T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Ayhan ESİ 

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ

1995

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ

BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL

YAKINSAKLIK

Ayhan ESİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, .......................... Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

______________ ______________ ______________

Danışman
Prof.Dr. Rıfat ÇOLAK

# ÖZET

Doktora Tezi

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK

Ayhan ESİ

Fırat Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

1995, Sayfa:60

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk bölüm daha sonraki bölümlerde kullanılan ve bilinen temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümler çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. İkinci bölümde modülüs fonksiyonu yardımı ile tanımlanmış bazı dizi uzayları verilip, $A=(a_{nk})$ pozitif terimli bir matris ve bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni $[w_0(A,p,f,s)]$ , $[w(A,p,f,s)]$ ve $[w_\infty(A,p,f,s)]$ dizi uzayları tanımlanmış ve özel halde elde edilen $L[p,f,s]$ dizi uzayı ile birlikte çeşitli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra $v \in \mathbf{N}$ olmak üzere $[w(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayı tanımlanıp, $v,u \in \mathbf{N}$ 'nin durumlarına göre elde edilen $[w(A,p,s)]$, $[w(A,p,f^u,s)]$ ile $[w(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayları arasında bazı kapsam bağıntıları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde $A=(a_{nk})=(C,1)$ Cesaro matrisi, s=0 ve her k için $p_k=1$ alınarak $[w_0(A,p,f,s]$ , $[w(A,p,f,s]$ ve $[w_\infty(A,p,f,s]$ dizi uzayları $[w_0,f]$, $[w,f]$ ve $[w,f]_\infty$ dizi uzaylarına indirgenmiş ve ikinci bölümdeki bazı teoremler bu dizi uzaylarında sonuçlar şeklinde verilmiştir.

Dördüncü bölümde $\overline{S}$-istatistiksel yakınsak dizi kavramı verilip, bu tanımdan hareketle $[w,f]$-yakınsak diziler uzayı ve $[w_p]$-yakınsak diziler uzayı arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dizi uzayı, paranorm, modülüs fonksiyonu, istatistiksel yakınsaklık

## SUMMARY

PhD Thesis

SOME NEW SEQUENCE SPACES DEFINED BY A MODULUS FUNCTION AND STATISTICAL CONVERGENCE

Ayhan ESİ

Fırat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

1995, Page:60

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems which will be used in the sequel of the thesis are given.

Second, third and fourth chapters are the original parts of this study. In the second chapter, we present some well-known sequence spaces which are defined by a modulus function and define some new sequence spaces which will be denoted by $[w_0(A,p,f,s)]$, $[w(A,p,f,s)]$ and $[w_\infty(A,p,f,s)]$, where $A=(a_{nk})$ is a matrix having positive entries and f is a modulus function. The various properties of these spaces and space $L[p,f,s]$ obtained in a special case, are investigated. Furthermore, defining the sequence space $[w(A,p,f^v,s)]$, where $v\in\mathbf{N}$, some inclusion relations are given between the sequence spaces $[w(A,p,f^v,s)]$ and $[w(A,p,f^u,s)]$, where $u,v\in\mathbf{N}$.

In the third chapter, we reduce the sequence spaces defined in the second chapter to $[w,f]_0$, $[w,f]$ and $[w,f]_\infty$ by taking a Cesaro matrix $A=(a_{nk})=(C,1)$, $s=0$ and $p_k=1$ for each k and also some results are expressed.

In the fourth chapter, S-Istatistical convergence concept is given, using these aspects, the relations between $[w,f]$-convergent and $[w_p]$-convergent sequence spaces are given.

KEY WORDS: Sequence space, paranorm, modulus function, statistical convergence

# TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Prof.Dr. Rıfat ÇOLAK'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca; bu çalışma boyunca her türlü desteği esirgemeyen Bölüm Başkanımız Sayın Hocam Prof.Dr.Salih ÖZÇELİK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayhan ESİ

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| **N** | : Doğal sayılar cümlesi |
| **R** | : Reel sayılar cümlesi |
| **C** | : Kompleks sayılar cümlesi |
| $l_\infty$ | : Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı |
| c | : Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı |
| **s** | : Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı |
| $\Phi$ | : Sıfırdan farklı terimleri sonlu olan kompleks yada reel terimli diziler uzayı |
| $\in$ | : Eleman |
| $\forall$ | : Her |
| $\lvert t \rvert$ | : t' nin mutlak değeri |
| $\exists$ | : Enaz bir |
| $\sum_k$ | : $\sum_{k=1}^{\infty}$ |
| $\sum_{k>t}$ | : $\sum_{k=t+1}^{\infty}$ |

# BİRİNCİ BÖLÜM

## 1.1. GİRİŞ

Kompleks sayıların tüm sonsuz dizilerinin s uzayı üzerinde $l$, $l_p$, $l(p)$ ve $l(p,s)$ dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzaylar üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Son zamanlarda modülüs fonksiyonu kullanılarak bu uzaylar üzerinde yeni çalışmalar yapılmaktadır. Şöyleki; Modülüs fonksiyonunun tanımı Nakano (1953) tarafından verildi ve Ruckle (1973), A. Wilansky'nin "$\{e_1, e_2, ...\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır?" sorusuna cevap ararken L(f) dizi uzayını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımladı. Maddox (1986) kuvvetli Cesaro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan, modülüse göre kuvvetli Cesaro toplanabilen dizilerin sınıfını w(f) olarak tanımladı.Connor (1989), Maddox' un (1986) tanımını Cesaro matrisi yerine herhangi negatif olmayan bir regüler matris toplanabilme metodu olarak w(A,f) toplanabilme metoduna genelleştirdi.

Biz bu çalışmamızda $A=(a_{nk})$ pozitif terimli bir matris, $p=(p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi, $s\geq 0$, $s\in\mathbf{R}$ ve f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $[w_0(A,p,f,s)]$, $[w(A,p,f,s)]$, $[w_\infty(A,p,f,s)]$ ve $L[p,f,s]$ yeni dizi uzayları ile, bu uzayların bazı özelliklerini inceledikten sonra $v\in\mathbf{N}$ olmak üzere $[w_0(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayı tanımlanıp bu uzay üzerinde bazı bağıntıları verdik. Daha sonra A matrisini Cesaro matrisi, s=0 ve her k için $p_k=1$ alarak $[w_0,f]$, $[w,f]$ ve $[w,f]_\infty$ dizi uzayları elde edilip, bu uzayların sağladıkları bazı özellikleri sonuçlar şeklinde verdik. Daha sonra $\overline{S}$-istatistiksel yakınsak dizi kavramını tanımlayarak, buradan hareketle [w,f]-yakınsak diziler uzayı ve $[w_p]$-yakınsak diziler uzayı arasındaki bazı kapsam bağıntılarını verdik.

## 1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamız boyunca kullanacağımız, bilinen temel tanım ve teoremleri vereceğiz

**Tanım 1.2.1.** X boş olmayan bir cümle ve **K** kompleks yada reel sayıların bir cismi olsun.

$+ : X \times X \rightarrow X$
$. : \mathbf{K} \times X \rightarrow X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine **K** cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

$\forall \lambda,\mu \in \mathbf{K}$ ve $x,y,z \in X$ için
L1) $x+y=y+x$
L2) $(x+y)+z=x+(y+z)$
L3) $x+\theta=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
L4) $\forall x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
L5) $1.x=x$
L6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
L7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
L8) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

**Tanım 1.2.2.** X, **K** cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X 'in boş olmayan bir altcümlesi olsun. Eğer $\forall \lambda,\mu \in \mathbf{K}$ ve $x,y \in X$ için, $\lambda x+\mu y \in X$ oluyorsa, Y' ye X' in lineer altuzayı denir.

**Tanım 1.2.3.** Bir T topolojisine sahip X lineer uzayında toplama, $+ : X \times X \rightarrow X$ ve skaler ile çarpma, $. : \mathbf{K} \times X \rightarrow X$ işlemleri sürekli ise bu X uzayına lineer topolojik uzay adı verilir.

**Tanım 1.2.4.** X, **K** cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g:X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, g' ye bir paranorm,

$(X,g)$' ye de paranormlu uzay denir

$\forall \lambda \in \mathbf{K}$ ve $x,y \in X$ için

(i) $g(\theta)=0$
(ii) $g(x)=g(-x)$
(iii) $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$
(iv) $\lambda \to \lambda_0$ ve $g(x-x_0) \to 0$ iken $g(\lambda x-\lambda x_0) \to 0$

( Burada $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ ve $x_0 \in X$ dır.)

**Tanım 1.2.5.** Bir $(X,g)$ paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa $(X,g)$ uzayına tam paranormlu uzay denir.

**Tanım 1.2.6.** Kompleks terimli tüm $x=(x_k)$, $(k=1,2,3,...)$ dizilerinin cümlesini $\mathbf{s}$ ile göstereceğiz. $\mathbf{s}$, $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in \mathbf{s}$ ve $\alpha\in \mathbf{C}$ herhangi bir sabit olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k) \quad \text{ve} \quad \alpha x=(\alpha.x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

**Tanım 1.2.7.** $X$ , $\mathbf{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $X$' den $\mathbf{K}$' ya olan bir $f$ dönüşümü $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{K}$ ve $x,y \in X$ için

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

özelliğini sağlıyorsa $f$' ye $X$ üzerinde bir lineer fonksiyonel denir.Eğer,

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$$
ve
$$f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

birlikte sağlanıyorsa $f$' ye alt lineer fonksiyonel adı verilir.

