24778

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-PARAMETRELİ HAREKETLERİN KİNEMATİK ANALİZİ

Fevzi ÖZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1992
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-PARAMETRELİ HAREKETLERİN KİNEMATİK ANALİZİ

Fevzi ÖZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez .... Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

İmza	İmza	İmza
______________	______________	______________

Danışman
Doç.Dr. Ali Paşa AYDIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ- PARAMETRELİ HAREKETLERİN KİNEMATİK ANALİZİ

Fevzi ÖZER

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
1992, Sayfa: 66

Bu çalışmada, bir-parametreli B_I ve iki-parametreli B_{II}-hareketleri ile bunların kinematik özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde, temel kavramlar ve konuya açıklık getiren bazı teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde diferensiyel formlar olarak Pfaff-formları ele alınıp onların dış çarpımlara bağlı olarak dış türevleri tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde iki-parametreli hareketler altında pol noktaları, bunların pol eğrileri ve E-hareketli düzleminde bir g doğrusu ile E'-sabit düzleminde bir g' doğrusu meydana gelmiştir

Dördüncü bölüm; iki-parametreli hareketlerin kutup eksenleri, kutup eksenleri dönüşümünün yoğunluk değişmezliği, kutup eksenleri dönüşümü, ve kutup eksenleri yoğunluğu sıfır olan hareketler incelenmiş olup, bunlara bağlı bazı teoremler ifade edilmiştir.

Beşinci bölüm olarak, bir eğri elementini çizen noktalar incelenmiş, bir X noktasının E ve E'-düzlemlerindeki sabit kalma şartları verilmiştir.

Altıncı bölüm; iki-parametreli B_{II}-hareketinde esas-B_I hareketi ve normlanmış izafe sistemi, σ Pfaff-formların lineer bağımlılığı ve bunların dış türevleri üzerinde durulmuştur.

Yedinci bölümde; B_{II}-hareketindeki özel B_I-hareketleri incelenmiştir.

Son bölümde kaynaklara yer verilmiştir.

SUMMARY

Masters Thesis

KİNEMATİCAL ANALYSİS OF TWO-PARAMETER MOTİONS

Fevzi ÖZER

Fırat University
Graduate Scholl of Science and Technology
Department of Mathematics
1992, Page : 66

In this study, one-parameter, B_I and two-parameter B_{II} motions and their kinematics properties are investigated in details.

In the first section, bacis concepts and some which explaines the subjects teorems well are given.

In the second section, Pfaff-forms are taken as a differential forms and exterior derivatives are defined related with the exterior product.

In the third section, pole points and their pole curves, a line which is defined g in moving plane E and a line which is defined g' in constant plane E' are obtained.

In fourth part the pole axes of two-parameter motions the density-inveriant of the mapping of the pole axes, the mapping of the pole axes, and mapping the of which pole axes density is zero are investigated and some teorems are given.

In the fifth part, the points which draw a curve element are investigated and the constant-invariant conditions in E and E'-planes of a X point are given.

In the sixth part, the fundamental motion B_I in two-parameter motions B_{II}, the normed relative systems of it and the form of the σ Pfaff-forms whether it is lineerly dependent or independent and the exterior derivatives related with this manner are given.

In seventh part, special B_I -motions in B_{II} -motions are investigeted.

In the last part the references are given.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren, bu çalışmanın planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç.Dr. Ali Paşa AYDIN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarıma yardımcı olan Arş.Gör. Vedat ASİL'e de teşekkürü bir borç bilirim.

Fevzi ÖZER

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER

$\in$	: Eleman
$\Rightarrow$	: İse (gerektirir)
$\forall$	: Her
$\wedge$	: Dış çarpım
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\langle\, ,\, \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar sistemi
$\vec{V}_r$	: Relatif hız vektörü
$\vec{V}_a$	: Mutlak hız vektörü
$\vec{V}_f$	: Sürüklenme hız vektörü
w_i	: Pfaff-formları
$d_f\vec{x}$	: X noktasının ilerleme doğrultusu
B_I	: Bir-parametreli hareket
B_{II}	: İki-parametreli hareket
(P)	: Hareketli pol eğrisi
(P')	: Sabit pol eğrisi
(g)	: E-düzlemindeki kutup ekseni
(g')	: E'-düzlemindeki kutup ekseni
k	: E-düzleminin zarf eğrisi
k'	: E'-düzleminin zarf eğrisi
δ	: Eğrilik yarı çapı
$W \wedge \varphi$	: W ve φ Pfaff-formlarının dış çarpımları

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

TANIM 1.1. (Dış Türev):

M bir n- boyutlu topolojik manifold ve M üzerinde bir A bölgesinde tanımlı bir C^{∞} fonksiyon f olsun. f bir 0- form olarak adlandırılır.

$$df(x) = x[f] = \langle \nabla f, x \rangle$$

olarak tanımlanan df 1-formuna f 'nin A daki dış türevi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.2. (Topolojik Manifold):

M bir Hausdorff uzayı olsun. $\forall m \in M$ noktası için M'de E^n , $n \geq 0$ 'ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M'ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalihoğlu, 1980).

TANIM 1.3. (Pfaff Formları):

Bir veya iki değişkenli diferensiyel ifadelere, yani

$$w_i = f_i\,(t)\;dt \text{ veya } w_i = f_i\,(u,v)du + g_i\,(u,v)\;dv$$

şeklindeki bağıntılara Pfaff-formları adı verilir (Müller, 1963).

TANIM 1.4. (p-Formların Dış Türevi):

Bir G matris Lie grubu üzerinde p-formların cümlesi $\Omega^p(G)$ olsun.

$$W \in \Omega^p(G)$$

ise,

$$d : \Omega^p(G) \longrightarrow \Omega^{p+1}(G) \quad , \; a_H : G \xrightarrow{C^\infty} IR$$
$$W = \Sigma a_H \, dx_H \longrightarrow dW = \Sigma da_H \wedge dx_H$$

şeklinde tanımlanan d operatörüne p-formların dış türevi denir (Hacısalihoğlu, 1980).

d operatörünün özelliklerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

TEOREM 1.1:

1. $d(W_1+W_2) = dW_1+dW_2 \quad , \forall W_1, W_2 \in \Omega^p(G)$, (d-lineer)
2. W bir p-form η bir q-form ise

   $d(W \wedge \eta) = dW \wedge \eta + (-1)^{\deg W} \, W \wedge \eta$,
3. $d(dW) = 0, \; \forall W \in \Omega^p(G)$ (Poincare teoremi)
4. $df = \Sigma \, (\partial f/\partial x_i) \, dx_i \quad , \; \forall f \in \Omega^0(G)$

dır (Flanders, 1963).

TANIM 1.5. (Vektörel Çarpım):

V bir üç boyutlu reel vektör uzayı olsun. V'de bir iç işlemi

$$\wedge : V \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \wedge \beta$$

şeklinde alalım. Bu iç işlemi şu şekilde tanımlayabiliriz. $\alpha, \beta \in V$ ve V'nin standart bazı $\{e_i\}$ olmak üzere,

$$\alpha \wedge \beta = \det(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha = (a_{11}, \; a_{12}, \; a_{13}), \\ \beta = (a_{21}, \; a_{22}, \; a_{23}), \end{matrix}$$

Bu şekilde tanımlanan Λ iç işlemine V'de vektörel çarpım işlemi veya V'de dış çarpım işlemi adı verilir.

TEOREM 1.2:

Λ dış çarpım işleminin özellikleri

1. $\alpha \Lambda \beta = -\beta \Lambda \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in V$;
2. $\alpha \Lambda \alpha = 0$, $\forall \alpha \in V$;
3. $(k\alpha) \Lambda \beta = k(\alpha \Lambda \beta) = \alpha \Lambda k\beta$,$\forall k \in IR$,
4. $\alpha \Lambda (\beta + \gamma) = \alpha \Lambda \beta + \alpha \Lambda \gamma$,$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$;
5. $(\alpha + \beta) \Lambda \gamma = \alpha \Lambda \gamma + \beta \Lambda \gamma$

dır (Hacısalihoğlu, 1990).

TEOREM 1.3:

$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ skalar fonksiyon veya sıfırıncı mertebeden diferensiyel form, W da bir p-form olmak üzere dış türev aşağıdaki özelliğe sahiptir.

$$d(f.W) = d(w.f) = df \Lambda W + f.dW \qquad (1.1.)$$

(Müller, 1963).

TANIM 1.6. (Sıfırıncı Mertebeden Diferensiyel Form):

E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere bir

$$f : U \longrightarrow R$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir. U üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde bir 0-form adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.7. (Tam Diferensiyel):

M ve N, $B \subset R$ bölgesinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (1.2)$$

diferensiyeli ve B bölgesinde türetilebilir bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $(x,y)\in B$ için

$$\partial f(x,y)/\partial x = M(x,y) \quad , \quad \partial f(x,y)/\partial y = N(x,y)$$

ise (1.2) ifadesine tam diferensiyeldir denir. O halde (1.2)'nin tam diferensiyel olabilmesi için,

$$df(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

yazılabilecek şekilde bir f fonksiyonunun bulunması gerekir (Çelebi, 1980).

TANIM 1.8. (Tamlık):

Bir W p-formu için $dW = 0$ ise W formuna kapalıdır ve $W = d\eta$ olacak şekilde bir η formu mevcut ise, W formuna tamdır denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Bu tanıma göre şu sonucu verebiliriz:

SONUÇ 1.1:

Her bir tam form kapalıdır. Bu sonucun tersi doğru olmayabilir.

TEOREM 1.4. (Stokes Teoremi) :

E^n 'de bir A açık cümlesi üzerinde bir (k-1)-form W olsun. A üzerinde bir k-zincir C ise

$$\int_C dw = \int_{\partial C} W$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

TEOREM 1.5. (Green Teoremi):

E^3 'de M bir kompakt, 2- boyutlu ve sınırlı bir manifold olsun. Kabul edelim ki,

$$\alpha, \beta : M \longrightarrow R$$

diferensiyellenebilir olsunlar. O zaman

$$\int_{\partial M} (\alpha\, dx + \beta\, dy) = \int_{M} (\partial \beta / \partial x - \partial \alpha / \partial y)\, dx \wedge dy$$

$$= \iint_{M} (\partial \beta / \partial x - \partial \alpha / \partial y)\, dx dy$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.9. (İzometri):

E_1^n ve E_2^n sırası ile, V_1 ve V_2 n-boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzay olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f 'ye bir izometri denir (Hacısalihoğlu, 1980).

TANIM 1.10. (Hiperyüzey):

E^n , n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) -boyutlu veya (n-1)- yüzey diye E^n 'deki boş olmayan bir M cümlesine denir. Öyle ki, bu M cümlesi

$$M=\{x\in U\subset E^n \mid f: U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} IR,\ U \text{ bir açık altcümle}\}$$
$$x \longrightarrow f(x)=c$$

$\nabla f|_p \neq 0$, $\forall p \in M$ biçiminde tanımlanır.

E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir. E^n de bir (n-1) yüzey, n>3 olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.11. (Hiperküre):

E^n , n-boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2=r^2 \quad , r\in IR,\ r=\text{sabit}\}$$

nokta cümlesine bir (n-1)- boyutlu hiperküre veya kısaca (n-1)-küre denir (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.12. (İntegrallenebilme Şartları):

Aşağıda verilen

$$d\sigma_1 = -\sigma_2 \wedge \tau$$
$$d\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \tau \qquad (1.3)$$

ve aynı şekilde

$$d\sigma'_1 = -\sigma'_2 \wedge \tau'$$
$$d\sigma'_2 = \sigma'_1 \wedge \tau' \qquad (1.4)$$

ifadelerine integrallenebilme şartları denir (Müller, 1963).

TANIM 1.13. (Relatif Hız):

X nokasının E- düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası E- düzlemindeki yörünge eğrisini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının $\vec{V}_r$ relatif hızı denir (Müller, 1963).

TANIM 1.14. (Mutlak Hız):

X noktasının E'- düzlemine göre hız vektörüne X noktasının $\vec{V}_a$ mutlak hızı denir (Müller, 1963).

TANIM 1.15. (Sürüklenme Hızı):

X noktasının $\vec{V}_r$ relatif hızı için

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \tag{1.5}$$

denkleminde $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ 'yi sabit tutarak diferensiyel almak suretiyle

$$\vec{V}_r = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 \tag{1.6}$$

buluruz.

$$\vec{e}_1 = \cos\varphi \; \vec{e'}_1 + \sin\varphi \; \vec{e'}_2 \tag{1.7}$$

$$\vec{e}_2 = -\sin\varphi \; \vec{e'}_1 + \cos\varphi \; \vec{e'}_2 \tag{1.8}$$

denklemlerinde $\vec{e'}_1$, $\vec{e'}_2$ vektörlerini sabit tutarak her iki tarafın diferensiyeli alınırsa

$$d\vec{e}_1 = -\sin\varphi \, d\varphi \, \vec{e'}_1 + \cos\varphi \, d\varphi \, \vec{e'}_2$$

$$= (-\sin\varphi \; \vec{e'}_1 + \cos\varphi \; \vec{e'}_2) \, d\varphi \; ,$$

$$d\vec{e}_2 = -\cos\varphi \, d\varphi \, \vec{e'}_1 - \sin\varphi \, d\varphi \, \vec{e'}_2$$

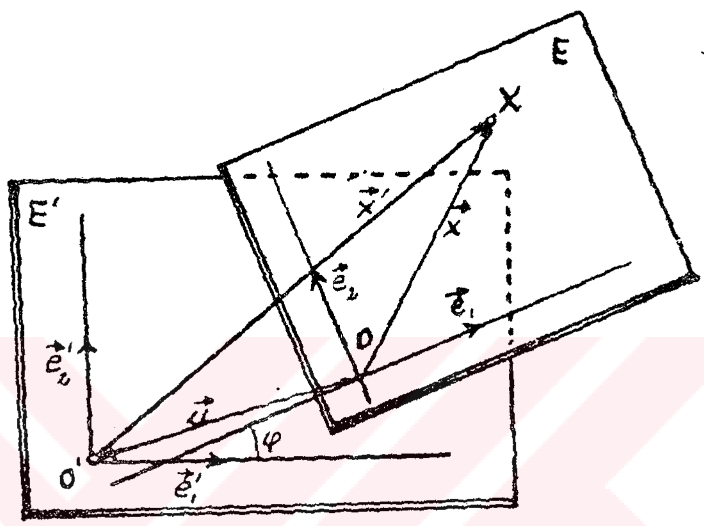
$$= -(\cos\varphi \, \vec{e'}_1 + \sin\varphi \; \vec{e'}_2) \, d\varphi$$

elde edilir.

