisi sıfır olsun. Buna göre denk.(6.10) 'u

$$f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0 \quad (6.11)$$

$$f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y = 0 \quad (6.12)$$

$$f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z = 0 \quad (6.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemler ile birlikte denk.(6.5) ve denk.(6.6); x , y , z , λ_1 ve λ_2 beş bilinmeyenini elde etmek üzere çözümler (Hildebrand, 1976).

Lagrange Çarpanları yardımıyla zorlayıcı sınır şartlarının zincir izolatör probleminde denklem sistemine nasıl yerleştirileceğini göstermek amacıyla, farzedelim ki çözüm bölgesine ilişkin lineer denklem sistemi

$$\begin{aligned}
S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2 + S_{13}\phi_3 + S_{14}\phi_4 + S_{15}\phi_5 &= 0 \\
S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2 + S_{23}\phi_3 + S_{24}\phi_4 + S_{25}\phi_5 &= 0 \\
S_{31}\phi_1 + S_{32}\phi_2 + S_{33}\phi_3 + S_{34}\phi_4 + S_{35}\phi_5 &= 0 \\
S_{41}\phi_1 + S_{42}\phi_2 + S_{43}\phi_3 + S_{44}\phi_4 + S_{45}\phi_5 &= 0 \\
S_{51}\phi_1 + S_{52}\phi_2 + S_{53}\phi_3 + S_{54}\phi_4 + S_{55}\phi_5 &= 0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

olsun.

1, 2 ve 3 noktaları, iki izolatör elemanını birleştiren metal bölge sınırları üzerinde bulunsun. Sistemin fiziksel yapısı gereği $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ olmalıdır. Bu şartı denk.(6.14) 'e yerleştirmek üzere

$$\phi_1 - \phi_3 = 0 \tag{6.15}$$

$$\phi_2 - \phi_3 = 0 \tag{6.16}$$

denklemlerinden yararlanılır. Denk.(6.15) ve denk.(6.16), λ_1 ve λ_2 katsayıları ile çarpılır ve denk.(6.14) 'ün her satırına, 1. dereceden kısmi türevleri alınarak ilave edilir. Böylece 7 bilinmeyenli 7 denklem elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2 + S_{13}\phi_3 + S_{14}\phi_4 + S_{15}\phi_5 + 1.\lambda_1 + 0.\lambda_2 &= 0 \\
S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2 + S_{23}\phi_3 + S_{24}\phi_4 + S_{25}\phi_5 + 0.\lambda_1 + 1.\lambda_2 &= 0 \\
S_{31}\phi_1 + S_{32}\phi_2 + S_{33}\phi_3 + S_{34}\phi_4 + S_{35}\phi_5 - 1.\lambda_1 - 1.\lambda_2 &= 0 \\
S_{41}\phi_1 + S_{42}\phi_2 + S_{43}\phi_3 + S_{44}\phi_4 + S_{45}\phi_5 + 0.\lambda_1 + 0.\lambda_2 &= 0 \\
S_{51}\phi_1 + S_{52}\phi_2 + S_{53}\phi_3 + S_{54}\phi_4 + S_{55}\phi_5 + 0.\lambda_1 + 0.\lambda_2 &= 0 \\
1.\phi_1 + 0.\phi_2 - 1.\phi_3 + 0.\phi_4 + 0.\phi_5 + 0.0 + 0.0 &= 0 \\
0.\phi_1 + 1.\phi_2 - 1.\phi_3 + 0.\phi_4 + 0.\phi_5 + 0.0 + 0.0 &= 0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ bulunur.

6.2.3.3. Matrisin Eşit Potansiyelli Dügümlere Ait Satır ve Sütunlarında Operasyon Yapılması

Metal bölge sınırları üzerindeki düğüm potansiyellerinin eşit çıkması için, denklem sistemine aşağıda açıklanan zorlayıcı şartlar da uygulanabilir. Bunun için

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

denklem sistemini ele alalım.

Eğer bu denklem sisteminin çözümünden $\phi_2 = \phi_4 = \phi_5$ elde edilmesi istenirse, önce düğümlerden biri (mesela ϕ_2) referans seçilir. Diğer iki düğümün (ϕ_4 ve ϕ_5) sütunlarındaki katsayılar, referans seçilen düğüme ait sütunun katsayılarına eklenir. Sonra ϕ_4 ve ϕ_5 in satır ve sütunları matristen çıkarılır. Böylece denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}+S_{14}+S_{15} & S_{13} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22}+S_{24}+S_{25} & S_{23} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32}+S_{34}+S_{35} & S_{33} & S_{36} \\ S_{61} & S_{62}+S_{64}+S_{65} & S_{63} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

şekline dönüşür. Çözüm yapıldıktan sonra ϕ_2 'nin değeri ϕ_4 ile ϕ_5 'e aktarılarak, bütün düğümlerin değerleri hesaplanmış olur (Davies, 1982). ϕ_4 ile ϕ_5 'e ilişkin satır ve sütunları çıkarmak yerine, diyagonale 1 koyup

diğer bütün katsayıları sıfır yapmak da aynı sonucu verir. Böylece matris boyutu değiştirilmeden ve daha kolay bir programlama ile istenen sonuçlar elde edilmiş olur.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}+S_{14}+S_{15} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22}+S_{24}+S_{25} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32}+S_{34}+S_{35} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{61} & S_{62}+S_{64}+S_{65} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

6.3. Altprogramlar

6.3.1. Otomatik Veri Üretim Programı

Ana programın çalışması için gerekli verileri üreten bu altprogramın çalışması ile ilgili ayrıntılı bilgi ve akış diyagramı Kısım 3.3 'te verilmişti. Burada programın özellikleri hakkında açıklamalar yapılacaktır.

6.3.1.1. Otomatik Veri Üretim Programının Temel Özellikleri

Bu program özellikle eğrisel kenarlı yapıların bölmelenmesi için geliştirildiğinden, program içerisinde hem alan koordinat sistemi ve hem de izoparametrik elemanlar ile bölmeleme esasına dayandırılan normalize edilmiş koordinat sistemi kullanılmıştır.

Otomatik veri üretim programına ilişkin algoritmanın esası, Ghassemi (1982) tarafından tanımlanmış olup; bu algoritma, elektrik alanı hesaplamaları için iki boyutlu düzlemde 6 düğümlü üçgen elemanların

kullanımına uygun bir şekilde geliştirilmiştir. Yapılan katkılar sonucunda sağlanan kolaylık ve üstünlükler şunlardır:

- a) Programa başlangıç bilgilerinin verilmesi daha kolay bir hale getirilmiştir. Böylece başlangıç bilgisinde her bir eleman için bölmeleme sayısı, düğüm koordinatları, elemanın dielektrik sabiti ve biliniyorsa, başlangıç değerleri verilmekte; elemanları çevreleyen düğüm numaraları, yeni elemanların dielektrik sabitleri ve başlangıç değerleri bilinen yeni düğümler ise program içerisinde tesbit edilmektedir.
- b) Zincir izolatör, çubuk izolatör ve parafudr gibi üst üste gelen elemanları veya bölümleri birbiriyle aynı şekil ve yapıda olan teçhizatın incelenmesinde; başlangıç bilgisi küçük bir kısım için tesbit edilmekte, böylece malzemenin tamamı için bütün veriler bu küçük başlangıç bilgisi yardımıyla belirlenmektedir.
- c) Açık sınırlı elektrik ve magnetik alan problemlerinin çözümünde, sınırların gözönüne alınması oldukça önemlidir (Kısım 5.3. 'e bakınız). Çözüm bölgesini çevreleyen dış sınır üzerindeki düğümlerle ilgili veriler, program içerisinde belirlenmektedir. Program, kare ve dikdörtgen şeklindeki sınırlar için çözüm yapmaktadır.
- d) Diğer önemli bir üstünlük ve kolaylık da eleman numaralarının, iyi bir band matris elde edecek biçimde düzenlenmesidir.

6.3.1.2. Band Yapının Oluşturulması

Sistem denklemlerine ait katsayılar matrisinin band yapıya sahip olması bellek kapasitesi ve çalışma süresi açılarından çok önemlidir. Band genişliğinin büyüklüğünü, üçgen elemanların köşe düğümleri arasındaki farkın en büyüğü belirler. Zincir ve çubuk izolatörlerde, YG buşinglerinde ve parafudrlarda x eksenini boyunca eleman sayısını, y eksenini boyunca eleman

sayısından oldukça küçük tutabilmenin mümkün olduğu düşünülerek, bütün düğümler önce x koordinatına ve sonra da y koordinatına göre küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Bundan sonra (x,y) koordinatları en küçük olan düğümün numarası 1 olmak üzere bütün düğümler sırayla numaralanmıştır. Böylece herhangi bir elemanın düğümleri arasındaki fark minimum değerde tutulabilmiştir. Burada, başlangıçta el ile yapılan bölmelemenin de band genişliği açısından büyük önemi olduğunu belirtmek gerekir.