**Teorem 1.2.1. (Hanh-Banach Teoremi):** q, X lineer uzayında her $x \in X$ için tanımlı bir alt lineer fonksiyonel ise her $x \in X$ için $f(x) \leq q(x)$ olacak şekilde X'de tanımlı bir f lineer fonksiyoneli vardır. Ayrıca X' deki her x için $q(-x) = -q(x)$ ise f fonksiyoneli, $x_0 \in X$ olmak ve a, $0 \leq a \leq q(x_0)$, $q(x_0) > 0$ koşulunu gerçekleyen bir sayı olmak üzere $f(x_0)=a$ olacak şekilde seçilebilir.

Hanh-Banach Teoreminin reel değerli bütün sınırlı dizilerin $l_\infty$ lineer uzayına uygulanması, Banach limiti kavramının doğmasına yol açmıştır ve Banach limitleri ilk olarak Banach (1932) tarafından verilmiştir.

**Tanım 1.2.8.** Bir $L : l_\infty \to \mathbf{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, L' ye bir Banach limiti denir:

(B1) $n=0,1,2,...$ için $x_n \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$ ,
(B2) $L(x)=L(Dx)$, burada $Dx=D(\{x_n\})=\{x_{n+1}\}$,
(B3) $L(e)=1$, $e=(1,1,1,...)$.

**Tanım 1.2.9.** Sınırlı bir $(x_n)$ dizisi verildiğinde eğer her L Banach limiti için $L(x_n)=s$ oluyorsa $(x_n)$ dizisine hemen hemen yakınsak dizi denir ve $s=\lim x_n$ sayısına bu dizinin f-limiti adı verilir.

Hemen hemen yakınsak bir diziyi karakterize edecek bir özellik C.G.Lorentz (1948) tarafından aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

**Teorem 1.2.2.** Bir $(x_n)$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty} t_{km}(x) = \lim_{k\to\infty} k^{-1}(x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_{m+k-1}) = s$$

olmasıdır.

Daha sonraları bu limit kavramı kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramına genellestirildi ve Maddox, [ f ] ile gösterilen bu yakınsaklığı şoyle tanımladı:

**Tanım 1.2.10.** Bir $(x_n)$ dizisinin bir s sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty} t_{km}(|x-s|)=\lim_{k\to\infty} k^{-1}\sum_{i=1}^{k}|x_{i+m}-s|=0$$

olmasıdır.

Bütün bunlardan sonra $l_\infty$ bütün sınırlı $x=(x_n)$ dizilerinin uzayı olmak üzere $[f]\subset f\subset l_\infty$ içermesini yazabiliriz.

**Tanım 1.2.11.** **s** kompleks (ya da reel) terimli dizilerin uzayı ve E, **s**' nin herhangi bir lineer altuzayı olsun. Bu takdirde E' nin çarpım uzayı

$$M[E] = \{ a\in \mathbf{s} : a.x\in E, \text{ her } x\in E \text{ için}\}$$

olarak tanımlanır. (Maddox,1986).

**Tanım 1.2.12.** **s** kompleks ya da reel terimli dizilerin uzayı ve E' de **s**' nin bir lineer altuzayı olsun. Bu takdirde E' nin $\alpha$ ve $\beta$ dualleri sırasıyla

$$E^{\alpha}=\left\{a\in \mathbf{s}:\ \sum_k |a_k.x_k|<\infty,\text{ her } x\in E \text{ için}\right\}$$

$$E^{\beta}=\left\{a\in s:\ \sum_k a_k.x_k \text{ yakınsak, her } x\in E \text{ için}\right\}$$

olarak tanımlanır. (Maddox 1970).

**s** kompleks terimli bütün dizilerin uzayını göstermek üzere, X ve Y **s**' nin iki gerçek altuzayı ve $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,...)$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x=(x_k)\in X$ dizisi için $A_n(x)=\Sigma_k a_{nk}x_k$ her n için yakınsak ve $Ax=(A_n(x))\in Y$ ise $A=(a_{nk})$ matrisine X' den Y' ye bir matris dönüşümü tanımlıyor denir ve bu $A\in(X,Y)$ ile gösterilir.

**Tanım 1.2.13.** Yakınsak bir diziyi limiti koruyarak yakınsak bir diziye dönüştüren bir A matrisine regüler matris denir.

**Tanım 1.2.14.** Bir $A=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşullar:

(i) Her k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=1$

(iii) $\sup_n \sum_k |a_{nk}|<\infty$

olmasıdır.

**Tanım 1.2.15.** Kısmi toplamlar dizisi $(s_n)$ olan bir $\Sigma a_k$ serisi verilmiş olsun. $\Sigma a_k$ serisinin veya $(s_n)$ dizisinin

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olmak üzere $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla elde edilen $(t_n)$ dönüşüm dizisi,

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesaro ortalaması veya kısaca (C,1) ortalaması denir. Bu ortalama regülerdir.

Aşağıdaki eşitsizlikler, çalışmamızda sık sık kullanılacaktır.

**Eşitsizlik 1.** Her k için $p_k > 0$ ve $H=\sup_k p_k$, $a_k, b_k \in \mathbf{C}$ olsun. Bu taktirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \le C\left[ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right]$$

$$C = \max(1, 2^{H-1})$$

dir.

**Eşitsizlik 2.** $a_k$, $b_k \ge 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere

**a)** $0 < p_k \le 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k} \le \sum_{k=1}^{n} a_k^{\,p_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k^{\,p_k}$$

**b)** $p_k \geq 1$ ise

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p_k}\right\}^{1/p_k} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ p_k}\right\}^{1/p_k} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ p_k}\right\}^{1/p_k}$$

**Lemma 1.2.1.** Herhangi iki f ve g modülüs fonksiyonu için

**a)** fog, $f^v$, v=1,2,3,... ( Burada $f^v$=fofofo...of (f'nin v defa bileşkesi) şeklindedir), a ≥ 0 için a.f, f/1+f, f+g fonskiyonları birer modülüs fonksiyonudur.

**b)** $f^{-1}$ , f.g , f/g ve f-g fonksiyonları birer modülüs fonksiyonu olmak zorunda değildir. Bunu görmek için $f(x)=x^{1/2}$ ve g(x)=x modülüs fonksiyonlarını almak yeterlidir.

**Lemma 1.2.2.** f bir modülüs fonksiyonu ve $0< \delta <1$ olsun. Bu taktirde $v \in \mathbf{N}$ ve $t \in [0,\infty)$ için

$$f^{v-1}(t) > \delta \quad \text{ise} \quad f^{v}(t) \leq \frac{2.f(1)}{\delta}\,[f^{v-1}(t)]$$

olur. Burada $f^0$=I özdeşlik dönüşümüdür.

**Lemma 1.2.3.** H(n) n' ye bağlı bir önerme olsun. Eğer H(n) önermesi n=1 için doğru ise ve önermenin n için doğruluğu kabul edildiğinde n + 1 için de doğruluğu ispatlanabiliyorsa, H(n) önermesi her n doğal sayısı için doğrudur.

## İKİNCİ BÖLÜM

### 2.1.f Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Dizi Uzayları.

Modülüs fonksiyonu tanımı ilk kez Nakano (1953) tarafından verilmiştir. Ruckle (1973), f modülüs fonksiyonu yardımıyla

$$l = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k| < +\infty \right\}$$

dizi uzayını

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k f(|x_k|) < +\infty \right\}$$

dizi uzayına genelleştirerek bu dizi uzayının çeşitli özelliklerini incelemiştir. Daha sonraları, f modülüs fonksiyonunu kullanarak sırasıyla, Maddox (1986), kuvvetli toplanabilen dizilerin

$$w_0 = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \to 0 , ( n \to \infty ) \right\},$$

$$w = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| \to 0 , ( n \to \infty ) \right\},$$

$$w_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| < +\infty \right\}$$

uzaylarını

$$w_0(f)=\left\{x=(x_k):\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(|x_k|\right)\rightarrow 0,\ (n\rightarrow\infty)\right\},$$

$$w(f)=\left\{x=(x_k):\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(|x_k-L|\right)\rightarrow 0,\ (n\rightarrow\infty)\right\},$$

$$w_\infty(f)=\left\{x=(x_k):\sup_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(|x_k|\right)<+\infty\right\}$$

uzaylarına; Connor (1989), A matrisini non-negatif reel regüler bir matris alarak kuvvetli A-toplanabilen dizilerin

$$w_0(A)=\left\{x=(x_k):\lim_n\sum_k a_{nk}\left(|x_k|\right)=0\right\},$$

$$w(A)=\left\{x=(x_k):\text{En az bir } L \text{ için } x-Le\in w_0(A)\right\},$$

uzaylarını

$$w_0(A,f)=\left\{x=(x_k):\ \lim_n\sum_k a_{nk}\, f\left(|x_k|\right)=0\right\},$$

$$w(A,f)=\left\{x=(x_k):\ \text{En az bir } L \text{ için } x-Le\in w_0(A,f)\right\}$$

uzaylarına ve son olarak Pehlivan (1990), kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin

$$[F]_0=\left\{x=(x_k): \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_{k+m}\right| \to 0,\ (n\to\infty),\ m' \text{ye göre düzgün}\right\}$$

$$[F]=\left\{x=(x_k): \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_{k+m}-L\right| \to 0,\ (n\to\infty),\ m' \text{ye göre düzgün}\right\},$$

$$[F]_\infty=\left\{x=(x_k): \sup_{n,m}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_{k+m}\right| < +\infty\right\}.$$

uzaylarını

$$[F(f)]_0=\left\{x=(x_k): \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\left|x_{k+m}\right|\right) \to 0,\ (n\to\infty),\ m' \text{ye göre düzgün}\right\},$$

$$[F(f)]=\left\{x=(x_k): \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\left|x_{k+m}-L\right|\right) \to 0,\ (n\to\infty),\ m' \text{ye göre düzgün}\right\},$$

$$[F(f)]_\infty=\left\{x=(x_k): \sup_{n,m}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\left|x_{k+m}\right|\right) < +\infty\right\}$$

uzaylarına genelleştirdiler ve bu uzayların çeşitli özelliklerini incelediler.

