K. ÖZKAN MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ MUĞLA 2015

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Q-B SPLİNE İLE FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KADRİYE ÖZKAN

MAYIS 2015
MUĞLA

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Q-B SPLİNE İLE FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KADRİYE ÖZKAN

MAYIS 2015
MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

KADRİYE ÖZKAN tarafından hazırlanan **Q-B SPLİNE İLE FONKSİYONLARA YAKLAŞIM** başlıklı tezinin, 08/05/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Doç. Dr. Hasan BULUT **(Jüri Başkanı)** — İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Fırat Üniversitesi, Elazığ

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK **(Danışman)** — İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA **(Üye)** — İmza:

Matematik Ana Bilim Dalı,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. . Zeynep Fidan KOÇAK — İmza:

Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. . Zeynep Fidan KOÇAK — İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 08/05/2015

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Kadriye Özkan

04/06/2015

ÖZET

Q-B SPLİNE İLE FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Kadriye ÖZKAN

Yüksek Lisans Tezi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Prof.Dr.Zeynep Fidan KOÇAK
Mayıs 2015, 91 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak spline fonksiyonunun temel özellikleri ve çeşitleri incelendi. B-spline fonksiyonu tanıtıldı. q-integer noktaları ve q-integer noktalarında B-spline konuları açıklandı ve örneklendirildi. Son kısımda ise q-B spline ile fonksiyonlara yaklaşım açıklanarak örnek problemler çözülüp elde edilen yaklaşık çözümler ile gerçek çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : B-Spline Fonksiyonu, q-integer Noktaları, q-integer Noktalarında B-Spline Fonksiyonu,

ABSTRACT

APPROACH OF FUNCTIONS WITH Q-B SPLINE FUNCTIONS

Kadriye ÖZKAN

Masfer of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof.Dr.Zeynep Fidan KOÇAK

May 2015, 91 pages

In this study the basic properties and types of spline functions and B-spline function is introduced.Also q-integers and B-splines with knots at the q-integers are explanied and illustrated.In the last part approach of functions with q-B spline functions explained sample problems have solved and the obtained approximate solutions are compared with the exact solutions.

Keywords : Spline Funstion, q-integers, B-Spline Function,B-splines with knots at the q-integers

ÖNSÖZ

Düşünmekten çok ezberlemeye yönelten eğitim sistemleri, matematiğin birçok insan tarafından, anlaşılması güç, gereksiz, karmaşık işlemler yığını olarak görülmesine sebep olmakta. İnsanlar sadece anlayabildikleri şeyleri sevebilirler. Bu yüzden biz matematikçiler matematiğin ve matematiksel düşüncenin hayatın bir parçası olduğunu ön plana çıkararak insanların matematiğe bakış açısını değiştirmeliyiz. Genç bir matematikçi olarak insanların matematiğe bakış açısını kendi imkanlarım ölçüsünde değiştirmeye çalışıyorum. Bu amaç doğrultusunda başladığım çalışmamda B-spline fonksiyonlardan yararlanarak hata payını en aza indirgeyerek fonksiyonlara yeni bir yaklaşım teorisini incelemeye çalıştım .

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK'a , her zaman her konuda yanımda olan aileme teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Kadriye ÖZKAN

Muğla, 2015

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	: Her
$\exists$	: En az bir
R	: Reel Sayılar Kümesi
$B_{i(x)}^{n}$	: [t_i, t_{i+n+1}] aralığında tanımlı n.dereceden B-spline
S(x)	: i=0,1 … n olmak üzere [x_i, x_{i+1}] aralığında tanımlı spline fonksiyonu
C[a, b]	: [a, b] kapalı aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
[r]	: q > 0 ve r ∈N için q-integer noktası
[r] !	: q > 0 ve r ∈N için q-faktöriyel
$\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}$	: q-binom katsayıları
D_q	: q-türev operatörü

1. GİRİŞ

Yaklaşım yöntemleri Matematikte olduğu kadar Temel bilimlerin diğer alanlarında ve Mühendislikte yaygın olarak kullanılan önemli çözüm tekniklerindendir.

Yaklaşım yöntemleri içerisinde çalışması kolay olduğu için çoğunlukla polinom yaklaşımları tercih edilir. Tablo halinde verilen hassas sayısal değerler veya ayrık noktalardan oluşan grafikler için ara değerlerin bulunması işlemi interpolasyon olarak, verilen noktaların dışındaki değerlerin bulunması işlemi de extrapolasyon olarak adlandırılır. Ancak nokta sayısının artması birçok durumda çözümün ıraksaması anlamına gelir. Ayrıca istenilen fonksiyon [a,b] aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin; bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmez. Bunlar dikkate alındığında polinom interpolasyonu yerine başka tekniklere gerek olduğu anlaşılmaktadır (Anonim a.).

Belirli verilere uyan, bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümünde kullanılan Spline'lar konusunda ilk çalışma 1940'lı yıllarda Schoenberg tarafından ortaya konulmuştur. Spline fonksiyonları, uygun baza sahip sonlu boyutlu lineer uzayda düzgün fonksiyonlardır. Numerik analizde ve yaklaşım teorisinde spline fonksiyonları kullanılırken oluşan matrislerin işaret ve determinant özellikleri uygundur. Küçük dereceden spline'lar çok esnektir ve polinomlar ile elde edilen yaklaşımları sergilemezler (Dağ,1987).

Birçok durumda bir diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan özel çözüm eğrisi bilinmiyor ya da analitik yollarla çözmek mümkün olmayabilir. Bu durumda bilinmeyen fonksiyon değerlerini, çözümün var olduğu aralığı parçalara bölerek, her bir parçada ikinci, üçüncü ya da daha yüksek dereceden polinom yaklaşımı yapmak suretiyle yaklaşık olarak hesap edilir. Her bir aralıkta değişik fonksiyonlara yaklaşımın yapıldığı bu tür interpolasyona Spline interpolasyonu denir (Özdemir,1996).

Bu çalışmada veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek, her bir aralıkta daha küçük dereceden polinomlara yaklaşım yapma esasına dayanan ve birçok özelliğe sahip spline fonksiyonlar tanıtılacaktır. Daha sonra lineer, kuadratik, kübik B-spline'lar tanıtılıp q-integer tanımı ve özellikleri verilerek q-integer noktalarında B-spline fonksiyonları tanımlanarak özellikleri incelenecektir. Son olarak da hata payı oldukça düşük olan bir yaklaşım yöntemi olan q-B spline ile fonksiyonlara yaklaşım yöntemi incelenecektir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Spline Fonksiyonları

Tanım 2.1

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

noktaları üzerinde tanımlanan ve aşağıdaki iki özelliği sağlayan $n \geq 1$ olmak üzere n. Dereceden S(x) fonksiyonuna spline fonksiyonu denir.

(i) S(x), $[x_i, x_{i+1}]$ de en fazla n. dereceden polinomdur.

(ii) $S(x) \in C^{n+1} [a,b]$

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi spline fonksiyonları; kendisi ve türevlerinin sürekliliği ile ilgili bazı özel koşulları sağlayan en fazla n. dereceden parçalı değerli polinomlardır (Philips, 2003).

Yukarıdaki koşulları daha ayrıntılı yazacak olursak;

(i) Spline fonksiyonları, tanımlandıkları her bir düğüm noktalarında fonksiyon ile aynı değerleri alırlar;

$$S_i (x_i) = f(x_i) \; ; \quad i = 0,1,\ldots,n$$

(ii) Spline fonksiyonları iç noktalarda süreklidir.

$$S_i (x_{i+1}) = S_{i+1} (x_{i+1}) \; ; \; i = 0,1,...n-2$$

(iii) Spline fonksiyonunun ardışık türevleri ;

$$S_i' (x_{i+1}) \quad = S_{i+1}' (x_{i+1})$$

$$S_i'' (x_{i+1}) \quad = S_{i+1}'' (x_{i+1})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_i^{(n-1)} (x_{i+1}) = S_{i+1}^{(n-1)} (x_{i+1}) \; ; \; i = 0,1,\ldots n-2$$

iç noktalarda süreklidir.

Şimdi ise spline fonksiyonların genel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

1- Spline fonksiyonlar, uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.

2- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.

3- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.

4- Yaklaşık teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması ile doğal matrisler ortaya çıkar ve bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.

5- Spline fonksiyonlar, elde ya da bilgisayarda yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlar (Dönmez, 2008).

2.1.1. Lineer (doğrusal) spline fonksiyonu

Veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek her bir aralıkta doğrusal fonksiyonlar kullanma esasına dayanan lineer spline interpolasyonu, spline interpolasyon türlerinin en basiti olup kullanım kolaylığı bakımından tercih edilir.

Lineer spline interpolasyonunda her bir alt aralık için seçilen fonksiyonlar

$$S_i(x) = a_i x + b_i \; , \; i = 0,1,\ldots,(n-1)$$

şeklindedir. Burada n tane fonksiyon olup her bir fonksiyonda da 2 bilinmeyen katsayı mevcut olduğundan toplam 2n tane bilinmeyen katsayı vardır. Öyleyse bu katsayıları hesaplayabilmemiz için 2n tane denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri ise aşağıdaki kabuller sonucunda elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarda fonksiyon ile aynı değeri almalıdır.

Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,(n-1)$$

ii. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $\qquad i = 0,1,\ldots,(n-2)$

iii. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$$S_0(x_0) = y_0 \,, \qquad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

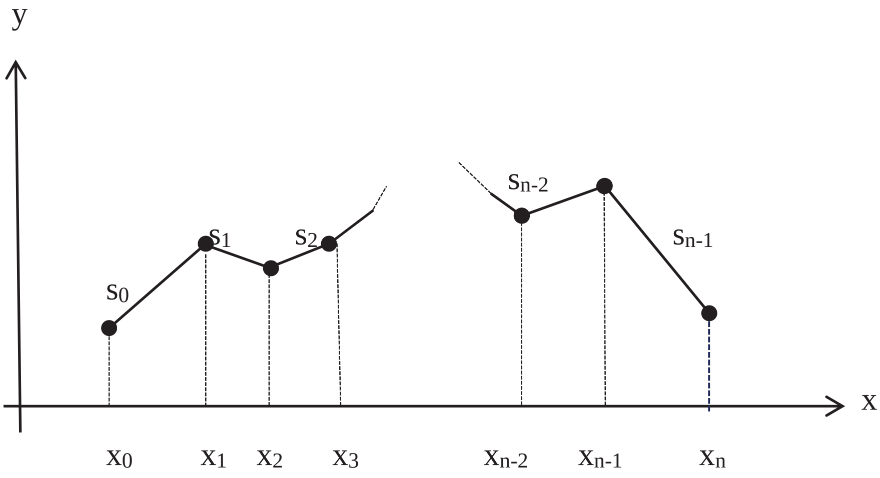
Böylece i. Koşuldan n – 1, ii. Koşuldan n – 1 ve son olarak iii. koşuldan 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n - 1) + (n - 1) + 2 = 2n$$

tane denklem elde edilmiş olur. Bu denklemler kullanılarak katsayılar hesaplanır ve $S_i(x)$ spline polinomları elde edilir.

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + m_0(x - x_0) & , \quad x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + m_1(x - x_1) & , \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \qquad \vdots \\ y_{n-1} + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & , \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Lineer spline fonksiyonunu temsil eden grafik ve bu fonksiyonun parçalı değerli biçimde gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Lineer spline fonksiyonu grafiği

Örnek 2.1

x	1.0520	3.3560	4.5870	7.1250	9.2575
y	2.0030	1.2230	6.1120	5.6810	8.7015

Tablosu veriliyor. Lineer spline interpolasyonu yöntemi ile en uygun yaklaşımı yapalım ve y(5.0) değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

$$S_i(x) = y_i + m_i\,(x - x_i)\ ,\ \ i = 0,1,2,3$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$S_0(x) = y_0 + m_0\,(x - x_0) = 2{,}0030 + \frac{1.2230 - 2.0030}{3.3560 - 1.0520}\,(x - 1.0520)$$

$$= 2.0030 - 0.338541(x - 1.0520)$$

$$= -0.338541x + 2.359145$$

$$S_1(x) = y_1 + m_1\,(x - x_1) = 1.2230 + \frac{6.1120 - 1.2230}{4.5870 - 3.3560}\,(x - 3.3560)$$

$= 1.2230 – 3.971567(x – 3.3560)$

$= -3.971567x + 12.105578$

$S_2(x) = y_2 + m_2 (x – x_2) = 6.1120 + \frac{5.6810 - 6.1120}{7.1250 - 4.5870} (x – 4.5870)$

$= 6.1120 – 0.169818(x – 4.5870)$

$= -0.169818x + 6.890955$

$S_3(x) = y_3 + m_3 (x – x_3) = 5.6810 + \frac{8.7015 - 5.6810}{9.2575 - 7.1250} (x – 7.1250)$

$= 5.6810 – 1.416412(x – 7.1250)$

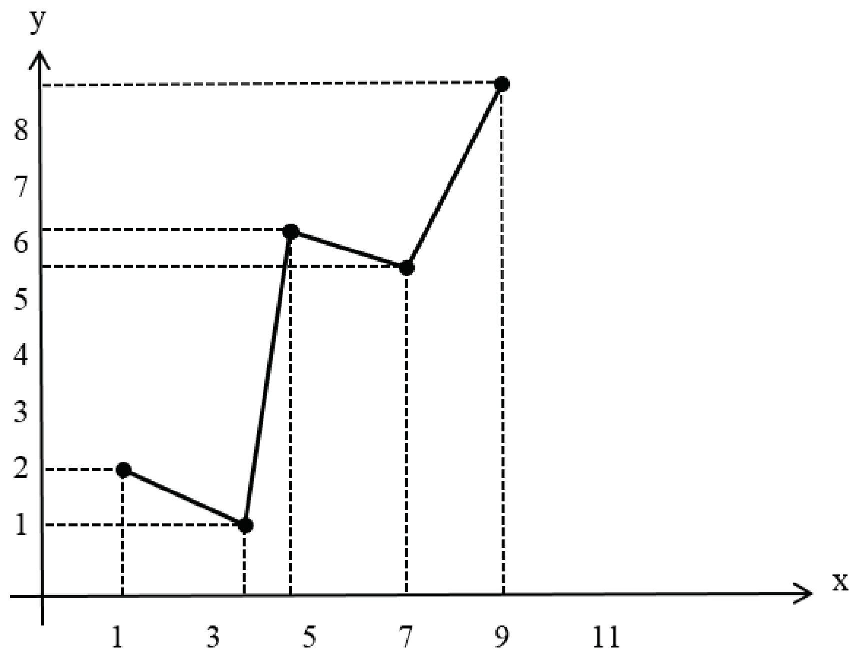
$= 1.416412x – 4.410935$

olarak hesaplanır.

Buna göre

$$S(x) = \begin{cases} -0.338541x + 2.358145, & x \epsilon\, [1.0520, 3.3560] \\ 3.971567x - 12.105578, & x \epsilon\, [3.3560, 4.5870] \\ -0.169818x + 6.890955, & x\ \epsilon\, [4.5870, 7.1250] \\ 1.416412x - 4.410935 & x \epsilon\, [7.1250, 9.2575] \end{cases}$$

şeklinde yazılır ve grafiği aşağıdaki gibidir;



Şekil 2.2 Örnek 2.1 için lineer spline grafiği

O halde

$$y(5.0) \cong S_2(5.0) \quad = -0.169818(5.0) + 6.890955 = 6.0419$$

olarak hesaplanır. Bu problemi aşağıdaki Matlab programındaki adımları uygulayarak çözersek,

```
>>x = [1.0520  3.3560  4.5870  7.1250  9.2575] ;

>>y = [2.0030  1.2230  6.6810  5.6810  8.7015] ;

>> lineer spline (x,y,5)

ans =6.0419
```

olduğu görülür.

2.1.2. Kuadratik spline fonksiyonu

Bu spline türünde her bir alt aralık için seçilen polinomlar,

$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$, $i = 0,1,\ldots,(n-1)$ şeklindedir.

Burada n tane fonksiyon olup her bir fonksiyonda 3 bilinmeyen katsayı mevcuttur.Bunları hesaplayabilmemiz için 3n tane denklem elde edilmelidir

Bu denklemleri ise aşağıdaki spline özellikleri kullanarak elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarda fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$S_i(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\ldots,(n-1)$

ii. $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,(n-2)$

iii. $S_i(x)$ spline polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

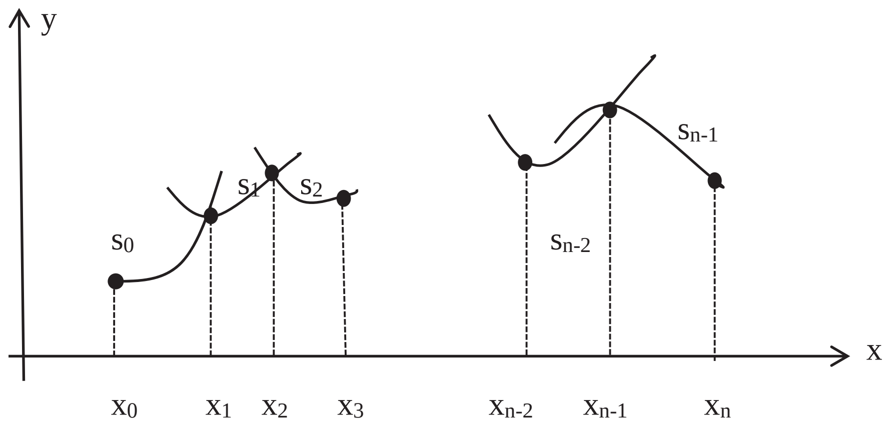
$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,(n-2)$

iv. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$S_0(x_0) = y_0$, $S_{n-1}(x_n) = y_n$

Yukarıdaki denklemlerden $(n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 3n - 1$ tane denklem elde edilmiş olur. O halde 1 denkleme daha ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemi de ilk noktada ikinci türevin sıfır olduğu $S_0''(x_0)$, yani $S_0(x)$ polinomunun bir doğru parçası olduğu koşulunu koyarak elde ederiz. Bu da

$a_0 = 0$ olması ile eşdeğerdir. Bu şekilde elde edilen kuadratik spline fonksiyonuna natural (doğal) kuadratik spline fonksiyonu denir.