6.3.2. Matris Çözen Altprogramlar

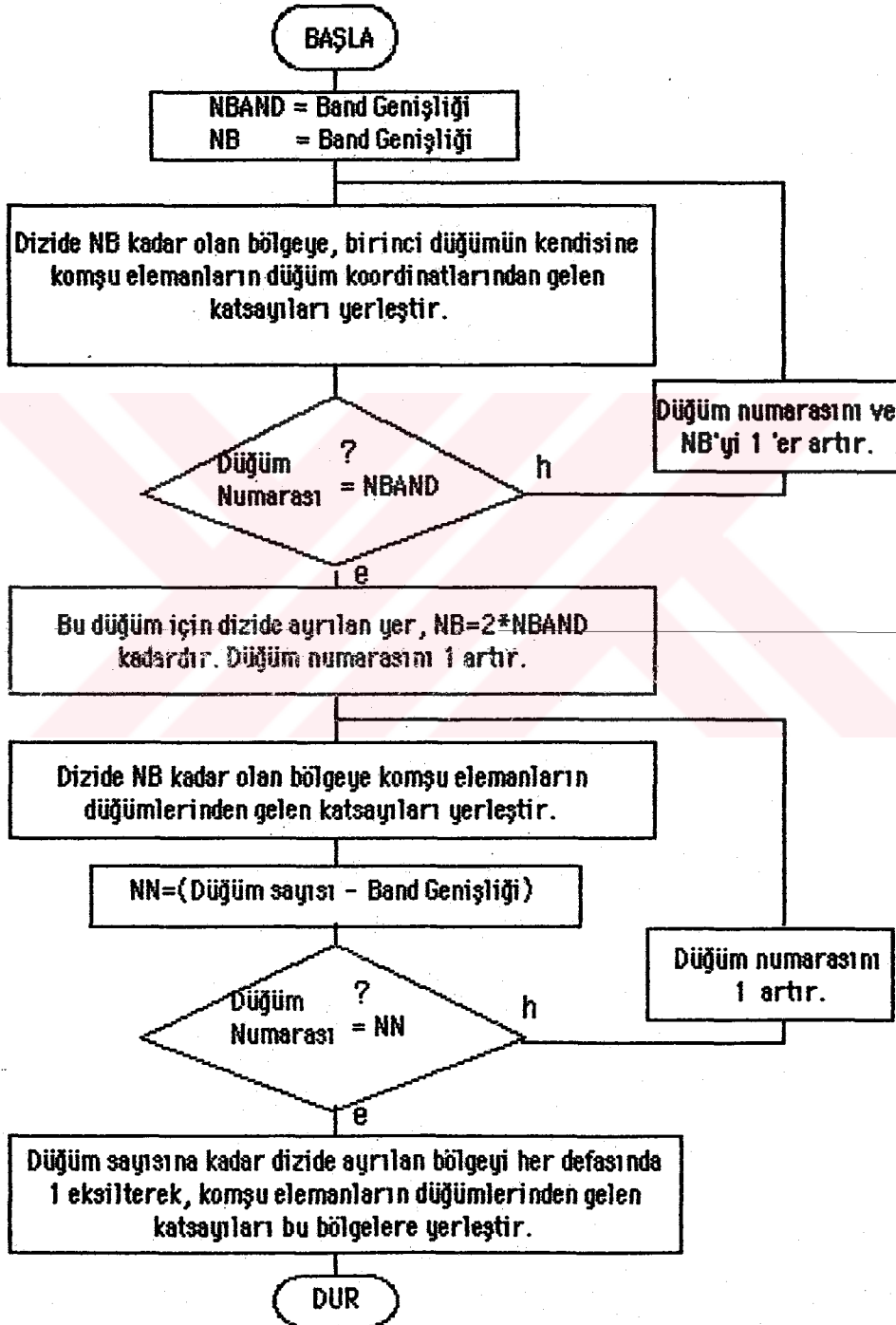
Ana programda, verilerin kullanılması ile elde edilen sonuç denklem sistemi çeşitli hazır altprogramların yardımıyla çözülmüştür. Bu altprogramlar, lineer denklem sistemlerinin direk yöntemlerle çözümünü elde etmede Gauss-Eliminasyon yöntemini kullanmaktadır. Çalışmaların gelişme safhalarına uygun olarak, katsayılar matrisinin tipine ve özelliklerine göre, yararlanılan altprogramlar şunlardır:

(a) Çözüm bölgesinde $\sigma=0$ hali için, statik elektrik alanına ilişkin potansiyel dağılımını hesaplamak üzere elde edilen sonuç denklem sisteminin katsayılar matrisi simetrik band yapıdadır ve reel katsayılardan oluşur.

Bu tip denklem sistemini çözmek için IBM SSP 'deki DGELB isimli altprogram kullanılmıştır. Bu altprogram, denklem sistemi oluşturulurken, matrisin her bir satırında (ML+MU+1) genişliğindeki sıfırdan farklı terimlerin tek boyutlu bir diziye aktarılmasını gerektirir. Burada ML, alt band genişliği ve MU, üst band genişliğidir.

Programlamada uygun bir algoritma kullanılarak, (NPOIN*NPOIN) boyutlu katsayılar matrisi oluşturulmadan, hesaplanan katsayılar doğrudan doğruya tek boyutlu bir diziye yerleştirilmiştir (NPOIN, çözüm bölgesindeki

toplam düğüm sayısıdır). Bu algoritmaya ilişkin akış diyagramı Şekil 6.2 'de verilmiştir.



Şekil 6.2. DGELB 'in kullanımını sağlayan tek boyutlu dizinin oluşturulması için akış diyagramı.

(b) Çözüm bölgesinin bir kısmında $\sigma \neq 0$ olması, denklem sisteminin kompleks katsayılarından meydana gelmesine neden olmaktadır. Yine band yapıda olan bu matrisi çözmek için de, NETLIB 'deki ZGBCO ve ZGBFA isimli altprogramlardan yararlanılmıştır. Bu altprogramlar, çözümde kullanmak üzere katsayılar matrisinin ABDV(LDA,NPOIN) isimli iki boyutlu bir diziye yerleştirilmesini gerektirmektedir. Burada $LDA=2*ML+MU+1$ olarak ABDV dizisinin satır sayısını belirler. Örnek olarak, katsayılar matrisinin band yapısı şöyle olsun.

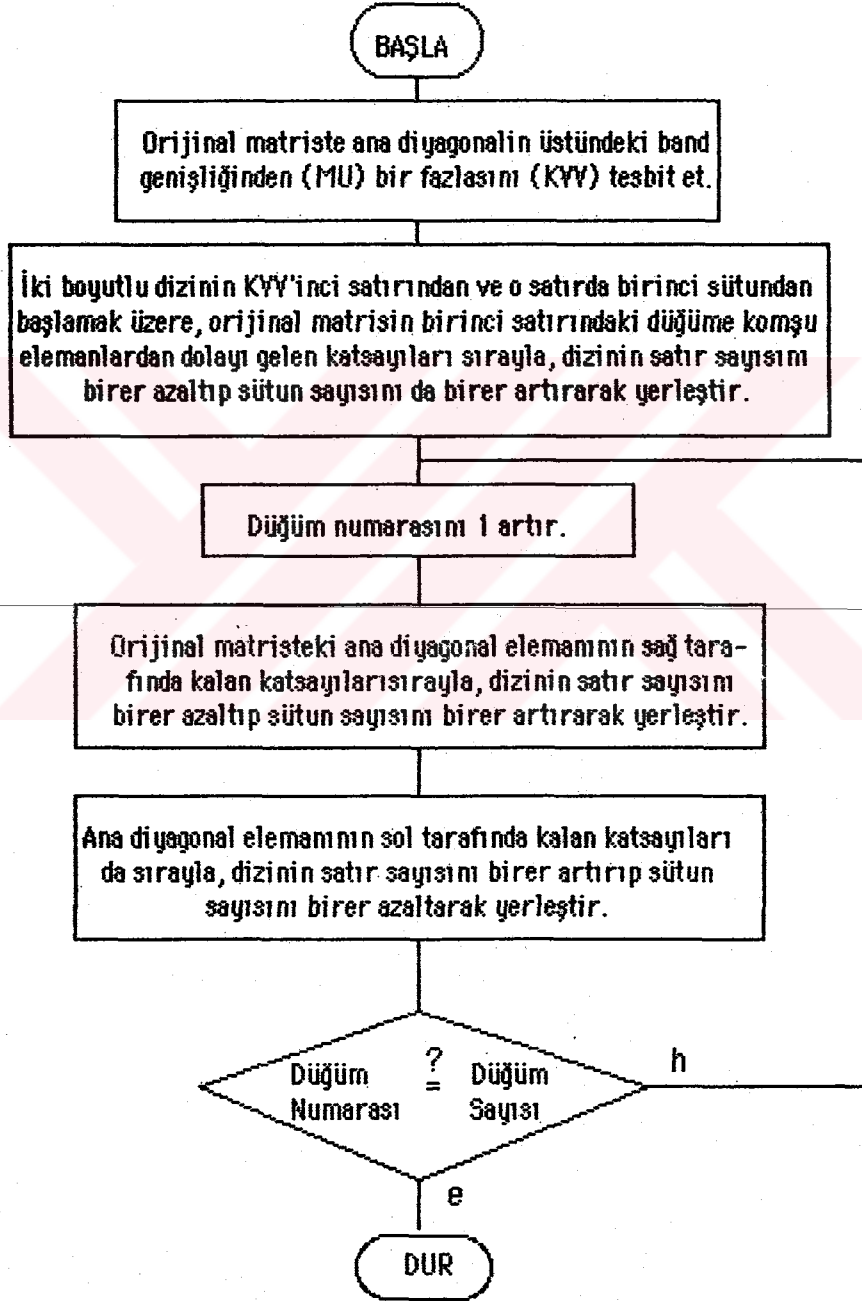
$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 43 & 44 & 45 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 65 & 66 & 67 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 76 & 77 & 78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 87 & 88 \end{bmatrix}$$

