KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL k-DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLERE SAHİP ALTMANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Cihan ÖZGÜR

Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

HAZİRAN 1997

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL k- DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLERE SAHİP ALTMANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cihan ÖZGÜR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17. 06.1997
Tezin Savunulduğu Tarih : 16. 07.1997

Tez Danışmanı
Prof.Dr. Servettin BİLİR
(.......................)

Tez Danışmanı
Doç.Dr. Kadri ARSLAN
(.......................)

Üye
Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
(.......................)

Üye
Yrd.Doç.Dr. Rıdvan EZENTAŞ
(.......................)

Üye
Yrd.Doç.Dr. Ahmet ZOR
(.......................)

HAZİRAN 1997

NOKTASAL k-DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLERE SAHİP ALTMANİFOLDLAR

Cihan ÖZGÜR

Anahtar Kelimeler: Normal Kesit, İzotropik Altmanifold, Chen Altmanifoldu, Birinci Normal Uzay.

Özet: Bu çalışmada n-boyutlu bir $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldunun 2-düzlemsel normal kesitlere sahip olup olmama durumları incelenmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ele alınmıştır. İkinci bölümde noktasal 2-düzlemsel normal kesitlere sahip altmanifoldlar ve Chen Yüzey' leri incelenerek; bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Üçüncü bölüm orjinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde 2-düzlemsel sayı $\pi(2)$ tanıtılmış; M nin birinci normal uzayı $N_x^1(M)$ ile $\pi(2)$ arasında bağıntı kurularak, bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

SUBMANIFOLDS WİTH k-PLANAR NORMAL SECTIONS

Cihan ÖZGÜR

Key Words: Normal Sections, Isotropic Submanifolds, Chen Submanifolds, First Normal Space

Abstract: The object of this thesis is to study submanifolds with pointwise 2-planar normal sections in the Euclidean space $\mathbf{R}^n$. Especially classify the submanifolds with pointwise 2-planar normal sections.

The thesis has three chapters. In the first chapter; the well-known definitions which will be used in the other chapters were given. In the second chapter; Submanifolds which have P2-PNS property was studied. Also some basic examples with P2-PNS property was given. Finally some examples of Chen Surfaces was given. The final chapter contains the original work. In this chapter the relation between 2-planar number $\pi(2)$ with dimension of the first normal space $N_x^1(M)$ was established.

Some results related with dimension of the first normal space $N_x^1(M)$ and the 2-planar number $\pi(2)$ was obtained.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada ilerideki doktora çalışmalarıma temel teşkil etmesini düşündüğüm noktasal k-düzlemsel normal kesitlere sahip altmanifoldlar incelenmiştir.

Çalışmalarım sırasında bana her türlü destek ve yardımı yapan ve bu tezin herbir satırında sonsuz emeği olan sayın hocam Doç. Dr. Kadri ARSLAN'a (Uludağ Üniv.), bana herzaman moral veren sayın hocam Prof. Dr. Servettin BİLİR'e, çalışmalarımın aksamadan yürümesi için her türlü desteği veren sayın hocam Prof. Dr. Turgut BAŞKAN'a (Balıkesir Üniv. F.E.F. Dekanı), sayın hocam Prof. Dr. S. Ahmet KILIÇ'a (Balıkesir Üniv. F.E.F Mat.Böl.Bşk.), öneri ve görüşlerinden faydalandığım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Rıdvan Ezentaş'a (Uludağ Üniv.), sevgili arkadaşım Arş. Gör. Yunus ÇELİK'e (Dumlupınar Üniv.), yazım esnasında yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Arş. Gör. Recep ŞAHİN'e (Balıkesir Üniv.) ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1: M bir diferansiyellenebilir manifold (C^∞ manifold) olmak üzere M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımladığında, M manifoldu bu iç çarpım ile birlikte bir **Riemann manifold**'u oluşturur (Chen 1973).

Tanım 1.2: M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f,g \in C^\infty(M,IR)$, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

i)$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii)$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.3: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

ii) $X < Y,Z >=< \nabla_X Y,Z > + < Y,\nabla_X Z >$

şartlarını sağlıyorsa , ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu **Riemann Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.4: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup herbir C^∞ $X,Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Böylece aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya **Lineer Koneksiyon** (veya kovaryant türev) adı verilir (Hacısalihoğlu 1980).

$\forall X,Y \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M,IR)$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_{fX} Y = f\,\nabla_X Y$,

iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Tanım 1.5: M ve N birer C^∞ manifold olsun. f, M den N ye tanımlı bir C^∞ fonksiyon olmak üzere, $(f_*)p$ jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M nin herbir p noktası için birebir ise f fonksiyonuna bir **immersiyon** denir (Chen 1973).

Tanım 1.6: M ve N birer C^∞ manifold ve $f:M \rightarrow N$ bir C^∞ fonksiyon olsun. f nin f_* jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm birebir ve f tek değişkenli ise f ye M den N ye bir **imbedding** adı verilir (Chen 1973).

Tanım 1.7: f bir immersiyon olmak üzere $\forall X,Y \in T_pM$ için,

$$< f_*(X), f_*(Y) > = < X, Y >$$

ise f ye bir **izometrik immersiyon** adı verilir (Chen 1973).

Tanım 1.8: M ve N sırasıyla n ve n+d boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu ve ∇ da N de kovaryant türev olsun. X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere $(D_XY)_p$ her p için tanımlıdır. Ayrıca $(\nabla_XY)_p$ ile tanjant bileşen ve $h_p(X,Y)$ ile normal bileşen tanımlandığından $(\nabla_XY)_p \in T_p(M)$ ve $h_p(X,Y) \in N_p(M)$ için;

$$(D_XY)_p = (\nabla_XY)_p + h_p(X,Y) \tag{1.1}$$

biçiminde **Gauss Eşitliği** elde edilir. Burada h , M nin **ikinci temel formu** dur. Eğer h=0 ise M ye **total geodezik** denir (Chen 1973).

Tanım 1.9: M, N nin alt manifoldu olmak üzere M ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. $\overline{\nabla}_X\xi$ nin teğet bileşeni $-A\xi(X)$ ve normal bileşeni $D_X\xi$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) x \chi^{\perp}(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece;

$$(\overline{\nabla}_X\xi)_X = -(A\xi(X))_X + (D_X\xi)_X \tag{1.2}$$

biçiminde **Weingarten Eşitliği** elde edilir. Burada $A\xi$ *ye* **şekil operatörü** D ye de M nin N(M) normal demetindeki **(normal) koneksiyon** adı verilir (Chen 1973).

Önerme 1.1: M , N nin bir altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall \xi \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\langle A\xi X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \xi\rangle \tag{1.3}$$

dir. Burada <,>, $\mathbf{R}^n$ de skalar çarpımdır (Chen 1973).

İkinci temel form h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla}_X h$;

$$\boxed{(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_XY,Z) - h(Y,\nabla_XZ)} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\overline{\nabla}h=0$ ise M nin **ikinci temel formu parelel** dir denir.

Böylece M nin N(M) normal demetinde tanımlanan $\overline{\nabla}$ normal koneksiyonu;

$$\overline{\nabla}_X(h(Y,Z))=\overline{\nabla}_Y(h(X,Z))=(\overline{\nabla}_Z h)(X,Y) \qquad (1.5)$$

şeklinde **Codazzi Eşitliği** 'ni sağlar (Chen 1973).

Tanım 1.10: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. Böylece;

$\alpha: I \subset IR \to M$

eğrisi için;

$$\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t)=0 \qquad (1.6)$$

eşitliği sağlanıyorsa α ya M de bir geodezik eğri ve $\forall X \in T_pM$ tanjant vektörü için $\alpha(0)=X$ ve $\alpha'(0)=X_0$ olacak şekilde tanımlanan;

$\alpha:]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$
geodeziğinede (X,X_0) nin belirlediği **geodezik** adı verilir (Chen 1973).

Tanım 1.11: $\alpha: I \subset \mathbf{R} \to M$ eğrisi, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ şartını sağlıyorsa α ya bir **regüler eğri** denir (Neill 1966).

Tanım 1.12: M bir Riemann manifoldu ve ξ bir normal vektör alanı olsun. Eğer M ye teğet herhangi bir X vektörü için $D_X\xi = 0$ ise ξ ya **paralel normal vektör alanı** denir (Chen 1973).

Tanım 1.13: M , $\overline{M}$ nın n boyutlu bir altmanifoldu olsun.

$$H=\frac{1}{n}\,\text{iz}h$$

M nin **ortalama eğrilik vektörü** olarak adlandırılır. Eğer H= 0 ise M altmanifolduna **minimal** denir (Chen 1973).

BÖLÜM 2

NOKTASAL 2-DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLERE SAHİP ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde noktasal 2-düzlemsel normal kesitlere sahip altmanifoldlar ve Chen yüzeyleri incelenerek, bunlarla ilgili örnekler verilmiştir.

$\mathbf{R}^{n+d}$ (n+d) boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu diferansiyellenebilir bir altmanifold olsun. Ayrıca $p \in M$ ve $0 \neq X \in T_pM$ için p nin bir komşuluğunda bir $E(p,X) \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ alt uzayını

$E(p,X) = p + \mathrm{Span}\{X, N_pM\}$, boy $E(p,X) = d+1$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $M \cap E(p,X)$ kesişimi lokal anlamda

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ yay parametresi

$\gamma(0) = p$

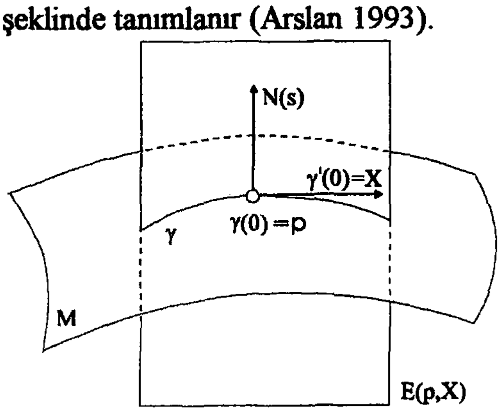
ve

$\gamma'(0) = X$

olacak şekilde M nin bir regüler eğrisini oluşturur. (Bak Şekil 2.1). Bu eğriye M nin p noktasında ve X yönünde bir normal kesiti adı verilir. Böylece $N(s) \in N_pM$ ve $\lambda(s) \in \mathbf{R}$ için, böyle bir $\gamma(s)$ normal kesiti,

$$\gamma(s) = p + \lambda(s)X + N(s) \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Arslan 1993).



