

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI
ÜZERİNE BAZI NÜMERİK TESTLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GONCA İLTER

ARALIK 2016

MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

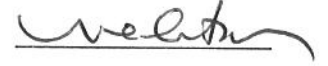
TEZ ONAYI

GONCA İLTER tarafından hazırlanan **ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI ÜZERİNE BAZI NÜMERİK TESTLER** başlıklı tezinin, 09/12/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

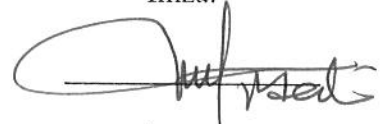
Prof. Dr. Mehmet SEZER (**Jüri Başkanı**)
Matematik Anabilim Dalı,
Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

İmza:



Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN (**Danışman**)
Matematik Bilgisayar Bölümü,
Yıldırım Beyazıt Üniversitesi, Ankara

İmza:



Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (**Üye**)
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

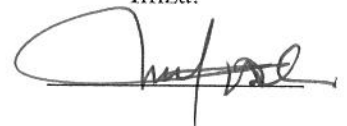
Prof. Dr. Mustafa GÜLSU
Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN
Danışman, Matematik Bilgisayar Bölümü
Yıldırım Beyazıt Üniversitesi, Ankara

İmza:



Savunma Tarihi: 09/12/2016

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Gonca İLTER

08/12/2016



ÖZET
ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI ÜZERİNE BAZI
NÜMERİK TESTLER

Gonca İLTER

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN

Aralık 2016, 61 sayfa

Yapılan tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışılan konunun tarihi gelişimi ve kullandığımız problemlerin genel denklemleri verildi. İkinci bölümde, tezde geçen temel tanım ve teoremlerden bahsedildi. Üçüncü bölümde, yöntemden bahsedildi. Dördüncü bölümde gecikmeli diferensiyel denklemlerden oluşan bazı testlere MATLAB programı uygulandı. Elde edilen çözümlerin grafikleri çizildi. Son bölümde ise elde edilen çözümleri incelenerek genel bir sonuca varıldı.

Anahtar Kelimeler: Adi Diferensiyel Denklemler, Çözümlerin Kararlılığı, Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

ABSTRACT

SOME NUMERICAL TESTS ON THE STABILITY OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gonca İLTER

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Niyazi ŞAHİN

December 2016, 61 pages

The thesis work consists of five main sections. In the first chapter, the historical development of the subject and the general equations of the problems we use are given. In the second part, the basic definitions and the theorems in the thesis were mentioned. In the third chapter, the method was presented. In the fourth, the MATLAB program was applied to some tests consisting of delayed differential equations. The obtained numerical results solutions were plotted. In the last part, the solutions obtained were examined and general conclusions were given.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Stability Of The Solutions, Delay Differential Equations

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bana yol gösteren, katkılarını benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN' e teşekkürlerimi bir borç bilirim. Emeğime her zaman saygı duyan, daima yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme, her zaman yanımda oldukları için teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SEMBOLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1.Tarihsel Gelişim	1
1.2.Linear Adi Diferensiyel Denklemler	2
1.3.Gecikmeli Basit Linear Diferensiyel Denklemler	4
1.4.Nüfus Dinamiklerinden Bir Örnek	7
1.5.Makine Mühendisliğinden Bir Örnek.....	10
2. KAYNAK ÖZETLERİ	14
2.1.Notasyon Ve Temel İfadeler	14
2.2.Cauchy Problemi	19
2.3.Çözümlerin Kararlılığı.....	21
3. MALZEME VE YÖNTEM	22
3.1.Linear Otonom Denklemlerin Kararlılığı.....	22
3.2.Yarı-grup Operatör Çözümü Ve Sonsuz Küçük Üreteç	23
3.3.Spektral Özellikler Ve Karakteristik Denklem.....	27
4. BULGULAR VE İRDELEME.....	32
4.1.Test 1 Bir Gecikmeli Linear Otonom Denklemler	32
4.2.Test 2 Çoklu Gecikmeli Linear Otonom Denklemler	39
4.3.Test 3 Bir Dağıtımli Gecikmeyle Birlikte Linear Otonom Denklemler.....	44
4.4.Test 4 Linear Otonom Sistemler.....	46
4.5.Matlab Kodları.....	50
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	56
KAYNAKÇA	57
ÖZGEÇMİŞ.....	61

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $M=20$ ve $\tilde{b} = -\pi/3$ ile değişen \tilde{a} değerleri için λ_1 ve λ_2 değerleri.....	39
Çizelge 4.2. $M=20$ ve değişen d_1 ve d_2 değerleri için hesaplanan λ_1 , λ_2 ve λ_3 değerleri.....	44



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Kararlılık grafiği ve Hayes denkleminin (1.4) karakteristik kökleri.....	6
Şekil 1.2.	Değişen r için (1.13) ve (1.12) ün kesişimi olarak (1.10) in karakteristik kökleri(.....)	9
Şekil 1.3.	Parametrik zorlamayla birlikte çubuk-denge.....	12
Şekil 4.1.1.	$\tilde{a} = -1$ olduğunda lambda değerleri.....	33
Şekil 4.1.2.	$\tilde{a} = 0$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	34
Şekil 4.1.3.	$\tilde{a} = 1$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	35
Şekil 4.1.4.	$\tilde{a} = 1 + \log\left(\frac{\pi}{3}\right)$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	36
Şekil 4.1.5.	$\tilde{a} = 1,5$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	37
Şekil 4.1.6.	$\tilde{a} = \frac{\pi}{3}$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	38
Şekil 4.1.7.	$\tilde{a} = 2$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	39
Şekil 4.2.1.	$d_1 = 1, d_2 = 3$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	40
Şekil 4.2.2.	$d_1 = 1,5, d_2 = 2$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	41
Şekil 4.2.3.	$d_1 = \sqrt{2}, d_2 = \sqrt{3}$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	42
Şekil 4.2.4.	$d_1 = \sqrt{3}, d_2 = 4$ olduğunda elde edilen lambda değerleri.....	43
Şekil 4.3.1.	(4.3) için elde edilen lambda değerleri.....	44
Şekil 4.3.2.	(4.4) için elde edilen lambda değerleri.....	45
Şekil 4.4.1.	(4.4) için elde edilen lambda değerleri.....	46
Şekil 4.4.2.	(4.5) için elde edilen lambda değerleri.....	48

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

I_d	\mathbb{R}^d de Birim Matris
X	Banach Uzayı
\mathcal{A}	Sonsuz Küçük Üreteç
C_{rd}	rd-Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$\sigma(\cdot)$	Spektrum
$\ \cdot\ _\infty$	\mathbb{R}^d de Sonsuz Norm
ADD	Adi Diferensiyel Denklem
GDD	Gecikmeli Diferensiyel Denklem
GFDD	Gecikmeli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler
NSV	Normalleştirilmiş Sınırlı Varyasyon
Lip	Lipschitz
L	Lebesgue-Stieltjes İntegrali

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının pek çok alanda ele alınan problemlerin matematiksel modellenmesine karşılık gelir. Diferensiyel denklem veya diferensiyel denklemlerin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak söz konusu sistemin hareketi hakkında yorum yapabilmeyi sağlar. Adi diferensiyel denklemlerde, modelleme yapılması istenen sistemlerde mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir, ancak bu sistemin mevcut durumda çok büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Bu nedenle karşılaşılan problemlerin birçoğunun modellenmesi yapılırken, gecikmeli diferensiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir. Adi veya kısmi diferensiyel denklem yardımıyla bir fiziksel olayı tanımlamak, o olayın gelecekteki durumunu geçmiş durumundan bağımsız kalarak hesaplamak demektir. Fakat gerçek durum böyle değildir. Birçok fiziksel olayda sistemin şu anki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak ifade edilir. Gecikmeli diferensiyel denklem ile bir olayın tarihsel gelişimi ile birlikte ele alınarak modellenmesi yapılır. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin fiziksel ve biyolojik sistemlerde birçok uygulama alanına sahip olması da bu teoriyi matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir.

1.1. Tarihi Gelişim

Son 10 yıl boyunca geçmiş tarihe dayanan diferensiyel denklem sistemlerine olan ilgi artmaktadır. Aslında, modellerin tanıtımında gecikme gerçek olayların daha iyi bir tanıtımına izin vermiş ve hareketleri konusunda daha güvenilir öngörü sağlamıştır. Zaman gecikmeli sistemleri matematiksel olarak Gecikmeli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler (GFDD) olarak tanımlanmıştır. Dinamikleri kayda değer olarak gecikmeli terimler ve titreşimler, kararsızlık, karışıklık ve performans düşüklüğünden etkilenmiştir. Bunun dışında gelişmiş kararlılık da meydana gelebilir.

Daha karmaşık dinamik için Adi Diferensiyel Denklemlerin tersine GFDD ler sonsuz boyutlu dinamik sistemlerdir. Krasovskii (1963) bir fonksiyonel diferensiyel denklem tanımlanmış bir sistemin önemine vurgun yapan kişidir.

GFDD ler hakkında birçok bilimsel makale yazılmıştır ve teori oldukça geliştirilmiştir (Bellman, 1963; Driver, 1977; Hale, 1977; Azbelev ve Simonov, 2002). Son zamanlarda ayrıca farklı uygulama alanlarında rollerinin önemi fark edilmiştir. Uygulamalarda ve sayısal metodlarla ilgili sayısız kitap ortaya çıkmıştır (Hale ve Koçak, 1991; Kuang, 1993; Insperger ve Stepan, 2002; Bellen ve Zennaro, 2003; Erneux, 2009). Geniş olarak kullanılan GDD ler GFDD lerden önce matematikte geniş bir şekilde kullanılıyordu.

Dinamik sistemler bakış açısından esas ilginç kararlılık üzerinedir. Lineerleştirilmiş kararlılığın prensibini aklımızda tutarak öyle ki doğrusal olmayan bir sistemin özel bir çözümünün kararlılık çalışmasını lineerleştirilmiş versiyonun çalışmasına indirger. Lineer Diferensiyel denklemlerin kararlılığı üzerindeki odak ve sayısal metodlar son günlerde bu amaç için yazarlar tarafından geliştirilmiş ve temel referanslarda yayınlanmıştır (Breda, Maset ve Vermiglio, 2005; Breda, Maset ve Vermiglio, 2010).

Bu tanımda ADD lerden başlayarak konuya gireceğiz, öyle ki bunlar sonlu boyutlu dinamik sistemleri temsil etmektedir. Bu bize temel kavramları ve klasik tanımları günlük konuşma dilinde kolayca tanıtmaya izin verir, aynı zamanda GDD ler genişletmeye çalışırken sayısal ve teorik engellerin üstesinden gelmek için vurgulamayı da sağlar.

Aslında sonlu boyutlu dinamik sistemlerden sonsuz boyutlu dinamik sistemlere taşırız ve yeni motivasyon ortaya çıkar.

1.2. Lineer Adi Diferensiyel Denklemler

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir bağıntıya diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklemde yalnız bir değişken varsa bu tip denklemlere

adi diferensiyel denklemler denir. Genel olarak y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere bir adi diferensiyel denklem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır (Apostol, 1961).

$$x'(t) = ax(t) \quad (1.1)$$

Skaler lineer otonom (özerk) ADD lerinin $u \in \mathbb{R}$ sabiti için verilen anlık zamanda $a \in \mathbb{R}$ için $x(t) = e^{at}u$ şeklinde tek çözümü vardır.

Bu çözüm $t \rightarrow \infty$ için $a < 0$ ise sifıra yakınsar ya da $a > 0$ ise sonsuza gider. $a = 0$ aşikar sabit çözümleri verir.

$A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ olduğunda ADD için lineer otonom sistemlere değinirsek

$$x'(t) = Ax(t) \quad (1.2)$$

çok zor değildir.

Nitekim $u \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere $x(t) = e^{\lambda t}u$ olacak şekilde üstel çözüm aranıyor. Buna karakteristik denklem denir.

I_d, \mathbb{R}^d de birim matris olmak üzere

$$\det(\lambda I_d - A) = 0$$

eşitliğini sağlayan karakteristik kökler olarak bilinen $\lambda \in \mathbb{C}$ çözümleri A matrisinin özdeğerleridir.

Eğer A matrisi d sayıda lineer bağımsız özvektörlere sahip ise (1.2) nin herhangi çözümü karakteristik kökleri üstel fonksiyonun lineer kombinasyonları olduğunu göstermek kolaydır. Bu nedenle bir çözümün uzun zaman davranışı karakterisitik köklerin reel kısmının işareti ile belirlenir.

Özel olarak esas bilgi kökün en büyük reel kısmındadır. Aksi takdirde çözüm sonsuza büyür. Eğer A matrisi d sayıda bağımsız özvektörlere sahip değilse aynı sonuçlar A nın Jordan kanonik formundan da elde edilir. Bu durum için örneğin (Meyer, 2000; Amerikan Matematik Toplumu, 2007).

Böylece lineer otonom ADD ler için bütün çözümler asimptotik olarak sifira gider ve u dan bağımsızdır ancak ve ancak karakteristik kök negatif reel kısma sahiptir. Eğer pozitif reel kısma sahip olursa bütün çözümler sınırsız bir şekilde büyür ve kararsızlıktan bahsedilmiş olur.

(1.2) nın bir adım ilerisi lineer otonom (özerk) olmayan

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (1.3)$$

sistemidir. Burada $A: t \rightarrow A(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$

Burada önemli olan periyodik durumda $A(t) = A(t + \omega)$ olup $\omega > 0$ minimal periyot ve t herhangi bir reel sayıdır. $\phi(t)$, (1.3) ün esas matris çözümü ise $P(t) = P(t + \omega)$ olacak şekilde bir periyodik matris vardır. Her t için $P(0) = I_d$ ve C matrisi bir sabit olmak üzere $\phi(t) = P(t)e^{Ct}$ dir.

1.3. Gecikmeli Basit Lineer Diferensiyel Denklemler

Gecikmeli diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini (en yüksek türev hariç) farklı gecikme parametrelere bağlı bırakan bir diferensiyel denklemdir.

Şimdi $a, b \in \mathbb{R}$ için $\tau > 0$ basit gecikme olacak şekilde skaler GDD düşünelim.

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau) \quad (1.4)$$

Sıfır çözümünün kararlılığı gibi analitik yaklaşımlar veya GDD lerin en basit örnekleri arasında olan (1.4) denklemindeki farklı çalışmalar kararlılık ve yakınsaklık gibi birçok çalışma prototip model olarak geniş bir şekilde alınmıştır (Hairer, Nörsett ve Wanner, 1993; Bellen ve Zennaro, 2003). Kararlılık ve yakınsama GDD ler için basit örnekler ile birlikte yaygın olarak ilk örnek modeli alınır. Bununla birlikte a ve b parametrelerine bağlı durum ilk defa Hayes tarafından 1950 de araştırıldı ve ayrıca (1.4) Hayes denkleminin olarak anılmaktadır.