Biz ise bu bölümde $A=(a_{nk})$ pozitif terimli bir matris, $p=(p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi, $s\geq 0$, $s\in\mathbf{R}$ ve f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $[w_0(A,p,f,s)]$ , $[w(A,p,f,s)]$ ve $[w_\infty(A,p,f,s)]$ yeni dizi uzaylarını elde edip, bu uzayların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Özel olarak $[w_\infty(A,p,f,s)]$ dizi uzayında her n,k için $a_{nk}=1$ alarak $L[p,f,s]$ dizi uzayını elde edip, bu uzayın bazı özelliklerini inceledikten sonra $v\in\mathbf{N}$ olmak üzere $[w_0(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayını ve $u,v\in\mathbf{N}$ olmak üzere $[w_0(A,p,f^u,s)]$ , $[w_0(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayları arasındaki bağıntıları inceleyeceğiz.

## 2.2. Bazı Yeni Dizi Uzayları

f modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni dizi uzaylarını tanımlamadan önce modülüs fonksiyonu tanımını verelim.

**Tanım 2.2.1.** (Ruckle, 1973). $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f' ye bir modülüs fonksiyonu denir:

(i) $f(x)=0$ olması için gerek ve yeter şart $x=0$ olmasıdır,
(ii) Her $x,y \geq 0$ için $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ ,
(iii) f artandır,
(iv) f, 0' da sağdan süreklidir.

(ii)' den $|f(x)-f(y)|\leq f(x-y)$ ve (iv)' den f' nin $[0, \infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğu çıkar. Modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Çalışma boyunca $p=(p_k)$ dizisini $\forall k$ için $0< p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olarak alacağız.

Şimdi yeni dizi uzaylarını tanımlayabiliriz.

**Tanım 2.2.2.** f bir modülüs fonksiyonu ve $A=(a_{nk})$ pozitif terimli bir matrıs olsun.

$$[w_0(A,p,f,s)]=\left\{x:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}=0\ \ s\geq 0,\ m\text{'ye göre düzgün}\right\},$$

$$[w(A,p,f,s)]=\left\{x:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}=0\ \ s\geq 0,\ m\text{'ye göre düzgün}\right\},$$

$$[w_\infty(A,p,f,s)]=\left\{x:\ \sup_{n,m}\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

şeklinde tanımlayalım.Eğer $x-Le \in [w_0(A,p,f,s)]$ ise $x$ dizisi $L$ ye $[w(A,p,f,s)]$ toplanabilirdir diyeceğiz ve $x_k \to L\ [w(A,p,f,s)]$ ile göstereceğiz. Burada $e=(1,1,1,\ldots)$ dir. $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayında özel olarak $f(x)=x$ modülüs fonksiyonunu seçersek

$$[w(A,p,s)]=\left\{x:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[\left|t_{km}(x-Le)\right|\right]^{p_k}=0\ \ s\geq 0,\ m\text{'ye göre düzgün}\right\}$$

dizi uzayını elde ederiz.

**Teorem 2.2.1.** $f$ herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $A=(a_{nk})$ regüler bir matris olsun. Bu takdirde

$$[w_0(A,p,f,s)]\subset[w(A,p,f,s)]\subset[w_\infty(A,p,f,s)]$$

dir.

**İspat:** $[w_0(A,p,f,s)] \subset [w(A,p,f,s)]$ kapsaması açıktır. Burada sadece $[w(A,p,f,s)] \subset [w_\infty(A,p,f,s)]$ olduğunu göstereceğiz. $x \in [w(A,p,f,s)]$ olsun f' nın alttoplamsallığı ve Eşitsizlik 1.' den

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x) - L + L\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq C \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} + C \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|L\right|\right)\right]^{p_k}$$

yazılabilir. $|L| \leq M$ olacak şekilde bir M tamsayısı bulunabilir. Buradan

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} \leq C \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$+ C\left[M.f(1)\right]^H \sum_k a_{nk} k^{-s}$$

elde edilir. A' nın regülerliği ve $x \in [w(A,p,f,s)]$ olmasından

$$\sup_{m,n} \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Böylece istenen elde edilir.

**Teorem 2.2.2.** $[w_0(A,p,f,s)]$, $[w(A,p,f,s)]$ ve $[w_\infty(A,p,f,s)]$ dizi uzayları **C** üzerinde birer lineer uzaydır.

**İspat:** Sadece $[w_0(A,p,f,s)]$ dizi uzayının **C** üzerinde bir lineer uzay olduğunu göstereceğiz. Diğer iki uzayın **C** üzerinde lineer uzay oldukları benzer şekilde gösterilebilir.

$\forall$ n,k için $a_{nk}$ pozitif terimli olduğundan $\lambda, \mu$ skalerleri ve $\forall$ n,k,m ve $x,y \in [w_0(A,p,f,s)]$ için

$$a_{nk}k^{-s}\left\{f\left(\left|t_{km}(\lambda x+\mu y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$\leq a_{nk}k^{-s}\left\{f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|+\left|t_{km}(\mu y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$\leq a_{nk}k^{-s}\left\{f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|\right)+f\left(\left|t_{km}(\mu y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$= a_{nk}k^{-s}\left\{f\left(|\lambda|\left|t_{km}(x)\right|\right)+f\left(|\mu|\left|t_{km}(y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$\leq a_{nk}k^{-s}\left\{T.f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)+K.f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right\}^{p_k} \qquad (2.2.2)$$

olur. Burada T, K; $|\lambda| \leq T$ ve $|\mu| \leq K$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır.Ayrıca Eşitsizlik 1.'den

$$a_{nk}k^{-s}\left\{T.f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)+K.f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$\leq a_{nk}k^{-s}.C\left\{\left[T.f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}+\left[K.f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}$$

olacaktır. Bu ve (2.2.2) eşitsizliğinden

$$a_{nk}k^{-s}\left\{f\left(\left|t_{km}(\lambda x+\mu y)\right|\right)\right\}^{p_k}$$

$$\leq a_{nk}k^{-s}\left\{C.T^{H}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}+C.K^{H}\left[f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}$$

olur. $C.T^H$ ve $C.K^H$ ifadeleri sabit ve $x,y \in [w_0(A,p,f,s)]$ bulunduğundan, bu son eşitsizlikte $k=1$ den $\infty$' a kadar toplam alınır ve daha sonra $n \to \infty$ için limite geçilirse, $\lambda x+\mu y \in [w_0(A,p,f,s)]$ olduğu görülür.

**Teorem 2.2.3.** $[w_0(A,p,f,s)]$ ve $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayları, $A=(a_{nk})$ regüler bir matris ve $M=\max(1,H)$ olmak üzere

$$G(x)=\sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

ile bir paranormlu uzaydır.

**İspat.** $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayı için ispat yapacağız. $[w_0(A,p,f,s)]$ dizi uzayı için de benzer şekilde yapılabilir.

$G: [w(A,p,f,s)] \to \mathbf{R}$ nin aşağıdaki şartları sağladığını göstermek yeterlidir. Teorem 2.2.1. den her $x \in [w(A,p,f,s)]$ için $G(x) \in \mathbf{R}$ dir. Şimdi $f$ modulus fonksiyonunun özelliklerini dikkate alarak şartlara bakalım.

$$G(\theta)=\sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(\theta)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$= \sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(|0|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$=0\,,$$

$$G(-x) = \sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(-x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$= \sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(|-1|\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$= \sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$=G(x)\,,$$

Şimdi Eşitsizlik 2. (a) ve (b) den her $n,m \in \mathbf{N}$ için

$$\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x+y)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} + \left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

ifadesi gerekli işlemler neticesinde elde edilir. Burada n,m üzerinden supremum alınırsa $G(x+y) \leq G(x) + G(y)$ olduğu görülür.

Şimdi skalarla çarpımın sürekliliğine bakalım.
$x \to \theta$, $\lambda$ sabit hali için $G(\lambda x) \to 0$ ve $x \to \theta$, $\lambda \to 0$ hali için $G(\lambda x) \to 0$ olduğunu görmek kolaydır. $\lambda \to 0$ , x sabit hali için $G(\lambda x) \to 0$ olduğunu gösterelim.

$x \in [w(A,p,f,s)]$ olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için m'ye göre düzgün olarak

$$S_{m,n} = \sum_k a_{nk} k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(x - Le) \right| \right) \right]^{p_k} \to 0$$

olur. $|\lambda| < 1$ için

$$\left\{ \sum_k a_{nk} k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \left\{ \sum_k a_{nk} k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L + \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_k a_{nk} k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) + f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

olur. Buradan Eşitsizlik 2. (a) ve (b) den ifade

$$\leq \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \left\{ \sum_{k>N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right.$$

$$\left. \sum_{k \leq N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_{k>N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k \leq N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x - \lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_{k>N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(x-L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k\leq N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x-\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

olur. $\varepsilon > 0$ ve N'-yi öyle seçelim ki k>N olması $S_{m,n} < \varepsilon/2$ olmasını gerektirsin. Her N için f nin sürekliliğinden

$$\left\{ \sum_{k\leq N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x-\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M} \to 0 \quad (\lambda \to 0)$$

olması nedeniyle $\delta < 1$'i öyle seçelimki $|\lambda| < \delta$ olması

$$\left\{ \sum_{k\leq N} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda x-\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_{k} a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(\lambda L) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \varepsilon/2$$

olmasını gerektirsin. Böylece

$$\left\{\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\lambda \to 0$ hali için $G(\lambda x) \to 0$ olur. O halde G bir paranorm olup, $[w(A,p,f,s)]$ G ile paranormlu bir uzaydır.