Parantezlerin içindeki ifadeleri (1.7) ve (1.8) formülleri ile karşılaştırırsak,

$$d\vec{e}_1 = d\varphi\,\vec{e}_2 \quad , \quad d\vec{e}_2 = -\,d\varphi\,\vec{e}_1 \tag{1.9}$$

yazılır.



Şekil-1.

Şekildeki $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ vektörünü $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ doğrultularındaki bileşenlerine göre

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{u} = u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2 \tag{1.10}$$

şeklinde yazabiliriz. (1.10) 'un her iki tarafının diferensiyelini alırsak,

$$d\vec{u} = du_1\,\vec{e}_1 + u_1\,d\vec{e}_1 + du_2\,\vec{e}_2 + u_2\,d\vec{e}_2$$

buluruz. Burada (1.9)'daki değerler yerine yazılırsa

$$d\vec{u} = du_1\,\vec{e}_1 + u_1\,d\varphi\,\vec{e}_2 + du_2\,\vec{e}_2 - u_2\,d\varphi\,\vec{e}_1$$

veya

$$d\vec{u} = (du_1 - u_2\,d\varphi)\vec{e}_1 + (du_2 + u_1 d\varphi)\vec{e}_2 \tag{1.11}$$

formülünü elde ederiz.

X noktasının $\vec{V}_a$ mutlak hızı için

$$\vec{x}' = -\vec{u} + \vec{x} = (-u_1 + x_1)\vec{e}_1 + (-u_2 + x_2)\vec{e}_2 \qquad (1.12)$$

olur. (1.12) bağıntısının diferensiyelini almak suretiyle

$$\vec{V}_a = d\vec{x}' = -d\vec{u} + d\vec{x}$$

$$\vec{V}_a = -(du_1 - u_2 d\varphi)\vec{e}_1 - (du_2 + u_1 d\varphi)\vec{e}_2 + x_1\, d\vec{e}_1 + dx_1\vec{e}_1 + x_2\, d\vec{e}_2 + dx_2\vec{e}_2$$

bulunur.

(1.9) 'daki değerler ve (1.6) bağıntısı kullanılırsa

$$\vec{V}_a = d\vec{x}' = (-du_1 + u_2 d\varphi - x_2\, d\varphi)\vec{e}_1 + (-du_2 - u_1 d\varphi + x_1\, d\varphi)\vec{e}_2 + \vec{V}_r \qquad (1.13)$$

elde edilir.

$$\vec{V}_f = -\{du_1 + (-u_2 + x_2)d\varphi\}\vec{e}_1 + \{-du_2 + (-u_1 + x_1)d\varphi\}\vec{e}_2 \qquad (1.14)$$

vektörüne X noktasının sürüklenme hız vektörü denir. Dolayısıyla bunlara bağlı olarak aşağıdaki teorem verilir.

TEOREM 1.6 :

İki hareketin terkibinde bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile relatif hız vektörünün toplamına eşittir. Bundan dolayı $\vec{V}_a$ mutlak hızı, $\vec{V}_f$ sürüklenme hızı ve $\vec{V}_r$ relatif hızı arasında

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r$$

bağıntısı vardır (Müller, 1963).

TANIM 1.15. (Dönme Polü):

Sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalara pol noktası veya dönme polü veyahut ani dönme merkezi denir (Müller, 1963).

TANIM 1.16. (Nokta Yoğunluğu):

İki -parametreli bir B_{II} -hareketinde E- düzlemindeki X noktasının yüzey elementine X noktasının E'-düzlemindeki nokta yoğunluğu denir (Müller, 1963).

TANIM 1.17. (Doğru Yoğunluğu):

E-düzlemindeki g doğrusunun

$$(g) = dh \wedge d\varphi$$

ile verilen ifadesine g doğrusunun doğru yoğunluğu adı verilir (Müller, 1963).

TANIM 1.18. (Pol Eğrisi):

Her t anına bir P dönme polü ait olacağından, hareket esnasında P noktası her iki E ve E'- düzleminde yer değiştirerek bir yörünge çizer. P noktasının hareketi E- düzleminde çizdiği geometrik yere (P) hareketli pol eğrisi denir. (P) noktasının E'- düzlemindeki geometrik yerine ise hareketin (P') sabit pol eğrisi denir (Müller, 1963).

TEOREM 1.7:

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynıdır.

TANIM 1.19. (Zarf Eğrisi) :

Hareketli pol eğrisinin, sabit pol eğrisi üzerindeki hareketinden meydana gelen eğriye zarf eğrisi denir (Müller, 1963).

TANIM 1.20. (Evolvent Hareketi) :

Evolvent hareketinde, hareketli pol eğrisi olarak g = (P) gibi doğru (P') sabit pol eğrisi üzerinde yuvarlanır. g 'nin her noktası (P') nün bir evolventini çizer. g'ye değişmez surette bağlı her hangi bir X noktasının yörüngesinin X noktasındaki teğeti burada bulunabilir. Bu şekilde oluşan harekete evolvent hareketi adı verilir (Müller, 1963).

TANIM 1.21. (Kutup Ekseni) :

Üzerinde bir başlangıç noktası bulunan sağa doğru yönlenmiş yatay bir eksen, düzlem noktalarının yerlerini belirtmek için kullanılıyorsa bu eksene kutup ekseni adı verilir (Koz, 1968).

TANIM 1.22. (Geodezik-B_I):

B_{II} - hareketinin bir- parametreli B_I- hareketlerine, bu hareketlerin pol eğrileri tekabül eden kutup eksenlerine dik olursa geodezik adı verilir (Müller, 1963),

TANIM 1.23. (Oskülatör-B_I) :

Pol yörüngelerinin her defa kutup eksenine değen B_I-hareketlerine oskülatör-B_I hareketi denir (Müller, 1963).

TANIM 1.24. (Yay Elementi) :

s-yay parametresi ile verilmiş bir eğri için s nin ds diferensiyeline yay elementi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.25. (Destek Fonksiyonu) :

E^3 de yönlü bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı Z olmak üzere

$$h : M \longrightarrow IR \ , \quad h(P) = \langle P, Z(P) \rangle$$

fonksiyonuna M yüzeyinin destek fonksiyonu denir. h (P) sayısı $T_p(M)$ düzleminin başlangıç noktasına uzaklığıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

TANIM 1.26. (Kontengenz Açısı) :

(P) pol eğrisinin komşu iki teğetinin açısı τ, (P') pol eğrisinin komşu iki teğetinin açısı τ' olarak alınırsa bu τ ve τ' açılarına kontengenz açısı adı verilir (Müller,1963).

2. DİFERENSİYEL FORMLAR

Çok -parametreli hareketlerde n-değişkenli iki Pfaff formu,

$$W = \sum_{j=1}^{n} a_j du_j \quad , \; a_j = a_j(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{2.1}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} b_j du_j \quad , \; b_j = b_j(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{2.2}$$

olsun. Bunlar için iki metod tarif edelim:

1. W ve φ 'nin dış çarpımları,

$$W \wedge \varphi = - \varphi \wedge W = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \; du_i \wedge du_j$$

$$= \sum_{i<j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i) \, (du_i \wedge du_j) \tag{2.3}$$

ile gösterilir.

2. Bir W Pfaff-formunun dış türevi

$$dW = \sum_{j=1}^{n} da_j \wedge du_j = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial a_j / \partial u_i) \, du_i \wedge du_j \tag{2.4}$$

ile tanımlanır.

O halde sıra gözönünde tutularak dış çarpımı terim terim çarpma suretiyle buluruz. Burada (i≠j için)

$$du_i \wedge du_i = 0 \quad , \quad du_i \wedge du_j = -du_j \wedge du_i \tag{2.5}$$

dir.

Özel olarak,

$$W = a_1(u_1,u_2)du_1 + a_2(u_1,u_2)du_2$$

$$\varphi = b_1(u_1,u_2)du_1 + b_2(u_1,u_2)du_2$$

alalım. Bunların dış çarpımları

$$\begin{aligned} W \wedge \varphi &= a_1\, b_1 (du_1 \wedge du_1) + a_2\, b_2 (du_2 \wedge du_2) + a_1\, b_2 (du_1 \wedge du_2) + a_2\, b_1 (du_2 \wedge du_1) \\ &= a_1\, b_2 (du_1 \wedge du_2) + a_2\, b_1 (du_2 \wedge du_1) \\ &= a_1\, b_2 (du_1 \wedge du_2) - a_2\, b_1 (du_1 \wedge du_2) \\ &= (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, du_1 \wedge du_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (2.5) 'i gözönüne alarak

$$dW = \sum_{i,j=1}^{2} (\partial a_j/\partial u_i)\, du_i \wedge du_j = \sum_{j=1}^{2} (\partial a_j/\partial u_1)\, du_1 \wedge du_j + \sum_{j=1}^{2} (\partial a_j/\partial u_2) du_2 \wedge du_j$$

$$\begin{aligned} &= (\partial a_1/\partial u_1)\, du_1 \wedge du_1 + (\partial a_1/\partial u_2)\, du_2 \wedge du_1 \\ &+ (\partial a_2/\partial u_1)\, du_1 \wedge du_2 + (\partial a_2/\partial u_2)\, du_2 \wedge du_2 \\ &= (\partial a_2/\partial u_1)\, du_1 \wedge du_2 - (\partial a_1/\partial u_2)\, du_1 \wedge du_2 \\ &= (\partial a_2/\partial u_1 - \partial a_1/\partial u_2)\, du_1 \wedge du_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

dış türevini elde ederiz. Burada diferensiyeller sabit olarak alınmıştır. Dolayısıyla

$$d(du_i) = 0 \tag{2.8}$$

dır. Çok değişkenli Pfaff -formlarının dış çarpımlarının teşkil edilmesi ile yüksek mertebeden dış çarpımların diferensiyel formları elde edilebilir. Tamamen genel olarak homogen diferensiyel polinomlar, yani Ω bir p-form ve Φ de bir q-form olmak üzere

$$\Omega = \sum a_{i_1 \ldots i_p}\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p} \tag{2.9}$$

$$\Phi = \sum b_{j_1 \ldots j_q}\, du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q} \tag{2.10}$$

biçiminde alınabilir. Bu formların dış çarpımlarını da

$$\Omega \wedge \Phi = (-1)^{pq} \; \Phi \wedge \Omega$$

$$= \sum a_{i_1 \dots i_p} b_{j_1 \dots j_q} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} \quad (2.11)$$

şeklinde tarif ederiz. Ω 'nın dış türevi

$$d\Omega = \sum da_{i_1 \dots i_p} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

$$= \sum (\partial a_{i_1 \dots i_p} / \partial u_k)\, du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \quad (2.12)$$

olur.

TEOREM 2.1:

W ve φ 'nin dış çarpımlarının dış türevi

$$d(W \wedge \varphi) = dW \wedge \varphi - W \wedge d\varphi$$

şeklinde ifade edilir veya tamamen genel olarak yüksek mertebeden diferensiyel form için

$$d(\Omega \wedge \Phi) = d\Omega \wedge \Phi + (-1)^p \; \Omega \wedge d\Phi \quad (2.13)$$

dir.

İSPAT : Ω bir p-form ve Φ de bir q form olsun. Eğer Ω daki du_i 'lerle Φ deki du_j 'ler birbirinden farklı değillerse $\Omega \wedge \Phi = 0$ olur. Bu nedenle Ω ve Φ 'yi birer terimden farklı du_i 'lerden oluşmuş alalım.

$$\Omega = a\, du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \quad \text{ve} \quad \Phi = b du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} \quad ,$$

$$du_{i_l} \neq du_{j_r} \quad , \; 1 \le l \le p \quad \text{ve} \quad 1 \le r \le q$$

olsun. O zaman

$$d(\Omega \wedge \Phi) = \sum_{i=1}^{n} (\partial(ab)/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big((\partial a/\partial u_i) b + a\,(\partial b/\partial u_i)\big)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial a/\partial u_i) b\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a(\partial b/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial a/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p} \wedge (b du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a(\partial b/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial a/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p}\right) \wedge (b du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_q})$$

$$+ a\, du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p}\ (-1)^p \sum_{i=1}^{n} (\partial b/\partial u_i)\, du_i \wedge du_{j_1} \ldots \wedge du_{j_q}$$

$$d(\Omega \wedge \Phi) = d\Omega \wedge \Phi + (-1)^p\, \Omega \wedge d\Phi$$

bulunur.

TEOREM 2.2:

$W_1, W_2, \ldots, W_k$ gibi k tane Pfaff - formları ancak ve ancak

$$W_1 \wedge W_2 \wedge \ \ldots \wedge W_k = 0$$

ise lineer bağımlıdır.

İSPAT: Bunu özel olarak k = 2 için, iki W ve φ formlarının lineer bağımlılığında (2.3) formülüne ve katsayıların orantılı, yani

$$a_i : b_i = a_j : b_j \tag{2.14}$$

olması nedeniyle daha kolay görmek mümkündür.

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, du_j \qquad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.15}$$

olmak üzere k tane çizgisel diferensiyel formun çarpımının genel halinde, çarpımın katsayılarını determinant olarak yazabiliriz, yani

$$W_1 = \sum_{j_1} a_1 j_1 , a_1 j_2 , \ldots , a_1 j_k \; du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

$$W_2 = \sum_{j_2} a_2 j_1 , a_2 j_2 , \ldots , a_2 j_k \; du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W_k = \sum_{j_k} a_k j_1 , a_k j_2 , \ldots , a_k j_k \; du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

olmak üzere

$$W_1 \wedge W_2 \wedge \ \ldots \wedge W_k = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_k} \begin{vmatrix} a_1 j_1 , a_1 j_2 , \ldots , a_1 j_k \\ a_2 j_1 , a_2 j_2 , \ldots , a_2 j_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k j_1 , a_k j_2 , \ldots , a_k j_k \end{vmatrix} du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

bulunur.

Yukarıdaki k tane diferensiyel formlarının $[a_{ij}]$ katsayı matrisinin bu k sıralı alt determinantları katsayılar olarak ortaya çıkarlar. Bu matrisin rank'ı k ise, lineer diferensiyel formlar lineer bağımsızdır ve k -sıralı alt determinantların hepsi sıfır değildir. k tane Pfaff -formlarının dış çarpımı sıfır değildir. Tersine olarak bu çarpımın sıfır olmasından k'dan daha küçük bir rank'a hükmedilir. Dolayısıyla diferensiyel formlar lineer bağımlıdır.

TEOREM 2.3:

P>0 mertebeli bir diferensiyel form için

$$d(d\Omega) = 0$$

dır.