Şekil 2.3 Kuadratik Spline Fonksiyonu Grafiği

Örnek 2.2

x	1.0520	3.3560	4.5870	7.1250	9.2575
y	2.0030	1.2230	6.1120	5.6810	8.7015

tablosu veriliyor. Kuadratik spline interpolasyonu yöntemi ile en uygun yaklaşımı yapalım ve y(5.0) değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Nokta sayımız 5 olduğundan aralık sayımız 5 – 1 = 4 olacaktır. Bu yüzden kuadratik spline polinomları

$$S_i(x) \quad = a_i x^2 + b_i x + c_i, \qquad i = 0,1,2,3$$

şeklinde olacaktır. O halde, i. koşuldan,

$$S_1(x_1) \quad = a_1(x_1)^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1$$

$$= a_1(3.3560)^2 + b_1(3.3560) + c_1 = 1.2230$$

$S_2(x_2) \quad = a_2(x_2)^2 + b_2x_2+c_2 = y_2$

$= a_2(4.5870)^2 + b_2(4.5870) + c_2 = 6.120$

$S_3(x_3) \quad = a_3(x_3)^2 + b_3x_3+c_3 = y_3$

$= a_3(7.1250)^2 + b_3(7.1250) + c_3 = 5.6810$

Bulunur. ii. Koşuldan,

$S_0(x_1) \quad = S_1(x_1) \rightarrow a_0(x_1)^2 + b_0(x_1) + c_0 \qquad = a_1(x_1)^2 + b_1(x_1) + c_1$

$= 1.2230$

$S_1(x_2) \quad = S_2(x_2) \rightarrow a_1(x_2)^2 + b_1(x_2) + c_1 \qquad = a_2(x_2)^2 + b_2(x_2) + c_2$

$= 6.1120$

$S_2(x_3) \quad = S_3(x_3) \rightarrow a_2(x_3)^2 + b_2(x_3) + c_2 \qquad = a_3(x_3)^2 + b_3(x_3) + c_3$

$= 5.6810$

bulunur. iii. koşuldan

$S_0'(x_1) \quad = S_1'(x_1) \rightarrow 2a_0(x_1) + b_0= 2a_1(x_1) + b_1$

$2a_0(3.3560) + b_0 \quad = 2a_1(3.3560) + b_1$

$S_1'(x_2) \quad = S_2'(x_2) \rightarrow 2a_1(x_2) + b_1= 2a_2(x_2) + b_2$

$2a_1(4.5870) + b_1 \quad = 2a_2(4.5870) + b_2$

$S_2'(x_3) \quad = S_3'(x_3) \rightarrow 2a_2(x_2) + b_2= 2a_3(x_3) + b_3$

$2a_2(7.1250) + b_2 \quad = 2a_2(7.1250) + b_3$

bulunur. iv. koşuldan

$S_0(x_0) \quad = a_0(1.0520)^2 + b_0(1.0520) + c_0 = 2.0030$

$S_3(x_4) \quad = a_3(9.2575)^2 + b_3(9.2575) + c_3 = 8.7015$ olarak bulunur.

Son olarak da $a_0 = 0$ alınmasıyla ;

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & x_1^2 & x_1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & x_2^2 & x_2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_2^2 & x_2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_3^2 & x_3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_3^2 & x_3 & 1.0 \\ x_0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_4^2 & x_4 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & -2x_1 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2x_2 & 1.0 & 0.0 & -2x_2 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2x_3 & 1.0 & 0.0 & -2x_3 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$1x = \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1.2230 \\ 1.2230 \\ 6.1120 \\ 6.1120 \\ 5.6810 \\ 5.6810 \\ 2.0030 \\ 8.7015 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$Ax = B$

Denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

a_0 = 0.0 a_1 = 3.5013074 a_2 = 3.3299826 a_3 = 4.7070234

b_0 = -0.3385416 b_1 = -23.8393174 b_2 = 38.8309385 b_3 = -75.6963989

c_0 = 2.3591458 c_1 = 41.7934475 c_2 = -101.9407846 c_3 = 306.0628553

olarak bulunur.

O halde bu katsayılar kullanılarak S(x) kuadratik spline fonksiyonu,

$$S(x)=\begin{cases} -0.338541x + 2.358145 & , \ x\epsilon\,[1.0520, 3.3560] \\ 3.5013074x^2 - 23.8393174x + 41.7934475 & , \ x\epsilon[3.3560, 4.5870] \\ -3.3299826x^2 + 38.8309385x - 101.9407876 & , \ x\epsilon\,[4.5870, 7.1250] \\ 4.7070234x^2 - 75.6963989x + 306.0628553 & , \ x\epsilon[7.1250, 9.2575] \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

Buradan da,

$$y(5.0) \cong S_2(5.0) = -3.3299826(5.0)^2 + 38.8309385(5.0) - 101.9407846$$

$$= 8.9643$$

olarak bulunur. Bu problem için Matlab programı kullanılarak da,

```
>>x = [1.0520  3.3560  4.5870  7.1250  9.2575] ;

>>y = [2.0030  1.2230  6.6810  5.6810  8.7015] ;

>> kuadratik spline (x,y,5)

ans =8.9643
```

y(5.0) değeri elde edilir.

2.1.3. Kübik spline fonksiyonu

Kübik spline fonksiyonunda her bir alt aralık için seçilen polinomlar,

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \qquad i = 0,1,\ldots,(n-1) \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada n tane polinom olup her bir polinomda da 4 bilinmeyen katsayı mevcut olduğundan toplam 4n tane bilinmeyen katsayı vardır. Öyleyse bu katsayıları hesaplayabilmemiz için 4n tane denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri ise aşağıdaki spline özellikleri kullanarak elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarda fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,(n-1)$$

ii. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0,1,\ldots,(n-2)$$

iii. Si(x) polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0,1,\ldots,(n-2)$$

iv. $S_i(x)$ polinomlarının ikinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0,1,\ldots,(n-2)$$

v. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$$S_0(x_0) = y_0 \quad , \quad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

Böylece i. özellikten n – 1, ii. özellikten n – 1, iii. özellikten n – 1 iv. özellikten n – 1 ve son olarak v. özellikten 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 4n - 2$$

tane denklem elde edilmiş olur. O halde 2 denkleme daha ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemi de aşağıdaki koşuldan elde ederiz.

vi. Uç noktalarda ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. Yani,

$$S_0''(x_0) = 0 \qquad , \qquad S_{n-1}''(x_n) = 0$$

Bu son koşulu sağlayan kübik spline fonksiyonlara natural (doğal) kübik spline fonksiyonları denir.

Şimdi kübik spline fonksiyonlarının nasıl elde edileceklerini iki farklı yolla görelim;

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

noktaları verilsin. $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında,

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \; ; \; i = 0,1,\ldots, n-1 \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan $S_i(x)$ fonksiyonları (x_i, y_i) ve (x_{i+1}, y_{i+1}) noktalarından geçeceğinden $x = x_i$ alırız. O halde

$$S_i(x_i) = d_i$$

olur. Diğer taraftan $S_i(x)$ fonksiyonları iç noktalarda sürekli olduğundan

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = \quad d_{i+1} = S_i(x_{i+1})$$

$$d_{i+1} = d_i + c_i(x_{i+1} - x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + a_i(x_{i+1} - x_i)^3$$

olarak elde edilen denklemde $x_{i+1} - x_i = h_i$ ifadesi yerine yazılırsa

$$d_{i+1} = d_i + c_i h_i + b_i h_i^2 + a_i h_i^3 \quad , \quad i = 0,1,\ldots, n-1 \qquad (2.3)$$

bulunur.

(2.2) denkleminin birinci mertebeden türevi alındığında

$$s_i'(x) = c_i + 2b_i(x - x_i) + 3a_i(x - x_i)^2$$

şeklinde oluşan denklemde $x = x_i$ koyarsak

$$s_i'(x_i) = c_i$$

bulunur. $s_i'(x)$ fonksiyonu iç noktalarda sürekli olduğundan

$$s_{i+1}'(x_{i+1}) = c_{i+1} = s_i'(x_{i+1})$$

$$c_{i+1} = c_i + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + 3a_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$c_{i+1} = c_i + 2b_ih_i + 3a_ih_i^2 \qquad (2.4)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2) denkleminin ikinci mertebeden türevi alındığında

$$s_i''(x) = 2b_i + 6a_i(x - x_i)$$

elde edilir. Burada $x = x_i$ koyarsak

$$s_i''(x_i) = 2b_i$$

ve

$$b_i = \frac{s_i''(x_i)}{2}$$

bulunur. $s_i''(x_i)$ fonksiyonları iç noktalarda sürekli olduğundan

$$\frac{s_{i+1}''(x_{i+1})}{2} = b_{i+1} = \frac{s_i''(x_{i+1})}{2}$$

$$b_{i+1} = \frac{2b_i + 6a_i(x_{i+1} - x_i)}{2} = b_i + 3a_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$b_{i+1} = b_i + 3a_ih_i \qquad (2.5)$$

elde edilir.

$$b_i = b_{i+1} + 3a_ih_i \tag{2.6}$$

yazılıp (2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$d_{i+1} = d_i + c_ih_i + b_ih_i^2 + h_i^2$$

$$= d_i + c_ih_i + (b_{i+1} - 3a_ih_i)h_i^2 + a_ih_i^3$$

$$= d_i + c_ih_i + b_{i+1}h_i^2 - 2a_ih_i^3$$

$$= d_i + c_ih_i - (2a_ih_i^3 - b_{i+1}\, h_i^2) \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.3) denkleminden elde edilen

$$a_ih_i^3 = d_{i+1} - d_i - c_ih_i - b_ih_i^2$$

ifadesi (2.7) da yerine konulduğunda

$$d_{i+1} = d_i + c_ih_i - (2(d_{i+1} - d_i - c_ih_i - b_ih_i^2) - b_{i+1}\, h_i^2)$$

$$d_{i+1} = d_i + c_ih_i - 2d_{i+1} + 2d_i + 2c_ih_i + 2b_ih_i^2 + b_{i+1}\, h_i^2$$

$$3d_{i+1} = 3d_i + 3c_ih_i + h_i^2(2b_i + b_{i+1})$$

$$d_{i+1} = d_i + c_ih_i + \frac{h_i^2}{3}(2b_i + b_{i+1}) \tag{2.8}$$

bulunur. (2.6) ifadesi (2.4) da yerine yazılırsa

$$c_{i+1} = c_i + 2b_{i+1}h_i - 6a_ih_i^2 + 3a_ih_i^2$$

$$c_{i+1} = c_i + 2b_{i+1}h_i - 3a_ih_i^2$$

$$3a_ih_i^2 = -c_{i+1} + c_i + 2b_{i+1}h_i \tag{2.9}$$

bulunur. (2.4) denkleminde son ifadeyi yerine koyduğumuzda

$$c_{i+1} = c_i + 2b_{i+1}h_i - 2c_{i+1} + c_i + 2b_ih_i$$

$$2c_{i+1} = 2c_i + 2h_i(b_{i+1}+b_i)$$

$$c_{i+1} = c_i + h_i(b_i + b_{i+1}) \tag{2.10}$$

bulunur. (2.8) denkleminde c_i'yi çektiğimizde

$$c_i = \frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{h_i}{3}(2b_i + b_{i+1}) \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu denklemde i yerine i – 1 alındığında

$$c_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2b_{i-2} + b_{i+1}) \tag{2.12}$$

olacaktır. (2.12) denkleminde i yerine i – 1 yazarsak

$$c_i = c_{i-1} + h_{i-1}(b_{i-1} + b_i)$$

elde edilir. Son denklemde c_i yerine (2.11), c_{i-1} yerine (2.12) denklemi yazıldığında

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{h_i}{3}(2b_i+b_{i+1}) = \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2b_{i-1}+b_i) + h_{i-1}(b_{i-1}+b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2b_i+b_{i+1}) + h_{i-1}(-\frac{2}{3}b_{i-1} - \frac{1}{3}b_i + b_{i-1}+b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2b_i+b_{i+1}) + h_{i-1}(-\frac{1}{3}b_{i-1} - \frac{2}{3}b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{1}{3}(2b_ih_i + b_{i+1}h_i + h_{i-1}b_{i-1} + 2b_ih_{i-1})$$

$$h_{i-1}b_{i-1} + 2b_i(h_i + h_{i-1}) + h_ib_{i+1}) = \frac{3}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1})$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$b_i = \frac{S_i^n(x_i)}{2}$, $b_{i+1} = \frac{S_{i+1}^n(x_{i+1})}{2}$, $b_{i-1} = \frac{S_{i-1}^n(x_{i-1})}{2}$

$d_i = S_i(x_i)$, $d_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1})$, $d_{i-1} = S_{i-1}(x_{i-1})$

eşitlikleri kullanılarak ikinci mertebeden türev cinsinden yazılırsa

$$\frac{1}{2} S''(x_{i-1}) + \frac{2}{2} S''(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) + \frac{1}{2} S''(x_{i+1})$$

$$= \frac{3}{(x_{i+1} - x_i)} [s(x_{i+1} - s(x_i)] - \frac{3}{(x_i - x_{i-1})} [s(x_i - s(x_{i-1})]$$

bulunur ve buradan i = 1,…,n – 1 için

$$S''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)S^n(x_{i+1})$$

$$= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [s(x_{i+1} - s(x_i)] - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [s(x_i - s(x_{i-1})] \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir (Doğan, 2008).

Bu denklemi “Lagrange İnterpolasyon Formülünü” kullanarak da elde edebiliriz. Herhangi bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $S_i(x)$ fonksiyonu üçüncü dereceden olduğundan ikinci türevinin doğrusallığından Lagrange İnterpolasyon Formülüne göre;

$$s_i''(x) = S_i''(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + s_i''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

şeklindedir.

$m_i = S''(x_i)$

$m_{i+1} = S''(x_{i+1})$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

$i=0,1,\ldots n-1$ için bu ifadeler denklemde yerine yazılırsa;

$$S_1''(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i) \text{ elde edilir.}$$

$x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ve $i=0,1,\ldots.n-1$ olmak üzere iki kez integral alınarak c_i ve d_i katsayıları integrasyon sabitleri olmak üzere;

$$S_i'(x) = \frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x)$$

$$\mathrm{S_i(x)} = \frac{\mathrm{m_i}}{6\mathrm{h_i}}(\mathrm{x_{i+1}} - \mathrm{x})^3 + \frac{\mathrm{m_{i+1}}}{6\mathrm{h_i}}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})^3 + \mathrm{c_i}(\mathrm{x_{i+1}} - \mathrm{x}) + \mathrm{d_i}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) \qquad (2.14)$$

bulunur. S(x) in sürekli yapılması ve interpolasyon koşullarının sağlanması için

$y_i = S_i(x_i)$

$y_{i+1} = S_i(x_{i+1})$

ifadeleri (2.14) denkleminde yerine yazılırsa;

$$S_i(x_i) = \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$y_i = \frac{m_i}{6}h_i^2 + c_i h_i \qquad (2.15)$$

bulunur.

(2.15) de i yerine i+1 alındığında

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + d_i(x_{i+1} - x_i) \qquad (2.16)$$

$$y_{i+1} = \frac{m_{i+1}}{6}h_i^2 + d_i h_i \qquad (2.17)$$

elde edilir.

$0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere (2.15) ve (2.16) denkleminde c_i ve d_i ler çekilip (2.14) denkleminde yerine yazılırsa;

$$S_i(x) = \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 +$$

$$+\left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i}{6h_i}h_i\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}}{6}h_i\right)(x - x_i) \tag{2.18}$$

olur. Bu denklemi düzenlediğimizde;

$$S_i(x) = \frac{S''(x_i)}{6(x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''(x_{i+1})}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 +$$

$$+\left[\frac{S(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S''(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{6}\right](x_{i+1} - x)$$

$$+\left[\frac{S(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S''(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{6}\right](x - x_i) \tag{2.19}$$

sonucuna elde edilir.. (2.19) de tanımlandığı gibi $S_i(x)$, c_i ve d_i olan integrasyon katsayılarının düzenlenmesi ile x_i ve x_{i+1} ile aynı değere sahip olacak şekilde belirlenir. Bu düzenleme her $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında bağımsız olarak yapıldığından $S_i''(x_i) = S_i''(x_i)$, i=1,….,n-1 bağıntısını garantilemez. Yani $S_i^n(x)$ sürekli olmayabilir.(2.18) denkleminin türevi;

$$S_i'(x) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 -$$

$$\left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6}\right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6}\right) \tag{2.20}$$

olup kübik spline olma koşullarının sağlanması için son koşul [a,b] nin iç noktalarında $S_i'(x)$i sürekli yapmaktır. (2.20) denkleminde $S_i'(x_i) = S_i'(x_{i+1})$ i=1,….,n-1 bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen m_i, $1 \leq i \leq n-1$ değerleri ile $S_i'(x)$ sürekli yapılabilir. Böylece n+1 bilinmeyenli n-1 denklem sistemi elde edilir.

(2.20) de x yerine x_i yazıldığında;

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x_i)^2 - \frac{y_i}{h_i} + \frac{m_i h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6}$$

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i h_i^2}{2h_i} + \frac{m_i h_i}{6} + \frac{m_{i+1} h_i}{6} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_{i-1} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} + p_k \tag{2.21}$$

(2.17) denkleminde i yerine i-1, x yerine x_i konulduğunda;

$$S_{i-1}'(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_{i-1} - \frac{m_{i+1}}{6} h_{i-1} + p_{k-1} \tag{2.22}$$

bulunur ve

$$S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i) \tag{2.23}$$

eşitliğinden $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere (2.21) ve (2.22) birbirine eşit olduğu görülür ki burdan;

$$\frac{m_i h_i}{3} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} + p_k = \frac{m_i h_{i-1}}{3} - \frac{m_{i-1} h_{i-1}}{6} + P_{k-1}$$

$$-2m_i h_i - m_{i+1} h_i - 2m_i h_{i-1} + m_{i-1} h_{i-1} = 6(P_{k-1} - P_k)$$

$$h_{i+1} m_{i-1} + 2m_i(-h_{i-1} - h_i) + h_i m_{i+1} = 6\left[\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) - \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)\right]$$

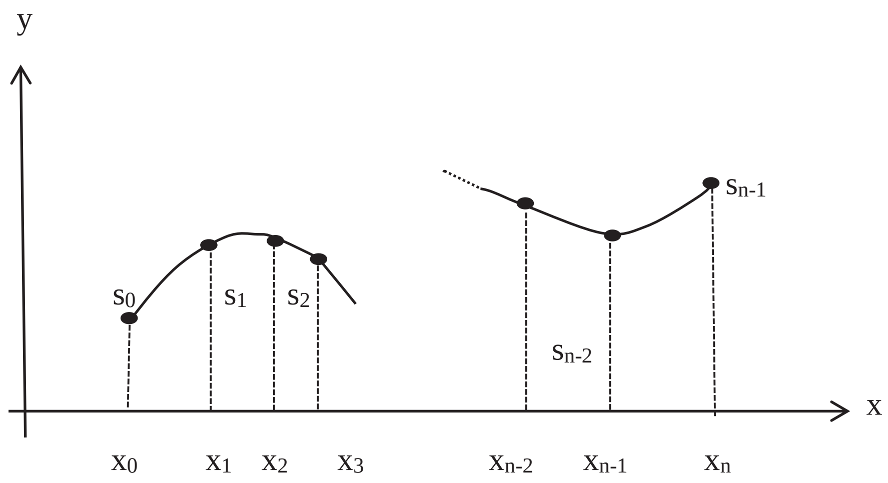
$$(x_i - x_{i-1}) S''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i) S''(x_{i+1})$$

$$= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i} [S(x_{i+1}) - S(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [S(x_{i-1}) - S(x_i)] \tag{2.24}$$

elde edilir. (Albasiny and Hoskins, 1968; Koçak, 2001).