Bu gibi durumlar karakteristik denkleme

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1.5)$$

bakılarak geri kazanılır.

Tam olarak önceki bölümlerde ADD ler için yapılan (1.4) için de aşikâr olan üstel çözüm $x(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq 0$ dır.

Nitekim (1.5) için $\lambda \in \mathbb{C}$ çözümleri hala karakteristik kök olarak isimlendirilir. Ayrıca ADD lere uzanan (1,4) ün sıfır çözümü asimptotik karardır ancak ve ancak tüm bu kökler için $\text{Re}(\lambda) < 0$ dır. Halbuki köklerin bir tanesi pozitif reel kısma sahip olduğunda kararsızdır. GDD ler durumunda temel zorluk (ve fark) şu ki transandantal ya da özellikle bir yarı-polinom denklem (Hale, 1977) şeklinde verilen karakteristik denklem ADD ler sonsuz sayıda karakteristik köktür.

(1.4) ün karakteristik köklerin lokasyon çalışması ilk olarak (Hayes, 1950; Bellman, 1963) üstel polinomların sıfır çalışmasına adanmış araştırma dallarından genel olarak ortaya çıkmıştır (Polya, 1920; Schwengeler, 1925, Langer, 1929; Wright, 1949; Hayes, 1950). Büyük ölçüde dikkatini kökleri bulunan konfigürasyon bölgelerinin geometrik tanımına çeker.

Gerçekte Langer tarafından 1929 da iddia edildiği gibi ilk denemeler a ve b parametrelerine bağlı olarak (1.4) ün sıfır çözümünün kararlılık analizi büyük ölçüde biliniyor ve Şekil 1.1 in sonucu gösteriyor ki $(a-b)$ düzlemi bölgeyi kararsız ve kararlı bölgeye ayırmaktadır.

Bu kararlılık grafiği çeşitli yayınlarda bulunabilir (Schwengeler, 1925; Bellen ve Zennaro, 2003; Breda, 2007).

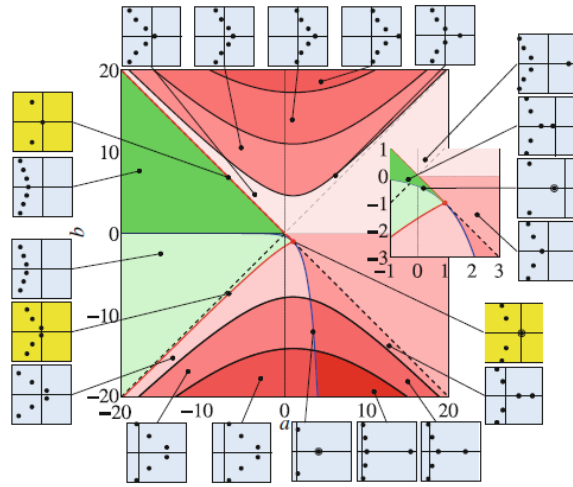
Şekil 1.1 i oluşturmak için gerekli adımları buradan tekrardan düşünmeyeceğiz. Kompleks parametrelerin durumunun ele alındığı tam ve ayrıntılı bir anlatım (Diekmann, 1995; Insperge ve Stepan, 2004; Breda,2007) bulunabilir. Gerçek ve sanal kısımlarının ayrılmış olan gerçek denklemler için ayrımı düşünürsek

$$\begin{cases} \alpha - a = be^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) \\ -\beta = be^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) \end{cases} \quad (1.6)$$

olarak yazılır.

Şekil 1.1 de çizilen tüm eğriler tam olarak belirlememizi sağlar ve ilk defa 1942 de Pontryagin ve 1949 da Neimark tarafından kullanılan Klasik D-altbölüm metodunun güzel bir uygulamasını temsil eder. Özellikle, kırmızı eğriler kararlılık bölgesine ($\alpha < 0$, yeşille gösterilen), kararsızlık bölgesine ($\alpha > 0$, kırmızıyla gösterilen) ayırır. Mavi eğri boyunca bir çift gerçek kök vardır: yukarıdaki gerçek kökler (bir tane $b > 0$, iki tane $b < 0$ için) ve aşağıdaki karmaşık eşlenik çiftler. Siyah eğriler sanal eksen kesen kompleks eşlenik köklerin bir çiftini açıklar. Her bir kapalı kısımda bütün bu eğriler ve $a + b = 0$ kesikli çizgi yardımıyla pozitif reel kısım ile birlikte köklerin sabit bir sayısı vardır. Bu sayı kolayca gözlenebilir ki (1.5) de parametreler sürekli değişir (Insperger ve Stepan, 2004; Breda, 2007).

Alternatif olarak kararsız köklerin sayısı (Insperger ve Stepan, 2004) da yapıldığı gibi (Stepan, 1989) de Stepan formülü kullanılarak bulunabilir. Son olarak $a < 0$ için $|b| < |a|$ bölgesinde τ gecikme değerinden bağımsız olarak sıfır çözümü asimptotik kararlı olduğunu görmek önemlidir.



Şekil 1.1 Kararlılık grafiği ve Hayes denkleminin (1.4) karakteristik kökleri (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015)

D-altbölüm metodu nüfus dinamikleri ya da farklı integral çekirdek çeşitlerinde (Blythe, Nisbet ve Gurney, 1985; Boese, 1989; Baker ve Ford, 1992) ilk olarak (DeAngelis, 1975; Chicone, 1983) kullanılan Cushin denklemini gibi tek dağılımlı gecikmeli skaler GDD durumundaki gibi D-altbölüm metodu uygulanabilir.

Ancak ve ne yazık ki, böyle bir kompleks analizi genel olarak GDD ler için elde edilemez. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ deki A, B genel matrisler olmak üzere sıfır çözümün kararlılığı çalışmasında onun karakteristik köklerinin \mathbb{C} deki kesin pozisyonunun analizinde

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (1.7)$$

sistemi mevcuttur.

1.4. Nüfus Dinamiklerinden Bir Örnek

Lineer GDD lerin sıfır çözümünün kararlılığının analizi lineerleştirme boyunca lineer olmayan problemlerin dengesinin lokal kararlılık araştırmasının temelidir. Teorik temeli lineerleştirilmiş kararlılık prensibi ile tekrar sağlanır. ADD ler için bulunan temel sonuç (Hale ve Koçak, 1991; Stuart ve Humphries, 1996) gerçekte GDD ler için genelleştirilmiş olabilir (Diekmann, Gils, Walther ve Lunel, 1995).

Örnek olarak, (doğrusal olmayan) gecikme lojistik denklemi

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t - 1)) \quad (1.8)$$

ele alalım.

Büyüme hızı $r > 0$ ile nüfus dinamiklerini ve yarışmanın bir birim zaman daha sonra devreye girdiği normalleştirilmiş taşıma kapasitesini modeller. Bu model ilk olarak Hutchinson denkleminin ortak adını doğrulayan Hutchinson (1948) tarafından gösterilmiştir. Lojistik terimini kullanan Verhulst (Verhulst, 1838) veya Malthus'un basit üstel modeli (Malthus, 1798) ADD ler ile birlikte gibi önceki modeller bakımından bu gerçek hayat problemine yönelik bir başka adımı temsil eder. r bağımsız parametre olmak üzere, (1.8) in aşikar denge noktası $\bar{x}_0 = 0$ ve pozitif denge $\bar{x}_1 = 1$ e sahiptir. Bir \bar{x} dengesindeki lineer varyasyon denklemi

$$x'(t) = r(1 - \bar{x})x(t) - r\bar{x}x(t - 1) \quad (1.9)$$

şeklindedir.

Lineerleştirme tekniğinin ADD ler için olanlarla aynı olduğuna dikkat edelim. Yani

$o(x(t))$ terimini iptal etmek için yeterince küçük pertürbasyon $x(t)$ ile birlikte $\bar{x} + x(t)$ formunun bir çözümüne bakılır. (1.9) un bir sonucu olarak, (1.9) $x'(t) = rx(t)$ olduğu için $\bar{x} = \bar{x}_0$ her zaman kararsızdır ve $r > 0$ dır.

Diğer taraftan $\bar{x}_1 = 1$ için (1.10) denklemi tam bir GDD dir ve özellikle (1.4) Hayes denkleminin özel bir durumu olan

$$x'(t) = -rx(t-1) \quad (1.10)$$

elde ederiz.

Gerçekte sadece $a = 0$ ve $b = -r < 0$ için Şekil 1.1 e bakılarak r değişimleri için aşağıya doğru dikey eksen boyunca pozitif dengenin lokal kararlılık özellikleri geri kazanılır. r^* , r için kararlı periyodik çözümün ortaya çıkmasıyla Hopf çatallaşması (Hale ve Koçak, 1991; Kuznetsov, 1998) ile oluşan değer $r^* := \pi/2$ ile birlikte $r < r^*$ için \bar{x}_1 in asimptotik kararlı olduğu sonucuna ulaşmak için yeterlidir.

Bunun bir sonucu olarak skaler lineer olmayan ADD sadece üstel (ve sabit) bir davranış sergileyebilir ve lineer olmayan skaler GDD kompleks eşlenik çiftin karakteristik kökleri (lineerleştirilmiş sistemin) nedeniyle periyodik çözüme sahiptir.

Aynı sonuç farklı yollar kullanılarak cebirsel sonuçlar elde edilir. Ayrıntılı anlatım (Breda, 2012) bulunabilir. (1.10) ile ilişkili karakteristik denklem

$$\lambda + re^{-\lambda} = 0 \text{ olur.}$$

$\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bu ifade gerçek iki denkleme ayrılabilir:

$$\begin{cases} \alpha = -re^{-\alpha} \cos(\beta) \\ \beta = -re^{-\alpha} \sin(\beta) \end{cases} \quad (1.11)$$

Reel kökler için ($\beta = 0$) çözüm aramak kolaydır. Varsa $-\alpha = re^{-\alpha}$ çözümleri verir. Bu nedenle $r > 1/e$ için gerçek kök yoktur. $r = 1/e$ için $\lambda = -1$ şeklinde reel bir çift katlı kök vardır ve $r < 1/e$ için $\lambda_1 < -1$ ve $\lambda_2 \in (-1, 0)$ olacak şekilde farklı

gerçek iki kök vardır. Ayrıca $r \rightarrow 0^+$ olduğunda $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ ve $\lambda_2 \rightarrow 0$ olduğunu doğrulamak gereklidir. Mevcut olup olmadığı zaman reel kökler kararlılığa neden olmaz. Sadece kararlı periyodik çözüm olduğunda aşikar olmayan denge $\bar{x} = \bar{x}_1$ örneğin bir Hopf çatallanması gibi kararlılığı kaybedebilir.

Yukarıda bulunan kompleks-eşlenik çift titizlikle kontrol edilir. (r reel olduğunda) Genelliği kaybetmeden kabul edelim ki $\beta > 0$ olsun. (1.11) deki iki denklemin elemana eleman oranı alınarak $\lambda = \alpha + i\beta$ karakteristik kökünü ancak ve ancak (β, α) noktası $(\beta - \alpha)$ düzleminde

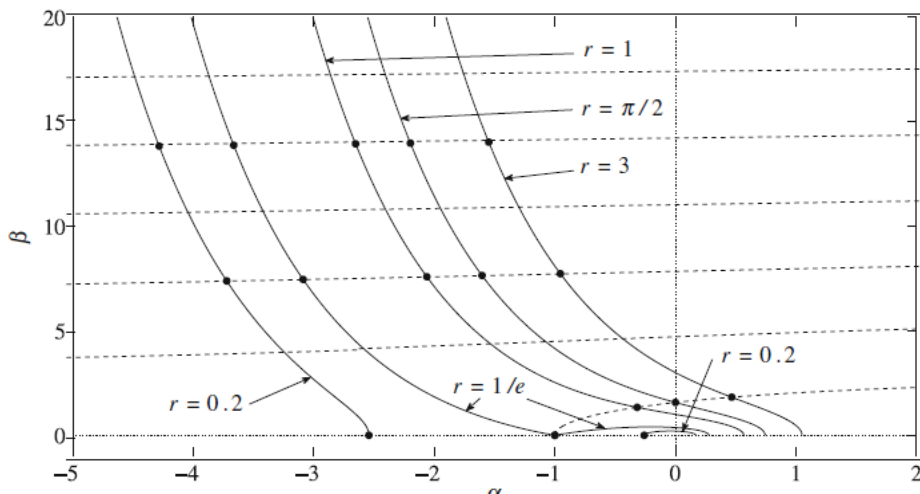
$$\alpha(\beta) = -\frac{\beta}{\tan(\beta)}, \quad \beta \neq k\pi, k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

fonksiyonun grafiğine ait olduğunu bulur.

Diğer taraftan karesini alarak ve aynı iki denklemi elemanı eleman toplayarak benzer şekilde $\lambda = \alpha + i\beta$ bir karakteristik kökü olduğu ancak ve ancak (β, α) noktası $(\beta - \alpha)$ düzleminde

$$\beta(\alpha) = \sqrt{r^2 e^{-2\alpha} - \alpha^2}, \quad |\alpha| < r e^{-\alpha} \quad (1.13)$$

fonksiyonun grafiğine ait olduğu sonucuna ulaşır.



Şekil 1.2 Değişen r için (1.13) ve (1.12) ün kesişimi olarak (1.10) in karakteristik kökleri (.) (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015)

Şimdi (1.12) fonksiyonu global olarak ters değildir fakat $k = 0, 1, 2, \dots$ olacak şekilde her $(k\pi, (k+1)\pi)$ aralığında terstir. Bu nedenle, (1.13) ün benzer (α, β) bölgesini ona transfer edebiliriz ve iki grafiğin kesişimleri için karakteristik köklere bakabiliriz. Tüm bu kesişmeler arasında, yarım (1.13) de kabul edilen benimsemenin kare alma prosedürüne dayanarak serbest bırakmalıdır. Bu sahte kesişimlerin tek k için $\beta \in (k\pi, (k+1)\pi)$ bölgesinde olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. Örneğin kesikli çizgiler (1.12) için, içi dolu çizgiler (1.13) için şekil 1.2 de gösterilmiştir. (1.12) ün r den bağımsız olduğu için, sonraki artma (1.12) ün grafiğini sağa doğru çıkarır. $\beta = \pi/2$ ((1.12) ün birinci sıfırı) olduğunda en sağdaki kompleks eşlenik çift sanal eksene çaprazlanır ve aslında $r = r^*$ ($\beta = \pi/2$ için (1.11) nin ikincisinden) olduğunda bu olur ve böylece sonuçlandırmamızı sağlar. Bu nedenle, beklenen Hopf çatallanması doğrulanmıştır.

Yine, ne yazık ki genişletme olasılığı daha çok GDD ler için sınırlıdır. Kompleks katsayılı (1.4) Hayes denkleminin skaler durum (Breda, 2012) analizi uygundur.