Şekil 2.1

Tanım 2.1 : M nin her bir $\gamma(s)$ normal kesit eğrisi için s=0 noktasında γ nın yüksek mertebeden türevleri için

$$\{\gamma'(0), \gamma''(0), \gamma'''(0)\}$$

sistemi $\mathbf{R}^{n+d}$ de lineer bağımlı ise M manifolduna **noktasal 2-düzlemsel normal kesitlidir (P2-PNS özelikli)** denir (Arslan 1993).

Tanım 2.2 : M nin her bir $\gamma(s)$ normal kesiti aynı zamanda M nin bir geodeziği (veya denk olarak M nin her geodeziği aynı zamanda M nin bir normal kesiti) ise M ye **geodezik normal kesitlidir** denir (Chen - Verhayen 1984).

Önerme 2.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n boyutlu bir altmanifold olsun. O zaman M P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak her $\gamma(s)$ normal kesiti için

$$\{N''(0), N'''(0)\} \tag{2.2}$$

sistemi lineer bağımlıdır (Arslan-West 1996. a).

İspat : $\Rightarrow$) M nin p noktasında X yönünde bir normal kesiti $\gamma(s)$ olsun. Böylece (2.1) in s ye göre türevi alınırsa s=0 noktasında

$$\gamma'(0) = X,$$
$$\gamma''(0) = \lambda''(0)X + N''(0) \tag{2.3}$$

bulunur. s yay parametresi olarak seçildiğinden,

$$\|\gamma'(s)\|^2 = <\gamma'(s), \gamma'(s)> = 1$$

dir. Buradan s ye göre türev alınırsa ,

$$<\gamma''(s), \gamma'(s)> = 0$$

bulunur. Böylece (2.3) gereği

$$<\lambda''(0)X + N''(0), X> = 0$$

olup

$$\lambda''(0) <X, X> + <N''(0), X> = 0$$

dır. Ayrıca , $X = \gamma'(0)$

olduğundan

$$<\gamma'(0), \gamma'(0)> = <X, X> = 1$$

dir. Böylece $N''(0) \in N_pM$ ve $X \in T_pM$ olduğundan

$$<N''(0), X> = 0$$

dır.Buradan

$$\lambda''(0) = 0 \text{ ve } \gamma''(0) = N''(0) = h(X,X) \tag{2.4}$$

bulunur. Ayrıca (2.1) in üçüncü türevinden

$\gamma'''(0) = \lambda'''(0)X + N'''(0)$

elde edilir. $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özelikli olduğundan $\{\gamma'(0), \gamma''(0), \gamma'''(0)\}$ lineer bağımlıdır. Böylece $\{N''(0), N'''(0)\}$ de lineer bağımlıdır.

$\Leftarrow$) Tersine $N''(0)$ ile $N'''(0)$ lineer bağımlı ise $\gamma'(0), \gamma''(0)$ ve $\gamma'''(0)$ da lineer bağımlı olmak zorundadır.

Önerme 2.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P1-PNS özeliklidir ancak ve ancak M total geodeziktir (Arslan 1993).

Önerme 2.3 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak her bir $p \in M$ ve her bir $X \in T(M)$ için $h(X,X)$ ve $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ vektörleri N_pM de lineer bağımlıdır (Arslan-West 1996.b) .

İspat : $p \in M$ ve $X \in T_pM$ olmak üzere , M nin γ normal kesiti , s bir yay parametresi olmak üzere $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$ başlangıç şartlarını ile verilsin. $\gamma'(s) = T$ ile gösterelim. Böylece (1.1) ve (1.2) yardımı ile,

$\gamma''(s) = D_T T = \nabla_T T + h(T,T)$

$$\gamma'''(s) = D_T(D_T T) = \nabla_T \nabla_T T + h(\nabla_T T, T) - A_{h(T,T)} T + D_T h(T,T) \tag{2.5}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan (2.1) denkleminden,

$$\gamma'''(0) = \lambda'''(0)X + N'''(0) \tag*{(2.5)*}$$

olduğundan Önerme.2.1 gereği $N''(0) = h(X,X)$ ve $N'''(0) = \overline{\nabla} h(X,X)$ elde edilir. Böylece Önerme.2.1 yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.3 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldunun $p \in M$ noktasında ve $X \in T_pM$ yönünde normal kesiti $\gamma(s)$ olmak üzere , $\gamma(s)$ nin birinci Frenet Eğriliği k(s);

$$k^2(s) = \|\gamma''(s)\|^2 = \|\nabla_T T\|^2 + \|h(T,T)\|^2, \quad T = \gamma'(s) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır (Chen 1981) .

Önerme 2.4 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldunun $p \in M$ noktasında ve $X \in T_pM$ yönünde normal kesiti $\gamma(s)$ olmak üzere , $\gamma(s)$ nin birinci Frenet Eğriliği k(s) ise

$$\lambda'''(0) = -k^2(0)$$

dır (Arslan 1993).

İspat: M nin p noktasında ve $X=\gamma'(0)$ yönünde bir normal kesiti $\gamma(s)$ olsun. Böylece

$$<\gamma'(s), \gamma''(s)>= 0$$

olduğundan bu ifadenin s yay parametresine göre türevi alınırsa s=0 noktasında

$$<\gamma''(0), \gamma''(0)>+<\gamma'(0), \gamma'''(0)>= 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (2.4) ve (2.5)* eşitlikleri yardımı ile

$$<h(X,X), h(X,X)> + <X, (\lambda'''(0)X + N'''(0))>= 0$$

bulunur. Böylece

$$<h(X,X), h(X,X)> +\lambda'''(0) <X, X>= 0$$

ve

$$<X, N'''(0)>= 0$$

dır. Bununla beraber X= $\gamma'(0)$ ve s yay parametresi olduğundan

$$<h(X,X), h(X,X)>= -\lambda'''(0)$$

olup (2.6) denklemi yardımı ile

$$\lambda'''(0) = -k^2(0)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n boyutlu bir altmanifold olsun. Böylece M altmanifoldu P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak $\forall X \in T_pM$ için

$$\|h(X,X)\|^2(\overline{\nabla}_X h)(X,X) =< h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) > h(X,X) \tag{2.7}$$

dir (Arslan-West 1996. b).

İspat: ($\Leftarrow$): Eğer (2.7) eşitliği sağlanıyorsa h(X,X) ve $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ lineer bağımlıdır. Böylece Önerme.2.3. gereği M altmanifoldu P2-PNS özeliklidir.

($\Rightarrow$): Tersine h(X,X) $\neq 0$ ise

$$\|h(X,X)\|^2(\overline{\nabla}_X h)(X,X) - < h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) > h(X,X)$$

$h(X,X)$ vektörüne dik olacaktır. Böylece $h(X,X)$ ve $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ lineer bağımlı ise ilk vektör sıfıra eşit olmak zorundadır. Bu da bize (2.7) yi verir. Eğer $h(X,X)=0$ ise (2.7) nin sağlandığı aşikardır.

Teorem 2.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n boyutlu ($n \geq 2$) bir altmanifold olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $\forall X \in T_pM$ için $(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0$ dır.

ii) $\overline{\nabla} h = 0$ dır. Yani ikinci temel form h paraleldir.

iii) M altmanifoldu P2-PNS özeliklidir ve

$$\frac{dk^2(0)}{ds} = 0$$

dır (Chen 1981).

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii): $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ ifadesi $X \in T_pM$ nin seçiminden bağımsız olarak sıfıra eşit olduğundan $\overline{\nabla} h = 0$ dır. Yani h paraleldir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ nin ikinci temel formu h için $\overline{\nabla} h = 0$ ise Teorem.2.1 gereği M altmanifoldu P2-PNS özeliklidir. Böylece γ eğrisi M nin normal kesiti olduğundan

$$\gamma'(s) = T$$

$$\gamma''(s) = D_T T = \nabla_T T + h(T,T)$$

$$k^2(s) = \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + \langle h(T,T), h(T,T) \rangle$$

dir. Böylece

$$\frac{dk^2(s)}{ds} = 2 \langle D_T(\nabla_T T), \nabla_T T \rangle + 2 \langle D_T(h(T,T)), h(T,T) \rangle \tag{2.9}$$

$$= \langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + \langle h(T, \nabla_T T), \nabla_T T) \rangle + 2 \langle D_T(h(T,T)), h(T,T) \rangle$$

dir. Ayrıca

$$A_{h(T,T)} T \perp h(T,T)$$

ve

$$h(\nabla_T T, T) \perp \nabla_T T$$

olduğundan

$$\frac{dk^2(s)}{ds} = 2 \langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + 2 \langle D_T h(T,T), h(T,T) \rangle \tag{2.10}$$

olup s=0 noktasında

$$\nabla_{T(0)}T = 0 \qquad (T(0) = X) \tag{2.11}$$

dır. Sonuç olarak

$$\frac{dk^2(0)}{ds} = 2 < D_X h(T,T), h(X,X) >= 2 < (\overline{\nabla}_X h)(X,X), h(X,X) >= 0 \qquad (2.11)^*$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: M altmanifoldu P2-PNS özelikli ise Önerme.2.3. gereği h(X,X) ile $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ vektörleri lineer bağımlıdırlar. Böylece (iii) gereği

$< \overline{\nabla}_X h(X,X), h(X,X) >= 0$

olduğundan $\overline{\nabla}_X h(X,X) = 0$ veya $h(X,X) = 0$ dır. M total geodezik değilse $\overline{\nabla}_X h(X,X) = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 2.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ almanifoldu P2-PNS özelikli olsun. Eğer

i) w M ye normaldir.

ii) $< h(X,Y), w >=< X,Y > \qquad (X,Y \in T(M))$

iii) $< (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z), w >= 0 \qquad (X,Y,Z \in T(M))$

ise $\overline{\nabla} h = 0$ dır (Arslan 1993).