**Teorem 2.2.4.** $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayı Teorem 2.2.3. deki G paranormuna göre tamdır.

**İspat**: $x^i = (x^i_m)_m = (x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_m, \ldots)$ olmak üzere $(x^i)$, $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde

$$G(x^i - x^j) \to 0 \qquad i,j \to \infty$$

olur. Yani $i,j \to \infty$

$$G(x^i - x^j) = \sup_{n,m}\left\{\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \to 0 \qquad (2.2.4)$$

olur. Buradan her n,k,m ve $i,j \to \infty$ için

$$k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k} \to 0$$

ve f modülüs olduğundan

$$\lim_{i,j\to\infty} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k} = k^{-s}\left[f\left(\lim_{i,j\to\infty}\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k}$$

eşitliği

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|\ t_{km}(x^i-x^j)\right|=0$$

olmasını, bu da herbir sabit m için

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|\ t_{om}(x^i-x^j)\right|=\lim_{i,j\to\infty}\left|x_m^i-x_m^j\right|=0$$

olmasını gerektirir. Bu ise $(x_m^i)_i=(x_m^1, x_m^2, \ldots)$ dizisinin her bir m için **C** de bir Cauchy dizisi olduğunu verir. **C** tam olduğundan bu dizi yakınsaktır, $i\to\infty$ için $x_m^i\to x_m$, $m=1,2,3,\ldots$ diyelim. (2.2.4) den $\varepsilon>0$ için bir N tamsayısı vardır öyleki $i,j>N$ ve tüm n,m'ler için

$$\left\{\sum_k a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|\ t_{km}(x^i-x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \qquad (2.2.5.)$$

yazılabilir. Buradan herhangi bir T tamsayısı için

$$\left\{\sum_{k\le T} a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|\ t_{km}(x^i-x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \qquad (2.2.6.)$$

elde edilir. $j\to\infty$ için $x_m^j\to x_m$ olduğundan, $j\to\infty$ iken (2.2.6) dan tüm n,m ve $i>N$ için

$$\left\{\sum_{k\le T} a_{nk}\,k^{-s}\left[f\left(\left|\ t_{km}(x^i-x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon$$

olur. Bu herhangi bir T doğal sayısı için sağlandığından $i > N$ ve tüm n, m' ler için

$$\left\{\sum_k a_{nk}\, k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x^i - x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon \qquad (2.2.7)$$

elde edilir. Yani $i\to\infty$ iken $G(x^i - x) \to 0$ ve böylece $i \to \infty$ iken $x^i \to x$ olur.

Ayrıca $x^i \in [w(A,p,f,s)]$ olduğundan her i için bir $L^i$ vardır, öyleki m' ye göre düzgün olarak

$$\sum_k a_{nk}\, k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x^i - L^i e)\right|\right)\right]^{p_k} \to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (2.2.8)$$

dır. A' nın regülerliği, f' nin alttoplamsallığı ve (2.2.8) kullanılarak $i,j \to \infty$ iken $f(|L^i e - L^j e|) \to 0$ elde edilir. Buradan $(L^i)$ **C** de bir Cauchy dizisidir. **C** tam olduğundan $i \to \infty$ iken $L^i \to L$ diyelim.

Netice olarak $n\to\infty$ iken m' ye göre düzgün olarak

$$\sum_k a_{nk}\, k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \to 0$$

elde edilir. Yani $x = (x_k) \in [w(A,p,f,s)]$ olur ve böylece $[w(A,p,f,s)]$ dizi uzayı G paranormuna gore tamdır.

**Teorem 2.2.5.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris olsun ve $\inf p_k > 0$ bulunsun. Bu takdirde

**(i)** $x_k \to L$ iken $x_k \to L([w(A,p,f,s)])$,

**(ii)** $x_k \to L([w(A,p,s)])$ iken $x_k \to L([w(A,p,f,s)])$

dir.

**İspat: (i)** İnf $p_k = h > 0$ ve $x_k \to L$ olsun. Bu taktirde m' ye göre düzgün olarak $t_{km}(x) \to L$ olur. Yani $\lim_{k\to\infty}|x_k - L|=0$ iken m' ye göre düzgün olarak $\lim_{k\to\infty}|t_{km}(x-Le)|=0$ dır. f modülüs fonksiyonu olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right] = f\left[\lim_{k\to\infty}\left|t_{km}(x-Le)\right|\right] = 0$$

ve $h > 0$ olduğundan m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^h = 0$$

olur. O halde $0 < \varepsilon < 1$ için $\exists k_0 \ni \forall k > k_0$ ve $\forall m$ için

$$\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^h < \varepsilon < 1$$

ve $\forall k$ için $p_k \geq h$ olacağından,

$$\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k} \leq \left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^h < \varepsilon$$

elde edilir ki bu da, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k} = 0$$

demektir. Ayrıca $(k^{-s})$ sınırlı olduğundan, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty} k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}=0$$

olur. Böylece A regüler olduğundan, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}=0$$

olur ki bu da $x_k \to L$ ( [w(A,p,f,s)] ) demektir.

**(ii)** $\inf p_k = h > 0$ ve $x_k \to L$ ( [w(A,p,s)] ) olsun. f sıfırda sağdan sürekli olduğundan, $0 < \varepsilon < 1$ için $0 < \delta < 1$ olacak şekilde $\exists\, \delta > 0 \ni$ $0 \le t \le \delta$ iken $f(t) < \varepsilon$ dur. Şimdi

$$I_1 = \{k \in \mathbf{N} : \left|t_{km}(x-Le)\right| \le \delta,\ \text{her m için}\},$$

$$I_2 = \{k \in \mathbf{N} : \left|t_{km}(x-Le)\right| > \delta,\ \text{her m için}\}$$

dersek, Lemma 1.2.2. den $\forall$ n,m ve $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\sum_{k\in I_1} a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}+\sum_{k\in I_2} a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x-Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\le \sum_k a_{nk}k^{-s}[\varepsilon]^{p_k}+\sum_k a_{nk}k^{-s}\left[\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)\left|t_{km}(x-Le)\right|\right]^{p_k}$$

yazılabilir. Burada inf $p_k$ =h ve sup $p_k$=H olduğundan

$$\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^h = c_1 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^H = c_2$$

denirse

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq [\varepsilon]^H \sum_k a_{nk} k^{-s} + \max(c_1, c_2) \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left|t_{km}(x - Le)\right|\right]^{p_k}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, m' ye göre düzgün olarak $x \to L[w(A,p,s)]$ iken $x \to L[w(A,p,f,s)]$ olduğu görülür.

**Teorem 2.2.6.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris ve İnf $p_k > 0$ olsun. Bu takdirde f modülüs fonksiyonu için

$$\beta = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0 \quad \text{ise} \quad [w(A,p,f,s)] = [w(A,p,s)]$$

dir.

**İspat:** Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için $\beta$ ile verilen pozitif limitin varlığı Maddox (1987) Önerme 1' de verilmiştir.

Teoremin ilk kısmı Teorem 2.2.5. den açıktır. İspatın bu kısmında $\beta > 0$ koşuluna gerek duyulmadı. Şimdi ispatın diğer kısmı için $\beta > 0$ ve $x \in [w(A,p,f,s)]$ olsun. $\beta > 0$ olduğundan $\forall\, t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ dir. Dolayısıyla $\forall$ n,k,m için

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\geq \beta \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k}$$

dir. Tanımdan $n \to \infty$ iken m' ye göre düzgün olarak birinci taraf sıfıra gittiğinden, $n \to \infty$ için

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \to 0$$

elde edilir. Bu ise $x \in [w(A,p,s)]$ olduğunu gösterir. Bu ispatı tamamlar.

**Teorem 2.2.7.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris olsun ve f herhangi bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$l_\infty \subset M([w_\infty(A,p,f,s)]) \subset [w_\infty(A,p,f,s)]$$

dir.

**İspat:** $a=(a_k) \in l_\infty$ olsun. Bu taktirde $\forall$ k için $|a_k| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece $\forall$ k,m ve $x \in [w_\infty(A,p,f,s)]$ için

$$f(|t_{km}(a.x)|) \leq f(K|t_{km}(x)|)$$

$$\leq K f(|t_{km}(x)|)$$

olur. Dolayısıyla $\forall$ n,m ve $x \in [w_\infty(A,p,f,s)]$ için

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(a.x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[K f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq K^H \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

olur. Buradan $\forall\, x \in [w_\infty(A,p,f,s)]$ için

$$\sup_{m,n} \sum_k a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(a.x) \right| \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki, bu da $a=(a_k) \in M([w_\infty(A,p,f,s)])$ demektir. Bu ise ilk kapsamdır. $M([w_\infty(A,p,f,s)]) \subset [w_\infty(A,p,f,s)]$ olduğunu göstermek için $b=(b_k) \in M([w_\infty(A,p,f,s)])$ ve $e=(1,1,1,\ldots) \in [w_\infty(A,p,f,s)]$ dizisini almak yeterlidir.

**Teorem 2.2.8.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris olsun. Eğer $f$ sınırlı ise

$$[w_\infty(A,p,f,s)] = \mathbf{s}$$

dir.