Aslında, karakteristik denklemi, ADD lerin sistemleri için olduğu gibi, matrisin determinantı boyunca verilir, bu yüzden (1.6) ya da (1.11) gibi açık denklemlerini yazmak için zaten zordur.

1.5. Makine Mühendisliğinden Bir Örnek

Gecikmeli diferensiyel denklemler mühendislik uygulamalarında birçok alanda bulmak mümkündür (Insperger ve Stepan, 2004; Erneux, 2009). Gecikmeli Mathieu denklemi hem gecikmeli hem periyodik katsayılı Newton problemi için iyi bilinen prototip modeldir. Adi Mathieu denklemi

$$x''(t) + a_1 x'(t) + (\delta + \varepsilon \cos(t))x(t) = 0$$

ile verilen eliptik zarın çatallaşma modellemesinde ilk olarak kullanılmıştır. Başka örnekler (Stephenson, 1908; Kapitsa, 1951; Levi, 1988) parametrik kuvvetlerin altında bir sarkaç salınımıyla ilgilenmesi ortaya çıkmıştır.

Diğer taraftan, gecikmeli osilatör

$$x''(t) + a_1 x'(t) + \delta x(t) = bx(t - \tau)$$

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin kararlılık eğrisinin Hsu ve Bhattar tarafından (1966) yayınlanmasından sonra giderek artan bir ilgi kazandı. Gecikmeyle birlikte Newton problemleri bir klasik haline geldi (Cooke ve Grossman, 1982; Kolmanovskii ve Nosov, 1986; Kuang, 1993; Malakhovskii ve Mirkin, 2006; Mann ve Patel, 2010).

İki etkinin kombinasyonu, parametrik zorlama ve gecikme deyişiiyle, literatürde geniş olarak ele alınan gecikmeli Mathieu denklemlerin sınıfı ile sonuçlanır.

Parametrik uygulamalı çubuk-balans mekanik modeli ilk olarak Insperger (2011) tarafından ele alınmıştır ve Insperger ve Stepan (2011) tarafından tanımlanmıştır.

Kararsız dinamiklerin kontrolüne zorlanan parametrelerin kullanımının yaygın bir örneğini temsil eder (Stephenson, 1908; Kapitsa, 1951; Levi, 1988; Champneys ve Fraser, 2000; Ma ve Butcher, 2005).

Çubuktan oluşan model Şekil 1.3 de periyodik yukarı aşağı hareket eden yatay bir kaymaya monte edilmesine bağlıdır.

Uzunluğunun l ve kütesinin m olan bir homojen çubuk olduğu kabul edilir. Çubuğun sürtünme kütesinin ihmal edildiği kabul edelim. Sürtünme tabanı $r \cos(\Omega t)$ ye göre hareket eder.

Kaymadaki pivot noktasındaki çubuğun ve x yatay konumunun φ açısal konumu genel koordinatlar olarak kabul edilir.

Q geri bildirim kuvveti çubuğu dengelemek, dikey dik pozisyonda tutmak için kaydırmada kullanılır.

Böyle bir gücün çubuğun φ açısal pozisyonuna ve φ' açısal hızına birlikte bağlı olduğu kabul edilir.

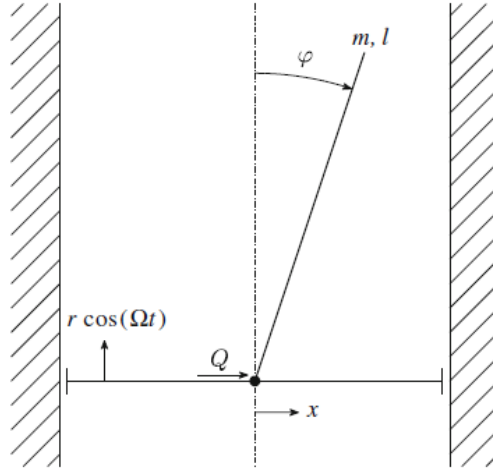
Hareket denklemleri şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}ml^2\varphi''(t) + \frac{1}{2}ml\cos(\varphi(t))x''(t) + \left(-\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}mlr\Omega^2\cos(\Omega t)\right)\sin(\varphi(t)) = 0 \\ \frac{1}{2}ml\cos(\varphi(t))\varphi''(t) + mx''(t) - \frac{1}{2}ml(\varphi'(t))^2\sin(\varphi(t)) = \Omega(\varphi(t-\tau), \varphi'(t-\tau)) \end{cases}$$

x yatay değişmesi yok edilerek φ ye bağlı tek bir denkleme dönüştürülebilir ve bu denklem

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3}ml^2 - \frac{1}{4}ml^2\cos^2(\varphi(t))\right)\varphi'' + \frac{1}{8}ml^2(\varphi'(t))^2\sin(2\varphi(t)) + \\ &\left(-\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}mlr\Omega^2\cos(\Omega t)\right)\sin(\varphi(t)) = -\frac{1}{2}lQ(\varphi(t-\tau))\cos(\varphi(t)) \end{aligned}$$

tek sabit gecikmeli ikinci mertebeden lineer olmayan GDD dır.



Şekil 1.3 Parametrik zorlamayla birlikte çubuk-denge (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015)

Şimdi φ ve φ' hızıyla birlikte kuvvet (yerel) lineer olduğu varsayılarak lineerleştirme $\bar{\varphi} = 0$ dik pozisyonuna doğru

$$\frac{1}{12}ml^2\varphi''(t) + \left(-\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}mlr\Omega^2\cos(\Omega t)\right)\varphi(t) = -\frac{1}{2}l(K_p\varphi(t-\tau) + K_p\varphi'(t-\tau))$$

Parametrelerin yeniden düzenlenmesi gecikmeli Mathieu denklemini

$$\varphi''(t) + (\delta + \varepsilon \cos(\Omega t))\varphi(t) = b_1\varphi(t - \tau) + b_2\varphi'(t - \tau) \quad (1.14)$$

elde edilir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümdeki amaç veriler üzerindeki sürekli bağımlılık işareti ve ADD ler için Cauchy problemleri için çözülebilir teoremler ile birlikte basit notasyon ve tanımları sunmaktır. Son olarak verilen çözümlerin sabitliğinin tanımını ve sabit lineerleştirilmiş teoremlerin genelleştirilmesini sunacağız.

2.1. Notasyon Ve Temel İfadeler

Tanım 2.1 (Süreklilik)

A , \mathbb{R} nın bir altkümesi, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, A nın $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x elemanının $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliğini de sağlamak zorunda olduğu bir $\delta > 0$ varsa, f fonksiyonuna a da süreklidir denir. Yani, bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.2 (Lipschitz sürekliliği)

\mathbb{R}^n uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümeleri ailesini $comp(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim.

$F(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow comp(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer keyfi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için $h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \|x_1 - x_2\|$ olacak biçimde $L \geq 0$ varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü L sabiti ile Lipschitz süreklidir denir. (Aubin ve Frankowska, 1990)

Tanım 2.3 (Normlu uzaylar ve banach uzayı)

X bir vektör uzayı, $x, y \in X$ keyfi vektörler ve α skaler olmak üzere

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri gerçekleyen $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $X \times X$ üzerinde $d(x, y) = \|x - y\|$ ile üretilen d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik adı verilir. Bu metrik ile tam olan bir normlu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.4 (İkili işlem)

G kümesi boştan farklı bir küme olsun.

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow a * b \end{aligned}$$

tanımlı fonksiyona G üzerinde ikili işlem denir.

Tanım 2.5 (Grup ve yarı-grup)

$(G, *)$ cebirsel yapı olsun.

1. $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ ise $*$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir denir.
2. $a \in G$ için $a * e = e * a$ olacak biçimde bir tek $e \in G$ varsa bu e elemanına G kümesinin $*$ işlemine göre birim elemanı denir.
3. $a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak biçimde $a^{-1} \in G$ varsa bu a^{-1} elemanına a nın $*$ işlemine göre tersi denir.

Bir G kümesi üzerinde tanımlı $*$ işlemi (1) koşulunu sağlarsa $(G, *)$ cebirsel yapıya yarı-grup denir. Bir yarı-grup (2) koşulunu sağlarsa bu yarı-gruba monoid denir. (3) koşulunu sağlayan monoide grup denir.

Tanım 2.6 (Gronwall Eşitsizliği)

$f(t)$ ve $u(t)$, $I = [a, \infty)$ aralığında negatif olmayan fonksiyonlar olsun. c negatif olmayan sabit olmak üzere

$$u(t) \leq c + \int_a^t f(s)u(s)ds, \quad t \in I$$

eşitsizliğinden

$$u(t) \leq c e^{\int_a^t f(s)ds}, \quad t \in I$$

ifadesi elde edilir (Chandra ve Fleishman, 1970).

Tanım 2.7 (Yakınsaklık)

(x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyor ve n nın n_0 dan büyük tüm değerleri için $|x_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, a sayısına (x_n) dizisinin limiti denir ve bu durumda (x_n) dizisi a ya yakınsıyor denir.

Tanım 2.8 (Düzensiz yakınsaklık)

$\forall x \in X$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, yalnızca ε a bağlı bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa ve $n > n_0(\varepsilon)$ koşulu sağlandığında $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $\{u_n(x)\}$ dizisine, X kümesinde $u(x)$ fonksiyonuna düzensiz yakınsayan dizi denir.

$t \in \mathbb{R}$ bağımsız zaman değişkeni, $d \geq 1$ olmak üzere $d \in \mathbb{N}$ sistemin boyutu ve x bağımlı değişken olsun.

$x: t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ olmak üzere $\tau > 0$ sistemin maksimum gecikmesi olsun.

$\|\cdot\|_\infty$, \mathbb{R}^d de sonsuz norm

$\|\varphi\|_X = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|_\infty$, $\varphi \in X$ maksimum norm ile donatılmış X Banach uzayı $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d)$ sürekli fonksiyonlar uzayı olarak göstereceğiz.

Farklı bir şekilde belirtilmedikçe; operatörler için bağılı normlarda olduğu gibi norma dayalı matris $\|\cdot\|$ şeklinde basitçe gösterilebilir.

$I \in \mathbb{R}$ sağdan sınırsız bir aralık, $F: I \times X \rightarrow \mathbb{R}^d$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere otonom olmayan lineer gecikmeli diferensiyel denklemler (GDD) için

$$x'(t) = F(t, x_t), t \in I \quad (2.1)$$

formu ile gösterilir.

Standart Hale-Krasovsky notasyonuna (Krasovskii, 1963) e göre, tanımlanmış t zamanda $x_t \in X$ durum olmak üzere

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0] \quad (2.2)$$

GDD ler için sağ türev imgesi ' dır (Hale, 1977; Breda, Iannelli, Maset ve Mermiglio, 2008).

F , açıkça zamana bağlı olmaksızın, $I = \mathbb{R}$ olduğundan

$$x'(t) = F(x_t), t \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

GDD sonucunu özerk (otonom) olarak isimlendiririz.

$L(t): X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \in I$ lineer ve sınırlandırılmış fonksiyon olduğu yerde özerk olmayan lineer GDD

$$x'(t) = L(t)x_t, t \in I \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır ve $L(\cdot)\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\psi \in X$ grafiği süreklidir.

$\eta(t, \cdot), t \in I$ olduğu yerde L Lebesgue-Stieltjes integralini temsil etmesiyle

$$L(t)\psi = \int_{-\tau}^0 d_\theta[\eta(t, \theta)]\psi(\theta), t \in I, \psi \in X \quad (2.5)$$

normalleştirilmiş sınırlı varyasyon (NSV) dır. Tüm varyasyon normları ile donatılmış $NSV([-\tau, 0], \mathbb{R}^{d \times d})$ olduğu zaman $t \rightarrow \eta(t, \cdot)$ sürekliliği kabul edilerek (2.5) in sol tarafı yani $(t, \psi) \rightarrow L(t)\psi$ fonksiyonu $I \times X$ de süreklidir.

Tüm $t \in \mathbb{R}$ için $L(t + \omega) = L(t)$ olacak şekilde $\omega > 0$ olduğunda $I = \mathbb{R}$ ve

$$x'(t) = L(t)x_t, t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

periyodiktir denir.

(2.4) ün otonom olduğu zaman yani $L = L(t)$ nin t den bağımsız olduğu zaman $I = \mathbb{R}$ dır ve

$$x'(t) = Lx_t, t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

kolayca yazılabilir.

$0 < \tau_1 < \dots < \tau_p := \tau$ p farklı gecikmeler olmak üzere (uygunluk için $\tau_0 = 0$ alırsız.) ,

$A: I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $B_k: I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ve $k = 1, \dots, p$ için $C_k: I \times [-\tau_k, -\tau_{k-1}] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ olduğu yerde ilgili uygulamalarda ortaya çıkan (2.4) lineer GDD leri

$$x'(t) = A(t)x(t) + \sum_{k=1}^p B_k(t)x(t - \tau_k) + \sum_{k=1}^p \int_{-\tau_k}^{-\tau_{k-1}} C_k(t, \theta)x(t + \theta)d\theta, t \in I \quad (2.8)$$

formuna sahiptir.

A ve B_k fonksiyonları süreklidir, tüm $\theta \in [-\tau_k, -\tau_{k-1}]$ için $C_k(., \theta)$ süreklidir ve herhangi bir I daki J kompakt aralığı için tüm $t \in J$ ve $\theta \in [-\tau_k, -\tau_{k-1}]$ için $\|C_k(t, \theta)\| < \gamma_k(\theta)$ olacak şekilde $\gamma_k \in C([-\tau_k, -\tau_{k-1}], \mathbb{R})$ olduğu zaman yukarıdaki η e bağlı varsayımlar yerine getirilmiş olur.

$A(t)x(t)$, güncel zaman terimi ve $k = 1, \dots, p$ için; $B_k(t)x(t - \tau_k)$, k nıncı ayırık gecikme terimi ve

$$\int_{-\tau_k}^{-\tau_{k-1}} C_k(t, \theta)x(t + \theta)d\theta$$

k nıncı dağıtımlı gecikmeli terimi olarak adlandırılır.

$p = 1$ olduğu zaman basitçe $\tau_1 = \tau$ olur, $B_1 = B$ ve $C_1 = C$ yazabiliriz.

(2.8) otonom (özerk) olduğu zaman A, B_k, C_k nın zaman üzerindeki bağımlılığı bastırılmıştır. Bundan sonra (2.8) i prototip GDD olarak isimlendiririz.

2.2 Cauchy Problemi

Bu bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler için Cauchy problemini iyi tanımlığı ile ilişkilendirilecektir.

Tanım 2.9

Verilen $t_0 \in I$ için $[t_0 - \tau, t_f) \subset I$ aralığı üzerinde (2.1) in bir çözümü $x: [t_0 - \tau, t_f) \rightarrow \mathbb{R}^d$ sürekli fonksiyonu $[t_0, t_f)$ üzerinde (2.1) i sağlar.