İSPAT: $\Omega = \sum a_{i_1 \ldots i_p} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p}$

ve Ω 'nın dış türevi de

$$d\Omega = \sum (\partial a_{i_1 \ldots i_p} / \partial u_i)\, du_i \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_p}$$

olsun. d operatörü lineer oluğundan bir tek terim için ispatı yapmak yeterlidir. d operatörünün tanımından

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{n} (\partial a/\partial u_i)\, du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

buradan da

$$d(d\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p \Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

elde edilir. Bu son ifadeyi i ve j 'nin durumlarına göre

$$d^2\Omega = \sum_{i<j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

$$+ \sum_{i=j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

$$+ \sum_{i>j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

şeklinde yazmak mümkündür. İkinci terim sıfır olduğundan

$$d^2\Omega = \sum_{i<j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

$$+ \sum_{i>j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i)\, du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

yazılabilir ve ikinci terimde i ve j 'nin yerleri değiştirilirse

$$d^2\Omega = \sum_{j<j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i) du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

$$+ \sum_{j<j} (\partial^2 a/\partial u_i \partial u_j) du_i \wedge du_j \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

elde edilir. Gene du_i ile du_j 'lerin yerlerini değiştirirsek,

$$\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i = \partial^2 a/\partial u_i \partial u_j$$

olduğundan,

$$d^2\Omega = \sum_{j<j} (\partial^2 a/\partial u_j \partial u_i - \partial^2 a/\partial u_j \partial u_i) du_j \wedge du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_p$$

veya katsayılar sıfır olduğundan

$$d(d\Omega) = 0$$

bulunur.

Tersine olarak bir W Pfaff-formu için dW=0 sağlamıyorsa bir f fonksiyonunun W=df tam diferensiyeldir. İki değişken halinde

$$W = (\partial f/\partial u_1) du_1 + (\partial f/\partial u_2) du_2 \tag{2.16}$$

şeklindedir.

Genel olarak uygun (bir hiperküre cinsinden) bir bölgede tarif edilen p mertebeli $d\Omega = 0$ olan bir Ω diferensiyel formunda $d\Phi = \Omega$ olan (p-1)-mertebeli bir Φ diferensiyel formu vardır.

Çevre integrali olarak bir bölge integralinin tarifi

$$\int_G d\Omega = \int_{R(G)} \Omega \tag{2.17}$$

Stokes-formülüyle verilir. Burada G bir hiperküreye ait (p+1)-boyutlu bölge ve R(G) onun p-boyutlu çevresi, yani (p+1)-boyutlu uzayda yönlendirilmiş ve kapalı bir hiper yüzey demektir.

Özel olarak G, u_1, u_2 -düzleminde bir yüzey parçası ve R(G) ona uygun yönde dolaşılan çevre eğrisi demektir. O takdirde integral formülü p=1 için elemanter diferensiyel-integral hesabın Gauss ve Green formüllerini ihtiva eder, yani

$$\int_G dW = \int_G (\partial a_2/\partial u_1 - \partial a_1/\partial u_2)\, du_1 \wedge du_2 = \int_{R(G)} (a_1 du_1 + a_2 du_2)$$

$$= \int_{R(G)} W \qquad (2.18)$$

olur.

Dış çarpım ve dış türevler, yeni değişken ithali ile değişebilirler, yani

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_n)} \neq 0 \qquad (2.19)$$

gibi sıfırdan farklı fonksiyonel determinantlı

$$u_j = u_j(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

bağıntısı ile yeni değişkene geçişte diferensiyel formlar yine aynı mertebeli bu şekilde diferensiyel formlara dönüşürler. Buna göre iki veya daha çok formun dış çarpımı buna karşılık gelen formların çarpımına ve diferensiyel formun dış türevi mütekabil formun dış türevine dönüşür.

3. İKİ-PARAMETRELİ HAREKETLER

Önce bir-parametreli bir B_1-hareketinin izahı ile işe başlayalım. (Şekil - 1) 'e göre hareketli E-düzlemini $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eksen sistemi ve E' -sabit düzlemini de $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ eksen sistemi ile ifade edelim. Hareketli eksen sisteminin başlangıç noktasından sabit eksen sisteminin başlangıç noktasına giden $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ vektörü ve $\vec{e'}_1$, $\vec{e}_1$ vektörleri arasındaki dönme açısı φ ile tarif edilsin. Burada

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \tag{3.1}$$

ve O ile O' noktaları çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünürsek,

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos\varphi\, \vec{e'}_1 + \sin\varphi\, \vec{e'}_2 \\ \vec{e}_2 &= -\sin\varphi\, \vec{e'}_1 + \cos\varphi\, \vec{e'}_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

bağıntıları vardır. Bir X noktası bir defa E - nin sonra E' -nün noktası olarak düşünülebilir. Bu takdirde

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

ve

$$\overrightarrow{O'X} = \vec{x'} = x'_1 \vec{e'}_1 + x'_2 \vec{e'}_2 \tag{3.3}$$

dır. X noktasının her iki sistemdeki koordinatlarını sırasıyla,

$$x = x_1 + ix_2 \quad , \quad x' = x'_1 + ix'_2 \tag{3.4}$$

ifadeleri ve $\overrightarrow{OO'}$ vektörünü de hareketli eksen sisteminde

$$u = u_1 + iu_2 \tag{3.5}$$

kompleks sayısı ile gösterelim. Bunlar arasında

$$x' = (x-u)e^{i\varphi} \tag{3.6}$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$u' = -u\,e^{i\varphi} \tag{3.7}$$

büyüklüğünü dahil edelim. Bu takdirde çözüm yoluyla

$$x' = xe^{i\varphi} - u\,e^{i\varphi}$$

yazılarak, yine her X noktası için

$$x' = u' + xe^{i\varphi} \tag{3.8}$$

elde ederiz.

Bir parametreli bir B_l-hareketinde φ ve u 'yu dolayısıyla da u'-yü bir reel t parametresine bağlı düşünelim. X noktası E- düzleminde bulunuyorsa, yani X E- de sabit ise, x sabittir. (3.6) ve (3.8) bağıntılarının her iki tarafının diferensiyeli alınırsa,

$$dx' = -due^{i\varphi} + i\,(x-u)e^{i\varphi}\,d\varphi = du' + ixe^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$dx' = \{-du + i\,(x-u)\,d\varphi\}\,e^{i\varphi} = du' + ixe^{i\varphi}\,d\varphi \tag{3.9}$$

elde edilir. P dönme polü $dx' = 0$ ve $dx = 0$ ile karakterize edildiğinden

$$-du + i\,(x-u)\,d\varphi = 0$$

dır. Buradan

$$x = u - i\,du/d\varphi$$

olur. $dx' = 0$ için X=P olduğundan

$$p = x = u - i\,du/d\varphi \tag{3.10}$$

bulunur.

Tekrar (3.6) bağıntısı kullanılarak

$$x' = (x-u)e^{i\varphi} \Rightarrow x-u = x'e^{-i\varphi}$$
$$\Rightarrow x = u + x'e^{-i\varphi}$$

olur. Diferensiyeli alınırsa

$$dx = du - ix'e^{-i\varphi}d\varphi \tag{3.11}$$

elde edilir. P dönme polü dx = 0 olarak karakterize edildiğinden

$$du - ix'e^{-i\varphi}d\varphi = 0 \Rightarrow ix'e^{-i\varphi}d\varphi = du$$
$$\Rightarrow x' = e^{i\varphi}du/id\varphi$$

dir. dx = 0 için X' noktaları P' pol noktasına eşit olacağından

$$p' = x' = -i\,e^{i\varphi}du/d\varphi \tag{3.12}$$

bulunur. Böylece P dönme polünü veren kompleks sayılarımı bulmuş oluruz.

Şimdi u_1, u_2, φ ve dolayısıyla da u, u' kompleks büyüklüklerinin iki reel parametreye bağlı olduğunu kabul edelim. Şayet $du / d\varphi \neq 0$ ise, yani u gerçekten φ 'ye bağlı ise, bu parametrelerden birini φ dönme açısı olarak seçebiliriz.

$$u = u_1 + iu_2 = u(\varphi, \lambda) \tag{3.13}$$

ile uygun diferensiyellenebilme varsayımı altında iki-parametreli veya yüzey çizen B_{II}-hareketi tarif edilir.

Yukarıdaki (3.13) ifadesinde keyfi λ parametresi yerine $\lambda = \lambda(\varphi)$ fonksiyonu seçilirse, B_{II}- hareketinden bir -parametreli bir B_I- hareketi elde edilir. Buna karşılık gelen P dönme polü için (3.10) ve (3.12) ifadelerinde

$$du/d\varphi = \partial u/\partial\varphi + (\partial u/\partial\lambda)\, d\lambda/d\varphi = u_\varphi + u_\lambda\, d\lambda/d\varphi \qquad (3.14)$$

ifadesinin değeri yerine yazılırsa

$$p = u - i(u_\varphi + u_\lambda\, d\lambda/d\varphi) \quad , \quad p' = -i\, e^{i\varphi}(u_\varphi + u_\lambda\, d\lambda/d\varphi) \qquad (3.15)$$

bulunur.

Şimdi bir an için φ ve λ 'nın tespit edildiğini ve yalnız $d\lambda/d\varphi = \mu$ yürüyüş istikametinin değiştiğini düşünelim, yani B_I- hareketlerini, B_{II}- hareketinden çıkarılan (φ, λ) konumu vasıtasıyla inceleyelim.

Kompleks sayı düzleminde

$$x = a + b\mu$$

parametrik bir doğruyu temsil etsin. O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 3.1:

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinin bir (φ, λ) konumunda bu hareketten çekip çıkarılabilen bütün bir parametreli B_I-hareketlerinin P dönme polleri, E-hareketli düzleminde bir g doğrusu ve E'-sabit düzleminde bir g' doğrusu meydana getirirler.

(3.15) 'den şunu anlıyoruz. E- düzleminde g kutup ekseni

$$p_0 = u - iu_\varphi \qquad (3.16)$$

olan noktasından geçer ve

$$v = -iu_\lambda \qquad (3.17)$$

kompleks sayısı ile verilen doğrultudadır. E'-düzlemindeki g' kutup ekseni

$$p'_0 = -iu_\varphi e^{i\varphi} \tag{3.18}$$

p_0 noktasından geçer ve doğrultusu

$$v' = -iu_\lambda e^{i\varphi} = v e^{i\varphi} \tag{3.19}$$

ile verilir.

$B_{||}$- hareketinin her (φ, λ) konumuna tekabül eden bu her iki g, g' kutup eksenleri $d\lambda / d\varphi = \mu$ 'nün değişimi ile, yani μ 'nün aynı değerleri ile birbirine tekabül ederler. Bu tekabül (3.19) ifadesinin mutlak değerinin alınmasıyla

$$|v'| = |-iu_\lambda e^{i\varphi}| = |-i|\,|u_\lambda|\,|e^{i\varphi}| = |u_\lambda|$$

veya

$$|v'| = |u_\lambda| = |v| \tag{3.20}$$

den dolayı izometriktir veya uzunlukları sabit bırakır.

4. İKİ-PARAMETRELİ HAREKETLERİN KUTUP EKSENLERİ

4.1. Kutup Eksenleri

TEOREM 4.1.1:

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinin bir (φ, λ) konumuna tekabül eden g, g' kutup eksenleri, nokta nokta izometrik veya uzunlukları değişmeyecek şekilde birbirlerine tekabül ederler.

Teorem (3.1)'in sonucunu aşağıdaki teoremle de ifade edebiliriz.

TEOREM 4.1.2:

B_{II}-hareketinin $(\varphi, \lambda) \longrightarrow (\varphi + d\varphi\ ,\ \lambda + d\lambda)$ gibi sonsuz küçük dönmelerine ait dönme pollerinin geometrik yeri φ ve λ sabit değerleri ile değişen $d\lambda / d\varphi$ oranına ait E ve E' düzlemlerinde birer g ve g' doğrularıdır.

Bundan böyle g, g' kutup eksenleri yanlız (φ, λ) konumuna bağlıdır. Böylece bir B_{II}- iki parametreli hareketiyle kutup eksenlerinin bir $g(\varphi, \lambda) \longleftrightarrow g'(\varphi, \lambda)$, yani E-nin doğrularının E'-nün doğrularına bir doğru dönüşümü ile bağlanabilir. Bu dönüşümün özelliklerini aşağıdaki kısımda açıklayalım.

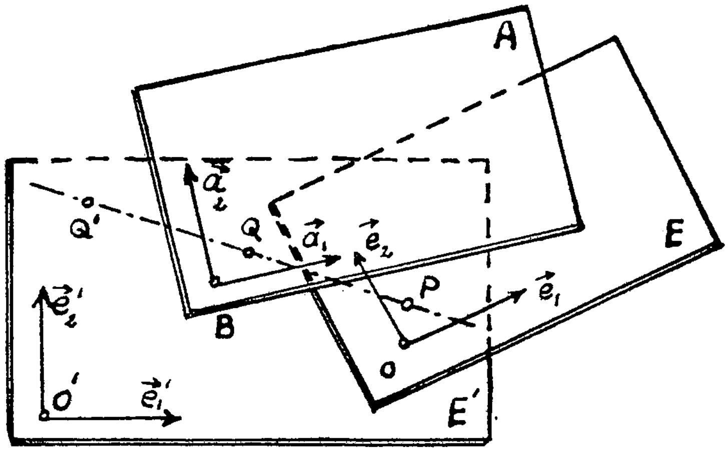
4.2. Kutup Eksenleri Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

TEOREM 4.2.1:

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinde E-düzlemindeki g kutup ekseninin yoğunluğu, E'-düzlemindeki g' pol ekseninin yoğunluğuna eşittir.

İSPAT: Hareketli koordinat sistemi ve kanonik izafi sisteminde yapılan hesaplamalara benzer şekilde, uygun bir izafi sistem yardımıyla B_{II}-hareketinin tarifini kullanacağız.

O halde E ve E'-düzlemlerini temsil eden $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ eksen sistemleri yanında tekrar hareketli bir $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ eksen sistemini ilave edelim. B_{II}-hareketini bu izafi sistemle görmek istiyoruz.