(2.24) ve (2.13) eşitliliklerinin aynı olduğu görülmektedir.

Kübik spline fonksiyonu temsil eden grafik ve bu fonksiyonun parçalı değerli biçimde gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.4 Kübik Spline Fonksiyon Grafiği

Örnek 2.1.3

x	3.0	4.5	7.0	9.0
y	2.5	1.0	2.5	0.5

tablosu veriliyor. Buna göre kübik spline fonksiyonlarını elde edelim. (2.24) denkleminde i=1 alalım;

$$(x_1 - x_0)\, S''(x_0) + 2(x_2 - x_0)\, S''(x_1) + (x_2 - x_1)\, S''(x_2) =$$

$$= \frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_2) - S(x_1)] + \frac{6}{(x_1 - x_0)}[S(x_0) - S(x_1)]$$

$$(4.5\text{-}3.0)\, S''(3) + 2(7\text{-}3)\, S''(4.5) + (7\text{-}4.5)\, S''(7) =$$

$$= \frac{6}{(7-4.5)}(2.5-1) + \frac{6}{(4.5-3)}(2.5-1)$$

$$8S''(4.5) + 2.5S''(7) = 9.6$$

(2.24) denkleminde i = 2 alalım;

$(x_2 - x_1)\, S''(x_1) + 2(x_3 - x_1)\, S''(x_2) + (x_3 - x_2)\, S''(x_3) =$

$$= \frac{6}{(x_3 - x_2)}[S(x_3) - S(x_2)] + \frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_1) - S(x_2)]$$

$(7\text{-}4.5)\, S''(4.5) + 2(9\text{-}4.5)\, S''(7) + (9\text{-}7)\, S''(9) =$

$$= \frac{6}{(9-7)}(0.5 - 2.5) + \frac{6}{(7-4.5)}(1 - 2.5)$$

$2.5S''(4.5) + 9S''(7) = 9.6$

bulunur. Böylece elde edilen

$8S''(4.5) + 2.5S''(7) = 9.6$

$2.5S''(4.5) + 9S''(7) = 9.6$

sistemi çözülerek

$S''(4.5) = 1.6791 \quad S''(7) = 1.5331$

bulunur. (2.19) denkleminden

$$S_1(x) = \frac{S''(4.5)}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \frac{2.5}{4.5-3}(4.5-x) +$$

$$+ \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{S''(4.5)(4.5-3)}{6}\right](x-3)$$

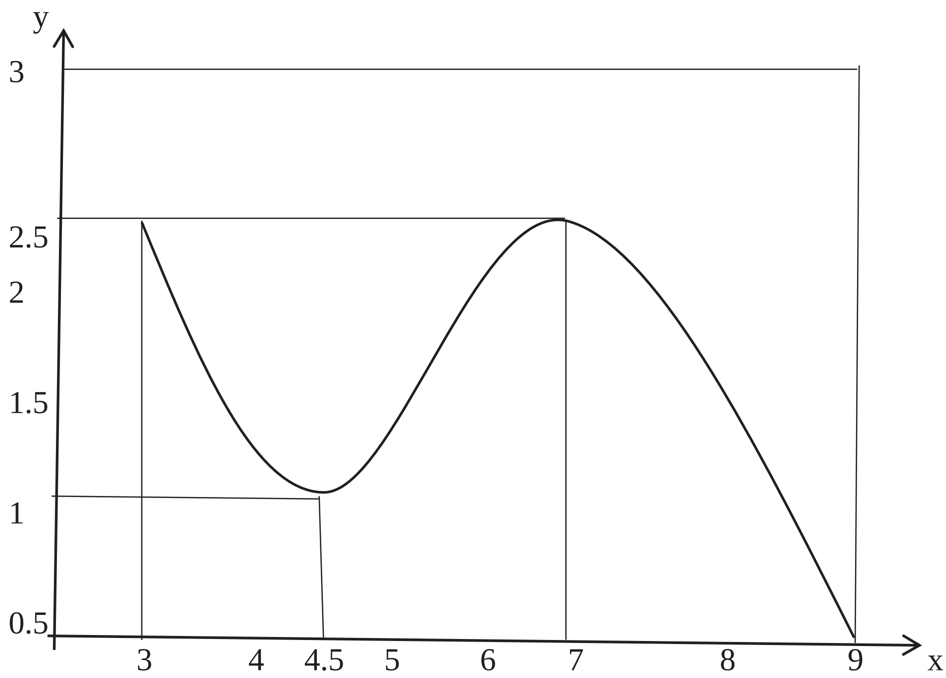
elde edilir. Buradan

$S_1(x) = 0.19(x - 3)^3 + 1.66(4.5 - x) + 0.25(x - 3);\ 3 \le x \le 4.5$

$S_2(x) = 0.112(7 - x)^3 - 0.102(x - 4.5)^3 - 0.30(7 - x) + 1.64(x - 4.5);\ 4.5 \le x \le 7$

$S_3(x) = 0.128(9 - x)^3 - 1.76(9 - x) + 0.25(x - 7);\ 7 \le x \le 9$

kübik spline yaklaşımı oluşur (Bayram, 2002).



Şekil 2.5 Örnek 2.3 için kübik spline fonksiyon grafiği

2.2. B-Spline Fonksiyonları

Günümüz dünyasında yaşanan büyük gelişmelerden sonra, bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunan B-spline fonksiyonlar, geometrik modelleme, bilgisayar çizimleri ve daha başka birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir.

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda, düğüm olarak adlandırılan noktalarda birbirlerine bağlı, polinom eğri parçalarından oluşan B-spline fonksiyonları yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternatif olarak karşımıza çıkar.

2.2.1. B-spline fonksiyonların türetilmesi

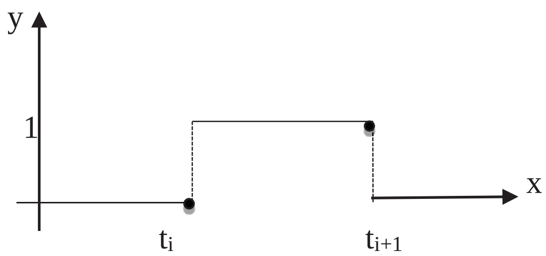
Tanım 2.2.1 Sıfırıncı dereceden B-Spline

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 \ ; & t_i < x \leq t_{i+1} \\ 0 \ ; & \text{diğer} \end{cases} \tag{2.25}$$

ve n >0 olmak üzere n'inci dereceden B-Spline, n-1 inci dereceden B-spline fonksiyonları ile

$$B_i^n(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+n}-t_i}\right) B_i^{n-1}(x) + \left(\frac{t_{i+n+1}-x}{t_{i+n+1}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{n-1}(x) \tag{2.26}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $-\infty < i < \infty$ dur (Koçak and Philips, 1996).



Şekil 2.6. $B_i^0(x)$ B-spline grafiği

Teorem 2.2.1 [t_i, t_{i+n+1}] aralığında tanımlanan B_i^n B-spline fonksiyonu bu aralıkta pozitiftir.

İspat:

n üzerinden tümevarım ile ispatlayacak olursak;

n = 0 için;

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & (t_i, t_{i+1}] \\ 0, & diğer \end{cases}$$

tanımda da görüldüğü gibi n=0 için $B_i^0(x)$ ifadesi pozitiftir.

n = a için;

$$B_i^a(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+a}-t_i}\right) B_i^{a-1}(x) + \left(\frac{t_{i+a+1}-x}{t_{i+a+1}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{a-1}(x)$$

n= a için pozitif olduğunu kabul edelim.

n = a+1 için;

$$B_i^{a+1}(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+a+1}-t_i}\right) B_i^{a}(x) + \left(\frac{t_{i+a+2}-x}{t_{i+a+2}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{a}(x)$$

Burada $B_i^a(x)$ kabulden $[t_i, t_{i+a+1}]$ aralığında pozitiftir. $B_{i+1}^a(x)$ de kabulden $[t_i, t_{i+a+1}]$ aralığında pozitiftir. O halde $B_i^{a+1}(x)$'de bu aralıkta pozitiftir.

(2.26) eşitliğinde n=1 yazılırsa birinci dereceden (lineer) B-spline fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

(2.26) dan n = 1 için

$$B_i^1(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right) B_i^{0}(x) + \left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{0}(x)$$

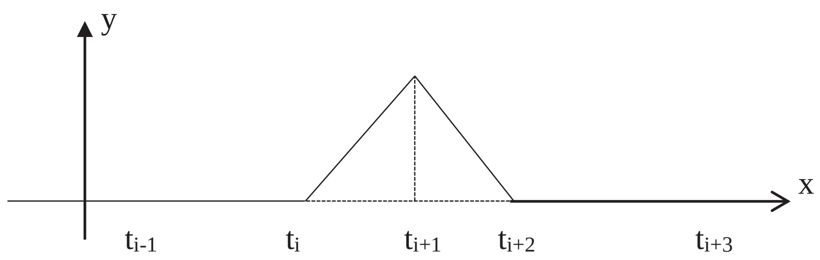
olur ve (2.25) den

$$B_{i+1}^0(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ t_{i+1} < x \le t_{i+2} \\ 0 \ ; \qquad \text{diğer} \end{cases}$$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} \ .1 + 0 & , \quad (t_i, t_{i+1}] \\ 0 + \dfrac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}} \ .1 & , \quad (t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} & ; \quad t_i < x \le t_{i+1} \\ \dfrac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}} & ; \quad t_{i+1} < x \le t_{i+2} \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir..



Şekil 2.7. $B_i^1(x)$ B-spline grafiği

(2.26) eşitliğinde n=2 yazılırsa ikinci dereceden (kuadratik) B-spline fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

(2.26) den n = 2 için

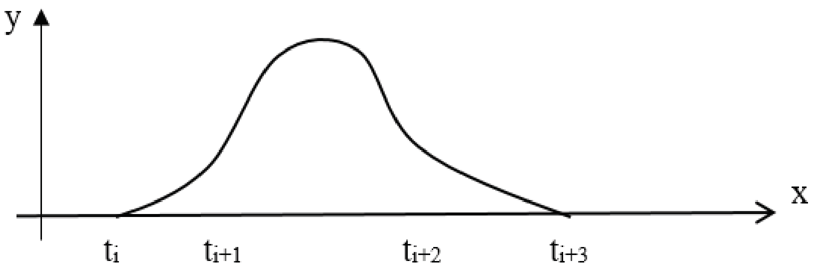
$$B_i^2(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right) B_i^1(x) + \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^1(x) \text{ olur.}$$

$$B_{i+1}^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-t_i+1}{t_{i+2}-t_{i+1}} & ; \quad t_{i+1} < x \le t_{i+2} \\ \dfrac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}} & ; \quad t_{i+2} < x \le t_{i+3} \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir.

$$B_i^2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+2}-t_i)} \cdot \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} + 0 & ; \quad (t_i,\ t_{i+1}] \\ \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+2}-t_i)} \cdot \dfrac{(t_{i+2}-x)}{(t_{i+2}-t_{i+1})} + \dfrac{(t_{i+3}-x)}{(t_{i+3}-t_{i+1})} \cdot \left(\dfrac{x-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right) & ; \quad (t_{i+1},\ t_{i+2}] \\ 0 + \left(\dfrac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\dfrac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) & ; \quad (t_{i+2},\ t_{i+3}] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$$B_i^2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+2}-t_i)} \cdot \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} & ; \quad (t_i,\ t_{i+1}] \\ \dfrac{(x-t_i)}{(t_{i+2}-t_i)} \cdot \dfrac{(t_{i+2}-x)}{(t_{i+2}-t_{i+1})} + \dfrac{(t_{i+3}-x)}{(t_{i+3}-t_{i+1})} \cdot \dfrac{(x-t_{i+1})}{t_{i+2}-t_{i+1}} & ; \quad (t_{i+1},\ t_{i+2}] \\ \left(\dfrac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\dfrac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) & ; \quad (t_{i+2},\ t_{i+3}] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$



Şekil 2.8. B_i^2**(x) B-spline grafiği**

Grafikte kolların aşağı veya yukarı doğru olmasının sebebi x’in işaretidir.

$[t_i,\ t_{i+1}]$ aralığında x’in işareti pozitif olduğu için kollar yukarı doğru, $[t_{i+1},\ t_{i+2}]$ aralığında x’in işareti negatif olduğu için kollar aşağıya doğru olur.

(2.26) eşitliğinde n=3 yazılırsa üçüncü dereceden (kübik) B-spline fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

(2.26)den n=3 için;

$$B_i^3(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right) B_i^2(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_4}\right) B_{i+1}^2(x)$$

$$B_{i+1}^2(x) = \left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^1(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+2}}\right) B_{i+2}^1(x)$$

$$B_{i+2}^1(x) = \left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) B_{i+2}^0(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+3}}\right) B_{i+3}^0(x)$$

ve

$$B_{i+2}^0(x) = \begin{cases} 1, & t_{i+2} < x \leq t_{i+3} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

$$B_{i+3}^0(x) = \begin{cases} 1, & t_{i+3} < x \leq t_{i+4} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

$$B_{i+1}^2(x) = \left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right) \left[\left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+4}}\right) B_{i+2}^0(x) + \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) B_{i+3}^0(x)\right]$$

$$+ \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+2}}\right) \left[\left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) B_{i+2}^0(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+3}}\right) B_{i+3}^0(x)\right]$$

ise,

$$B_i^3(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right)\left[\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)B_i^1(x) + \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)B_{i+3}^1(x)\right] + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_4}\right).$$

$$\left\{\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right).\left[\left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+4}}\right)B_{i+2}^0(x) + \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right)B_{i+3}^0(x)\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+2}}\right).\left[\left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right)B_{i+2}^0(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+3}}\right)B_{i+3}^0(x)\right]\right\}$$

$$B_i^3(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right) & ; \quad x \in (t_i,\ t_{i+1}] \\ \frac{(x-t_i)}{(t_{i+3}-t_i)}.\beta(x) + \alpha(x) & ; \quad x \in (t_{i+1},\ t_{i+2}] \\ \gamma(x) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_4}\right)\mu(x) & ; \quad x \in (t_{i+2},\ t_{i+3}] \\ \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_4}\right)\left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+3}}\right) & ; \quad x \in (t_{i+3},\ t_{i+4}] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

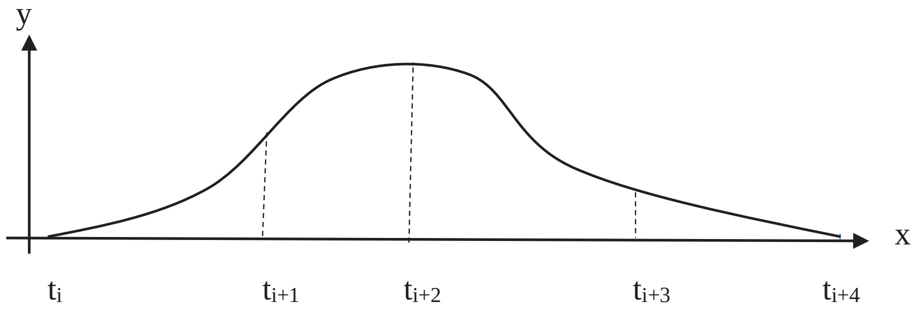
$$\beta\,(x) = \left[\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right).\left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right) + \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)\right]$$

$$\alpha\,(x) = \frac{(t_{i+4}-x)}{(t_{i+4}-t_4)}\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)$$

$$\gamma(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right)\left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right)$$

$$\mu(x) = \left[\left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right) + \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+2}}\right)\left(\frac{x-t_{i+2}}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right)\right]$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.9. $B_i^3(x)$ B-spline grafiği

Örnek 2.2.1

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_{i-1}^1(x) \quad ; t_0 \le x \le t_N \tag{2.27}$$

burada f, $[t_0, t_N]$ de tanımlı herhangi bir fonksiyondur.

S(x) in açılımını yazalım.

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_{i-1}^1(x)$$

$$S(x) = f(t_0)\ B_{-1}^1(x) + f(t_1)\ B_0^1(x) + f(t_2)\ B_1^1(x) + \ldots + f(t_i)\ B_{i-1}^1(x) + f(t_{i+1})\ B_i^1(x) + \ldots + f(t_N)\ B_{N-1}^1(x)$$

$[t_i, t_{i+1}]$ alt aralığında S(x) in B_{i-1}^1 ve B_i^1 terimleri dışındakiler sıfır olacağından

$$S_i(x) = f(t_i)\frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i} + f(t_{i+1})\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} \quad ; \quad t_i \le x \le t_{i+1} \tag{2.28}$$

elde edilir ve S(x) t_i ve t_{i+1} noktalarından geçeceğinden $x = t_i$ alınır.O zaman;

$$S_i(t_i) = f(t_i)\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_i} + f(t_{i+1})\frac{t_i-t_i}{t_{i+1}-t_i}$$

$$S_i(t_i) = f(t_i)$$

olur.

Aynı düşünce ile x = t_{i+1}

$$S_i(t_{i+1}) = f(t_i)\frac{t_{i+1}-t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i} + f(t_{i+1})\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_i}$$

olur ve böylece S'nin [t_i, t_{i+1}] aralığında lineer (doğrusal) olduğu bulunur.

Teorem 2.2.2

n ≥ 2 ve t_i, t_{i+1}, t_{i+n}, t_{i+n+1} noktaları dışında her x için

$$\frac{d}{d_x} B_i^n(x) = \left(\frac{n}{t_{i+n}-t_i}\right) B_i^{n-1}(x) + \left(\frac{n}{t_{i+n+1}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{n-1}(x) \qquad (2.29)$$

dır.