İspat : M altmanifoldu P2-PNS özelikli olduğundan Teorem.2.2. gereği her $X \in T(M)$ için ;

$\|h(X,X)\|^2 (\overline{\nabla}_X h)(X,X) =< (\overline{\nabla}_X h)(X,X), h(X,X) > h(X,X)$

dir. Her iki tarafın w ile iççarpımını alırsak (iii) gereği

$\|h(X,X)\|^2 < (\overline{\nabla}_X h)(X,X), w >=< (\overline{\nabla}_X h)(X,X), h(X,X) >< h(X,X), w >= 0$

elde edilir. Böylece

$<h(X,X),w> \neq 0$ olduğundan

$< h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) >= 0$

elde edilir. Ayrıca Önerme.2.3. gereği h(X,X) ile $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ vektörleri lineer bağımlı olduğundan

$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0$ veya $h(X,X) = 0$

dır. M total geodezik olmadığından $h(X,X) \neq 0$ olup böylece $(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0$ dır. Sonuç olarak Teorem.2.2 gereği $\overline{\nabla} h = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 2.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ P2-PNS özelikli bir altmanifold olsun. Eğer $\forall X \in T(M)$ için

i) $< h(X,X), \upsilon > \neq 0$

ii) $< (\overline{\nabla}_X h)(X,X), \upsilon > = 0$

şartlarını sağlayan N(M) nin bir υ normal alt demeti varsa $\overline{\nabla} h = 0$ dır (Chen 1982).

İspat: M altmanifoldu P2-PNS özelikli olduğundan (2.7) den ;

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = \frac{< h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) >}{\|h(X,X)\|^2} h(X,X)$$

yazılabilir. Böylece υ normal alt demeti için $< (\overline{\nabla}_X h)(X,X), \upsilon > = 0$ verildiğinden

$$< \frac{< h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) >}{\|h(X,X)\|^2} h(X,X), \upsilon > = 0$$

olacaktır. İç çarpımın lineerliği kullanılarak;

$$\frac{< h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X) >}{\|h(X,X)\|^2} < h(X,X), \upsilon > = 0$$

elde edilir. Hipotez gereği $< h(X,X), \upsilon > = 0$ olduğundan

$$< (\overline{\nabla}_X h)(X,X), h(X,X) > = 0$$

olmak zorundadır. Böylece (2.11)* eşitliğinden $\dfrac{dk^2(0)}{ds} = 0$ olup Teorem.2.2 gereği $\overline{\nabla} h = 0$ dır.

Tanım 2.4: $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu verilsin. Eğer M, $\mathbf{R}^{n+d}$ nin bir S^{n+d-1} hiperküresinde yatıyorsa M ye **küresel altmanifold** adı verilir (Chen 1973).

Teorem 2.3 : $M \subseteq S^{n+d-1} \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak M nin ikinci temel formu paraleldir, yani $\overline{\nabla} h = 0$ dır (Chen 1982).

İspat : ($\Rightarrow$): $M \subseteq S^{n+d-1} \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özelikli olsun. M nin p noktasında ve $X = \gamma'(0)$ yönünde bir normal kesiti $\gamma(s)$ olmak üzere $\gamma'(s) = T$ alalım.

Ayrıca S^{n+d-1} in dışarı doğru birim normal vektörünü N ile gösterelim. Böylece $A_N T$ vektörü T nin bir katı olduğundan (1.3) eşitliği yardımıyla;

$$<h(T,T),N>=<A_N T,T>=\lambda<T,T> \tag{2.12}$$

$$D_T N=0 \tag{2.13}$$

olduğundan Yardımcı Teorem.2.2. gereği M ye teğet $\forall T$ vektörü için $<(\overline{\nabla}_T h)(T,T),N>=0$ dir. Böylece (2.12) ve (2.13) gereği Span$\{N\}$ N(M) nin Yardımcı Teorem.2.2. yi sağlayan bir normal altdemetidir. O halde $\overline{\nabla}h=0$ dır.

($\Leftarrow$): Bak Teorem.2.2.

Teorem 2.4 : :$M\subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özelikli ve $\overline{\nabla}h\neq 0$ ise M, $\mathbf{R}^{n+d}$ nin bir hiperyüzeyidir (Arslan-West 1996. b)

Yardımcı Teorem 2.3 : $M\subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi P2-PNS özelikli olsun. $p\in M$ noktasında X yönünde bir $\gamma(s)$ normal kesiti için

$$\gamma'''(s)=-k^2\gamma'(s)+\frac{T[k^2]}{2k^2}\gamma''(s)\ ,\qquad \gamma'(s)=T \tag{2.14}$$

dir (Chen 1983).

Sonuç 2.1 : $M\subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi P2-PNS özelikli olsun. Bu taktirde;

$$-A_{h(T,T)}T+\nabla_T\nabla_T T=-k^2T+\frac{T[k^2]}{2k^2}\nabla_T T \tag{2.15}$$

$$h(\nabla_T T,T)+D_T h(T,T)=\frac{T[k^2]}{2k^2}h(T,T) \tag{2.16}$$

dir.

İspat : (2.5) ve (2.14) den 2.15 ve 2.16 elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.4 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi P2-PNS özelikli olsun. Böylece $p \in M$ noktasında $\gamma(s)$ normal kesiti p nin yeteri kadar küçük bir komşuluğunda M nin bir geodezik yayı değilse $h(X,Y)$ ile $h(X,X)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Burada $X = \gamma'(0)$ ve $X \perp Y \in U_pM$ dir (Chen 1983).

İspat : M P2-PNS özelikli olsun. $p = \gamma(0)$ noktasında $\gamma''(0)$ ve $\gamma'''(0)$ vektörleri (n+d-1) boyutlu E(p,X) altuzayında yatar. E(p,X); X ve N_pM tarafından gerildiği için

$$\nabla_X T = 0 \quad X = T(0)$$

$$\gamma''(0) = h(X,X)$$

ve Önerme.2.4. gereği

$$\gamma'''(0) = -k^2(0)X + (\overline{\nabla}_X h)(X,X)$$

dir. Ayrıca $\{\gamma'(0),\ \gamma''(0),\ \gamma'''(0)\}$ lineer bağımlı olduğundan $(\overline{\nabla}_X h)(X,X)$ ve h(X,X) vektörleri lineer bağımlıdırlar. Böylece herhangi bir $U \in T(M)$ için $(\overline{\nabla}_U h)(U,U)$ ve h(U,U) vektörleri lineer bağımlıdır. Ayrıca Sonuç.2.1. gereği

$$h(\nabla_T T, T) + D_T h(T,T) = \frac{T[k^2]}{2k^2} h(T,T)$$

olduğundan $h(T, \nabla_T T)$ ile $h(T,T)$ lineer bağımlıdır.

Eğer γ normal kesiti $p = \gamma(0)$ ın yeteri kadar küçük bir komşuluğunda geodezik yay değilse $s \neq 0$ için

$$\nabla_{T(s)} T(s) \neq 0$$

dır. Böylece

$< T,T >= 1$ olduğundan $< D_T T, T >= 0$ dır. Ayrıca (1.1) denkleminden $< \nabla_T T + h(T,T), T >= 0$ elde edilir. Sonuç olarak $< \nabla_T T, T >= 0$ yani $\nabla_T T \perp T$ olduğundan $Y = \nabla_X X$ için $h(X,Y)$ ile $h(X,X)$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Yardımcı Teorem 2.5 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi geodezik 2-düzlemsel normal kesitli (G2-PNS özelikli) ise X e dik bir Y teğet vektörü için

$$< h(X,X), h(X,Y) >= 0$$

dır (Chen 1983).

İspat : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ G2-PNS özelikli bir yüzey olduğundan M nin γ normal kesiti için

$$\gamma'(0) = X,\ \gamma''(0) = h(X,X)$$

$\gamma'''(0) = -A_{h(X,X)}X + \overline{\nabla}_X h(X,X)$ dır. Tanım gereği $\{\gamma'(0), \gamma''(0), \gamma'''(0)\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan teğet ve normal kısımlarda lineer bağımlıdır. O halde X ile $A_{h(X,X)}X$ vektörleri lineer bağımlı olduklarından,

$$< X, X > A_{h(X,X)}X = < A_{h(X,X)}X, X > X$$

dır. Buradan

$$A_{h(X,X)}X = \frac{< A_{h(X,X)}X, X >}{< X, X >} X = \lambda X \; ; \; \left(\lambda = \frac{< A_{h(X,X)}X, X >}{< X, X >} \right)$$

elde edilir. Böylece

$$< A_{h(X,X)}X, Y > = < \lambda X, Y > = 0 \; ; \; X \perp Y$$

olup buradan (1.3) eşitliği yardımıyla ,

$$< h(X,X), h(X,Y) > = 0$$

elde edilir.

Örnek 2.1 : $X(u,v) = (a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, a\sin u)$ ile verilen $S^2(a) \subset \mathbf{R}^3$ küre yüzeyinin P2-PNS özelikli olduğunu gösterelim.

İspat : X(u,v) ifadesinden kısmi türev yardımıyla, $S^2(a) \subset \mathbf{R}^3$ için

$$X_u = a(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$X_v = a(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

teğet vektörleri elde edilir. Ayrıca

$$n = (\cot u \cos v, \cot u \sin v, 1)$$

vektörü X_u ve X_v ye dik olduğundan

$$\|X_u\| = a, \; \|X_v\| = a\cos u, \; \|n\| = \frac{1}{\sin u}$$

olup buradan M nin

$$X = \frac{X_u}{\|X_u\|} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$Y = \frac{X_v}{\|X_v\|} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\upsilon = \frac{\vec{n}}{\|n\|} = (\cos v \cos u, \sin v \cos u, \sin u)$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece X, Y ve υ nin kovaryant türevleri alınarak;

$$D_X X = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} X = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u} X = \frac{1}{a}(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) = -\frac{1}{a}\upsilon \,,$$

$$D_X Y = 0,$$

$$D_Y X = D_{\frac{X_V}{\|X_V\|}} X = \frac{1}{\|X_V\|} D_{X_V} X = \frac{1}{a\cos u}(\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0) = -\frac{1}{a\cos u}\sin u Y,$$

$$D_Y Y = D_{\frac{X_V}{\|X_V\|}} Y = \frac{1}{\|X_V\|} D_{X_V} Y = \frac{1}{a\cos u}(-\cos v, -\sin v, 0) = \frac{1}{a}\tan u\, X - \frac{1}{a}\upsilon,$$

$$D_X \upsilon = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} \upsilon = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u} \upsilon = \frac{1}{a}(-\cos v \sin u, -\sin u \sin v, \cos u) = \frac{1}{a} X,$$

$$D_Y \upsilon = D_{\frac{X_V}{\|X_V\|}} \upsilon = \frac{1}{\|X_V\|} D_{X_V} \upsilon = \frac{1}{a}(-\sin v, \cos v, 0) = \frac{1}{a} Y$$

elde edilir. Böylece (1.1) ve (1.2) den

$$\nabla_X X = 0 \quad , \quad h(X,X) = -\frac{1}{a}\upsilon \ ,$$

$$\nabla_X Y = 0 \quad , \quad h(X,Y) = 0 \ ,$$

$$\nabla_Y X = -\frac{1}{a} Y \tan u \quad , \quad h(Y,X) = 0 \ ,$$

$$\nabla_Y Y = \frac{1}{a} X \tan u \quad , \quad h(Y,Y) = -\frac{1}{a}\upsilon \ ,$$

$$A_\upsilon X = -\frac{1}{a} X \quad , \quad \overline{\nabla}_X \upsilon = 0 \ ,$$

$$A_\upsilon Y = -\frac{1}{a} Y \quad , \quad \overline{\nabla}_Y \upsilon = 0$$

elde edilir.