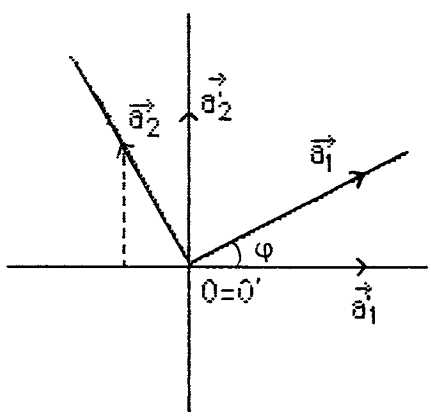


Şekil-2

Bir noktanın E-düzlemine göre değişimini << d ··· >> ile E'-düzlemine göre değişimini de << d' ··· >> ile göstererek bu iki değişimi birbirinden ayırt edelim. $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ sistemine öyle bir A düzlemi bağlayalım ki, bu yeni izafe sistemi A 'nın temsilcisi olarak hareket etsin. Böylece A 'nın E-düzlemine göre hareketi, E- düzleminin E'-düzlemine göre hareketi gibi gösterilebilir. Ayrıca $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektörlerinin ve aynı zamanda

$$\vec{OB} = \vec{b} = b_1 \vec{a}_1 + b_2 \vec{a}_2 \qquad (4.2.1)$$

vektörünün değişimini $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ sistemi vasıtasıyla gösterebiliiriz. Burada O noktası E üzerinde tesbit edilmiş bir noktadır, yani hareketli düzlemin başlangıç noktasıdır.



Şekil -3

(Şekil -3)'de O ve O' noktalarını çakışmış olarak düşünürsek, $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ vektörleri $\vec{a}'_1$ ve $\vec{a}'_2$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve

$$\vec{a}_1 = \cos\varphi \; \vec{a}'_1 + \sin\varphi \; \vec{a}'_2 \tag{4.2.2}$$

$$\vec{a}_2 = -\sin\varphi \; \vec{a}'_1 + \cos\varphi \; \vec{a}'_2 \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerde $\vec{a}'_1$, $\vec{a}'_2$ vektörlerini sabit tutarak her iki tarafın diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} d\vec{a}_1 &= -\sin\varphi \, d\varphi \, \vec{a}'_1 + \cos\varphi \, d\varphi \, \vec{a}'_2 \\ &= (-\sin\varphi \; \vec{a}'_1 + \cos\varphi \; \vec{a}'_2) \, d\varphi \; , \\ d\vec{a}_2 &= -\cos\varphi \, d\varphi \, \vec{a}'_1 - \sin\varphi \, d\varphi \, \vec{a}'_2 \\ &= -(\cos\varphi \, \vec{a}'_1 + \sin\varphi \; \vec{a}'_2) \, d\varphi \end{aligned}$$

bulunur. Parantez içindeki ifadeleri (4.2.2) ve (4.2.3) bağıntıları ile karşılaştırırsak,

$$d\vec{a}_1 = d\varphi \, \vec{a}_2 \quad , \quad d\vec{a}_2 = -\, d\varphi \, \vec{a}_1 \tag{4.2.4}$$

elde ederiz. (4.2.1) ifadesinin de diferensiyeli alınırsa

$$d\vec{b} = db_1 \, \vec{a}_1 + b_1 \, d\vec{a}_1 + db_2 \, \vec{a}_2 + b_2 \, d\vec{a}_2$$

bulunur. Burada (4.2.4) ifadesinin değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d\vec{b} &= db_1 \, \vec{a}_1 + b_1 \, d\varphi \, \vec{a}_2 + db_2 \, \vec{a}_2 - b_2 \, d\varphi \, \vec{a}_1 \\ &= (db_1 - b_2 \, d\varphi) \vec{a}_1 + (db_2 + b_1 \, d\varphi) \vec{a}_2 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

şeklinde elde ederiz.

Tamamen benzer şekilde A 'nın E'-düzlemine göre hareketinde

$$d'\vec{a}_1 = d\varphi'\,\vec{a}_2 \quad , \quad d'\vec{a}_2 = -\,d\varphi'\,\vec{a}_1 \tag{4.2.6}$$

ve $\vec{b'}$ vektörünü de

$$\vec{O'B} = \vec{b'} = b'_1\,\vec{a}_1 + b'_2\,\vec{a}_2 \tag{4.2.7}$$

şeklinde yazarız. (4.2.7) ifadesinin diferensiyeli alınırsa

$$\vec{d'b'} = db'_1\,\vec{a}_1 + b'_1\,d'\vec{a}_1 + db'_2\,\vec{a}_2 + b'_2\,d'\vec{a}_2$$

bulunur. (4.2.6) ifadesinin değerleri yazılarak

$$\begin{aligned} \vec{d'b'} &= db'_1\,\vec{a}_1 + b'_1\,d\varphi'\,\vec{a}_2 + db'_2\,\vec{a}_2 - b'_2\,d\varphi'\,\vec{a}_1 \\ &= (db'_1 - b'_2\,d\varphi')\,\vec{a}_1 + (db'_2 + b'_1\,d\varphi')\,\vec{a}_2 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

sistemini elde edebiliriz. Daha kısa olması bakımından

$$d\varphi = \tau \quad , \quad d\varphi' = \tau' \tag{4.2.9}$$

ve

$$db_1 - b_2\,d\varphi = \sigma_1 \quad , \quad db_2 + b_1\,d\varphi = \sigma_2 \tag{4.2.10}$$

$$db'_1 - b'_2\,d\varphi' = \sigma'_1 \quad , \quad db'_2 + b'_1\,d\varphi' = \sigma'_2 \tag{4.2.11}$$

işaretlerini hesaplarımıza dahil edecek ve B noktasının E' -düzlemine göre değişimini de

$$\vec{d'b} = \vec{d'b'} \tag{4.2.12}$$

şeklinde göstereceğiz.

Böylece A 'nın E- düzlemine göre hareketi

$$d\vec{a}_1 = \tau\,\vec{a}_2 \quad , \quad d\vec{a}_2 = -\,\tau\,\vec{a}_1 \quad ; \tag{4.2.13}$$

$$\vec{db} = \sigma_1\vec{a}_1 + \sigma_2\vec{a}_2 \tag{4.2.14}$$

ve A 'nın E'-düzlemine göre hareketi

$$d'\vec{a_1} = \tau' \vec{a_2} \quad , \quad d'\vec{a_2} = -\tau' \vec{a_1} \quad ; \tag{4.2.15}$$

$$d'\vec{b} = \sigma'_1 \vec{a_1} + \sigma'_2 \vec{a_2} \tag{4.2.16}$$

türev denklemleri ile verilmiş olur.

Halbuki iki-parametreli $B_{||}$-hareketi halinde σ_i, σ'_i, τ, τ' ifadeleri φ ve λ veya daha genel olarak u ve v gibi bağımsız iki değişkene göre Pfaff-formlarıdırlar. Bu formlar bununla birlikte bir $B_{||}$-hareketinin tesbitinde tamamen keyfi kabul edilmezler. Çoğu kez integrellenebilme şartlarını sağlamak zorundadırlar.

Bir tam diferensiyelin dış türevi sıfır olduğundan,

$$d(d\vec{a_1}) = 0 \tag{4.2.17}$$

dır. (4.2.13) ile (1.1) çarpım kaidesinden dolayı

$$d(d\vec{a_1}) = d(\tau \vec{a_2}) = d\vec{a_2} \wedge \tau + d\tau \vec{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow -\tau \vec{a_1} \wedge \tau + d\tau \vec{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow -(\tau \wedge \tau)\vec{a_1} + d\tau \vec{a_2} = 0$$

elde edilir ve $\tau \wedge \tau = 0$ olduğu için,

$$d\tau = 0 \tag{4.2.18}$$

bulunur. τ bir açının değişimi olduğundan τ doğrudan doğruya geometrik olarak açıklanan bir tam diferensiyeldir.

$$d(d\vec{a_2}) = 0 \tag{4.2.19}$$

ifadesinin teşkil edilmesi ile çarpım kaidesi uygulanarak

$$d(d\vec{a}_2) = d(-\tau\vec{a}_1) = -d\vec{a}_1 \wedge \tau - d\tau\vec{a}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -\tau\vec{a}_2 \wedge \tau - d\tau\vec{a}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -(\tau\wedge\tau)\vec{a}_2 - d\tau\vec{a}_1 = 0$$

elde edilir. Yine $\tau\wedge\tau = 0$ olduğu için,

$$d\tau = 0$$

bulunarak aynı sonucu elde ederiz.

$$d'(d'\vec{a}_1) = 0 \quad , \quad d'(d'\vec{a}_2) = 0 \tag{4.2.20}$$

ifadelerine (4.2.15) ile (1.1) çarpım kaidesi uygulanarak

$$d'(d'\vec{a}_1) = d'(\tau'\vec{a}_2) = d'\vec{a}_2 \wedge \tau' + d\tau'\vec{a}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\tau'\vec{a}_1 \wedge \tau' + d\tau'\vec{a}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -(\tau'\wedge\tau')\vec{a}_1 + d\tau'\vec{a}_2 = 0$$

elde edilir. $\tau'\wedge\tau' = 0$ olduğundan

$$d\tau' = 0 \tag{4.2.21}$$

bulunur. Tamamen benzer şekilde

$$d'(d'\vec{a}_2) = d'(-\tau'\vec{a}_1) = -d'\vec{a}_1 \wedge \tau' - d\tau'\vec{a}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -\tau'\vec{a}_2 \wedge \tau' - d\tau'\vec{a}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -(\tau'\wedge\tau')\vec{a}_2 - d\tau'\vec{a}_1 = 0$$

elde edilerek $\tau'\wedge\tau' = 0$ olmasından dolayı

$$d\tau' = 0$$

şartı bulunur. Bu da bir dönme açısının değişimi olan τ' ifadesinin bir tam diferensiyel olduğunu ifade eder. (4.2.14) ifadesinin dış türevi alınırsa

$$d(d\vec{b}) = d(\sigma_1\vec{a}_1) + d(\sigma_2\vec{a}_2) = 0$$

olur. (4.2.13) ile (1.1) 'den dolayı

$$d\vec{a}_1 \wedge \sigma_1 + d\sigma_1\vec{a}_1 + d\vec{a}_2 \wedge \sigma_2 + d\sigma_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\tau\vec{a}_2 \wedge \sigma_1 + d\sigma_1\vec{a}_1 - \tau\vec{a}_1 \wedge \sigma_2 + d\sigma_2\vec{a}_2 = 0$$

olur. Buradan

$$(\tau \wedge \sigma_1)\vec{a}_2 + d\sigma_1\vec{a}_1 - (\tau \wedge \sigma_2)\vec{a}_1 + d\sigma_2\vec{a}_2 = 0$$

$$d\sigma_1\vec{a}_1 + d\sigma_2\vec{a}_2 = (\tau \wedge \sigma_2)\vec{a}_1 - (\tau \wedge \sigma_1)\vec{a}_2$$

bulunur. Aynı vektörlerin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$d\sigma_1 = -\sigma_2 \wedge \tau$$

$$d\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \tau \qquad (4.2.22)$$

şartları bulunur.

Benzer şekilde (4.2.16) ifadesinin dış türevi alınırsa

$$d'(d'\vec{b}) = d'(\sigma'_1\vec{a}_1) + d'(\sigma'_2\vec{a}_2) = 0$$

olur. (4.2.15) değerleri ve (1.1)'deki çarpım kaidesi uygulanarak

$$d'\vec{a}_1 \wedge \sigma'_1 + d\sigma'_1\vec{a}_1 + d'\vec{a}_2 \wedge \sigma'_2 + d\sigma'_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\tau'\vec{a}_2 \wedge \sigma'_1 + d\sigma'_1\vec{a}_1 - \tau'\vec{a}_1 \wedge \sigma'_2 + d\sigma'_2\vec{a}_2 = 0$$

ve buradan da

$$(\tau' \wedge \sigma'_1)\vec{a}_2 + d\sigma'_1\vec{a}_1 - (\tau' \wedge \sigma'_2)\vec{a}_1 + d\sigma'_2\vec{a}_2 = 0$$

$$d\sigma'_1\vec{a}_1 + d\sigma'_2\vec{a}_2 = (\tau' \wedge \sigma'_2)\vec{a}_1 - (\tau' \wedge \sigma'_1)\vec{a}_2$$

bulunur.

Aynı şekilde

$$d\sigma'_1 = -\sigma'_2 \Delta\tau'$$

$$d\sigma'_2 = \sigma'_1 \Delta\tau' \qquad (4.2.23)$$

şartları çıkar .

İki-parametreli B_{II}-hareketine ait Pfaff-formları bu (4.2.22) ve (4.2.23) integrellenebilme şartlarını sağlamak zorundadırlar. Burada τ, τ' tam diferensiyeldir.

Şimdi (Şekil -2)'nin izafe sistemindeki koordinatları x_1, x_2 olan bir X noktasını gözönüne alalım ve

$$\vec{BX} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \qquad (4.2.24)$$

$$\vec{x} = \vec{OX} = \vec{OB} + \vec{BX} = \vec{b} + x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \qquad (4.2.25)$$

$$\vec{x}' = \vec{O'X} = \vec{O'B} + \vec{BX} = \vec{b}' + x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \qquad (4.2.26)$$

vektörlerini oluşturalım. (4.2.13) ve (4.2.14) 'nin türev denklemleri yardımıyla X 'in E-düzlemine göre değişimi için

$$d\vec{x} = d\vec{b} + dx_1\vec{a}_1 + x_1 d\vec{a}_1 + dx_2\vec{a}_2 + x_2 d\vec{a}_2$$

dır. (4.2.13) ve (4.2.14) kullanılırsa

$$d\vec{x} = \sigma_1\vec{a}_1 + \sigma_2\vec{a}_2 + dx_1\vec{a}_1 + x_1\tau\vec{a}_2 + dx_2\vec{a}_2 - x_2\tau\vec{a}_1$$

$$= (dx_1 + \sigma_1 - x_2\tau)\vec{a}_1 + (dx_2 + \sigma_2 + x_1\tau)\vec{a}_2 \qquad (4.2.27)$$

sonucunu buluruz. Buradan da X noktasının

$$\vec{V}_r = d\vec{x} / dt \qquad (4.2.28)$$

relatif hız vektörü elde edilmiş olur.

X noktası E-düzleminde sabit kabul edilirse $\vec{V}_r = 0$ veya $d\vec{x} = 0$ olur. O halde X 'in E-düzleminde sabit olma şartları

$$dx_1 = -\sigma_1 + x_2\tau \quad , \quad dx_2 = -\sigma_2 - x_1\tau \tag{4.2.29}$$

denklemleri ile verilir.

Tamamen benzer şekilde X 'in E'-düzlemine göre değişimi için

$$d'\vec{x} = d'\vec{b}' + dx_1\vec{a}_1 + x_1 d'\vec{a}_1 + dx_2\vec{a}_2 + x_2 d'\vec{a}_2$$

dır. (4.2.15) ve (4.2.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned} d'\vec{x} &= \sigma'_1\vec{a}_1 + \sigma'_2\vec{a}_2 + dx_1\vec{a}_1 + x_1\tau'\vec{a}_2 + dx_2\vec{a}_2 - x_2\tau'\vec{a}_1 \\ &= (dx_1 + \sigma'_1 - x_2\tau')\vec{a}_1 + (dx_2 + \sigma'_2 + x_1\tau')\vec{a}_2 \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

elde edilir. Bu takdirde mutlak hız vektörü

$$\vec{V}_a = d'\vec{x} / dt \tag{4.2.31}$$

ile verilmiş olur.

