

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KESİTLİ MINDLIN PLAKLARININ
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Orhan ÇAKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ

1995

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KESİTLİ MINDLIN PLAKLARININ
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Orhan ÇAKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez, Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

(İmza)

(İmza)

(İmza)

Danışman

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DEĞİŞKEN KESİTLİ MINDLIN PLAKLARININ
SERBEST TITREŞİM ANALİZİ

Orhan ÇAKAR

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı

1995, Sayfa : 74

Bu çalışmada değişken kalınlıklı izotropik elastik dikdörtgen plakların, dönme ataleti ve kesme deformasyonunun etkileri de dikkate alınarak serbest titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Bu amaçla sonlu fark tekniği ile varyasyonel prensiplerden oluşan bir metod kullanılmıştır. Mindlin tarafından formüle edilen şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadeleri yer değiştirme ve dönme bileşenlerine bağlı olarak sonlu fark denklemleriyle ifade edilmiştir. Şekil değiştirme ve kinetik enerjilerin farkı bu bileşenlere göre minimize edilmiş ve son olarak doğal frekanslarla mod biçimleri cebrik özdeğer probleminin çözümünden elde edilmiştir. Yapılan çalışmada plak kenarları basit, ankastre, serbest ve bunların farklı konfigürasyonu şeklindeki mesnet şartlarına göre incelenmiş ve sistemin doğal frekansları ve mod biçimleri elde edilmiştir.

SUMMARY

Masters Thesis

AN ANALYSIS OF FREE VIBRATION OF
MINDLIN PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

Orhan ÇAKAR

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Engineering

1995, Page : 74

In this study, the free vibration characteristics of isotropic elastic rectangular plates with variable thickness is analysed including the effects of transverse shear deformation and rotary inertia. Then, a method is used that is based on the variational principles in conjunction with the finite difference technique. The strain and kinetic energy formulated by Mindlin are expressed by the finite difference equations in terms of discrete displacement and rotational components. The strain and kinetic energy difference is minimized with respect to this components and finally, natural frequencies and mode shapes are obtained from the solution of algebraic eigenvalue problem. In the present study the various boundary conditions of rectangular plates which are simply supported, clamped, free and combination of these are analysed and the mode shapes and natural frequencies of the system are obtained.

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum bu yüksek lisans tezi çalışması sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hacam sayın Doç.Dr. Bülent TUTAK 'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç ve vazife bilirim. Ayrıca bölümümüzün her türlü imkanlarından yararlanmamı sağlayan bölüm başkanımız sayın Prof.Dr. Kâzım PIHTILI 'ya teşekkürlerimi sunarım.

Orhan ÇAKAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	11
SUMMARY	111
TEŞEKKÜR.....	1V
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	v11
TABLolar LİSTESİ	1X
SİMGELER	X
1.GİRİŞ	1
2.KONUyla İLGİLİ YAPILAN ARAŞTIRMALAR.....	4
3.MİNDLİN PLAK TEORİSİ	10
3.1. Gerilme - Şekil Değişirme Bağlıları	11
3.2. Kesme Kuvveti ve Moment Bağlıları	14
3.3. Şekil Değişirme ve Kinetik Enerji İfadeleri	17
3.4. Hareket Denklemi	20
3.4.1. Basit mesnetli kenar	29
3.4.2. Ankastre kenar	29
3.4.3. Serbest kenar	29
4.ENERJİ DENKLEMLERİNE VARYASYONEL PRENSİBİN	
UYGULANMASI	30
4.1. Boyut Analizi	30
4.2. Euler Denklemi	34

5.SONLU FARK FORMÜLASYONU	36
5.1. Grid Sistemi	36
5.2. İç Dügümlerde Sonlu Fark Formülasyonu	42
5.2.1. Şekil değiştirme enerjisinin sonlu fark formülasyonu ...	42
5.2.2. Kinetik enerjinin sonlu fark formülasyonu	46
6. BILGISAYAR PROGRAMI	49
7. SONUÇLAR VE TARTIşMA	51
EKLER	
KAYNAKLAR	



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Dikdörtgen şeklindeki bir plak elemanının eğilmeden önceki ve sonraki hali

Şekil 3.2.1. Plak elemanı üzerindeki gerilmeler

Şekil 3.2.2. Plak elemanı üzerindeki kesme kuvvetleri ve momentler

Şekil 3.4. Dönüşüm koordinatları

Şekil 4.1. Değişken kalınlıklı dikdörtgen bir plağın boyutları

Şekil 4.2.1. Grid sistemi ve plak geometrisi

Şekil 4.2.2. Boyutsuz plak geometrisi ve grid sistemi

Şekil 5.1. f_1 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi

Şekil 5.2. f_2 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi

Şekil 5.3. f_3 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi

Şekil 5.4. f_4 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi

Şekil 7.1. Üstel kalınlıklı kare bir plağın B.B.B.B durumu için frekans parametresinin β_0 ile değişimi

Şekil 7.2.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.2.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.2.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.2.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.3.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.3.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.3.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.3.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)

Şekil 7.4.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.4.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.4.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.4.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.5.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$,A.A.A.S)

Şekil 7.5.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.5.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)

Şekil 7.5.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)



TABLULAR LISTESİ

Tablo 7.1. B.B.B.B plak için Ω frekans parametreleri ($c=0.5$, $b/a=1$)

Tablo 7.2. B.B.B.B plak için Ω frekans parametreleri ($b/a=1$)

Tablo 7.3. $b/a=0.4$ için Ω frekans parametreleri (A.A.A.S)

Tablo 7.4. $b/a=1$ için Ω frekans parametreleri (A.A.A.S)

Tablo 7.5. $b/a=2.5$ için Ω frekans parametreleri (A.A.A.S)

Tablo 7.6. $b/a=0.4$ için Ω frekans parametreleri (B.A.B.S)

Tablo 7.7. $b/a=1$ için Ω frekans parametreleri (B.A.B.S)

Tablo 7.8. $b/a=2.5$ için Ω frekans parametreleri (B.A.B.S)

SIMGELER

a, b	: Plak uzunluğu ve genişliği
$[A]$: Katsayılar matrisi
c	: İncelme oranı
D	: Eğilme rijitliği
E	: Elastisite modülü
f_i	: Enerji alt fonksiyonları
h	: Kalınlık fonksiyonu
h_0	: $(x=0, y=0)$ 'da plak kalınlığı
i, j	: Dügüm indisleri
k	: Kesme faktörü
m, n	: x ve y yönlerinde yarımlık dalgası numaraları
M, N	: Dügüm seti üzerinde satır ve sütun sayısı
q_i	: Genel koordinatlar
p, q, s, t	: Dügüm aralıkları parametreleri
t	: Zaman
T	: Kinetik enerji
U	: Şekil değiştirme (gerilme) enerjisi
U_1, U_2, U_3	: Alt şekil değiştirme enerjileri
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
w	: Ortalama yer değiştirme bileşeni
w'	: Boyutsuz yer değiştirme bileşeni
W	: Zamandan bağımsız yer değiştirme bileşeni

$\{X\}$: Öz (karakteristik) vektör
α	: Sonlu fark düğüm aralıkları oranı
α^*	: Boyutsuz parametre (h/h_0)
β	: Boyutsuz parametre, (h/a)
β_0	: Boyutsuz parametre, (h_0/a)
γ	: Kenar uzunlukları oranı, (b/a)
ζ, η	: Boyutsuz koordinatlar, ($x/a, y/a$)
$\Delta\zeta, \Delta\eta$: Sonlu fark düğüm aralıkları
λ	: Öz değer
ν	: Poisson oranı
ρ	: Özgül ağırlık
ω	: Doğal frekans
Ω	: Frekans parametresi
ϕ_ζ, ϕ_η	: Eğilmeden dolayı oluşan dönme bileşenleri
Φ_ζ, Φ_η	: Zamandan bağımsız dönme bileşenleri

KISALTMALAR

A.	: Ankastre mesnetli kenar
B.	: Basit mesnetli kenar
S.	: Serbest kenar
B.A.B.S	: Basit-Basit-Basit-Basit kenarlı plak
B.A.B.S	: Basit-Ankastre-Basit-Serbest kenarlı plak
AAAS	: Ankastre-Ankastre-Ankastre-Serbest kenarlı plak

1. GİRİŞ

Plakların dinamik davranışı, birçok mühendislik uygulamalarındaki önemi nedeniyle yıllardır yoğun bir çalışma konusu olmuştur. Titreşen plakların davranışı; uçak kanatlarının tasarımı, köprüler, hidrolik yapılar, taşıyıcılar, füzeler, gemiler, makina parçaları, depreme dayanıklı yapılar, telefon alıcıları, radyo antenleri ve diğer titreşen yapılar için mühendisler açısından çok önemlidir. Titreşim analizinde, titreşen plağın doğal frekansları ve mod biçimleri elde edilmektedir. Bir imalat mühendisi, titreşime maruz kalan bir makina parçasının tasarımını tamamlamadan önce bu titreşimin ilk birkaç moduna ihtiyaç duyar.

Burada söz konusu olan plak, dikdörtgen şeklindedir ve kalınlığı üniform olabildiği gibi her hangi bir fonksiyona bağlı olarak değişken de olabilmektedir. Plaklar için mevcut kalınlık değişim tipleri şunlardır:

1. Üniform kalınlıklı plak.
2. Tek yönde lineer kalınlık değişimli plak.
3. İki yönde lineer kalınlık değişimli plak.
4. Orta yüzeye göre simetrik lineer kalınlık değişimli plak.
5. Bilineer kalınlık değişimli plak.
6. Parabolik kalınlık değişimli plak.
7. Üstel kalınlık değişimli plak.

Bu kalınlık tipleri ve ifade edildikleri matematiksel bağıntılar Ek-1. 'de verilmiştir.

Plağın her bir kenarı; basit , ankastre veya serbest kenar şeklinde alınarak farklı plak konfigürasyonları elde edilebilir. Burada plak sisteminin serbest titreşim durumu incelenmektedir, yani plak üzerinde herhangi bir zorlama fonksiyonu yoktur.

Plakların titreşim analizi, klasik plak teorisi ve Mindlin plak teorisi olmak üzere iki şekilde incelenmiştir. Her iki teoride başlangıçta, incelenen plak sisteminin eğilme durumu için şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadeleri elde edilmektedir. Enerji ifadelerinden, sistemin hareketini temsil eden hareket denklemi elde edilir. Bu denklem, dördüncü dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bundan sonraki işlem; elde edilen bu kısmi diferansiyel denklem, çeşitli yöntemler (Rayleigh-Ritz yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi,...) yardımıyla çözümlenerek sistemin doğal frekansları ve mod biçimlerinin elde edilmesidir. Klasik plak teorisinde plak kalınlığı çok ince alınarak plak üzerindeki enine kesme kuvvetlerinin ve dönme ataletlerinin etkileri ihmal edilmektedir. Böyle bir kabulün yapılması, kalın plaklarda önemli hatalara sebebiyet verir. Mindlin plak teorisinde, bu hatalardan kurtulabilmek için enine kesme kuvvetleri ve dönme ataletlerinin etkileri de dikkate alınır.

Değişken kesitli elastik plakların, bir yapı elemanı olarak geniş bir kullanım sahası vardır. Bu tip plaklar üzerine yapılan hemen hemen tüm çalışmalarda klasik plak teorisinden yararlanılarak doğal frekans ve mod biçimleri hesaplanmıştır.

Sunulan çalışmada, değişken kalınlıklı elastik dikdörtgen plakların serbest titreşim analizi, Mindlin plak teorisi kullanılarak incelenecektir. Titreşimin doğal frekanslarını ve mod biçimlerini elde etmek için varyasyon prensibiyle sonlu fark tekniğinin beraberce kullanılmasıyla

geliştirilen bir yöntem kullanılacaktır. Bu yöntemle elde edilen denklemler, kalınlığı üstel olarak değişen dikdörtgen ve kare plaklara uygulanacaktır. Bu plaklardaki her bir kenara; basit, ankastre ve serbest kenar şartlarının değişik kombinasyonları uygulanarak elde edilen durumlar için titreşim karakteristikleri incelenecektir.



2. KONUYLA İLGİLİ YAPILAN ARAŞTIRMALAR

Bu çalışmada dikkate alınan izotropik, elastik ve değişken kesitli dikdörtgen bir plağın serbest titreşim analizini yapabilmek amacıyla genel bir kaynak araştırması yapıldı. Bu araştırmada, ince üniform kalınlıklı ve ince değişken kalınlıklı plakların titreşimi üzerine çok sayıda çalışmanın mevcut olduğu, fakat kalın plakların titreşimi üzerine sınırlı sayıda çalışmanın olduğu görüldü.

Leissa (1969), plakların titreşimi konusu üzerine 1965 yılına kadar yapılmış olan çalışmaların bulunduğu geniş ve kapsamlı bir inceleme yapmıştır. Leissa, bu çalışmasında, klasik plak teorisinden ve değişken kalınlıklı plaklardan bahsetmiştir. Leissa (1973), üniform kalınlıklı dikdörtgen plakların serbest titreşimleri için geniş bir çalışma yapmıştır. Çalışmada, ince dikdörtgen plaklar için basit, ankastre ve serbest kenar şartlarının mümkün olabilen kombinasyonlarını kapsayan yirmibir durumu incelemiştir. İncelenen her bir durumda farklı kenar oranları için elde edilen frekans parametreleri verilmiştir.

Mindlin (1951), dönme ataleti ve kesme kuvvetinin etkilerinin de dikkate alındığı üniform izotropik kalın plakların çalışmasını yapan ilk kişidir. Mindlin, üç boyutlu elastisite denklemlerinden izotropik elastik plakların eğilme hareketleri için iki boyutlu bir teori ortaya koymuştur.

Prasad vd. (1972), kalınlığı parabolik olarak değişen dar ve uzun bir parçanın titreşimi üzerindeki dönme ataletinin ve kesme deformasyonlarının etkilerini incelemiştir. Sistemin hareketini temsil eden diferansiyel denklemin çözümünde, klasik plak teorisine dayanan ve bir seriler çözümü olan Frobenius metodu kullanılmıştır. İki ayrı sınır

şartlarında; farklı incelme oranı ve kalınlık parametreleri için doğal frekanslar hesaplanmıştır. Jain ve Soni 'de (1973) aynı plak için yine aynı yöntemi uygulamıştır. Farklı kenar oranları ve incelme sabitleri için farklı sınır şartlarındaki frekans parametrelerini elde etmişlerdir. Parabolik kalınlıklı plaklar için diğer bir çalışma da Olson ve Hazell, (1979) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada kare bir plak için sonlu elemanlar metodu kullanılarak doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir. Ayrıca bir deney düzeneği hazırlanarak gerçek zamanlı laser holograpy ile ölçümler yapılarak elde edilen sonuçlar , diğer metodla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Soni ve Rao (1974), spline interpolasyon tekniğini kullanarak üstel kalınlık değişimine sahip dikdörtgen plakların serbest titreşimini analiz etmişlerdir. Karşılıklı iki kenarı basit mesnetli ve diğer iki kenarında basit,ankastre ve serbest kenar şartlarının değişik kombinasyonlarındaki sınır şartları dikkate alınarak değişik kenar ve incelme oranları için doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir. Aynı plak tipine, aynı yöntem Gupta ve Lal (1978) tarafından da uygulanmış ve çeşitli sınır şartları için doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir.

Aksu ve Alı (1976), içi oyuk dikdörtgen plakların dinamik karakteristiklerinin incelenmesinde, sonlu fark tekniği ile varyasyonel prensiplerin birlikte kullanılmasına dayanan bir teknik geliştirmiştir. Bu teknikte, ağ şeklinde oluşturulan bir grid kavramından ve sonlu fark denklemlerindeki ayrıklaştırma hatasının azaltıldığından bahsedilmektedir. Ayrıca çözüm için gerekli olan denklem sayısında azaltılmıştır.

Filipich vd. (1977), bilineer kalınlık değişimine sahip ince plakların titreşimi için Galerkin metodunu kullanarak yaklaşık bir çözüm elde etmişlerdir.

Nelson (1978), kalın kiriş ve plakların yüksek frekans titreşimlerini incelemiştir. Kirişler için Timoshenko denklemi ve plaklar için Mindlin denklemiyle uygun Bolotin çözüm tekniği kullanılarak doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir. Farklı kenar şartlarındaki kalınlık oranları $h/a=0.05$, 0.1 ve 0.2 olan kare plakların normalleştirilen frekans parametreleri (ω/ω_0), diğer çalışmalarda bulunmuş olan değerlerle karşılaştırılarak tablolar halinde verilmiştir.

Dawe (1978), Mindlin plaklarının titreşim analizi için dört ayrı "sonlu strip modeli" geliştirmiştir. Bu metodu kullanarak üniform kalınlıklı, basit mesnetli ince ($h/a=0.01$) ve kalın ($h/a=0.1$) kare plaklar ile $h/a=0.1$ ve kenarları oranı $b/a=\sqrt{2}/1$ olan kalın dikdörtgen plak için frekans parametrelerini elde etmiş ve diğer çalışmalardaki çözümlerle karşılaştırma yapmıştır. Ayrıca kesme faktörünün, frekans parametreleri üzerindeki etkisini de incelemiştir.

Dawe ve Roufaeil (1980), genel sınır şartlarında kare bir plağın titreşimine ait doğal frekansları, Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak elde etmişlerdir. Bu çalışmada elde edilen değerler, klasik çözümlerle ve sonlu strip modeliyle elde edilmiş değerlerle karşılaştırmışlardır.

Gutierrez vd. (1981), değişik tipteki bilineer kalınlık değişimli dikdörtgen plakların, genel sınır şartlarındaki titreşimlerini incelemiştir. Bu çalışmada, klasik teori kullanılmıştır. Titreşimin doğal frekanslarını bulabilmek için temel yerdeğiştirme, polinom şeklinde bir fonksiyon ile ifade edilmiş ve Ritz metodu kullanılarak basit bir algoritma türetilmiştir.

Kuttler ve Sigillito (1983), değişken kalınlıklı dikdörtgen plakların titreşim analizinde, titreşim frekanslarının alt ve üst sınırlarını bulabilmek amacıyla, "a posteriori - a priori" eşitsizlikleri metodunu kullanmışlardır.

Bu çalışmada, orta yüzeyine göre lineer kalınlık değişimine sahip ankastre mesnetli bir plak dikkate alınarak, değişik kenar oranları ve inceleme parametreleri için elde edilen doğal frekanslar verilmiştir.

Mikami ve Yoshimura (1984), Collacation metodunu kullanarak, dikdörtgen Mindlin plaklarının titreşim analizini incelemişlerdir. Çalışmada, değişik sınır şartlarındaki üniform kalınlıklı kare bir plak için frekans parametreleri elde edilerek, "sonlu strip" ve "Rayleigh-Ritz" metodlarıyla elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca lineer kalınlık değişimine sahip kare bir plagin farklı kalınlık parametreleri için frekans parametreleri ve bazı mod biçimleri de elde edilmiştir.

Aksu ve Al-Kaabi (1987), sonlu farklarla varyasyonel prensiplerin birlikte kullanılmasına dayanan tekniği kullanarak değişken kalınlıklı Mindlin plaklarının titreşimlerini incelemişlerdir. Bu çalışmada, basit ve ankastre mesnet tiplerinin farklı kombinasyonlarındaki sınır şartlarında, üniform ve lineer kalınlıklı kare plaklar için frekans parametreleri ve mod biçimleri elde edilmiştir. Normalize edilmiş frekans parametreleri (ω/ω_0), başka çalışmalarda başka yöntemlerle elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca farklı düğüm setleri (6x6, 7x7, 8x8, 9x9 ve 10x10) kullanılarak ta elde edilen frekans parametreleri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar-dan kullanılan yöntem için en uygun çözümlerin, 8x8 düğüm seti kullanılması halinde elde edildiği görülmüştür.

Al-Kaabi ve Aksu (1989), iki yönde (x ve y) lineer kalınlık değişimine sahip Mindlin plaklarının titreşimini, yine varyasyonel prensibe dayanan sonlu fark tekniğini kullanarak analiz etmişlerdir. Basit ve ankastre mesnet tipinin farklı kombinasyonlarındaki kare plakların, farklı inceleme oranı ve kalınlık parametreleri için doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir. Yine Al-Kaabi ve Aksu (1989), aynı yöntemle, parabolik kalınlık

değişimli plaklar için de bir çalışma yapmışlardır. Farklı kalınlık parametreleri için frekans parametreleri ve mod biçimleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümler, klasik plak teorisinden elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Ng ve Araar (1989), orta yüzeyine göre simetrik lineer kalınlık değişimine sahip plakların, ankastre mesnet durumu için serbest titreşim analizini incelemişlerdir. Bunun için plağın, dördüncü dereceden kısmi diferansiyel denklemle ifade edilen hareket denkleminde Galerkin metodu uygulanmıştır. Bu işlem sonucunda elde edilen özdeğer problemi, Jacobi yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Farklı incelleme oranları ve kenar oranları için doğal frekanslar ve mod biçimleri elde edilmiştir.