İspat: n üzerinden tümevarım uygularsak;

n = 1 için;

$$\frac{d}{dx} B_i^1(x) = \frac{n}{t_{i+n}-t_i} B_i^{n-1}(x) - \frac{n}{t_{i+1+n}-t_{i+1}} B_{i+n}^{n-1}(x)$$

ifadesi (2.25) ve lineer B-spline fonksiyonu tanımından doğrulanır.

n = k için;

$$\frac{d}{dx} = B_i^k(x) = \left(\frac{k}{t_{i+k}-t_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{k}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x)$$

doğru olduğunu kabul edelim.

n = k+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani;

$$\frac{d}{dx} B_i^{k+1}(x) = \left(\frac{k+1}{t_{i+k+1}-t_i}\right) B_i^k(x) + \left(\frac{k+1}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$B_i^{k+1}(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}\right) B_i^k(x) + \left(\frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^k(x)$$

$$\frac{d}{dx}B_i^{k+1}(x) = \frac{1}{t_{i+k+1}-t_i}B_i^k(x) + \frac{d}{d_x}B_i^k(x)\frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}$$

$$-\frac{1}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}B_{i+1}^k(x) + \frac{d}{d_x}B_{i+1}^k(x)\frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}$$

$$\frac{d}{dx}B_i^{k+1}(x) = \left(\frac{1}{t_{i+k+1}-t_i}\right)B_i^k(x) - \left(\frac{1}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^k(x)$$

$$+\left(\frac{\mathrm{x-t_i}}{\mathrm{t_{i+k+1}-t_i}}\right)\left[\frac{k}{t_{i+k}-t_i}.B_i^{k-1}(x) + \frac{k}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}.B_{i+1}^{k-1}(x)\right]$$

$$+\left(\frac{\mathrm{t_{i+k+2}}-x}{\mathrm{t_{i+k+2}-t_{i+1}}}\right)\left[\frac{k}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}.B_{i+1}^{k-1}(x) + \frac{k}{t_{i+k+2}-t_{i+2}}.B_{i+2}^{k-1}(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}B_i^{k+1}(x) = \frac{B_i^k}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{B_{i+1}^k}{t_{i+k+2}-t_{i+1}} + \mathrm{k.C(x)} \qquad (2.30)$$

$$\mathrm{C(x)} = \left(\frac{\mathrm{x-t_i}}{\mathrm{t_{i+k+1}-t_i}}\right).\frac{B_i^{k-1}}{t_{i+k}-t_i} - \underbrace{\left(\frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right)}_{\mathrm{D_{(x)}}}.\frac{B_{i+1}^{k-1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}$$

$$-\left(\frac{\mathrm{t_{i+k+2}-x}}{\mathrm{t_{i+k+2}-t_{i+1}}}\right).\frac{B_{i+2}^{k-1}}{t_{i+k+2}-t_{i+2}}$$

$$D(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+1}} =$$

$$\frac{t_i.t_{i+k+2}-t_i.t_{i+1}-x.t_{i+k+2}+x.t_{i+1}+t_{i+k+1}.t_{i+k+2}-t_i.t_{i+k+2}-x.t_{i+k+1}+x.t_i}{(t_{i+k+1}-t_i)(t_{i+k+2}-t_{i+1})}$$

Kesrin pay ve paydasına $t_{i+1}.t_{i+k+1}$ ifadesini ekleyip çıkararak paranteze alırsak;

$$\frac{t_{i+k+2}(t_{i+k+1}-x)+t_{i+1}(x-t_{i+k+1})-t_{i+k+1}(x-t_{i+1})+t_i(x-t_{i+1})}{(t_{i+k+1}-t_i)(t_{i+k+2}-t_{i+1})}$$

$$= \frac{(t_{i+k+2}-t_{i+1})(t_{i+k+1}-x)+(t_i-t_{i+k+1})(x-t_{i+1})}{(t_{i+k+1}-t_i)(t_{i+k+2}-t_{i+1})}$$

$$= \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}$$

$$C(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}\right).\frac{B_i^{k-1}}{t_{i+k}-t_i} - \left(\frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right).\frac{B_{i+1}^{k-1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} +$$

$$-\left(\frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right).\frac{B_{i+2}^{k-1}}{t_{i+k+2}-t_{i+2}}$$

$$C(x) = \frac{1}{t_{i+k+1}-t_i}\left(\underbrace{\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}.B_i^{k-1} + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}.B_{i+1}^{k-1}}_{B_i^k(x)}\right)$$

$$-\frac{1}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\left(\underbrace{\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}.B_{i+1}^{k-1} + \frac{t_{i+k+2}-x}{t_{i+k+2}-t_{i+2}}.B_{i+2}^{k-1}}_{B_i^k(x)}\right)$$

$$C(x) = \frac{B_i^k}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{B_{i+1}^k}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}$$

$$\frac{d}{d_x}B_i^k(x) = \frac{B_i^k}{t_{i+k+1}-t_i} - \frac{B_{i+1}^k}{t_{i+k+2}-t_{i+1}} + k.\frac{B_i^k}{t_{i+k+1}-t_i} - k.\frac{B_{i+1}^k}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}$$

$$= B_i^k\left(\frac{k+1}{t_{i+k+1}-t_i}\right) - B_{i+1}^k\left(\frac{k+1}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}\right)$$

İspat tamamlanır.

Eğer $t_i = i$ seçersek, tüm i tam sayıları için (2.29) den

$$\frac{d}{dx}B_i^n(x) = \frac{n}{i+n-1}B_i^{n-1}(x) - \frac{n}{i+n+1-i-1}B_{i+1}^{n-1}(x) \qquad (2.31)$$

$\frac{d}{dx}B_i^n(x) = B_i^{n-1}(x) - B_{i+1}^{n-1}(x)$ elde edilir.

Teorem 2.2.3 Herhangi t_i noktası ve herhangi $n \geq 0$ tam sayıları için

$$(t_j - x)_+^n = \sum_{i=-\infty}^{j-n-1}(t_j - t_{i+1}) \ldots (t_j - t_{i+n})B_i^n(x) \qquad (2.32)$$

vardır (Phillips, 2003).

İspat:

$$(t-x)^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(t-t_{i+1})\dots(t-t_{i+n})B_i^n(x)$$

Marsden Özdeşliğinden

$$(t_j-x)^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(t_j-t_{i+1})\dots(t_j-t_{i+n})B_i^n(x) \tag{2.33}$$

elde edilir.

$$= \sum_{i=-\infty}^{j-n-1}(t_j-t_{i+1})+\cdots+(t_j-t_{i+n})B_i^n(x)+\sum_{i=j-n}^{j-1}(t_j-t_{i+1})+\cdots+$$

$$(t_j-t_{i+n})B_i^n(x)+\sum_{i=j}^{\infty}(t_j-t_{i+1})+\cdots+(t_j-t_{i+n})B_i^n(x)$$

(2.33) da $B_i^n(x)$, $(t_j-t_{i+1})\dots(t_j-t_{i+n})$ çarpımları ile çarpılır. j – n≤i≤j – 1 için $B_i^n(x)$ i içeren terimlere $(t_j-x)^n$ in katkısı yoktur. Toplamda $B_i^n(x)$ tanımladığı aralık $[t_i, t_{i+n+1}]$ göz önünde tutularak, i≥j için $B_i^n(x)$ in içerdiği $(t_i-x)_+^n$ uyarlı kuvvet fonksiyonu katkı sağlamaz ve (2.32) ispatlanır.

Örnek 2.2.1 t_i=i alınırsa tüm i tam sayıları için (2.31) eşitliği kullanılarak ve eşit aralıklı noktalar üzerinden tümevarım alınarak

$$\frac{d^k}{dx^k}B_i^n(x) = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}B_{i+r}^{n-k}(x);0 \le k \le n$$

bulunur.

k = 1 için

$$\frac{d}{dx}B_i^n(x) = \sum_{r=0}^{1}(-1)^r\binom{1}{r}B_{i+r}^{n-1}(x)$$

olur ve (2.31) den$B_i^{n-1}(x)-B_{i+1}^{n-1}(x) = (-1)^0\binom{1}{0}B_i^{n-1}(x)+(-1)^1\binom{1}{1}B_{i+1}^{n-1}(x)$

$B_i^{n-1}(x)-B_{i+1}^{n-1}(x) = B_i^{n-1}(x)-B_{i+1}^{n-1}(x)$ sağlanır.

k = a için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu kabul edelim;

$$\frac{d^a}{dx^a} B_i^n(x) = \sum_{r=0}^{a} (-1)^r \binom{a}{r} B_{i+r}^{n-a}(x)$$

k = a+1 için

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^a}{dx^a} B_i^n(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(B_i^{n-a}(x) - \binom{a}{1} B_{i+1}^{n-a}(x) + \right.$$

$$\left.\binom{a}{2} B_{i+2}^{n-a}(x) + \cdots + (-1)^a \binom{a}{a} B_{i+a}^{n-a}(x)\right)$$

$$= B_i^{n-a-1}(x) - B_{i+1}^{n-a-1}(x) - a.B_{i+1}^{n-a-1}(x) + a.B_{i+2}^{n-a-1}(x) + \cdots +$$

$$(-1)^a B_{i+a}^{n-a-1}(x) - (-1)^a B_{i+a+1}^{n-a-1}(x)$$

$$\frac{d^{a+1}}{dx^{a+1}} B_i^n(x) = 1.B_i^{n-a-1}(x) - (a+1).B_{i+1}^{n-a-1}(x) + \binom{a+1}{2} B_{i+2}^{n-a-1}(x) +$$

$$\ldots + (-1)^a \binom{a+1}{a} B_{i+a}^{n-a-1}(x) + (-1)^{a+1} B_{i+a+1}^{n-a-1}(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{a+1} (-1)^r \binom{a+1}{r} B_{i+r}^{n-a-1}(x)$$

$$\frac{d^{a+1}}{dx^{a+1}} = \sum_{r=0}^{a+1} (-1)^r \binom{a+1}{r} B_{i+r}^{n-a-1}(x)$$

İspat tamamlanır.

Örnek 2.2.3 $t_i \leq t \leq t_{i+n+1}$ için

$$\int_{t_i}^{t_{i+n+1}} (t-x)_+^n dx = \int_{t_i}^{t_{i+n+1}} (t-x)^n dx = \frac{(t-t_i)^{n+1}}{n+1}$$

$$B_i^n(x) = (t_{i+n+1} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+n+1}](t-x)_+^n$$

İfadelerini kullanarak $\frac{1}{t_{i+n+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+n+1}} B_i^n(x) dx = \frac{1}{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{t_{i+n+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+n+1}} B_i^n(x) dx =$$

$$\frac{1}{t_{i+n+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+n+1}}[(t_{i+n+1}-t_i)[t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n]dx$$

$$=\frac{1}{t_{i+n+1}-t_i}(t_{i+n+1}-t_i)[t_i,\dots,t_{i+n+1}]\int_{t_i}^{t_{i+n+1}}(t-x)_+^n dx$$

burada

$$(t-x)_+^n=\begin{cases}(t-x)^n; & t\geq x\\ 0 & ;t<x\end{cases}$$

uyarlı kuvvet fonksiyonundan

$$(t-t_i)_+^n=\begin{cases}(t-t_i)^n; & t\geq t_i\\ 0 & ;t<t_i\end{cases}$$

$$(t-t_{i+n+1})_+^n=\begin{cases}(t-t_{i+n+1})^n; & t\geq t_{i+n+1}\\ 0 & ;t<t_{i+n+1}\end{cases}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{t_{i+n+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+n+1}}B_i^n(x)dx=[t_i,\dots,t_{i+n+1}]\frac{1}{n+1}(t-t_i)^{n+1}$$

bulunur.

$$f=[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^n(\xi)}{n!},\xi\in(x_0,x_n)$$

bağıntısından

$$\frac{1}{t_{i+n+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+n+1}}B_i^n(x)dx=\frac{1}{n+1}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.4 $n\geq 0$, $x\in R$ ve tüm i’ler için;

$0\ <\ max\ \ B_i^n(x)\ \leq\ 1$ olduğunu gösterelim.

$0\ < max\ \ B_i^n(x)$ olduğunu Teorem 2.2.1’de göstermiştik.

$max\ B_i^n(x) \leq 1$ olduğunu göstermeliyiz.

k üzerinden tümevarım uygularsak;

k = 0 için;

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & t_i < x \leq t_{i+1} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

İfadesinden k = 0 için sağlanır.

k = n için; $max\ B_i^n(x) \leq 1$ olduğunu kabul edelim.

k = n+1 için;

$$B_i^{n+1}(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+n+1}-t_i}\right) B_i^n(x) + \left(\frac{t_{i+n+2}-x}{t_{i+n+2}-t_{i+1}}\right) B_{i+1}^n(x)$$

Burada $B_i^n(x)$ ifadesi $t_i \leq x \leq t_{i+n+1}$ aralığında tanımlıdır.Diğer aralıklarda sıfırdır.Bu nedenle bu aralıkta ifade 1'den küçük olur. $B_i^{n+1}(x)$ ifadesi $t_{i+1} \leq x \leq t_{i+2+n}$ aralığında tanımlıdır. Diğer aralıklarda sıfırdır.Bu nedenle bu aralıkta ifade 1'den küçük olur.Kabulden de $B_i^n(x) \leq 1$ ve $B_{i+1}^n(x) \leq 1$ olur.

Bu durumda $max\ B_i^{n+1}(x) \leq 1$ sağlanmış olur. İspat tamamlanır.

2.2.2. Eşit aralıklı noktalar

B-spline eşit aralıklı t_i noktalarında seçildiği zaman oldukça sadeleşir. Tüm i tam sayıları için $t_i = i$ seçimi bunu daha da kolaylaştırır.

(2.26) de $t_i = i$ alındığı zaman

$$B_i^n(x) = \left(\frac{x-i}{i+n-i}\right) B_i^{n-1}(x) + \left(\frac{i+n+1-x}{i+n+1-i-1}\right) B_{i+1}^{n-1}(x)$$

$$B_i^n(x) = \frac{1}{n}(x-i)B_i^{n-1}(x) + \frac{1}{n}(i+n+1-x)B_{i+1}^{n-1}(x) \qquad (2.34)$$

bulunur. (2.25) ifadesi

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ i < x \leq i+1 \\ 0 \ ; \qquad\qquad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklini alır ki bunlara üniform B-spline denir. Ve bütün aynı dereceden B-splinelar bir diğeri cinsinden yazılabilir. Yani bütün i tam sayıları için;

$B_i^n(x) = B_{i+1}^n(x+1) \quad ; \ -\infty < x < \infty$ vardır. (2.35)

(2.35) eşitliğini tümevarım ile gösterebiliriz.

$$B_i^n(x) = B_{i+1}^n(x+1)$$

n = 0 için

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ i < x \leq i+1 \\ 0 \ ; \qquad\qquad \text{diğer} \end{cases} \qquad B_{i+1}^0(x+1) = \begin{cases} 1 \ ; \ i+1 < x+1 \leq i+2 \\ 0 \ ; \qquad\qquad \text{diğer} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_i^0(x) = B_{i+1}^0(x+1) \quad ; \ -\infty < x < \infty$$

sağlanır.

n = k için doğru olsun.

$$B_i^k(x) = B_{i+1}^k(x+1) \quad ; \ -\infty < x < \infty$$

n = k+1 için doğru mu?

Yani

$$B_i^{k+1}(x) = B_{i+1}^{k+1}(x+1) \quad ; \ -\infty < x < \infty$$

eşitliği var mıdır?

$$B_i^{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}(x-i)B_i^{k+1-1}(x) + \frac{1}{k+1}(i+k+1+1-x)B_{i+1}^{k+1-1}(x)$$

$$B_i^{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}(x-i)B_i^k(x) + \frac{1}{k+1}(i+k+2-x)B_{i+1}^k(x) \text{ (kabulünden)}$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x}-\mathrm{i})\mathrm{B}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}+1)+\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{i}+\mathrm{k}+2-\mathrm{x})\mathrm{B}_{\mathrm{i}+2}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}+1)$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\mathrm{B}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x}+1)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Her bir $\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}$ B-spline [i, i+n+1] aralığının merkezinde simetriktir. Yani tüm i tam sayıları için

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x})=\ \mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}\ (2\mathrm{i}+\mathrm{n}+1-\mathrm{x}) \quad ;\ -\infty<x<\infty \quad \text{vardır.}$$

eşitliğini tümevarım ile gösterebiliriz.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x})=\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(2\mathrm{i}+\mathrm{n}+1-\mathrm{x})$$

n = 0 için

$$=>B_{\mathrm{i}}^{0}(\mathrm{x})=1=\mathrm{B}_{i}^{0}(2\mathrm{i}+0+1-\mathrm{x}) \ ;-\infty<x<\infty$$

doğrudur.

n = k için doğru kabul edelim.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})=\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+1-\mathrm{x}) \quad ;-\infty<x<\infty$$

n = k + 1 için doğru mu?

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+1+1-\mathrm{x}) \quad ;-\infty<x<\infty$$

eşitliği var mıdır?

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x}-\mathrm{i})\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})+\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{i}+\mathrm{k}+2-\mathrm{x})\mathrm{B}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \ \text{(kabulden)}$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x}-\mathrm{i})\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+1-\mathrm{x})+\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{i}+\mathrm{k}+2-\mathrm{x})\mathrm{B}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{k}}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+3-\mathrm{x})$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{x}-\mathrm{i})\mathrm{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+1-\mathrm{x})+\frac{1}{\mathrm{k}+1}(\mathrm{i}+\mathrm{k}+2-\mathrm{x})\mathrm{B}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{k}}(2\mathrm{i}+\mathrm{k}+2-\mathrm{x}+1)$$

(2.35) denklemini yerine yazarsak

$$B_i^{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}(x-i)B_i^k(2i+k+1-x) + \frac{1}{k+1}(i+k+2-x)B_i^k(2i+k+2-x)$$

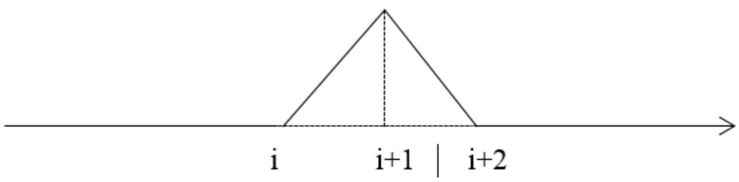
$$B_i^{k+1}(x) = B_i^{k+1}(2i+k+2-x)$$

olur ve ispat tamamlanır.

t = i alarak $B_i^1(x)$ Lineer B-spline'ı oluşturalım.

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-i}{i+1-i} & , \quad (i\,,\ i+1] \\ \frac{i_{+2}-x}{i+2-i-1} & , \quad (i+1, i+2] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-i & , \quad (i\,,\ i+1] \\ i+2-x & , \quad (i+1, i+2] \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$



Şekil 2.10 $B_i^1(x)$'in eşit aralıklı noktalar grafiği

$B_i^1(i+1) = i+1-i = 1$ grafiğin max noktasıdır.

t = i alarak $B_i^2(x)$ kuadratik B-spline'ı oluşturalım.

$$=> B_i^2(x) = \frac{(x-t_i)^2}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+1}-t_i)} \quad , \quad t_i < x \le t_{i+1}$$

t = i alırsak;

$$B_i^2(x) = \frac{(x-i)^2}{(i+2-i)(i+1-i)} = \frac{1}{2}(x-i)^2 \quad , \quad i < x \le i+1$$

$$=> B_i^2(x) = \frac{(t_{i+3}-x)^2}{(t_{i+3}-t_{i+2})(t_{i+3}-t_{i+1})} \quad , \quad t_{i+2} < x \le t_{i+3}$$

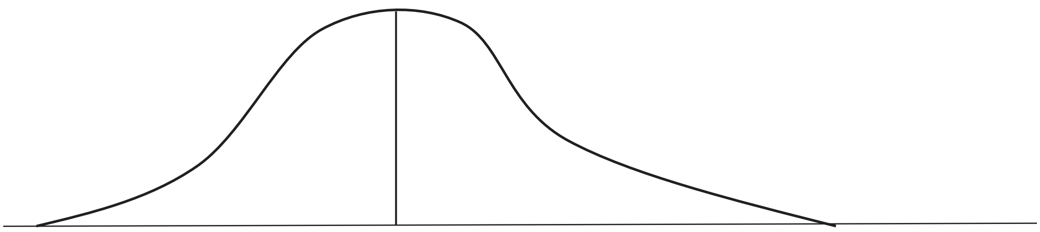
$t_i = i$ alırsak;

$$B_i^2(x) = \frac{(i+3-x)^2}{(i+3-i-2)(i+3-i-1)} = \frac{1}{2}(i+3-x)^2 \quad , \quad i+2 < x \leq i+3$$

$$=> B_i^2(x) = \frac{(x-t_i)(t_{i+2}-x)}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})} + \frac{(t_{i+3}-x)(x-t_{i+1})}{(t_{i+3}t_{i+1})(t_{i+2}t_{i+1})} \quad t_{i+1} < x \leq t_{i+2}$$

$$= \frac{3}{4} - (x - (x - \frac{3}{2})^2 \quad , \quad i+1 < x \leq i+2$$

$$B_i^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-i)^2 & , \quad i < x \leq i+1 \\ \frac{3}{4} - (x - (i + \frac{3}{2}))^2 & , \quad i+1 < x \leq i+2 \\ \frac{1}{2}(i+3-x)^2 & , \quad i+2 < x \leq i+3 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases} \tag{2.36}$$



Şekil 2.11 $B_i^2(x)$'in eşit aralıklı noktalar grafiği

$B_i^2\left(i+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \left(i + \frac{3}{2} - \left(i + \frac{3}{2}\right)\right)^2 = \frac{3}{4}$ grafiğin max noktasıdır.

$$(B_i^2(x))' = \begin{cases} (x-i) & , \quad i < x \leq i+1 \\ -2\left(x - (i + \frac{3}{2})\right) & , \quad i+1 < x \leq i+2 \\ (i+3-x) & , \quad i+2 < x \leq i+3 \end{cases}$$

t = i alarak $B_i^3(x)$ kübik B-spline'ı oluşturalım.