Ayrıca $Z=\lambda X+\mu Y$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ olacak şekilde bir Z genel teğet vektör alanı seçilirse bu taktirde;

$$h(Z,Z) = \lambda^2 h(X,X) + \mu^2 h(Y,Y) + 2\lambda\mu h(X,Y)$$

olup böylece

$$h(Z,Z) = -\frac{1}{a}\lambda^2\upsilon - \frac{1}{a}\mu^2\upsilon$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_X(h(X,X)) = D_X(-\frac{1}{a}\upsilon) = -\frac{1}{a}D_X\upsilon = -\frac{1}{a^2}X$$

$$D_X(h(X,Y)) = 0$$

$$D_X(h(Y,Y)) = D_X(-\frac{1}{a}\upsilon) = -\frac{1}{a}D_X\upsilon = -\frac{1}{a^2}X$$

$$D_Y(h(X,X)) = D_Y(-\frac{1}{a}\upsilon) = -\frac{1}{a}D_Y\upsilon = -\frac{1}{a^2}Y$$

$$D_Y(h(X,Y)) = 0$$

$$D_Y(h(Y,Y)) = D_Y(-\frac{1}{a}\upsilon) = -\frac{1}{a}D_Y\upsilon = -\frac{1}{a^2}Y$$

olduğundan böylece (1.2) den;

$$A_{h(X,X)}X = \frac{1}{a^2}X \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,X)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(X,Y)}X = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(X,X)}Y = \frac{1}{a^2}Y \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,X)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(X,Y)}Y = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,Y)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(Y,Y)}Y = \frac{1}{a^2}Y \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(Y,Y)) = 0$$

elde edilir. Bununla beraber

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) - h(\nabla_X X, Y) - h(X, \nabla_X Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0 \, ,$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = 0 \, ,$$

$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Y)=0$,

$(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)=0$

bulunur. Böylece

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z)=\lambda^3(\overline{\nabla}_X h)(X,X)+3\mu\lambda^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,X)+3\lambda\mu^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,Y)+\mu^3(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)$$

olduğundan

$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z)=0$

elde edilir. Böylece $S^2(a)\subset \mathbf{R}^3$ nin ikinci temel formu parelel olduğundan Teorem 2.2. gereği $S^2(a)\subset \mathbf{R}^3$ P2-PNS özeliklidir.

Örnek 2.2 : $X(\theta,\varphi)=(a\cos\theta, a\sin\theta,\varphi)$, $a\in R$ şeklinde tanımlanan silindir yüzeyinin P2-PNS özelikli olduğunu gösterelim.

İspat : $X(\theta,\varphi)$ ifadesinden kısmi türev yardımıyla, silindir için

$X_\theta=(-a\sin\theta, a\cos\theta,0)$,

$X_\varphi=(0,0,1)$

teğet vektörleri elde edilir. Ayrıca

$n_1=(a\cos\theta, a\sin\theta,0)$

vektörü X_θ ve X_φ teğet vektörlerine dik olduğundan , M nin

$$X=\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}=\frac{1}{a}(-a\sin\theta, a\cos\theta,0)=(-\sin\theta,\cos\theta,0) ,$$

$$Y = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|} = (0,0,1),$$

$$\upsilon = \frac{n_1}{\|n_1\|} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece X,Y ve υ nin kovaryant türevleri alınarak;

$$D_X X = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} X = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} X = \frac{1}{a}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0) = -\frac{1}{a}\upsilon \ ,$$

$$D_X Y = 0 \ ,$$
$$D_Y X = 0 \ ,$$
$$D_Y Y = 0 \ ,$$

$$D_X \upsilon = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} \upsilon = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} \upsilon = \frac{1}{a}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \frac{1}{a} X \ ,$$

$$D_Y \upsilon = 0$$

elde edilir. Böylece (1.1) ve (1.2) den,

$$\nabla_X X = 0 \quad , \quad h(X,X) = -\frac{1}{a}\upsilon$$

$$\nabla_X Y = 0 \quad , \quad h(X,Y) = 0$$
$$\nabla_Y X = 0 \quad , \quad h(Y,X) = 0 \ ,$$

$$\nabla_Y Y = 0 \quad , \quad h(Y,Y) = 0 \ ,$$

$$A_\upsilon X = -\frac{1}{a} X \quad , \quad \overline{\nabla}_X \upsilon = 0 \ ,$$

$$A_\upsilon Y = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y \upsilon = 0$$

elde edilir.

Ayrıca $Z=\lambda X+\mu Y$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ olacak şekilde bir Z genel teğet vektör alanı seçilirse bu taktirde;

$$h(Z,Z)=\lambda^2 h(X,X)+\mu^2 h(Y,Y)+2\lambda\mu h(X,Y)$$

olup böylece

$$h(Z,Z)=-\frac{1}{a}\lambda^2\upsilon$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_X(h(X,X))=D_X(-\frac{1}{a}\upsilon)=-\frac{1}{a}D_X\upsilon=-\frac{1}{a^2}X\,,$$

$$D_X(h(X,Y))=0\,,$$
$$D_X(h(Y,Y))=0\,,$$
$$D_Y(h(X,X))=0\,,$$
$$D_Y(h(Y,Y))=0$$

olduğundan (1.2) den,

$$A_{h(X,X)}X=\frac{1}{a^2}X \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,X))=0$$

$$A_{h(X,Y)}X=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,Y))=0\,,$$

$$A_{h(Y,Y)}X=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(Y,Y))=0\,,$$

$$A_{h(X,X)}Y=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,X))=0\,,$$

$$A_{h(X,Y)}Y=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,Y))=0\,,$$

$$A_{h(Y,Y)}Y=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(Y,Y))=0$$

elde edilir. Bununla beraber

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) - h(\nabla_X X, Y) - h(X, \nabla_X Y)$$

olduğundan

$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0$,
$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = 0$,
$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Y) = 0$,
$(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y) = 0$
bulunur. Böylece

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = \lambda^3(\overline{\nabla}_X h)(X,X) + 3\mu\lambda^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,X) + 3\lambda\mu^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,Y) + \mu^3(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = 0$$

elde edilir. Böylece silindir yüzeyinin ikinci temel formu parelel olduğundan Teorem.2.2. gereği silindir yüzeyi P2-PNS özeliklidir.

Örnek 2.3: $T^2 := S^1(a) x S^1(b) \subset \mathbf{R}^4$

$$X(\theta,\varphi) = (a\cos\frac{\theta}{a}, a\sin\frac{\theta}{a}, b\cos\frac{\varphi}{b}, a\sin\frac{\varphi}{b}) \ , \ a \in \mathbf{R}$$

şeklinde tanımlanan tor yüzeyinin P2-PNS özelikli olduğunu gösterelim.

İspat : $X(\theta,\varphi)$ ifadesinden tor yüzeyi için kısmi türev alınarak;

$$X_\theta = (-\sin\frac{\theta}{a}, \cos\frac{\theta}{a}, 0, 0) \ ,$$

$$X_\varphi = (0,0,-\sin\frac{\varphi}{b}, \cos\frac{\varphi}{b})$$

teğet vektörleri elde edilir.

$$n_1 = (\cos\frac{\theta}{a}, \sin\frac{\theta}{a}, 0, 0) \ ,$$

$$n_2 = (0, 0, \cos\frac{\varphi}{b}, \sin\frac{\varphi}{b})$$

vektörleri X_θ ve X_φ teğet vektörlerine dik olduğundan buradan $\mathbf{T}^2$ nin,

$$X = \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = X_\theta \,,$$

$$Y = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|} = X_\varphi \,,$$

$$\upsilon_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = n_1 \,,$$

$$\upsilon_2 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = n_2$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece X, Y, υ_1 ve υ_2 nin kovaryant türevleri alınarak;

$$D_X X = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} X = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} X = (-\frac{1}{a}\cos\frac{\theta}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{\theta}{a}, 0, 0) = -\frac{1}{a}\upsilon_1 \,,$$

$$D_X Y = 0 \,,$$

$$D_Y X = 0 \,,$$

$$D_Y Y = D_{\frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|}} X = \frac{1}{\|X_\varphi\|} D_{X_\varphi} Y = (0, 0, -\frac{1}{b}\cos\frac{\varphi}{b}, -\frac{1}{b}\sin\frac{\varphi}{b}) = -\frac{1}{b}\upsilon_2 \,,$$

$$D_X \upsilon_1 = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} \upsilon_1 = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} \upsilon_1 = (-\frac{1}{a}\sin\frac{\theta}{a}, \frac{1}{a}\cos\frac{\theta}{a}, 0, 0) = \frac{1}{a} X \,,$$

$D_X \upsilon_2 = 0$,

$D_Y \upsilon_1 = 0$,

$$D_Y \upsilon_2 = D_{\frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|}} \upsilon_2 = \frac{1}{\|X_\varphi\|} D_{X_\varphi} \upsilon_2 = (0,0,-\frac{1}{b}\sin\frac{\varphi}{b},\frac{1}{b}\cos\frac{\varphi}{b}) = \frac{1}{b}Y$$

olup (1.1) ve (1.2) den;

$\nabla_X X = 0$, $h(X,X) = -\frac{1}{a}\upsilon_1$,

$\nabla_X Y = 0$, $h(X,Y) = 0$,

$\nabla_Y X = 0$, $h(Y,X) = 0$,

$\nabla_Y Y = 0$, $h(Y,Y) = -\frac{1}{b}\upsilon_2$,

$A_{\upsilon_1} X = -\frac{1}{a}X$, $\overline{\nabla}_X \upsilon_1 = 0$,

$A_{\upsilon_2} X = 0$, $\overline{\nabla}_X \upsilon_2 = 0$,

$A_{\upsilon_1} Y = 0$, $\overline{\nabla}_Y \upsilon_1 = 0$,

$A_{\upsilon_2} Y = -\frac{1}{b}Y$, $\overline{\nabla}_Y \upsilon_2 = 0$

elde edilir.