Bu katsayılar matrisi, iki boyutlu ABDV dizisine aşağıdaki gibi yerleştirilmelidir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 & 24 & 35 & 46 & 57 & 68 \\ 0 & 12 & 23 & 34 & 45 & 56 & 67 & 78 \\ 11 & 22 & 33 & 44 & 55 & 66 & 77 & 88 \\ 21 & 32 & 43 & 54 & 65 & 76 & 87 & 0 \\ 31 & 42 & 53 & 64 & 75 & 86 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu işlem sonucunda katsayılar matrisinin sütunları ABDV'nin sütunları, diyagonalleri de ABDV 'nin $(ML+1)$ 'inden $(2*ML+MU+1)$ 'ine kadar satırları olarak saklanır. Program içerisinde $(NPOIN*NPOIN)$ boyutlu katsayılar

matrisi oluşturulmadan, uygun bir algoritma yardımıyla hesaplanan katsayılar doğrudan doğruya ABDV dizisine yerleştirilmiştir. Bu algoritmaya ilişkin akış diyagramı da Şekil 6.3 'te verilmiştir.



Şekil 6.3. İki boyutlu ABDV dizisinin oluşturulması için akış diyagramı.

(c) İki katlı yapılar da Lagrange çarpanları kullanılarak aradaki metal bölge sınırlarına ait düğüm potansiyellerinin eşit çıkması için uygulanan matematiksel işlemler, katsayılar matrisinin band yapısının bozulmasına sebep olur. Eğer ara metal bölgenin sınırları üzerinde NPREC kadar düğüm varsa, (NPOIN*NPOIN) boyutlu katsayılar matrisinin gerekli matematiksel işlemler sonucunda $MM=NPOIN-NPREC+1$ olmak üzere (MM*MM) boyutlu katsayılar matrisi şeklinde çözülmesi gerekir. Yani matrisin satır ve sütun sayıları (NPREC-1) kadar artmış ve band yapı bozulmuştur. Bu durumda denklem sisteminin çözümü için yine NETLIB 'deki ZGECO ve ZGEFA isimli, kompleks katsayılı kare matris çözen altprogramlardan yararlanılmıştır.

BÖLÜM 7

DENEYSEL VE TEORİK SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

7.1. Deneysel Çalışma

Elektrik alanlarını incelemeye kullanılan analog yöntemlerden en önemlileri elektrolitik tank ve iletken kağıt yöntemleridir. Bu yöntemlerde, statik elektrik alanı ile stasyoner akım alanı arasındaki benzerlikten yararlanılır.

Statik elektrik alanı denklemleri;

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{F}$$

(7.1)

$$C = Q / U$$

$$\text{div } \vec{D} = \text{div } \epsilon \cdot \vec{E} = 0$$

ve stasyoner akım alanı denklemleri de;

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{F}$$

(7.2)

$$G = 1 / R = I / U$$

$$\text{div } \vec{J} = \text{div } \sigma \cdot \vec{E} = 0$$

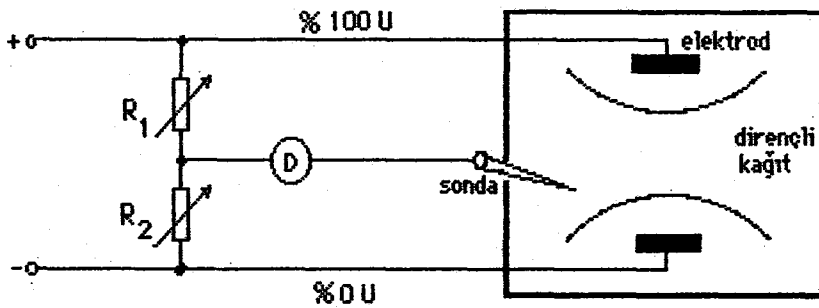
şeklindedir. Denk.(7.1) ile denk(7.2) 'den görüldüğü gibi stasyoner akım alanındaki J akım yoğunluğu ile statik elektrik alanındaki D deplasman vektörleri benzer matematiksel bağıntıları sağlamaktadır. σ iletkenlikli bir ortam için elde edilecek akım yoğunluğu çizgileri, aynı elektrod sisteminin

ϵ_r bağılı dielektrik sabitli yalıtkan ortamdaki deplasman çizgileriyle (izotrop bir ortam için statik alan çizgileriyle) çakışır. Bu özellikten yararlanarak alan dağılımı bulunacak elektrod sistemi ölçekli olarak direnç kağıdı üzerinde modellenerek akım çizgileri çizilirse, aynı zamanda sözkonusu elektrod sisteminin alan dağılımı da elde edilmiş olur.

İki boyutlu problemlere kolaylıkla uygulanabilen iletken kağıt yöntemi ile çok büyük doğruluklu sonuçlar elde edilebilir. İncelenecek sistemin modeli yüzey direnci $2 \text{ k}\Omega$ olan grafitlendirilmiş kağıttan kesilir ve tahta veya yumuşak plastik malzeme üzerine yerleştirilir. Elektrodlar ve diğer eşpotansiyel sınırlar, içinde gümüş oranı yüksek olan bir boya ile boyanarak gösterilir. Sıfır gradyan sınırları da kesik kenarlarla temsil edilir. Bu yöntemin önemli bir üstünlüğü, eşpotansiyel eğrilerin doğrudan doğruya kağıda çizilebilmesidir.

Direnç kağıdı üzerinde potansiyel dağılımının belirlenmesi ile ilgili devre şeması, Şekil 7.1 'de prensip olarak gösterilmiştir.

Elektrodlara a.a. veya d.a. uygulanabilir. Grafitlendirilmiş kağıt ve gümüş boyalı elektrod sınırları polarizasyon etkisi göstermez. Sonda (prob)



Şekil 7.1. İletken kağıt yöntemi ile potansiyel ölçülmesi.

olarak basit bir metal uç veya grafit kalem kullanılabilir. İletken kağıttaki homojensizlik sebebiyle 30 cm^2 'lik alanda, potansiyelerde $1-2 \text{ mm}^2$ 'lik hata meydana gelebilir. Ayrıca kağıdın değişik kısımlarındaki farklı ısınmalar da problem olabilir. Bu sebeple yüzey gradyan 8 V/cm 'den daha az olacak şekilde, uygulanan gerilimin küçük tutulması gereklidir ($= < 50 \text{ V}$). Bu durumlar gözönüne alınarak, Şekil 7.1 'deki devre kurulur ve deney dikkatle yapılır. Ölçme cihazı üzerinde yüzde ayarı yapılarak, istenen yüzdeye sahip eşit potansiyelli noktalar sonda yardımıyla tesbit edilir ve işaretlenir. Toplam hassasiyet $\%2$ kadar iyi olabilir.