Bhat vd. (1990), değişken kalınlıklı ince dikdörtgen plakların titreşimlerinin doğal frekanslarının bulunması üzerine nümerik denemeler adı altında geniş bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada, Rayleigh-Ritz metodunun iki farklı biçimdeki kullanım metodu, Optimize edilmiş Kantorovich metodu ve sonlu elemanlar metodu kullanılarak; lineer kalınlıklı dikdörtgen plakların çeşitli sınır şartları, incelleme oranları ve kenar oranları için doğal frekansları elde edilmiş ve her bir metodla elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır.

Sonzogni vd. (1990), klasik plak teorisini kullanarak, optimize edilmiş Kantorovich metodu ve sonlu elemanlar metoduyla üstel kalınlık değişimine sahip dikdörtgen plakların serbest titreşim analizini incelemişlerdir. Her iki yöntem kullanılarak; bir kenarı serbest, diğer kenarları basit ve ankastre mesnet tiplerinin farklı kombinasyonlarına sahip plaklar dikkate alınarak, farklı kenar oranları ve kalınlık oranları için doğal frekanslar elde edilmiştir.

Tutak (1994), varyasyonel prensibe dayalı sonlu fark tekniğini, üstel kalınlık değişimli kare plaklar için uygulamıştır. Basit mesnetli plak için Kalınlık parametresinin ve incelme oranının doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemiştir. Ayrıca B.A.B.S sınır şartına sahip plak için de frekans parametrelerini ve mod biçimlerini elde etmiştir.



3. MINDLIN PLAK TEORISI

Bilindiği gibi klasik plak teorisinde plakların serbest titreşim analizi yapılırken kesme kuvvetinin ve dönme ataletinin etkileri ihmal edilir. Böyle bir kabulün yapılması kalın plaklar için önemli hatalara sebebiyet verir. Kesme kuvvetinin ve dönme ataletinin etkilerinin de dikkate alındığı plakların serbest titreşim analizi; Mindlin, (1951) tarafından incelenmiştir.

Bu bölümde kesme kuvvetinin ve dönme ataletinin etkileri dikkate alınarak iki boyutlu elastisite teorisinden kalın dikdörtgen bir plak için şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra bu enerji ifadelerine Hamilton prensibi uygulanarak plaka ait hareket denklemi elde edilmiştir.

Enerji ifadeleri elde edilirken aşağıda verilen kabuller dikkate alınmıştır.

1. Plak malzemesi elastik, homojen ve izotropiktir.
2. Başlangıçta plak düzdür. Yani şekil bozukluğu yoktur.
3. Deformasyon, başlangıçta plak orta yüzeyine normal doğrultudadır. Fakat kesme etkileri de dikkate alındığından dolayı daha sonra orta yüzeye normal doğrultuda olmayacaktır.
4. Sapmalar plak kalınlığı yanında önemsenmeyecek kadar küçüktürler. En büyük sapma plak kalınlığının 0.1 ile 0.25 'i arasındadır.

3.1. Gerilme - Şekil Değiştirme Bağlılıları :

Şekil 3.1 'de üniform kalınlıklı dikdörtgen bir plağın şekil değişiminden önceki ve sonraki kesit elemanı görülmektedir. Şekilde karmaşıklığı azaltmak için plağın sadece xz düzlemi gösterilmiştir. yz düzlemi xz düzlemine benzemektedir. Plak elemanı üzerinde orta yüzeye, z kadar uzaklıkta alınan bir AB lifi, eğilmeden dolayı şekil ve yer değişimine uğrayarak A'B' halini almaktadır. AB lifinin uzunluğundaki değişimin, z uzaklığı ile doğru orantılı olduğu açıktır.

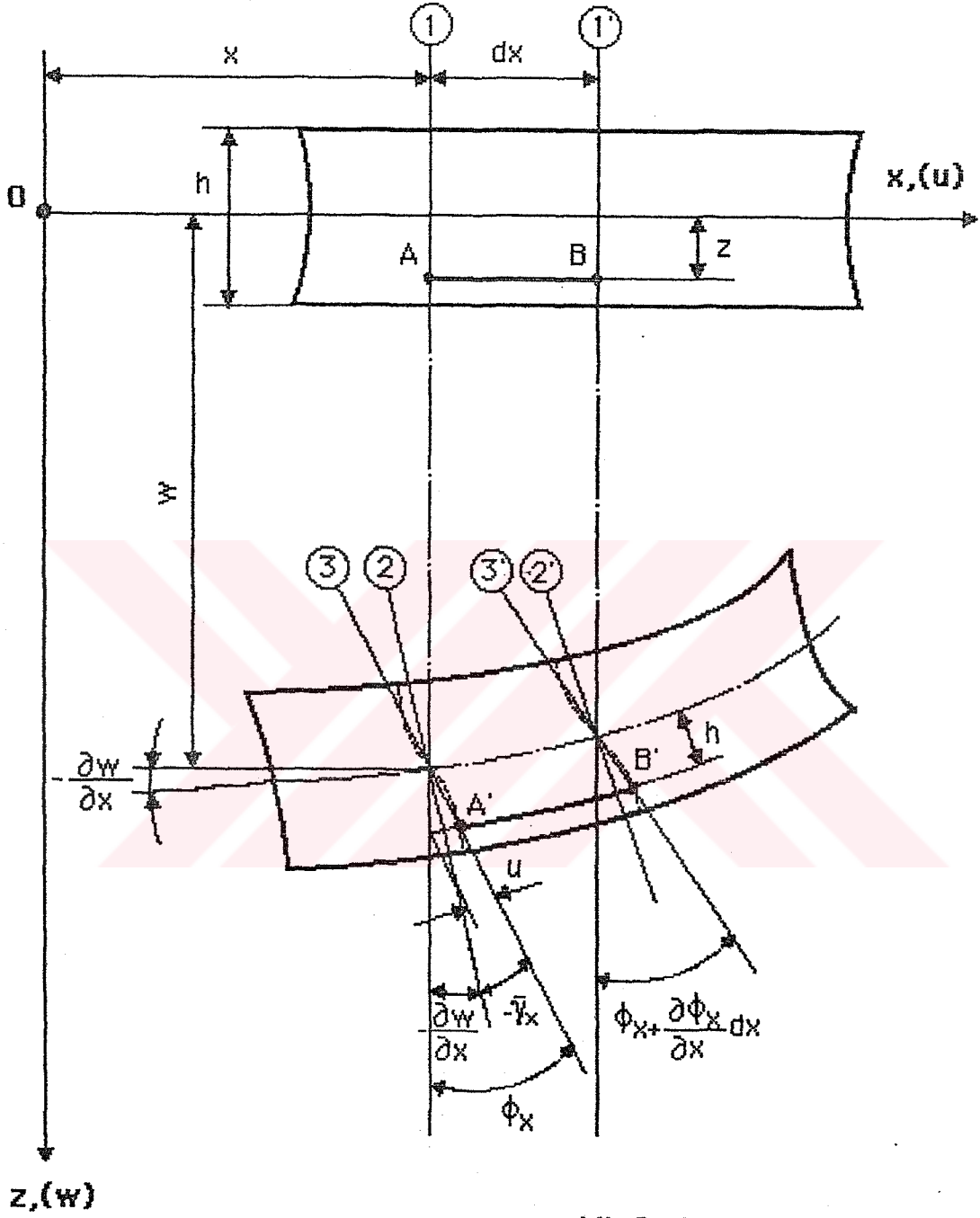
Plak üzerindeki gerilme etkilerinin dikkate alınmadığı durumda x, y, z koordinatlarındaki u, v, w yer değiştirmeleri için şu bağıntılar yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z,t) &= z\phi_x(x,y,t) = z\phi_x \\
 v(x,y,z,t) &= z\phi_y(x,y,t) = z\phi_y \\
 w(x,y,z,t) &= \bar{w}(x,y,t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Burada \bar{w} ; plak elemanının z eksenindeki ortalama yer değiştirmesi ve ϕ_x ile ϕ_y ; plak elemanının xz ve yz düzlemlerindeki dönme açılarıdır. ϕ_x ve ϕ_y şöyle ifade edilirler:

$$\begin{aligned}
 \phi_x(x,y,t) &= - \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\gamma}_x(x,y,t) \right] \\
 \phi_y(x,y,t) &= - \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{\gamma}_y(x,y,t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$\bar{\gamma}_x$ ve $\bar{\gamma}_y$ kesme etkisi sebebiyle oluşan açısız şekil değiştirmelerdir.



2-2' : Bozulmuş orta yüzeyin normalleri,
3-3' : Kabul edilen deformasyonlar.

Şekil 3.1. Dikdörtgen şeklindeki bir plak elemanının eğilmeden önceki ve sonraki hali

Dikkate alınan yer değiştirmeler için Şekil değiştirme bağıntılarını aşağıdaki gibi yazılmaktadırlar.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) & \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \\
 \epsilon_{yy} &= z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) & \gamma_{xz} &= -\bar{\gamma}_x = \phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\
 \epsilon_{zz} &= 0 & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) & \gamma_{yz} &= -\bar{\gamma}_y = \phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Burada γ_{xy} , γ_{xz} ve γ_{yz} birim açısal Şekil değiştirmelerdir. Plak malzemesinin elastik, izotropik ve homojen olduğu göz önünde bulundurulurken iki boyutlu Hook kanunundan gerilme-Şekil değiştirme bağıntılarını aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}] & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}] & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} \\
 \sigma_{zz} &= 0 & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde E elastisite modülü, G kayma modülü ve ν poisson oranıdır.

(3.3) ve (3.4) eşitliklerinden yerdeğiştirme ve dönme bileşenlerine bağlı olarak gerilmeler, aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] & \tau_{xy} &= Gz \left[\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right] & \tau_{xz} &= Gz \left[\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right] \\
 & & \tau_{yz} &= Gz \left[\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. Kesme Kuvveti ve Moment Bağlılıları :

İncelenen plak elemanı üzerindeki kesme kuvvetleri ve momentler Şekil 3.2.1. ve Şekil 3.2.2. 'de gösterilmiştir. Plak üzerinde gösterilen moment fonksiyonları aşağıda verilen formülasyon kullanılarak bulunabilir.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) z dz \tag{3.6}$$

(3.3) ifadeleri, yukardaki eşitlikte kullanıldığında M_x , aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) dz \\
&= \frac{E h_{(x,y)}^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] \\
&= D(x,y) \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada $h_{(x,y)}$ plak kalınlığını ifade etmektedir. $D(x,y)$, rijitliği gösterir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D(x,y) = \frac{E h_{(x,y)}^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.8}$$

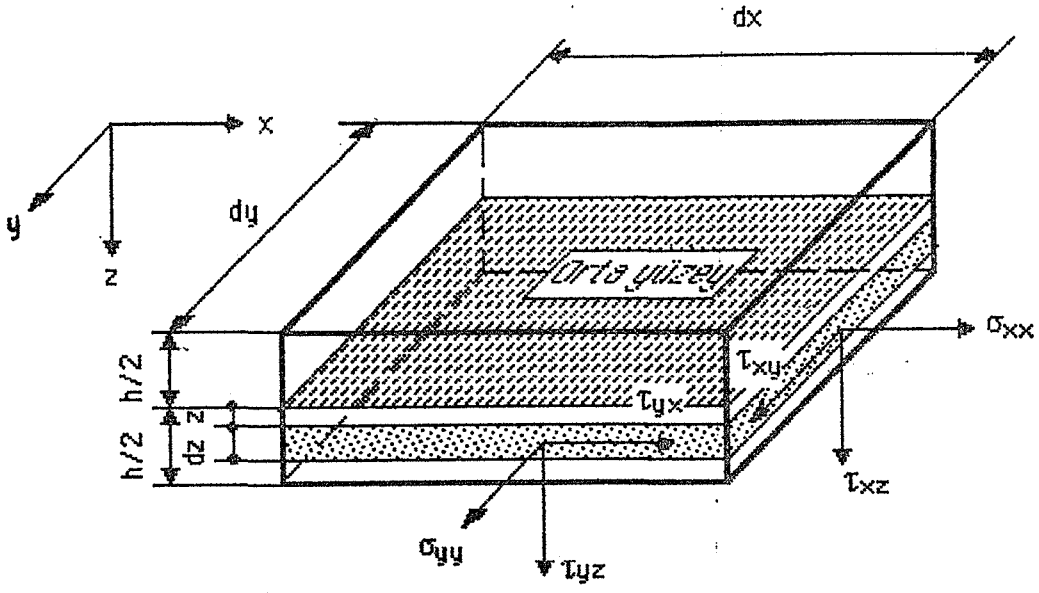
Benzer şekilde diğer moment fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_y = D(x,y) \left[\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right] \tag{3.9.1}$$

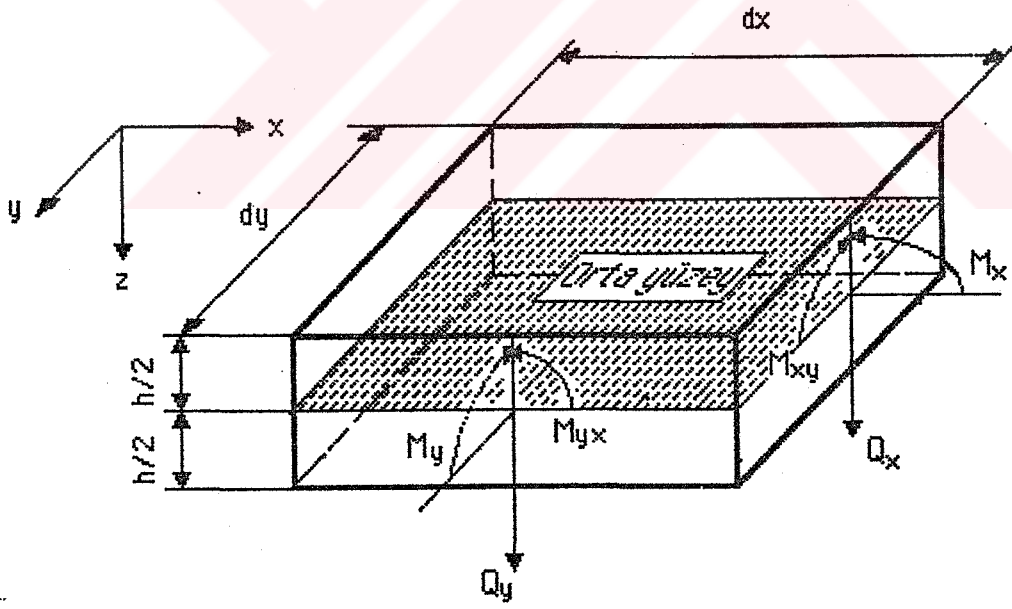
$$M_{xy} = \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] \tag{3.9.2}$$

Burada G kayma modülü, aşağıda verildiği gibidir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.10}$$



Şekil 3.2.1. Plak elemanı üzerindeki gerilmeler



Şekil 3.2.2. Plak elemanı üzerindeki kesme kuvvetleri ve momentler

Kesme kuvveti yoğunluk fonksiyonları dikkate alındığında Q_x ;

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = k \tau_{xz} h_{(x,y)} \quad (3.11)$$

olarak ifade edilmektedir. τ_{xz} plakanın kalınlığı boyunca sabittir. Yani z 'nin fonksiyonu değildir. Bu yüzden (3.3) denklemlerindeki hataları önlemek için burada bir k kesme faktörü tanımlanmıştır.

(3.3) denklemleri de kullanılarak (3.11) eşitliğinden Q_x ;

$$Q_x = kh_{(x,y)} G \left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \quad (3.12)$$

benzer olarak Q_y ;

$$Q_y = kh_{(x,y)} G \left(\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir.

3.3. Şekil Değiştirme Ve Kinetik Enerji İfadeleri :

İzotropik bir plak için şekil değiştirme enerjisi, gerilme ve şekil değiştirmeler cinsinden aşağıda verildiği gibi ifade edilmektedir (Shames, 1973).

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xx} \epsilon_{xx} + \tau_{yy} \epsilon_{yy} + \tau_{zz} \epsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \epsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \epsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \epsilon_{yz}) dz dx dy \quad (3.14)$$

Burada $\tau_{zz} = 0$ alındığında, bir düzlem gerilme hali elde edilir. Yukarıdaki ifade ile birlikte (3.3) ifadeleriyle verilen Hook kanunu kullanıldığında şekil değiştirme enerjisi, yer değiştirme ve dönme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} z^2 \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + G z^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + \tau_{xz} \left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz \quad (3.15)$$

Plak kalınlığı üzerinden z 'ye göre integral alındığında,

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3_{(x,y)}}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + G \frac{h^3_{(x,y)}}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + kh \tau_{xz} \left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + kh \tau_{yz} \left(\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \right\} dx dy \quad (3.16)$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu ifadedeki son iki terimin katsayıları (3.11) eşitliğine benzemektedir. Ayrıca $(\partial w / \partial y + \phi_y)$ ile $(\partial w / \partial x + \phi_x)$ terimleri z 'nin fonksiyonu değildir. Yukarıdaki ifadede (3.3), (3.8) ve (3.10) ifadeleri kullanıldığında şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ D(x,y) \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + 2u \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\
+ G \frac{h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \\
\left. + kGh_{(x,y)} \left[\left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\phi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Bu eşitlikte plak kalınlığı değişken bir fonksiyon olduğu için integral ifadesinin içerisinde yazılmıştır.

Birim hacminin yoğunluğu ρ ve yerdeğiştirmesi u_i olan plağın kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Shames, 1973).

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dz dx dy \\
= \frac{1}{2} \iint_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ z^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right\} dz dx dy \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Bu ifadenin z 'ye göre integrali alınırsa plağın t anındaki kinetik enerjisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.19)$$

3.4. Hareket Denklemi :

İncelenen plak sisteminin hareket denklemi, yukarıda elde edilen şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerine Hamilton prensibi uygulanarak elde edilmiştir. Bilindiği gibi dinamik bir sistemin hareket denkleminin bulunmasını sağlayan Hamilton prensibi, mekaniğin genel varyasyonel prensiplerinden biridir. Prensip, t_1 ve t_2 gibi iki anda gerçek hareketin bilindiği fakat bu iki an arasında kalan zaman aralığında ise bilinmediği bir durum için mümkün olabilecek hareket yörüngelerinin karşılaştırılmasına dayanır. Hamilton prensibi şu şekilde ifade edilmektedir.

$$\delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (3.20)$$

Bu ifadede L , Lagrange fonksiyonu veya kinetik potansiyel olarak bilinmektedir ve kinetik enerji ile toplam potansiyel enerjinin farkına eşittir.

$$L = T - (U + V) \quad (3.21)$$

Buradaki V , plak yüzeyine dik doğrultuda etkiyen bir q dış kuvvetinin meydana getirdiği potansiyel enerjidir ve

$$V = \iint_R \bar{w} q dx dy \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Ancak bu çalışmada plağın serbest titreşim hali incelendiği için ileride, $q=0$ alınacaktır.

Yukarıda elde edilen enerji ifadelerine Hamilton prensibi aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right. \\
- D_{(x,y)} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \\
- \frac{Gh_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 - kGh_{(x,y)} \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \phi_x \right)^2 \right. \\
\left. \left. + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \phi_y \right)^2 \right] + 2\bar{w}q \right\} dx dy dt = 0 \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadeye, δ varyasyon işleminin uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \iint_R \left\{ \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial t} \right) \right] + \rho h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial t} \right) \right. \\
- D_{(x,y)} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) \right. \\
\left. \left. + \nu \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) \right] - \frac{Gh_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \right. \\
- kGh_{(x,y)} \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \phi_x \right) \left(\frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial x} + \delta \phi_x \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \phi_y \right) \left(\frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial y} + \delta \phi_y \right) \right] \\
\left. + q \delta \bar{w} \right\} dx dy dt = 0 \quad (3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.24) ifadesinde, zamana bağlı türevleri kapsayan ilk üç terimin integrali için aşağıdaki formda verilen kısmi integrasyon kullanılabilir.

İlk terimin integrali ,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial t} dt &= \left. \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \delta \phi_x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) \delta \phi_x dt \\
 &= \left. \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \delta \phi_x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \delta \phi_x dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \delta \phi_x dt \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadede $\delta \phi_x$; t_1 ve t_2 'de sıfırdır. Zamana bağlı türevleri kapsayan diğer iki terimin integrali de benzer şekilde elde edilir. (3.24) integralindeki diğer terimler için aşağıdaki formda verilen Green fonksiyonu kullanılabilir (Shames, 1973).

$$\begin{aligned}
 \iint_R G \frac{\partial H}{\partial x} dx dy &= - \iint_R H \frac{\partial G}{\partial x} dx dy + \oint_C G H dy \\
 \iint_R G \frac{\partial H}{\partial y} dx dy &= - \iint_R H \frac{\partial G}{\partial y} dx dy - \oint_C G H dx \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

(3.26) ifadesi ile verilen düzlemdeki Green fonksiyonu yardımıyla integral işlemi kolaylaştırılır.