Eğer $\vec{V}_a = 0$ veya $d'\vec{x} = 0$ ise X noktası E'-düzleminde sabittir. Bu da bizi X 'in E'-düzleminde sabit olma şartları olan

$$dx_1 = -\sigma'_1 + x_2\tau' \quad , \quad dx_2 = -\sigma'_2 - x_1\tau' \tag{4.2.32}$$

denklemlerine götürecektir. X noktası E-düzleminde sabit tutularsa

$$\vec{V}_f = d_f\vec{x} / dt \tag{4.2.33}$$

sürüklenme hızı X 'in E' -düzlemine göre $d_f\vec{x}$ değişimine karşılık gelir. O halde (4.2.29) daki sabit olma şartları (4.2.30) 'da yerlerine konulursa

$$d_f\vec{x} = \{(\sigma'_1 - \sigma_1) - x_2(\tau' - \tau)\}\vec{a}_1 + \{(\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau' - \tau)\}\vec{a}_2 \tag{4.2.34}$$

ilişkisi elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki formüllerden doğrudan doğruya

$$d'\vec{x} = d_f\vec{x} + d\vec{x} \qquad (4.2.35)$$

sonucu elde edilir.

P dönme polü,

$$\vec{BP} = p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 \qquad (4.2.36)$$

olmak üzere, sürüklenme hızının sıfır, yani mutlak ve relatif hızların eşit olması ile karakterize edildiğinden

$$d_f\vec{x} = 0 \qquad (4.2.37)$$

dan

$$(\sigma'_1 - \sigma_1) - x_2(\tau' - \tau) = 0$$

$$(\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau' - \tau) = 0 \qquad (4.2.38)$$

olur.

(4.2.38) denklem sistemini çözersek

$$(\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau' - \tau) = 0 \Rightarrow x_1(\tau' - \tau) = -(\sigma'_2 - \sigma_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = -(\sigma'_2 - \sigma_2) / \tau' - \tau$$

$d_f\vec{x} = 0$ için X noktaları $P(p_1, p_2)$ pol noktalarına eşit olduğundan

$$p_1 = x_1 = -(\sigma'_2 - \sigma_2) / \tau' - \tau \qquad (4.2.39)$$

ve

$$(\sigma'_1 - \sigma_1) - x_2(\tau' - \tau) = 0 \Rightarrow -x_2(\tau' - \tau) = -(\sigma'_1 - \sigma_1)$$

$$\Rightarrow x_2 = \sigma'_1 - \sigma_1 / \tau' - \tau$$

yine aynı şekilde $d_f\vec{x} = 0$ için X noktaları $P(p_1, p_2)$ pol noktaları olduğundan

$$p_2 = x_2 = \sigma'_1 - \sigma_1 / \tau' - \tau \qquad (4.2.40)$$

bulunur.

σ_i , σ'_i , τ ve τ' diferensiyel formları, u ve v gibi değişkenlere bağlı olduklarından, P dönme polleri iki Pfaff-formun oranı şeklinde gösterilir. İki değişken için Pfaff-formları

$$W = \sum_{j=1}^{2} a_j du_j = a_1 du_1 + a_2 du_2 \tag{4.2.41}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{2} b_j du_j = b_1 du_1 + b_2 du_2 \tag{4.2.42}$$

şeklindedir. Burada

$$a_1 = A = A(u,v) \quad , \quad a_2 = B = B(u,v) \quad ,$$

$$du_1 = du \quad , \quad du_2 = dv$$

dersek,

$$W = Adu + Bdv \tag{4.2.43}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde

$$b_1 = C = C(u,v) \quad , \quad b_2 = D = D(u,v)$$

yazılarak

$$\varphi = Cdu + Ddv \tag{4.2.44}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mu = dv/du$ dersek,

$$p_1 = \frac{W}{\varphi} = \frac{Adu + Bdv}{Cdu + Ddv} = \frac{A + B\mu}{C + D\mu} \tag{4.2.45}$$

şeklinde olur. p_2 de aynı şekilde bir gösterime sahiptir. Burada P polü g ve g' kutup eksenlerini çizer.

Şimdiye kadar tamamen keyfi alınan $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ izafe sistemini şimdi, $\{B; \vec{a}_1\}$ ekseni daima kutup ekseni üzerinde bulunsun, yani $p_2 = 0$ seçelim. O takdirde (4.2.40) ifadesinden

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \qquad (4.2.46)$$

sonucu çıkar. Bu büyüklükleri σ ile gösterirsek, yani

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma'_1 \qquad (4.2.47)$$

yazılır. O halde, kısaca

$$d\sigma_1 = d\sigma'_1 \qquad (4.2.48)$$

olduğundan

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma'_2 \wedge \tau' \qquad (4.2.49)$$

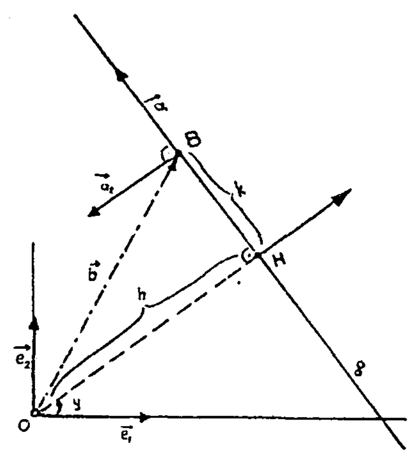
bulunur. g kutup eksenini E-düzleminin doğrusu olarak alalım. $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koordinat sisteminde g 'nin denklemi (Şekil -4) 'e göre ,

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = h \qquad (4.2.50)$$

dır. E-düzlemindeki g doğrusunun doğru yoğunluğunu

$$(g) = dh \wedge d\varphi \qquad (4.2.51)$$

olarak alalım.



Şekil -4

Bir E-düzlemi ve bu düzlem üzerindeki bir noktadan geçen bir g doğrusunu gözönüne alalım. g doğrusu üzerindeki bir B noktasının orjinle birleştiği vektöre $\vec{b}=\vec{OB}$ diyelim. Bu $\vec{b}$ vektörünü belirlemek için B noktasından g 'nin doğrultusunda bir $\vec{a}_1$ vektörünü ve g 'ye dik olan $\vec{a}_2$ vektörünü ele alalım. Şimdi de $\vec{a}_2$ vektörüne paralel, orjinden geçen g kutup eksenini kesen noktaya H diyelim. Bu takdirde vektörlerin toplamından

$$\vec{b} = \vec{OB} = \vec{OH} + \vec{HB} \tag{4.2.52}$$

yazabiliriz. Bununla birlikte $\forall$ k,h $\in$ IR skalerleri ve $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ baz vektörlerine göre

$$\vec{OH} = -h\,\vec{a}_2 \quad , \quad \vec{HB} = k\,\vec{a}_1$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$\vec{b} = \vec{OB} = \vec{OH} + \vec{HB} = k\,\vec{a}_1 - h\,\vec{a}_2 \tag{4.2.53}$$

olur. (4.2.53) 'ün diferensiyeli ile (4.2.14) eşitlenirse

$$d\vec{b} = dk\,\vec{a}_1 - dh\,\vec{a}_2 = \sigma_1\,\vec{a}_1 + \sigma_2\,\vec{a}_2 \tag{4.2.54}$$

ve dolayısıyla

$$dk = \sigma_1 \quad , \quad dh = -\sigma_2 \tag{4.2.55}$$

bulunur. (4.2.9) ifadesinden g kutup ekseninin yoğunluğu (4.2.55) kullanılarak

$$(g) = dh \wedge d\varphi = -\sigma_2 \wedge \tau \tag{4.2.56}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde,

$$\vec{b}' = \vec{O'B} = \vec{O'H'} + \vec{H'B} = k'\,\vec{a}_1 - h'\,\vec{a}_2 \tag{4.2.57}$$

yazılır. (4.2.16) 'ya göre

$$d'\vec{b}' = dk'\vec{a}_1 - dh'\vec{a}_2 = \sigma'_1\vec{a}_1 + \sigma'_2\vec{a}_2 \qquad (4.2.58)$$

ve dolayısıyla

$$dk' = \sigma'_1 \quad , \quad dh' = -\sigma'_2 \qquad (4.2.59)$$

elde edilir. Yine (4.2.9) ifadesi ile birlikte g' kutup ekseni (4.2.59) kullanılarak

$$(g') = dh' \wedge d\varphi' = -\sigma'_2 \wedge \tau' \qquad (4.2.60)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla (4.2.49) ifadesinden doğrudan doğruya doğru yoğunluklarının eşit olduğu çıkar.

4.3. Kutup Eksenleri Dönüşümü

Teorem (4.2.1) 'de bir $B_{||}$-hareketiyle kutup eksenlerinin g <—> g' gibi yoğunlukları değiştirmeyen bir tekabüle bağlı olduğunu gördük. O halde E ve E' düzlemleri bu yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü ile birbirlerine dönüşürler. Şimdi tersine olarak E ve E' -düzlemi arasında böyle yoğunluğu değiştirmeyen doğrular tekabülünü önceden vermek ve bununla nasıl ve ne dereceye kadar iki-parametreli bir $B_{||}$-hareketini tayin etmek istiyoruz.

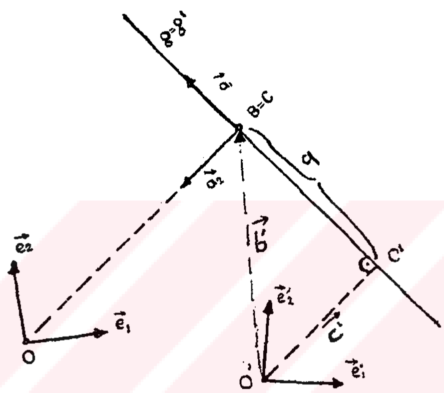
Bunun için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 4.3.1:

İki E ve E'-düzlemlerinin yoğunluğunu değiştirmeyen bir g <—> g' doğru tekabülü vasıtasıyla E-düzleminin E'-düzlemine göre (ve tersi) iki-parametreli hareketlerin bir-parametreli bir ailesi belirtilir.

İSPAT: İki E ve E'-düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen bir doğrular dönüşümü mevcut olsun; yani bir E- hareketli düzleminde g herhangi bir doğru olsun. Buna E'-sabit düzleminde g ⟷ g' tekabülü yoğunluğu değiştirmeyecek şekilde, bir g' doğrusu karşılık gelir. E ve E' düzlemleri birer $\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ ve $\{0';\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}$ eksen sistemleri ihtiva edebilirler. Bu eksen sistemlerinin O ve O' noktalarından sırasıyla g, g' doğrularına birer dikme indirelim. Dikme ayakları da C ve C' olsun. g doğrusu ile g' doğrusunun üst üste geldiğini düşünelim. Bu doğrularda henüz bir ötelenme mümkün olamayacağı için bu hareket tek anlamlı değildir (Şekil -5). $\{B;\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$ izafe sistemini

1. $\{B;\vec{a}_1\}$ ekseni, g = g' doğrusu,



Şekil -5

2. B başlangıç noktasını C dikme ayağı ile üst üste olacak şekilde, yani B=C şeklinde seçelim. C ile C' arasındaki uzaklık q ise şekle göre aşağıdaki vektörleri yazabiliriz.

$$\vec{OB}=\vec{OC}=\vec{b}\ ,\quad \vec{O'B}=\vec{b'}\ ,\quad \vec{O'C'}=\vec{c'}\ ,\quad \vec{C'C}=\vec{C'B}=q\vec{a}_1 \qquad (4.3.1)$$

Dolayısıyla

$$\vec{b'}=\vec{O'B}=\vec{O'C'}+\vec{C'B}=\vec{c'}+q\vec{a}_1 \qquad (4.3.2)$$

bağıntısını oluşturabiliriz.

İzafe sisteminin durum değişimi ve g 'nin E-düzlemine göre değişmi (4.2.13) ve (4.2.14) sistemi ile verildi. Dolayısıyla buradan ortaya çıkan Pfaff -formları (4.2.22) ile (4.2.23) integrellenebilme şartları sağlamak zorundadır.

Yine C' noktasının E'-düzlemine göre değişimi,

$$d\vec{c}=d\vec{b}=\sigma_1\vec{a}_1+\sigma_2\vec{a}_2$$

iken

$$d'\vec{c}' = w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 \tag{4.3.3}$$

ile verilsin. Yukarıdaki bağıntının dış türevi alınırsa (2.8) ifadesi gereğince

$$d'(d'\vec{c}') = d'(w_1\vec{a}_1) + d'(w_2\vec{a}_2) = 0 \tag{4.3.4}$$

olur. (4.2.15) ile (1.1) bağıntısının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} d'(d'\vec{c}') &= d'\vec{a}_1 \wedge w_1 + d\,w_1\vec{a}_1 + d'\vec{a}_2 \wedge w_2 + d\,w_2\vec{a}_2 = 0 \\ &\Rightarrow \tau'\vec{a}_2 \wedge w_1 + d\,w_1\vec{a}_1 - \tau'\vec{a}_1 \wedge w_2 + d\,w_2\vec{a}_2 = 0 \\ &\Rightarrow (\tau' \wedge w_1)\vec{a}_2 + d\,w_1\vec{a}_1 - (\tau' \wedge w_2)\vec{a}_1 + d\,w_2\vec{a}_2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$d\,w_1\vec{a}_1 + d\,w_2\vec{a}_2 = (\tau' \wedge w_2)\vec{a}_1 - (\tau' \wedge w_1)\vec{a}_2$$

ve

$$\begin{aligned} d\,w_1 &= -\,w_2 \wedge \tau' \\ d\,w_2 &= w_1 \wedge \tau' \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

türev denklemleri elde edilir. (4.2.56) ile (4.2.60) formüleri doğru yoğunluklarının nasıl hesap edildiklerini göstermektedir. Dolayısıyla g 'nin E-düzlemindeki doğru yoğunluğu için

$$(g) = -\,\sigma_2 \wedge \tau \tag{4.3.6}$$

ifadesini ve g' 'nün E'- düzlemindeki yoğunluğu için

$$(g') = -\,w_2 \wedge \tau' \tag{4.3.7}$$

ifadesini buluruz.