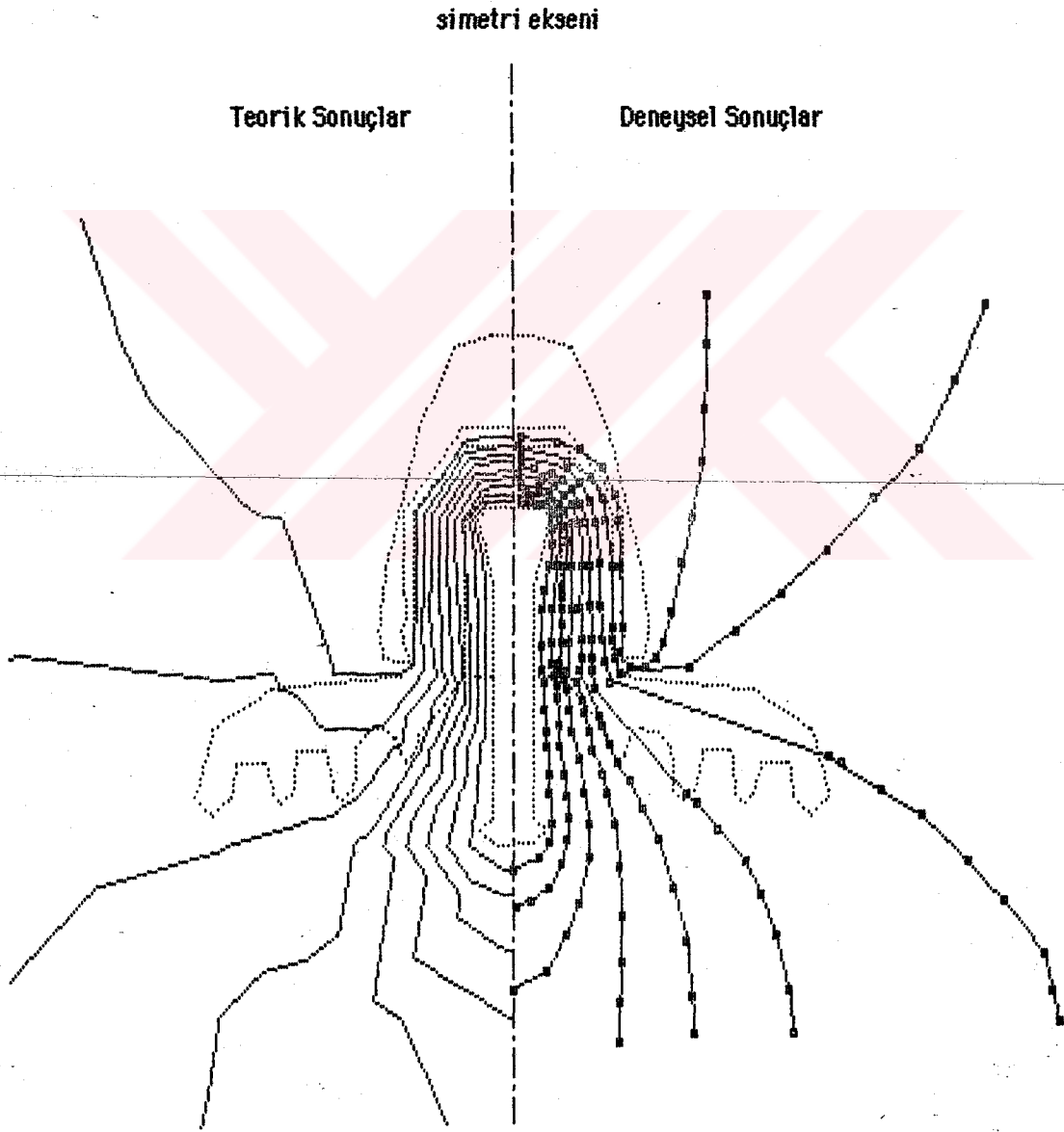
Çok dielektrikli sistemlerde dielektrik sabiti yüksek olan bölgeler, iletken kağıtların paralel kullanılması ile modellenenabilirler. Bu durumda farklı dielektriklerin sınır yüzeylerine iğneler sokularak, birbirlerine iyice temas etmesi sağlanır (Kind, 1976 ; Kuffel ve Zaengl, 1984).

7.2. Sonuçların Karşılaştırılması

Potansiyel dağılımını elde etmek üzere kullanılan deneysel yöntemlerde, çevre şartlarından dolayı YG yalıtım sistemlerinde meydana gelen izolasyon kirliliği temsil edilememektedir. Bu sebeple deneysel çalışmada, izotrop bir ortamı modelleyen ve dış sınırları (kesik kenarları) sıfır gradyan sınırları olarak serbest çözüm sağlayan iletken kağıt üzerinde, sadece temiz izolatöre ilişkin uygulamalar yapılmıştır.

Deneysel çalışma şartlarına uygun olarak yapılan bilgisayar hesaplama sonuçları ile iyi bir karşılaştırma sağlanması amacıyla, önce deneyde işaretlenen noktaların koordinatları ile potansiyel değerleri belirlenmiş, sonra da eşpotansiyel eğri çizim programına ilave edilen bir program parçası yardımıyla, her iki çalışmanın sonuçları beraberce çizdirilmiştir.

Şekil 7.2. 'de temiz bir izolatöre ait deney ve Sonlu Elemanlar Yöntemi ile hesaplanmış bilgisayar sonuçlarına ilişkin eşpotansiyel eğriler görülmektedir. Bilgisayar sonuçları, Şekil 4.17 'de üçgen elemanlar ile bölmelemesi gösterilmiş olan 127 elemanlı ve 85 düğümlü çözüm bölgesi için hesaplanmıştır.



Şekil 7.2. Tek izolator elemanı için eşpotansiyel eğriler.

Şekil 7.2 'de sağ yarıda gösterilen eğriler, Şekil 7.3 'teki fotoğrafta görülen deneysel noktaların bilgisayara aktarılarak, birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Tek izolatör için deneysel noktalar tesbit edilirken ölçü cihazı, eşpotansiyel noktalar arasındaki fark %10 olacak şekilde ayarlanmıştır. Böylece %10, %20, ..., %90 'lık eşpotansiyel eğrileri belirlemek üzere sırasıyla 20, 18, 19, 21, 22, 23, 27, 21, 23 nokta için ölçmeler yapılmıştır.

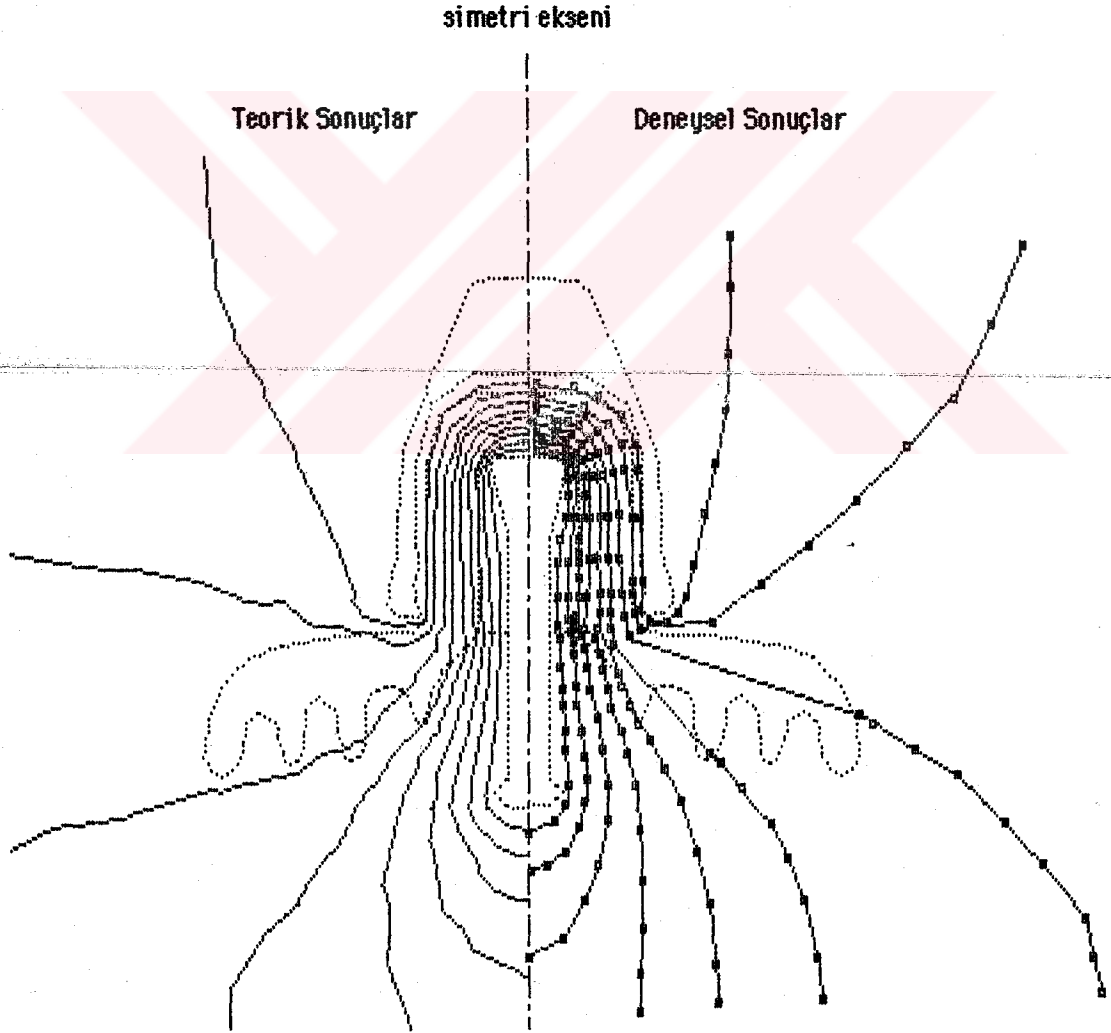
Şekil 7.2 'deki teorik ve deneysel sonuçlar, simetri nedeniyle eksenin sadece tek tarafı için belirlenmiştir. Ancak eğriler arasında karışıklık meydana gelmemesi ve sonuçların daha net bir şekilde karşılaştırılabilmesi için, teorik ve deneysel eğriler eksenin farklı taraflarına çizilmiştir.