(3.25) ve (3.26) ile verilen işlemler (3.24) ifadesinde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \iint_R \left\{ -\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \delta \phi_y \right) - \rho h_{(x,y)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \delta w \right. \\
& + D_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \delta \phi_y + \nu \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \delta \phi_y + \nu \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \delta \phi_x \right) \\
& + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \delta \phi_y + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \delta \phi_y \right) \\
& + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \delta \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \delta \phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \bar{w} + \phi_x \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \delta \bar{w} \right. \\
& \left. + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \delta \phi_y + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \bar{w} + \phi_y \delta \phi_y \right) + q \delta \bar{w} \left. \right\} dx dy dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \oint_C \left\{ -D_{(x,y)} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \phi_x dy - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \phi_y dx - \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \phi_y dx + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \phi_x dy \right] \right. \\
& - \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left[-\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \delta \phi_x dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \delta \phi_y dy - \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \delta \phi_x dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \delta \phi_y dy \right] \\
& \left. - k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \delta \bar{w} dy - \phi_x \delta \bar{w} dy - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \delta \bar{w} dx - \phi_y \delta \bar{w} dx \right) \right\} dt = 0 \quad (3.27)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.25) ve (3.26) ile verilen işlemler (3.24) ifadesinde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \iint_R \left\{ -\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \delta \phi_y \right) - \rho h_{(x,y)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \delta \bar{w} \right. \\
& + D_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \delta \phi_y + \nu \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \delta \phi_y + \nu \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \delta \phi_x \right) \\
& + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \delta \phi_y + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \delta \phi_y \right) \\
& + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \delta \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \delta \phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \bar{w} + \phi_x \delta \phi_x + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \delta \bar{w} \right. \\
& \left. + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \delta \phi_y + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \bar{w} + \phi_y \delta \phi_y \right) + q \delta \bar{w} \left. \right\} dx dy dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \oint_C \left[-D_{(x,y)} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \phi_x dy - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \phi_y dx - \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \delta \phi_y dx + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \delta \phi_x dy \right] \right. \\
& - \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left[-\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \delta \phi_x dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \delta \phi_y dy - \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \delta \phi_x dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \delta \phi_y dy \right] \\
& \left. - k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \delta \bar{w} dy - \phi_x \delta \bar{w} dy - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \delta \bar{w} dx - \phi_y \delta \bar{w} dx \right) \right] dt = 0 \quad (3.27)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.27) ifadesi, yer değiştirme ve dđnme bileşenlerine gđre dđzenlendiđinde,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \iint_R \left[\left\{ -\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + D_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \phi_x \right) \right\} \delta \phi_x \right. \\
& \quad \left. + \left\{ -\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right) + D_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \right) + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \phi_y \right) \right\} \delta \phi_y \right. \\
& \quad \left. + \left[-\rho h_{(x,y)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q \right) \right] \delta \bar{w} \right] dx dy dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \oint_C \left\{ \left[-D_{(x,y)} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} dy + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy \right) + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx \right) \right] \delta \phi_x \right. \\
& \quad \left. + \left[D_{(x,y)} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} dx + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx \right) - \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dy \right) \right] \delta \phi_y \right. \\
& \quad \left. - \left[k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dy + \phi_x dy - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} dx - \phi_y dx \right) \right] \delta \bar{w} \right\} dt = 0 \quad (3.28)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Varyasyonların sıfır olması gerektiğinden dolayı (3.28) integral ifadesindeki δw , $\delta\phi_x$ ve $\delta\phi_y$ terimlerinin katsayılarının herbiri sıfıra eşit olmalıdır. $\delta\phi_x$ teriminin katsayısı dikkate alınırsa,

$$-\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + D_{(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{G h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + k G h_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \quad (3.29)$$

olmalıdır. Burada (3.7) , (3.9.2) ve (3.12) ile verilen M_x , M_{xy} ve Q_x eşitlikleri kullanıldığında ,

$$-\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (3.30.1)$$

elde edilir. Benzer olarak, (3.28) ifadesindeki $\delta\phi_y$ ve δw terimlerinin katsayıları dikkate alındığında,

$$-\frac{\rho h_{(x,y)}^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \quad (3.30.2)$$

$$-\rho h_{(x,y)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.30.3)$$

elde edilir. (3.30.1),(3.30.2) ve (3.30.3) ifadeleri incelenen plak sisteminin kesme kuvveti, moment ve tork bileşenlerine bağlı hareket denklemleridir.

Hareket denklemleri, daha çok yer değiştirme bileşenlerine bağlı olarak ifade edilirler. Bunun için (3.29) ifadesi bu bileşenlere göre düzenlenir ve $Gh^3_{(x,y)}/12$ yerine $D_{(x,y)}(1-\nu)/2$ yazılır, ayrıca sitemin serbest titreşim durumu incelendiğinden $q=0$ alınırsa,

$$D_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \phi_x \right) - \frac{\rho h^3_{(x,y)}}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (3.31.1)$$

$$D_{(x,y)} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} \right) + kGh_{(x,y)} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \phi_y \right) - \frac{\rho h^3_{(x,y)}}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.31.2)$$

$$kGh_{(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) - \rho h_{(x,y)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.31.3)$$

elde edilir.

(3.28) ifadesindeki çizgisel integralin de sıfıra eşit alınması gerekmektedir. Böylece bu ifadede (3.7), (3.9), (3.12) ve (3.13) eşitlikleri de kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

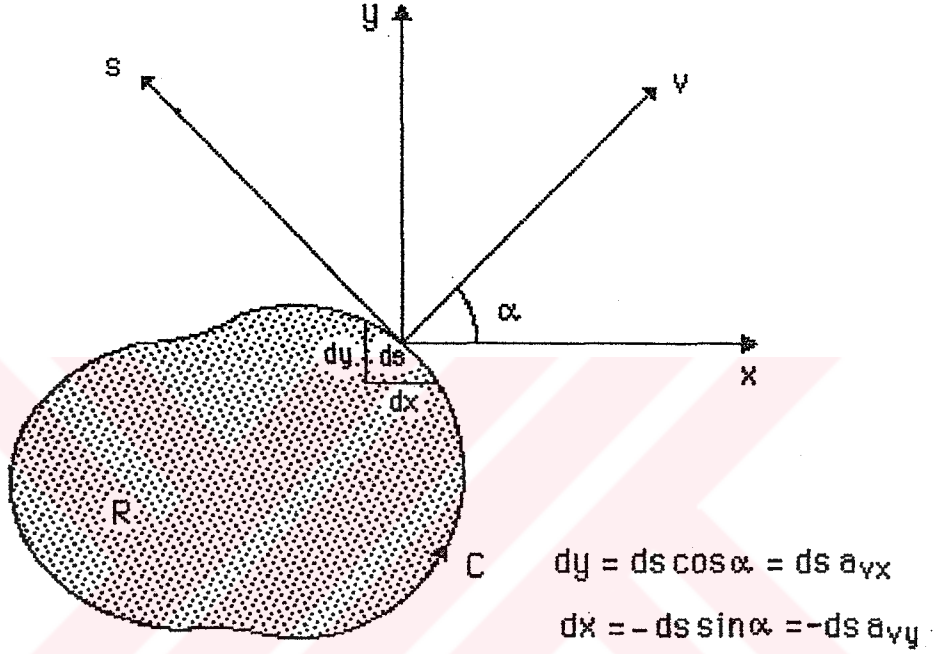
$$\int_{t_1}^{t_2} \oint_C [M_x \delta \phi_x dy - M_y \delta \phi_y dx + M_{xy} \delta \phi_y dy - M_{xy} \delta \phi_x dx - Q_x \delta \bar{w} dy + Q_y \delta \bar{w} dx] dt = 0 \quad (3.32)$$

Burada Şekil(3.4) 'de verilen dđnüşüm koordinatları kullanılır. s ve v koordinatları için dđnme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$\phi_x = a_{vx} \phi_v - a_{vy} \phi_s \quad \phi_y = a_{vy} \phi_v - a_{vx} \phi_s \quad (3.33)$$

(3.33) eşitliklerinden ϕ_v ve ϕ_s aşağıdaki gibi bulunur.

$$\phi_v = a_{vx}\phi_x + a_{vy}\phi_y \quad \phi_s = -a_{vy}\phi_x + a_{vx}\phi_y \quad (3.34)$$



Şekil 3.4. Dönüşüm koordinatları

(3.32) ifadesinde gerekli dönüşümler kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_C \phi \{ [M_x a_{vx}^2 + M_y a_{vy}^2 + 2a_{vx} a_{vy} M_{xy}] \delta \phi_v + [-M_x a_{vx} a_{vy} + M_y a_{vx} a_{vy} + M_{xy} (a_{vx}^2 - a_{vy}^2)] \delta \phi_s - [Q_x a_{vx} + Q_y a_{vy}] \delta \bar{w} \} ds dt = 0 \quad (3.35)$$

Burada Shames, (1973) tarafından verilen uygun moment dönüşümleri de kullanılırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \oint_C [M_v \delta \phi_v + M_{vs} \delta \phi_s - Q_v \delta \bar{w}] ds dt = 0 \quad (3.36)$$

elde edilir. Bu ifadeden plağın sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_v = 0 \quad \text{veya} \quad \phi_v \quad \text{belirtilmelidir.} \quad (1)$$

$$M_{vs} = 0 \quad \text{veya} \quad \phi_s \quad \text{belirtilmelidir.} \quad (2)$$

$$Q_v = 0 \quad \text{veya} \quad w \quad \text{belirtilmelidir.} \quad (3) \quad (3.37)$$

Böylece bir sınır değer problemi elde edilmiş olur. (3.31) denklemlerinden w , ϕ_x ve ϕ_y elde edilebilir. Doğal sınır şartları, kenarlara tesir eden kuvvet, moment ve tork bileşenleriyle ilgilidir. Bunlar; (114), (3.7), (3.9), (3.12) ve (3.13) eşitlikleri kullanılarak sınırlardaki w , ϕ_x ve ϕ_y sınır şartları olarak yazılabilir.

Bu çalışmada dikkate alınan plağın basit, ankastre ve serbest kenarlı olması durumlarının herbiri için sınır şartları verilmiştir. x ve y yönlerindeki boyutları sırasıyla a ve b olan dikdörtgen bir plak dikkate alındığında plak için $x=a$ kenarı boyunca uygulanan çeşitli sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

3.4.1. Basit mesnetli kenar :

Bu kenar boyunca yer değiştirme sıfırdır ve bu kenar etrafında plak kolaylıkla dönebildiğinden dolayı eğilme ve kesme momentleri de bulunmamaktadır.

$$(\bar{w})_{x=a} = 0 \quad (M_x)_{x=a} = \left[D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right]_{x=a} = 0 \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \quad (3.38)$$

3.4.2. Ankastre kenar :

Ankastre mesnetli bir kenar boyunca da yer değiştirme sıfırdır. Yine bu kenar boyunca bozulmuş orta sathıa teğet yüzey ile plâğın başlangıç pozisyonundaki orta yüzeyi çakışır.

$$(\bar{w})_{x=a} = 0 \quad ; \quad (\phi_x)_{x=a} = 0 \quad ; \quad (\phi_y)_{x=a} = 0 \quad (3.39)$$

3.4.3. Serbest kenar :

Serbest bir kenar boyunca eğilme ve kesme momentleri yoktur ve bu kenara dik doğrultudaki kesme kuvvetleri de bulunmamaktadır.

$$(M_x)_{x=a} = \left[D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right]_{x=a} = 0 \quad (M_{xy})_{x=a} = \left[\frac{G h^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right]_{x=a} = 0$$

$$(Q_x)_{x=a} = \left[khG \left(\phi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right]_{x=a} = 0 \quad (3.40)$$

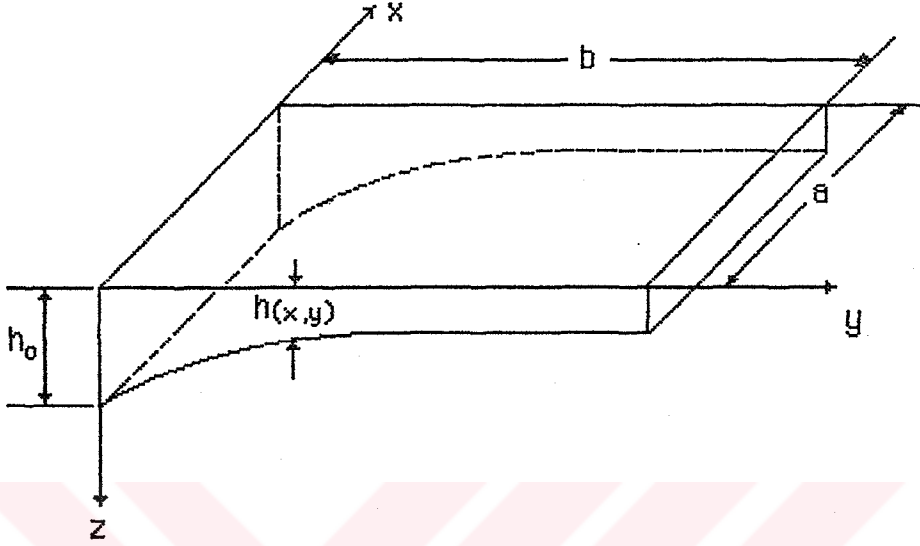
4. ENERJİ DENKLEMLERİNE VARYASYONEL PRENSİBİN UYGULANMASI

Kesme deformasyonları ve dönme ataletleri etkilerinin dikkate alındığı değişken kalınlıklı plaklar için Aksu, (1976) tarafından sonlu fark tekniği ile varyasyonel prensiplerin birlikte kullanıldığı bir metod geliştirilmiştir. Geliştirilen bu metodda, incelenen plak elemanı üzerinde ağ biçiminde gridler oluşturularak plak elemanı, küçük alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgelerde, küçük değişimler için sistemin şekil değiştirme ve kinetik enerjileri ifade edilir. Elde edilen bu enerjilerin toplamı, Euler şartı yardımıyla minimize edilir. Bu işlem sonucunda elde edilen özdeğer problemi çözülerek plak elemanının temel frekansları ve mod biçimleri bulunur.

Bu bölümde, üçüncü bölümde elde edilen şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerine (3.17 ve 3.19), sonlu fark tekniği uygulanarak enerji ifadeleri, yerdeğiştirme ve dönme bileşenleri cinsinden elde edilmişlerdir. Yapılan işlemlerde zamana bağımlılığı ortadan kaldırmak için " harmonik hareket kabulü " yapılmıştır.

4.1. Boyut Analizi

Bu çalışmada dikkate alınan değişken kalınlıklı dikdörtgen bir plaka ait boyutlar şekil 4.1 'de görülmektedir.

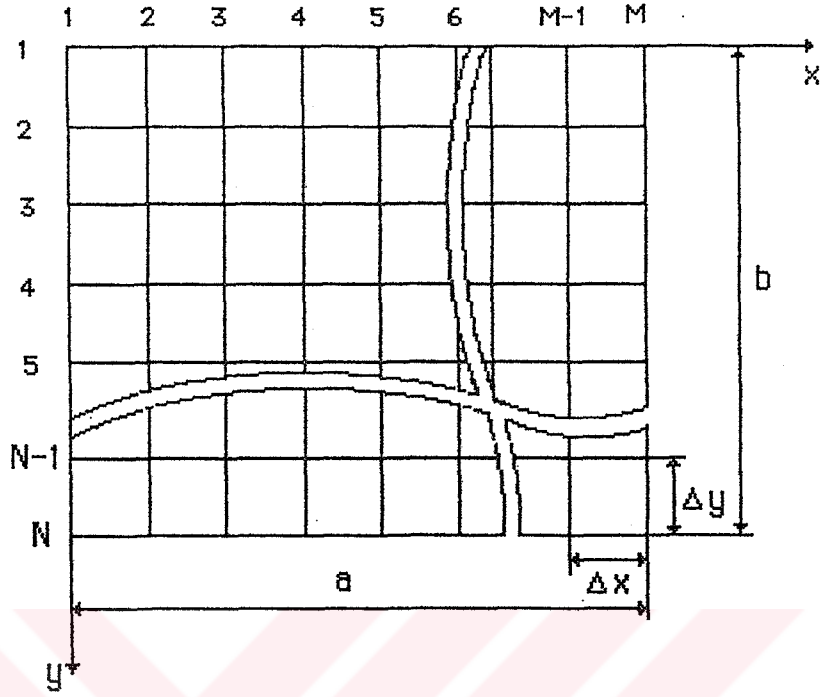


Şekil 4.1. Değişken kalınlıklı dikdörtgen bir plâğın boyutları .

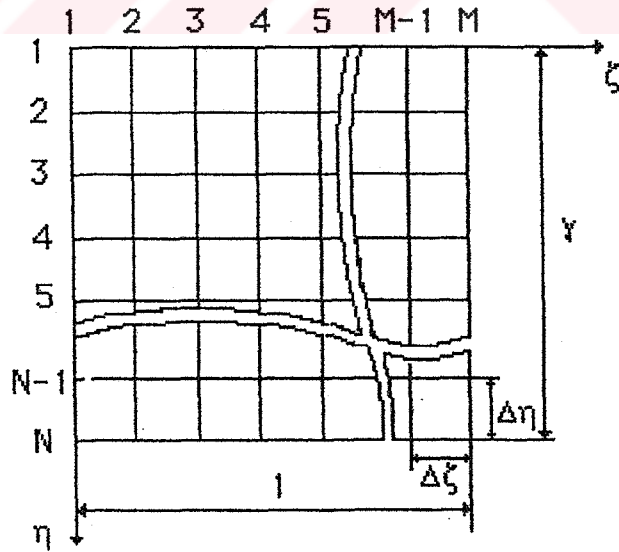
Bu plak üzerinde x yönünde M , y yönünde N tane doğru yardımıyla bir düğüm seti oluşturulmuştur, (Aksu, Al-Kaabi, (1989). Grid sistemi ve plak geometrisi şekil 4.2.1. 'de verilmiştir. Şekilde, Δx ve Δy , x ve y yönlerindeki düğüm aralıklarını göstermektedir.

Plak üzerinde oluşturulan bu alt bölgelerin küçük değişimleri dikkate alınarak sistemin enerjileri ifade edilecektir. Daha sonra sonlu fark formülasyonu da kullanılarak sistemin toplam enerjisi elde edilecektir.

Bu amaçla, yapılan ilk işlem şekil değiştirme ve kinetik enerji denklemlerini boyutsuz olarak ifade etmektir. Bunun için plâğa ait uzunluklar boyutsuz olarak ifade edilmelidirler. Şekil 4.2.2. 'de plak uzunluklarının boyutsuz hali görülmektedir.



Şekil 4.2.1. Grid sistemi ve plak geometrisi



Şekil 4.2.2. Boyutsuz plak geometrisi ve grid sistemi

Enerji denklemlerinde kullanılacak olan boyutsuz parametreler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{x}{a} & \partial x &= a \partial \zeta & \gamma &= \frac{b}{a} & \alpha^* &= \alpha_{(x,y)}^* = \frac{h_{(x,y)}}{h_0} \\
 \eta &= \frac{y}{a} & \partial y &= a \partial \eta & \beta_0 &= \frac{h_0}{a} & \beta &= \beta_{(x,y)} = \frac{h_{(x,y)}}{a} \\
 w' &= \frac{\bar{w}}{a} & \partial \bar{w} &= a \partial w' & & & & (4.1)
 \end{aligned}$$

Burada h_0 , $x=0$ ve $y=0$ noktasındaki plak kalınlığını göstermektedir. Sonlu fark tekniğinde kullanılacak olan Δx ve Δy düğüm aralıkları aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \frac{a}{M-1} & \Delta \zeta &= \frac{1}{M-1} \\
 \Delta y &= \frac{b}{N-1} & \Delta \eta &= \frac{\gamma}{N-1} \\
 \alpha &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \zeta} & \alpha &= \frac{\gamma(M-1)}{N-1} & & (4.2)
 \end{aligned}$$

(3.17) ile verilen şekil değiştirme enerjisi, (3.8) ve (3.10) eşitlikleri de kullanılarak yukarıda verilen boyutsuz parametrelere bağlı olarak aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
U = & \frac{E a^3}{2(1-\nu^2)} \int_0^y \int_0^1 \left\{ \frac{\beta^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial \phi_\xi}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_\xi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. + \frac{k(1-\nu)\beta}{2} \left[\left(\phi_\xi + \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\phi_\eta + \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\eta \quad (4.3)
\end{aligned}$$

(3.19) ile verilen kinetik enerji ifadesi ise boyutsuz olarak,

$$T = \frac{1}{2} \rho a^2 h_0^2 \int_0^y \int_0^1 \left[\frac{\alpha^{*3}}{12} \left(\frac{\partial \phi_\xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\alpha^*}{\beta_0^2} \left(\frac{\partial w'}{\partial t} \right)^2 d\xi d\eta \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.