Ayrıca $Z=\lambda X+\mu Y$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ olacak şekilde bir Z genel teğet vektör alanı seçilirse, bu takdirde;

$$h(Z,Z) = \lambda^2 h(X,X) + \mu^2 h(Y,Y) + 2\lambda\mu h(X,Y)$$

olup böylece

$$h(Z,Z)=-\frac{1}{a}\lambda^2\upsilon_1--\frac{1}{b}\mu^2\upsilon_2$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_X(h(X,X))=D_X(-\frac{1}{a}\upsilon_1)=-\frac{1}{a}D_X\upsilon_1=-\frac{1}{a^2}X,$$

$$D_X(h(X,Y))=0\ ,$$

$$D_X(h(Y,Y))=0\ ,$$

$$D_Y(h(X,X))=0\ ,$$

$$D_Y(h(X,Y))=0\ ,$$

$$D_Y(h(Y,Y))=-\frac{1}{b}D_Y\upsilon_2=-\frac{1}{b^2}Y$$

olduğundan (1.2) den;

$$A_{h(X,X)}X=\frac{1}{a^2}X \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,X))=0\ ,$$

$$A_{h(X,Y)}X=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,Y))=0\ ,$$

$$A_{h(Y,Y)}X=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(Y,Y))=0\ ,$$

$$A_{h(X,X)}Y=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,X))=0\ ,$$

$$A_{h(X,Y)}Y=0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,Y))=0\ ,$$

$$A_{h(Y,Y)}Y=\frac{1}{b^2}Y \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(Y,Y))=0$$

elde edilir. Bununla beraber,

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) - h(\nabla_X X, Y) - h(X, \nabla_X Y)$$

olduğundan,

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0 \ ,$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = 0 \ ,$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Y) = 0 \ ,$$

$$(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y) = 0$$

bulunur. Böylece

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = \lambda^3(\overline{\nabla}_X h)(X,X) + 3\mu\lambda^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,X) + 3\lambda\mu^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,Y) + \mu^3(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = 0$$

elde edilir. Böylece $\mathbf{T}^2 : S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ yüzeyinin ikinci temel formu parelel olup Teorem 2.2 gereği $\mathbf{T}^2 : S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ P2-PNS özeliklidir.

2.4.Örnek: $X(u,v) = (u, a\cos v, a\sin v, bv)$, $a \in \mathbf{R}$
şeklinde tanımlanan $\mathbf{R}^4$ de helisel silindir yüzeyinin P2-PNS özelikli olmadığını gösterelim.

İspat: $X(u,v)$ ifadesinden kısmi türev yardımıyla helisel silinir için,

$$X_u = (1,0,0,0),$$

$$X_v = (0, -a\sin v, a\cos v, b),$$

teğet vektörleri elde edilir. Ayrıca

$$n_1 = (0, \cos v, \sin v, 0),$$

ve

$$n_2 = (0, \frac{b}{a}\sin v, -\frac{b}{a}\cos v, 1)$$

vektörleri X_u ve X_v teğet vektörlerine dik olduğundan , M nin

$$X = \frac{X_u}{\|X_u\|} = (1,0,0,0),$$

$$Y = \frac{X_v}{\|X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(0, -a\sin v, a\cos v, b),$$

$$\upsilon_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = (0, \cos v, \sin v, 0),$$

$$\upsilon_2 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}(0, \frac{b}{a}\sin v, -\frac{b}{a}\cos v, 1)$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece

$$D_X X = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} X = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u} X = 0,$$

$$D_X Y = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} Y = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u} Y = 0,$$

$$D_Y X = D_{\frac{X_v}{\|X_v\|}} X = \frac{1}{\|X_v\|} D_{X_v} X = 0,$$

$$D_Y Y = D_{\frac{X_v}{\|X_v\|}} Y = \frac{1}{\|X_v\|} D_{X_v} Y = -\frac{a}{a^2+b^2}(0,\cos v,\sin v,0) = -\frac{a}{a^2+b^2}\upsilon_1,$$

$$D_X \upsilon_1 = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} \upsilon_1 = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u}\upsilon_1 = 0,$$

$$D_X \upsilon_2 = D_{\frac{X_u}{\|X_u\|}} \upsilon_2 = \frac{1}{\|X_u\|} D_{X_u}\upsilon_2 = 0,$$

$$D_Y \upsilon_1 = D_{\frac{X_v}{\|X_v\|}} \upsilon_1 = \frac{1}{\|X_v\|} D_{X_v}\upsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(0,-\sin v,\cos v,0) = \frac{a}{a^2+b^2}Y - \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^2}\upsilon_2$$

$$D_Y \upsilon_2 = D_{\frac{X_v}{\|X_v\|}} \upsilon_2 = \frac{1}{\|X_v\|} D_{X_v}\upsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(0,\frac{b}{a}\cos v,\frac{b}{a}\sin v,0) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{a}\upsilon_1$$

olup (1.1) ve (1.2) eşitliklerinden ,

$\nabla_X X = 0$, $h(X,X) = 0$,

$\nabla_X Y = 0$, $h(X,Y) = 0$,

$\nabla_Y X = 0$, $h(Y,X) = 0$,

$\nabla_Y Y = 0$, $h(Y,Y) = -\frac{a}{a^2+b^2}\upsilon_1$,

$A_{\upsilon_1} X = 0$, $\overline{\nabla}_X \upsilon_1 = 0$,

$A_{\upsilon_2} X = 0$, $\overline{\nabla}_X \upsilon_2 = 0$,

$A_{\upsilon_1} Y = -\frac{a}{a^2+b^2}$, $\overline{\nabla}_Y \upsilon_1 = -\frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^2}\upsilon_2$,

$$A_{\upsilon_2} Y = 0 \qquad \overline{\nabla}_Y \upsilon_2 = \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \upsilon_1$$

elde edilir.

Ayrıca $Z=\lambda X+\mu Y$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ olacak şekilde bir Z genel teğet vektör alanı seçilirse, bu takdirde;

$h(Z,Z) = \lambda^2 h(X,X) + \mu^2 h(Y,Y) + 2\lambda\mu h(X,Y)$

olup böylece

$$h(Z,Z) = -\frac{a}{a^2+b^2}\mu^2 \upsilon_1$$

$$\|h(Z,Z)\|^2 = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\mu^4$$

bulunur. Diğer taraftan

$D_X(h(X,X)) = 0$,

$D_X(h(X,Y)) = 0$,

$D_X(h(Y,Y)) = 0$,

$D_Y(h(X,X)) = 0$,

$D_Y(h(X,Y)) = 0$,

$$D_Y(h(Y,Y)) = -\frac{a}{a^2+b^2} D_Y \upsilon_1 = -\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} Y + \frac{a^3 b}{(a^2+b^2)^3} \upsilon_2$$

olup böylece (1.2) eşitliğinden,

$$A_{h(X,X)} X = 0 \qquad \overline{\nabla}_X (h(X,X)) = 0 \ ,$$

$$A_{h(X,Y)}X = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(Y,Y)}X = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_X(h(Y,Y)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(X,X)}Y = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,X)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(X,Y)}Y = 0 \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(X,Y)) = 0 \, ,$$

$$A_{h(Y,Y)}Y = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}Y \quad , \quad \overline{\nabla}_Y(h(Y,Y)) = \frac{a^3b}{(a^2+b^2)^3}\upsilon_2$$

elde edilir.

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) - h(\nabla_X X, Y) - h(X, \nabla_X Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0 \, ,$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = 0 \, ,$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Y) = 0 \, ,$$

$$(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y) = \frac{a^3b}{(a^2+b^2)^3}\upsilon_2$$

bulunur. Böylece

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = \lambda^3(\overline{\nabla}_X h)(X,X) + 3\mu\lambda^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,X) + 3\lambda\mu^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,Y) + \mu^3(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = \mu^3\frac{a^3b}{(a^2+b^2)^3}\upsilon_2$$

elde edilir. Böylece Teorem.2.1 gereği

$$<, h(Z,Z) > h(Z,Z) \neq \|h(Z,Z)\|^2 (\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z)$$

olduğundan $\mathbf{R}^4$de helisel silindir yüzeyi P2-PNS özelikli değildir.

Teorem 2.5 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi verilsin.O zaman M, P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak M aşağıdaki yüzeylerden birisidir (Chen-Li 1986).

i) $\mathbf{R}^{n+d}$ nin $\mathbf{R}^3$ afin 3-uzayında lokal olarak yatan bir yüzey ,
ii) $S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ (Tor yüzeyi),
iii) $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{R}^5$ (Veronese yüzeyi) .

Teorem 2.6 : $f\colon M \to \mathbf{R}^n$ bir izometrik immersiyon olsun. Eğer M nin ikinci temel formu parelel ise f(M) aşağıdaki yüzeylerden birisidir (Walden 1973).

i) $\mathbf{R}^2$,
ii) $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ (Küre yüzeyi),
iii) $\mathbf{R}^1 x S^1 \subset \mathbf{R}^3$ (Silindir yüzeyi),
iv) $S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ (Tor yüzeyi),
v) $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{R}^5$ (Veronese yüzeyi) .

Teorem 2.5 ve Teorem 2.6 dan aşağıdaki sonuç çıkartılabilir.

Sonuç 2.2: $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzeydir ancak ve ancak M aşağıdaki yüzeylerden birisidir.
i) $\mathbf{R}^{n+d}$ nin $\mathbf{R}^3$ 3-uzayında yatan bir yüzey:
a) $\overline{\nabla} h \neq 0$ (Kuadritikler, vb.),
b) $\overline{\nabla} h = 0$ (Küre ve silindir.).
ii) $S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ (Tor yüzeyi),
iii) $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{R}^5$ (Veronese yüzeyi) .