Şekil 7.3. Tek izolatör elemanı için deneysel olarak eşpotansiyel noktaların belirlendiği iletken kağıdın fotoğrafı.

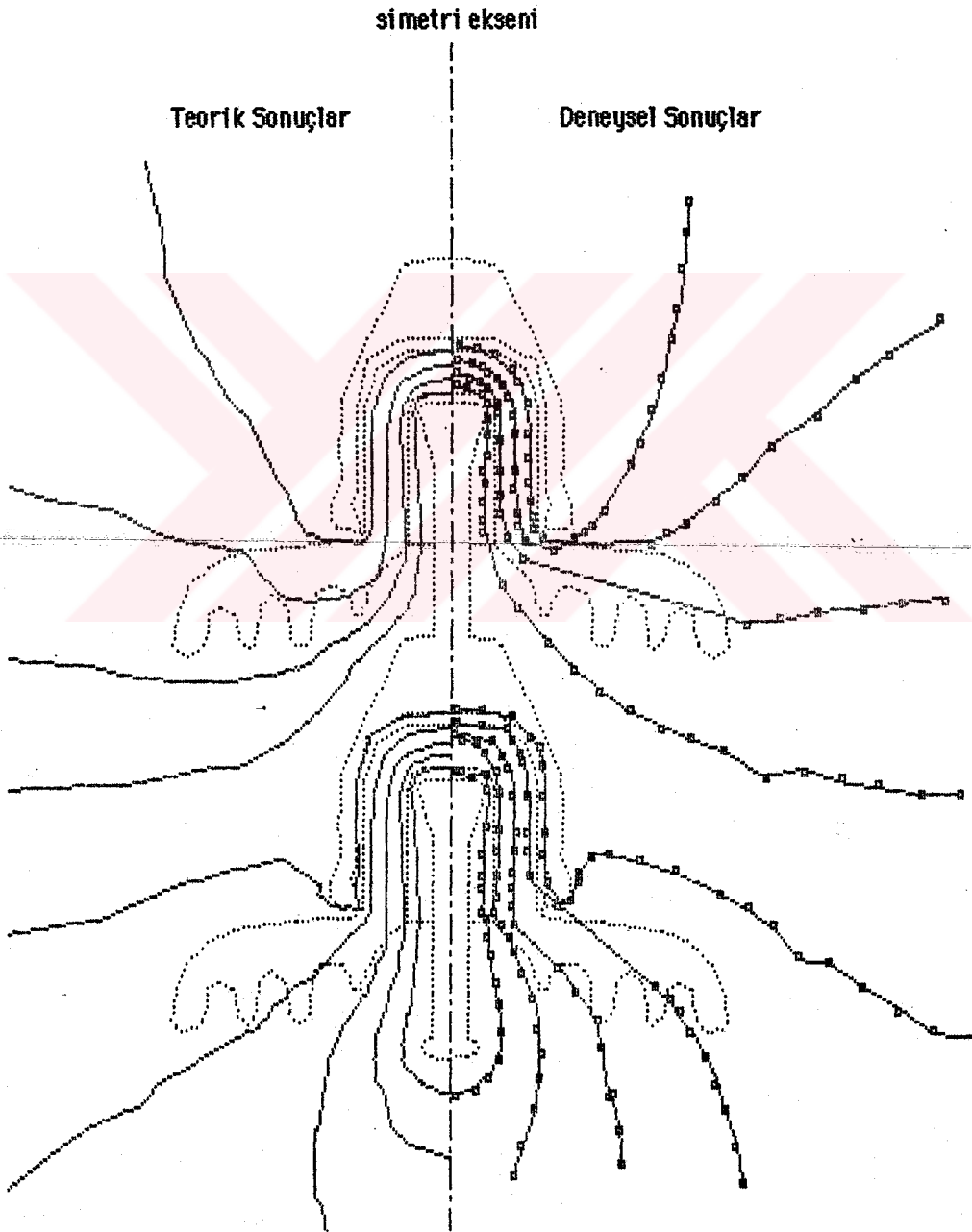
Şekil 4.17 'nin yerine, bir kademe daha sık bölmeleme olan $M=2$ için 508 elemanlı ve 297 düğümlü bölmelemeyi ele alalım. Bu durumda hesaplanan düğüm potansiyelleri yardımıyla teorik eğriler yeniden çizilecek olursa, Şekil 7.4 elde edilir.

Şekil 7.2 ile Şekil 7.4 'ün teorik sonuç eğrileri karşılaştırıldığında, çözüm bölgesindeki düğüm sayısının artırılmasıyla düğüm potansiyellerine ilişkin hesap sonuçlarındaki hata oranının azaldığı görülmektedir.



Şekil 7.4. Sık bölmelenmiş tek izolator elemanı için eşpotansiyel eğriler.

Şekil 7.5 'te iki elemanlı zincir izolatore ilişkin eşpotansiyel eğriler verilmiştir. Bu sistemin bilgisayar sonuçları, Şekil 4.19 'daki 900 elemanlı ve 518 düğümlü çözüm bölgesi için hesaplanmıştır. Sağ yarıda çizilen eğriler ise, Şekil 7.6 'daki fotoğrafta görülen deneysel noktalar



Şekil 7.5. İki elemanlı zincir izolator için eşpotansiyel eğriler.



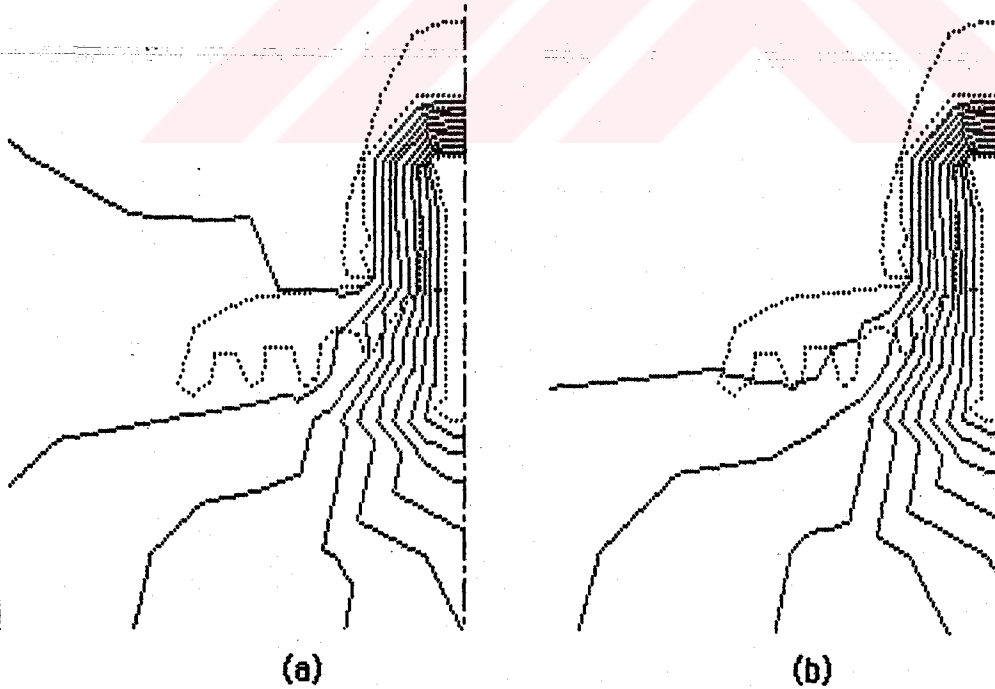
Şekil 7.6. İki elemanlı zincir izolatör için deneysel olarak eşpotansiyel noktaların belirlendiği iletken kağıdın fotoğrafı.

yardımla elde edilmiştir. Deneysel çalışma esnasında %10, %20,..., %90 'lık eşpotansiyel eğrileri belirlemek üzere, sırasıyla 26, 25, 18, 27, 27, 19, 19, 22, 20 nokta için ölçmeler yapılmıştır.