4.2. Euler Denklemi

Sistemin toplam enerjisini minimize etmek için kullanılan Euler şartı aşağıdaki Lagrange denklemi ile ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; i=1, \dots, n \quad (4.5)$$

Buradaki L, Lagrange fonksiyonudur ve kinetik enerji ile şekil değiştirme enerjisi arasındaki farkı ifade etmektedir (L=T-U).

Harmonik hareket çözümü, aşağıda verilen formda kabul edilebilir (Aksu, Al-Kaabi, 1989).

$$\begin{aligned}\Phi_{\zeta}(\zeta, \eta, t) &= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \Phi_{\zeta}(\zeta, \eta) \\ \Phi_{\eta}(\zeta, \eta, t) &= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \Phi_{\eta}(\zeta, \eta) \\ W'(\zeta, \eta, t) &= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(\zeta, \eta)\end{aligned}\quad (4.6)$$

Bunlardan faydalanarak incelenen plak elemanı üzerindeki düğüm noktalarına ait ivmeler, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_{\zeta_{i,j}}(\zeta, \eta, t) &= -\omega^2 \Phi_{\zeta_{i,j}}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ \ddot{\Phi}_{\eta_{i,j}}(\zeta, \eta, t) &= -\omega^2 \Phi_{\eta_{i,j}}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ \ddot{W}'_{i,j}(\zeta, \eta, t) &= -\omega^2 W'_{i,j}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)\end{aligned}\quad (4.7)$$

(4.5) ifadesi, bir matris özdeğer problemi formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$[A] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (4.8)$$

Bu ifadedeki λ , boyutsuz şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinden bulunur.

$$\lambda = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{\rho h_0^3}{a} \omega^2 \quad (4.9)$$

5. SONLU FARK FORMÜLASYONLARI

İncelenen plak sisteminin doğal frekansları ve mod biçimleri, (4.5) denkleminin verilen Euler şartı yardımıyla sistemin toplam enerjisi minimize edilerek bulunmaktadır. Bu amaçla her bir düğüm noktasında yer değiştirme (w') ve dönme bileşenleri (ϕ_ξ , ϕ_η) için sonlu fark denklemleri elde edilir. Bunun için önce şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadeleri, sonlu farklarla ifade edilmelidirler. Sonlu fark formülasyonu için incelenen plak, ağ biçiminde oluşturulan gridler kullanılarak alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgeler için şekil değiştirme enerjisi, sonlu farklar cinsinden yazılırlar. Plakın toplam şekil değiştirme enerjisi, bu alt düğüm bölgelerinin şekil değiştirme enerjilerinin toplanmasıyla hesaplanır. Şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerindeki integrallerin yerine sonlu yaklaşım toplamları kullanılır. Sistemin toplam enerjisini minimize etmek için de Euler şartı kullanılır. Sonlu fark denklemleri her bir düğüm noktasında yer değiştirme ve dönme bileşenleri için ayrı ayrı bulunurlar.

5.1. Grid Sistemi

Bu çalışmada incelenen plak üzerinde, x ve y yönlerinde Δx ve Δy kadar aralıklarla çizilen doğrularla ağ şeklinde bir grid sistemi oluşturulur. Böylece plak çok küçük alt bölgelere ayrılır. Plakın toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjisi, her bir düğümle ilgili çakışmayan alt bölgeler üzerindeki şekil değiştirme ve kinetik enerjilerin toplanmasıyla hesaplanır.

Bu şekilde grid metodunun uygulanması için (4.3) ile verilen şekil değiştirme enerjisi fonksiyoneli; f_1 , f_2 ve f_3 gibi üç tane alt fonksiyona bölünür.

$$U = \frac{E a^3}{2(1-\nu^2)} \int_0^y \int_0^1 [f_1 + f_2 + f_3] d\zeta d\eta \quad (5.1)$$

Burada;

$$f_1 = \frac{\beta^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_\zeta}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{k(1-\nu)\beta}{2} \left(\phi_\zeta + \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (5.2.1)$$

$$f_2 = \frac{\beta^3}{12} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{k(1-\nu)\beta}{2} \left(\phi_\eta + \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)^2 \quad (5.2.2)$$

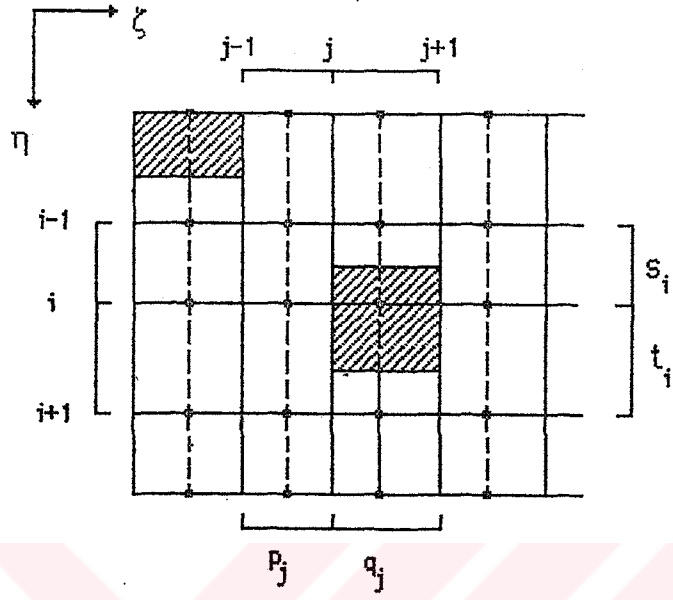
$$f_3 = \frac{2\beta^3 \nu}{12} \left(\frac{\partial \phi_\zeta}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\beta^3(1-\nu)}{24} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_\zeta}{\partial \eta} \right)^2 \quad (5.2.3)$$

Burada plak kalınlığı değişimini gösteren β parametresinin, dikkate alınan gridlere bağlı olarak farklı değerler alacağı unutulmamalıdır. f_1 , f_2 ve f_3 alt fonksiyonları için alt şekil değiştirme enerjilerinin bulunmasında kullanılan alt düğüm bölgeleri şekil (5.1) , (5.2) ve (5.3) 'de gösterilmiştir.

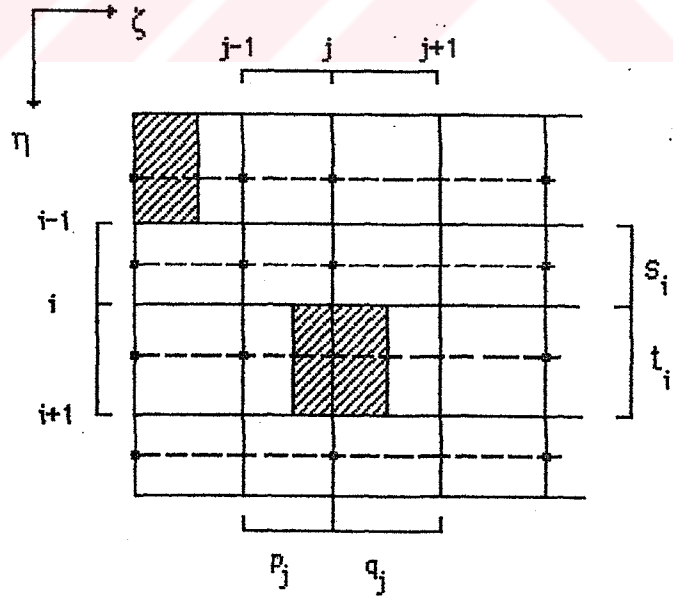
Alt şekil değiştirme enerjileri çakışmayan alt bölgeler üzerinde toplanmış şekil değiştirme enerjilerinin toplamı olarak hesaplanır. İki ayrı grid setinin kullanımı, küçültülmüş düğüm aralıkları ile sonlu fark formülasyonunu sağlar ve bölmelendirme hatasını küçültür.

Plak, x ve y koordinatları yönünde M-1 ve N-1 alt-bölgeye ayrıldığında $\Delta\zeta$ ve $\Delta\eta$ aralıkları şöyle bulunur :

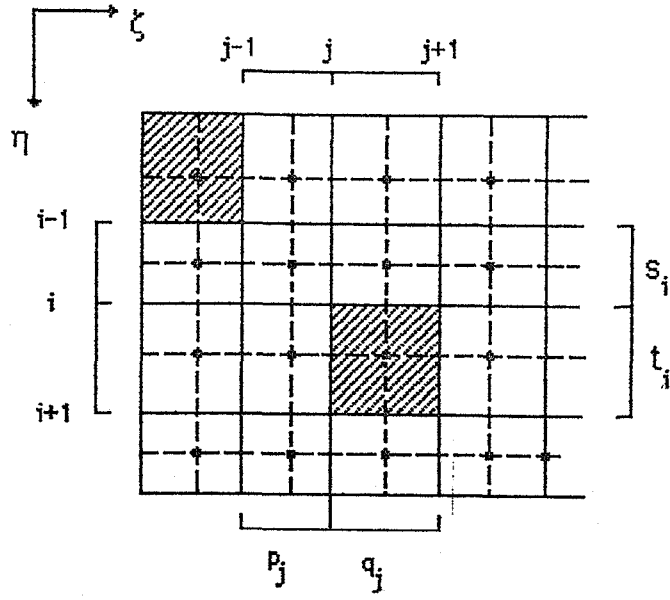
$$\Delta\zeta = \frac{1}{M-1} \quad \Delta\eta = \frac{Y}{N-1} \quad \alpha = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\eta} \quad (5.3)$$



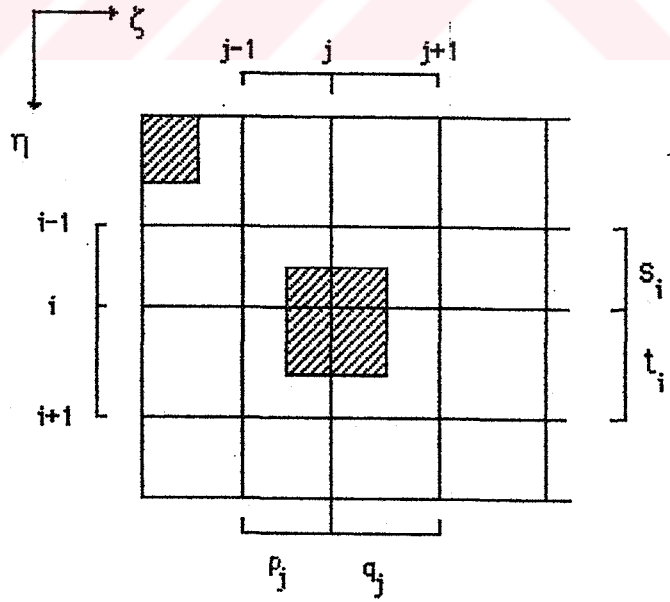
Şekil 5.1. f_1 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi.



Şekil 5.2. f_2 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi.



Şekil 5.3. f_3 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi.



Şekil 5.4. f_4 fonksiyonu için oluşturulan grid sistemi.

Sonlu fark denklemlerinin formülasyonu yapılırken eşit olmayan düğüm aralıkları kullanılacağından dolayı ;

$$N-1 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (s_i + t_i) - (s_1 + t_N) \right]$$

$$M-1 = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^M (p_j + q_j) - (p_1 + q_M) \right] \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.

f_1 , f_2 ve f_3 alt fonksiyonlarına bağlı olarak U_1 , U_2 ve U_3 alt şekil değiştirme enerjileri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_1 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \int_0^y \int_0^1 f_1 d\xi d\eta \quad (5.5.1)$$

$$U_2 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \int_0^y \int_0^1 f_2 d\xi d\eta \quad (5.5.2)$$

$$U_3 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \int_0^y \int_0^1 f_3 d\xi d\eta \quad (5.5.3)$$

Şekil değiştirme enerjisindeki küçük değişimler dikkate alındığında yukarıdaki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilirler :

$$(\Delta U_1)_{i,j+1/2} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \left[(f_1)_{i,j+1/2} q_j \frac{(s_i + t_i)}{2} \right] \Delta\xi \Delta\eta \quad (5.6.1)$$

$$(\Delta U_2)_{i,j+1/2} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \left[(f_2)_{i+1/2,j} t_i \frac{(p_j + q_j)}{2} \right] \Delta\xi \Delta\eta \quad (5.6.2)$$

$$(\Delta U_3)_{i,j+1/2} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} [(f_3)_{i+1/2, j+1/2} t_i q_j] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.6.3)$$

Toplam alt şekil değiştirme enerjileri, plak üzerinde çakışmayan alt-bölgelerin toplanmasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$U_1 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \left[(f_1)_{i,j+1/2} q_j \frac{(s_i + t_i)}{2} \right] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.7.1)$$

$$U_2 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \left[(f_2)_{i+1/2,j} t_i \frac{(p_j + q_j)}{2} \right] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.7.2)$$

$$U_3 = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} [(f_3)_{i+1/2, j+1/2} t_i q_j] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.7.3)$$

Toplam şekil değiştirme enerjisi ise bu üç alt şekil değiştirme enerjilerinin toplanmasıyla hesaplanır.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (5.8)$$

Benzer olarak (4.4) ifadesinde, kinetik enerji alt fonksiyonu f_4 , aşağıda verildiği gibi ifade edilir.

$$f_4 = \frac{\alpha^*{}^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \phi \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi \eta}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\alpha^*}{\beta_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \quad (5.9)$$

f_4 alt fonksiyonu için grid sistemi ve alt düğüm bölgeleri şekil (5.4) 'de gösterilmiştir.

f_4 alt fonksiyonuna bağı olarak plağın toplam kinetik enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T = \frac{1}{8} \rho a^2 h_0^3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [(f_4)_{i,j} t_i q_j + (f_4)_{i,j+1} t_i p_{j+1} + (f_4)_{i+1,j} s_{i+1} q_j + (f_4)_{i+1,j+1} s_{i+1} q_{j+1}] \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.10)$$

5.2. İç Dügümlerde Sonlu Fark Formülasyonu

Sonlu yaklaşım toplamları olarak verilen şekil değıştirme ve kinetik enerji ifadeleri (5.7.1 - 5.7.3 ve 5.10) ,her bir i,j düğümü için aşağıda yazılan Euler şartını sağlamalıdır.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_{i,j}^k} \right] - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_{i,j}^k} = 0 \quad (5.11)$$

$k=1,2,3 \quad ; \quad i=1 \dots N \quad ; \quad j=1 \dots M$

Burada; $q^1 = w'$, $q^2 = \phi \zeta$, $q^3 = \phi \eta$ 'dir.

5.2.1. Şekil değıştirme enerjisinin sonlu fark formülasyonu :

Türetilen (5.7.1)-(5.7.3) şekil değıştirme enerjisi ifadelerinde, hız terimleri bulunmadığından hız bileşenlerine göre türevler sıfırdır. Buna göre (5.12) eşitliği yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_{i,j}^k} \right] = 0 \quad (5.12)$$

Bir iç düğümde (l,m), sonlu fark denklemlerinin formülasyonu için belirlenen düğüme Euler şartı uygulanır. (5.7.1-5.7.3) ifadelerindeki sonlu yaklaşım toplamları formundaki şekil değiştirme enerjilerinin w' , $\phi\xi$ ve $\phi\eta$ bileşenlerinin her birine göre kısmi türevlerinin alınmasıyla aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\frac{\partial U}{\partial q_{l,m}^1} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial w'_{l,m}} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} (f_1)_{i,j+1/2} q_j \frac{(s_i + t_j)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M (f_2)_{i+1/2,j} t_j \frac{(p_j + q_j)}{2} \right] \Delta\xi\Delta\eta \quad (5.13.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_{l,m}^2} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \phi\xi_{l,m}} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} (f_1)_{i,j+1/2} q_j \frac{(s_i + t_j)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (f_3)_{i+1/2, j+1/2} t_i q_j \right] \Delta\xi\Delta\eta \quad (5.13.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_{i,m}^3} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \phi_{i,m}} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M (f_2)_{i+1/2,j} t_i \frac{(p_j + q_j)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (f_3)_{i+1/2, j+1/2} t_i q_j \right] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.13.3)$$

(5.13.1-5.13.3) denklemleri, sadece ($l=i$, $m=j$) düğümüyle ilgili terimleri kapsayacak şekilde tekrar yazılırlarsa aşağıda verilen denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial U}{\partial w'_{i,j}} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial w'_{i,j}} \left[\{ (f_1)_{i,j-1/2} p_j + (f_1)_{i,j+1/2} q_j \} \frac{(s_i + t_i)}{2} + \{ (f_2)_{i-1/2,j} s_i (f_2)_{i+1/2,j} t_i \} \frac{(p_j + q_j)}{2} \right] \Delta \xi \Delta \eta \quad (5.14.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_{\zeta_{i,j}}} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \phi_{\zeta_{i,j}}} \left[\{ (f_1)_{i,j-1/2} p_j + (f_1)_{i,j+1/2} q_j \} \frac{(s_i + t_i)}{2} + \{ (f_3)_{i-1/2, j-1/2} p_j + (f_3)_{i-1/2, j+1/2} q_j \} s_i + \{ (f_3)_{i+1/2, j-1/2} p_j + (f_3)_{i+1/2, j+1/2} q_j \} t_i \right] \Delta \xi \Delta \eta$$

(5.14.2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \phi_{i,j}} = \frac{Ea^3}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \phi_{i,j}} \left[\{ (f_2)_{i-1/2,j} s_i + (f_2)_{i+1/2,j} t_i \} \frac{(p_j + q_j)}{2} \right. \\
+ \{ (f_3)_{i-1/2, j-1/2} p_j + (f_3)_{i-1/2, j+1/2} q_j \} s_i \\
\left. + \{ (f_3)_{i+1/2, j-1/2} p_j + (f_3)_{i+1/2, j+1/2} q_j \} t_i \right] \Delta \xi \Delta \eta
\end{aligned} \quad (5.14.3)$$

Burada, fonksiyonellerdeki kısmi türevlerin yerine eşit olmayan düğüm aralıklarıyla yazılan sonlu fark denklemleri yazılırlar. Ağ şeklinde oluşturulan gridlerin kullanımı, küçülmüş düğüm aralıkları ile sonlu fark formülasyonunu ve dolayısıyla bölmelendirme hata miktarının azalmasını sağlar.

Şekil değiştirme enrjisi fonksiyonellerindeki bazı kısmi türevler için eşit olmayan düğüm aralıklarının dikkate alındığı sonlu fark denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left(\frac{\partial \phi_{\xi}}{\partial \xi} \right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{q_j \Delta \xi} (-\phi_{\xi,i,j} + \phi_{\xi,i,j+1}) \quad (5.15)$$

$$\left(\phi_{\xi} + \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right)_{i,j-1/2} = \frac{1}{2} (\phi_{\xi,i,j-1} + \phi_{\xi,i,j}) + \frac{1}{p_j \Delta \xi} (w'_{i,j} - w'_{i,j-1}) \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_{\eta}}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{t_i \alpha \Delta \xi} (-\phi_{\eta,i,j} + \phi_{\eta,i+1,j}) \quad (5.17)$$

$$\left(\phi_{\eta} + \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)_{i-1/2,j} = \frac{1}{2} (\phi_{\eta,i,j} + \phi_{\eta,i-1,j}) + \frac{1}{s_i \alpha \Delta \xi} (w'_{i,j} - w'_{i-1,j}) \quad (5.18)$$

$$\left[\left(\frac{\partial \phi_{\zeta}}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial \phi_{\eta}}{\partial \eta} \right) \right]_{i-1/2, j-1/2} = \frac{1}{4\rho_j s_i \alpha \Delta \zeta^2} (\phi_{\zeta_{i-1, j}} + \phi_{\zeta_{i, j}} - \phi_{\zeta_{i-1, j-1}} - \phi_{\zeta_{i, j-1}}) (\phi_{\eta_{i, j-1}} + \phi_{\eta_{i, j}} - \phi_{\eta_{i-1, j-1}} - \phi_{\eta_{i-1, j}}) \quad (5.19)$$

Fonksiyonellerdeki diğer kısmi türevlerin sonlu fark denklemleri benzer şekilde elde edilebilir. Böylece şekil değiştirme enerjisi, sonlu farklarla ifade edilmiş olur.