Tanım 2.5 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Her bir $p \in M$ ve her bir $X \in T_pM$ birim teğet vektörü için h(X,X) in uzunluğu $\|h(X,X)\|$, X den bağımsız ve sadece p ye bağımlı ise diğer bir deyişle M nin p den geçen her bir geodeziği $\mathbf{R}^{n+d}$ de bir eğri olarak gözönüne alındığında $p \in M$ de aynı k_1 sabit eğriliğine sahipse M ye izotropiktir denir. Diğer denk bir ifade ile $X, Y \in T_pM$ ve $<X, Y>= 0$ için

$$<h(X,X), h(X,Y)>= 0 \tag{2.19}$$

ise M ye izotropiktir denir. Eğer $\|h(X,X)\|$ değeri $X \in T_pM$ ve $p \in M$ den bağımsız ise bu taktirde M ye sabit izotropiktir denir (Neill 1965).

Teorem 2.7 : .$M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n- boyutlu P2-PNS özelikli bir izotropik altmanifold olsun. O zaman M nin ikinci temel formu pareleldir, yani $\overline{\nabla} h = 0$ dır (Hong 1985).

Yardımcı Teorem 2.6 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n boyutlu P2-PNS özelikli izotropik bir altmanifold olsun. O zaman M nin geodezikleri 2-düzlemseldir (Hong 1985).

İspat : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu P2-PNS özelikli izotropik bir altmanifold ise Teorem.2.7. gereği M nin ikinci temel formu pareleldir, yani $\overline{\nabla} h = 0$ dır. Böylece Teorem.2.3. gereği M küresel altmanifolddur. Bu durumda M altmanifoldu $\mathbf{R}^{n+d}$ nin S^{n+d-1} küresinde yatar. O halde M nin normal kesitleri bir geodeziktir.

Teorem 2.10 : $\mathbf{R}^{n+d}$ deki geodezik normal kesitli her M altmanifoldu sabit izotropiktir (Chen-Verhayen 1984).

Teorem 2.11 : M $\mathbf{R}^{n+d}$ de bir altmanifold olsun. M nin tüm normal kesitleri $\mathbf{R}^{n+d}$ nin eğrileri olarak düşünüldüğünde bunların birinci eğrilikleri sabit olup birbirine eşit ise M geodezik normal kesitlidir (Chen-Verhayen 1984).

İspat : M nin tüm normal kesitleri aynı birinci eğriliğe sahip olsun. Bunu λ ile gösterelim. p ve q M nin iki noktası, $X \in T_pM$, $U \in T_qM$ iki birim vektör olsun. γ ve $\overline{\gamma}$ sırasıyla (p,X) ve (q,U) ile belirli normal kesitler olsun. Bu takdirde

$k_1(0) = \|h(X,X)\|$ olduğundan ve hipotez gereği

$\|h(X,X)\| = \|h(U,U)\|$

olup M sabit izotropiktir.

Diğer taraftan

$\lambda^2 = k_1^2 = \|\nabla_T T\|^2 + \|h(T,T)\|^2 = \|\nabla_T T\|^2 + \lambda^2$

olduğundan $\nabla_T T = 0$ dır. Bu ise M nin geodezik normal kesitli olması demektir.

Önerme 2.5 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ 2-düzlemsel geodezik normal kesitli n boyutlu bir altmanifold olsun. O zaman $\forall X, Y \in T_pM$ ortanormal vektörleri için;

$<h(X,X), h(X,Y)> = 0$

dır, yani M izotropiktir (Hong 1973).

İspat: Eğer h(X,X)= 0 ise ispat aşikardır.

$h(X,X) \neq 0$ olsun. M , 2-düzlemsel geodezik normal kesitli olduğundan $p \in M$ nin bir U komşuluğu için ,

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to U \subset M$

geodeziğini ,

$\gamma(0) = p$
$T(\gamma(0)) = X$

başlangıç şartları ile tanımlayalım. Burada T, γ nın teğet vektör alanıdır.

γ , 2-düzlemsel olduğundan tanım gereği bir E(p,X) düzlemi içinde yatar. Böylece T ve $D_T T = \nabla_T T + h(T,T) = h(T,T)$, E ye pareleldir. Bu takdirde,

$\gamma(s) = p + a(s)X + b(s)h(X,X)$

şeklinde tanımlanır. Burada a ve b diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu yüzden ;

$\gamma'(s) = T$

için,

$\gamma''(s) = D_T T$

ve

$\gamma'''(s) = D_T D_T T = D_T(h(T,T))$

$= a'''(s)X + b'''(s)h(X,X)$

dir. Ayrıca M ye teğet Z vektörü, Z(p)=Y olacak şekilde verildiğinde

$< h(T,T), Z > \big|_p = 0$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$T < h(T,T), Z > \big|_p = 0$

$< D_T(h(T,T)), Z > \big|_p + < h(T,T), D_T Z > \big|_p = 0$

$< h(T,T), D_T Z > \big|_p = 0$

$< h(T,T), h(T,Z) > \big|_p = 0$

$< h(X,X), h(X,Y) >= 0$

elde edilir. Böylece Tanım.2.5 gereği M izotropiktir.

Önerme 2.6 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. M nin herbir geodeziği 2-düzlemsel eğri ise M, $\mathbf{R}^{n+d}$ nin n-düzleminde yatar veya M nin geodeziklerinin hepsi aynı yarıçaplı çemberlerdir (Little 1976).

İspat: $k(p) = \|h(X,X)\|$ $p \in M$ noktasından geçen herbir geodeziğin eğriliği olsun. Bu durumda k iyi tanımlıdır. Ayrıca herbir geodezik sabit eğriliklere sahip olduğundan, bunların hepsi ya doğrulardır ya da aynı yarıçaplı çemberlerdir.

Şimdi farzedelimki M $\mathbf{R}^{n+d}$ nin n-düzleminde yatmasın. Öklid uzayında tüm geodezikleri, yarıçapları bir birim olan çemberler olarak alınabilir. Böylece yarıçapları bir birim olan çemberlere sahip manifoldlar için herhangi bir $X_1 \in T_pM$ birim teğet vektörü verildiğinde,

$< h(X_1, X_1), h(X_1, X_1) >= 1$ dir.

Böylece,

$h(\lambda X_1, \lambda X_1) = \lambda^2 h(X_1, X_1)$

olduğundan;

$<h(T,T),h(T,T)> = <T,T><T,T>$
elde edilir.

Tanım 2.6 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n- boyutlu bir altmanifold olsun. H ortalama eğrilik vektörü olmak üzere eğer M üzerinde her $X, Y \in T_pM$ için
$< h(X,Y), H >= r < X, Y >$
olacak şekilde bir $r : M \to \mathbf{R}$ fonksiyonu varsa M ye **yarı umbilik altmanifold** adı verilir (Hong-Houh-Wang 1984).

Yardımcı Teorem 2.7 : Eğer $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi izotropik ise M yarı umbiliktir. Yani ortalama eğrilik vektörü yönündeki A_H Weingarten Dönüşümü özdeşlik dönüşümü ile orantılıdır (Chen-Verhayen 1984).

İspat: λ , M üzerinde bir fonksiyon olmak üzere , M $\mathbf{R}^{2+d}$ de λ izotropik bir yüzey olsun. O zaman herhangi $X, Y \in T_pM$ ortonormal vektörleri için ;

$$<h(X,X),h(X,Y)>=0 \tag{2.18}$$

olduğunu biliyoruz. $e_1, e_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n+d}$ ortonormal çatısı için e_1, e_2 M ye p noktasında teğet ve $\xi_3, \ldots, \xi_{n+d}$ de normal vektörler olsun. O zaman $1 \leq i \leq 2$ ve $3 \leq r \leq n+d$ olmak üzere

$h(e_i, e_j) = \sum h_{ij}^r \xi_r$

için

$$H = \frac{1}{2}\left[h(e_1, e_2) + h(e_2, e_2)\right]$$

dir.

Burada

$$a = < h(e_1,e_1), h(e_2,e_2) > \tag{2.19}$$

olmak üzere

$$< h(X,Y),\xi > = < A_\xi X, Y >$$

yardımı ile;

$$< h(e_1,e_1),2H > = < h(e_1,e_1),h(e_1,e_1) > + < h(e_1,e_1),h(e_2,e_2) > = \lambda^2 + a,$$

$$< h(e_1,e_2),2H > = 0,$$

$$< h(e_2,e_2),2H > = < h(e_1,e_1),h(e_1,e_1) > + < h(e_2,e_2),h(e_1,e_1) > = \lambda^2 + a$$

bulunur. M izotropik olduğu için (2.18) ve (2.19) dan

$$A_{2H} = \begin{pmatrix} < h(e_1,e_1),2H > & < h(e_1,e_2),2H > \\ < h(e_2,e_1),2H > & < h(e_2,e_2),2H > \end{pmatrix}$$

$$2A_H = \begin{pmatrix} \lambda^2 + a & 0 \\ 0 & \lambda^2 + a \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 2.7 : $\eta : N(M) \to \mathbf{R}^n$ üstel dönüşümü üzerine ise $\upsilon \in N(M)$ normaline **kritik** tir denir. N_pM deki tüm kritik normallerin kümesi $\sum_\alpha$ olarak gösterilen ve derecesi m olan bir cebirsel değişkendir. $\upsilon \in \sum_\alpha$ verilsin.

$$E_\upsilon = \{Z \in T_X M : (A_\upsilon - I)Z = 0\}$$

υ nin eğrilik öz uzayıdır. Eğer

$$\det(A_\upsilon - kI) = 0$$

ise k A_υ nin bir özdeğeridir. Eğer $\|\upsilon\| = 1$ ve A_υ nin bir özdeğeri k ise k ya υ yönünde bir **asli eğrilik**, uygun öz uzaya da **eğrilik öz uzayı** denir (West).

Tanım 2.8 (Strubing Şartı): $M \subseteq \mathbf{R}^n$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Eğer her C^∞ $\gamma : J \to M$ dönüşümü ve γ boyunca υ paralel normal alanı için A_υ şekil operatörü sabit özdeğerlere sahipse M ye **izoparametrik altmanifold** adı verilir (Strübing 1986).

Teorem 2.11 : $M \subseteq \mathbf{R}^n$ n-boyutlu bir küresel altmanifold olsun. Eğer M nin ikinci temel formu parelel ise M altmanifoldu Strubing Şartı'nı sağlar (Arslan-Çelik 1996).