. $t_i < x \leq t_{i+1}$ için;

$$B_i^3(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)$$

$$= \left(\frac{x-i}{3}\right)\left(\frac{x-i}{2}\right)\left(\frac{x-i}{1}\right) = \frac{(x-i)^3}{6}$$

. $t_{i+1} < x \leq t_{i+2}$ için;

$$B_i^3(x) = \left(\frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i}\right)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)\left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_i}\right) - \left(\frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)$$

$$+ \left(\frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_4}\right)\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}}\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(x-1)(i+2-x)^2$$

$$B_i^3(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq i \\ \frac{1}{6}(x-i)^3 & , \quad i < x \leq i+1 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(x-i)(i+2-x)^2 & , \quad i+1 < x \leq i+2 \end{cases}$$

$$B_i^n(x) = B_i^n(2i+n+1-x)$$

$B_i^3(x) = B_i^3(2i+4-x)$ ise x = i+2 noktasına göre

$B_i^3(x)$ simetriktir.

Teorem 2.2.2 Tam sayı noktalarında uniform B-spline göz önüne alındığında

$$B_o^n(j) = \begin{cases} \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{j-1}(x-1)^r \binom{n+1}{r}(j-r)^r & ; \quad 1 \leq j \leq n \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

(Philips, 2003)

İspat: Bu teorem

$$B_o^n([j]) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{j-1}(x-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} (j-r)^r \quad ; \quad 1 \leq j \leq n$$

teoreminin özel halidir. Burada q = 1 alınırsa;

$$B_o^n([j]) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{j-1}(x-1)^r \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} (j-r)^r \quad ; \quad 1 \leq j \leq n$$

elde edilmiş olur.

Örnek 2.2.5 N+1 tane eşit aralıklı noktalarda [0,1] de e^x in kuadratik spline yaklaşımı hesaplanabilir. Bu [0,N] de $e^{x/N}$ in yaklaşımına denktir.

$e^{x/N}$ fonksiyonu için;

$$S(x) = \sum_{r=-2}^{N-1} a_r B_r^2(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq N \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanan [0,N] deki S kuadratik spline ı hesaplayacağız.

$$a_{-2} = 1 - \frac{1}{2N}, a_{-1} = 1 + \frac{1}{2N},$$

$$a_i = 2e^{(i+1)/N} - a_{-1} \quad ; \quad 0 \leq i \leq N-1$$

şeklinde tanımlayalım.

Örneğin; N=5 alındığında a_{-2}, a_{-1}, ….., a_4 katsayıları 0.9, 1.1, 1.3428, 1.6408, 2.0034, 24477 ve 2.9889 olur, son 5 katsayı da 4 ondalık basamağa yuvarlama yapılmıştır.

x in bazı değerleri için S(x) sonuç spline değerlendirilirse (2.37) nın sağ tarafındaki toplamda en fazla üç tane sıfır olmayan terim vardır.

$$B_i^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-i)^2 & , \quad i < x \leq i+1 \\ \frac{3}{4} - (x-(i+\frac{3}{2}))^2 & , \quad i+1 < x \leq i+2 \\ \frac{1}{2}(i+3-x)^2 & , \quad t_{i+2} < x \leq t_{i+3} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

spline değerleri ve (2.37) eşitliğinden faydalanılarak

$$S\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a_{i-2}+\frac{3}{4}a_{i-1}+\frac{1}{8}a_i$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı kullanılarak Spline değerleri bulunur.

Aşağıdaki tabloda sıralı noktaların orta noktalarında spline ve üstel fonksiyon değerleri vardır.

$S(x)$ ve $e^{x/5}$ $x = 0,1,2,3,4,5$ noktalarıda eşit aralıklıdır.

$a_{-2} = 1-\frac{1}{2N}=1-\frac{1}{2.5}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}=0.9$

$a_{-1} = 1+\frac{1}{2N}=1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}=1.1$

$a_0 = 2e^{1/5} -1.1 = 1.3428$

$a_1 = 2e^{2/5} -1.3428 = 1.6408$

$a_2 = 2e^{3/5} -1.6408 = 2.0034$

$a_3 = 2e^{4/5} -2.0034 = 2.4477$

$a_4 = 2e^{5/5} -2.4477 = 2.9889$

$S\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a_{i-2}+\frac{3}{4}a_{i-1}+\frac{1}{8}a_i$ için

$i = 0 => S(0.5)=\frac{1}{8}a_{-2}+\frac{3}{4}a_{-1}+\frac{1}{8}a_0=\frac{1}{8}0.9+\frac{3}{4}1.1+\frac{1}{8}1.3428$

$= 0.1125+.08250+0.16785 = 1.1054$

ve

$e^{0.5/5} = 1.1052$

i = 1 $=> S(1.5) = \frac{1}{8}a_{-1} + \frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{8}a_1 = \frac{1}{8}1.1 + \frac{3}{4}1.3428 + \frac{1}{8}1.6408$

$= 1.3497$

ve

$e^{1.5/5} = 1.3499$

i = 2 $=> S(2.5) = \frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{8}a_2 = \frac{1}{8}1.3428 + \frac{3}{4}1.6408 + \frac{1}{8}2.0034$

$= 1.6489$

ve

$e^{2.5/5} = 1.6487$

i = 3 $=> S(3.5) = \frac{1}{8}a_1 + \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 = \frac{1}{8}1.6408 + \frac{3}{4}2.0034 + \frac{1}{8}2.4477$

$= 2.0136$

ve

$e^{3.5/5} = 2.0138$

i = 4 $=> S(4.5) = \frac{1}{8}a_2 + \frac{3}{4}a_3 + \frac{1}{8}a_4 = \frac{1}{8}2.0034 + \frac{3}{4}2.4477 + \frac{1}{8}2.9889$

$= 2.4598$

ve

$e^{4.5/5} = 2.4596$

Buradan aşağıdaki gibi bir tablo elde edilir;

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
S(x)	1.1054	1.3497	1.6489	2.0136	2.4598
$e^{x/5}$	1.1052	1.3499	1.6487	2.0138	2.4596

Tablo 2.1. $e^{x/N}$ **fonksiyonuna yaklaşım için karşılaştırma**

2.3. q-Integer Noktaları

2.3.1. q-integer noktalarının özellikleri

Tanımı 2.3.1: r bir doğal sayı olmak üzere, verilen bir q>0 için

$$[r] = \begin{cases} \frac{1-q^r}{1-q}, q \neq 1 \\ r, q = 1 \end{cases} \tag{2.38}$$

olarak tanımlanır ve $[r]$ q-integer olarak adlandırılır. Bu tanımı r'yi herhangi bir reel sayı kabul ederek genişletebiliriz. Bu durumda $[r]$'yi q-reel olarak adlandırırız (Phillips,1996).

$$[r] = \frac{1-q^r}{1-q} = \frac{(1-q).(1+q+q^r+\ldots+q^{r-1})}{(1-q)} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{r-1}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.3.1: Verilen bir q>0 için N_q = {[r]:r bir doğalsayı } tanımlayalım.

Tanım 2.3.1'den

$N_q = \{0,1,1+q,1+q+q^2,1+q+q^2+q^3,\ldots\}$ kümesi elde edilir.

Eğer $0 < q < 1$ ise aralıklar giderek küçülür.

Eğer $q > 1$ ise aralıklar giderek artar.

q = 1 aldığımızda N_q q-integer kümesi doğal sayılar kümesini verir.

Tanımı 2.3.2 (q-Faktöriyel):

r bir doğal sayı olmak üzere, verilen bir q>0 için değeri $[r]!$ q-faktöriyel

$$[r]! = \begin{cases} [r].[r-1]\dots[1], r \geq 1 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\quad , r = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

olarak tanımlanır(Koçak and Phillips, 1994).

Tanımı 2.3.3

$\forall t \in R$ ve r ≥ 0 tamsayısı için;

$$\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} = \frac{[t].[t-1]\dots\dots\dots\dots[t-r+1]}{[r]!} \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanan $\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}$ ifadesine q-binom katsayıları denir.

(Koçak and Phillips,1994).

Teorem 2.3.1: Herhangi bir n ve r tamsayıları için n ≥ r ≥ 0 olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[r]![n-r]!} \tag{2.41}$$

eşitliği sağlanır ve bu ifadeye Gauss polinomları denir (Phillips,2003).

İspat:

$$\frac{[n]!}{[r]![n-r]!} = \frac{[n].[n-1]\dots\dots[n-r+1].\cancel{[n-r]}.\cancel{[n-r-1]}\dots\dots\dots\cancel{[1]}}{[r]!\,.\cancel{[n-r]}.\cancel{[n-r-1]}\dots\dots\dots\cancel{[1]}} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

(2.40) eşitliğinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.2 Gauss polinomları aşağıdaki Pascal bağıntılarını sağlar.

i. $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r . \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$ (2.42)

ii. $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = q^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$ (2.43)

(Koçak, Phillips,1994).

İspat:

i. İspatı Teorem 2.3.1'i kullanarak yapalım.

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r . \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n-1]!}{[n-1-r+1]!.[r-1]!} + q^r . \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r]!}$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{[n-r]} + q^r . \frac{1}{[r]} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{\frac{1-q^{n-r}}{1-q}} + \frac{q^r}{\frac{1-q^r}{1-q}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1-q}{1-q^{n-r}} + \frac{q^{r+1}}{1-q^r} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1-q-q^n+q^{n+1}}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{(1-q)-q^n(1-q)}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{(1-q)(1-q^n)}{(1-q^{n-r}).(1-q^r)} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{\frac{1-q^r}{1-q} . \frac{1-q^{n-r}}{1-q^n}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{[r]} . \frac{1}{\frac{1-q^{n-r}}{(1-q).(1+q+q^2+...+q^{n-1})}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \frac{1}{[r]} . \frac{1}{[n-r]} . (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

$$= \frac{[n-1]!.[n]}{[n-r]!.[r]!} = \frac{[n]!}{[n-r]!.[r]!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

ii. Yine ispatı Teorem 2.3.1'i yararlanarak yapalım.

$$q^{n-r} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n-1]!}{[n-1-r+1]!.[r-1]!} . q^{n-r} + \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r]!}$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{[n-r]} . q^{n-r} + \frac{1}{[r]} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1-q}{1-q^{n-r}} . q^{n-r} + \frac{1-q}{1-q^{r}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1-q-q^{n+1}+q}{(1-q^{r}).(1-q^{n-r})} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1-q-q^{n}(1-q)}{(1-q^{r}).(1-q^{n-r})} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{(1-q).(1-q^{n})}{(1-q^{r}).(1-q^{n-r})} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{\frac{1-q^{r}}{1-q} . \frac{1-q^{n-r}}{1-q^{n}}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \left(\frac{1}{[r] . \frac{1-q^{n-r}}{(1-q).(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}} \right)$$

$$= \frac{[n-1]!}{[n-1-r]!.[r-1]!} . \frac{1}{[r].[n-r]} . [n]$$

$$= \frac{[n]!}{[r]!.[n-r]!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$ olduğu görülür.

(2.42) ve (2.43) eşitliklerinde q = 1 alındığında bilinen Paskal bağıntısı elde edilir.

q = 1 için

$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ olduğu görülür.

(2.40) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{\left(\frac{1-q^{n-r+1}}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{n-r+2}}{1-q}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1-q^{n}}{1-q}\right)}{\left(\frac{1-q^{r}}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{r-1}}{1-q}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1-q}{1-q}\right)}$$

$$= \frac{(1-q^{n-r+1})(1-q^{n-r+2})\ldots\ldots(1-q^{n})}{(1-q)(1-q^{2})\ldots\ldots(1-q^{r})} \qquad (2.44)$$

olarak yazılabilir. (2.44) eşitliğinden $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ifadesinin q parametresine bağlı rasyonel bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.3.3: s,n ∈ N, s ≤ n ve q > 0 için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\prod_{s=1}^{n}(1+q^{s-1}x) = \sum_{s=0}^{n} q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} x^{s} \qquad (2.45)$$

(Phillips,2003).

İspat: İspatı için x'e ve q'ya bağlı bir $G_n(x)$ polinomu yazılır.

$$G_n(x) = (1+x)(1+qx)\ldots\ldots(1+q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r \qquad (2.46)$$

Bu eşitlikte x yerine qx yazıldığında;

$$G_n(qx) = (1+qx)(1+q^2x)\ldots\ldots(1+q^nx) = \sum_{r=0}^{n} c_r (qx)^r \qquad (2.47)$$

elde edilir. (2.46) ve (2.47) eşitliklerinden;

$$G_n(x)\,(1+q^nx) = (1+x)G_n(qx) \qquad (2.48)$$

yazılabilir. (2.48) eşitliğinde (2.46) ve (2.47) eşitliklerini yerine yazdığımızda;

$$(1+q^n x)\sum_{r=0}^{n} c_r x^r = (1+x)\sum_{r=0}^{n} c_r (qx)^r \tag{2.49}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki x^s' in katsayılarını eşitleyecek olursak;

$$c_s + q^n c_{s-1} = q^s c_s + q^{s-1} c_{s-1} \tag{2.50}$$

olur. Burada c_s çekilirse;

$$c_s = q^{s-1}\left(\frac{1-q^{n-s+1}}{1-q^s}\right) c_{s-1} = q^{s-1}\frac{[n-s+1]}{[s]} c_{s-1} \tag{2.51}$$

elde edilir. $1 \le s \le n$ ve $c_0=1$ olmak üzere, c_s'yi c_{s-1}'e bağlı olarak yazılmıştır.

buradan;

$$c_s = q^{\frac{s(s-1)}{2}} \frac{[n-s+1][n-s+2]\ldots\ldots\ldots[n]}{[s][s-1]\ldots\ldots\ldots[1]} c_0 = q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

eşitliği yazılabilir. Burada bulduğumuz c_s'yi (2.46) eşitliğinde yerine yazacak olursak;

$$G_n(x) = (1+x)(1+qx)\ldots\ldots(1+q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^{n} q^{\frac{r(r-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r$$

$$\prod_{r=1}^{n}(1+q^{r-1}x) = \sum_{r=0}^{n} q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r$$

olduğu görülür. Bu da (2.45) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

(2.45) eşitliğinde $q = 1$ aldığımızda "Binom açılımını" elde ederiz.

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \tag{2.53}$$

Teorem 2.3.4: $s,n \in N$, $s \le n$ ve $q > 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\prod_{s=1}^{n}(1+q^{s-1}x)^{-1} = \sum_{s=0}^{n} \begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix} (-x)^s \tag{2.54}$$

İspat: İspatı için x'e ve q'ya bağlı bir $H_n(x)$ polinomu yazalım.

$$H_n(x) = (1+x)^{-1}(1+qx)^{-1}\ldots\ldots(1+q^{n-1}x)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s \tag{2.55}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte x yerine qx yazarsak;

$$H_n(qx) = (1+qx)^{-1}(1+q^2x)^{-1}\ldots\ldots(1+q^nx)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} d_s(qx)^s \tag{2.56}$$

elde edilir. (2.55) ve (2.56) eşitliklerinden;

$$(1+x)H_n(x) = (1+q^nx)H_n(qx) \tag{2.57}$$

yazılabilir. (2.57) eşitliğinde (2.55) ve (2.56) eşitliklerini yerine yazarsak;

$$(1+x)\sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s = (1+q^nx)\sum_{s=0}^{\infty} d_s\,(qx)^s \tag{2.58}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki x^s' in katsayılarını eşitleyecek olursak;

$$d_s + d_{s-1} = q^s d_s + q^{n+s-1}d_{s-1} \tag{2.59}$$

olur. Burada d_s çekilirse;

$$d_s = -\left(\frac{1-q^{n+s-1}}{1-q^s}\right)d_{s-1} = -\frac{[n+s-1]}{[s]}d_{s-1} \tag{2.60}$$

elde edilir. $1 \leq s$ ve $d_0=1$ olmak üzere, d_s'yi d_{s-1}'e bağlı olarak yazılmıştır.

buradan;

$$d_{s-1} = -\left(\frac{[n+s-2]}{1-q^s}\right)d_{s-2},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, d_1 = -\frac{[n]}{[1]}d_0\ ,\ d_0 = 1 \tag{2.61}$$

kullanılarak;

$$d_s = (-1)^s\frac{[n+s-1][n+s-2]\ldots\ldots\ldots\ldots[n]}{[s][s-1]\ldots\ldots\ldots\ldots[1]} \tag{2.62}$$

eşitliği yazılabilir. (2.62) eşitliğinin sağ tarafı kısaca;

$$d_s = (-1)^s\begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

şeklinde yazılabilir. Burada bulduğumuz d_s'yi (2.55) eşitliğinde yerine yazacak olursak;

$$H_n(x) = (1+x)^{-1}\,(1+qx)^{-1}\ldots(1+q^{n-1})^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix} x^s$$

olduğu görülür. Bu da (2.54) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

Tanımı: 2.3.4 (q-diferansiyel) Herhangi bir f(x) fonksiyonunun q-diferansiyeli

$$d_q f(x) = f\,(qx) - f\,(x) \tag{2.64}$$

şeklindedir (Cheung,2002).