Bir çözüm vermek için belirli bir t_0 başlangıç zamandaki $\varphi \in X$ fonksiyonu başlangıç koşulu olacak şekilde tanımlayacağız.

Verilen $(t_0, \varphi) \in I \times X$ da (2.1) için Cauchy problemi

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t), t \geq t_0, \\ x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 (Cauchy probleminin çözümü)

$(t_0, \varphi) \in I \times X$ de verilen $[t_0 - \tau, t_f) \subseteq I$ deki (2.9) un bir x çözümü φ başlangıç fonksiyonu ile birlikte $[t_0 - \tau, t_f)$ de bir çözümdür. Yani $x_{t_0} = \varphi$ dir.

Eğer x , $[t_0 - \tau, +\infty)$ aralığında tanımlanmış ise x e global denir.

t_0 ve φ bağıllığı vurgulamak için bazen (2.9) un t zamanındaki çözümü için $x(t; t_0, \varphi)$ yazılabilir.

(2.9) un çözümü teklik ve varlığındaki çeşitli teoremler literatürde vardır. Esas içerik F in duruma göre Lipschitz sürekliliğidir. Örneğin lokal olarak yani her $(t_0, \varphi) \in I \times X$ için (t_0, φ) nın bir \mathcal{U} komşuluğu ve tüm $(t, \psi_1), (t, \psi_2) \in \mathcal{U}$ için

$$\|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)\|_\infty \leq Lip(F) \|\psi_1 - \psi_2\|_X$$

bir $Lip(F)$ sabiti ya da global olarak yani tüm $(t, \psi_1), (t, \psi_2) \in I \times X$ için

$$\|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)\|_\infty \leq Lip(F) \|\psi_1 - \psi_2\|_X$$

olacak şekilde bir $Lip(F)$ sabiti vardır.

Teorem 2.1 (*Cauchy probleminin lokal çözümü*)

F lokal Lipschitz olsun. O zaman her $(t_0, \varphi) \in I \times X$ için $[t_0 - \tau, t_f)$ de (2.9) un bir x tek çözümü ve $t_f > t_0$ vardır. Üstelik, x sürekli olarak F, t_0 ve φ üzerinde bağlıdır.

Genel olarak, sürekli bağlılık F ve φ de aynı anda çözüm hatalarının etkisini çalıştır.

F ve φ , \tilde{F} ve $\tilde{\varphi}$ ile yer değiştirirse öyle ki;

- Her bir $t_1 \in [t_0, t_f)$ ve $\varepsilon > 0$ için $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_X \leq \delta$ ve $\|\tilde{F}(t, \psi) - F(t, \psi)\|_\infty \leq \delta$, $t \in [t_0, t_1]$, $\|\psi - x_t\|_X \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.
- \tilde{F} ve $\tilde{\varphi}$ Teorem 2.1 in koşullarını sağlar. Bu yüzden değişmiş Cauchy probleminin $[t_0 - \tau, \tilde{t}_f)$ de tek bir \tilde{x} çözümü vardır.

$\sup_{t \in [t_0, \min\{t_f, \tilde{t}_f\})} \|\tilde{x}(t) - x(t)\|_\infty \leq \varepsilon$ olduğunu ifade eder. (2.1) teoremin kabulünün altında (2.9) un çözümü $C([t_0 - \tau, t_f), \mathbb{R}^d) \cap C^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^d)$ kesişimine ait olduğunu belirtir.

Teorem 2.2 (*Cauchy probleminin global çözümü*)

F global Lipschitz olsun. Her $(t_0, \varphi) \in I \times X$ için $[t_0 - \tau, +\infty)$ da (2.9) un tek bir çözümü vardır.

($x(t; t_0, \varphi) = x(t + t_0, 0, \varphi)$ olduğu için) (2.3) otonom GDD için $t_0 = 0$ kabul etmek sınırlayıcı değildir ve $x(\cdot; 0, \varphi)$ notasyonu $x(\cdot; \varphi)$ şeklinde rahatça yazılabilir. Böylece $\varphi \in X$ için (2.9)

$$\begin{cases} x'(t) = F(x_t), & t \geq 0 \\ x_0 = \varphi \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde olur.

2.3 Çözümlerin Kararlılığı

Kararlılık, Teorem 2.2 nin hipotezi altında $[t_0 - \tau, +\infty)$ aralığında verilen $\bar{x}(\cdot; t_0, \varphi)$ çözümüne bağlı olarak φ nın küçük sapmalarının etkisini ele alır.

$y(t) = x(t; t_0, \psi) - \bar{x}(t; t_0, \varphi)$ ve GDD $y'(t) = F(t, y_1 + \bar{x}_t) - F(t, \bar{x}_t)$ dikkate alınarak sıfır başlangıç fonksiyonuna karşılık gelen kararlılığın tanımı ve \bar{x} in kararlılık analizi sıfır çözümün kararlılığına indirgenir.

Tanım 2.11 (*Kararlı/ kararsız çözüm*)

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\|\psi - \varphi\|_X \leq \delta$ olacak şekilde herhangi ψ ve tüm $t \geq t_0$ için $\|x(t; t_0, \psi) - \bar{x}(t; t_0, \varphi)\|_\infty \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ mevcutsa (2.9) un $\bar{x}(\cdot; t_0, \varphi)$ çözümü kararlıdır. δ , t_0 dan bağımsız olduğu zaman \bar{x} e düzgün kararlı denir. Kararlı olmadığı zaman kararsız denir.

Tanım 2.12 (*Asimptotik kararlı çözüm*)

\bar{x} kararlı ve buna ek olarak $\|\psi - \varphi\|_X \leq \delta$ olacak şekilde herhangi bir ψ için $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\|x(t; t_0, \psi) - \bar{x}(t; t_0, \varphi)\|_\infty \rightarrow 0$ olacak şekilde $\delta = \delta(t_0) > 0$ mevcut ise (2.9) un $\bar{x}(\cdot; t_0, \varphi)$ çözümü asimptotik kararlı olarak isimlendirilir. \bar{x} düzgün kararlı ve $\|\psi - \varphi\|_X \leq r$ olacak şekilde ψ ve herhangi $t_0 \in \mathbb{R}$, $t \geq t_f(\gamma)$ için $\|x(t; t_0, \psi) - \bar{x}(t; t_0, \varphi)\|_\infty \leq \gamma$ olacak şekilde $t_f(\gamma) > t_0$ olduğunda her $\gamma > 0$ için $r > 0$ mevcutsa \bar{x} e düzgün asimptotik kararlı denir.

$\|\psi - \varphi\|_X \leq r$ olduğu zaman ψ ye göre $\|x(t; t_0, \psi) - \bar{x}(t; t_0, \varphi)\|_\infty \rightarrow 0$ düzgün olarak yakınsar ve genel olarak kararlılıktan daha güçlüdür. Bazı GDD ler için bu tanımlar aynıdır. Yani otonom ve periyodik olanlar için Hale'ye (1977) bakılabilir.

Aynı sav ayrıca asimptotik kararlılık için geçerlidir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 Lineer Otonom Denklemlerin Kararlılığı

Dikkatimizi lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin ve sıfır çözümün otonom kararlılığının analizine verelim. Amacımız yarı-grup yaklaşımını ve çözüm operatörlerinin ailesiyle ilişkili sonsuz küçük üreteç tanıtımı düşünmektir. Sonsuz boyutlu durum uzayının dinamiğin, benzer şekilde sınırlı boyut durumlarında sonsuz küçük üreteç spektral özellikleri, sıfır çözümün kararlılık koşullarını verir.

Kökleri sonsuz küçük üretecin özdeğerleri olan bir karakteristik denklem ayrıca türevlenir. Kararlılık, çözüm operatörünün ayrıca analiz spektrumu ile uygulanabilir. Sonrası genellikle açıkça bilinmez. Dolayısıyla onun spektrumunu tahmin etmek için nümerik yaklaşımına ihtiyaç duyulur. Bu nedenle teorik bakış noktasından hareketle sonsuz küçük üretecin bilinen kararlılık analizi karakteristik denklemlerin varlığının yanı sıra lineer otonom GDD de uygulanan yarı-grup teorisinin temel avantajlarını temsil etmektedir. Ayrıca problemin karmaşıklığından (özellikle sonsuz boyut) dolayı gecikmeli durum içindeki nümerik metotlar kararlılık analizi için alternatif bir yol gösterir.

Lineer özerk durumun anlaşılması önemli olduğu için lineer olmayan özerk GDD lerin lokal kararlılık değerlerini lineerleştirilmiş kararlılık ilkeleri yardımıyla çalışacağız ve uygun çözüm vereceğiz. Bu bölüm boyunca bazı temel çözümleri göstereceğiz ve GDD için bazı özel teoremleri ispatlayacağız.

Bölüm boyunca basit sonuçlar sunacağız ve GDD durumları için (Hale 1977; Hake ve Lunel, 1993; Diekmann, 1995; Engel ve Nagel, 1999; Baskai ve Piazzera, 2005) genel semigrup teoreminin detaylarına bakarak GDD lere özel bazı teoremler ispatlayacağız.

(2.7) deki lineer özerk GDD yi düşünürsek $L: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ lineer ve sınırsız fonksiyon olduğunda

$$x'(t) = Lx_t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

dır.

$$\begin{cases} x'(t) = Lx_t, & t \geq 0 \\ x_0 = \varphi \end{cases} \quad (3.2)$$

kabul eder.

Teorem 2.2 yukarıdaki (3.2) nin tek global çözümünü temin eder.

$$x(t; \varphi) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^t Lx_s ds, & t \geq 0 \\ \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2 Yarı-grup Operatör Çözümü Ve Sonsuz Küçük Üreteç

(3.2) nin iyi tanımlılığının yapılmasıyla çözümün nitel özelliklerinin çalışmasına bakabiliriz. Amacımız, bir parametrelili yarı-grup teoreminin güçlü bir matematik aracını temsil etmesidir. X sonsuz boyutlu durum uzayda durumun dinamikliğini açıklayan ADD nin bir özetini sunmak için izin verilen sonsuz küçük üretece odaklanmaktadır.

$(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach uzayında lineer ve sınırlandırılmış $T(t): Y \rightarrow Y$ operatörlerinin $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ailesi için genel olarak basit ve sınırlı kavramları tanımlayacağız.

Tanım 3.1 (*Güçlü sürekli yarı-grup*)

Y Banach uzayında lineer ve sınırlandırılmış $T(t): Y \rightarrow Y$ operatörün $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağladığı zaman güçlü sürekli yarı-grup (veya C_0 -yarı-grup) olarak isimlendirilir.

- Yarı-grup özellikleri tüm $t, s \geq 0$ için $T(0) = I_Y$ ve $T(t+s) = T(t)T(s)$
- Güçlü süreklilik özelliği herhangi $\varphi \in Y$ için $t \downarrow 0$ olarak $\|T(t)\varphi - \varphi\|_Y \rightarrow 0$

Tanım 3.2 (*Sonsuz küçük üreteç*)

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ Y de sınırlandırılmış ve lineer operatörde C_0 -yarı-gurup olsun.

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in Y : \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)\varphi - \varphi}{h}, Y \text{ de mevcutsa} \right\} \\ \mathcal{A}\varphi = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)\varphi - \varphi}{h} \end{cases} \quad (3.4)$$

Şeklinde tanımlanan $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq Y \rightarrow Y$ operatörü $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ nın sonsuz küçük üreteç olarak isimlendirilir.

Sonsuz küçük üreteç $t = 0$ da $T(t)$ nın sağ türevini temsil eder. C_0 -yarıgurup tanımıyla sonsuz küçük üreteç lineer, kapalı, yoğun tanımlı sınırsız operatör, benzersiz tanımlanmıştır.

Teorem 3.1

\mathcal{A} sonsuz küçük üreteç ile birlikte Y de sınırlandırılmış ve lineer operatörlerin C_0 -yarıgurubu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ olsun. Herhangi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ için $u : t \rightarrow u(t) = T(t)\varphi$, $t \geq 0$ fonksiyonu Y deki Cauchy probleminin özetinin tek (klasik) çözümüdür.

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t), t \geq 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (3.5)$$

Yani, $u(t)$ sürekli diferensiyellenebilir ve tüm $t \geq 0$ için $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ve (3.5) sağlanır. (3.5) in klasik çözümü $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ yı gerektirdiğini söyleyebiliriz.

Şimdi GDD için (3.2) göz önüne alalım. $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayına ait olan φ ve başlangıç durumu (2.2) de t zaman belirten fonksiyon $x_t \in X$ alacağız.

Tanım 3.3 (*Çözüm operatörü*)

(3.2) ile $T(t) : X \rightarrow X$ operatörü $t \geq 0$ zamanında durumu x_t olarak $\varphi \in X$ başlangıç fonksiyonuyla ilişkilendirilir. Yani

$$T(t)\varphi = x_t(\cdot, \varphi) \quad (3.6)$$

ve bu çözüm operatörü olarak isimlendirilir.

Önerme 3.1

(3.6) çözüm operatörünün $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ailesi X de lineer ve sınırlandırılmış operatörlerin bir C_0 -yarıgrubu olarak isimlendirilir.

İspat:

(3.6) daki $T(t)$ nin doğrusallığı kolaylıkla (3.1) in doğrusallığı ile görülebilir.

Sınırlılığın ispatı için (3.3) de tüm $t \geq 0$ ve $\theta \in [-\tau, 0]$ için $T(t)$

$$(T(t)\varphi)(\theta) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^{t+\theta} LT(s)ds & \text{eğer } t + \theta \geq 0 \\ \varphi(t + \theta) & \text{eğer } t + \theta \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edelim.

L nin sınırlılığı ile kastedilen

$$\|T(t)\varphi\|_X \leq \|\varphi\|_X + \int_0^t \|L\| \|T(s)\varphi\|_X ds, \quad t \geq 0$$

Gronwall eşitsizliği ile

$$\|T(t)\varphi\|_X \leq \|\varphi\|_X e^{\|L\|t}, \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\|T(t)\| \leq e^{\|L\|t}$, $t \geq 0$ sınırı sağlanır. 3.1 tanımından da yarı grup özellikleri (3.6) dan ve (3.2) çözümünün tekliğinden kolaylıkla görülebilir.

Güçlü süreklilik için (3.2) nin $x(t; \varphi)$ çözümü $t \geq -\tau$ için süreklidir. Bu nedenle herhangi $t_e > 0$ için $[-\tau, t_e]$ sınırlandırılmış aralıkta düzgün süreklidir. Bu nedenle herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in [-\tau, t_e]$ varsa $\|x(t_1; \varphi) - x(t_2; \varphi)\|_\infty < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Sonuç olarak $0 \leq t < \delta$ için tüm $\theta \in [-\tau, 0]$ için

$\|x(t + \theta; \varphi) + x(\theta; \varphi)\|_\infty = \|x(t + \theta; \varphi) + \varphi(\theta)\|_\infty < \varepsilon$ elde ederiz ve bu güçlü sürekliliği gösterir ve ispat tamamlanır.