Yukardaki sonlu fark denklemlerinde hata ϕ_{ζ}^2 mertebesinde ve düğüm aralıklarının yarıya indirilmesinden dolayı bölmelendirme hatası gerçek değerinin dörtte birine indirilir.

5.2.2. Kinetik enerjinin sonlu fark formülasyonu :

Kinetik enerji, yer değiştirme (w') ve dönme bileşenlerini (ϕ_{ζ} , ϕ_{η}) ihtiva etmediğinden bu bileşenlere göre türevleri sıfırdır.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q_{i, j}^k} \right] = 0 \quad (5.20)$$

Bu durumda, (5.10) ile verilen kinetik enerji ifadesinde, sadece ij düğümü için hız bileşenlerine göre kısmi türevler, şekil değiştirme enerjisinde olduğu gibi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{w}'_{i, j}} \right] = \frac{1}{8} \rho a^2 h_0^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{w}'_{i, j}} (f_4)_{i, j} (s_i + t_i) (\rho_j + q_j) \right] \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.21.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\zeta_{i,j}}} \right] = \frac{1}{8} \rho a^2 h_0^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\zeta_{i,j}}} (f_4)_{i,j} (s_i + t_i) (p_j + q_j) \right] \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.21.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\eta_{i,j}}} \right] = \frac{1}{8} \rho a^2 h_0^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\eta_{i,j}}} (f_4)_{i,j} (s_i + t_i) (p_j + q_j) \right] \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.21.3)$$

Bu denklemlerin diferansiyellerinin alınması ve harmonik hareket kabulünün uygulanmasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{w}'_{i,j}} \right] = - \frac{1}{4\beta_0^2} \rho a^2 h_0^3 \alpha_{i,j}^* \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \times W_{i,j} (s_i + t_i) (p_j + q_j) \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.22.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\zeta_{i,j}}} \right] = - \frac{1}{48} \rho a^2 h_0^3 \alpha_{i,j}^{*3} \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \times \Phi_{\zeta_{i,j}} (s_i + t_i) (p_j + q_j) \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.22.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{\eta_{i,j}}} \right] = - \frac{1}{48} \rho a^2 h_0^3 \alpha_{i,j}^{*3} \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \times \Phi_{\eta_{i,j}} (s_i + t_i) (p_j + q_j) \Delta \zeta \Delta \eta \quad (5.22.3)$$

Son olarak bir ij iç düğümü için sonlu fark denklemi, (5.14.1-5.14.3) denklemlerinde tamamlanan hesaplamalarla bulunan sonuçların ve (5.22.1-5.22.3) denklemlerinde verilen ifadelerin (5.11) denkleminde yerine koyulmasıyla elde edilir.

Üçüncü bölümde plağın; basit, ankastre ve serbest kenarları için sınır şartlarından bahsedilmişti. Bu şartların basit, ankastre ve serbest kenarlar üzerinde bulunan herhangi bir düğüm noktasına uygulanması şöyle açıklanabilir:

1. Basit mesnetli bir kenar üzerindeki düğümlerde; gerilme sınır şartları otomatik olarak minimizasyon işlemiyle sağlanmaktadır. Geometrik sınır şartı ise sonlu fark denklemlerinde $w'=0$ yazılarak sağlanır.

2. Ankastre bir kenar üzerindeki düğümlerde; geometrik sınır şartları, sonlu fark denklemlerinde $w'=0$, $\phi_{\xi}=0$, $\phi_{\eta}=0$ yazılarak sağlanır.

3. Serbest bir kenar üzerindeki düğümler; serbest kenarlar üzerinde sadece gerilme şartları mevcut olduğundan, bu şartlar minimizasyon işlemiyle sağlanırlar.

6. BILGISAYAR PROGRAMI

Önceki bölümlerde, incelen değişken kalınlıklı bir dikdörtgen plağın serbest titreşimine ait doğal frekansların ve mod biçimlerinin elde edilebilmesi için gerekli olan matematik model elde edilmiştir. Bu amaçla ilk olarak incelenen plak sistemine ait şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadeleri elde edilmiş ve bunlar sonlu fark denklemleriyle ifade edilmiştir. Sistemin doğal frekansları ve mod biçimleri, bu ifadelerin yerdeğiştirme ve dönme bileşenleri için Euler denklemi kullanılarak elde edilen özdeğer probleminin çözülmesiyle bulunabilmektedir. Bu çözümleri yapabilmek amacıyla FORTRAN programlama dili kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu programa ait akış şeması Ek.2. 'de verilmiştir.

Bu programın icra ettiği işlemleri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1. f_1, f_2, f_3 ve f_4 alt fonksiyonlarındaki plak kalınlığının değişim tipine (üstel kalınlık değişimli, lineer kalınlık değişimli,...) bağlı olarak değişen rijitlik katsayılarının; RIGID1, RIGID2, RIGID3 ve RIGID4 alt programlarıyla hesaplanması.

2. Göz önüne alınan sınır şartlarının uygulanması.

3. Enerji ifadelerindeki sonlu fark denklemlerinin elde edilmesi ve her bir fonksiyonun integrasyon işlemlerinin; INTEG1, INTEG2, INTEG3 ve INTEG4 alt programlarıyla birlikte DERIV ve STORAG alt programlarıyla icra edilmesi.

4. Son işlem Euler şartının enerji ifadelerine uygulanmasıyla elde edilen özdeğer probleminin çözümüdür. Bu çözüm, iki aşamada gerçekleştirilmektedir.

Birinci aşamada, incelenen plak üzerinde 5x5 düğüm seti kullanılarak özdeğerler elde edilir. Bu işlem, EIGEN, ELMHES ve HQR alt programıyla icra edilmektedir. Özdeğerler, katsayılar matrisinin bir üst Hessenberg matrise dönüştürülerek QR metodunun uygulanmasıyla bulunmaktadır.

İkinci aşamada, 8x8 düğüm seti ve birinci aşamada bulunan özdeğerler; UNSRAY, BANDET ve BANSOL alt programlarında kullanılarak daha hassas olan yeni özdeğerler elde edilir. Özdeğerlerin iki aşamada bulunmasıyla bilgisayarın kullandığı zamanın ve hafızanın azaltılması sağlanmıştır. Son olarak, elde edilen bu özdeğerler MODE alt programında kullanılarak sistemin mod biçimleri elde edilir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, değişken kalınlıklı dikdörtgen plakların titreşim analizinin yapılabilmesi için açıklanan varyasyonel prensibe dayalı sonlu fark tekniği, üniform kalınlıklı ve üstel kalınlık değişimine sahip kare ve dikdörtgen plaklara uygulanmıştır. Yapılan tüm analizler için poisson oranı $\nu=0.3$ ve kesme faktörü $k=\pi^2/12$ olarak alınmıştır. Jain ve Soni , (1973) ve Dovganich ve Korol , (1978), frekans parametresini ifade etmek için aşağıda verilen boyutsuz parametreyi kullanmışlardır.

$$\Omega = \sqrt{12(1-\nu^2)a^2\rho\omega^2/Eh_0^2} \quad (7.1)$$

Bu parametrenin λ ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\Omega = \sqrt{12\lambda/\beta_0^5} \quad (7.2)$$

Kalınlığı üstel olarak değişen dikdörtgen bir plağın geometrisi ve boyutları Ek-1. 'de verilmiştir. Bu tip bir plak için kalınlık fonksiyonu ;

$$h(x,y) = h_0e^{-cy} \quad (7.3)$$

olarak ifade edilir. Boyutsuz olarak ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$h(\zeta,\eta) = h_0e^{-c\alpha\eta} \quad (7.4)$$

Burada h_0 , $(\zeta=0, \eta=0)$ 'daki plak kalınlığı ve c , plak kalınlığının incelleme sabitidir. h_1 , $(\eta=1)$ 'deki plak kalınlığı olmak üzere h_0 , h_1 ve c arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.

$$c = \log_e (h_1/h_0) \quad (7.5)$$

Aksu ve Al-Kaabi, (1987) kullanılan bu metodun geçerliliğini göstermişlerdir. Burada sunulan metodun yaklaşım karakteristiklerini bulmak için dört kenarından basit mesnetli (B.B.B.B) kare bir plak analiz edilmiştir. Sonlu fark formülasyonunda, en iyi sonuçların alındığı 8x8 düğüm seti kullanılmıştır. Bu sistem için 164 denklem $[36(\text{iç düğümler}) \times 3 + 28(\text{sınırdaki düğümler}) \times 2]$ elde edilmektedir. Klasik yaklaşımda bu 15x15 düğüm setine karşılık gelmektedir ve bu halde çözüm için 614 denkleme ihtiyaç varken sunulan teknikte, sadece 164 denklemle aynı doğrulukta sonuçlar elde edilebilmektedir (Aksu ve Al-Kaabi, 1987).

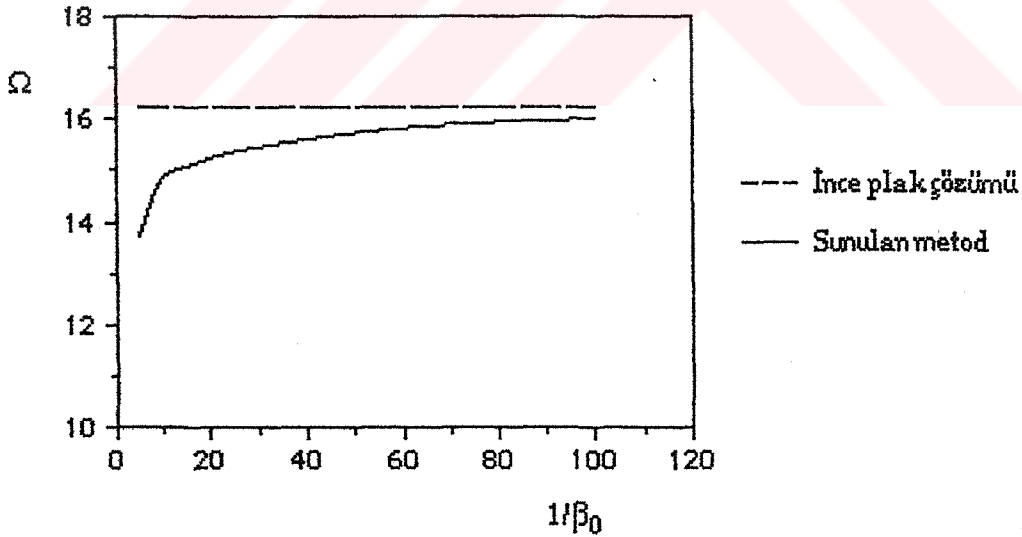
Bu çalışmada, üstel kalınlık değişimine sahip kare bir plakan B.B.B.B durumu için farklı β_0 değerlerinde elde edilen frekans parametresinin ilk sekiz modu Tablo 7.1. 'de verilmiştir. Ayrıca Dovganich ve Korol tarafından parabolik kalınlıklı ince plak için elde edilen sonuçlar da bu tabloda verilmiştir.

Tablo 7.1. B.B.B.B plak için Ω frekans parametreleri ($c=0.5$, $b/a=1$)

Mod	Dovganich (1978)	$\beta_0=0.01$	$\beta_0=0.02$	$\beta_0=0.05$	$\beta_0=0.1$	$\beta_0=0.2$
1 1	16.22	16.002	15.723	15.233	14.861	13.709
1 2	40.43	41.776	40.410	38.214	36.518	31.735
2 1	40.42	41.776	40.410	38.214	36.518	31.735
2 2	64.81	64.386	62.951	59.389	55.546	45.956
3 1	79.37	82.246	81.326	78.895	72.759	56.679
1 3	80.58	82.246	81.326	78.895	73.045	56.679
2 3	104.82	105.730	102.430	97.396	87.109	66.995
3 2	106.14	105.730	102.430	97.396	87.520	67.005

Tabloda, ince plak çözümleriyle yapılan karşılaştırmalarda; aradaki farkın, yüksek modlarda ve özellikle yüksek β_0 oranlarında arttığı görülmektedir. Bu; kalınlığın artmasıyla beraber artan kesme deformasyonu ve dönme ataletlerinin önemli derecedeki etkisinden kaynaklanmaktadır.

Şekil 7.1. 'de ise aynı tip plağın, farklı $1/\beta_0$ değerlerine karşılık gelen Ω değerleri için yaklaşım eğrisi görülmektedir. β_0 'ın azalan değerlerine karşılık frekans parametresinin klasik plak çözümüne yaklaştığı görülmektedir. $\beta_0 \leq 0.01$ değerlerinde frekans eğrisi klasik plak çözümüne daha da yaklaşmaktadır. Kalınlığın azalmasıyla birlikte kesme deformasyonu ve dönme ataletlerinin etkileri azaldığından dolayı bu, beklenen bir sonuçtur. Bu durum kullanılan yöntemin geçerliliğini göstermektedir.



Şekil 7.1. Üstel kalınlıklı kare bir plağın B.B.B.B durumu için frekans parametresinin β_0 ile değişimi.

B.B.B.B kenar şartlarına sahip kare plak için β_0 oranının çeşitli değerlerinde c incelleme sabitinin doğal frekanslar üzerindeki etkisi de incelenmiştir. Burada $c = -0.1, \dots, -0.7$ değerleri için plak kalınlığı, η yönünde artmaktadır. Bu değerler için elde edilen sonuçlar Tablo 7.2. 'de verilmiştir. Burada beklendiği gibi c 'nin artmasıyla fark da artmıştır. Bu plağın gittikçe kalınlaşması ve dolayısıyla kesme deformasyonları ve dönme ataletlerinin etkilerinin daha da belirginleşmesi sebebiyledir.

Tablo 7.2. B.B.B.B plak için Ω frekans parametreleri ($b/a=1$)

c	$\beta_0=0.01$	$\beta_0=0.05$	$\beta_0=0.1$	$\beta_0=0.2$
-0.1	20.659	20.368	19.567	17.331
-0.3	22.855	22.455	21.391	18.593
-0.5	25.314	24.754	23.329	19.847
-0.7	28.077	27.279	25.368	21.065

Bu çalışmada kullanılan varyasyonel prensibe dayalı sonlu fark tekniği, başka çalışmalarda çeşitli kalınlık değişimine sahip kare plaklar için uygulanmıştır. Fakat bu yöntem ile dikdörtgen plakların çözümleri mevcut değildir. Bu bakımdan sunulan çalışmada sonlu farklar yöntemiyle dikdörtgen plakların analizi yapılmıştır. Kenarları arasındaki oran, $b/a=0.4$, 1 ve 2.5 olan üstel kalınlık değişimli plakların, bir kenarı serbest ve diğer kenarları basit ve ankastre mesnet şartlarının iki farklı konfigürasyonu olan B.A.B.S ve A.A.A.S (Basit-Ankastre-Basit-Serbest ve Ankastre-Ankastre-Ankastre-Serbest) sınır şartları için titreşim analizleri yapılmıştır. Bu plak

tiplerinin $h_1/h_0=1$, 0.8 ve 0.5 değerleri için doğal frekansların ilk sekiz modu elde edilmiştir. Elde edilen bu doğal frekanslar ile Sonzogni vd., (1990) tarafından sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiş sonuçlar Tablo 7.3 , 7.4. ve 7.5 'de verilmiştir. Burada $h_1/h_0=1$ oranı, üniform kalınlıklı plağa karşılık gelmektedir. Tablolardaki karşılaştırmalarda, elde edilen sonuçların oldukça iyi yaklaşımlarda olduğu görülmektedir.

Üstel kalınlık değişimine sahip plağın mod biçimleri de elde edilmiştir. $b/a=1$ olan kare plak ve $b/a=0.4$ olan dikdörtgen plak için $h_1/h_0=0.5$ alınarak B.A.B.S ve A.A.A.S sınır Şartları için elde edilen mod biçimlerinin birkaçı Şekil 7.2.,...,7.4. 'de verilmiştir.

Bu çalışmada, varyasyonel prensiple birlikte kullanılan sonlu fark tekniğinin dikdörtgen plakların titreşim analizinde de kullanılabileceği görülmüştür. Kullanılan teknikle denklem sayısının azaltılması büyük kolaylıklar sağlar. Dikdörtgen plakların analizi yapılırken plak üzerindeki düğüm aralıkları eşit olarak alınmamıştır. Bu durum sistemin çözümünü kolaylaştırmasına rağmen sonlu farklardaki hatanın artmasına sebep olabilmektedir. Fakat elde edilen sonuçlar, diğer çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırıldığında aradaki farkın küçük olması hatta bazı modlarda birbirlerine eşit olması, eşit olmayan düğüm aralıklarının etkisinin bu çalışmada önemsenecek kadar küçük olduğunu göstermektedir.

Tablo 7.3. $b/a=0.4$ için Ω frekans parametreleri (A.A.S.)

h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	37.58	37.586	34.68	34.696	30.41	30.409
2	76.17	76.168	66.63	66.629	51.45	51.451
3	134.80	134.800	115.90	115.903	85.07	85.073
4	152.40	152.401	140.40	140.400	117.90	117.900
5	193.10	193.102	174.00	174.003	130.00	130.003
6	213.00	213.000	182.00	182.000	142.00	142.006
7	255.00	255.000	228.00	228.000	180.00	180.005
8	314.00	314.000	267.00	267.000	188.00	188.000

Tablo 7.4. $b/a=1$ için Ω frekans parametreleri (A.A.S.)

h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	23.93	23.936	20.40	20.411	14.67	14.678
2	40.01	40.022	35.76	35.768	28.38	28.373
3	63.26	63.268	53.52	53.518	37.13	37.131
4	76.70	76.706	68.90	68.905	54.90	54.908
5	80.60	80.596	71.50	71.502	55.30	55.299
6	116.80	116.799	103.00	103.001	70.10	70.106
7	122.00	122.002	104.00	104.168	81.70	81.699
8	134.00	314.004	120.00	120.005	95.00	95.008

Tablo 7.5. $b/a=2.5$ için Ω frekans parametreleri (A.A.A.S.)

h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	22.53	22.532	18.80	18.818	12.60	12.605
2	24.60	24.621	21.80	21.801	16.50	16.511
3	29.20	29.193	26.00	26.014	20.50	20.509
4	37.10	37.105	33.10	33.117	26.10	26.104
5	48.00	48.002	43.00	43.010	34.00	34.012
6	61.00	61.001	51.00	51.006	34.00	34.012
7	64.00	64.015	57.00	57.000	42.00	42.018
8	64.00	64.015	57.00	57.000	45.00	45.004

Tablo 7.6. $b/a=0.4$ için Ω frekans parametreleri (B.A.B.S.)

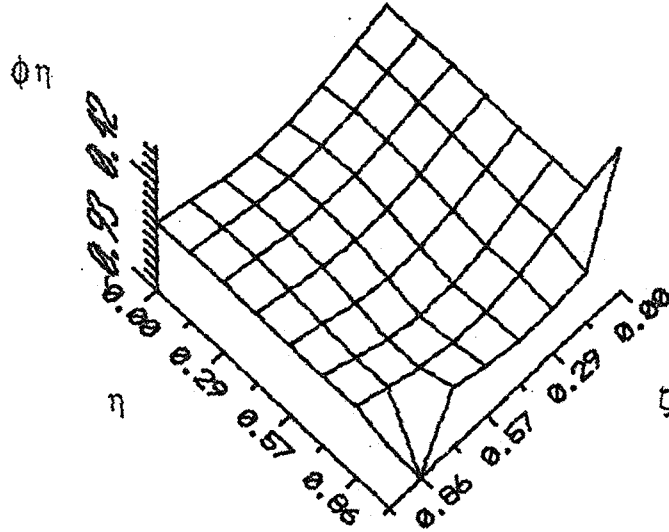
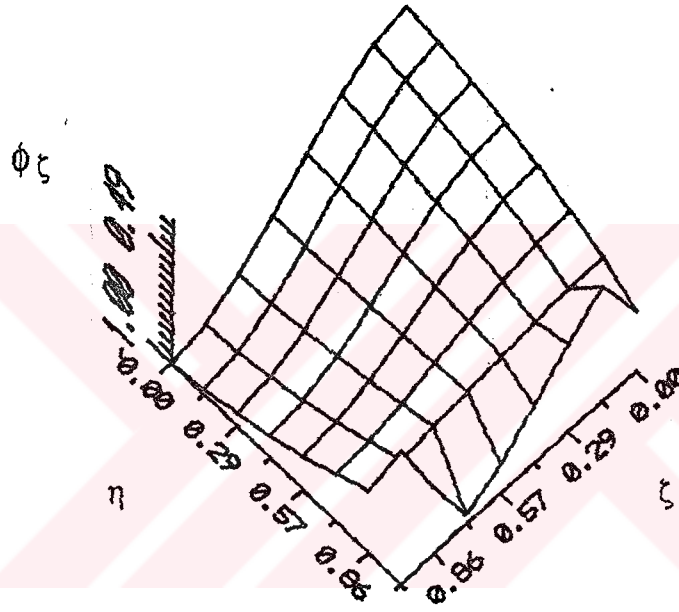
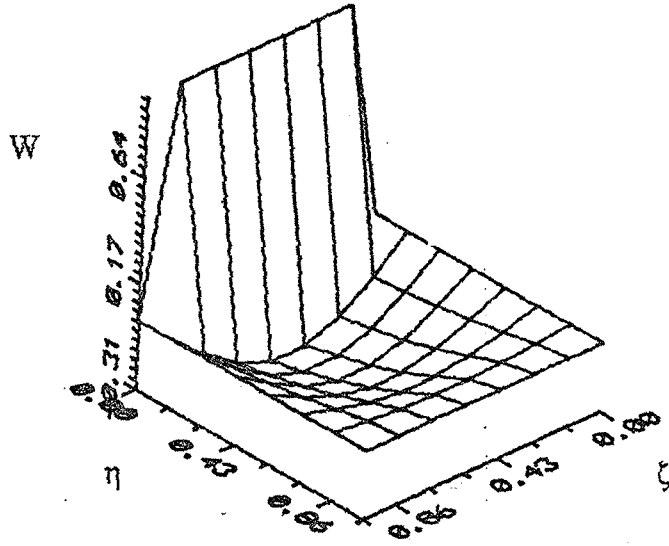
h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	30.62	30.632	29.35	29.354	27.42	27.421
2	58.09	58.088	51.97	51.968	42.24	42.236
3	105.60	105.607	91.83	91.835	69.27	69.279
4	149.40	149.427	137.90	137.900	108.50	108.500
5	173.00	173.355	149.00	149.535	116.20	114.440
6	182.00	182.015	165.00	165.031	135.00	135.001
7	235.00	235.011	211.00	211.000	159.00	159.000
8	262.00	262.026	224.00	224.002	168.00	168.001

Tablo 7.7. $b/a=1$ için Ω frakans parametreleri (B.A.B.S.)