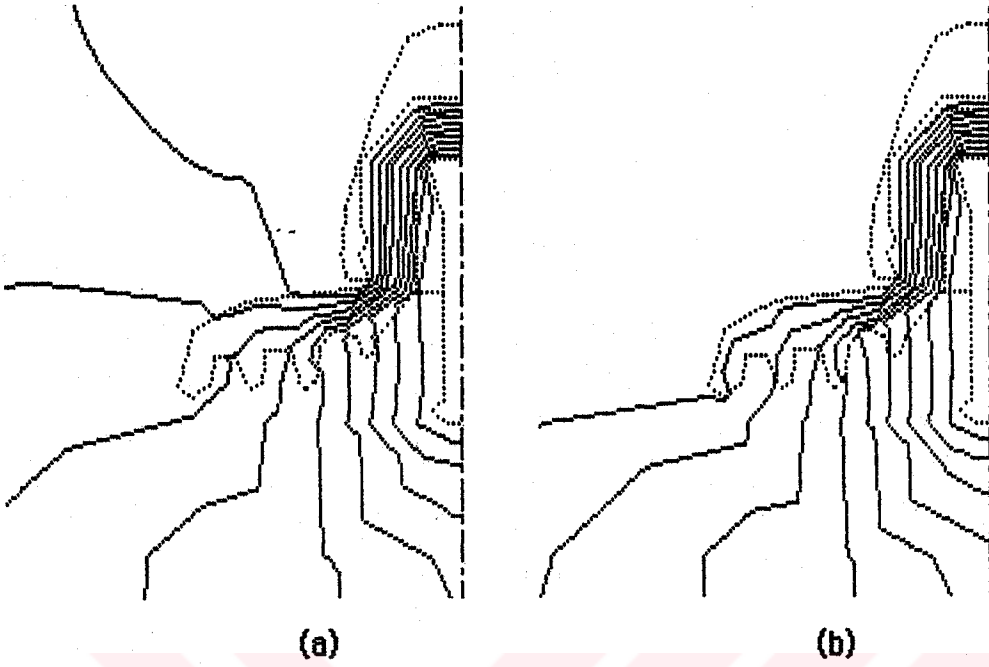
7.3. Kirli İzolatörlerin Eşpotansiyel Eğrileri İle İlgili Bilgisayar Sonuçları

İşletme şartlarında zincir izolatörlerin yüzeyinde oluşacak kir tabakasının potansiyel dağılımına etkisini belirlemek amacıyla, kirli izolatörlere ilişkin hesaplamalar yapılmıştır. Bunun için izolatör yüzeyinin belirli bir iletkenliğe sahip, ince kir tabakası ile homojen olarak kaplandığı kabul edilmiştir. Pratik şartları yeterince temsil edebilmek amacıyla örneklerde, izolatörün üst kısmının alt kısmına göre iletkenlik yönünden daha kirli olduğu da gözönüne alınmıştır.

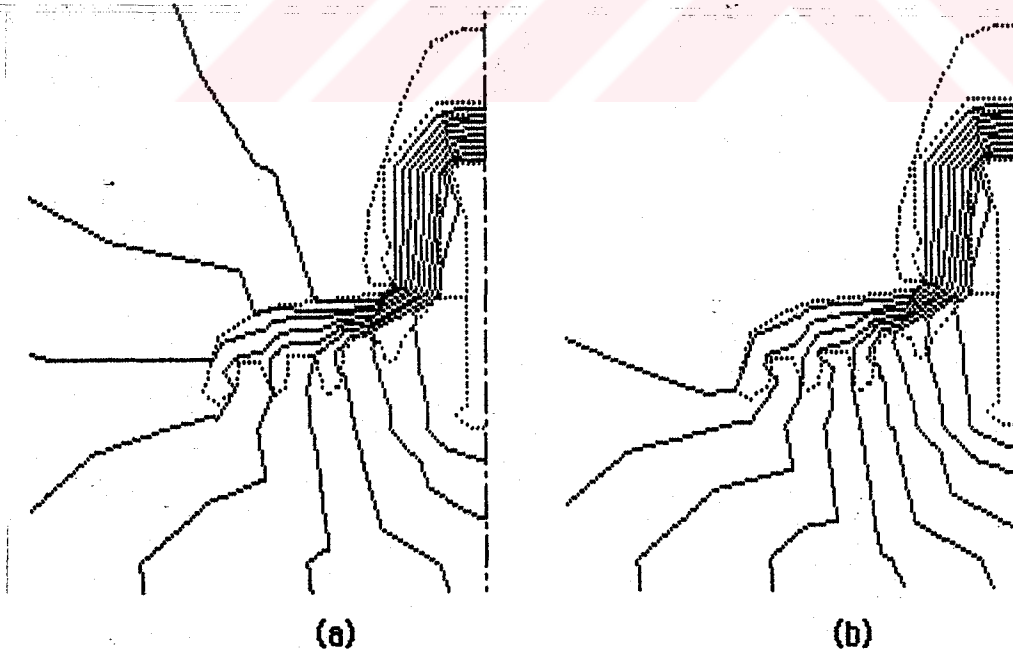
Tek izolatör elemanı için elde edilen bilgisayar sonuçlarına ilişkin eşpotansiyel eğriler Şekil 7.7, Şekil 7.8 ve Şekil 7.9 'da görülmektedir. İki elemandan oluşan zincir izolatör için de sonuçlar Şekil 7.10 ve Şekil 7.11 'de verilmiştir.



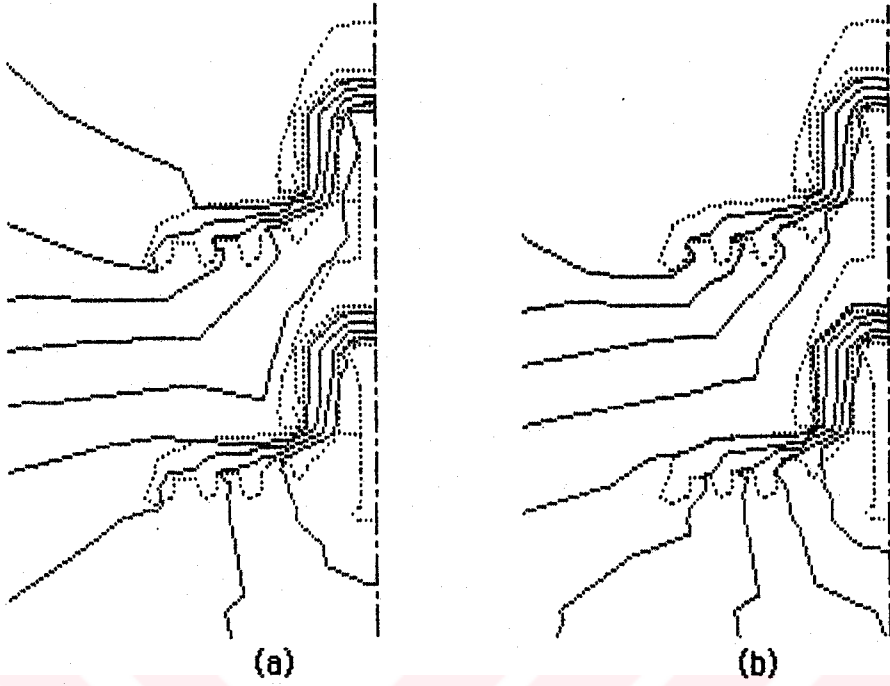
Şekil 7.7. $\sigma=10^{-6}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri. a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu b) Üst kısmın 3 kat daha kirli olması durumu