Herhangi $\varphi \in X$ için $t \rightarrow x(t)$ eşleminin sürekliliği güçlü süreklilik anlamına gelir.

Bundan sonra biz (3.6) çözüm operatörünün C_0 -yarıgrubuna SO-yarıgrubu gibi basitçe bakarız. Sonrası ile ilişkili sonsuz küçük üreteç nitelendirelim. Bu (3.1) e dayatılan sınırlamada türev operatörü konusudur.

Önerme 3.2

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in X : \varphi' \in X, \varphi'(0) = L\varphi\} \\ \mathcal{A}\varphi = \varphi' \end{cases} \quad (3.9)$$

ile tanımlanan lineer sınırsız $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$ operatörü SO-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteçidir.

İspat

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ olsun ve $\psi = A\varphi \in X$ belirtsin. (3.4) e göre

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{T(h)\varphi - \varphi}{h} - \psi \right\|_X = \lim_{h \downarrow 0} \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \left\| \frac{(T(h)\varphi) - \varphi(0)}{h} - \psi(\theta) \right\|_\infty = 0 \text{ yazabiliriz.}$$

$\theta \in [-\tau, 0)$ alalım. $h \downarrow 0$ için $\theta + h < 0$ olduğunda

$$\psi(\theta) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)\varphi(\theta) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi(\theta + h) - \varphi(0)}{h} \text{ dir.}$$

$\theta = 0$ için (3.7) den

$$\psi(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)\varphi(0) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_0^h LT(s)\varphi ds}{h} = L\varphi \text{ elde ederiz.}$$

Bu nedenle $[-\tau, 0)$ da ψ sağ türevle ve $\psi(0) = L\varphi$ ile birlikte φ sağdan türevlenebilir.

Bundan dolayı

$$\left\| \frac{\varphi(\theta-h) - \varphi(\theta)}{-h} - \psi(\theta) \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} - \psi(s) \right\|_{\infty} + \|\psi(s) - \psi(s+h)\|_{\infty}$$

$s = \theta - h$ ve ψ nin sürekliliğinden dolayı sağ taraftaki toplamların her biri düzgün yakınsak olduğu yerde φ nin diferensiyellenebilir ve $\varphi'(0) = L\varphi$ olduğu sonucuna ulaşırız. Tersine $\varphi' \in X$ ve $\varphi' = L\varphi$ olduğunu farz edelim. $\psi' = \varphi'$ olduğunu tanımlayarak

$$\left\| \frac{\varphi(\theta-h) - \varphi(\theta)}{-h} - \psi(\theta) \right\|_{\infty} = \left\| \frac{1}{h} \int_0^h (\psi(\theta+s) - \psi(\theta)) ds \right\|_{\infty} \text{ nin } \theta \in [-\tau, 0] \text{ için}$$

$h \downarrow 0$ iken 0 a düzgün yakınsadığını biliyoruz. Böylece ispat tamamlanır.

(3.1) teoremi ile nitel ve (3.1) in çözümlerinin özellikle asimptotik davranışları X üzerinde lineer soyut ADD olarak, \mathcal{A} (3.9) un sonsuz küçük üretici olmak üzere

$$u'(t) = \mathcal{A}u(t), \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

(3.1) in kritik tekrar formülleştirilmesi ile SO-yarı-grubunun dinamikleri tanımlanır.

3.3 Spektral Özellikler Ve Karakteristik Denklem

(3.10) soyut ADD sonsuz boyutludur fakat benzer şekilde sonlu boyutlu haline benzer olarak (3.1) lineer otonom GDD nin çözümlerinin asimptotik özelliklerini ve \mathcal{A} nin spektrumlarına dayalı sıfır çözümlerinin kararlılığını gösterir.

Genel olarak, bir sonsuz boyutlu operatörün spektrumu matristen daha zengin bir yapıya sahip olduğunu gösterir. Buradaki amacımız sırasıyla (3.6) ve (3.9) da tanımlanan $T(t)$ ve \mathcal{A} nin her ikisinin spektrumlarını ve birbiri arasındaki ilişkilerini tanımlamaktır. Önceki bölümde olduğu gibi önce temel tanımlar, lineer operatörler için sonuçlar ve genel bir Y Banach uzayı üzerinde C_0 -yarı-gruplarının tanımlarını vereceğiz.

Tanım 3.4 (*Çözen ve spektrum*)

$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq Y \rightarrow Y$ (kapalı veya sınırlı) lineer operatör olsun. \mathcal{A} nin çözücü kümesi

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_Y - \mathcal{A} \text{ örten}\}$$

\mathcal{A} nin spektrumu $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$ nin tamamlayıcı kümesidir.

$\rho(\mathcal{A})$ çözücü kümesi \mathbb{C} de açıktır, bu nedenle $\sigma(\mathcal{A})$ spektrumu \mathbb{C} de kapalıdır.

Tanım 3.5 (*Nokta spektrumu*)

\mathcal{A} nin $\sigma p(\mathcal{A})$ nokta spektrumu $\lambda \in \mathbb{C}$ nin kümesidir öyle ki $\lambda I_Y - \mathcal{A}$ içine değildir öyle ki $\varphi \neq 0$ için $\mathcal{A}\varphi = \lambda\varphi$. Burada λ özdeğer ve φ karşılık gelen öz fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

λ, \mathcal{A} nin özdeğeri olsun. $\mathcal{N}(\lambda I_Y - \mathcal{A})$ boş uzayı λ nin özuzayı ve $g(\lambda)$ boyutu geometrik çarpan olarak isimlendirilir.

$k \geq 1$ için bütün $\mathcal{N}(\lambda I_Y - \mathcal{A})^k$ leri kapsayan en küçük kapalı altuzay $\mathcal{L}(\lambda)$ nin genelleştirilmiş öz uzayı olarak tanımlanır ve $v(\lambda)$ boyutu cebirsel çarpan olarak adlandırılır. $\lambda, \sigma p(\mathcal{A})$ ayrıştırılmış noktası $v(\lambda) < +\infty$ ise λ sonlu tip özdeğer ve $\lambda = 1$ ise basit özdeğer olarak adlandırılır.

Ayrıştırılmış bir λ için $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda I_Y - \mathcal{A})^{l(\lambda)}$ olacak şekilde en küçük $l(\lambda)$ sayısına yükselişi (artışı) denir.

Sonlu boyutlu durumda spektrum sadece özdeğerleri içerirken sonsuz boyutlu operatörler için bu genelde doğru değildir. Fakat sınırlı kümeleri kapsayan kompakt kümeler içine götüren bir kompakt operatörün spektrumu basit bir yapıya sahiptir. Aşağıdaki tanım bu esas özelliği vurgular.

Tanım 3.6 (*Sonunda kompakt yarı-grup*)

$T(\bar{t})$ kompakt olacak şekilde $\bar{t} > 0$ mevcut ise; Y de sınırlandırılmış ve lineer operatörlerin $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ C_0 -yarıgrubu sonunda kompakt olarak isimlendirilir.

Sonlu boyutlu durumun tersine olarak (3.5) deki sonsuz boyutlu durumda bütün çözümlerin üstel olarak azaldığı ve sadece klasik olanların yaptığı durumlar arasındaki farkı ayırmalıdır.

Tanım 3.7 (*Büyüme sınırı*)

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$, Y de lineer ve sınırlandırılmış operatörlerin bir C_0 -yarıgrubu olsun. $w_0 := \inf\{w: \text{tüm } t \geq 0 \text{ için } \|T(t)\| \leq M_w e^{wt} \text{ olacak şekilde } M_w > 0 \text{ vardır.}\}$ gerçektek sayısına $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ in büyüme sınırı olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2 (*Spektral dönüşüm teoremi*)

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$, \mathcal{A} sonsuz küçük üreteçli Y de sınırlı ve lineer C_0 -yarı-grup olsun. Eğer $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tamamen kompakt ise

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(\mathcal{A})}, \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

dır.

Tanım 3.8 (*Spektral apsis*)

$\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq Y \rightarrow Y$ lineer (sınırlı olamayan) kapalı operatör olsun. $s(\mathcal{A}) := \sup\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ sabiti \mathcal{A} nın spektral apsis olarak isimlendirilir.

Teorem 3.3

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$, \mathcal{A} sonsuz küçük üreteç ile birlikte Y de lineer ve sınırlandırılmış operatörlerinin hemen hemen kompakt C_0 -yarıgrubu olsun. Böylece $w_0 = s(\mathcal{A})$ dır.

Beklendiği gibi lineer otonom GDD ler için SO-yarı-gruplarına dikkatimizi verelim.

İlk olarak kompaktlık özelliklerini göstereyim.

Önerme 3.3

SO-yarı-grubu hemen hemen kompakt ve özellikle tüm $t \geq \tau$ için (3.6) daki $T(t)$ kompaktır. İlaveten

$$\sigma(T(t)) \subseteq \tau_p(T(t)) \cup \{0\}, \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

İspat (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015)

Teorem 3.4

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$, (3.9) da verildiği gibi \mathcal{A} sonsuz küçük üreteç ile birlikte SO-yarı-grup olsun.

Aşağıdaki durumlar denktir.

- (3.1) in sıfır çözümü asimptotik artan kararlıdır.
- $\sigma(T(t)) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$
- $s(\mathcal{A}) < 0$

w_0 büyüme sınırı ile ifade edilen SO-yarı-grubun asimptotik davranışı $s(A)$ spektral apsisi tarafından ifade edilen üreteçlerinin spektral özelliklerinden sonuçlandırılabilir.

Önerme 3.4

\mathcal{A} , (3.9) da verilen SO-yarı-grubunun sonsuz küçük üreteci olsun. Böylece $\sigma(\mathcal{A})$ sadece özdeğerleri içerir ve $\lambda \in \sigma p(\mathcal{A})$ dir ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \lambda I_d - L(e^{\lambda \cdot}) \quad (3.13)$$

ve $L(e^{\lambda \cdot})u = L(e^{\lambda \cdot}u)$, $u \in \mathbb{C}^d$

olduğunda

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0 \quad (3.14)$$

λ karakteristik denklemi sağlar.

Özdeğerler reel kısmı üstten sınırlı olan sonlu tiptedir ve \mathbb{C} nin herhangi dikey şeridi onların sadece sonlu tanesini içerir.

İspat (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015).

Önerme 3.5

(3.9) da verilen \mathcal{A} nin $v(\lambda)$ çarpanlı bir özdeğeri olsun ve $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{v(\lambda)})$ genelleştirilmiş $\mathcal{F}(\lambda)$ özuzayı için bir temel oluştursun. b , $v(\lambda)$ boyutlu vektör olmak üzere başlangıç fonksiyonu $\varphi = \phi b \in \mathcal{F}(\lambda)$ ile birlikte (3.2) nin çözümleri λ

sadece özdeğer olacak şekilde C nın bir $v(\lambda)$ boyutlu matris olduğu yerde $x_t(\theta; \varphi) = \phi e^{C(t+\theta)} b$, $t \geq 0$, $\theta \in [-\tau, 0]$ formundadır.

İspat (Bozzo, Breda ve Vermiglio, 2015).

Son olarak ilgili uygulamaları ilgilendiren karakteristik denklemi

$$\det(\lambda I_d - A - \sum_{k=1}^p B_k e^{-\lambda \tau_k} - \sum_{k=1}^p \int_{-\tau_k}^{-\tau_{k-1}} C_k(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta) = 0 \quad (3.19)$$

Lineer otonom GDD (2.8) prototip modelini düşünelim. Köklerin yeri ve kararlılık grafiklerinin oluşturulması zor bir görevdir. Genellikle nümerik sonuçlar gerektirir. Sadece lineer otomon GDD lerin bazı basit sınıfları için çalışma analitik metodlar tarafından geliştirilmiştir. (1.4) Hayes denklemi (Breda, 2012) denklemi buna bir örnekti

4. BULGULAR VE İRDELEME

Şimdi bir gecikmeli lineer otonom denklemler, çoklu gecikmeli lineer otonom denklemler, bir dağıtımli gecikmeyle birlikte lineer otonom denklemler ve lineer otonom sistemler ile ilgili nümerik sonuçları MATLAB kodu kullanarak inceleyeceğiz. Bölüm sonunda verilen MATLAB kodları gecikmeli diferensiyel denklemlerin nümerik sonuçlarını almak için kullanılacaktır.

4.1. Test 1: Bir Gecikmeli Lineer Otonom Denklemler

$x'(t) = \tilde{a}x(t) + \tilde{b}x(t - \tau)$ (1.4) Hayes denklemini düşünelim. $\tau = 1$ gecikmesiyle ve $\tilde{b} = -\frac{\pi}{3}$ ile birlikte denklem

$$x'(t) = \tilde{a}x(t) - \frac{\pi}{3}x(t-1) \quad (4.1)$$

şeklini alır.