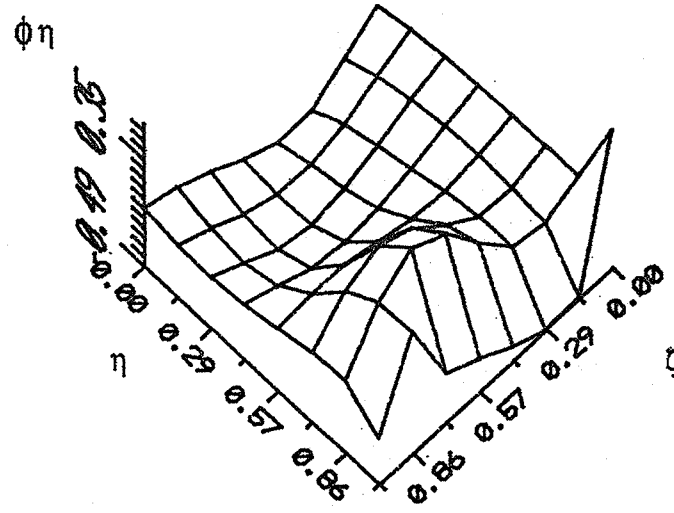
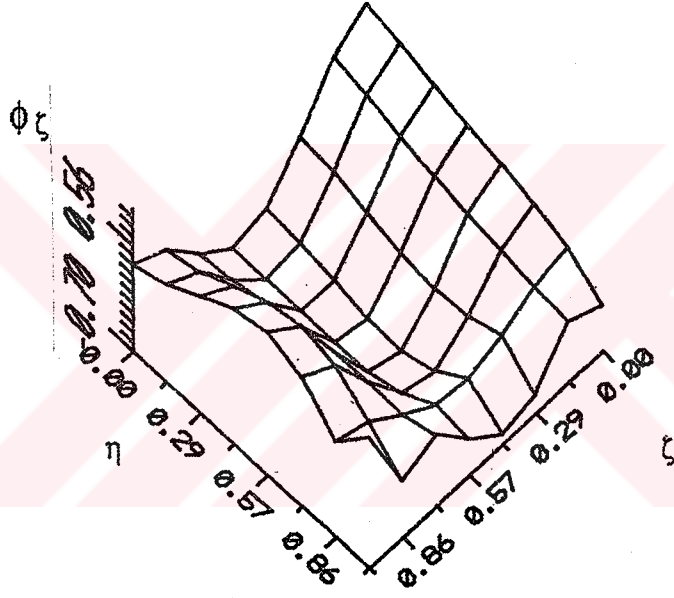
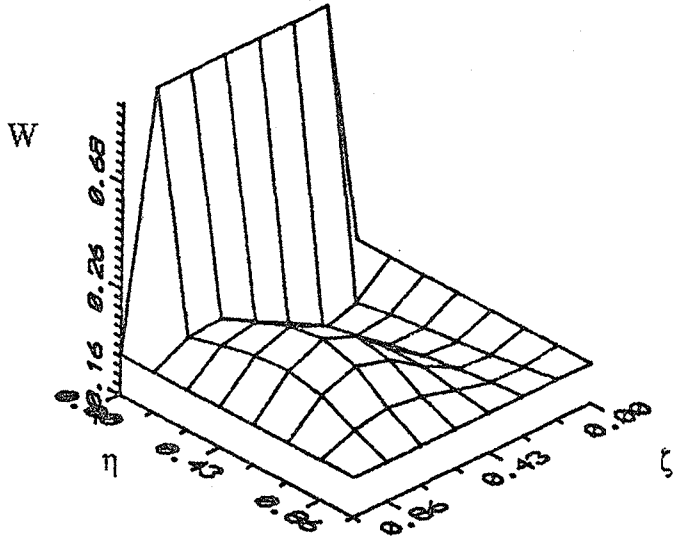
h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	12.68	12.677	11.15	11.150	8.67	9.144 *
2	33.06	33.058	29.80	30.019	24.03	24.026
3	41.71	41.711	35.58	35.573	25.34	25.342
4	63.04	63.041	56.00	56.007	43.65	39.220
5	72.40	72.403	65.10	65.100	52.10	52.115
6	90.70	90.704	76.70	76.702	53.00	53.018
7	103.00	103.369	92.10	92.101	72.30	72.334
8	112.00	112.007	99.40	99.401	76.00	75.939

Tablo 7.8. $b/a=2.5$ için Ω frakans parametreleri (B.A.B.S.)

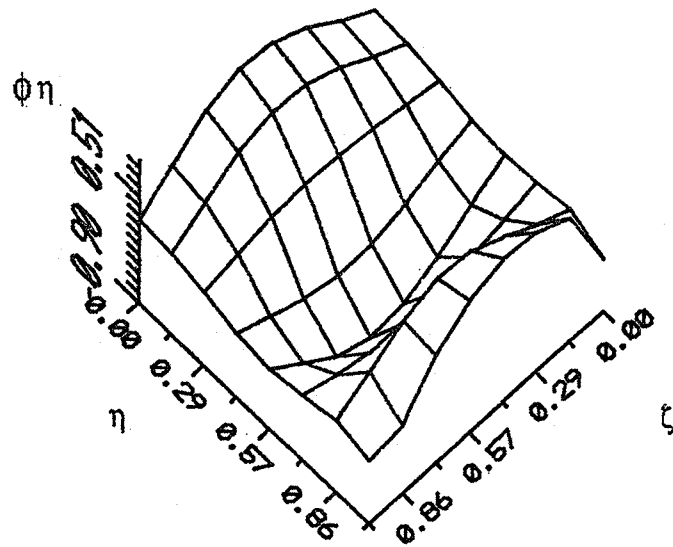
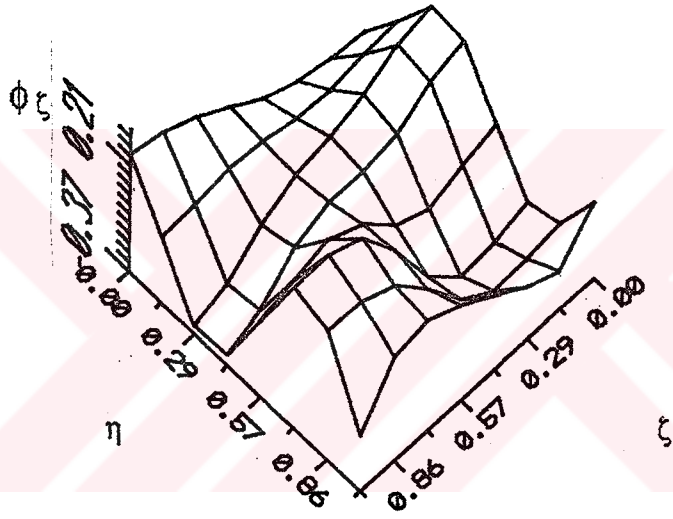
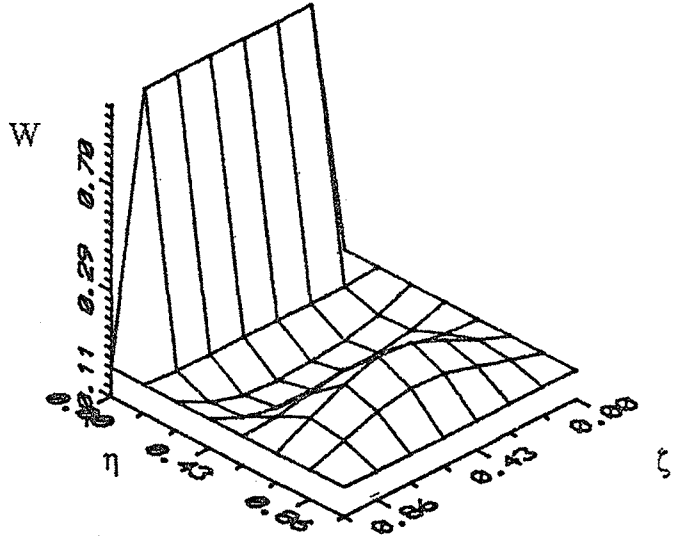
h_1/h_0	1		0.8		0.5	
Mod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod	Sonzogni (1990)	Sunulan Metod
1	10.19	10.191	8.65	8.708	6.05	6.060
2	13.61	13.612	12.07	12.024	9.36	9.364
3	20.12	20.144	17.91	18.681	14.03	14.041
4	29.70	29.695	26.50	26.508	20.80	20.962
5	39.70	39.707	33.20	32.259	22.30	22.301
6	42.00	41.239	38.00	38.005	28.90	28.905
7	43.00	45.631	38.00	38.005	29.00	29.003
8	49.00	49.003	44.00	44.009	34.00	34.000



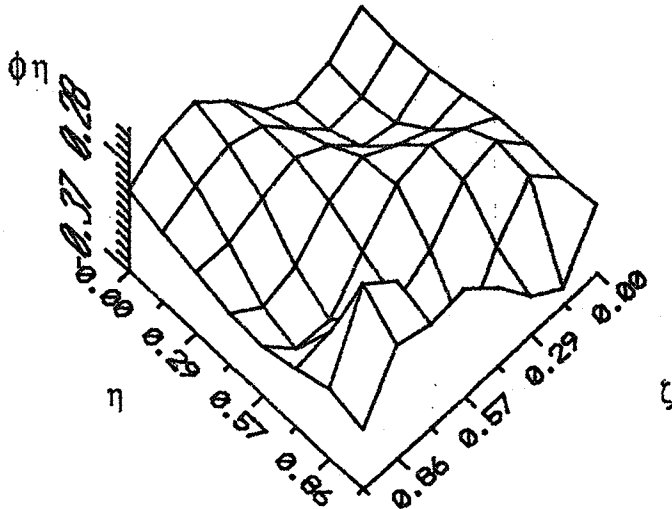
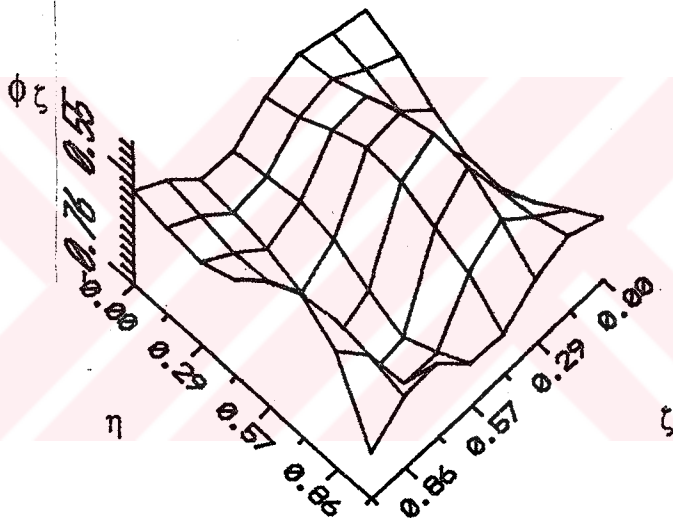
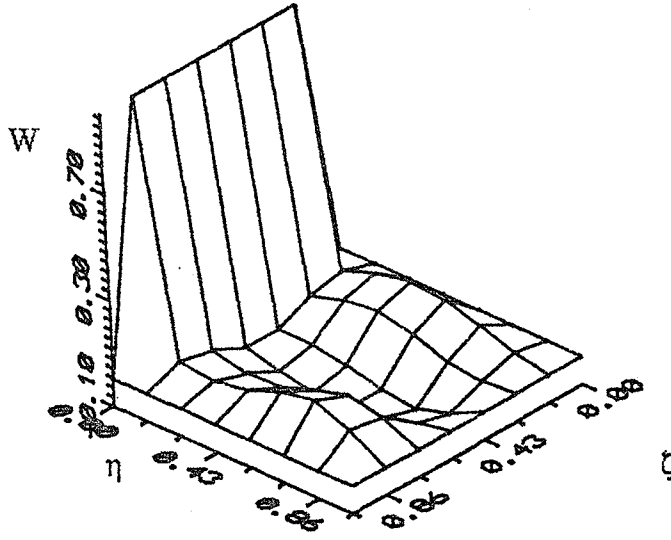
Şekil 7.2.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



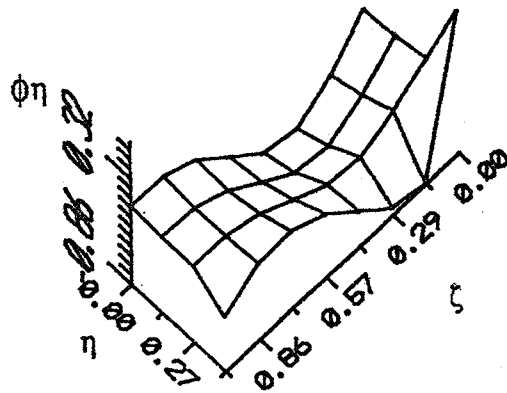
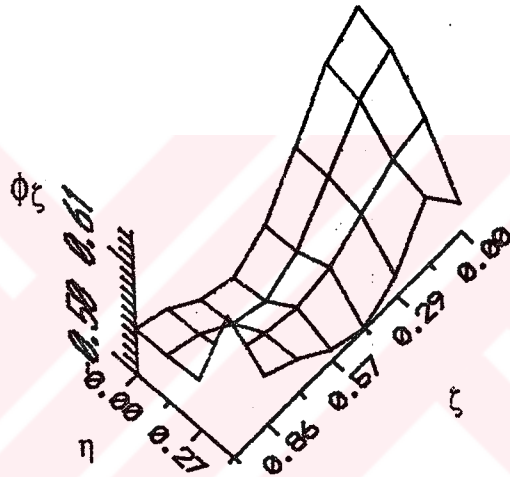
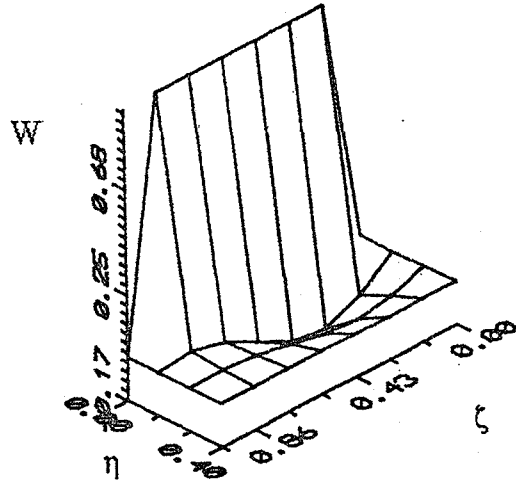
Şekil 7.2.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



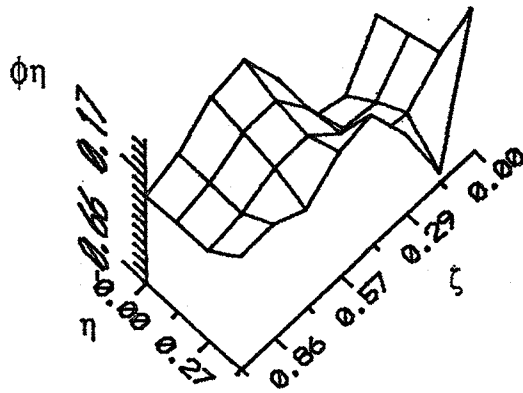
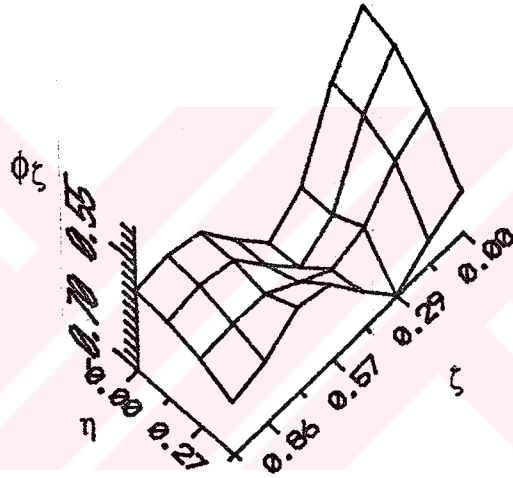
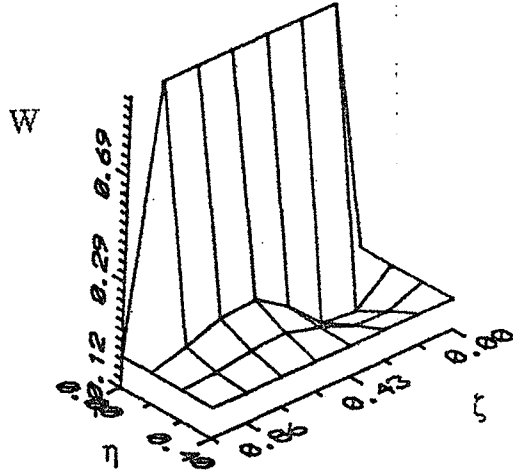
Şekil 7.2.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



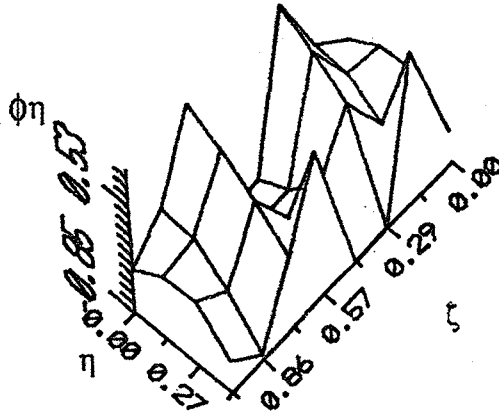
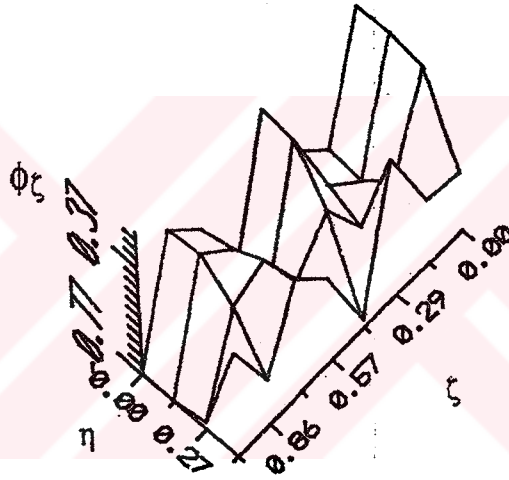
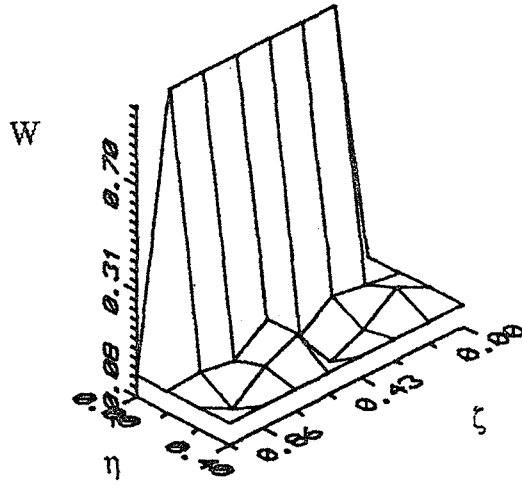
Şekil 7.2.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S.)