Örnek 2.3.2 : Herhangi bir f(x) ve g(x) fonksiyonu için f(x). g(x) ifadesinin q-diferansiyel;

$$d_q(f(x)\,g(x)) = f(qx)\,g(qx) - f(x).\,g(x)$$

bu eşitliğe f(qx) g(x) ifadesini ekleyip çıkarırsak;

$$\begin{aligned} dq(f(x)g(x) &= f(qx)g(qx) - f(x).g(x) + f(qx)g(x) - f(qx)g(x) \\ &= f(qx)(g(qx) - g(x)) + g(x)(f(qx) - f(x)) \\ &= dq\, g(x)\, .\, f(qx) + dqf(x)\, .\, g(x) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.5(q-türev): Verilen bir $q > 0$, $q \neq 1$ ve herhangi bir f(x) için q-türev;

$$D_q\, f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x} \tag{2.65}$$

olarak tanımlanır (Koç and Cheung, 2002).

f diferansiyellenebilirse,

$$\lim_{q\to 1} Dq\, f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Sabit herhangi bir a ve b değerler için;

$$Dq\,(a.f(x) + b.g(x)) = a.\,Dq\,f(x) + b.\,Dq\,g(x)$$

q- türev operatörü lineer bir operatördür.

$$Dq\,(a.\,f(x) + b.\,g(x)) = \frac{dq(a.f(x)+b.g(x))}{dqx} = \frac{a.f(qx)+b.g(qx)-a.f(x)-b.g(x)}{qx-x}$$

$$= \frac{a\big(f(qx) - f(x)\big) + b(g(qx) - g(x)}{qx - x} = a.\frac{(f(qx) - f(x))}{\underbrace{qx - x}_{Dqf(x)}} + b.\frac{(g(qx) - g(x))}{\underbrace{qx - x}_{Dqg(x)}}$$

Örnek 2.3.3 $n \in Z^+$, $f(x) = x^n$ için Dq f(x);

$$Dq(x^n) = \frac{dq=x^n}{dq\,x} = \frac{(qx)^n-x^n}{(q-1)x} = \frac{x^n(q^n-1)}{x.(q-1)}$$

$$= x^{n-1}.[n] \underset{q\to 1}{\longrightarrow} n.\,x^{n-1}$$

Örnek 2.3.4 Herhangi bir f(x) ve g(x) fonksiyonları için f(x) . g(x) ifadesinin ve $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinin q türevini bulalım.

$$Dq(f(x).\,g(x)) = \frac{dq(f(x).g(x))}{dq\,x} = \frac{f(qx).dq\big(g(x)\big)+g(x).dq(f(x))}{qx-x}$$

$$=f(qx).\,\frac{dq(g(x))}{(q-1)x} + g(x).\frac{dq(f(x))}{(q-1)x}$$

$$=f(qx).\,Dq(g(x)) + g(x).\,Dq(f(x))$$

$f(x) = g(x).\,\frac{f(x)}{g(x)}$ olarak alırsak;

$$Dqf(x) = g(qx)\,.Dq\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}\,.\,Dq(g(x))$$

Buradan Dq $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ ifadesini çekersek;

$$\text{Dq}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).Dq(f(x)) - f(x).Dq(g(x))}{g(x).g(qx)}$$

q-türev için genel bir zincir kuralı yoktur. Ancak x,β sabit olmak üzere;

$\mu = \mu(x) = \alpha.x^{\beta}$ için f(μ(x)) fonksiyonu bir istisnadır.

$$\text{Dq}(f(\mu(x))) = \text{Dq}\left(f\left(\alpha.x^{\beta}\right)\right) = \frac{f\left(\alpha(qx)^{\beta}\right) - f(\alpha x^{\beta})}{(q-1)x}$$

ifadesini $(\alpha q^{\beta}x^{\beta} - \alpha x^{\beta})$ ifadesi ile çarpıp, bölersek;

$$\text{Dq}\left(f(\alpha.x^{\beta})\right) = \frac{\left(f(\alpha.q^{\beta}x^{\beta})\right) - f(\alpha x^{\beta})}{(q-1)x} \cdot \frac{\alpha q^{\beta}x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}{\alpha q^{\beta}x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}$$

$$= \frac{f(q^{\beta}\mu) - f(\mu)}{q^{\beta}\mu - \mu} \cdot \frac{\mu(qx) - \mu(x)}{(q-1)x}$$

$$= \text{Dq}_{\beta}\left(f\left(\mu(x)\right)\right).\text{Dq}(\mu(x))$$

Teorem 2.3.5 (q- Taylor Polinomu): a herhangi bir sayı, D polinomlar uzayında bir lineer operatör ve $\{P_0(x), P_1(x), \ldots.\}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir polinom dizisi olsun.

a) $P_0(a) = 1$ ise $n \geq 1$ için $P_n(a) = 0$

b) deg $(P_n) = n$

c) D $P_n(x) = P_{n-1}(x)$ ($n \geq 1$ için) ve D(1) = 0 (Kac and Cheiung, 2002).

Bu durumda N. dereceden herhangi bir f(x) polinomu için aşağıdaki genelleştirilmiş Taylor formülü ele edilir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) \ . \ P_n(x)$$

Örnek 2.3.5

$$D = \frac{d}{dx} \ , \quad P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

olarak seçilirse, teoremin 3 koşulunu da sağlar ve teorem bir polinomun a civarındaki Taylor açılımını verir.

Şimdi de D≡Dq ile uyumlu olarak teoremin üç koşulunu sağlayan $\{P_0(x), P_1(x), \dots .\}$ polinom dizisini oluşturalım.

Eğer a = 0 ise;

$$P_n(x) \quad = \frac{x^n}{[n]!} \text{ Seçebiliriz. Çünkü;}$$

$$P_0(x) \quad = \frac{x^0}{[0]!} = 1 \text{ ise, } n \geq 1 \text{ için } P_n(a) = P_n(0) = \frac{0^n}{[n]!} = 0$$

$$\deg(P_n) \quad = n.$$

$$Dq\, P_n(x) = Dq \frac{x^n}{[n]!} = \frac{[n].x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x)$$

$$Dq(1) = \frac{1-1}{qx-x} = 0$$

Eğer $a \neq 0$ ise;

$$P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{[n]!} \text{ seçemeyiz.}$$

(c) şıkkını sağlamaz.

$$Dq \frac{(x-a)^2}{[2]!} = \frac{(x-a)}{[1]!}$$

$$Dq \frac{(x-a)^2}{[2]!} = \frac{1}{[2]!}\left(\frac{(qx-a)^2-(x-a)^2}{qx-x}\right) \neq P_1(x)$$

Birkaç $P_n(x)$'i yazıp genel bir formül oluşturalım.

$P_0(x)=1$ alırsak;

$DqP_1(x) = P_0(x) = 1$ ve $P_1(a) = 0$ olmalıdır.

$P_1(x) = x-a$

$$Dq(x-a) = \frac{(qx-a)-(x-a)}{qx-x} = 1 = P_0(x)$$

$Dq\, P_2(x) = P_1(x)$ ve $P_2(a) = 0$ olmalıdır.

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

$$P_3 = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[2][3]}$$

Genelleştirirsek;

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}$$

Teoremin (c) şartının geçerliliğini doğrulamak için bazı notasyonlar tanıtalım.

Tanım 2.3.6 (q-shifted polinom):

$(x-a)^n$'nin q-anoloğu

$$(x-a)^n q=\begin{cases} 1 & , n=0 \\ (x-a)(x-qa)(x-q^2a)\dots\dots..(x-q^{n-1}a) & , n \geq 1 \end{cases} \qquad (4.29)$$

polinomudur (Kac and Cheung, 2002).

Önerme: $n \geq 1$ için;

$$Dq(x-a)_q^n = [n].(x-a)_q^{n-1}$$

Buradan $Dq\, P_n(x) = P_{n-1}(x)$ sonucuna ulaşılır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. q-Integers Noktalarında B-Spline Fonksiyonu

Herhangi q > 0 noktaları için $t_i = [i]$ ifadesi (3.1) ve (3.2) de yerine yazarsak;

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad [i] < x \leq [i+1] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases} \tag{3.1}$$

ve

$$B_1^n(x) = \left(\frac{x-[i]}{[i+n]-[i]}\right) B_i^{n-1}(x) + \left(\frac{[i+n+1]-x}{[i+n+1]-[i+1]}\right) B_{i+1}^{n-1}(x)$$

bulunur (Phillips, 2003). Burada

$$[i+n]-[i] = \frac{1-q^{i+n}}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q} = \frac{1-q^{i+n}-1+q^i}{1-q} = \frac{q^i(1-q^n)}{1-q} = q^i[n]$$

$$[i+n+1]-[i+1] = \frac{1-q^{i+n+1}}{1-q} - \frac{1-q^{i+1}}{1-q} = \frac{1-q^{i+n+1}-1-q^{i+1}}{1-q} = \frac{q^{i+1}(1-q^n)}{1-q} = q^{i+1}[n]$$

ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa;

$$B_1^n(x) = \frac{(x-[i])}{q^i[n]} B_i^{n-1}(x) + \left(\frac{[i+n+1]-x}{q^{i+1}[n]}\right) B_{i+1}^{n-1}(x) \tag{3.2}$$

elde edilir (Koçak and Philips, 1994).

Teorem 3.1.1 q-integer noktalarındaki B-spline bütün n ≥ 0 ve i tamsayılar için

$$B_i^n(x) = B_{i+1}^n(qx+1) \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlar (Koçak and Philips, 1994).

İspat:

(3.3) de, t = qx + 1 olmak üzere

$$B_i^n(x) = B_{i+1}^n(t) \tag{3.4}$$

Şeklinde gösterebiliriz.

Bu eşitlik [i]<x≤[i+1] ve [i+1]<t≤[i+2] aralıklarında

$$\frac{x-[i]}{q^i} = \frac{t-[i+1]}{q^{i+1}} \tag{3.5}$$

şeklinde yazabiliriz.Teoremin ispatını tamamlamak için n üzerinden

tümevarım uygulanırsa;

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad [i] < x \leq [i+1] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases} \qquad B_{i+1}^0(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad [i+1] < t \leq [i+2] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

n=0 için doğruluğu görülür.

n=n için doğru olduğunu kabul edelim. $B_i^n(x) = B_{i+1}^n(t)$

n=n+1 için $B_i^{n+1}(x) = B_{i+1}^{n+1}(t)$ eşitliğini gösterelim.

$$B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{(t-[i+1])}{q^{i+1}[n+1]} B_{i+1}^n(t) + \left(\frac{[i+n+3]-t}{q^{i+2}-[n+1]}\right) B_{i+2}^n(t)$$

(3.4) ve (3.5) den

$$B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{(x-[i])}{q^i[n+1]} B_i^n(x) + \frac{([i+n+2]-x)}{q^{i+1}[n+1]} B_{i+2}^n(x)$$

ve (3.2)de

$$B_{i+1}^{n+1}(t) = B_i^{n+1}(x)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.1 (3.1) ve (3.2) den [i], [i+1], [i+2] noktalarında lineer B-spline bulunur.

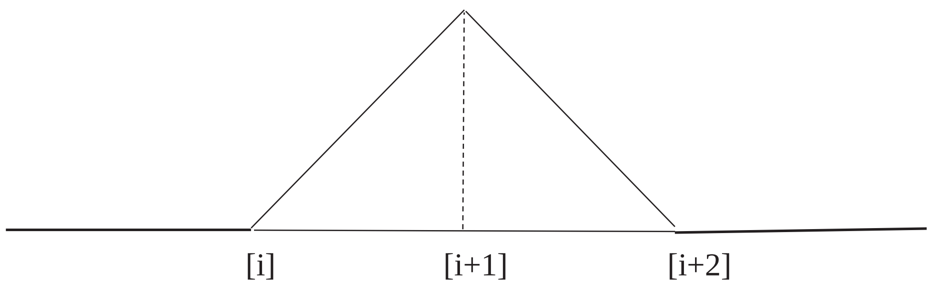
$$B_i^1(x) = \frac{(x-[i])}{q^i[1]} B_i^0(x) + \frac{([i+2]-x)}{q^{i+1}[1]} B_{i+1}^0(x)$$

$$B_{i+1}^0(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad [i+1] < x \leq [i+2] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olacağından

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-[i]}{q^i} & ; \quad [i] < x \leq [i+1] \\ \frac{[i+2]-x}{q^{i+1}} & ; \quad [i+1] < x \leq [i+2] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases} \tag{3.6}$$

Grafik [i] ile [i+1] arasında monoton artan , [i+1] ile [i+2] arasında monoton azalandır.x≤[i] ve x≥[i+2] aralığında 0 dır.ve x=[i+1] noktasında 1 değerinin alır.



Şekil 3.1: q-inteper noktalarında lineer B-spline fonksiyonu grafiği

q integer noktalarında kuadratik B-spline (3.1), (3.2) ve (3.6) den

$$B_i^2(x) = \frac{(x-[i])}{q^i[2]} B_i^1(x) + \frac{([i+3]-x)}{q^{i+1}[2]} B_{i+1}^1(x)$$

olur ve

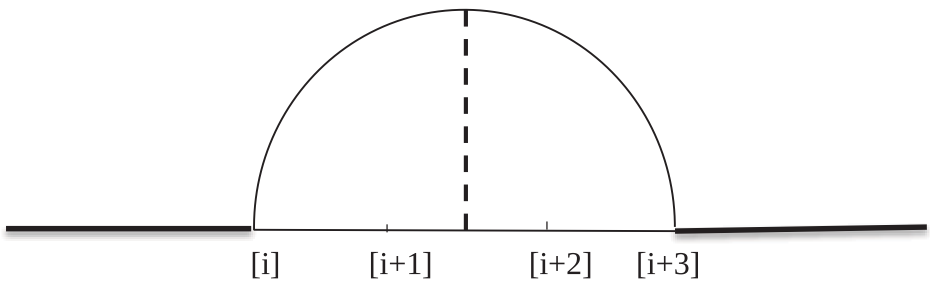
$$B_{i+1}^{1}(x) = \begin{cases} \frac{x-[i+1]}{q^{i+1}} & ; \quad [i+1] < x \leq [i+2] \\ \frac{[i+3]-x}{q^{i+2}} & ; \quad [i+2] < x \leq [i+3] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ifadelerinden

$$B_{i}^{2}(x) = \begin{cases} \frac{(x-[i])^2}{q^{2i}[2]} & ; \quad [i] < x \leq [i+1] \\ \frac{[3]}{[2]^2} - (\beta_i(x))^2 & ; \quad [i+1] < x \leq [i+2] \\ \frac{([i+3]-x)^2}{q^{2i+3}[2]} & ; \quad [i+2] < x \leq [i+3] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olur ve burada

$$\beta_i(x) = \frac{([i+1]-x)+q([i+2]-x)}{q^{i+1}[2]} \quad \text{dir.}$$



Şekil 3.2. q-integer noktalarında kuadratik B-spline fonksiyonu grafiği

Burada açıktır ki $B_i^2(x)$'in $x = \frac{[i+1]+q.[i+2]}{1+q}$'de maximum değeri $\frac{[3]}{[2]^2}$'dir.

Teorem 3.1.2 q-integer noktalarında B-spline

$$B_i^n(x;q) = B_i^n\left(q^{-2i-n}([2i+n+1]-x);1/q\right) \tag{3.7}$$

eşitliğini bütün n > 0 tam sayıları ve i, bütün reel q > 0 ve x, n=0 için ve x=[i] ve [i+1] dışındaki bütün x ler için sağlar. (Phillips, 2003).

Teorem 3.1.3 q-integer noktalarında B-spline

$$B_i^n(x) = q^{-\frac{n(2i+n+1)}{2}}(1-(1-q)x)^n B_i^n\left(\frac{[2i+n+1]-x}{1-(1-q)x}\right) \tag{3.8}$$

eşitliğini bütün n > 0 tam sayıları ve i, bütün reel q > 0 ve x, n=0 için ve x=[i] ve [i+1] dışındaki bütün x ler için sağlar (Phillips, 2003).

Teorem 3.1.4 q-integer noktalarındaki B-spline bütün n ve m ≥ 0 ve i tamsayılar için

$$B_i^n(x) = B_{i+m}^n(q^m x + [m]) \tag{3.9}$$

(3.3)'e ilaveten eşitliğini sağlar.

m üzerinden tümevarım ile doğruluğu kolayca gösterilir.

m = 0 için

$$B_i^n(x) = B_{i+0}^n(q^0 x + [0]) = B_i^n(x+0) = B_i^n(x)$$

şeklinde sağlanır.

m = k için doğru olsun. Yani

$$B_i^n(x) = B_{i+k}^n(q^k x + [k])$$

var olsun.

m = k+1 için doğru olduğunu, yani

$$B_i^n(x) = B_{i+k+1}^n(q^{k+1} x + [k+1])$$

eşitliğinin varlığını gösterelim;

(3.2)'den

$$B_{i+k+1}^{n}(q^{k+1}x+[k+1])=\frac{q^{k+1}x+[k+1]-[i+k+1]}{q^{i+k+1}[n]}B_{i+k+1}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1])$$

$$+\frac{[i+n+k+2]-q^{k+1}x-[k+1]}{q^{i+k+2}[n]}B_{i+k}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1])$$

elde edilir. Ayrıca

$$[k+1]-[i+k+1]=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}-\frac{1-q^{i+k+1}}{1-q}=\frac{1-q^{k+1}-1+q^{i+k+1}}{1-q}=\frac{q^{k+1}(q^{i}-1)}{1-q}$$

$$=q^{k+1}[i]$$

$$[i+n+k+2]-[k+1]=\frac{1-q^{i+n+k+2}}{1-q}-\frac{1-q^{k+1}}{1-q}=\frac{q^{k+1}-q^{k+1}q^{i+n+1}}{1-q}$$

$$=q^{k+1}[i+n+1]$$

olduğundan

$$B_{i+k+1}^{n}(q^{k+1}x+[k+1])=\frac{q^{k+1}x-q^{k+1}[i]}{q^{i+k+1}[n]}B_{i+k+1}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1]))$$

$$+\frac{q^{k+1}x+q^{k+1}[i+n+1]}{q^{i+k+2}[n]}B_{i+2+k}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1])$$

$$=\frac{x-[i]}{q^{i}[n]}B_{i+k+1}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1])+\frac{[i+n+1]-x}{q^{i+1}[n]}B_{i+k+2}^{n-1}(q^{k+1}x+[k+1])$$

bulunur ve burada k yerine k-1 alırsak;

$$B_{i+k+1}^{n}(q^{k+1}x+[k+1])=\frac{x-[i]}{q^{i}[n]}B_{i+k}^{n-1}(q^{k}x+[k])$$

$$+\frac{[i+n+1]-x}{q^{i+1}[n]}B_{i+k+1}^{n-1}(q^{k}x+[k])$$

olur. Kabulden

$$B_{i+k+1}^{n}(q^{k+1}x+[k+1])=\frac{x-[i]}{q^{i}[n]}B_{i}^{n-1}(x)+\frac{[i+n+1]-x}{q^{i+1}[n]}B_{i+1}^{n-1}(x)$$

$$=B_{i}^{n}(x)$$

olur ki ispat tamamlanır.