Kabülümüze göre g $\longleftrightarrow$ g' doğru dönüşümü yoğunluğu değiştirmediğinden

$$\sigma_2 \wedge \tau = w_2 \wedge \tau' \tag{4.3.8}$$

eşitliği sağlanmış olur.

Şimdi (4.3.2) bağıntısından E'-düzlemine göre değişimi, yani

$$d'\vec{b}' = d'\vec{b} = d'\vec{c}' + dq\vec{a}_1 + qd'\vec{a}_1$$

oluşturalım. (4.2.15) ve (4.2.16) ile (4.3.3) 'deki değerleri yerine yazarsak,

$$\sigma'_1\vec{a}_1 + \sigma'_2\vec{a}_2 = w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + q\tau'\vec{a}_2 + dq\vec{a}_1$$

$$= (w_1 + dq)\vec{a}_1 + (w_2 + q\tau')\vec{a}_2 \qquad (4.3.9)$$

ifadesini buluruz. Bu takdirde

$$\sigma'_1 = w_1 + dq \qquad (4.3.10)$$

$$\sigma'_2 = w_2 + q\tau' \qquad (4.3.11)$$

olur. Buradan

$$w_2 = \sigma'_2 - q\tau' \qquad (4.3.12)$$

bulunur. Bu değeri (4.3.8) bağıntısına yerine koyarsak,

$$\sigma_2 \wedge \tau = w_2 \wedge \tau' = (\sigma'_2 - q\tau')\wedge\tau' = \sigma'_2 \wedge \tau' - q(\tau' \wedge \tau')$$

ve $\tau' \wedge \tau' = 0$ olduğundan

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma'_2 \wedge \tau' \qquad (4.3.13)$$

bulunur. (4.3.10) diferensiyel denkleminden q doğru parçasının tayini, integrellenebilme şartı sağlandığı için daima mümkündür. (4.3.10) denkleminden

$$dq = \sigma'_1 - w_1 \qquad (4.3.14)$$

yazılabilir. (4.3.5) türev denklemlerinden (4.3.13) ifadesi ile birlikte

$$d(dq) = d\sigma'_1 - dw_1 = -\sigma'_2 \wedge \tau' + w_2 \wedge \tau' = 0 \qquad (4.3.15)$$

sonucu elde edilir. Böylece dq bir tam diferensiyel olup,

$$q = \int (\sigma'_1 - w_1)dt \qquad (4.3.16)$$

dır. Bu integralde keyfi bir integrasyon sabiti ortaya çıkar. O halde q doğru parçasının tayini daima keyfi bir parametre farkıyla mümkündür.

4.4. Kutup Eksenleri Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler

TEOREM 4.4.1:

Kutup eksenleri yoğunluğu sıfır olan iki-parametreli bir $B_{||}$-hareketi daima, E-düzleminin bir k eğrisi devamlı olarak E'-düzleminin bir k' eğrisine değecek şekide elde edilir.

İSPAT: Şimdiye kadarki eleştirilerimizde E ve E'-düzlemlerindeki g, g' kutup eksenlerinin (g)= (g') ortak yoğunluğunun daima sıfır olmadığını kabul ettik. İki-parametreli hareketler altında tam bir istisnai durum daima tarif bölgesinin bütün u, v değerleri için

$$(g) = dh \wedge d\varphi = 0 \qquad (4.4.1)$$

$$(g') = dh' \wedge d\varphi' = 0 \qquad (4.4.2)$$

olduğu $B_{||}$-lerdir.

g kutup ekseni E- düzlemine göre

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = h \qquad (4.4.3)$$

denklemine sahiptir. Keza ona karşılık gelen E'-düzlemindeki g' kutup ekseni

$$x'_1\cos\varphi + x'_2\sin\varphi = h' \qquad (4.4.4)$$

denklemiyle verilir. (4.4.1) ifadesi dh ve $d\varphi$ 'nin lineer bağımlı olduğunu, yani

$$f(\varphi,h)dh + g(\varphi,h)d\varphi = 0 \qquad (4.4.5)$$

şeklinde bir bağıntıya sahip olduklarını ifade eder. Dolayısıyla h φ 'nin bu diferensiyel denklemi sağlayan bir fonksiyonu olarak

$$h = h(\varphi) \qquad (4.4.6)$$

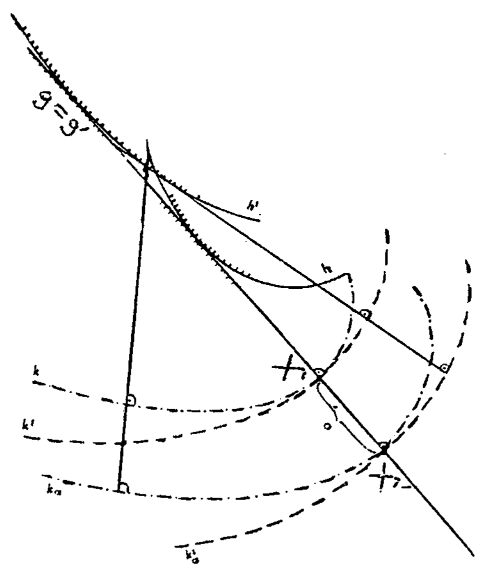
şeklinde ifade edilebilir. (4.4.2) den h' 'nün

$$h' = h'(\varphi') \qquad (4.4.7)$$

gibi φ' 'nün bir fonksiyonu olduğu sonucu çıkarılır.

Bu $h = h(\varphi)$ ve $h' = h'(\varphi')$ destek fonksiyonları ile E ve E'-düzlemlerinde g ve g' doğrularının birer bir-parametreli ailesi tarif edilir. Bunların zarfları da h ve h' ile gösterilebilir.

k, E-düzlemindeki doğru ailesine ortogonal bir eğri olsun. Bu takdirde k eğrisine h nın bir evolventi denir (Şekil -6). k 'nın g doğrusu ile kesim noktası X ile gösterilsin.



Şekil -6

Şimdi B_{II}-hareketinden bir-parametreli bir B_I-hareketini seçelim. Bu harekete ait P dönme polü g kutup ekseni üzerinde bulunur. E-düzlemindeki k eğrisi bu B_I-hareketinde E'-düzleminde bir k' zarfına sahiptir. k ve k' zarf eğrisini ani değme noktası (g , P polünden k eğrisine çizilen normal olduğu için) X noktasıdır.

E'-sabit düzlemini inceleyelim: Özellikle g = g' olduğu için, E'-düzleminde g' kutup ekseni k' zarf eğrisini dik keser. Böylece k' zarf eğrisi de E'-düzleminde g' eksen ailesine ortogonal bir eğridir. k' eğrisi h' eğrisinin bir evolventidir. Dolayısıyla k' eğrisi B_{II}-den elde edilen bir-parametreli B_I-hareketine bağlı değildir.

Kutup eksenleri yoğunluğu sıfır olan iki-parametreli B_{II}-hareketi, k eğrisinin daima k' eğrisine değmesiyle izah edilebilir.

Tersine olarak $h=h(\varphi)$, $h' = h'(\varphi')$ fonksiyonları ile E ve E'-düzlemlerinde h ve h' eğrilerinin teğetler göstergesi olan bir-parametreli birer doğru ailesi belirtilmektedir. Bu eğrilerin herhangi iki k ve k' evolventi, yani bu iki doğru ailesinin herhangi iki ortogonal yörüngesi alınırsa aşağıdaki şekilde iki parametreli bir B_{II}-hareketi belirtilebilir. k eğrisinin bulunduğu E-düzlemi, k daima E'-düzleminin k' eğrisine değecek şekilde hareket ettiriliyor. Buna göre k ve k' eğrileri noktaları birbirlerine karşılık gelmeyip, sadece her iki eğrinin değme noktası k 'nın herhangi bir noktasında bulunduğu için, böylece elde edilen hareket iki parametrelidir ve sıfır yoğunluklu önceden verilen eksen dönüşümüne sahiptir. k ve k' eğrileri yerine h ve h' 'nün k ve k' 'den aynı a uzaklığında olan k_a, k'_a gibi iki evolventi alınırsa, aynı B_{II}-hareketi elde edilebilir.

Bununla birlikte h 'nın bir k evolventi h' 'nün her ∞^1 tane farklı k' evolventi ile beraber her defa bir B_{II}-hareketi belirttiği için, B_{II}- nin bir-parametreli bir ailesi $h=h(\varphi)$, $h'=h'(\varphi')$ fonksiyonlarına aittir.

Bunlara bağlı olarak aşağıdaki teoremde verilebilir.

TEOREM 4.4.2:

E ve E'-düzlemlerinde bir-parametreli iki doğru ailesi önceden verilmişse, bu ailelere iki-parametreli B_{II}-hareketinin bir-parametreli bir ailesi aittir. Bu B_{II}-hareketleri E-düzleminin doğru ailesinin ortogonal yörüngelerinin E'-düzleminin ailesinin ortogonal yörüngelerine değmesiyle karakterize edilir.

5. BİR EĞRİ ELEMENTİNİ ÇİZEN NOKTALAR

TEOREM 5.1:

İki-parametreli bir B_{II}- hareketinde genel olarak hareketli E-düzleminin, (u,v) anında yüzey elemanını değil, bilakis bir eğri elemanını çizen noktaların geometrik yeri g kutup eksenleridir. O halde g kutup eksenleri E-düzleminin ‹‹ eğri çizici ›› noktasının geometrik yeridir.

İSPAT: E-hareketli düzleminde bir X noktası alalım. İki parametreli bir B_{II}-hareketinde bu nokta genel olarak E'-sabit düzleminde bir yüzey elemanı çizer. E-düzlemindeki X noktasının yüzey elemanı yerine X 'in E'-düzlemindeki nokta yoğunluğundan bahsedebiliriz. Genel olarak bu nokta yoğunluğu sıfırdan farklı olacaktır, yani X noktası bir yüzey elemanı çizecektir. Şimdi, E-düzleminin E'-düzleminde nokta yoğunluğu bir t anında, yani incelenen bir (u,v) konumunda sıfır olan X noktalarını araştıralım. Bu noktalar bir t anında iki-parametreli B_{II}-hareketinde eğri elementi çizeceklerdir.

Şimdiye kadar keyfi alınan $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ izafe sistemini, $\{B; \vec{a}_1\}$ eksenini kutup ekseni ile üst üste gelecek şekilde seçelim. Yani, $p_2 = 0$ olsun. Bu takdirde (4.2.40) gereğince

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \tag{5.1}$$

sonucuna varılır. Bu büyüklükleri σ ile gösterirsek,

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma'_1 \tag{5.2}$$

olur.

Şimdi de (Şekil -2) 'ye göre izafe sistemindeki koordinatları x_1, x_2 olan bir X noktası için

$$\vec{BX} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \tag{5.3}$$

$$\vec{x} = \vec{OX} = \vec{OB} + \vec{BX} = \vec{b} + x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \tag{5.4}$$

$$\vec{x}' = \vec{O'X} = \vec{O'B} + \vec{BX} = \vec{b}' + x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \tag{5.5}$$

şeklinde yazalım. (4.2.13) ve (4.2.14) türev denklemleri yardımıyla X noktasının E-düzlemine göre (4.2.27) formülü olan, yani

$$d\vec{x} = (dx_1 + \sigma - x_2\tau)\vec{a}_1 + (dx_2 + \sigma_2 + x_1\tau)\vec{a}_2 \qquad (5.6)$$

bulunur. $d\vec{x} = 0$ için X noktası E-düzleminde sabittir. Bu da X'in E-düzleminde sabit kalma şartlarını veya

$$dx_1 = -\sigma + x_2\tau \quad , \quad dx_2 = -\sigma_2 - x_1\tau \qquad (5.7)$$

bağıntılarını verir.

X noktasının E'-düzlemine göre değişimi için (4.2.30) ve (4.2.34) formüllerine uygun olarak

$$d'\vec{x}' = d'\vec{x} = (dx_1 + \sigma - x_2\tau')\vec{a}_1 + (dx_2 + \sigma'_2 + x_1\tau')\vec{a}_2 \qquad (5.8)$$

ve (5.7) değerleri yerine yazılırsa

$$d_f\vec{x} = -x_2(\tau'-\tau)\vec{a}_1 + \{(\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau'-\tau)\}\vec{a}_2 \qquad (5.9)$$

sonucunu elde ederiz.

$$-x_2(\tau'-\tau) = \eta_1 \quad , \quad (\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau'-\tau) = \eta_2 \qquad (5.10)$$

yazılarak

$$d_f\vec{x} = \eta_1\vec{a}_1 + \eta_2\vec{a}_2 \qquad (5.11)$$

ifadesini buluruz. Burada $d_f\vec{x}$ bir-parametreli hareketlerdeki sürüklenme hızına karşılık gelir.

X noktasının E'-düzleminde çizdiği yüzey elementi veya X 'in E'-düzlemindeki nokta yoğunluğu

$$d_f\vec{x} = \eta_1 \wedge \eta_2 = x_2\,[(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau'-\tau)] \qquad (5.12)$$

dış çarpımı ile verilir. Buradan

$$(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) \neq 0 \qquad (5.13)$$

ise, $d_f\vec{x}$ yüzey elementi yalnız $x_2 = 0$ olan X noktaları için sıfırdır. Bu noktalar B_{II}-hareketinin kutup ekseni üzerinde bulunurlar.

$$(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) = 0 \qquad (5.14)$$

şartının sağlanması halinde aşağıdaki iki sonuç ortaya çıkar.

1. $\sigma'_2 - \sigma_2$ ve $\tau' - \tau$ formları lineer bağımlı iseler, aynı P dönme polü B_{II}-hareketinin (u,v) konumlu bütün B_I-hareketlerine aittir. Yani, esas itibariyle bir kutup ekseni mevcut değildir.

2. $\tau' - \tau = 0$ ise, bu takdirde genel olarak sonsuz uzak poller bulunur.

6. İKİ-PARAMETRELİ B_{II}-HAREKETİNDE ESAS-B_I-HAREKETİ VE NORMLANMIŞ İZAFE SİSTEMİ

İki-parametreli bir B_{II}-hareketini, $\{B; \vec{a}_1\}$ ekseni ve $g = g'$ kutup ekseni üzerinde bulunan bir $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ sistemine izafe edelim. B_{II}-hareketinden elde edilen bir-parametreli bir B_I-hareketinin P dönme polünün koordinatları (4.2.39) ile (4.2.40) ve (5.2) 'den dolayı

$$p_1 = -(\sigma'_2 - \sigma_2) / \tau' - \tau \ , \quad p_2 = 0 \tag{6.1}$$

dir.