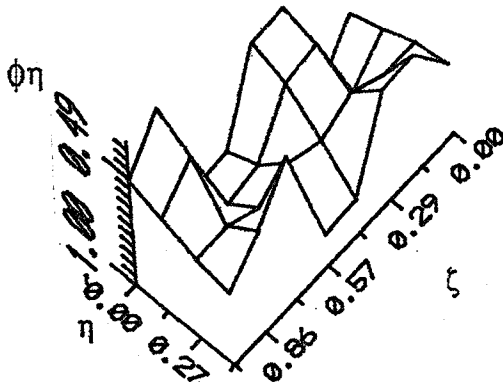
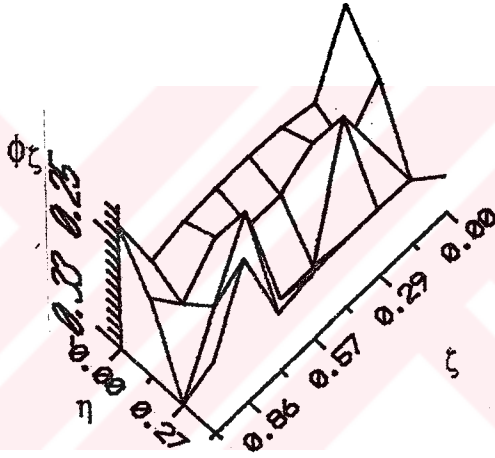
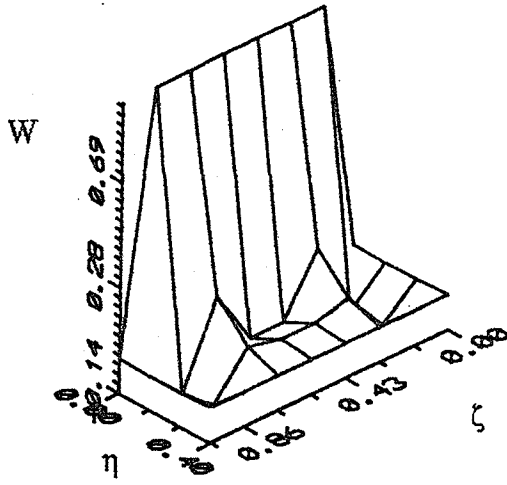
Şekil 7.3.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



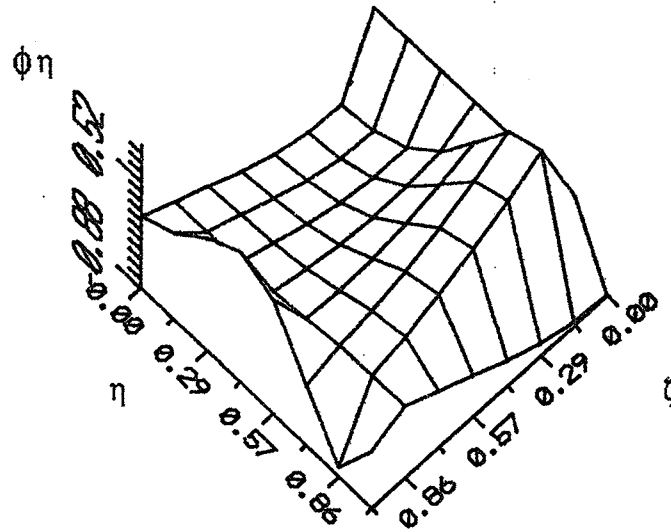
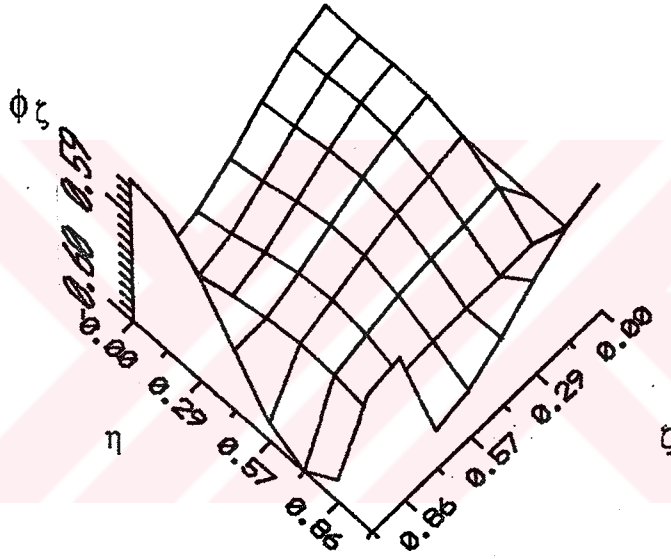
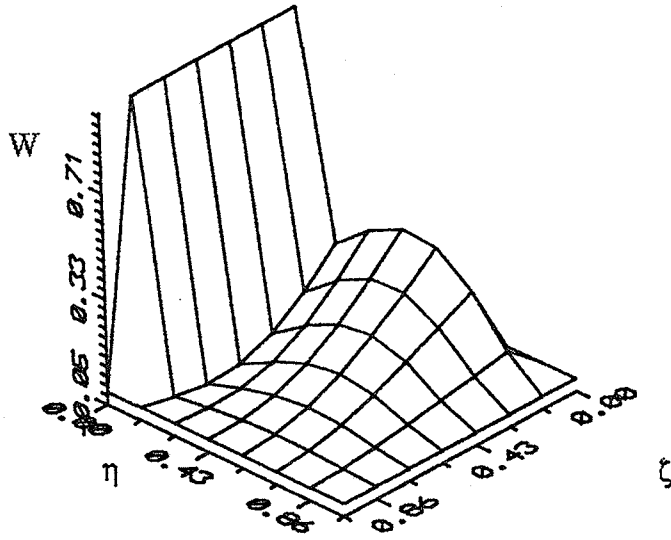
Şekil 7.3.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



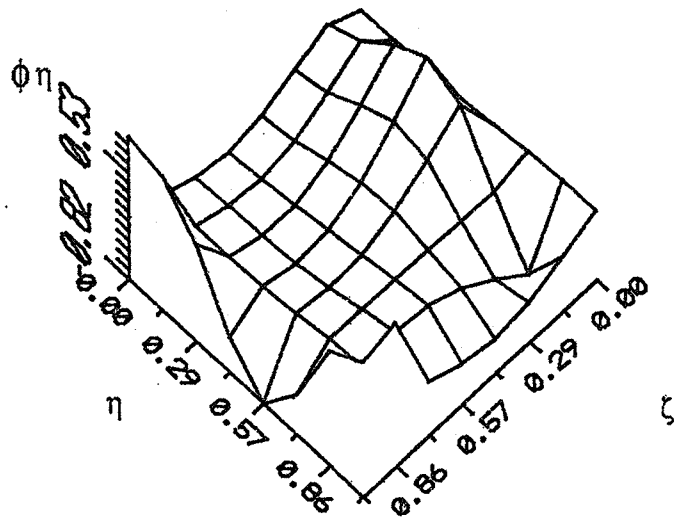
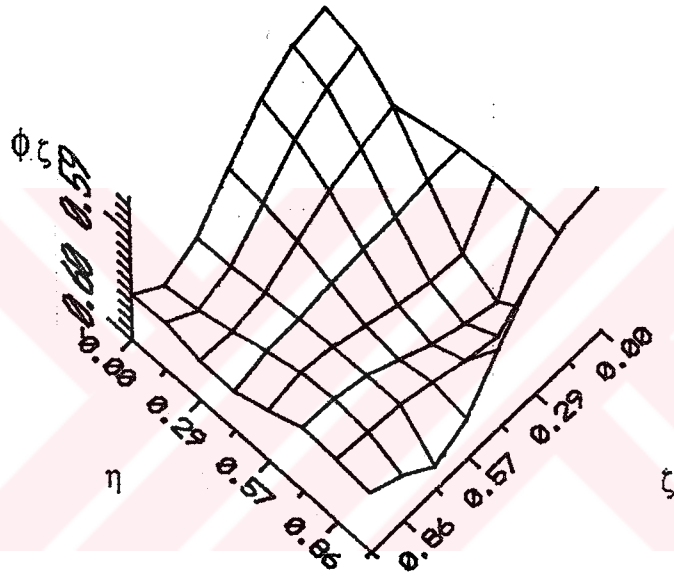
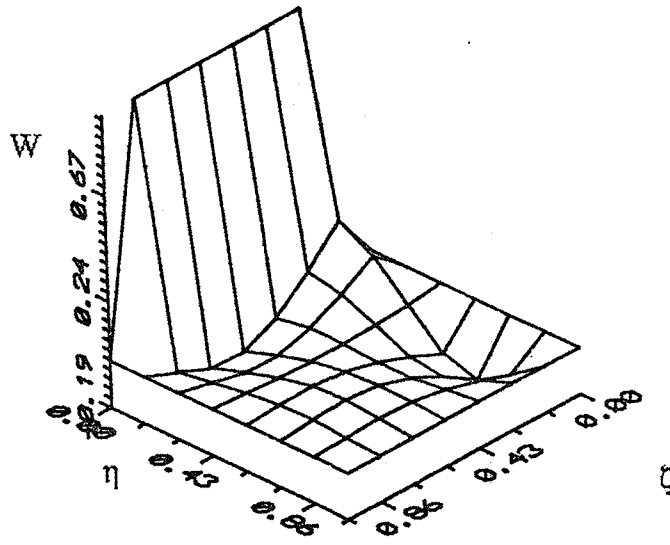
Şekil 7.3.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S)



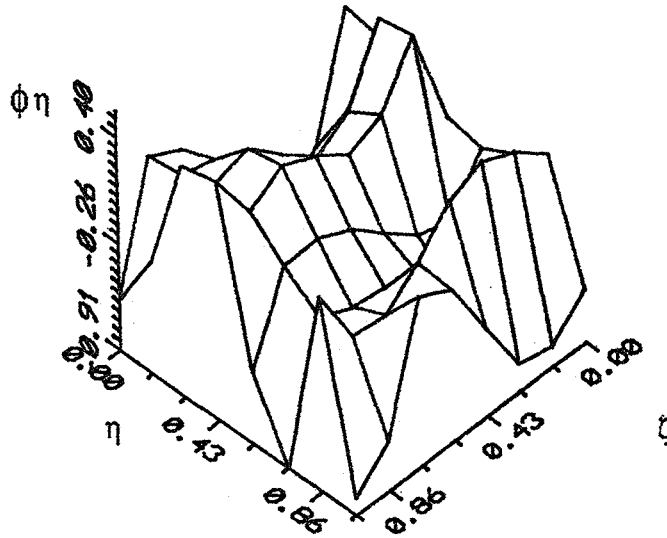
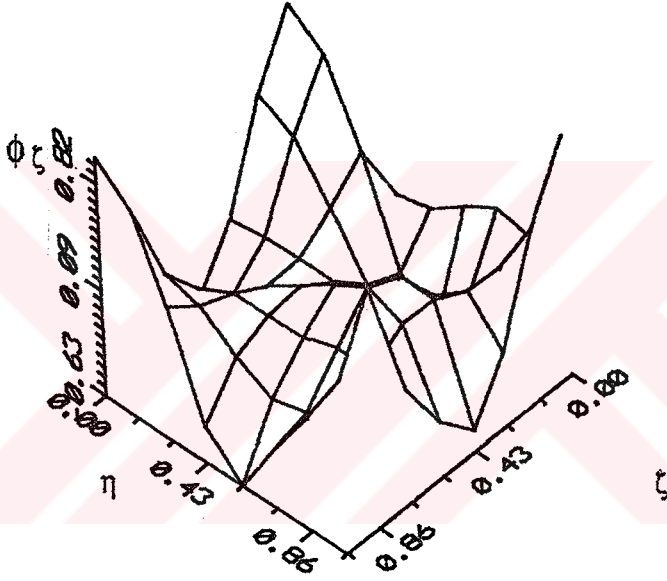
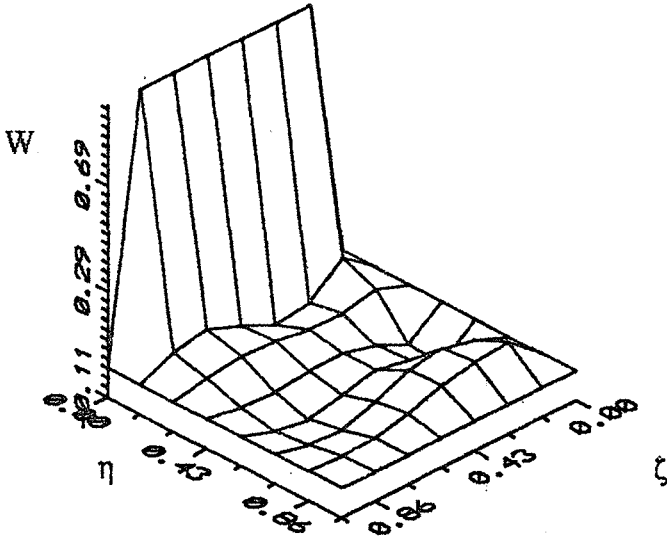
Şekil 7.3.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, B.A.B.S.)



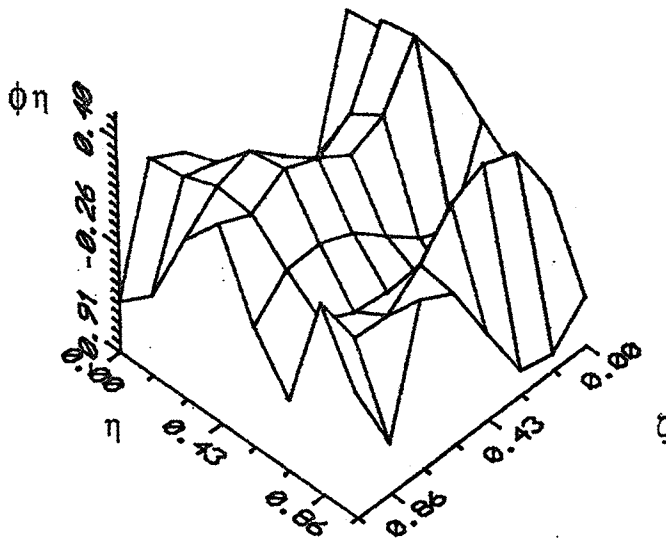
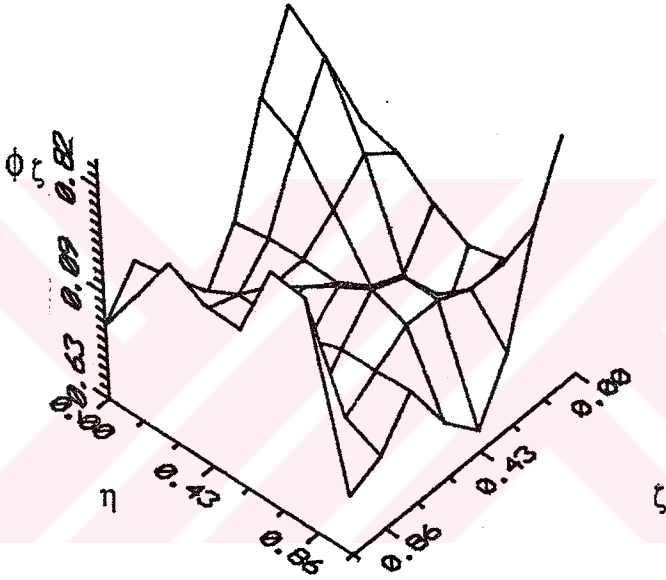
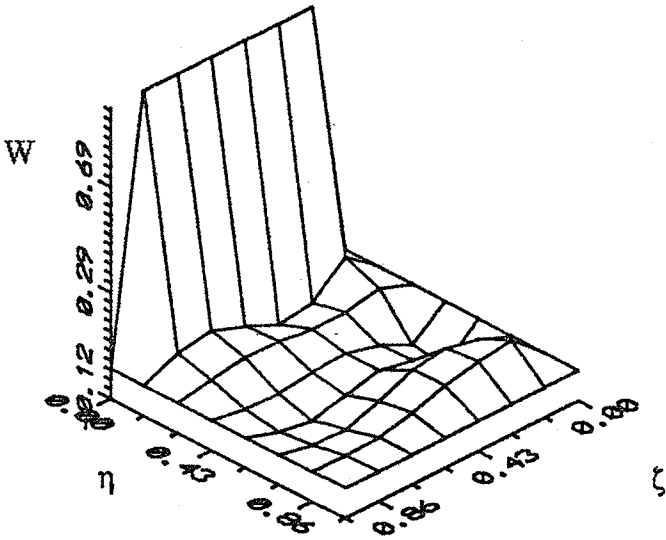
Şekil 7.4.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)



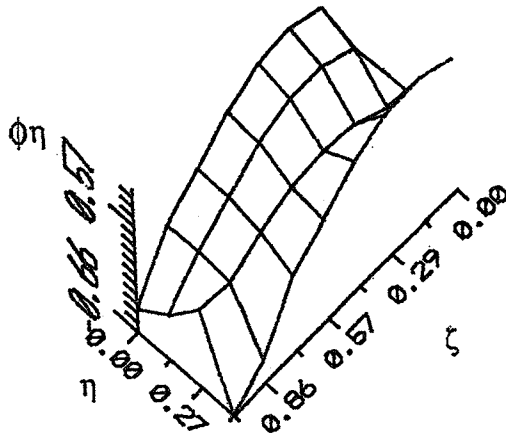
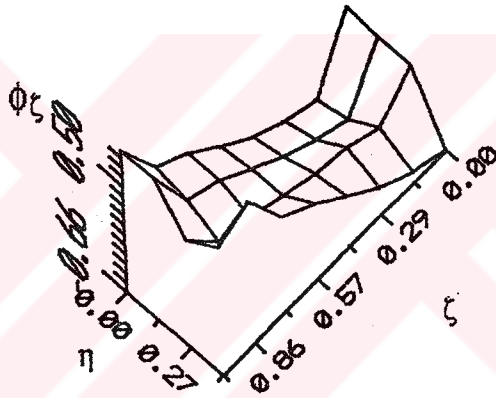
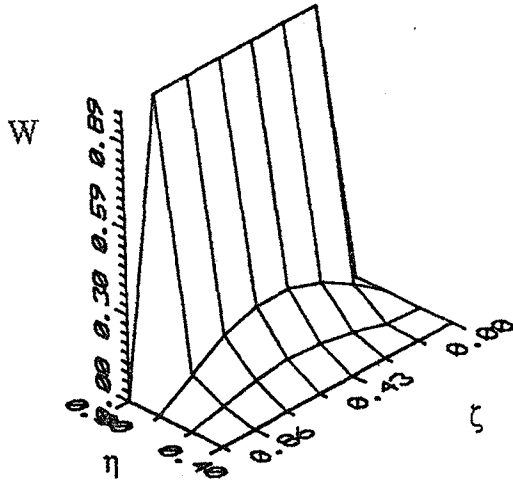
Şekil 7.4.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.S)



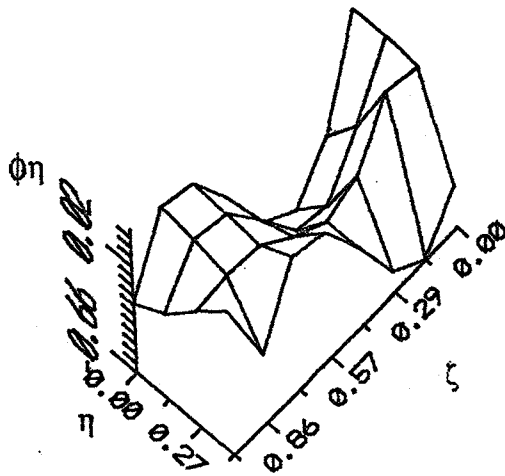
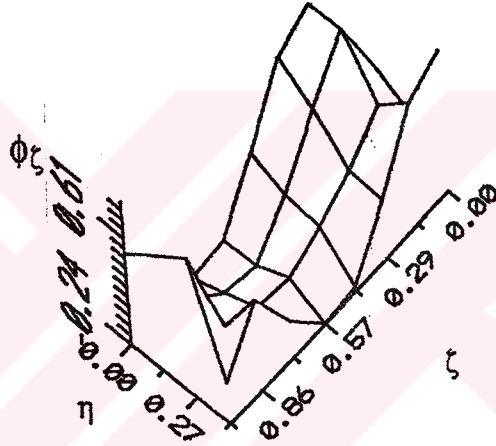
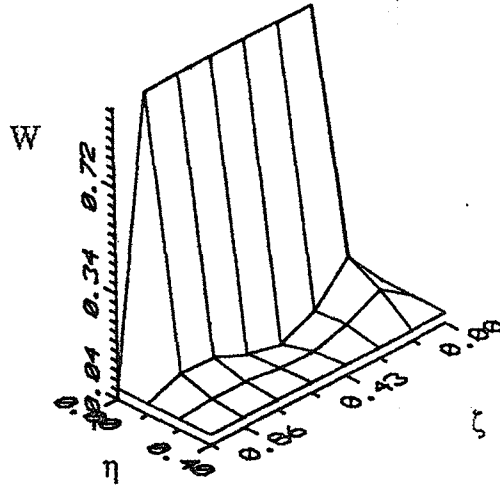
Şekil 7.4.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, AAAS)