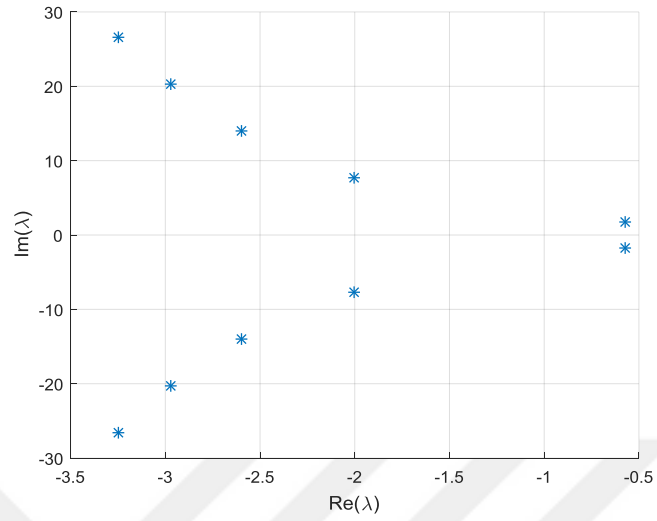
A) $\tilde{a} = -1$ olduğunda

Bölüm sonunda GDD_test1.m MATLAB kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

-0.5714 + 1.8041i	-2.9702 -20.3237i	-14.8412 +42.3115i
-0.5714 - 1.8041i	-3.2461 +26.6368i	-14.8412 -42.3115i
-2.0067 + 7.7244i	-3.2461 -26.6368i	-17.2074 +70.7015i
-2.0067 - 7.7244i	-3.5721 +32.5278i	-17.2074 -70.7015i
-2.6011 +14.0235i	-3.5721 -32.5278i	-47.7771 +40.7019i
-2.6011 -14.0235i	-3.7154 +38.8569i	-47.7771 -40.7019i
-2.9702 +20.3237i	-3.7154 -38.8569i	-70.9827 + 0.0000i

M =

20



Şekil 4.1.1. $\tilde{a} = -1$ alındığında elde edilen lambda değerleri

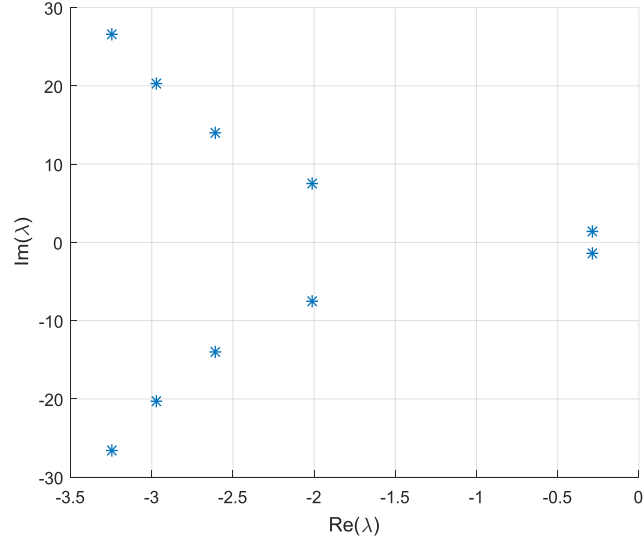
B) $\tilde{a} = 0$ olduğunda

GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

-0.2859 + 1.3642i	-2.9737 -20.2747i	-14.7831 +42.2598i
-0.2859 - 1.3642i	-3.2489 +26.5989i	-14.7831 -42.2598i
-2.0153 + 7.5946i	-3.2489 -26.5989i	-17.2049 +70.6990i
-2.0153 - 7.5946i	-3.5667 +32.4992i	-17.2049 -70.6990i
-2.6067 +13.9525i	-3.5667 -32.4992i	-47.6714 +40.6643i
-2.6067 -13.9525i	-3.7106 +38.8452i	-47.6714 -40.6643i
-2.9737 +20.2747i	-3.7106 -38.8452i	-70.8653 + 0.0000i

M =

20



Şekil 4.1.2. $\tilde{a} = 0$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

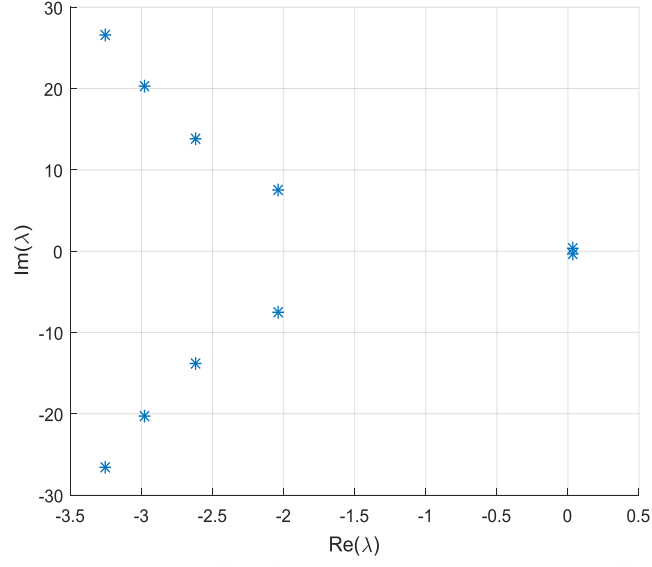
C) $\tilde{a} = 1$ olduğunda

Bölüm sonunda GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

$0.0308 + 0.3029i$	$-2.9797 - 20.2260i$	$-14.7265 + 42.2073i$
$0.0308 - 0.3029i$	$-3.2531 + 26.5611i$	$-14.7265 - 42.2073i$
$-2.0411 + 7.4672i$	$-3.2531 - 26.5611i$	$-17.2026 + 70.6964i$
$-2.0411 - 7.4672i$	$-3.5623 + 32.4707i$	$-17.2026 - 70.6964i$
$-2.6173 + 13.8823i$	$-3.5623 - 32.4707i$	$-47.5672 + 40.6260i$
$-2.6173 - 13.8823i$	$-3.7062 + 38.8333i$	$-47.5672 - 40.6260i$
$-2.9797 + 20.2260i$	$-3.7062 - 38.8333i$	$-70.7495 + 0.0000i$

M =

20



Şekil 4.1.3. $\tilde{a} = 1$ için elde edilen lambda değerleri

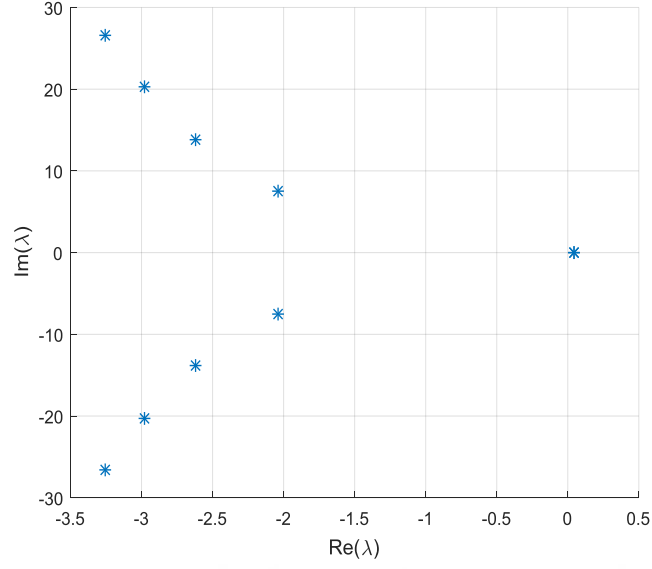
D) $\tilde{a} = 1 + \log\left(\frac{\pi}{3}\right)$ olduğunda

GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

0.0461 + 0.0000i	-2.9800 -20.2238i	-14.7239 +42.2049i
0.0461 - 0.0000i	-3.2533 +26.5594i	-14.7239 -42.2049i
-2.0427 + 7.4615i	-3.2533 -26.5594i	-17.2025 +70.6963i
-2.0427 - 7.4615i	-3.5621 +32.4693i	-17.2025 -70.6963i
-2.6180 +13.8791i	-3.5621 -32.4693i	-47.5625 +40.6243i
-2.6180 -13.8791i	-3.7060 +38.8328i	-47.5625 -40.6243i
-2.9800 +20.2238i	-3.7060 -38.8328i	-70.7442 + 0.0000i

M =

20



Şekil 4.1.4. $\tilde{a} = 1 + \log\left(\frac{\pi}{3}\right)$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

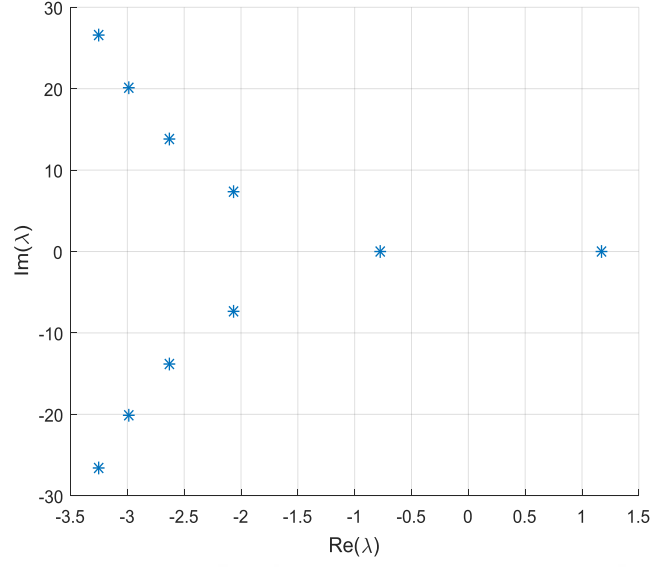
E) $\tilde{a} = 1,5$ olduğunda

Bölüm sonunda GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

1.1774 + 0.0000i	-2.9836 -20.2019i	-14.6988 +42.1808i
-0.7765 + 0.0000i	-3.2557 +26.5424i	-14.6988 -42.1808i
-2.0601 + 7.4059i	-3.2557 -26.5424i	-17.2014 +70.6951i
-2.0601 - 7.4059i	-3.5604 +32.4564i	-17.2014 -70.6951i
-2.6245 +13.8477i	-3.5604 -32.4564i	-47.5157 +40.6067i
-2.6245 -13.8477i	-3.7042 +38.8273i	-47.5157 -40.6067i
-2.9836 +20.2019i	-3.7042 -38.8273i	-70.6921 + 0.0000i

M =

20

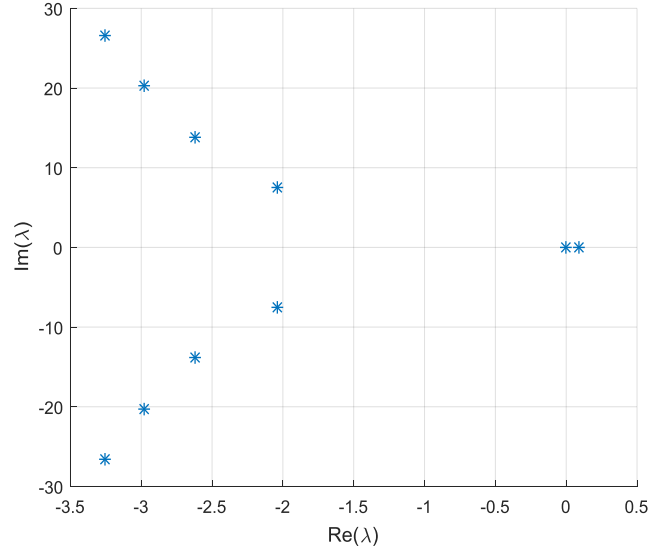


Şekil 4.1.5. $\tilde{a} = 1,5$ için elde edilen lambda değerleri

F) $\tilde{a} = \frac{\pi}{3}$ olduğunda

GDD_test1.m kodu ile elde edilen lambda değerleri;

0.0930 + 0.0000i	-2.9800 -20.2238i	-14.7239 +42.2048i
-0.0000 + 0.0000i	-3.2533 +26.5594i	-14.7239 -42.2048i
-2.0428 + 7.4614i	-3.2533 -26.5594i	-17.2025 +70.6963i
-2.0428 - 7.4614i	-3.5621 +32.4693i	-17.2025 -70.6963i
-2.6180 +13.8790i	-3.5621 -32.4693i	-47.5623 +40.6242i
-2.6180 -13.8790i	-3.7060 +38.8328i	-47.5623 -40.6242i
-2.9800 +20.2238i	-3.7060 -38.8328i	-70.7440 + 0.0000i



Şekil 4.1.6. $\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{3}$ alındığında elde edilen lambda değerleri

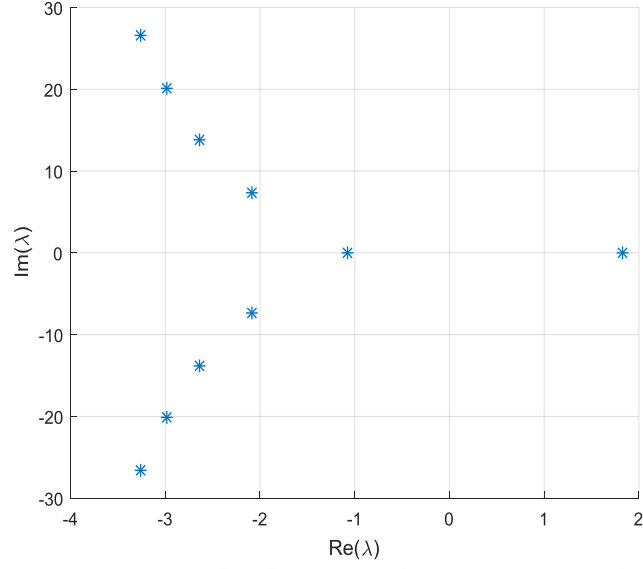
G) $\tilde{\alpha} = 2$ olduğunda

GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

1.8324 + 0.0000i	-2.9880 -20.1780i	-14.6714 +42.1542i
-1.0782 + 0.0000i	-3.2586 +26.5237i	-14.6714 -42.1542i
-2.0827 + 7.3468i	-3.2586 -26.5237i	-17.2003 +70.6938i
-2.0827 - 7.3468i	-3.5588 +32.4421i	-17.2003 -70.6938i
-2.6328 +13.8136i	-3.5588 -32.4421i	-47.4646 +40.5872i
-2.6328 -13.8136i	-3.7023 +38.8214i	-47.4646 -40.5872i
-2.9880 +20.1780i	-3.7023 -38.8214i	-70.6352 + 0.0000i

M =

20



Şekil 4.1.7. $\tilde{a} = 2$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

Çizelge 4.1. $M=20$ ve $\tilde{b} = -\pi/3$ ile değişen \tilde{a} değerleri için λ_1 ve λ_2 değerleri

Durum	\tilde{a}	λ_1	λ_2
A	-1	-0.5714 + 1.8041i	-0.5714 - 1.8041i
B	0	-0.2859 + 1.3642i	-0.2859 - 1.3642i
C	1	0.0308 + 0.3029i	0.0308 - 0.3029i
D	$1 + \log(\pi/3)$	0.0461	0.0461
E	1,5	1.1774	-0.7765
F	$\pi/3$	0.0930	-0.0000
G	2	1.8324	-1.0782

4.2. Test 2: Çoklu Gecikmeli Lineer Otonom Denklemler

İkinci test denklemi d_1 ve d_2 gecikmeler olmak üzere iki ayrı gecikme terimleri içeren bir GDD

$$x'(t) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)x(t) + \frac{1}{2}x(t-d_1) + \frac{1}{2}ex(t-d_2) \quad (4.2)$$

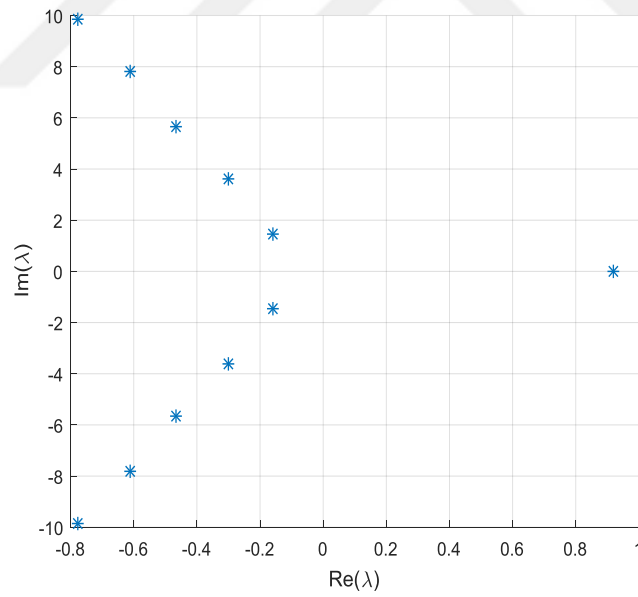
A) $d_1 = 1, d_2 = 3$ için;