B_{II}-hareketi içinde, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelen fevkalede B_I-hareketleri vardır. Bu hareketleri esas B_I-olarak ifade etmek istiyoruz. Bir-parametreli bir B_I-hareketinin hareketli (P) pol eğrisinin kontengenz açısı τ ve sabit (P') pol eğresinin kontengenz açısı olarak da τ' 'yü alalım. Burada τ, kontengenz açısı, yani (P) 'nin komşu iki teğetinin açısıdır. τ' kontengenz açısı, (P') 'nün komşu iki teğetinin açısıdır. Bu açılar simetrik yuvarlanma için eşit ve ters işaretli olduğundan, yani

$$\tau + \tau' = 0 \tag{6.2}$$

sağlanmak zorundadır. (6.2) ifadesiyle B_{II}-hareketinin her (u,v) durumunda esas-B_I-hareketine karşılık dönme polü olan bir Q esas-polü tesbit edilir.

$$\tau \Delta \tau' \neq 0 \tag{6.3}$$

kabulü altında Q esas-polünün koordinatları q_1, q_2 olmak üzere (6.1) 'den dolayı

$$q_1 = -\frac{(\sigma'_2-\sigma_2)\wedge(\tau'+\tau)}{(\tau'-\tau)\wedge(\tau'+\tau)} = -\frac{(\sigma'_2-\sigma_2)\wedge(\tau'+\tau)}{\tau'\wedge\tau'+\tau'\wedge\tau-\tau\wedge\tau'-\tau\wedge\tau}$$

$$= -\frac{(\sigma'_2-\sigma_2)\wedge(\tau'+\tau)}{-\tau\wedge\tau'-\tau\wedge\tau'}$$

$$= -\frac{(\sigma'_2-\sigma_2)\wedge(\tau'+\tau)}{-2(\tau\wedge\tau')}$$

$$= \frac{(\sigma'_2-\sigma_2)\wedge(\tau'+\tau)}{2(\tau\wedge\tau')} \qquad (6.4)$$

elde ederiz.

$$q_2 = \frac{(\sigma'_1-\sigma_1)\wedge(\tau'+\tau)}{(\tau'-\tau)\wedge(\tau'+\tau)}$$

için (5.2) 'den dolayı

$$q_2 = 0 \qquad (6.5)$$

bulunur. u,v gibi iki değişken halinde Pfaff-formunu

$$w_j = A_j du + B_j dv \qquad (j = 1,2,3)$$

şeklinde yazarak

$$w_1 = A_1 du + B_1 dv \qquad (6.6)$$

$$w_2 = A_2 du + B_2 dv \qquad (6.7)$$

$$w_3 = A_3 du + B_3 dv \qquad (6.8)$$

elde edilir. Bunlara bağlı olarak, Pfaff-formlarının aşağıdaki özelliklerini kullanalım.

$$w_1 = 0 \tag{6.9}$$

diferensiyel denkleminin çözümü için, w_1 lineer bağımsız kabul edilirse, diğer iki formun oranı

$$\left.\frac{w_2}{w_3}\right|_{w_1=0} = \frac{w_1 \wedge w_2}{w_1 \wedge w_3} = \frac{\det(w_1, w_2)}{\det(w_1, w_3)} \tag{6.10}$$

şeklindedir. Yani, Pfaff-formlarının katsayılarının determinantı şeklinde yazılırsa

$$\left.\frac{w_2}{w_3}\right|_{w_1=0} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \tag{6.11}$$

olarak bulunur.

İzafe sistemini kutup ekseni boyunca B başlangıcı Q esas-polüne gelinceye kadar yer değiştirmek suretiyle, normlamak ve tek anlamlı olarak belirtmek gerekir. Bir B_{II}-hareketinin B = Q olan bu kanonik izafe sistemi için

$$q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \tag{6.12}$$

veya

$$(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau' + \tau) = 0 \tag{6.13}$$

olmalıdır. Bu şart daha detaylı olarak

$$\sigma'_2 \wedge \tau' - \sigma_2 \wedge \tau' + \sigma'_2 \wedge \tau - \sigma_2 \wedge \tau = 0 \tag{6.14}$$

şeklinde yazılır. Yoğunluğun değişmezliğini ifade eden (4.2.49) bağıntısından dolayı

$$\sigma_2 \wedge \tau' = \sigma'_2 \wedge \tau \tag{6.15}$$

eşitliği de yazılabilir. $A(u,v)$, $B(u,v)$, $F(u,v)$, $F'(u,v)$, $G(u,v)$ ve $G'(u,v)$ iki- parametreli $B_{||}$-hareketinde yüzey üzerinde bulunan eğrilerin fonksiyonları olmak üzere, (6.3) ifadesine, yani τ ve τ' 'nün lineer bağımsız olmasından dolayı σ Pfaff -formları τ ve τ' cinsinden ifade edilebilir ve sonuçta aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\sigma = \sigma'_1 = \sigma_1 = A\tau - B\tau' \tag{6.16}$$

$$\sigma_2 = F\tau - G\tau' \tag{6.17}$$

$$\sigma'_2 = F'\tau - G'\tau' \tag{6.18}$$

Şimdi bu ifadeleri (4.2.49) ve (6.15) 'de yerine koyarsak,

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma'_2 \wedge \tau'$$

$$(F\tau - G\tau') \wedge \tau = (F'\tau - G'\tau') \wedge \tau'$$

$$F(\tau \wedge \tau) - G(\tau' \wedge \tau) = F'(\tau \wedge \tau') - G'(\tau' \wedge \tau')$$

$$- G(\tau' \wedge \tau) = -F'(\tau' \wedge \tau)$$

$$G = F' \tag{6.19}$$

ve

$$\sigma_2 \wedge \tau' = \sigma'_2 \wedge \tau$$

$$(F\tau - G\tau') \wedge \tau' = (F'\tau - G'\tau') \wedge \tau$$

$$F(\tau \wedge \tau') - G(\tau' \wedge \tau') = F'(\tau \wedge \tau) - G'(\tau' \wedge \tau)$$

$$F(\tau \wedge \tau') = G'(\tau \wedge \tau')$$

$$F = G' \tag{6.20}$$

bulunur.

Daha önceki bölümlerde, g ve g' kutup eksenlerinin denklemlerini sırasıyla E-düzleminde $\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ koordinat sistemine göre

$$x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = h$$

ve E'-düzlemindeki $\{O';\vec{e'_1},\vec{e'_2}\}$ koordinat sistemine göre

$$x'_1 \cos\varphi' + x'_2 \sin\varphi' = h'$$

şeklinde ifade edilmişti. Dönme açısının $\{B;\vec{a_1},\vec{a_2}\}$ izafe sistemine göre değişimleri

$$d\varphi = \tau \quad , \quad d\varphi' = \tau'$$

olduğu ve $\tau \wedge \tau' \neq 0$ sağlandığı için φ ve φ' açılarını bağımsız değişkenler olarak kabul edip, $B_{||}$-hareketini onlara izafe edebiliriz.

Bu takdirde (6.16), (6.17) ve (6.18) ifadelerinin dış türevlerinin oluşturulmasıyla

$$d\tau = 0 \quad , \quad d\tau' = 0 \tag{6.21}$$

ile (6.19) ve (6.20) 'den dolayı

$$d\sigma_1 = d(A\tau - B\tau') = d(A\tau) - d(B\tau')$$

ve (1.1) bağıntısından

$$d\sigma_1 = dA \wedge \tau + A\,d\tau - dB \wedge \tau' - B\,d\tau'$$

olur. (6.21) ifadesi kullanılarak

$$d\sigma_1 = dA \wedge \tau - dB \wedge \tau' \tag{6.22}$$

elde edilir. Şimdi aşağıda φ ve φ' açılarını bağımsız değişken olarak kabul ederek bir irdeleme yapalım:

İRDELEME:

Önce φ bağımsız değişkeni için

$$dA/d\varphi = \partial A/\partial_{\varphi} = A_{\varphi} \tag{6.23}$$

ile gösterilirse (4.2.9) 'dan dolayı

$$dA \,\Delta\, \tau = A_{\varphi} \; (\tau \,\Delta\, \tau)$$

$$dA \,\Delta\, \tau = 0 \tag{6.24}$$

buluruz. Ayrıca benzer olarak

$$dB/d\varphi = \partial B/\partial_{\varphi} = B_{\varphi} \tag{6.25}$$

ile gösterilirse

$$dB \,\Delta\, \tau' = B_{\varphi} \; (\tau \,\Delta\, \tau') \tag{6.26}$$

bulunur. Dolayısıyla bu değer (6.22) de yerine yazılırsa

$$d\sigma_1 = - B_{\varphi} \; (\tau \,\Delta\, \tau') \tag{6.27}$$

elde edilir.

Şimdi de φ' bağımsız değişken için

$$dA/d\varphi' = \partial A/\partial_{\varphi}' = A_{\varphi}' \tag{6.28}$$

ile gösterilirse

$$dA \,\Delta\, \tau = A_{\varphi}' \; (\tau' \,\Delta\, \tau)$$

$$= - A_{\varphi}' \; (\tau \,\Delta\, \tau') \tag{6.29}$$

bulunur.

Ayrıca

$$dB/d\varphi' = \partial B/\partial_{\varphi}' = B_{\varphi}' \tag{6.30}$$

şeklinde gösterirsek,

$$dB \wedge \tau' = B_{\varphi}' \ (\tau' \wedge \tau')$$

$$dB \wedge \tau' = 0 \tag{6.31}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$d\sigma_1 = -A_{\varphi}' \ (\tau \wedge \tau') \tag{6.32}$$

elde edilir. Bu takdirde (6.24) ve (6.31) bağıntılarına göre

$$d\sigma_1 = 0 \tag{6.33}$$

elde ederiz. Dolayısıyle de (6.26) ve (6.32) ifadelerinden

$$d\sigma_1 = -A_{\varphi}' \ (\tau \wedge \tau') - B_{\varphi} (\tau \wedge \tau')$$

$$= -(A_{\varphi}' + B_{\varphi}) \ \tau \wedge \tau' \tag{6.34}$$

elde edilir. Gerçekten bu sonuç bizim için doğru olamıdır. Çünkü (6.16) ifadesi A(u,v) ve B(u,v) gibi eğrilerin fonksiyonlarına bağlıdır.

Benzer şekilde,

$$d\sigma_2 = -(F_{\varphi}' + G_{\varphi}) \ \tau \wedge \tau' \tag{6.35}$$

$$d\sigma'_2 = -(F_{\varphi} + G_{\varphi}') \ \tau \wedge \tau' \tag{6.36}$$

değerleri bulunur. Bu değerleri (4.2.22) ve (4.2.23) integrallenebilme şartları ile karşılaştırırsak, yani

$$d\sigma_1 = -\sigma_2 \Delta \tau$$

ifadesinden

$$d\sigma_1 = -(F\tau - G\tau') \Delta \tau$$

$$= -F(\tau \Delta \tau) + G(\tau' \Delta \tau)$$

yazılır. $\tau \Delta \tau = 0$ olduğundan

$$d\sigma_1 = G(\tau' \Delta \tau) \tag{6.37}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade (6.34) ile karşılaştırırlırsa,

$$G(\tau' \Delta \tau) = (A_\varphi' + B_\varphi) \tau' \Delta \tau$$

yazılır. Dolayısıyla

$$G = A_\varphi' + B_\varphi \tag{6.38}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$d\sigma_2 = \sigma_1 \Delta \tau$$

$$= (A\tau - B\tau') \Delta \tau = A(\tau \Delta \tau) - B(\tau' \Delta \tau)$$

yazılarak

$$d\sigma_2 = -B(\tau' \Delta \tau) = B(\tau \Delta \tau') \tag{6.39}$$

elde edilir. Bu değeri (6.35) ile mukayese edersek,

$$B(\tau \Delta \tau') = -(F_\varphi' + G_\varphi) \tau \Delta \tau'$$

$$B = -(F_\varphi' + G_\varphi) \tag{6.40}$$

bulunur.

$$d\sigma'_2 = \sigma'_1 \Delta \tau'$$

$$= (A\tau - B\tau')\Delta\tau' = A(\tau\Delta\tau') - B(\tau'\Delta\tau')$$

yazılarak $\tau'\Delta\tau' = 0$ olmasından dolayı

$$d\sigma'_2 = A(\tau\Delta\tau') \qquad (6.41)$$

elde edilir. (6.36) ifadesinden

$$A(\tau\Delta\tau') = -(F_\varphi + G_{\varphi'})\,\tau\Delta\tau'$$

yazılarak, yani

$$A = -(F_\varphi + G_{\varphi'}) \qquad (6.42)$$

bulabiliriz. Bazen φ ve bazen de φ' 'ye göre kısmi türev almamızın sebebi (4.2.9) 'dan dolayı farklı değerlerin ortaya çıkmasıdır.

Bu nedenle F ve G fonksiyonları keyfi olarak seçilemezler. Bununla birlikte A ve B nin $A\varphi'$ ve $B\varphi$ kısmi türevleri alınarak (6.38) 'de yerine konulursa, yani

$$A_{\varphi'} = -(F_{\varphi\varphi'} + G_{\varphi'\varphi'}) \qquad (6.43)$$

$$B_\varphi = -(F_{\varphi'\varphi} + G_{\varphi\varphi}) \qquad (6.44)$$

ve.

$$F_{\varphi\varphi'} = F_{\varphi'\varphi} \qquad (6.45)$$

şartı kullanılarak

$$G = -F_{\varphi\varphi'} - G_{\varphi'\varphi'} - F_{\varphi'\varphi} - G_{\varphi\varphi}$$

$$G = -2F_{\varphi\varphi'} - G_{\varphi'\varphi'} - G_{\varphi\varphi}$$

ve buradan da

$$G + 2F_{\varphi\varphi}' + G_{\varphi}'\varphi' + G_{\varphi\varphi} = 0 \tag{6.46}$$

ifadesi bulunur.

Şimdiye kadar elde edilen sonuçları aşağıdaki teoremlerle ifade edelim.

TEOREM 6.1:

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinin her (u,v) konumuyla, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanması ile meydana gelen bir esas- B_I-hareketi elde edilir. Bunun Q dönme polü B_{II}-hareketinin incelenen durumdaki esas-polüdür.

TEOREM 6.2:

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinde $\{Q; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ kanonik izafe sistemi, Q esas-polünde bir başlangıç noktasına sahiptir. Dolayısıyle B_{II}-hareketinde $\{Q; \vec{a}_1\}$ ekseni $g=g'$ kutup eksenidir.