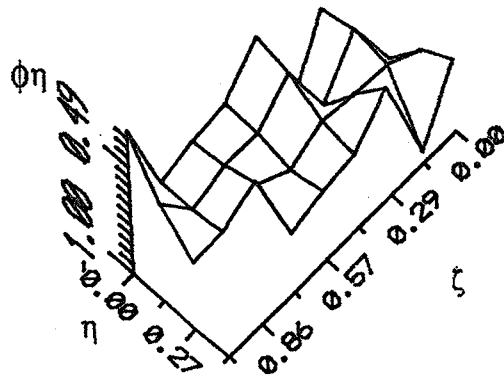
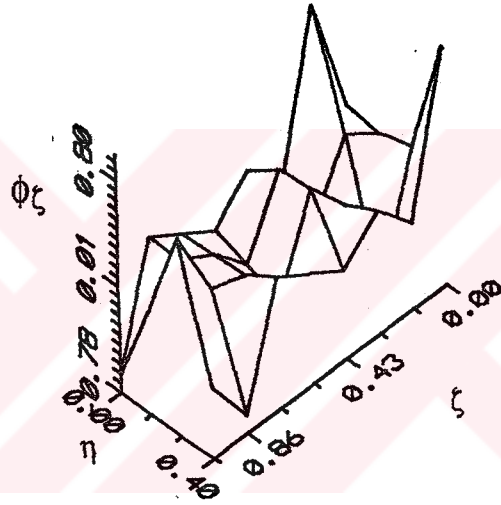
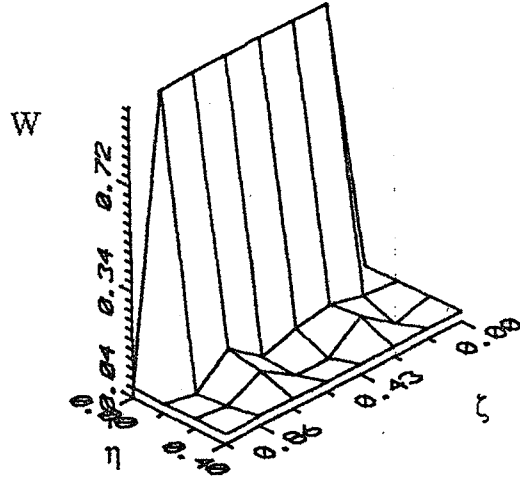
Şekil 7.4.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=1$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.S.)



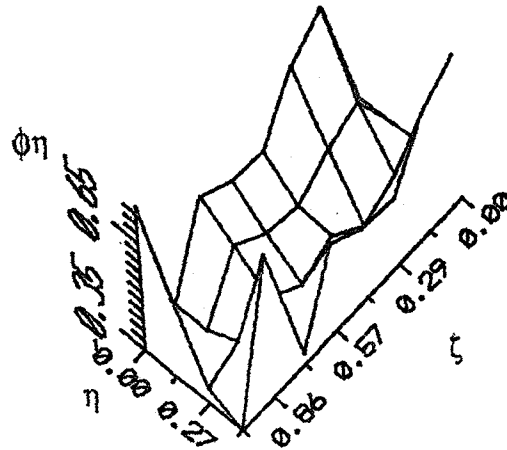
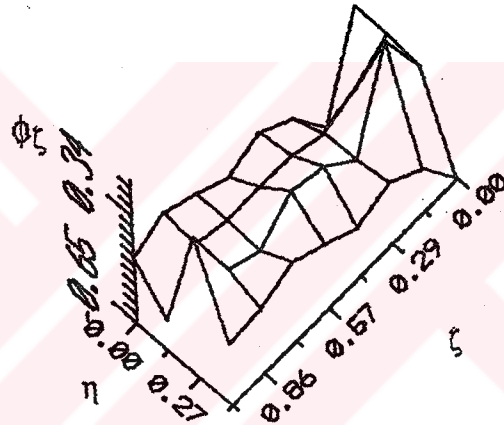
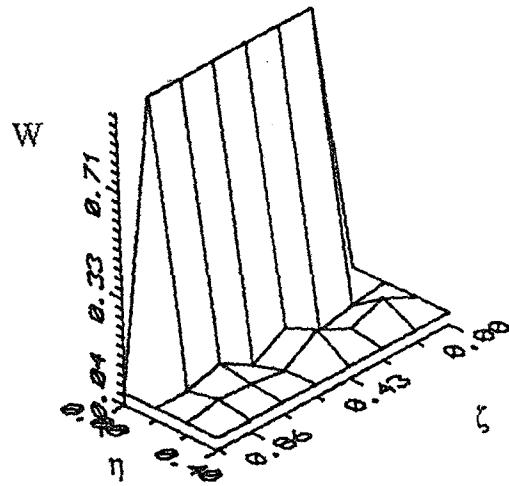
Şekil 7.5.1. Birinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S)



Şekil 7.5.2. İkinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.S)



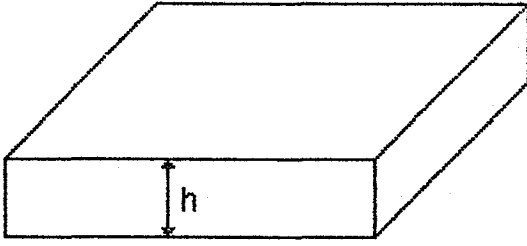
Şekil 7.5.3. Dördüncü mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.S)



Şekil 7.5.4. Beşinci mod biçimleri ($b/a=0.4$, $h_1/h_0=0.5$, A.A.A.S.)

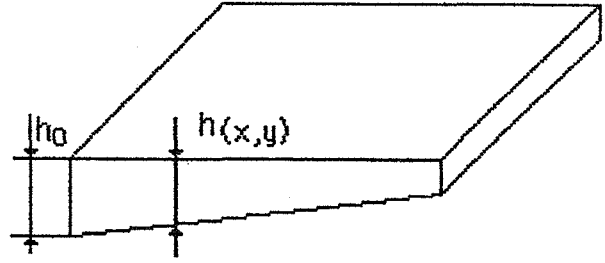
EK-1.1. PLAK KALINLIĞI DEĞİŞİM TIPLERİ

1. Üniform kalınlıklı plak



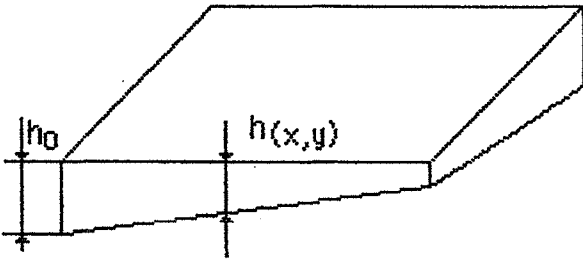
$$h(x,y)=h$$

2. Tek yönde lineer kalınlık değişimli plak



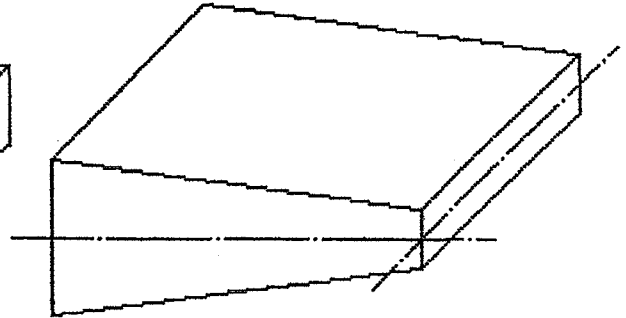
$$h(x,y)=h_0(1-cx)$$

3. İki yönde lineer kalınlık değişimli plak



$$h(x,y)=h_0(1-c_1x)(1-c_2y)$$

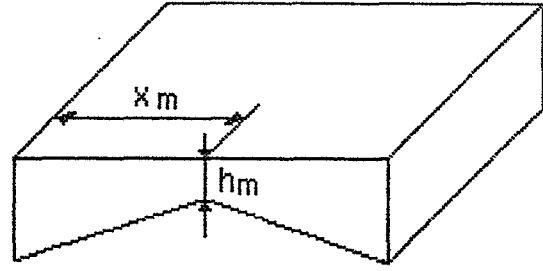
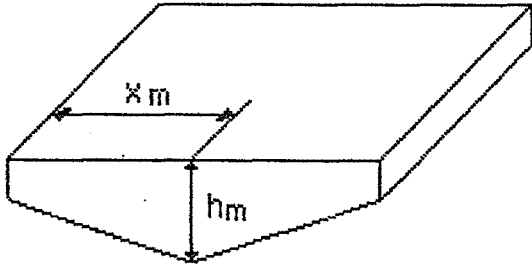
4. Orta yüzeye göre lineer kalınlık değişimli plak



$$h(x,y)=h_0(1-c_1x)$$

EK-1. 2. PLAK KALINLIĞI DEĞİŞİM TIPLERİ

5. Bilineer kalınlık değişimli plaklar



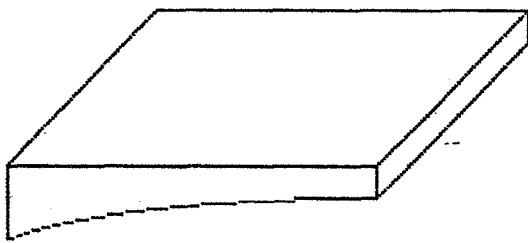
$$h(x,y)=h_0(1+c_1x/a) \quad 0 < x < x_m$$

$$h(x,y)=h_0(1-c_2x/a) \quad x_m < x < a$$

$$h(x,y)=h_0(1-c_1x/a) \quad 0 < x < x_m$$

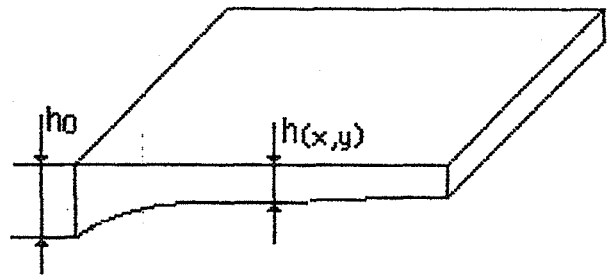
$$h(x,y)=h_0(1+c_2x/a) \quad x_m < x < a$$

6. Parabolik kalınlık değişimli plak



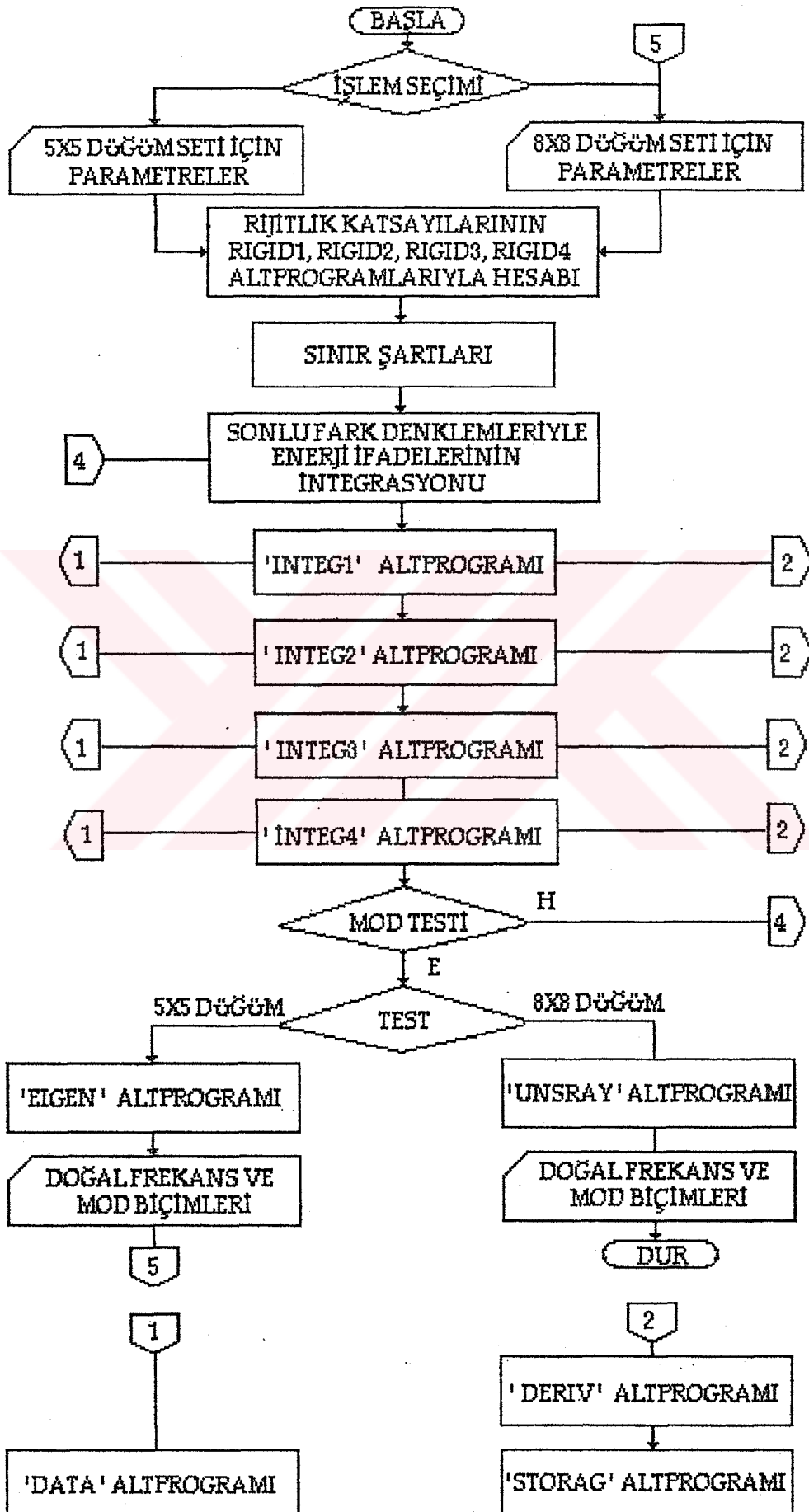
$$h(x,y)=h_0(1-cx^2)$$

7. Üstel kalınlık değişimli plak



$$h(x,y)=h_0e^{-cx}$$

EK-2. AKIŞ DİYAGRAMI



KAYNAKLAR

- AKSU, G., (1976), Determination of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates With Cutouts Using a Finite Difference Formulation, Journal of Sound and Vibration. 44-1, 147-158.
- AKSU, G., AL-KAABI, S.A., (1987), Free Vibration Analysis of Mindlin Plates With Linearly Varying Thickness , Journal of Sound and Vibration. 119-2, 189-205.
- AKSU, G., AL-KAABI, S.A., (1989), Free vibration analysis of Mindlin Plates With Parabolically Varying Thickness ,Computer and Structures, 33, 1417-1421.
- AL-KAABI, S.A., AKSU, G., (1989), Vibration of Mindlin Plates With Linearly Varying in Two Directins ,The Arabian J. for Science and Engineering, 14,1 ,47-60.
- BHAT, R.B., LAURA, P.A.A., GUTIERREZ, R.G., CORTINEZ, V.H., SANZI, H.C., (1990), Numerical Experiments on The Determination of Natural Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non-Uniform Thickness, Journal of Sound and Vibration. 138-2, 205-219.
- BHAT, R.B. and MUNDKUR, G., (1993), Vibration of Plates Using Plate Characteristic Functions Obtained by Reduction of Partial Differential Equation, Journal of Sound and Vibration. 161-2, 157-171.
- CHEHIL, D.S., and DUA, S.S., (1973), Buckling of Rectangular Plates With General Variation in Thickness, Journal of Applied Mechanics. 40-3, 745-751.

- DAWE, D.J., (1978), **Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates**, Journal of Sound and Vibration. 59, 441-452.
- DAWE, D.J., ROUFAEIL, O.L. (1980), **Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of mindlin Plates**, Journal of Sound and Vibration. 69-3, 345-359.
- DOVGANICH, M.I., KOROL, I. Yu., (1978), **Method of Investigating Free Vibration of Rectangular Plates of Variable Thickness**, J.Soviet Applied Mechanics, 14-2, 173-178.
- FILIPICH, C., LAURA, P.A.A., and SANTOS, R.D., (1977), **A Note on The Vibrations of Rectangular Plates of Variable Thickness With Two Opposite Simply Supported Edges and Very General Boundary Conditions on The Other Two**, Journal of Sound and Vibration. 50-3, 445-454.
- GUPTA, U.S., and LAL, R., (1978), **Transverse vibrations of A Non-Uniform Rectangular Plate on An Elastic Foundation**, Journal of Sound and Vibration. 61-1, 127-133.
- GUTIERREZ, R.H., LAURA, P.A.A., and GROSSI, R.O., (1981), **Vibrations of Rectangular Plates of Bilinearly Varying Thickness and With General Boundary Conditions**, Journal of Sound and Vibration. 75-3, 323-328.
J. Soviet appl. Mech. 14, 173-178 .
- JAIN, R.K., SONI, S.R. (1973), **Free Vibration of Rectangular Plates of Parabolic Varying Thickness**, Indian J. Pure appl. Math. 4, 267-277.
Journal of Sound and Vibration 31, 257-293.
- KUTTLER, J.R., and SIGILLITO, V.G., (1983), **Vibrational Frequencies of Clamped Plates of Variable Thickness**, Journal of Sound and Vibration. 86-2, 181-189.

- LAURA, P.A.A. and CORTINEZ, V.H., (1988), Optimization of Kantorovich Method When Solving Eigenvalue Problems, Journal of Sound and Vibration. 122-2, 396-398.
- LAURA, P.A.A., GROSSI, R.O., (1979), An Approximate Strain Energy Expression for Vibrating Rectangular Plates of Variable Thickness , Journal of Sound and Vibration. 66-1, 141-143.
- LAURA, P.A.A., GROSSI, R.O., and CARNEIRO, G.I., (1979), Transverse Vibrations of Rectangular Plates With Thickness Varying in Two Directions and With Edges Elastically Restrained Against Rotations, Journal of Sound and Vibration. 63-4, 499-505.
- LEISSA, A.W., (1969), *Vibration of Plates*, NASA SP-160.
- LEISSA, A.W., (1973), The Free Vibration of Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration. 31-3, 257-293.
- LIU, W.H. AND CHANG, I.B., (1989), Some Studies on Free Vibration of Cantilever Plates with Uniform and Non-Uniform Thickness, Journal of Sound and Vibration. 130-2, 337-341.
- MIKAMI, TAKASHI, and YOSHIMURA, JIN., (1984), Application of The Collocation Method to Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates, Computers and Structures. 18-3,425,431.
- MINDLIN, R.D., (1951), Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates , J. appl. Mech. 18, 31-38.
- NELSON, H.M., (1978), High Frequency Flexural Vibration of Thick Rectangular Bars and Plates, Journal of Sound and Vibration. 60-1, 101-118.

- NG, S.F. and ARAAR, Y., (1989), Free Vibration and Buckling Analysis of Clamped Rectangular Plates of Variable Thickness by The Galerkin Method, Journal of Sound and Vibration. 135-2, 263-274.
- OLSON, M.D., and HAZELL, C.R., (1979), Vibrations of A Square Plate With Parabolically Varying Thickness, Journal of Sound and Vibration. 62-3, 399-410.
- PRASAD, C, JAIN, R.K. and SONI, S.R., (1972), Effect of Transverse Shear and Rotary Inertia on Vibrations of An Infinite Strip of Variable Thickness ,J. phys. Soc. Japan 33, 1156-1159.
- SONI, S.R. and SANKARA RAO, K., (1974), Vibrations of Non-Uniform Rectangular Plates: A Spline Technique Method of Solution, Journal of Sound and Vibration. 35-1, 35-45.
- SONZOGNI, V.E., IDELSOHN, S.R., (1990), Free Vibrations of Rectangular Plates of Exponentially Varying Thickness and With A Free Edge, Journal of Sound and Vibration. 140-3,513-522.
- TUTAK, B., (1994), Free vibration Analysis of Mindlin Plates with Exponentially Varying Thickness, Fifth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics. 1, 215-224