Şekil 7.8. $\sigma=10^{-5}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri. a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu

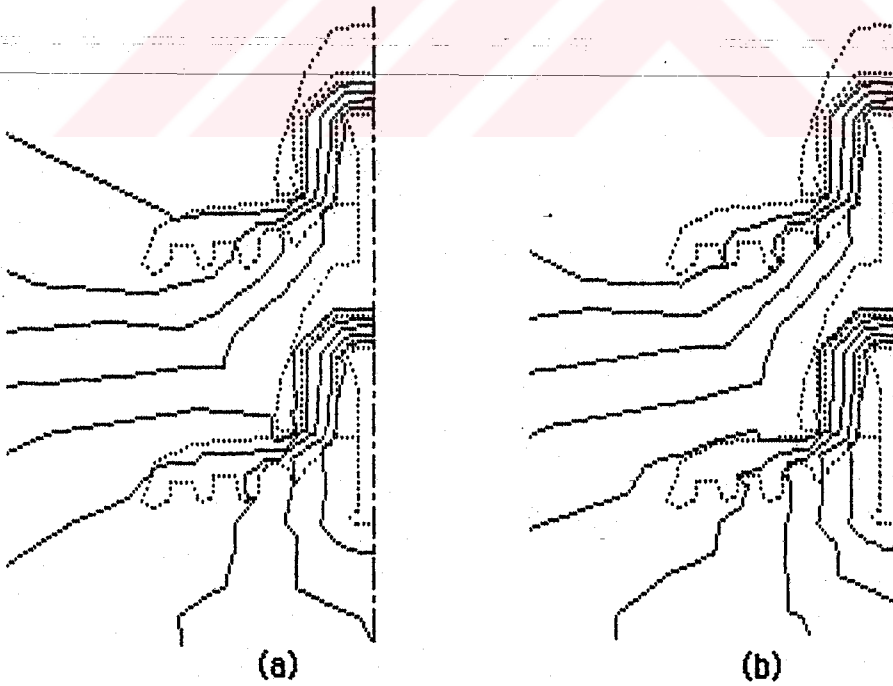


Şekil 7.9. $\sigma=10^{-2}$ S/m için zincir izolatör elemanının eğrileri. a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu



Şekil 7.10. $\sigma=10^{-5}$ S/m için iki elemanlı zincir izolatörün eğrileri.

- a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu
b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu



Şekil 7.11. $\sigma=10^{-2}$ S/m için iki elemanlı zincir izolatörün eğrileri.

- a) İzolatör yüzeyinde homojen dağılımlı kir durumu
b) Üst kısmın 5 kat daha kirli olması durumu

BÖLÜM 8

SONUÇ

8.1. Deneysel ve Teorik Sonuçların Uyumu İle İlgili Genel Bir Değerlendirme

Yapılan teorik ve deneysel çalışma sonuçlarının tatminkar uyumu, teoride yapılan kabullerin ve kullanılan yöntemlerin uygunluğunu belirler. Bu açıdan bakıldığında, Kısım 7.2 'deki karşılaştırmalar, elde edilen teorik sonuçların kabul edilebilir bir dereceye sahip olduğunu göstermektedir.

Şekil 7.2 ve Şekil 7.4 'te temiz izolatörler için hesaplanan bilgisayar sonuçları ile deneysel sonuçlar arasındaki fark ortalama %4 olup, en büyük fark %8 'dir.

Çözüm bölgesi dışında kalan alanların modellenerek hesaba katılması, çözüm bölgesindeki sınır düğümlere ilişkin potansiyellerin ortalama %3 oranında değişmesine sebep olmuştur.

Kirli izolatör sonuçlarını elde etmede kullanılan değişik iletkenlik değerleri, önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Küçük iletkenlik değerleri ile ilgili uygulama sonuçları olan Şekil 7.7a ve Şekil 7.10a, özellikle sap civarında ve iki elemanlı zincir izolatörde hem sap ve hem de alttaki izolatörün kapağı civarında eşpotansiyel eğrilerin sıkışması nedeniyle, bu bölgelerde izolatörün içindeki ve yüzeyindeki elektriksel zorlanmaların daha büyük olduğunu ve yüzeysel atlamaların bu bölgelerden başlayacağını göstermektedir. Büyük iletkenlik değerlerinde (Şekil 7.9a ve Şekil 7.11a) ise, potansiyel dağılımının daha düzgün bir yapıya sahip olduğu

belirlenmiştir. Bu durum, izolator yüzeyinin ince bir yarıiletken tabaka ile kaplanması halinde izolator yüzeyinden sürekli bir kaçak akım akmasına karşılık, yüzeysel atlamaların daha az oranda meydana geleceğini göstermektedir.

İzolatorün üst kısmında iletkenliği daha yüksek olan kir tabakasının oluşacağı gözönüne alındığında; potansiyel dağılımların iyice bozulduğu, eğrilerin %100 potansiyelli elektroda doğru sıkıştığı ve dolayısıyla sap civarında büyük elektriksel zorlanmaların meydana geldiği görülmektedir.

8.2. Müteakip Çalışmalar İçin Öneriler

YG sistemlerinde alan incelemelerinin daha detaylı ve pratik sonuçlar vermeye yönelik olması hususunda bir basamak teşkil eden bu tez çalışmasını izleyecek ve ona ilave edilebilecek bir çok çalışmalar vardır. Aşağıda önerilen bu çalışmaların, YG sistemlerinin alan dağılımının incelenmesi ve tasarımı konularındaki gelişmelere katkıda bulunabileceği düşünülmektedir. Bu öneriler şöyle sıralanabilir:

- 1) Sisteme ilişkin potansiyel dağılımından yararlanarak, izolator sınırları üzerindeki noktalarda alan şiddetleri belirlenebilir. Böylece yüzeysel atlama yönünden hangi bölgelerin daha büyük elektriksel zorlanmaya maruz kaldığı tesbit edilmiş olur. Bu durumda izolatorün, daha genel bir ifadeyle YG yalıtım elemanının şekil ve yapı itibariyle elektriksel zorlanmaların meydana gelişine etkisi ve tasarım açısından optimum şekil belirlenmesi incelenebilir.
- 2) Normal işletme durumunda, gerek ortamın dielektrik sabiti ve gerekse kirli bir yüzeyin iletkenliği sabit olmayıp nem, basınç, ısı gibi şartlara bağlı olarak değişmektedir. Özellikle ön deşarjların tuttuğu esnada iletkenlikteki değişimler, alan dağılımına önemli derecede etki eder.

Bu değişimlerin uygun yöntem ve yaklaşımlarla belirlenip hesaplara katılması, hem daha doğru sonuçlar elde etmeyi ve hem de izolatorün atlama başlangıcındaki performansını tesbit etmeyi sağlayacaktır.

- 3) Bu çalışmada, dış bölgelerin modellenmesi için ilgili yöntemlerden biri kullanıldı. İzolator uygulamalarında, diğer yöntemler de karşılaştırmalı olarak incelenmek suretiyle kullanılacak en uygun yöntemin seçimi yapılabilir.
- 4) Yine bu çalışmada iki boyutlu aksenal simetrik bir yapı olarak ele alınan izolatorler, üç boyutlu döneel simetrik bir sistem olarak incelenebilir.



YARARLANILAN KAYNAKLAR

- ANDERSEN, O.W., (1973), Laplacian Electrostatic Fields Calculations by Finite Elements with Automatic Grid Generation", **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**, PAS-92(5):1485-1492, Sept./Oct.
- ANDERSEN, O.W., (1977), Finite Element Solution of Complex Potential Electric Fields, **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**, PAS-96 (4): 1156-1161, July/August.
- ANTUNES, C.F.R.L., FREEMAN, E.M., LOWTHER, D., SILVESTER, P., (1982), A Static Ballooning Technique for 2-D Open Boundary Problems, **J. Appl. Phys.**, 53(11), November.
- BRAUER, J.R., (1982), Open Boundary Finite Elements for Axisymmetric Magnetic and Skin Effect Problems, **J. Appl. Phys.**, 53(11), November.
- BRAUER, J.R., KALFAIAN, H. ve MOREINES, H., (1989), Dynamic Electric Fields Computed by Finite Elements, **IEEE Trans. on Industry Applications**, 25 (6): 1088-1092, Nov./Dec..
- BYKAT, A., (1976), Automatic Generation of Triangular Grids I-Subdivision of a General Polygon into Convex Subregions II-Triangulation of Convex Polygons, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, 10.
- CAMPBELL, P., HOOLE, S.R.H., TSALS, I., (1984), Finite Element Field Analysis in 2-D and 3-D on A Personal Computer, **IEEE Trans. on Magnetics**, MAG-20 (5):1903-1905, Sept.
- CERMAK, I.A., SILVESTER, P., (1968), Solution of Two-Dimensional Field Problems by Boundary Relaxation, **Proc. IEE**, 115: 1341-1348, Sept.
- CERMAK, I.A., SILVESTER, P., (1970), Boundary-Relaxation Analysis of Rotationally Symmetric Electric Field Problems, **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**, PAS-89 (5/6): 925-930, May/June.