**İspat:** $[w_\infty(A,p,f,s)]$ nin tanımından dolayı $[w_\infty(A,p,f,s)] \subset \mathbf{s}$ olduğu açıktır. $f$ sınırlı olduğundan $\forall\, n,m$ ve $x \in \mathbf{s}$ için

$$\sum_k a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) \right]^{p_k} \le \sum_k a_{nk}\, k^{-s} [K]^{p_k}$$

$$\le [K]^H \sum_k a_{nk}\, k^{-s}$$

eşitsizliği elde edilir. $K^H$ sabittir, dolayısıyla $m$ ve $n$ üzerinden supremum alınırsa, $A$ regüler olduğundan

$$\sup_{n,m} \sum_k a_{nk}\, k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacaktır. Bu da $x \in [w_\infty(A,p,f,s)]$ demektir. Buna göre $\mathbf{s} \subset [w_\infty(A,p,f,s)]$ olur. Böylece $\mathbf{s} = [w_\infty(A,p,f,s)]$ elde edilir.

$\Phi$ ile sadece sonlu çoklukta terimleri sıfırdan farklı olan kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin uzayını gösterelim.

**Teorem 2.2.9.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris, $f$ sınırlı bir modülüs fonksiyonu ve $s > 0$ olsun. Bu takdirde $x \in [w_0(A,p,f,s)]$ olduğunda

$$\sum_k a_k.x_k \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow (a_k) \in \Phi$$

dir.

**İspat:** $x \in [w_0(A,p,f,s)]$ olsun. $(a_k) \in \Phi$ iken

$$\sum_k a_k.x_k$$

sonlu toplama dönüşeceğinden yakınsaktır.

Şimdi kabul edelim ki $x \in [w_0(A,p,f,s)]$ için

$$\sum_k a_k.x_k$$

yakınsak, fakat $(a_k) \notin \Phi$ dir. Bu durumda pozitif tamsayıların artan öyle bir $(k_i)$ alt dizisi bulabiliriz ki

$$|a_{k_i}| > 0, \quad i=1,2,3,\ldots$$

dir. Şimdi $y=(y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{k_i}}, & k=k_i \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f sınırlı olduğundan $f(|t_{km}(y)|) \leq K$ olacak şekilde $K > 1$ pozitif sabiti vardır. O halde

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_k a_{nk} k^{-s}[K]^{p_k}$$

$$\leq K^H \sum_k a_{nk} k^{-s}$$

olur ki, $n \to \infty$ için limit alınırsa $K^H$ sabit $s > 0$ ve $A=(a_{nk})$ regüler olduğundan sol taraf m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(y)\right|\right)\right]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Bu da $y \in [w_0(A,p,f,s)]$ olduğunu verir. Fakat

$$\sum_k a_k . y_k = \sum_i a_{k_i} \frac{1}{a_{k_i}}$$

$$= \sum_i 1 = \infty$$

olacağından,

$$\sum_k a_k . y_k$$

ıraksak olur ki, kabulümüzle çelişir. O halde $(a_k) \in \Phi$ olmak zorundadır.

**Sonuç 2.2.1.** $A=(a_{nk})$ regüler bir matris, f sınırlı bir modülüs fonksiyonu ve $s > 0$ olsun. Bu takdirde

$$([w_0(A,p,f,s)])^{\beta} = \Phi$$

dir.

**İspat:** İspat Teorem 2.2.9. dan kolayca elde edilir.

**Teorem 2.2.10.** Herhangi $f$ ve $g$ modülüs fonksiyonları ile $s,s_1,s_2 \geq 0$ için

**(i)** $[w_0(A,p,f,s)] \cap [w(A,p,g,s)] \subset [w_0(A,p,f+g,s)]$

**(ii)** $s_1 \leq s_2$ ise $[w_0(A,p,f,s_1)] \subset [w_0(A,p,f,s_2)]$

dir.

**İspat: (i)** $\forall\, k,m$ için $|\,t_{km}(x)\,| \geq 0$ olduğundan Eşitsizlik 1.' den

$$\left[(f+g)\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} = \left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right) + g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq C\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} + C\left[g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

ve $\forall\, n,k$ için $a_{nk}k^{-s} > 0$ olduğundan

$$a_{nk}k^{-s}\left[(f+g)\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq C\, a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} + C\, a_{nk}k^{-s}\left[g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada $k=1$ den $\infty$' a toplam alınırsa $x=(x_k) \in [w_0(A,p,f,s)] \cap [w_0(A,p,g,s)]$ iken $x=(x_k) \in [w_0(A,p,f+g,s)]$ olduğu görülür.

**(ii)** $s_1 \le s_2$ olsun. $\forall k$ için $0 < k^{-1} \le 1$ olduğundan $\forall k$ için $k^{-s_2} < k^{-s_1}$ ve $\forall n,k$ için $a_{nk} k^{-s_2} < a_{nk} k^{-s_1}$ olur. Böylece

$$a_{nk}k^{-s_2}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} \le a_{nk}k^{-s_1}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada da $k=1$ den $\infty$' a toplam alınırsa sonuç hemen görülür.

**Teorem 2.2.11.** Herhangi f ve g modülüs fonksiyonları için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)} < \infty \quad \text{ise} \quad [w_0(A,p,g,s)] \subset [w_0(A,p,f,s)]$$

dir.

**İspat**: $\limsup_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{g(t)} < \infty$ olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,\infty)$ için $\dfrac{f(t)}{g(t)} \le K$

olacak şekilde $K>1$ sabiti bulabiliriz. $\forall$ k,m için $|t_{km}(x)| \in [0,\infty)$ olduğundan, $\forall$ k,m için

$$\frac{f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)}{g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)} \le K$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}}{\left[g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}} \le K^{p_k} \le K^{H}$$

veya

$$\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} \leq K^H\left[g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

olur ki, buradan da $a_{nk}\,k^{-s} > 0$ olduğundan

$$a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} \leq K^H a_{nk}k^{-s}\left[g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

olur. Burada $k=1$ den $\infty$' a toplam alınırsa $x=(x_k) \in [w_0(A,p,g,s)]$ iken $x=(x_k) \in [w_0(A,p,f,s)]$ olduğu görülür.

**Teorem 2.2.12.** f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu, $A=(a_{nk})$ regüler bir matris ve $s > 0$ olsun. Bu takdirde

$$[w_0(A,p,g,s)] \subset [w_0(A,p,fog,s)]$$

dir.

**İspat:** f sıfırda sağdan sürekli olduğundan , $\varepsilon > 0$ için $0 < \delta < 1$ olacak şekilde $\exists\,\delta > 0 \ni 0 \leq t \leq \delta$ iken $f(t) < \varepsilon$ dur. Şimdi

$$I_1 = \{k \in \mathbf{N} : g\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right) \leq \delta, \text{ her } m \text{ için}\},$$

$$I_2 = \{k \in \mathbf{N} : g\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right) > \delta, \text{ her } m \text{ için}\}$$

dersek Lemma 1.2.2. den $g(|t_{km}(x)|) > \delta$ iken

$$f\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right) \leq \frac{2.f(1)}{\delta}.g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k\in I_1} a_{nk} k^{-s}\left[f\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$+ \sum_{k\in I_2} a_{nk} k^{-s}\left[f\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_k a_{nk} k^{-s}[\varepsilon]^{p_k} + \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

yazılabilir. Burada $\inf p_k = h$ ve $\sup p_k = H$ olduğundan

$$\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^h = c_1 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^H = c_2$$

denirse

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq [\varepsilon]^H \sum_k a_{nk} k^{-s} + \max(c_1, c_2) \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(g\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\to 0 \quad (n\to\infty, \text{ m'ye göre düzgün olarak.})$$

elde edilir. Buradan $x=(x_k) \in [w_0(A,p,g,s)]$ iken $x=(x_k) \in [w_0(A,p,f\circ g,s)]$ olduğu görülür.

**Teorem 2.2.13.** $p=(p_k)$ ve $q=(q_k)$ sınırlı diziler ve $\forall\, k\in \mathbf{N}$ için $0< p_k \le q_k$ olsun. Bu takdirde herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$[w_0(A,p,f,s)] \subset [w_0(A,q,f,s)]$$

dir.

**İspat:** $x=(x_k) \in [w_0(A,p,f,s)]$ olsun. Bu taktirde $\forall\ 0< \varepsilon <1$ için $\exists n_0 \ni n > n_0$ ve $\forall\, m$ için

$$\sum_k a_{nk}\, k^{-s}\Big[\big(f\big(|t_{km}(x)|\big)\big)\Big]^{p_k} < \varepsilon < 1$$

dir. Buradan $n > n_0$ ve $\forall\, m$ için

$$a_{nk}\, k^{-s}\Big[\big(f\big(|t_{km}(x)|\big)\big)\Big]^{p_k} < \varepsilon < 1$$

yazabiliriz. O halde, $\forall\, k$ için $p_k \le q_k$ olduğundan $n > n_0$ ve $\forall\, m$ için

$$a_{nk}\, k^{-s}\Big[\big(f\big(|t_{km}(x)|\big)\big)\Big]^{q_k} \le a_{nk}\, k^{-s}\Big[\big(f\big(|t_{km}(x)|\big)\big)\Big]^{p_k}$$

olur. Bu ise $x=(x_k) \in [w_0(A,q,f,s)]$ olmasını verir.

## 2.3. L[p,f,s] Dizi Uzayı

Bu bölümde $[w_\infty(A,p,f,s)]$ dizi uzayında her n,k için $a_{nk}=1$ alırsak

$$\left\{ x: \ \sup_m \sum_k k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} < \infty, \quad s \geq 0 \right\}$$

dizi uzayını elde ederiz. Biz bu dizi uzayını L[p,f,s] ile gösterelim. Açıkça görülebileceği gibi $\Phi \subset L[p,f,s]$ ve Teorem 2.2.2. nin ispatından yararlanarak L[p,f,s] dizi uzayının **C** üzerinde bir lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir.

**Teorem 2.3.1.** L[p,f,s] dizi uzayı, M=max (1,H) olmak üzere

$$g(x) = \sup_m \left\{ \sum_k k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

ile bir paranormlu uzaydır.