Aynı n dereceli ve aynı q sabit değerlerini alan B-spline q = 1 olmadıkça bir diğerine dönüşmez. (3.9)'den

$$B_{i}^{n}([j])=B_{i+m}^{n}([j+m)] \qquad \text{elde ederiz.} \tag{3.10}$$

Teorem 3.1.5: $\big[[i],[i+n+1]\big]$ aralığında q-integer noktalarında $B_{i}^{n}(x)$

B-spline

$$B_{0}^{n}([j])=\begin{cases}\frac{1}{[n]!}\sum_{r=0}^{j-1}(-1)^{r}q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ n+1\end{bmatrix}[j-r]^{n}\,, & 1\leq j\leq n\\ 0\,, & diğer\end{cases} \tag{3.11}$$

İspat: Eğer $1\leq\ j\leq n$ için $B_{0}^{n}([j])$ nin değerlerini bilirsek (3.10) den B_{0}^{n} spline değerlendirebiliriz.

$$B_{i}^{n}(x)=(t_{i+n+1}-t_{i})[t_{i},\ldots,t_{i+n+1}](t-x)_{+}^{n}$$

eşitliğinde her bir t_j yerine [j] konur.

$$f\,[x_j, x_{j+1},\ldots,x_{j+k}]=\frac{\Delta_{q}^{k}f(x_{j})}{q^{\frac{k(2j+k-1)}{2}}[k]!}$$

eşitliğinden

$$B_{i}^{n}(x)=\frac{\Delta_{q}^{n+1}\,([i]-x)_{+}^{n}}{q^{n(2i+n+1)/2}[n]!} \tag{3.12}$$

elde edilir.

i = 0 ve x = [j] olarak (3.12). de yerine yazıp

$$\Delta_q^k f(x_j) = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} f(x_{j+k+r})$$

q-difference genişletilirse;

$$B_0^n([j]) = \frac{q^{-n(n+1)/2}}{[n]!}\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} ([n+1-r]-[j])_+^n$$

elde edilir.

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n \, ; \, -\infty < t \le x & , -\infty < t < \infty \\ \quad 0 \quad ; t > x \end{cases}$$

tanımından ve q-integer özelliklerinden

$$([n+1-r]-[j])_+^n = \begin{cases} \quad 0 & ; \; r \ge n+1-j \\ q^{jn}[n+1-r-j]^n & ; 0 \le r \le n+1-j \end{cases}$$

$$B_0^n([j]) = \frac{q^{-n(n+1-2j)/2}}{[n]!}\sum_{r=0}^{n-j}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} [n+1-r-j]^n$$

olur ve j yerine n+1-k yazarsak:

$$B_0^n([n+1-k]) = \frac{q^{-n(n+1-2k)/2}}{[n]!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} [k-r]^n$$

elde edilir.

$$B_0^n([k]) = q^{n(n+1+2k)/2} B_0^n([n+1-k])$$

dan

$$B_0^n([k]) = \frac{1}{[n]!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} [k-r]^n$$

k ile j nin yer değiştirmesi ile (3.11) elde edilir

Örnek 3.1.2: $1 \leq j \leq n$ ve $n \geq 1$ için $x = [j]$ olmak üzere B_0^n B-spline aralığın içinde n noktalarına sahiptir. Teorem (3.1.5)'de yani

$$B_0^n([j]) = \frac{1}{[n]!} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} [j-r]^n$$

ifadesinde n = 1,2,3,4 değerlerini uygularız. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n-r+1})(1-q^{n-r+2})\ldots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}$$

$[1] = 1$

$[2] = 1+q$

$[3] = 1+q+q^2$

ifadelerini kullanabiliriz.

$$B_0^1([1]) = 1$$

$$B_0^2([1]) = \frac{1}{[2]!} \sum_{r=0}^{1-1} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} [1-r]^2$$

$$= \frac{1}{[2]!} (-1)^0 q^{0(0-1)/2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} [1-0]^2$$

$$= \frac{1}{[2]!}$$

$$B_0^2([2]) = \frac{1}{[2]!} \sum_{r=0}^{2-1} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} [2-r]^2$$

$$= \frac{1}{[2]!} (-1)^0 q^{0(0-1)/2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} [2-0]^2 + \frac{1}{[2]!} (-1)^1 q^{1(1-1)/2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} [2-1]^2$$

$$= \frac{1}{[2]!} \left([2]^2 - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{[2]!} \left((1+q)^2 - \frac{(1-q^3)}{(1-q)} \right)$$

$$= \frac{1}{[2]!}(1 + 2q + q^2 - 1 - q - q^2)$$

$$= \frac{q}{[2]!}$$

$$B_0^3([1]) = \frac{1}{[3]!}\sum_{r=0}^{1-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix}4\\r\end{bmatrix}[1-r]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}[1-0]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}$$

$$B_0^3([2]) = \frac{1}{[3]!}\sum_{r=0}^{2-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix}4\\r\end{bmatrix}[2-r]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}[2-0]^3 + \frac{1}{[3]!}(-1)^1 q^{1(1-1)/2}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}[2-1]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}\left([2]^3 - \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{[3]!}\left((1+q)^3 - \frac{(1-q^4)}{(1-q)}\right)$$

$$= \frac{1}{[3]!}(1 + 3q + 3q^2 + q^3 - 1 - q - q^2 - q^3) = \frac{1}{[3]!}(2q + 2q^2)$$

$$= \frac{2q(1+q)}{[3]!}$$

$$B_0^3([3]) = \frac{1}{[3]!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix}4\\r\end{bmatrix}[3-r]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}[3-0]^3 + \frac{1}{[3]!}(-1)^1 q^{1(1-1)/2}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}[3-1]^3 +$$

$$\frac{1}{[3]!}(-1)^2 q^{2(2-1)/2}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}[3-2]^3$$

$$= \frac{1}{[3]!}\left([3]^3 - \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}[2]^3 + q\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{[3]!}\left((1+q+q)^3 - \frac{(1-q^4)}{(1-q)}(1+q)^3 + q\,\frac{(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q)(1-q^2)}\right)$$

$$= \frac{q^3}{[3]!}$$

$$B_0^4([1]) = \frac{1}{[4]!}\sum_{r=0}^{1-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix}5\\r\end{bmatrix}[3-r]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[1-0]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}$$

$$B_0^4([2]) = \frac{1}{[4]!}\sum_{r=0}^{2-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix}5\\r\end{bmatrix}[2-r]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[2-0]^4 + \frac{1}{[4]!}(-1)^1 q^{1(1-1)/2}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}[2-1]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}\left((1+q)^4 - \left(\frac{1-q^5}{1-q}\right)\right)$$

$$B_0^4([3]) = \frac{1}{[4]!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2}\begin{bmatrix}5\\r\end{bmatrix}[3-r]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}(-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[3-0]^4 + \frac{1}{[4]!}(-1)^1 q^{1(1-1)/2}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}[3-1]^4$$

$$+\frac{1}{[4]!}(-1)^2 q^{2(2-1)/2}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}[3-2]^4$$

$$= \frac{1}{[4]!}\left([3]^4 - \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}[2]^4 + q\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{[4]!}\left((1+q+q^2)^4 - \left(\frac{1-q^5}{1-q}\right)(1+q)^4 + q\,\frac{(1-q^4)(1-q^5)}{(1-q)(1-q^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{[4]!}(1+4q+10q^2+16q^3+19q^4+16q^5+10q^6+4q^7+q^8) -$$

$(1 + 5q + 11q^2 + 15q^3 + 16q^4 + 15q^5 + 11q^6 + 5q^7 + q^8) +$

$(q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7)$

$= \frac{q^3(3+5q+3q^2)}{[4]!}$

$B_0^4([4]) = \frac{1}{[4]!}\sum_{r=0}^{4-1}(-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix}5\\r\end{bmatrix}[4-r]^4$

$= \frac{1}{[4]!}\Big((-1)^0 q^{0(0-1)/2}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[4-0]^4 + (-1)^1 q^{1(1-1)/2}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}[4-1]^4 +$

$(-1)^2 q^{2(2-1)/2}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}[4-2]^4 + (-1)^3 q^{3(3-1)/2}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}[4-3]^4\Big)$

$= \frac{1}{[4]!}\Big([4]^4 - \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}[3]^4 + q\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}[2]^4 - q^3\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\Big)$

$= \frac{1}{[4]!}((1 + q + q^2 + q^3)^4 - (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)(1 + q)^4) -$

$q^3(1 + q^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)\Big)$

$= \frac{1}{[4]!}((1 + q + q^2 + q^3)^4 + (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)(-(1 + q + q^2)^4 +$

$q(1 + q^2)(1 + q)^4 - q^3(1 + q^2))\Big)$

$= \frac{1}{[4]!}((1 + q + q^2 + q^3)^4 + (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)(-(1 + q + q^2)^4 +$

$(q + q^3)(1 + q)^4 - q^3 - q^5)\Big)$

$= \frac{1}{[4]!}(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3 + 31q^4 + 40q^5 + 44q^6 + 40q^7 +$

$31q^8 + 20q^9 + 10q^{10} + 4q^{11} + q^{12}) -$

$(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3 + 31q^4 + 40q^5 + 43q^6 + 40q^7 + 31q^8 +$

$20q^9 + 10q^{10} + 4q^{11} + q^{12})$

$= \frac{1}{[4]!} q^6$

3.2. q-B-Spline ile Fonksiyonlara Yaklaşım

Bir f fonksiyonu $x_0 = [0]$, $x_{N+1} = [N]$ noktalarında ve

$$x_i = \frac{[i-1]+q[i]}{1+q} \text{ , } 1 \leq i \leq N \tag{3.13}$$

noktalarında verilsin. x_i, B_{i-2}^2 B-spline noktasıdır ve B_{i-2}^2 B-spline [[i-2],[i+1]] aralığında aşağıdaki maksimum değeri alır.

$$B_{i-2}^2(x_i) = \frac{[3]}{[2]^2} \tag{3.14}$$

kuadratik B-spline'dan

$$B_{i-2}^2(x_{i-1}) = \frac{q^2}{[2]^3} \, ve \, B_{i-2}^2(x_{i+1}) = \frac{q}{[2]^3} \tag{3.15}$$

bulunur. Burada x_{i-1} ve x_{i+1} (3.13)'den ifade edilir.

$$S(x) = \sum_{r=-2}^{N-1} a_r B_r^2(x), 0 \leq x \leq [N] \tag{3.16}$$

eşitliğinden N+2 interpolasyon koşulu sağlanır. Bu toplamdaki birinci B-spline olan $B_{-2}^2(x)$, bulunduğu aralıkta [-2] ve [-1] q-integer noktalarını içerir. Bu değerler

$$[-2] = \frac{1-q^{-2}}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{q^2}}{1-q} = \frac{q^2-1}{q^2(1-q)} = \frac{-(1-q)(1+q)}{q^2(1-q)} = \frac{-(1+q)}{q^2}$$

$$[-1] = \frac{1-q^{-1}}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{q}}{1-q} = \frac{q-1}{q(1-q)} = \frac{-1}{q}$$

şeklindedir.

Eşit aralıklı noktaları da olduğu gibi ilk olarak (3.16), (3.14) ve (3.15) den

$$\frac{q}{[2]^3}a_{i-3}+\frac{[3]}{[2]^2}a_{i-2}+\frac{q^2}{[2]^3}a_{i-1}=f(x_i)\quad,\quad 1\le i\le N \tag{3.17}$$

bulunur ki burada ki x_i (3.13)den tanımlanmıştır. x=0 ve [N] de

S(x) = f(x)

Eşitliğinden ilave iki denklem oluşur:

$$\frac{q}{1+q}a_{-2}+\frac{1}{1+q}a_{-1}=f(0) \tag{3.18}$$

ve

$$\frac{q}{1+q}a_{N-2}+\frac{1}{1+q}a_{N-1}=f([N]) \tag{3.19}$$

i=1 alınarak (3.18) ve (3,17) den a_{-2} katsayısını ve i = N alınarak (3.19) ve (3.17) den a_{N-1} katsayısı yok edilir. Böylece (3.17) den faydalanarak lineer denklem sistemini elde edilir.

$$\alpha a_{i-3}+\beta a_{i-2}+\gamma a_{i-1}\ ,\ \ 2\le i\le N-1 \tag{3.20}$$

yazılır ki burada

$$\alpha=\frac{q}{[2]^3},\beta=\frac{[3]}{[2]^2},\gamma=\frac{q^2}{[2]^3} \tag{3.21}$$

vardır ve birinci denklem;

$$\delta a_{-1}+\gamma a_0=f(x_1)-\frac{1}{[2]^2}f(0)$$

dır. Burada γ (3.21) de verilmiştir ve

$$\delta=\frac{q}{[2]}+\frac{q}{[2]^3}$$

olur. Son denklem;

$$\alpha a_{N-3} + \in a_{N-2} = f(x_N) - \frac{q^2}{[2]^2} f([N])$$

dir ve α (3.21) den verilirken

$$\in = \frac{1}{[2]} + \frac{q^2}{[2]^3}$$

şeklindedir.

Ma = b

Formu bir tridiagonal denklem sistemidir. Burada

$$a^T = [a_{-1}, a_0, \ldots, a_{N-2}]$$

$$b^T = [b_{-1}, b_0, \ldots, b_{N-2}]$$

dir. b^T nin birinci ve sonuncu elemanı

$$b_{-1} = f(x_1) - \frac{1}{(1+q)^2} f(x_0)$$

$$b_{N-2} = f(x_N) - \frac{q^2}{(1+q)^2} f(x_{N+1})$$

olur. Diğer elemanları ise

$$b_i = f(x_{i+2}) \quad , \quad 0 \le i \le N-3$$

tür. Sonuçta M, NxN tridiagonal matris oluşur.

$$M = \begin{bmatrix} \delta & \gamma & & & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & & \alpha & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{-1} \\ b_0 \\ . \\ . \\ . \\ b_{N-2} \end{bmatrix}$$

$q > 0$ için M'nin bütün elemanları pozitiftir. Bu tridiagonal matrisin çözümü ile a_{-1}, $a_0, \ldots, a_{N-2}$ katsayıları bulunur ve geriye kalan a_{-2} ve a_{N-1} katsayıları

$$a_{-2} = ((1 + q)\, f(0) - a_{-1}) / q \tag{3.22}$$

$$a_{N-1} = (1 + q)\, f([N]) - q a_{N-2}$$

den bulunur (Philips, 2003).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Örnek Problemler ve Tablolar ile Karşılaştırma

Örnek 4.1.1 $f(x) = e^{x/[N]}$ fonksiyonunu N=5 ve q = 0.95 olacak şekilde seçelim ve kuadratik B-spline yaklaşımını elde edelim.

N = 5 q = 0,95 $f(x) = e^{x/[N]}$ $1 \leq i \leq 5$

$2 \leq i \leq 4$ için;

$\alpha a_{i-3} + \beta a_{i-2} + \gamma a_{i-1}$ denklemi kullanılarak

i=2 için;

$\alpha a_1 + \beta a_0 + \gamma a_1$

i=3 için;

$\alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2$

i=4 için;

$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Burada $\alpha = \frac{q}{[2]^3}, \beta = \frac{[3]}{[2]^2}, \gamma = \frac{q^2}{[2]^3}$'dır.

$$\alpha = \frac{0,95}{(1+0,95)^3} = \frac{0,95}{7,414875} = 0,1181208$$

$$\beta = \frac{1+0,95(0,95)^2}{(1+0,95)^2} = \frac{2,8525}{3,8025} = 0,7101643$$

$$\gamma = \frac{(0{,}95)^2}{(1+0{,}95)^3} = \frac{0{,}9025}{7{,}414875} = 0{,}1117147$$

Birinci denklem;

$$\delta a_{-1} + \gamma a_0 = f(x_1) - \frac{1}{[2]^2} f(0)$$

Burada;

$$\delta = \frac{q}{[2]} + \frac{q}{[2]^3}$$

$$\delta = \frac{0{,}95}{1+0{,}95} + \frac{0{,}95}{(1{,}95)^3} = 0{,}4171794 + \frac{0{,}95}{0{,}857375}$$

= 0,4171794 + 1,1180332

= 1,5352126 şeklindedir.

Son denklem;

$$\alpha a_2 + \in a_3 = f(x_5) - \frac{q^2}{[2]^2} f([5]) \text{ dir.}$$

Burada;

$$\in = \frac{1}{[2]} + \frac{q^2}{[2]^3} \qquad \in = \frac{1}{[2]} + \frac{(0{,}95)^2}{[2]^3}$$

$$\in = \frac{1}{(1+0{,}95)} + \frac{(0{,}95)^2}{(1+0{,}95)^3} = 0{,}5128205 + \frac{0{,}9025}{7{,}414875}$$

= 0,5128205+ 0,1117147

= 1,6299875 şeklindedir.

Ma=b formunun bir tridiagonal denklem sistemidir.