İspat : M üzerinde herhangi bir γ eğrisi alalım. γ boyunca bir υ paralel birim normali için υ ye uygun asli eğriliklerin sabit olduğunu ispatlamak istiyoruz.
Eğer s=0 da k bir asli eğrilik ise aynı k sabitinin tüm $\gamma(s)$ noktalarındada bir asli eğrilik olduğunu gösterelim. Yani s=0 da en az bir Y_0 teğeti için

$$A_\upsilon Y_0 = kY_0 = k$$

ise γ boyunca (k sabit) 0 noktasında Y_0 a eşit

$$A_\upsilon Y = kY$$

olacak şekilde bir Y teğet vektör alanı vardır.
Y γ boyunca 0 da Y_0 a eşit paralel teğet vektör alanı ve Z γ boyunca keyfi paralel teğet vektör alanı olsun. $X = \gamma'$ ile gösterelim. O zaman

$$D_X < A_\upsilon Y - kY, Z >= D_X < \upsilon, h(Y,Z) > -kD_X < Y, Z >$$

$$=< \overline{\nabla}_X \upsilon, h(Y,Z) > + < \upsilon, (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) > + < \upsilon, h(\nabla_X Y, Z) >$$

$$+ < \upsilon, h(Y, \nabla_X Z) > -k < \nabla_X Y, Z > -k < Y, \nabla_X Z >$$

dir. Y ve Z, γ boyunca paralel olduklarından sağ tarafta

$$< \upsilon, (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) >$$

dışındaki tüm terimler sıfırdır. Eğer h paralel ise $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = 0$ olup

$$< \upsilon, (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) >= 0$$

dır. Böylece h paralel ise

$$D_X < A_\upsilon Y - kY, Z >= 0$$

olur. O halde

$$< A_\upsilon Y - kY, Z >$$

s=0 da sıfıra eşit, türevi her yerde sıfır olan s nin γ boyunca tanımlanmış bir fonksiyonudur. Yani her yerde

$$< A_\upsilon Y - kY, Z >= 0$$

dır. Böylece k sabiti her noktada υ için bir asli eğriliktir. Bundan başka uygun öz uzay γ boyunca paraleldir.

Teorem 2.12 : Eğer M Strubing Şartı'nı sağlıyorsa ve her γ boyunca paralel eğrilik öz uzayına sahipse M nin ikinci temel formu pareleldir (Arslan-Çelik 1996).

İspat : Z γ boyunca paralel ve Y A_υ için bir paralel öz vektör alanı olsun. Burada υ γ boyunca pareleldir ve k sabit asli eğriliktir. Böylece γ nın tüm noktalarında

$$A_\upsilon Y - kY = 0$$

dır. Buradan

$$D_X < A_\upsilon Y - kY, Z >= 0$$

elde edilir. Teorem 2.11 deki gibi

$$=< \overline{\nabla}_X \upsilon, h(Y,Z) > + < \upsilon, (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) > + < \upsilon, h(\nabla_X Y, Z) >$$
$$+ < \upsilon, h(Y, \nabla_X Z) > -k < \nabla_X Y, Z > -k < Y, \nabla_X Z) >= 0$$

dır. Böylece

$$< \upsilon, (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) >= 0$$

dır. Buradan $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = 0$ dır ve γ keyfi bir C^∞ eğri olduğundan M nin herhangi noktalarında X,Y, Z yi keyfi olarak seçebiliriz. Böylece $\overline{\nabla} h = 0$ dır.

Tanım 2.9 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. M nin $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortanormal çatısı için $h(e_i, e_j) = \sum h^r{}_{ij} e_r$ tanımlayalım.. M üzerinde bir normal vektör alanı N olmak üzere N nin **müttefik vektör alanı**

$$a(N) = (|N|/n) \sum_{j=1}^{d} \left[\text{İz}(A_1 A_j) \right] N_j$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_j = A_{N_j}$, $\{N_1 = N/|N|, N_2, \ldots, N_d\}$ bir normal demet, A_j , N_j ye göre şekil operatörüdür (Hong-Houh-Wang 1984).

H ortalama eğrilik vektörü olmak üzere eğer a(H)=0 ise M ye **Chen Altmanifoldu** adı verilir (Geyhens-Verhayen-Verstralen 1983).

Teorem 2.13 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ yüzeyi P2-PNS özelikli bir Chen yüzeyi olsun. Eğer M $\mathbf{R}^{n+d}$ nin $\mathbf{R}^3$ altuzayında yatmıyorsa $\overline{\nabla} h = 0$ dır, yani M nin ikinci temel formu pareleldir (Hong-Houh-Wang 1984).

Örnek 2.4 : .Örnek.2.3 de verilen $\mathbf{T}^2 \subset \mathbf{R}^4$ tor yüzeyinin Chen yüzeyi olduğunu gösterelim.

İspat :

$$-A_{\upsilon_1}X=\frac{1}{a}X=\frac{1}{a}X+0Y \quad , \quad -A_{\upsilon_2}X=0=0X+0Y \ ,$$

ve

$$-A_{\upsilon_1}Y=0=0X+0Y \quad , \quad -A_{\upsilon_2}Y=\frac{1}{b}Y=0X+\frac{1}{b}Y$$

olup buradan

$$-A_{\upsilon_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad -A_{\upsilon_2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$A_{\upsilon_1}A_{\upsilon_2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olup İz($A_{\upsilon_1}A_{\upsilon_2}$)=0 elde edilir. Bu durumda Tanım 2.9 gereği

a(H)=0 olup $\mathbf{T}^2\subset\mathbf{R}^4$ tor yüzeyi Chen yüzeyidir.

Örnek 2.5 : Örnek.2.4 de verilen $\mathbf{R}^4$ deki helisel silindir yüzeyinin Chen yüzeyi olduğunu gösterelim.

İspat:

$$-A_{\upsilon_1}X=0=0X+0Y \qquad -A_{\upsilon_2}X=0=0X+0Y \ ,$$

ve

$$-A_{\upsilon_1}Y=\frac{a}{a^2+b^2}Y=0X+\frac{a}{a^2+b^2}Y \qquad -A_{\upsilon_2}Y=0=0X+0Y$$

olduğundan

$$-A_{\upsilon_1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{a}{a^2+b^2}\end{bmatrix} \qquad -A_{\upsilon_2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$A_{\upsilon_1}A_{\upsilon_2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olup İz($A_{\upsilon_1}A_{\upsilon_2}$)=0 elde edilir.Bu durumda Tanım.2.9 gereği a(H)=0 olup $\mathbf{R}^4$ de ki helisel silindir yüzeyi Chen yüzeyidir.

BÖLÜM 3

P2-PNS ÖZELİKLİ ALTMANİFOLDLAR VE BİRİNCİ NORMAL UZAY $N_p^1(M)$

Bu bölümde P2-PNS özelikli bir $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldunun birinci normal uzayı $N_p^1(M)$ ve iki düzlemsel sayı $\pi(2)$ tanıtılıp bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Her $p \in M$ için p noktasında birinci normal uzay $N_p^1(M)$;

$$N_p^1(M) = \mathrm{span}\{h(X,Y) : X,Y \in T_pM\} \subseteq N_p(M)$$

olarak tanımlanır (Chen 1982).

Önerme 3.1: Chen Altmanifoldları sınıfı tüm minimal ve yarı umbilik almanifoldları boy$N_p^1(M) \leq 1$ olacak şekildeki tüm altmanifoldları ve tüm hiperyüzeyleri kapsar (Geyhens-Verhayen-Verstralen 1983).

Örnek 3.1 : Önerme.3.1. gereği boy$N_p^1(M) \leq 1$ olacak şekildeki tüm yüzeyler birer Chen Yüzeyi olduğu için ikinci bölümde verilen $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ küre yüzeyi ve $S^1 x\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ silindir yüzeyi birer Chen Yüzeyi' dir. Çünkü bu yüzeyler için boy$N_p^1(M)=1$ dir.

Önerme 3.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey ise boy $N_p^1(M) \leq 3$ tür (Arslan,Çelik,Özgür)

İspat: $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey olduğundan e_1, e_2 M ye teğet , $n_1, n_2, \ldots, n_d$ M ye normal vektörler olmak üzere $\{e_1, e_2, n_1, n_2, \ldots, n_d\}$ ortanormal çatısını alalım. Tanım 3.1 gereği $N_p{}^1(M)$, $h(e_1, e_1)$, $h(e_2, e_2)$ ve $h(e_1, e_2)$ tarafından gerilir. Böylece boy $N_p{}^1(M) \leq 3$ tür.

Tanım.3.2: $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifoldu verilsin. Her $X, Y, Z \in T_pM$ için $\overline{\nabla}_X(h(Y,Z)) \in N_p{}^1(M)$ ise $N_p{}^1(M)$ **normal demette pareleldir** denir (Chen 1982).

Teorem 3.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Eğer M P2-PNS özelikli ise $N_p{}^1(M)$ normal demette pareleldir (Chen 1982).

Teorem 3.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey ve her t tamsayısı için boy $N_p{}^1(M) = t$ olsun. Eğer M P2-PNS özelikli ise M (n+d+2) boyutlu $\mathbf{R}^{n+d+2}$ afin altuzayda yatar (Chen 1982).

Sonuç 3.1 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey ve boy $N_p{}^1(M) = 0$ olsun. O zaman M total geodeziktir, yani M, P1-PNS özeliklidir (Arslan,Çelik,Özgür).

Sonuç 3.2 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey ve boy $N_p{}^1(M) = 1$ olsun. Eğer M P2-PNS özelikli ve $\overline{\nabla} h = 0$ ise o zaman M , $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ küre yüzeyi veya $\mathbf{R}^1 x S^1 \subset \mathbf{R}^3$ silindir yüzeyidir (Arslan,Çelik,Özgür).

Sonuç 3.3 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey ve boy $N_p{}^1(M) = 2$ olsun. Eğer M P2-PNS özelikli ise o zaman M , $S^1(a) x S^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ tor yüzeyidir (Arslan,Çelik,Özgür).

Sonuç 3.4 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ bir yüzey ve boy $N_p{}^1(M) = 3$ olsun. Eğer M P2-PNS özelikli ise o zaman M , $V^2 \subset \mathbf{R}^5$ Veronese yüzeyidir (Arslan,Çelik,Özgür).