**İspat.** g: L[p,f,s] $\rightarrow$ **R** nin aşağıdaki şartları sağlandığını göstermek yeterlidir. Her $x \in [w(A,p,f,s)]$ için $g(x) \in$ **R** dir. $g(\theta)=0$, $g(-x)=g(x)$ olduğu açıktır. Şimdi $M \geq 1$ ve $\forall$ k için $p_k/M \leq 1$ olduğundan, Eşitsitlik 2 (a) ve (b) eşitsizliklerinden $\forall\, m \in$ **N** için

$$\left\{ \sum_k k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x+y)\right|\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_k k^{-s} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) + f\left( \left| t_{km}(y) \right| \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \left\{ \sum_k \left( k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) + f\left( \left| t_{km}(y) \right| \right) \right]^{p_k/M} \right)^M \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_k \left( k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) \right]^{p_k/M} + \left[ f\left( \left| t_{km}(y) \right| \right) \right]^{p_k/M} \right)^M \right\}^{1/M}$$

$$= \left\{ \sum_k \left( k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) \right]^{p_k/M} + k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(y) \right| \right) \right]^{p_k/M} \right)^M \right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{ \sum_k \left( k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(x) \right| \right) \right]^{p_k/M} \right)^M \right\}^{1/M}$$

$$+ \left\{ \sum_k \left( k^{-s/M} \left[ f\left( \left| t_{km}(y) \right| \right) \right]^{p_k/M} \right)^M \right\}^{1/M}$$

elde edilir. Burada m üzerinden supremum alınırsa $g(x+y) \le g(x) + g(y)$ olduğu görülür.

Şimdi skalarla çarpımın sürekliliğine bakalım

$x \to \theta$, $\lambda$ sabit hali için $g(\lambda x) \to 0$ ve $x \to \theta$, $\lambda \to 0$ hali için $g(\lambda x) \to 0$ olduğunu görmek kolaydır. $\lambda \to 0$, x sabit hali için $g(\lambda x) \to 0$ olduğunu gösterelim.

$x \in L[p,f,s]$ sabit bir eleman olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \ge M} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ pozitif tamsayısı vardır. $|\lambda| < 1$ için (2.3.1) den

$$\sum_{k \ge M} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\le \sum_{k \ge M} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.2}$$

elde edilir. Ayrıca bu M pozitif tamsayısı ve $\lambda \to 0$ için $f(|t_{km}(\lambda x)|) \to 0$ olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için $|\lambda| < \delta$ oldukça

$$k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2(M-1)}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\sum_{k<M} k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(\lambda x)\right|\right)\right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.3.3)$$

olur. Dolayısıyla $|\lambda| < \delta$ için (2.3.2) ve (2.3.3) den $\lambda \to 0$ için $g(\lambda x) \to 0$ olur. O halde g bir paranorm fonksiyonu olup, L[p,f,s] dizi uzayı g ile paranormlu bir uzaydır.

**Teorem 2.3.2** L[p,f,s] dizi uzayı Teorem 2.3.1. deki g paranormuna göre tamdır.

**İspat**: $x^i = (x^i_m)_m = (x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_m, \ldots)$ olmak üzere $(x^i)$, L[p,f,s] dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$g(x^i - x^j) \to 0 \ , \quad (i,j \to \infty)$$

olur. Buradan her m ve herbir sabit k için

$$\left\{k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$\leq \left\{\sum_k k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$\leq g(x^i - x^j) \to 0 \qquad i,j \to \infty$$

ve f modülüs olduğundan

$$\lim_{i,j\to\infty}\left\{k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^{i}-x^{j})\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$=\left\{k^{-s}\left[f\left(\lim_{i,j\to\infty}\left|t_{km}(x^{i}-x^{j})\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

eşitliği

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|t_{km}(x^{i}-x^{j})\right|=0$$

olmasını, bu da herbir sabit m için

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|t_{om}(x^{i}-x^{j})\right|=\lim_{i,j\to\infty}\left|x_m^{i}-x_m^{j}\right|=0$$

olmasını gerektirir. Bu ise $(x_m^i)_i=(x_m^1, x_m^2, \ldots)$ dizisinin her bir m için **C** de bir Cauchy dizisi olduğunu verir. **C** tam olduğundan bu dizi yakınsaktır, $i\to\infty$ için $x^i{}_m \to x_m$ diyelim. İlk olarak gösterelim ki $x\in L[p,f,s]$ dir. $(x^i)_i$ , $L[p,f,s]$ dizi uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall i\in N$ için $g(x^i)\le K$ olacak şekilde $K>0$ tamsayısı vardır. Şimdi herhangi bir n doğal sayısı için

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x^{i})\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\le g\left(x^{i}\right)\le K$$

yazabiliriz. Buradan $i\to\infty$ ve sonra da $n\to\infty$ yapılırsa

$$\left\{\sum_k k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq K$$

olur, bu da $x \in L[p,f,s]$ olması demektir. Şimdi gösterelim ki $i \to \infty$ için $g(x^i - x) \to 0$ dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Şimdi herhangi bir pozitif N tamsayısı için $i,j > N$ oldukça $g(x^i - x^j) < \varepsilon$ yazabiliriz. Buradan herhangi bir n doğal sayısı ve $i,j > N$ için

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x^i - x^j)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq g\left(x^i - x^j\right) < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $i > N$ ve $j \to \infty$ için

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\left[f\left(\left| t_{km}(x^i - x)\right|\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon$$

olur. Buradan n keyfi olduğundan $n \to \infty$ ve $i > N$ için $g(x^i - x) < \varepsilon$ elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

## 2.4. $[w_0(A,p,f^v,s)]$ Dizi Uzayı Üzerinde Bağıntılar

Burada $f$ modülüs fonksiyonu yerine $v \in \mathbf{N}$ için $f^v$ modülüs fonksiyonunu alarak $[w_0(A,p,f,s)]$ dizi uzayını

$$\left[w_0(A,p,f^v,s)\right] = \left\{x \in \mathbf{S}:\ \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk}\, k^{-s}\left[f^v\left(\left|t_{km}(x)\right|\right)\right]^{p_k} = 0\ , \right.$$
$$\left. m\text{'ye göre düzgün},\ s \geq 0,\ v \in \mathbf{N}\right\}.$$

ile tanımlayalım. Böylece eğer $x - Le \in [w_0(A,p,f^v,s)]$ ise $x$ dizisi $L$' ye $[w(A,p,f,s)]$ toplanabilirdir diyeceğiz ve $x \to L[w(A,p,f^v,s)]$ yazacağız.

Amacımız $v \in \mathbf{N}$ olmak üzere $v$' nin durumlarına göre $[w_0(A,p,f^v,s)]$ toplanabilmeyi incelemektir.

**Teorem 2.4.1.** $\inf p_k > 0$, $A=(a_{nk})$ regüler ve $u < v$, $u,v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde

$$x \to L[w(A,p,f^u,s)]$$

ise

$$x \to L[w(A,p,f^v,s)]$$

dir.

**İspat:** İspatı tümevarım metoduyla yapacağız. $v - u = r$ dersek, $r \in \mathbf{N}$ ve $r \geq 1$ olur. Şimdi $r = 1$ için doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$x \to L[w(A,p,f^u,s)] \text{ iken } x \to L[w(A,p,f^{u+1},s)]$$

olduğunu göstermeliyiz.

$f$ sıfırda sağdan sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < \delta < 1$ olacak şekilde $\exists \delta > 0 \ni 0 \leq t \leq \delta$ iken $f(t) < \varepsilon$ dur.

$$I_1 = \{k \in \mathbf{N} : f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right) \leq \delta, \text{ her } m \text{ için}\},$$

$$I_2 = \{k \in \mathbf{N} : f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right) > \delta, \text{ her } m \text{ için}\}$$

dersek Lemma 1.2.1. den $\forall\, 0 < \varepsilon < 1$ ve $\forall\, n,m$ için

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(f^{u+1}\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right)\right)\right]^{p_k} = \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[f\left(f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$= \sum_{k \in I_1} a_{nk} k^{-s}\left[f\left(f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$+ \sum_{k \in I_2} a_{nk} k^{-s}\left[f\left(f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_k a_{nk} k^{-s}[\varepsilon]^{p_k} + \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)\left(f^u\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

Burada $\inf p_k = h$ ve $\sup p_k = H$ olduğundan

$$\left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^h = c_1 \text{ ve } \left(\frac{2.f(1)}{\delta}\right)^H = c_2$$

denirse

$$\sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(f^{u+1}\left(\left|t_{km}(x)-L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq [\varepsilon]^H \sum_k a_{nk} k^{-s} + \max(c_1, c_2) \sum_k a_{nk} k^{-s}\left[\left(f^{u}\left(\left|t_{km}(x)-L\right|\right)\right)\right]^{p_k}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, m' ye göre düzgün olarak $x \to L[w(A,p,f^u,s)]$ iken $x \to L[w(A,p,f^{u+1},s)]$ olduğu görülür.

Şimdi r için doğruluğunu kabul edip r+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani

$$x \to L[w(A,p,f^u,s)] \text{ iken } x \to L[w(A,p,f^{u+r},s)] \qquad (2.4.1.)$$

olduğunu kabul edip,

$$x \to L[w(A,p,f^u,s)] \text{ iken } x \to L[w(A,p,f^{u+r+1},s)]$$

olduğunu göstermeliyiz. (2.4.1.) den dolayı

$$x \to L[w(A,p,f^{u+r},s)] \text{ iken } x \to L[w(A,p,f^{u+r+1},s)]$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bu da $r = 1$ için yapılan ispatta u yerine $u + r$ almakla kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Biz aşağıdaki teoremle $[w(A,p,s)]$, $[w(A,p,f^u,s)]$ ve $[w(A,p,f^v,s)]$ dizi uzayları arasındaki bağıntıyı verdik.