Bölüm sonunda verilen GDD_test2.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

$0.9182 + 0.0000i$	$-0.6119 - 7.8035i$	$-3.3622 - 17.0335i$
$-0.1600 + 1.4348i$	$-0.7756 + 9.8538i$	$-10.3621 + 16.9919i$
$-0.1600 - 1.4348i$	$-0.7756 - 9.8538i$	$-10.3621 - 16.9919i$
$-0.2988 + 3.6315i$	$-1.3145 + 12.2807i$	$-19.3337 + 11.9486i$
$-0.2988 - 3.6315i$	$-1.3145 - 12.2807i$	$-19.3337 - 11.9486i$
$-0.4641 + 5.6519i$	$-2.2365 + 15.1451i$	$-24.9470 + 0.0000i$
$-0.4641 - 5.6519i$	$-2.2365 - 15.1451i$	
$-0.6119 + 7.8035i$	$-3.3622 + 17.0335i$	

M =

20



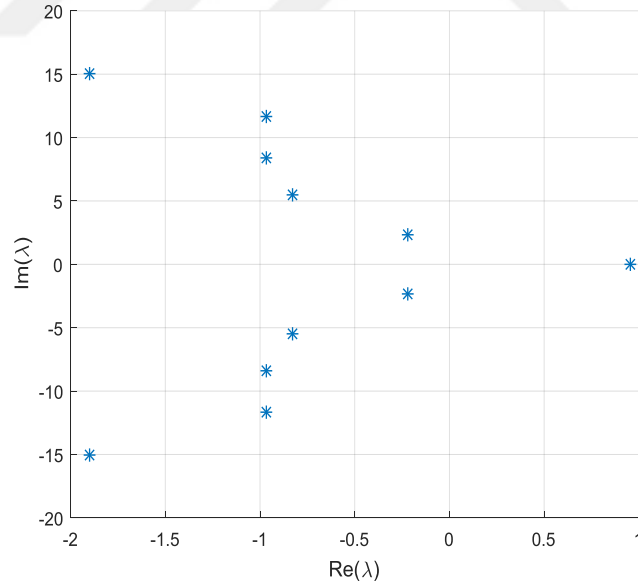
Şekil 4.2.1. $d_1 = 1, d_2 = 3$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

B) $d_1 = 1.5, d_2 = 2$ için;

Bölüm sonunda GDD_test1.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

$0.9536 + 0.0000i$	$-0.9675 + 8.4374i$	$-5.4937 - 27.1070i$
$-0.2172 + 2.3102i$	$-0.9675 - 8.4374i$	$-7.8947 + 23.8615i$
$-0.2172 - 2.3102i$	$-1.9012 + 15.0026i$	$-7.8947 - 23.8615i$
$-0.8309 + 5.4303i$	$-1.9012 - 15.0026i$	$-21.1060 + 22.1742i$
$-0.8309 - 5.4303i$	$-2.8056 + 18.8623i$	$-21.1060 - 22.1742i$
$-0.9641 + 11.6058i$	$-2.8056 - 18.8623i$	$-33.0909 + 9.7706i$
$-0.9641 - 11.6058i$	$-5.4937 + 27.1070i$	$-33.0909 - 9.7706i$

M =
20



Şekil 4.2.2. $d_1 = 1.5, d_2 = 2$ alındığında elde edilen lambda değerleri

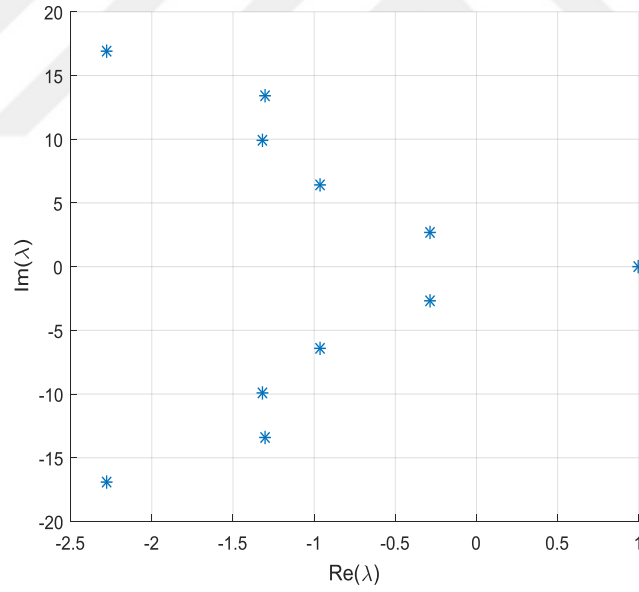
c) $d_1 = \sqrt{2}, d_2 = \sqrt{3}$ için;

Elde edilen lambda değerleri;

$0.9963 + 0.0000i$	$-1.3178 - 9.8638i$	$-8.8425 - 27.8654i$
$-0.2887 + 2.6435i$	$-2.2816 + 16.8544i$	$-19.4840 + 33.0076i$
$-0.2887 - 2.6435i$	$-2.2816 - 16.8544i$	$-19.4840 - 33.0076i$
$-0.9601 + 6.3626i$	$-3.5268 + 22.4358i$	$-37.8176 + 23.3228i$
$-0.9601 - 6.3626i$	$-3.5268 - 22.4358i$	$-37.8176 - 23.3228i$
$-1.3049 + 13.3643i$	$-8.2689 + 43.0521i$	$-47.3710 + 0.0000i$
$-1.3049 - 13.3643i$	$-8.2689 - 43.0521i$	
$-1.3178 + 9.8638i$	$-8.8425 + 27.8654i$	

M =

20



Şekil 4.2.3. $d_1 = \sqrt{2}, d_2 = \sqrt{3}$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

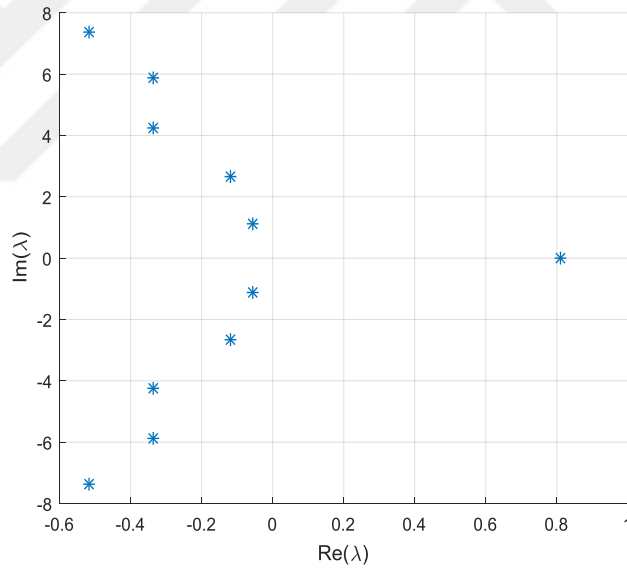
D) $d_1 = \sqrt{3}, d_2 = 4$ için;

GDD_test2.m ile elde edilen lambda değerleri;

$0.8088 + 0.0000i$	$-0.3379 + 5.8685i$	$-1.4058 - 10.7396i$
$-0.0558 + 1.1027i$	$-0.3379 - 5.8685i$	$-4.1809 + 11.5992i$
$-0.0558 - 1.1027i$	$-0.5154 + 7.3625i$	$-4.1809 - 11.5992i$
$-0.1171 + 2.6677i$	$-0.5154 - 7.3625i$	$-9.8895 + 10.7611i$
$-0.1171 - 2.6677i$	$-0.7661 + 9.2228i$	$-9.8895 - 10.7611i$
$-0.3368 + 4.2526i$	$-0.7661 - 9.2228i$	$-16.0254 + 4.6383i$
$-0.3368 - 4.2526i$	$-1.4058 + 10.7396i$	$-16.0254 - 4.6383i$

M =

20



Şekil 4.2.4. $d_1 = \sqrt{3}, d_2 = 4$ olduğunda elde edilen lambda değerleri

Çizelge 4.2. M=20 ve değişen d_1 ve d_2 değerleri için hesaplanan λ_1 , λ_2 ve λ_3 değerleri

Durum	d_1	d_2	λ_1	λ_2	λ_3
A	1	3	0.9182	-0.1600 + 1.4348i	-0.1600 - 1.4348i
B	1.5	2	0.9536	-0.2172 + 2.3102i	-0.2172 - 2.3102i
C	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	0.9963	-0.2887 + 2.6435i	-0.2887 - 2.6435i
D	$\sqrt{3}$	4	0.8088	-0.0558 + 1.1027i	-0.0558 - 1.1027i

4.3. Test 3: Bir Dağıtımli Gecikmeyle Birlikte Lineer Otonom Denklemler

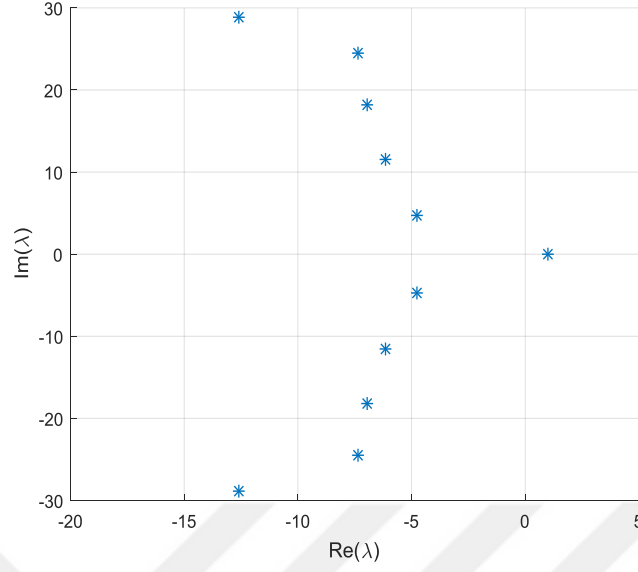
Bu bölümde bir tek dağıtımli gecikmeyle birlikte spektral yakınsamalı GDD olsun.

$$A) \quad x'(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) x(t) + \int_{-1}^0 e^{\theta} x(t+\theta) d\theta \quad (4.3)$$

GDD_test3a.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

1.0000 + 0.0000i	-6.1439 + 11.6313i	-12.6012 - 28.8501i
-4.3160 + 38.5195i	-6.1439 - 11.6313i	-17.3465 + 70.4764i
-4.3160 - 38.5195i	-6.9279 + 18.1431i	-17.3465 - 70.4764i
-4.7841 + 4.7982i	-6.9279 - 18.1431i	-27.5883 + 26.0480i
-4.7841 - 4.7982i	-7.3670 + 24.5307i	-27.5883 - 26.0480i
-5.5766 + 31.1177i	-7.3670 - 24.5307i	-41.0640 + 11.0546i
-5.5766 - 31.1177i	-12.6012 + 28.8501i	-41.0640 - 11.0546i

M =



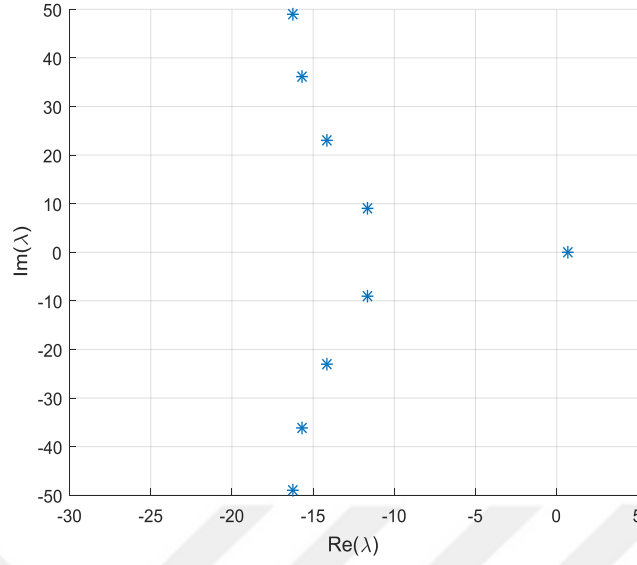
Şekil 4.3.1. (4.3) için elde edilen lambda değerleri

$$\mathbf{B)} \quad x'(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) x(t) + \int_{-1/2}^0 e^{\theta} x(t + \theta) d\theta \quad (4.4)$$

Bölüm sonunda GDD_test3b.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

0.65608 + 0i	-14.156 + 22.971i	-25.405 - 54.303i
-8.6343 + 77.049i	-14.156 - 22.971i	-34.691 + 140.95i
-8.6343 - 77.049i	-15.675 + 36.093i	-34.691 - 140.95i
-11.275 + 62.309i	-15.675 - 36.093i	-52.827 + 47.738i
-11.275 - 62.309i	-16.278 + 49.109i	-52.827 - 47.738i
-11.683 + 8.9742i	-16.278 - 49.109i	-76.546 + 19.947i
-11.683 - 8.9742i	-25.405 + 54.303i	-76.546 - 19.947i

M =



Şekil 4.3.2. (4.4) için elde edilen lambda değerleri

4.4. Test 4: Lineer Otonom Sistemler

Hem ayrık hem dağıtımli gecikme şartlarıyla birlikte iki GDD sistemi düşünelim.

$$\mathbf{A)} \begin{cases} x_1'(t) = ex_1(t) + x_2(t) + x_2(t-1) + \int_{-1}^0 \theta x_1(t+\theta) d\theta \\ x_2'(t) = x_1(t) - ex_2(t) + x_1(t-1) + \int_{-1}^0 \theta x_2(t+\theta) d\theta \end{cases} \quad (4.5)$$

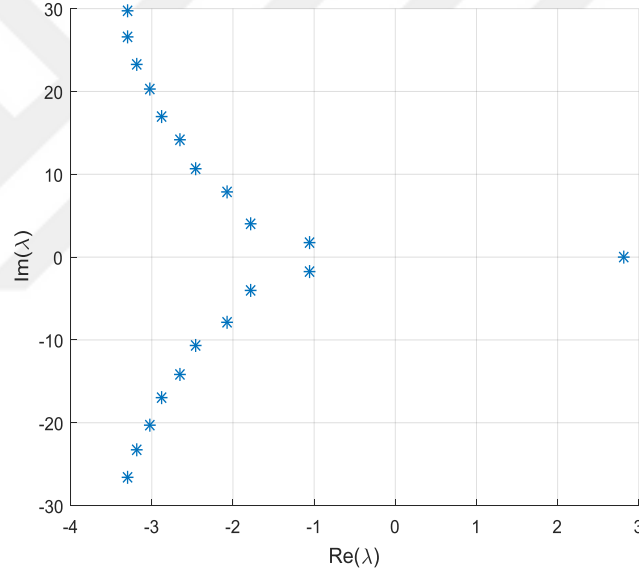
Bölüm sonunda GDD_test4a.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