Tanım 3.3 : $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. $X \in T(M)$ sıfırdan farklı herhangi bir teğet vektör olmak üzere

$N_1(X) = h(X, X)$ ve

$N_2(X) = (\overline{\nabla}_X h)(X, X)$

alalım. $\mathbf{V}^2(X) \subseteq \mathbf{R}^2$ altuzayını

$$(v_1, v_2) \in \mathbf{V}^2(X) \Leftrightarrow v_1 N_1(X) + v_2 N_2(X) = 0$$

ile tanımlayalım. 2-düzlemsel sayı $\pi(2)$, $\mathbf{V}^2(X)$ altuzayının minimum boyutu olarak tanımlanır.

$\pi(2) = \min \{ \text{boy } \mathbf{V}^2(X) : X \in T(M)\,;\ X \neq 0 \}$

dir (Arslan-West 1996 .a).

Teorem 3.3 : $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey olsun.

$$\boldsymbol{N(X)} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{21} \\ N_{12} & N_{22} \\ \cdot & \cdot \\ N_{12+d} & N_{22+d} \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. O zaman

boy $N_p^{\,1}(M)$ - rank $\boldsymbol{N(X)}$ = d-1; ($d \leq 3$) dir.

Burada ; $N_1(X) = \{N_{11}, N_{12}, \ldots, N_{12+d}\}$ ve $N_2(X) = \{N_{21}, N_{22}, \ldots, N_{22+d}\}$

dir (Arslan,Çelik,Özgür) .

İspat: $M \subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey olsun. O zaman Sonuç.2.2. ve Teorem.3.2. gereği aşağıdaki üç durum söz konusudur.

1) $d=1 \Rightarrow$ rank $\boldsymbol{N(X)}=1$ ve boy $N_p^{\,1}(M)=1$

2) $d=2 \Rightarrow$ rank $\boldsymbol{N(X)}=1$ ve boy $N_p{}^1(M)=2$; böylece $M=S^1(a)xS^1(b)\subset \mathbf{R}^4$ tor yüzeyidir.

3) $d=3 \Rightarrow$ rank $\boldsymbol{N(X)}=1$ ve boy $N_p{}^1(M)=3$; böylece $M=V^2\subset \mathbf{R}^5$ Veronese yüzeyidir.

Önerme 3.3 : $M\subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey olsun. O zaman

rank$\boldsymbol{N(X)}\leq 1$ dir (Arslan,Çelik,Özgür).

İspat: $M\subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey olsun. Eğer M total geodezik ise rank $\boldsymbol{N(X)}=0$, diğer durumlarda rank $\boldsymbol{N(X)}=1$ dir.

Uyarı 3.1 : $N_1(X)$ ve $N_2(X)$ lineer bağımlı olduklarından rank$\boldsymbol{N(X)}<2$ dir.

Sonuç 3.5 : $\pi(2)=2$-rank $\boldsymbol{N(X)}$ dir (Arslan,Çelik,Özgür).

Sonuç 3.6 : M total geodezik ise $\pi(2)=2$ dir (Arslan,Çelik,Özgür).

Sonuç 3.7 : $M\subseteq \mathbf{R}^{2+d}$ P2-PNS özelikli bir yüzey olsun. O zaman

$\pi(2)=d$ - boy $N_p{}^1(M)$ dir (Arslan,Çelik,Özgür).

Teorem 3.4 : $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}^2$ vektör uzayının iki altvektör uzayı olsun. O zaman ;

$$\sum_{j=1}^{2}\pi_j(2)\leq \text{boy}\{\mathbf{V}_1\cap\mathbf{V}_2\}+2$$

dir (Arslan,Çelik,Özgür).

İspat: k=2 ve r=2 durumu için bak (Arslan-West 1996. a)

Tanım 3.4 : M_1 ve M_2 Riemann manifoldları

$$f_1 : M_1 \to \mathbf{R}^{n_1+d_1}, \quad f_2 : M_2 \to \mathbf{R}^{n_2+d_2}$$

birer izometrik imbedding olsun. $n = n_1 + n_2$, $d = d_1 + d_2$ olarak tanımlayalım.
$f : M \to \mathbf{R}^{n+d}$
bir imbedding tanımlar. Buradaki $M \subseteq \mathbf{R}^{n+d}$ altmanifolduna M_1 ve M_2 Riemann manifoldlarının Riemann çarpımı denir ve $M=M_1xM_2$ ile gösterilir (Chen 1973).

Teorem 3.5 :,$M_1 \subseteq \mathbf{R}^{n_1+d_1}$,$M_2 \subseteq \mathbf{R}^{n_2+d_2}$ altmanifoldlar olmak üzere $M=M_1xM_2$ çarpım manifoldu $\mathbf{R}^{n+d}$ nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Bu takdirde $M=M_1xM_2$ P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak

i) M_1 ve M_2 nin ikinci temel formu pareleldir
veya
ii) M_1 ve M_2 den herhangi biri total geodezik diğeri P2-PNS özeliklidir (Deprez-Verhayen 1986) .

Teorem 3.5 i düzlemsel sayılara uyguladığımızda şu sonuç elde edilir:

Sonuç 3.8 : $M=M_1xM_2$ çarpım manifoldu P2-PNS özeliklidir ancak ve ancak

i)
$$\pi_1(1) = 0$$
$$\pi_2(1) = 0$$
$$\pi_1(2) = 1$$
$$\pi_2(2) = 1$$

veya

ii) **a)**

$$\pi_1(1) = 1$$
$$\pi_2(1) = 0$$
$$\pi_1(2) = 2$$
$$\pi_2(2) = 1$$

b)

$$\pi_1(1) = 0$$
$$\pi_2(1) = 1$$
$$\pi_1(2) = 1$$
$$\pi_2(2) = 2$$

Örnek 3.2 : i) $M=S^1(a)xS^1(b)\subset \mathbf{R}^4$

ii) $M=\mathbf{R}^1xS^1 \subset \mathbf{R}^3$

Teorem 3.6 : M , M_1 ve M_2 altmanifoldlarının çarpım manifoldu ise

$$\sum_{j=1}^{2}\pi_j(2)-2 \leq \pi(2) \leq \pi_j(2)$$

dir (Arslan,Çelik,Özgür).

İspat: k=2 ve r=2 durumu için bak (Arslan-West 1996. a).

Sonuç 3.9 : $M_1 \subseteq \mathbf{R}^{m_1+d_1}$ ve $M_2 \subseteq \mathbf{R}^{m_2+d_2}$ P2-PNS özelikli iki yüzey olsun. Eğer $M=M_1xM_2$ ise

$$(d_1+d_2)-\sum_{j=1}^{2}\text{boy}N_x{}^1(M_j) \leq (d+1)-\text{boy}N_x{}^1(M)$$

dir (Arslan,Çelik,Özgür).

KAYNAKLAR

1- ARSLAN, K., 1993. Isoparametric Submanifolds with Pk-PNS. PhD.Thesis, Leeds Universıty.

2-ARSLAN, K. and WEST, A., 1996.a. Submanifolds and Their k-Planar Number J.Geom. Vol 55, p. 23-30.

3-ARSLAN, K. and WEST, A., 1996. b. Non Spherical Submanifolds with 2-Planar Normal Sections., Bull.London.Math.Soc. Vol 28, p. 88-92.

4- ARSLAN, K. and ÇELİK, Y., 1996. Isoparametric Submanifolds with P2 PNS. Far East.J.Math.Sci. Vol 4.(2), p. 269-274

5- ARSLAN, K., ÇELİK, Y., ÖZGÜR, C. Submanifolds with P2-PNS property and Their First Normal Space $N_p^1(M)$. To Appear.

6- CHEN, B.Y., Geometry of Submanifolds. 1973. Newyork, M.Dekker.

7- CHEN, B.Y., 1981. Submanifolds with Planar Normal Sections. Soochow. J.Math. Vol 7, p. 19-27

8-CHEN, B.Y., 1982. Differential Geometry of Submanifolds with Planar Normal Sections. Ann.Mat.Pura.Appl. Vol 130, p. 59-67.

9-CHEN, B.Y., 1983. Classification of Surfaces with Planar Normal Sections., J.Geom. Vol 20, p. 122-127.

10-CHEN, B.Y. and VERHAYEN, P., 1984. Submanifolds with Geodesic Normal Sections. Vol 269, p. 417-429

11- CHEN, B.Y. and LI, S., 1986. Classification of Surfaces with Planar Normal Sections., J.Geom. Vol 26, p. 21-34.

12- DEPREZ, J. and VERHAYEN, P., 1986. Immersions with Circular Normal Sections of Product Immersions. , Geom.Dedicata. Vol 20, p.335-344.

13-GEYHENS, L. VERHAYEN, P.and VERSTRALEN, L., 1983. Characterization and Examples of Chen Submanifolds. J.Geom. Vol 20, p. 47-62.

14- HACISALİHOĞLU, H.H., Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. 1980. F.Ü. Fen Fak.Yayınları.

15- HONG, Y., 1973. Isometric Immersions of Manifolds with Planar Geodesics. J.Diff.Geom. p. 253-278

16- HONG, Y. , HOUH, C.S., WANG, G.Q., 1984. Some Surfaces with Pointwise Planar Normal Sections. Bull.Soc.Math.Belg. Vol 36, p. 193-200.

17- HONG, Y., 1985. On Submanifolds with Planar Normal Sections. Michigan Math.J. Vol 32, p. 203-210.

18- LITTLE, J.A., 1976. Manifolds with Planar Geodesics. J.Diff.Geom. p. 265-285.

19-NEILL, O., 1965. Isotropic and Kaehler Immersions. Canad.J.Math. Vol 17. p. 907-915.

20- NEILL, O., Elemantary Differential Geometry. 1966. Academic Press.

21-Strübing.W., 1986. Isoparametnc Submanıfolds. Geom.Dedicata Vol 20 , p. 367-387

22- WALDEN, R., 1973. Untermannigfaltigkeiten mit parallel zweiter Fundamental form in Euclidishen Raumen and Spharen. , Manusc.Math. Vol 10, p. 91-102.

23- WEST, A., An Introduction to Isoparametric Submanifolds and Other Topics. To Appear.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bursa'da doğdu. İlkokulu Isparta'da, ortaokulu Tunceli'de, liseyi İstanbul'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında Matematikçi olarak mezun oldu.

Ekim 1994- Şubat 1997 tarihleri arasında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yaptı. Halen Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.