- CHARI, M.V.K., SILVESTER, P.P., (1984), **Finite Element in Electrical and Magnetic Field Problems**, John Wiley and Sons, New York.
- CHANDRUPATLA, T.R., BELEGUNDU, A.D., (1991), **Introduction to Finite Elements in Engineering**, Prentice-Hall Inc., USA.
- CROWLEY, C., HURWITZ, H., CHARI, M.V.K., D'ANGELO, J., BERKERY, J.F., (1985), Power Line Insulator Analysis and Design Using Finite Elements and Infinitesimal Scaling, **IEEE Trans. on Magnetics**, MAG-21 (6), Nov.
- DAVIES, J.A., (1982), **The Finite Element Method**, Clarendon Press, Oxford.
- DENEGRI, G.B., MOLINARI, G., VIVIANI, A., (1975), A Program for Electric Field Computation Using A Finite Difference Method with Curvilinear Grid, **Proceedings of Int. High Voltage Symposium**, 6-11, Zurich.
- DUROCHER, L.L., (1979), A Versatile Two-Dimensional Mesh Generator with Automatic Bandwidth Reduction, **Computers and Structures**, 10.
- EDGEBERY, J.L., (1969), MESHGEN a Computer Code of Automatic Finite Element Mesh Generation, **Sandia Laboratories**, California, June.
- FLATABÖ, N., RIEGE, H., (1972), Automatic Calculation of Electric Fields, **Int. Sym. on High Voltage Technology (ISH)**, 17-22, Munich.
- FREDRIKSSON, B., MACKERLE, J., (1976), **Structural Mechanics Finite Element Computer Programs: Survey and Availability**, Rep. LITH-IKP-R-054, Linköping Institute of Technology, Sweden.
- FUJII, T., YUKI, T., (1973), **Automated Data Generation and Large Matrix Operation for Three-Dimensional Plate Structure Analysis, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis**, University of Tokyo Press, Tokyo.
- GELLERT, B.C., RASMUSSEN, J.K., (1989), Finite-Element Modeling of Dry Zone Formation on Polluted Outdoor High-Voltage Insulators, **Sixth Int. Sym. on High Voltage Engineering**, 24.07: 1-4, New Orleans.

- GHASSEMI, F., (1982), Automatic Mesh Generation Scheme for a Two- or Three-Dimensional Triangular Curved Surface, **Computers and Structures**, 15 (6): 613-626.
- GORDON, W.J., HALL, C.A., (1973), Construction of Curvilinear Coordinate Systems and Applications to Mesh Generation, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, 7.
- GÖNENÇ, İ., (1977), **Yüksek Gerilim Tekniği Cilt 1**, İ.T.Ü., İstanbul.
- HAZNADAR, Z., MILOJKOVIC, S., KAMENICA, I., (1979), Numerical Field Calculation of Insulator Chains for High Voltage Transmission Lines, **Third Int. Sym. of High Voltage Engineering**, 12.08: 1-4, Milan.
- HILDEBRAND, F.B., (1976), **Advanced Calculus for Applications**, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- HUEBNER, K.H., THORNTON, E.A., (1982), **The Finite Element Method for Engineers**, John Wiley and Sons, USA.
- IMAFUKU, I., KODERA, Y., (1980), A Generalized Automatic Mesh Generation Scheme for Finite Element Methods, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, 15.
- ITAKA, K., KAJI, M., HARA, T., (1980), New Finite Element Field Calculation Technical in Which Continuity of Electric Flux is Satisfied, **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**, PAS-99 (6): 2102-2112.
- KATO, S., KOKAI, H., NAKAJIMA, Y., KOUND, T., (1979), Finite Element Method for The Calculation of Potential Distribution to The Porcelain Insulator with Semiconducting Surface Layer, **Third Int. Sym. on High Voltage Engineering**, 12.11: 1-4, Milan.
- KIND, D., (1978), **An Introduction to High-Voltage Experimental Technique**, METU, Ankara.
- KUFFEL, E., ve ZAENGL, W.S., (1984), **High Voltage Engineering**, Pergamon Press, Oxford.

- LOWTHER, D.A., RAJANATHAN, C.B., SILVESTER, P.P., (1978), A Finite Element Technique for Solving 2-D Open Boundary Problems, **IEEE Trans. on Magnetics**, MAG-14 (5): 467-469, September.
- MARSHALL, S.V., SKITEK, G.G., (1990), **Electromagnetic Concepts and Applications**, Prentice-Hall, Inc., USA.
- MCDONALD, B.H., WEXLER, A., (1972), Finite Element Solution of Unbounded Field Problems, **IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques**, MTT-20 (12): 841-847, December.
- MOLINARI, G., SCIUTTO, G., VIVIANI, A., (1979), Experimental Results and Computer Simulation of Electric Fields around Insulating Structures under AC and DC Conditions, **Third Int. Sym. of High Voltage Engineering**, 12.17: 1-4, Milan.
- NORRIE, D.H., VRIES, G.D., (1978), **An Introduction to Finite Element Analysis**, Academic Press, New York.
- ÖZKAYA, M., (1988), **Yüksek Gerilim Tekniği 1**, İ.T.Ü., İstanbul
- RAO, S.S., (1989), **The Finite Element Method in Engineering**, Second Edition, Pergamon Press plc, U.K.
- RUMELİ, A., (1973), **Yüksek Gerilim İzolatörlerinin Kirlenme Atlama Gerilimlerinin Hesaplanması**, Tübitak, Ankara.
- RUMELİ, A., (1969), **Yüksek Gerilim Sistemlerinin İzolasyon Dizayn ve Koordinasyonu**, ODTÜ-TEK Eğitim Konferansları Notları, Ankara.
- RUMELİ, A., KORAŞLI, C., (1975), Kirlenmiş İzolatörlerin Atlama Davranışlarının Analitik İncelenmesi İçin Geliştirilen Model Kavramı, **EMO Yayın Organı**, Ankara.
- SADOVIC, S.M., (1979), Numerical Considerations of The Effect of Resistive Coatings and Surface Pollution on The Potential Distribution of HV Insulating Systems, **Third Int. Sym. on HV Engng.**, 12.06: 1-4, Milan.

- SADOVIC, S., SOKOLIJA, K., WARREN, L., RASCIC, M., (1983), Computer Aided Design Procedure for Polluted Insulators Considerations, **Fourth Int. Sym. on High Voltage Engineering**, 12.07: 1-4, Athens.
- SILVESTER, P.P., FERRARI, R.L., (1983), **Finite Elements for Electrical Engineers**, Cambridge University Press.
- SILVESTER, P.P., LOWTHER, D.A., CARPENTER, C.J., ve WYATT, E.A., (1977), Exterior Finite Elements for Two-Dimensional Field Problems with Open Boundaries, **Proc. IEE**, 124 (12): 1267-1270, December.
- STEFANOUD, G.D., (1980), Automatic Triangular Mesh Generation in Flat Plates for Finite Elements, **Computers and Structures**, 11.
- STEINBIGLER, H., (1979), Combined Application of Finite Element Method and Charge Simulation Method for the Computation of Electric Fields, **Third Int. Sym. of High Voltage Engineering**, 11.11: 1-4, Milan.
- SUHARA, J., FUKUDA, J., (1974), **Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis**, **Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design**, University of Alabama Press.
- TAREEV, B.M., KOROTKOVA, N.V., PETROV, V.M., PREOBRAZHENSKY, A.A., (1980), **Electrical and Radio Engineering Materials**, English Translation, Mir Publishers, Moscow.
- TONG, Y.T., HE, Y.D., (1983), Electric Field Calculation with FEM by Using Micro-computers, **Fourth Int. Sym. on High Voltage Engineering**, 11.10: 1-4, Athens.
- ZIENKIEWICZ, O.C., (1977), **The Finite Element Method**, McGraw-Hill Book Company Ltd., U.K.
- ZIENKIEWICZ, O.C., PHILLIPS, D.V., (1971), An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by Isoparametric Coordinates, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, 3.