**Teorem 2.4.2.** $u < v$, $u,v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde $\forall\ t \geq 0$ için $f(t) \geq t$ ise

$$[w(A,p,f^v,s)] \subset [w(A,p,f^u,s)] \subset [w(A,p,s)]$$

dir.

**İspat:** $f(t) \geq t$ ise f modülüs fonksiyonu artan olduğundan

$$f^{v}(t) \geq \ldots \geq f^{u}(t) \geq \ldots \geq f^{2}(t) \geq f(t) \geq t$$

dir. Her k,m için $|t_{km}(x - Le)| \geq 0$ olduğundan

$$f^{v}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right) \geq \ldots \geq f^{u}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right) \geq \ldots$$

$$\geq f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right) \geq \left|t_{km}(x - Le)\right|$$

ve $\forall k$ için $p_k > 0$ olduğundan

$$\left[f^{v}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq \ldots \geq \left[f^{u}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq \ldots$$

$$\geq \left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq \left|t_{km}(x - Le)\right|^{p_k}$$

olur. $\forall$ k,m için $a_{nk}$ ve $k^{-s}$ pozitif olduğundan

$$a_{nk}k^{-s}\left[f^{v}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq \ldots \geq a_{nk}k^{-s}\left[f^{u}\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq \ldots$$

$$\geq a_{nk}k^{-s}\left[f\left(\left|t_{km}(x - Le)\right|\right)\right]^{p_k} \geq a_{nk}k^{-s}\left|t_{km}(x - Le)\right|^{p_k}$$

elde edilir. Önce k=1' den n' ye kadar toplam alınır ve sonra $n \to \infty$ için limite geçilirse $x \in [w(A,p,f^{v},s)]$ olması halinde $x \in [w(A,p,f^{v-1},s)]$,.., $x \in [w(A,p,f^{u},s)]$ ,...,$x \in [w(A,p,f^{2},s)]$, $x \in [w(A,p,f,s)]$ ve $x \in [w(A,p,s)]$ olmasını gerektirir. Buradan

$[w(A,p,f^v,s)] \subset [w(A,p,f^u,s)] \subset [w(A,p,s)]$

elde edilir.

**Sonuç 2.4.1.** $\inf p_k > 0$, $A=(a_{nk})$ regüler bir matris ve $v \in \mathbf{N}$ ise

**(i)** $x \to L[w(A,p,f,s)]$ iken $x \to L[w(A,p,f^v,s)]$,

**(ii)** $x \to L[w(A,p,s)]$ iken $x \to L[w(A,p,f^v,s)]$

dir.

**İspat: (i)** Teorem 2.4.1. de $u = 1$ alınırsa kolayca elde edilir.

**(ii)** Bu (i) ve Teorem 2.2.5. (ii) den çıkar.

**Sonuç 2.4.2.** $\inf p_k > 0$, $A=(a_{nk})$ regüler bir matris, $f(t) \geq t$ ve $v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde

$[w(A,p,s)] = [w(A,p,f^v,s)]$

dir.

**İspat:** Bu, Teorem 2.4.2. ve Sonuç 2.4.1 (ii) den kolayca elde edilir

# ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

## 3.1. $[w,f]_0$, $[w,f]$ ve $[w,f]_\infty$ Dizi Uzayları.

Bu bölümde $[w_0(A,p,f,s)]$, $[w(A,p,f,s)]$ ve $[w_\infty(A,p,f,s)]$ dizi uzaylarında s=0, her k için $p_k = 1$ ve $A=(a_{nk})=(C,1)$ Cesaro matrisini alarak sırasıyla aşağıdaki dizi uzaylarını elde ettik ve Bölüm 2' deki teoremlerin bazı özel sonuçlarını verdik.

$$[w,f]_0 = \left\{ x=(x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| t_{km}(x) \right|\right) \to 0, \ (n \to \infty), \ m' \text{ ye göre düzgün} \right\},$$

$$[w,f] = \left\{ x=(x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| t_{km}(x-Le) \right|\right) \to 0, \ (n \to \infty), \ m' \text{ ye göre düzgün} \right\},$$

$$[w,f]_\infty = \left\{ x=(x_k) : \sup_{n,m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| t_{km}(x) \right|\right) < +\infty \right\}$$

Eğer $x \in [w,f]$ ise x, L' ye f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli hemen hemen toplanabilirdir denir.

Şimdi yukarıda tanımladığımız uzaylar ile ilgili bazı sonuçlar verelim:

**Sonuç 3.1.1.** Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$[w,f]_0 \subset [w,f] \subset [w,f]_\infty$$

dir.

**Sonuç 3.1.2.** $[w,f]_0$ , $[w,f]$ ve $[w,f]_\infty$ uzayları **C** üzerinde lineer uzaylardır.

**Sonuç 3.1.3.** $[w,f]_0$ ve $[w,f]$ uzayları

$$g(x)=\sup_{n,m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|t_{km}(x)|)$$

ile tam paranormlu lineer uzaylardır.

**Sonuç 3.1.4.** Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$l_\infty \subset M[([w,f]_\infty)] \subset [w,f]_\infty$$

dir.

**Not:** Bu teoremdeki içerme f modülüs fonksiyonu sınırlı ise kesindir. Bunu gösterebilmek için bir $a=(a_k) \notin l_\infty$ dizisini alalım. Bu taktirde herhangi bir $x \in [w,f]_\infty$ dizisi için, f sınırlı olduğundan

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|t_{km}(ax)|) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} K = K < \infty$$

olacak şekilde $K \geq 1$ pozitif tamsayısı bulunabilir. Dolayısıyla $a=(a_k) \in M[([w,f]_\infty)]$ elde edilir.

**Sonuç 3.1.5.** f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$[w,f]_\infty = \mathbf{s}$$

dır.

## 3.2. $[w,f^v]$ Dizi Uzayı Üzerinde Bağıntılar

Şimdi Bölüm 3.1.' de verdiğimiz $[w,f]$ uzayı tanımında Lemma 1.2.1. a)' dan dolayı $v \in \mathbf{N}$ için $f^v$ modülüs fonksiyonunu alırsak

$$[w,f^v] = \left\{ x=(x_k): \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^v\left(\left| t_{km}(x-Le)\right|\right) \to 0,\ (n\to\infty)\ ,\ m' \text{ ye göre düzgün} \right\}$$

olur. $[w,f]$ de geçerli olan bütün ifadeler $f$ yerine $f^v$ alınırsa $[w,f^v]$' de de geçerli olacaktır. Örneğin $[w,f^v]$ de tam, paranormlu bir uzaydır. Buradaki paranorm

$$g_v(x) = \sup_{n,m} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^v\left(\left| t_{km}(x)\right|\right)$$

şeklinde tanımlanan $g_v$ paranormudur.

Bizim bu kısımdaki amacımız $v \in \mathbf{N}$ ' nin durumuna göre $[w,f^v]$ dizi uzayını incelemektir.

**Sonuç 3.2.1.** $f$ herhangi bir modülüs fonksiyonu, $u < v$, $u,v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde

**(i)** $x_k \to L([w])$ iken $x_k \to L([w,f])$

**(ii)** $x_k \to L([w,f^u])$ iken $x_k \to L([w,f^v])$

dır

**Sonuç 3.2.2.** f herhangi bir modülüs fonksiyonu, $v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde

**(i)** $x_k \to L([w,f])$ iken $x_k \to L([w,f^v])$

**(ii)** $x_k \to L([w])$ iken $x_k \to L([w,f^v])$

dir.

**İspat: (i)** Sonuç 3.2.1 (ii) de u=1 alınırsa kolayca elde edilir.

**(ii)** Sonuç 3.2 1. (i) ve (i) den çıkar

**Sonuç 3.2.3.** $u < v$, $u,v \in \mathbf{N}$ olsun. Bu takdirde $\forall\, t \geq 0$ için

$f(t) \geq t$ ise $[w,f^v] \subset [w,f^u] \subset [w]$

dir.

**Sonuç 3.2.4.** $\forall\, t \geq 0$ için $f(t) \geq t$ ise bu takdirde $\forall\, v \in \mathbf{N}$ için

$[w,f^v] = [w]$

olur.

**İspat:** Bu Sonuç 3.2.2.(ii) ve Sonuç 3.2.3. birlikte düşünülürse derhal çıkar.

# DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

## 4.1. S-İstatistiksel Yakınsaklık

$|\{k \leq n: k \in K\}|$, K' nın n' den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(K) = \lim_n 1/n \, |\{k \leq n: k \in K\}|$$

sayısına pozitif tamsayılardan oluşan K cümlesinin doğal yoğunluğu denir. (Fridy, 1985).

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir. Eğer bir $x=(x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k' lar için bir P özelliğini sağlıyorsa bu taktirde $x=(x_k)$ dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**Tanım 4.1.1.** $x=(x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n 1/n \, |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durumda $S\text{-}\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır. İstatistiksel yakınsak diziler uzayı S ile, özel olarak L=0 olması halinde $S_0$ ile gösterilecektir.

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x=(x_k)=\begin{cases} 1, & k=n^2 \quad n=1,2,3,\ldots \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak olduğu halde, yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsaklık tanımını ilk olarak Fast (1951) verdi. Schonberg (1959) istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özelliklerini verdi. Daha sonraları Salat (1980), Fridy (1985), Maddox (1986) ve Connor (1988 ve 1989) istatistiksel yakınsaklıkla ilgili çalışmalar yaptılar.

Connor (1988), istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p-Cesaro toplanabilirlik

$$w_p=\{x: \quad \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|(x_k-L)\right|^p=0\}$$

arasındaki ilişkiyi inceledi.