2.8204 + 0.0000i	-2.0758 - 7.8385i	-2.8811 -17.0026i
-1.0484 + 1.8304i	-2.4613 +10.6086i	-3.0170 +20.3701i
-1.0484 - 1.8304i	-2.4613 -10.6086i	-3.0170 -20.3701i
-1.7767 + 4.0431i	-2.6508 +14.0900i	-3.1801 +23.3433i
-1.7767 - 4.0431i	-2.6508 -14.0900i	-3.1801 -23.3433i
-2.0758 + 7.8385i	-2.8811 +17.0026i	-3.2927 +26.6733i

-3.2927 -26.6733i	-4.5858 -36.4749i	-17.4898 -70.2540i
-3.3030 +29.6620i	-6.0991 +39.0963i	-28.2692 +45.3443i
-3.3030 -29.6620i	-6.0991 -39.0963i	-28.2692 -45.3443i
-3.6212 +32.5436i	-14.9642 +42.2140i	-47.7259 +40.4589i
-3.6212 -32.5436i	-14.9642 -42.2140i	-47.7259 -40.4589i
-3.7408 +38.8576i	-17.2159 +70.6940i	-63.6501 +24.1294i
-3.7408 -38.8576i	-17.2159 -70.6940i	-63.6501 -24.1294i
-4.5858 +36.4749i	-17.4898 +70.2540i	-70.7228 + 0.0000i

M =

20



Şekil 4.4.1. (4.4) için elde edilen lambda değerleri

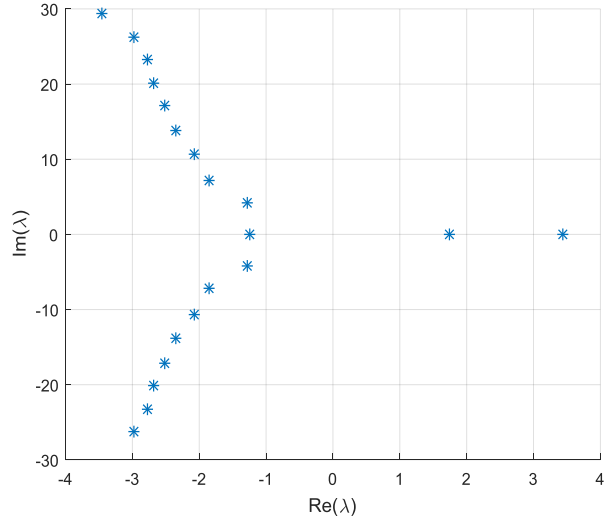
$$\mathbf{B) \left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 2x_2(t-1) + \int_{-1/2}^0 x_1(t+\theta)d\theta \\ x_2'(t) = -x_1(t) + ex_2(t) + x_1(t-1) + \int_{-1/2}^0 \theta x_2(t+\theta)d\theta \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Bölüm sonunda GDD_test4b.m kodunun çalıştırılmasıyla elde edilen lambda değerleri;

$3.4330 + 0.0000i$	$-2.6896 - 20.1324i$	$-6.5130 - 41.8106i$
$1.7418 + 0.0000i$	$-2.7781 + 23.3496i$	$-9.9016 + 42.8900i$
$-1.2501 + 0.0000i$	$-2.7781 - 23.3496i$	$-9.9016 - 42.8900i$
$-1.2847 + 4.1526i$	$-2.9774 + 26.2842i$	$-16.5967 + 42.6325i$
$-1.2847 - 4.1526i$	$-2.9774 - 26.2842i$	$-16.5967 - 42.6325i$
$-1.8582 + 7.2386i$	$-3.4481 + 29.3980i$	$-26.1119 + 41.2746i$
$-1.8582 - 7.2386i$	$-3.4481 - 29.3980i$	$-26.1119 - 41.2746i$
$-2.0696 + 10.6962i$	$-4.2109 + 32.7783i$	$-37.4658 + 37.3398i$
$-2.0696 - 10.6962i$	$-4.2109 - 32.7783i$	$-37.4658 - 37.3398i$
$-2.3550 + 13.7370i$	$-4.5364 + 36.7022i$	$-48.4059 + 28.9855i$
$-2.3550 - 13.7370i$	$-4.5364 - 36.7022i$	$-48.4059 - 28.9855i$
$-2.5181 + 17.0597i$	$-4.9077 + 39.6125i$	$-56.9866 + 16.0566i$
$-2.5181 - 17.0597i$	$-4.9077 - 39.6125i$	$-56.9866 - 16.0566i$
$-2.6896 + 20.1324i$	$-6.5130 + 41.8106i$	$-59.9736 + 0.0000i$

M =

20



Şekil 4.4.2. (4.5) için elde edilen lambda değerleri

4.5. Matlab Kodları

- GDD_test1.m

```
%% NUMERIK PARAMETRELERIN LISTESI
```

```
%par(1)=atilde;
```

```
%par(2)=btilde;
```

```
%% GDD BOYUTU
```

```
d=1;
```

```
%% SIMDIKI ZAMAN TERIMI
```

```
Atilde=@(t,d,par) par(1);
```

```
%% AYRIK GECIKME TERIMLERI
```

```
dd=1;
```

```
Btilde{1}=@(t,d,par) par(2);
```

```
%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI
```

```
l=[];
```

```
r=[];
```

```
Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) [];
```

- GDD_test2.m

```
%% MUMKUN PARAMETRELERIN LISTESI
```

```
%par(1)=d1;
```

```
%par(2)=d2;
```

```
%% GDD BOYUTU
```

```
d=1;
```

```
%% SIMDIKI ZAMAN TERIMI
```

```
Atilde=@(t,d,par) 1-exp(-1);
```

```
%% AYTIK GECIKME TERIMLERI
```

```
dd=[par(1),par(2)];
```

```
Btilde{1}=@(t,d,par) .5;
```

```
Btilde{2}=@(t,d,par) .5*exp(1);
```

```
%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI
```

```
l=[];
```

```
r=[];
```

```
Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) [];
```

- GDD_test3a.m

```
%% MUMKUN PARAMETRELERIN LISTESI
```

```
%parametre yok
```

```
%% GDD BOYUTU
```

```
d=1;
```

```
%% SIMDIKI ZAMAN TERIMI
```

```
Atilde=@(t,d,par) .5*(1+exp(-2));
```

```
%% AYRIK GECIKME TERIMLERI
```

```
dd=[];
```

```
Btilde{1}=@(t,d,par) [];
```

```
%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI
```

```
l=1;
```

```
r=0;
```

```
Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) exp(theta);
```

- GDD_test3b.m

```
%% MUMKUN PARAMETRELERIN LISTESI
```

```
%parametre yok
```

```
%% GDD BOYUTU
```

```
d=1;
```

```
%% SIMDIKI ZAMAN TERIMI
```

```
Atilde=@(t,d,par) .5*(1-exp(-1));
```

```
%% AYRIK GECIKME TERIMLERI
```

```
dd=[];
```

```
Btilde{1}=@(t,d,par) [];
```

```
%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI
```

```
l=.5;
```

```
r=0;
```

```
Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) exp(theta);
```

- GDD_test4a.m

%% MUMKUN PARAMETRELERIN LISTESI

%parametre yok

%% GDD BOYUTU

d=2;

%% SIMDIKI ZAMAN TERIMI

Atilde=@(t,d,par) [exp(1),1;1,-exp(1)];

%% AYRIK GECIKME TERIMLERI

dd=1;

Btilde{1}=@(t,d,par) [0,1;1,0];

%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI

l=1;

r=0;

Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) [theta,0;0,theta];

- GDD_test4b.m

```
%% MUMKUN PARAMETRELERIN LISTESI
```

```
%parametre yok
```

```
%% GDD BOYUTU
```

```
d=2;
```

```
%% SIMDIKI GECIKME TERIMI
```

```
Atilde=@(t,d,par) [2,-1;-1,exp(1)];
```

```
%% AYRIK GECIKME TERIMLERI
```

```
dd=1;
```

```
Btilde{1}=@(t,d,par) [0,2;1,0];
```

```
%% DAGITILMIS GECIKME TERIMLERI
```

```
l=.5;
```

```
r=0;
```

```
Ctilde{1}=@(t,theta,d,par) [1,0;0,theta];
```

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde bir gecikmeli lineer otonom denklemler, çoklu gecikmeli lineer otonom denklemler, bir dağıtımli gecikmeyle birlikte lineer otonom denklemler ve lineer otonom sistemlerin kararlılığı teoride verildiği gibi nümerik sonuçlarda doğruluğu görölmüştür. Nümerik sonuçlarda göröldüğu gibi elde edilen lambda değerlerinden bazıları reel kök, bazıları kompleks köktür. Kompleks köklerin hepsinin reel kısmı negatif olduğu için yakınsama gerçekleşir. Bu durumda kararlılık gerçekleşmiş olur.



KAYNAKÇA

- Apostol T.M. (1961) *Calculus*, USA, 666
- Aubin J.P. ve Frankowska H. (1990), *Set-Valued Analysis*, Springer Science, Berlin,461
- Azbelev, N., Simonov, P. (2002) *Stability of Differential Equations with Aftereffect. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, London
- Baker, C., Ford, N. (1992) *Stability properties of a scheme for the approximate solution of a delayintegro- differential equation*, 357–370
- Bellen, A., Zennaro, M. (2003) *Numerical Methods for Delay Differential Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computing Series*, Oxford University Press, New York
- Bellen, A., Guglielmi, A., Maset, S., Zennaro, M. (2009) *Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations*, Acta Numer, 1–110
- Bellman, R.E., Cooke, K.L. (1963) *Differential-Difference Equations. Academic Press*, New York
- Blythe, S.P., Nisbet, R.M., Gurney, W.S.C. (1985) *Stability switches in distributed delay models*, J. Math. Anal. Appl, 388–396
- Boese, F.G. (1989) *The stability chart for the linearized Cushing equation with a discrete delay and with gamma-distributed delays*, J. Math. Anal. Appl, 510–536
- Breda, D., Maset, S., Vermiglio, R. (2005) *Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations*, SIAM J. Sci. Comput, 482–495
- Breda, D., Maset, S., Vermiglio, R. (2012) *Approximation of eigenvalues of evolution operators for linear retarded functional differential equations*, Siam J. Numer. Anal.
- Breda D., Maset S., Vermiglio R. (2015) *Stability of Linear Delay Differential Equations A Numerical Approach with MATLAB*, Italy, 158s

- Butcher, E.A., Ma, H.T., Bueler, E., Averina, V., Szabo, Z. (2004) *Stability of linear time-periodic delay-differential equations via Chebyshev polynomials*, Int. J. Numer. Meth. Eng.
- Chandra, J. Ve Fleishman, B.A. (1970), *On generalization of Gronwall -Bellman lemma in partially ordered Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 668-681.
- Chicone, C. (1999) *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, New York
- Cooke, K.L., Grossman, Z. (1982) *Discrete delay, distributed delays and stability switches*, J. Math. Anal. Appl. 592-627
- DeAngelis, D.L., Goldstein, R.A., Neill, R. (1975) *A model for trophic interaction*, Ecology, 881-892
- Diekmann, O., Van Gils, S.A., Verduyn Lunel, S.M., Walther, H.O. (1995) *Delay Equations— Functional, Complex and Nonlinear Analysis*, Applied Mathematical Sciences, Springer, New York
- Driver, R.D. (1977) *Ordinary and Delay Differential Equations*, Springer, New York
- Erneux, T. (2009) *Applied delay differential equations*, Springer, New York
- Graduate Studies in Mathematics (2007) *Linear Algebra in Action*, American Mathematical Society, Providence
- Hale, J.K. (1977) *Theory of Functional Differential Equations*, 1st edn. Springer, New York
- Hale, J.K., Koçak, H. (1991) *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York
- Hale, J.K., Verduyn Lunel, S.M. (1993) *Introduction to Functional Differential Equations*, 2nd edn. Springer, New York
- Hayes, N.D. (1950) *Roots of the transcendental equation associated with a certain differencedifferential equation*, J. Lond. Math. Soc., 226-231
- Hutchinson G.E. (1948) *Circular causal systems in ecology*, Annals of the New York academy of sciences 221-246
- Inspurger, T., Stépán, G. (2002) *Semi-discretization method for delayed systems*, Int. J. Numer. Math. Eng, 503-518

- Inspurger, T., Stépán, G. (2011) *Stability and Engineering Applications*, Springer, New York, 178
- Inspurger, T. (2011) *Stick balancing with reflex delay in case of parametric forcing*
- Kapitsa, P.L. (1951) *Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension*, Zh. Eksper. Teoret. Fiz, 588–597
- Kolmanovskii, V.B., Nosov, V.R. (1986) *Stability of Functional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, London
- Kolmanovskii, V.B., Myshkis, A. (1992) *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Press, The Netherlands
- Kuang, Y. (1993) *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics. Dynamics in Science and Engineering*, Academic Press, New York
- Kuznetsov, Y.A. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer, New York
- Langer R.E. (1929) *The asymptotic location of the roots of a certain transcendental equation*, American Mathematical Society, 837–844
- Levi, M. (1988) *Stability of the inverted pendulum: a topological explanation*, Siam Rev, 639–644
- Ma, H., Butcher, E.A. (2005) *Stability of elastic columns with periodic retarded follower forces*, J. Sound Vib, 849–867
- Mackey, M.C., Glass, L. (1977) *Oscillations and chaos in physiological control systems*, 287–289
- Malakhovskii, E., Mirkin, L. (2006) *On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay*, Automatica, 1041–1047
- Malthus T. (1798) *An Essay on the Principle of Population*, Johnson, London, 126
- Mann, B.P., Patel, B.R. (2010) *Stability of delay equations written as state space models*, J. Vib Control, 1067–1085
- Meyer, C. (2000) *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Siam, New York
- Morărescu, C.I. Niculescu, S.I., Gu, K.Q. (2007) *Stability crossing curves of shifted gammadistributed delay systems*, 475–493

- Schwengeler, E. (1925) *Geometrisches ber die verteilung der nullstellen spezieller ganzer funktionen*, Doctoral and Habilitation Theses. Zurich
- Sieber, J., Szalai, R. (2011) *Characteristic matrices for linear periodic delay differential equations*, *Siam J. Appl. Dyn. Syst.*, 129–147
- Stépán, G. (1989) *Retarded Dynamical Systems*, Longman, Harlow
- Stephenson, A. (1908) On a new type of dynamical stability, *Memories and proceeding of the Manchester literary and philosophical society*, 1-10
- Verhulst P.F. (1838) *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Quetelet, Bruxelles



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Gonca İLTER
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Trabzon, 18/01/1987
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 505 349 51 15
E-posta : ilter.gonca87@gmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Turgutlu Anadolu Lisesi	2005
Lisans	Uludağ Üniversitesi	2009
Yüksek Lisans	Manisa Celal Bayar Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2016

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2011- devam	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma		X	
Anlama			X
Okuma			X