Bu normlanmış izafe sistemi için

$$d\vec{a}_1 = \tau\vec{a}_2 \quad , \quad d\vec{a}_2 = -\tau\vec{a}_1 \quad ; \quad d\vec{q} = \sigma\vec{a}_1 + \sigma_2\vec{a}_2 \tag{6.47}$$

$$d'\vec{a}_1 = \tau'\vec{a}_2 \quad , \quad d'\vec{a}_2 = -\tau'\vec{a}_1 \quad ; \quad d'\vec{q} = \sigma\vec{a}_1 + \sigma'_2\vec{a}_2 \tag{6.48}$$

türev denklemlerinin sistemi mevcuttur. (6.40) ve (6.42) ifadeleri (6.16) 'da yerine konursa

$$\sigma = -(F_{\varphi} + G_{\varphi}')\tau + (F_{\varphi}' + G_{\varphi})\tau' \tag{6.49}$$

ve ayrıca (6.19) ve (6.20) 'den dolayı

$$\sigma_2 = F\tau - G\tau' \quad , \quad \sigma'_2 = G\tau - F\tau' \tag{6.50}$$

yazılabilir. Artık F ve G fonksiyonları yanlız (6.46) integrallenebilme şartlarını sağlamak zorundadır.

E ve E'-düzlemlerindeki g, g' kutup eksenlerinin yoğunlukları (4.2.49) ve (4.2.60) formülllerine göre

$$(g) = (g') = -\sigma_2 \Delta \tau = -\sigma'_2 \Delta \tau'$$

$$= -(F\tau - G\tau') \Delta \tau = -F(\tau \Delta \tau) + G(\tau' \Delta \tau)$$

ve $\tau \Delta \tau = 0$ olmasından dolayı

$$(g) = (g') = G(\tau' \Delta \tau)$$

$$= -G(\tau \Delta \tau')$$

$$= -G(d\varphi \Delta d\varphi') \qquad (6.51)$$

bulunur. Dolayısıyla G inveryantı esas itibariyle E ve E'-düzlemlerindeki g, g' kutup eksenlerinin ortak yoğunluklarıdır.

7. İKİ-PARAMETRELİ HAREKETLERDEN ÇEKİLEN BİR-PARAMETRELİ HAREKETLER

Daha önce iki-parametreli bir B_{II}-hareketinin bir özel durumu ile elde edilen bir parametreli B_I-hareketleri altında esas B_I-ler karakterize edilmişti. Bunlar simetrik yuvarlanmaya karşılık gelirler. Şimdi de B_I-hareketlerini açıklamaya çalışalım.

7.1. Bir-Parametreli S_I-Kayma Hareketleri

Bunun için

$$\tau = \tau' \tag{7.1.1}$$

yani

$$\varphi = \varphi' \tag{7.1.2}$$

için bir kayma hareketi mevcuttur. E-düzleminde bir X noktasını gözönüne alalım. (5.9) bağıntısına göre bu noktanın ilerleme doğrultusu için

$$d_f\vec{x} = -x_2(\tau' - \tau)\vec{a_1} + \{(\sigma'_2 - \sigma_2) + x_1(\tau' - \tau)\}\vec{a_2}$$

de (7.1.1) kullanılırsa

$$d_f\vec{x} = (\sigma'_2 - \sigma_2)\vec{a_2} \tag{7.1.3}$$

elde edilir. O halde ani kayma yönü her defa kutup eksenine diktir.

X noktasının yörünge eğrisinin komşu noktaları (7.1.3) ifadesine göre $\sigma'_2 - \sigma_2$ uzaklığındadır. Kayma yönü ise $\tau = \tau'$ açısı etrafında değişir. Böylece $\tau = \tau'$ kontengenz açısı, yani X noktasının yörünge eğrisinin komşu teğetlerinin açısıdır. Dolayısıyla S_I-kayma hareketinin δ eğrilik yarıçapını

$$\delta = \sigma'_2 - \sigma_2/\tau \tag{7.1.4}$$

şeklinde gösterebiliriz. (6.50) ifadesinden dolayı

$$\delta = \frac{G\tau \; - F\tau' - F\tau + G\tau'}{\tau}$$

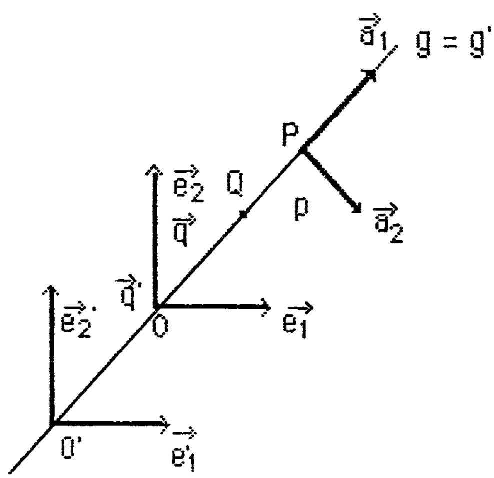
ve $\tau' = \tau$ olduğu için

$$\delta = 2\,(G-F) \tag{7.1.5}$$

elde edilir.

7.2. Bir-Parametreli Hareketlerin Oskülatörü

Bundan pol yörüngelerinin her defa kutup eksenlerine değen bir-parametreli B_l-hareketlerini anlıyoruz. Buna karşılık gelen P dönme polü için



Şekil-7

(Şekil-7) ile (6.1) ve (6.50) ifadelerine göre

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{q} + p\vec{a}_1 \tag{7.2.1}$$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'Q} + \overrightarrow{QP} = \vec{q}' + p\vec{a}_1 \tag{7.2.2}$$

yazılabilir. Buradaki P dönme polü $p_1 = p$ ye karşılık geleceğinden

$$p = -(\sigma'_2 - \sigma_2) / \tau' - \tau \tag{7.2.3}$$

yazabiliriz. (6.50) 'den dolayı

$$p = - \frac{G\tau - F\tau' - F\tau + G\tau'}{\tau' - \tau}$$

$$= - \frac{(G-F)\tau + (G-F)\tau'}{\tau' - \tau}$$

$$= (F-G)\frac{\tau' + \tau}{\tau' - \tau} \tag{7.2.4}$$

bulunur. Bizden istenen değme, (6.47) ve (6.48) bağıntılarıyla

$$d\overrightarrow{OP} = d\vec{q} + dp\vec{a}_1 + pd\vec{a}_1 = (\sigma + dp)\vec{a}_1 + (\sigma_2 + p\tau)\vec{a}_2 \tag{7.2.5}$$

$$d\overrightarrow{O'P} = d'\vec{q} + dp\vec{a}_1 + pd'\vec{a}_1 = (\sigma + dp)\vec{a}_1 + (\sigma'_2 + p\tau')\vec{a}_2 \tag{7.2.6}$$

değişimlerinin kutup ekseninin $\vec{a}_1$ doğrultusunda olduğunu, yani

$$\sigma_2 + p\tau = 0 \quad , \quad \sigma'_2 + p\tau' = 0 \tag{7.2.7}$$

olduğunu ifade eder.

p koordinatları (7.2.4) 'e göre iki Pfaff-formun oranı şeklinde gösterilebilir. Karakterize edilen, B_I-hareketleri için (7.2.7) şartları sağlamak zorundadır. (6.4) 'ün genel kaidesini uygularsak,

$$p = (F-G)\frac{(\tau'+\tau)\,A\,(\sigma_2 + p\tau)}{(\tau'-\tau)\,A\,(\sigma_2 + p\tau)} = (F-G)\frac{(\tau'+\tau)\,A\,(\sigma'_2 + p\tau')}{(\tau'-\tau)\,A\,(\sigma'_2 + p\tau')} \qquad (7.2.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Önce eşitliğin birinci tarafı için σ_2'nin (6.50) 'deki değerini yerine koyarsak,

$$p = (F-G)\frac{(\tau'+\tau)\,A\,(F\tau-G\tau'+p\tau)}{(\tau'-\tau)\,A\,(F\tau-G\tau'+p\tau)} = (F-G)\frac{(\tau'+\tau)\,A\,((F+p)\tau-G\tau')}{(\tau'-\tau)\,A((F+p)\tau-G\tau')}$$

$$= (F-G)\frac{(F+p)\,\tau'\,A\,\tau - G(\tau'\,A\,\tau') + (F+p)\,\tau A\,\tau - G(\tau A\,\tau')}{(F+p)\,\tau'\,A\,\tau - G(\tau'\,A\,\tau') - (F+p)\,\tau A\,\tau + G(\tau A\,\tau')}$$

$$= (F-G)\frac{(F+p)\,\tau'\,A\,\tau + G(\tau' A\,\tau)}{(F+p)\,\tau'\,A\,\tau - G(\tau' A\,\tau)}$$

$$p = \frac{(F-G)(F+p+G)\,\tau' A\,\tau}{(F+p-G)\,\tau' A\,\tau}$$

$$p = \frac{(F-G)(F+p+G)}{F+p-G}$$

buradan

$$pF + p^2 - pG = F^2 + pF + FG - FG - pG - G^2$$

$$p^2 = F^2 - G^2 \qquad (7.2.9)$$

sonucunu elde ederiz. Eşitliğin ikinci tarafı için benzer hesaplamalar yapılarak aynı sonucu elde ederiz.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM 7.1.1:

Bir B_{II}-hareketinin her durumuna karşılık gelen kutup ekseni üzerinde oskülatör-*B_I- in polü olarak iki dönme polü bulunur. Bu oskülatör poller* $F^2 > G^2$ *için* reel ve $F^2 < G^2$ için eşlenik sanaldır. Q esas-polü her iki oskülatör-polün orta noktasıdır.

(7.2.7) 'nin denklemleri arasında p büyüklüğü yok edilirse, oskülatör B_I-hareketi için

$$\sigma_2 \tau' - \sigma'_2 \tau = 0 \qquad (7.2.10)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (6.50) 'den dolayı adi çarpım olarak

$$G\tau^2 - 2F\tau\tau' + G\tau'^2 = 0 \qquad (7.2.11)$$

veya bunun yerine

$$Gd\varphi^2 - 2Fd\varphi d\varphi' + Gd\varphi'^2 = 0 \qquad (7.2.12)$$

ifadesi de yazılabilir.

7.3. Bir-Parametreli Hareketlerin Geodezikliği

İki-parametreli B_{II}-hareketinin bir-parametreli B_I-hareketlerine, bu hareketlerin pol eğrileri tekabül eden kutup eksenlerine dik olursa geodezik adı verilir.

Bu takdirde (7.2.5) ve (7.2.6) ifadesindeki bileşenler $\vec{a}_1$ vektörünün doğrultusunda daima sıfır olurlar. Bunlar

$$\sigma + dp = 0 \tag{7.3.1}$$

şartını verir.

(7.2.7) denkleminin diferensiyeli alınırsa

$$d\sigma_2 + \tau\, dp + d\tau\, p = 0 \tag{7.3.2}$$

bulunur. $d\tau = 0$ ve $d\varphi = \tau$ olduğunan

$$d\sigma_2 + d\varphi\, dp = 0 \tag{7.3.3}$$

ve buradan da

$$dp = - d\sigma_2 / d\varphi \tag{7.3.4}$$

elde edilir. (6.50) bağıntısının diferensiyeli alınırsa

$$d\sigma_2 / d\varphi = F_\varphi \tau + F\, d\tau / d\varphi - G_\varphi \tau' - G\, d\tau' / d\varphi \tag{7.3.5}$$

bulunur. (4.2.9) ve (7.3.5) ifadelerinden

$$dp = - F_\varphi\, d\varphi - F\, d(d\varphi)/d\varphi + G_\varphi\, d\varphi' + G d(d\varphi')/d\varphi \tag{7.3.6}$$

yazılır. (6.49) ile (7.3.6) ifadelerini (7.3.1) de yerine koyarsak

$$-(F_\varphi + G_\varphi') d\varphi + (F_\varphi' + G_\varphi) d\varphi' - F_\varphi d\varphi - F d(d\varphi)/d\varphi + G_\varphi d\varphi' + G d(d\varphi')/d\varphi = 0$$

$$-F_\varphi d\varphi - G_\varphi' d\varphi + F_\varphi' d\varphi' + G_\varphi d\varphi' - F_\varphi d\varphi - F d(d\varphi)/d\varphi + G_\varphi d\varphi' + G d(d\varphi')/d\varphi = 0$$

buradan da

$$2 G_\varphi d\varphi' - 2F_\varphi d\varphi - G_\varphi' d\varphi + F_\varphi' d\varphi' + G d(d\varphi')/d\varphi - F d(d\varphi)/d\varphi = 0 \tag{7.3.7}$$

olur. Her iki tarafı $d\varphi$ ile çarparsak,

$$Gd^2\varphi' - Fd^2\varphi + 2G_\varphi d\varphi\, d\varphi' - 2F\varphi\,(d\varphi)^2 - G\varphi'(d\varphi)^2 + F\varphi' d\varphi\, d\varphi' = 0$$

bulunur. (7.1.1) ifadesinden

$$\tau = \tau' \quad \Rightarrow \quad d\varphi = d\varphi' \qquad (7.3.8)$$

olur ki, bu da $\varphi = \varphi'$ demektir. Dolayısıyla

$$Gd^2\varphi - Fd^2\varphi + 2G_\varphi(d\varphi)^2 - 2F\varphi\,(d\varphi)^2 - G\varphi(d\varphi)^2 + F\varphi\,(d\varphi)^2 = 0$$

$$(G-F)d^2\varphi + G_\varphi(d\varphi)^2 - F\varphi(d\varphi)^2 = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$(G\varphi - F\varphi)\,(d\varphi)^2 + (G-F)d^2\varphi = 0$$

bulunur. Böylece ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem elde edilmiş olur.

8. KAYNAKLAR

AUSLANDER, L., (1967). Differential Geometry. **A. Harper International Edition Harper Row**. New York.

ÇELEBİ, A. O., (1980). Diferensiyel Denklemler. **Milli Eğitim Basımevi**.İstanbul.

FLANDERS, H., (1963). Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. **Academis Press**. New York.

HACISALİHOĞLU, H.H., (1980). Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. **Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları**. Mat.No:2, İstanbul.

HACISALİHOĞLU, H.H., (1980). Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler. **İnönü Üniversitesi Temel Bil.Fak.Yayınları**. Mat.No:1, İstanbul.

HACISALİHOĞLU, H.H., (1982). Lineer Cebir. **Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları**. İstanbul

HACISALİHOĞLU, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri. **İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları**. Mat. No:2, İstanbul.

KOZ, İ., (1968). Düzlem ve Uzay Analitik Geometri. **Arı Kitabevi Matbaası**.İstanbul.

KOBAYSHI, S., NOMIZO, K., (1963). Foundations of Differential Geometry. Vol.I., Vol.II., **John Wiley Sons Inc.** LCCN:63-19209.

MÜLLER, H.R., (1963). Kinematik Dersleri. **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları**. Um.96-Mat.27. Ankara.