Burada

a^T= [a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3]

b^T= [b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3]'dir.

b^T'nin birinci sonuncu elemanı;

$$b_{-1} = f(x_1) - \frac{1}{(1+q)^2} f(x_0) \text{ ve } b_3 = f(x_5) - \frac{q^2}{(1+q)^2} f(x_6) \quad (4.1)$$

denkleminden faydalanarak;

$$x_1 = \frac{[1-1]+0{,}95.[1]}{1+0{,}95} = \frac{0+0{,}95.1}{1{,}95} = 0{,}4171794$$

$$f(x_1) = f(0{,}4171794) = e^{0{,}4171794/[5]} = e^{0{,}4171794/3.854557}$$

$$= e^{0.1082301} = 1{,}1143041$$

$$f(x_0) = f([0]) = f(0) = e^{0/3.854557} = e^0 = 1$$

$$b_{-1} = 1{,}1143041 - \frac{1}{(1+0{,}95)^2} . 1$$

= 1,1143041 – 0.2199055

= 1.8943586

$$x_5 = \frac{[4]+0{,}95.[5]}{1+0{,}95} = 3{,}7099875 + 0{,}95 \,.\, 3{,}824383$$

= 3,709875 + 3.7331638

= 7.4430388

$$f(x_5) = e^{7{,}4430388/3{,}854557} = e^{1.9309712} = 6.81620502$$

$x_6 = [5] = 1 + 0{,}95 + (0{,}95)^2 + (0{,}95)^3 + (0{,}95)^4$=

1,95+0,9025+0.857375+0,1145082= 4,5381637

$f(x_6) = f(4.5381637) = e^{4{,}5381637/3{,}854557} = e^{1.1773502}$

= 3.2157621

$b_3 = 6{,}81620502 - \frac{(0{,}95)^2}{(1+0{,}95)^2}.3{,}2157621$

= 6,81620502 – 0,2373438 . 3,2157621

= 6,81620502 – 0,7632412 = 6,0529638

şeklindedir. Diğer elemanları ise;

$b_i = f(x_{i+2})$, $0 \leq i \leq 2$ şeklindedir.

i = 0 için

$b_0 = f(x_2)$

$x_2 = \frac{[1]+0{,}95.[2]}{1+0{,}95} = \frac{1+0{,}95.(1+0{,}95)}{1{,}95} = \frac{2{,}8525}{1{,}95} = 1{,}4628205$

$f(x_2) = e^{1{,}4628205/3{,}854557} = e^{0{,}3795041} = 1{,}4615596$

i = 1 için

$b_1 = f(x_3)$

$x_3 = \frac{[2]+0{,}95.[3]}{1+0{,}95} = \frac{(1+0{,}95)+(0{,}95)(1+0{,}95+(0{,}95)^2)}{1{,}95} = \frac{4{,}659875}{1{,}95}$

= 2,3896794

$$f(x_3) = f(2{,}3896794) = e^{\frac{2{,}3896794}{3{,}854557}} = e^{0{,}6199621} = 1{,}8588576$$

i = 2 için

$$b_2 = f(x_4) = \frac{[3]+0{,}95.[4]}{1{,}95} = \frac{(1+0{,}95+(0{,}95)^2)+0{,}95.(1+0{,}95+(0{,}95)^2(0{,}95)^3)}{1{,}95}$$

$$= \frac{2{,}8525+3{,}5243812}{1{,}95} = 3{,}2701955$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}5352126 & 0{,}1117147 & & & \\ 0{,}1181208 & 0{,}7101643 & 0{,}1117147 & & \\ & 0{,}1181208 & 0{,}7101643 & 0{,}1117147 & \\ & & 0{,}1181208 & 0{,}7101643 & 0{,}1117147 \\ & & & 0{,}1181208 & 1{,}6299875 \end{bmatrix}$$

$$.\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}8943586 \\ 1{,}4615596 \\ 1{,}8588576 \\ 3{,}2701955 \\ 6{,}0529638 \end{bmatrix}$$

Bu tridigonal sistemin çözümünden;

a_{-1}=1,1100367, a_0=1,3778033, a_1=1,6917329

a_2= 2,559284 ve a_3=2,4742331 katsayıları şekildeki gibi bulunur.

a_{-2} ve a_4 katsayıları ise (3.22) denklemi yardımıyla;

$a_{-2} = \frac{((1+q).f(0)-a_{-1})}{q}$ ve a_4 = (1+q) f([5]) – q.a_3

$$a_{-2} = \frac{((1+0{,}95).1-1.100367)}{0{,}95} = \frac{0{,}8399633}{0{,}95} = 0{,}8841718$$

$$f([5]) = f(3{,}824383) = e^{3{,}824838/3{,}854557} = e^{0{,}9921718} = 2{,}6970858$$

a_4 = (1,95).(2,6970858) – 0,95.2,4742331

$= 5{,}2593173 – 2{,}3505214 = 2{,}9087959$

$$B_{i-2}^{2}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-[i-2])^2}{q^{2i-4}[2]} & ; \quad [i-2] < x \le [i-1] \\ \dfrac{[3]}{[2]^2} - \left(\dfrac{([i-1]-x)+q([i]-x)}{q^{i-1}[2]}\right)^2 & ; \quad [i-1] < x \le [i] \\ \dfrac{([i+1]-x)^2}{q^{2i-1}[2]} & ; \quad [i] < x \le [i+1] \\ 0 & ; \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$S(x) = \sum_{r=-2}^{4} a_r B_r^2(x), 0 \le x \le [5]$

$= a_{-2}B_{-2}^2(x) + a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0 B_0^2(x) + a_1 B_1^2(x) + a_2 B_2^2(x) + a_3 B_3^2(x)$

$+ \quad a_4 B_4^2(x)$

yukarıdaki 2 açılımdan faydalanılarak ;

x=[1] için;

$S(x) = a_{-2}B_{-2}^2(x) + a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0 B_0^2(x)$

$= \frac{([1]-[1])^2}{q^{-1}.[2]} \,.\, a_{-2} + \left(\frac{[3]}{[2]^2} - \left(\frac{(-[1])+q.([1]-[1])}{q^{1-1}.[2]}\right)^2\right).a_{-1} + \frac{([1]-[0])^2}{q^0[2]}.\, a_0$

$= 0.0{,}8841718 + (0{,}7501643 – 0{,}2629848).1{,}1100367$

$+ \quad 0{,}5128205.1{,}3778033 = 1{,}247353$

x=[2] için;

$S(x) = a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0 B_0^2(x) + a_1 B_1^2(x)$

$= \frac{([2]-[2])^2}{q^1.[2]} \,.\, a_{-1} + \left(\frac{[3]}{[2]^2} - \left(\frac{([1]-[2])+q.(2-[2])}{q^1.[2]}\right)^2\right).a_0 + \frac{([2]-[1])^2}{q^2[2]}.\, a_1$

= 0.1,1100367 + (0,7501643 – 0,2629848).1,3778033

+ 0,8675553 =1,538793

x=[3] için;

S(x) = $a_0 B_0^2$(x) +$a_1 B_1^2$(x) + $a_2 B_2^2$(x)

$$= \frac{([3]-[3])^2}{q^3.[2]} \cdot a_0 + \left(\frac{[3]}{[2]^2} - \left(\frac{([2]-[3])+q.([3]-[3])}{q^2.[2]}\right)^2\right).a_1 + \frac{([3]-[2])^2}{q^4[2]} \cdot a_2$$

= 0.1,3778033 + (0,7501643 – 0,2629848).1,6917329

+ 0,11259018.2,559284=1,878500

x=[4] için;

S(x) = $a_1 B_1^2$(x) +$a_2 B_2^2$(x) + $a_3 B_3^2$(x)

$$= \frac{([4]-[4])^2}{q^5.[2]} \cdot a_1 + \left(\frac{[3]}{[2]^2} - \left(\frac{([3]-[4])+q.([4]-[4])}{q^3.[2]}\right)^2\right).a_2 + \frac{([4]-[3])^2}{q^6[2]} \cdot a_3$$

= 0.1,6917329 + (0,7501643 – 0,2629848).2,559284

+ 0,5128205.2,4742331 =2,270444

[1] = 1 [2] = 1,95 [3] = 2,8525 [4] = 3,7098749

$e^{1/3,854557} = 1,247354$ $e^{2,8525/3,854557} = 1,878499$

$e^{1,95/3,854557} = 1,537793$ $e^{3,7098749/3,854557} = 2,270441$

x	[1]	[2]	[3]	[4]
s(x)	1,247353	1,538793	1,878500	2,270444
$e^{x/[5]}$	1,247354	1,538793	1,878499	2,270441

Tablo 4.1. $e^{x/[5]}$ fonksiyonuna q-B spline fonksiyonu ile yaklaşım için karşılaştırma

Buradan da;

$f([2]) \cong S([2]) = 1{,}538793$ olarak hesaplanır. O halde hata;

$|f([3]) - S([3])| = |1{,}878500 - 1{,}878499| = |0.000001|$

$= 0.00001$

Örnek 4.1.2:

N = 4 q = 0,05 $f(x) = e^{x/[4]}$ $1 \leq i \leq 4$

$2 \leq i \leq 3$ için

$\alpha a_{i-3} + \beta a_{i-2} + \gamma a_{i-1}$ (3.20) denklemi kullanılarak;

i = 2 için;

$\alpha a_{i-1} + \beta a_0 + \delta a_1$

i = 3 için;

$\alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Burada; $\alpha = \frac{q}{[2]^3}$, $\beta = \frac{3}{[2]^3}$, $\gamma = \frac{q^2}{[2]^3}$ 'dır.

$\alpha = \frac{0{,}05}{[2]^3} = \frac{0{,}05}{1{,}157625} = 0{,}0441918$

$$\beta = \frac{3}{[2]^3} = \frac{3}{(1+0,05)^2} = \frac{3}{1,1025} = 2,7210884$$

$$\gamma = \frac{(0,05)^2}{(1+0,05)^3} = \frac{0,0025}{1,157625} = 0.0021595$$

Birinci denklem;

$$\delta a_{-1} + \gamma\, a_0 = f(x_1) - \frac{1}{[2]^2} f(0)$$

Burada; $\delta = \frac{q}{[2]} + \frac{q}{[2]^3}$

$$= \frac{0,05}{(1+0,05)} + \frac{0,05}{(1+0,05)^3} = 0,0476190 + \frac{0,05}{1,157625}$$

$$= 0,0476190 + 0,0431918 = 0,0908108$$

Son denklem;

$$\alpha a_1 + \in a_2 = f(x_4) - \frac{q^2}{[2]^2} f([4])$$ ‘dir.

Burada;

$$\in = \frac{1}{[2]} + \frac{q^2}{[2]^3}$$

$$= \frac{1}{(1+0,05)} + \frac{(0,05)^2}{(1,05)^3} = 0,9523809 + \frac{0,0025}{1,157625}$$

$= 0,952380 + 0,0021595 = 0,9545404$ şeklindedir.

Ma = b formunun bir triagonal denklem sistemidir.

Burada;

$$a^T = [a_{-1}, a_0, a_1, a_2]$$

$b^T = [b_{-1}, b_0, b_1, b_2]$ ‘dir.

b^T’nin birinci ve sonuncu elmanı;

$b_{-1} = f(x_1) - \frac{1}{(1+q)^2} . f(x_0)$ ve $b_2 = f(x_4) - \frac{q^2}{(1+q)^2} f(x_5)$

(3.13) denkleminden faydalanarak;

$$x_1 = \frac{[1-1]+0,05.[1]}{1+0,05} = \frac{0+0,05.1}{1,05} = 0,0476190$$

$$f(x_1) = f(0,0476190) = e^{0,0476190/[4]} = e^{0,0576190/1,052625}$$

$$= e^{0,0452383} = 1,0462771$$

$$f(x_0) = f([0]) = f(0)\ e^{0/1,052625} = e^0 = 1$$

$$b_{-1} = 1,0462771 - \frac{1}{(1,05)^2} - 1 = 1,0462771 - 0,9070294 = 0,1392477$$

$$x_4 = \frac{[3]+q[4]}{1+0,05} = \frac{1.0525+(0,05).(1,052625)}{1,05}$$

$$= \frac{1,0525+0,0526312}{1,05} = \frac{1,1051312}{1,05} = 1,0525059$$

$$f(x_4) = e^{1,0525059/1,052625}$$

$$= e^{0,9998868} = 2,7179741$$

$$x_5 = [4] = 1+0,05 + (0,05)^2 + (0,05)^3 = 1,0526312$$

$$f(x_5) = e^{1,0526312/1,052625} = e^{1,0000058} = 2,7182975$$

$$b_2 = 2,7179741 - \frac{(0,05)^2}{(1,05)^2} . 2,718297 = 2,7179741 - 0,0022675 . 2,7182975$$

$= 2,7179741 - 0,0061410 = 2,7118331$

Diğer elemanları ise;

$b_i = f(x_{i+2})$, $0 \leq i \leq 1$ şeklindedir.

i = 0 için;

$b_0 = f(x_2)$

$$x_2 = \frac{[1]+q.[2]}{1+q} = \frac{1+0,05.(1,05)}{1,05} = \frac{1,0525}{1,05} = 1,0023809$$

$$f(x_2) = e^{1,0023809/1,052625} = e^{0,9522678} = 2,5915801$$

i = 1 için

$b_1 = f(x_3)$

$$x_3 = \frac{[2]+q.[3]}{1+q} = \frac{(1,05)+0,05.1,0525}{1,05} = \frac{1,102625}{1,05} = 1,05011905$$

$$f(x_3) = e^{1,05011905/1,052625} = e^{0,9976193} = 2,7118181$$

$$\begin{bmatrix} 0,0908108 & 0,0021595 & 0 & 0 \\ 0,0431918 & 2,7210884 & 0,0021595 & 0 \\ 0 & 0,0431918 & 2,7210884 & 0,0021595 \\ 0 & 0 & 0,0431918 & 0,9545404 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1392477 \\ 2,5915801 \\ 2,7118181 \\ 2,7118331 \end{bmatrix}$$

Bu tridiagonal sistemin çözümünden;

$a_{-1} = 1,5113231$, $a_0 = 0,927639$, $a_1 = 0,9796492$

$a_2 = 2,7966551$ katsayıları şekildeki gibi bulunur.

a_{-2} ve a_4 katsayıları ise (3.22) denklemi yardımıyla;

$a_{-2} = \frac{(1+q).f(0)-a_{-1})}{q}$ ve a_3 = (1+q) f ([4]) – q a_2

$a_{-2} = \frac{((1+005).1-1{,}5113231)}{0{,}05} = -9{,}226462$

f([4]) = f(1,052625) = $e^{1,052625/1,052625}$ = e^1 = 2,7182818

a_3 = (1+0,05). 2,7182818 – 0,05. 2,7966551

= 2,8541958 – 0,1398327 = 2,7143631

B_{i-2}^{2} (x) ve S(x) in açılımından ;

$S(x) = \sum_{r=-2}^{3} a_r B_r^2(x), 0 \leq x \leq [4]$

$=a_{-2}B_{-2}^2(x) + a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0B_0^2(x) + a_1B_1^2(x) + a_2B_2^2(x) + a_3B_3^2(x)$

x=[1] için;

$S(x) = a_{-2}B_{-2}^2(x) + a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0B_0^2(x)$

$= \frac{([1]-[1])^2}{q^{-1}.[2]} . a_{-2} + (\frac{[3]}{[2]^2} - (\frac{([0]-[1])+q.([1]-[1])}{q^0.[2]})^2).a_{-1} + \frac{([1]-[0])^2}{q^0[2]}. a_0$

= 0.(-9,226462) + (0,9546485 – 0,9070294).0,9796492

+ 0,9070294.0,927639 =2,585725

x=[2] için;

$S(x) = a_{-1}B_{-1}^2(x) + a_0B_0^2(x) + a_1B_1^2(x)$

$= \frac{([2]-[2])^2}{q^{1}.[2]} . a_{-1} + (\frac{[3]}{[2]^2} - (\frac{([1]-[2])+q.([2]-[2])}{q^1.[2]})^2).a_0 + \frac{([2]-[1])^2}{q^2[2]}. a_1$

= 0.1,5113231 + (0,9546485 – 0,9070293).0,927639

$+ \quad 0,9523809.0,9796492 = 2,7115112$

x=[3]   için;

$S(x) = a_0 B_0^2(x) + a_1 B_1^2(x) + a_2 B_2^2(x)$

$= \frac{([3]-[3])^2}{q^3.[2]} . a_0 + (\frac{[3]}{[2]^2} - (\frac{([2]-[3])+q.([3]-[2])}{q^2.[2]})^2).a_1 + \frac{([3]-[2])^2}{q^4[2]}. a_2$

$= 0.0,927636 + (0,9546485 - 0,9070294).0,9796492$

$+ \quad 0,9523809.2,7966551 = 2,717959$

$[1] = 1 \qquad [2] = 1+q = 1,05 \qquad [3] = 1+q+q^2 = 1,0525$

$e^{x/[4]} = e^{1/1,052625} = e^{0,9500059} = 2,5857249$

$e^{1,05/1,052625} = e^{0,9975062} = 2,7115114$

$e^{1,0525/1,052625} = e^{0,9975062} = 2,7179589$

x	[1]	[2]	[3]
S(x)	2,585725	2,7115112	2,717959
$e^{x/[4]}$	2,5857249	2,7115114	2,7179589

Tablo 4.2. $e^{x/[4]}$ fonksiyonuna q-B spline fonksiyonu ile yaklaşım için karşılaştırma

Buradan da;

$f([2]) \cong S([2]) = 2,7115113$ olarak hesaplanır. O halde hata;

$|f([3]) - S([3])| = |2,7115112 - 2,7115114| = |-0.0000002|$

$= 0.00000$

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada eğri uydurmada eğrimizi en iyi temsil edebilme kabiliyeti en yüksek olan spline fonksiyonu ,[t_i, t_{i+n+1}] aralığında tanımlı B-spline fonksiyonu q-integer noktalarında incelenmiştir ve q-B-spline ile fonksiyonlara en iyi yaklaşımlar yapılarak yaklaşık çözüm ile tam çözümler karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma da hatanın çok küçük olması yöntemin uygunluğunu ortaya koymaktadır.

İlerideki çalışmalarda bu yöntem daha karmaşık fonksiyonlara uygulanarak hata payları incelenebilir. Bu çalışmanın birçok fonksiyona uygulanabilmesi spline fonksiyonlarının kullanıldığı bütün alanlara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Ahlberg J.H. , Nilson E.N., Walsh J.L. (1967) *The Theory of Splines and Their Application* , Academic Pres.

Albasiny, E.L., Hoskins, W.D. (1968) Cubic spline solutions to two-point boundary value problems. Comp. J., 151-153.

Alkan, S. (2011) *Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla.

Anonim a, http://en.wikipedia.org/wiki/Spline-(mathematics)

Bayram, M. (2002) *Nümerik Analiz*, Aktif Yayınevi, İstanbul, 499 s.

Dağ,İ. (1987) *Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümünde Spline Fonksiyon Uygulamaları* , Yüksek Lisans Tezi ,Erciyes Üniversitesi ,Kayseri.

Davis, J.P. (1975) *Interpolation and Approximation*, Dover, New York.

De Boor,C.(1978) *A practical Guide to Splines.Springer-Verlag* , New York , Inc , 336s.

Doğan, M. (2008) *q-Integer Noktalarında B-Spline Fonksiyonu ve Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla.

Dönmez, D. (2008) *Diferansiyel Denklemlerin B-Spline ile Çözümleri Hakkında*, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa.

Irk, D. (2007) *Bazı Kısmı Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerinin B-Spline Sonlu Elemanlar Çözümleri*, Doktora Tezi , Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Kim, M.S., Son, J.W. (2002) *A Note On q-difference Operators,* Korean North.Soc., 17, No:3, pp.423-430.

Koc, V., Cheung, P. (2002) *Quantum Calculus, Springer- Verlag,* New York.

Koçak, Z.F. (2001) The choice of knots in solving boundary value problems by cubic splines. J. Faculty of Science Ege University series A vol 24, No:1.

Koçak, Z.F. , Philips , G.M. (1994) An Identity Involving The q-Faktorial, The Sixth International Reserch Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, 18-22 july 1994, Washington, USA ,Vol.6,291-295.

Koçak, Z.F., Philips, G.M. (1994) *B-splines with geometric knot spacings*, BIT 34, 388-399.

Koçak, Z.F., Philips, G.M. (1996) B-splines with knots spaced in geometric progression, Proceedings of the International Conference on Approximation and Optimization, Romania-Vol 1, pp.287-290.

Özdemir, A. (1996) *Diferansiyel Denklem sistemlerinin Spline Fonksiyonu Yardımıyla Çözümü ve Bir Uygulama* , Yüksek Lisans Tezi , Sakarya Üniversitesi , Sakarya.

Philips, G.M. (2003) *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer-Verlag, New York.

Prenter,P.M. (1975) *Splines and Variational Methods*, Wiley ,New York.

Ralston, A., Rabinowitz, P. (2001) *A First Caurse In Numerical Analysis*, Mc Graw Hill, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Muğla'da doğdu. Lise öğrenimini 2004-2008 yılları arasında Muğla Anadolu Lisesi'nde tamamladı.2008-2011 yılları arasında Muğla Üniversitesi'nde Fen Fakültesi Matematik bölümünü bölüm birincisi fakülte üçüncüsü olarak bitirdi.2011 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde uygulamalı matematik dalında tezli yüksek lisansa başladı.2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda göreve başladı ve evlendi. Şu anda Yatağan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmenliği yapmakta.