Biz bu bölümde düzgün sıfır yoğunluklu cümle tanımından hareketle $\bar{S}$-istatistiksel yakınsak dizi tanımını verip, $\bar{S}$-istatistiksel yakınsaklık ile $[w_p]$-yakınsaklık ve $[w,f]$-yakınsaklık arasındaki kapsam bağıntılarını inceleyeceğiz.

**Tanım 4.1.2.** $x=(x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|t_{km}(x)-L\right|^p=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi L' ye kuvvetli hemen hemen p-yakınsaktır denir. Kuvvetli hemen hemen p-yakınsak dizilerin uzayını $[w_p]$ ile göstereceğiz.

**Tanım 4.1.3.** Pozitif tamsayılardan oluşan bir E cümlesinin $[m,m+n-1]$ aralığında bulunan elemanlarının sayısının n' ye bölümü $n \to \infty$ iken m' ye göre düzgün olarak sıfıra gidiyorsa E' ye düzgün sıfır yoğunluklu cümle diyeceğiz. (Maddox, 1978).

**Tanım 4.1.4.** $x=(x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_n 1/n \,|\{k \le n: |t_{km}(x) - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine L sayısına $\bar{S}$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $\bar{S}$-$\lim x = L$ veya $x_k \to L(\bar{S})$ yazılır. $\bar{S}$-istatistiksel yakınsak diziler uzayı $\bar{S}$ ile, özel olarak L=0 olması halinde $\bar{S}_0$ ile gösterilecektir.

$$\bar{S} = \{ x=(x_k): \quad \bar{S}\text{-}\lim x = L \},$$
$$\bar{S}_0 = \{ x=(x_k): \quad \bar{S}\text{-}\lim x = 0 \}.$$

Şimdi $\bar{S}$ ile $[w_p]$ ve $[w,f]$ dizi uzayları arasındaki ilişkiyi veren teoremleri ifade ve ispat edelim.

**Teorem 4.1.1. (i)** Kuvvetli hemen hemen p-yakınsak her dizi $\bar{S}$-istatistiksel yakınsaktır.

**(ii)** Sınırlı ve $\bar{S}$-istatistiksel yakınsak her dizi kuvvetli hemen hemen p-yakınsaktır.

**İspat : (i)** $x=(x_k) \in [w_p]$ $(0 < p < \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|t_{km}(x) - L| \ge \varepsilon$ olacak şekilde $m \in \mathbf{N}$ ve $k \le n$

üzerinden alınan toplamı $\sum_1$ ve $|t_{km}(x) - L| < \varepsilon$ üzerinden alınan toplamı da $\sum_2$ ile gösterelim. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|t_{km}(x) - L\right|^p = \sum_1 \left|t_{km}(x) - L\right|^p + \sum_2 \left|t_{km}(x) - L\right|^p$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|t_{km}(x) - L\right|^p \geq \left|\{ k \leq n : \left|t_{km}(x) - L\right| \geq \varepsilon \}\right| . \varepsilon^p$$

ve buradan da $x \in \bar{S}$ olduğu görülür.

**(ii)** Sınırlı $x=(x_k)$ dizisi L' ye $\bar{S}$-istatistiksel yakınsak olsun. $\forall\, m \geq 1$ için

$$|t_{km}(x) - L| \leq |t_{km}(x)| + L = K$$

ve verilen $\varepsilon > 0$ için $N_\varepsilon$' u öyle seçelim ki $\forall\, n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n}\left|\{ k \leq n : \left|t_{km}(x) - L\right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \}\right| < \frac{\varepsilon}{2.K^p}$$

olsun. Şimdi $n > N_\varepsilon$ ve $\forall\, m$ için

$$\left|t_{km}(x) - L\right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \quad \text{ve} \quad \left|t_{km}(x) - L\right| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}$$

üzerinden alınan toplamları sırasıyla $\sum_1$ ve $\sum_2$ ile gösterelim. O halde $\forall\, m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| t_{km}(x) - L \right|^{p} = \sum_{1} \left| t_{km}(x) - L \right|^{p} + \sum_{2} \left| t_{km}(x) - L \right|^{p}$$

yazılabilir. Şimdi $n > N_{\varepsilon}$ ve $\forall m$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| t_{km}(x) - L \right|^{p} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. O halde x dizisi L' ye kuvvetli hemen hemen p-yakınsaktır.

**Teorem 4.1.2.** **(i)** f herhangi bir modülüs fonksiyonu olmak üzere bir $x=(x_k)$ dizisi L' ye $[w,f]$-yakınsak ise L' ye $\overline{S}$-istatistiksel yakınsaktır.

**(ii)** f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olmak üzere bir $x=(x_k)$ dizisi L' ye $\overline{S}$-istatistiksel yakınsak ise L' ye $[w,f]$-yakınsaktır.

**(iii)** $[w,f] = \overline{S}$ olması için yeter şart f modülüs fonksiyonunun sınırlı olmasıdır.

**İspat:** **(i)** $x=(x_k)$ dizisi L' ye $[w,f]$-yakınsak olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $|t_{km}(x) - L| \geq \varepsilon$ olacak şekildeki her $m \in \mathbf{N}$ ve $k \leq n$ üzerinden alınan toplamı $\sum_1$ ile ve $|t_{km}(x) - L| < \varepsilon$ üzerinden alınan toplamı da $\sum_2$ ile gösterelim. Buna göre,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| t_{km}(x) - L \right|\right) = \frac{1}{n} \sum_{1} f\left(\left| t_{km}(x) - L \right|\right) + \frac{1}{n} \sum_{2} f\left(\left| t_{km}(x) - L \right|\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|t_{km}(x)-L\right|\right) \geq \frac{1}{n}\left|\{k\leq n : \left|t_{km}(x)-L\right| \geq \varepsilon\}\right| . f(\varepsilon)$$

yazılabilir. Tanımdan $n \to \infty$ iken m' ye göre düzgün olarak birinci taraf sıfıra gittiğinden

$$\frac{1}{n}\left|\{k\leq n : \left|t_{km}(x)-L\right| \geq \varepsilon\}\right| \to 0$$

elde edilir. Böylece x dizisi L' ye $\bar{S}$-istatistiksel yakınsaktır.

**(ii)** f sınırlı ve x dizisi L' ye $\bar{S}$-istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\forall\, m \in \mathbf{N}$ için

$$t_{km}(x) - L = y_{km}$$

eşitliği ile tanımlanan $(y_{km})$ dizisi sıfıra $\bar{S}$-istatistiksel yakınsaktır. Yani $\varepsilon > 0$ için $n \to \infty$ iken m' ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\left|\{k\leq n : \left|y_{km}\right| \geq \varepsilon\}\right| \to 0$$

olur. $|y_{km}| \geq \varepsilon$ olacak şekildeki $\forall\, m \in \mathbf{N}$ ve $k \leq n$ üzerinden alınan

toplamı $\sum_1$ ile ve $|y_{km}| < \varepsilon$ üzerinden alınan toplamı da $\sum_2$ ile gösterelim. O halde

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|y_{km}\right|\right) = \sum_{1} f\left(\left|y_{km}\right|\right) + \sum_{2} f\left(\left|y_{km}\right|\right)$$

yazılabilir. Ayrıca;

$$f\left(\left|y_{km}\right|\right) \leq \sup_{0 \leq t < \infty} f(t)$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|y_{km}\right|\right) \leq \left|\{k \leq n : \left|y_{km}\right| \geq \varepsilon\}\right| \sup f(t) + n.f(\varepsilon)$$

olur. Buradan $\forall\, m \in \mathbf{N}$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|y_{km}\right|\right) \leq \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \left|y_{km}\right| \geq \varepsilon\}\right| \sup f(t) + f(\varepsilon)$$

yazabiliriz. f sınırlı ve $x \in \vec{S}$ olduğundan sağ taraftaki ifade $\varepsilon$ keyfi olması nedeniyle istenildiği kadar küçük bırakılabilir. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken m' ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|t_{km}(x) - L\right|\right) \to 0$$

elde edilir. Dolayısıyla x dizisi L' ye [w,f]-yakınsak olur. Bu ise istenendir.

**(iii)** Bu (i) ve (ii) nin bir sonucudur.

## KAYNAKLAR


Banach, S., (1955), **Theorie des operations lineraies**, Chelsea N.Y.

Connor, J., (1988), **The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis**, 8: 47-63.

Connor, J., (1989), **On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence**, Canad. Math. Bull. 32 (2) : 194-198.

Das, G. and Sahoo, S.K., (1992), **On Some Sequence Spaces**, Journal of Math. Analy. And App., 164: 381-388.

Eizen, C. and Laush, G., (1969), **Infinite matrices and almost convergence,** Math. Japan, 14: 137-143.

Fast, H., (1951), **Sur la convergence statistique**, Collog. Math. 2: 241-244.

Fridy, J. A., (1985), **On Statistical convergence**, Analysis, 5: 301-313.

Hardy, G. H., (1949), **Divergent Series**, Clarendon Press, Oxford.

King, J. P., (1966), **Almost summable sequences**, Proc. Amer. Math. Soc., 17: 1219-1225.

Maddox, I. J., (1970), **Elements of Functional Analysis**, Camb. Univ. Press.

Maddox, I. J., (1978), **A new type of convergence**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83: 61-64.

Maddox, I. J., (1987), **Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem**, Mat.Proc.Camb. Philos. Soc., 101, 523-527.

Maddox, I. J., (1986), **Sequence spaces defined by a modulus**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100: 161-166.

Maddox, I. J., (1988), **Statistical convergence in a locally convex space**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 104: 141-145.

Nanda,S., (1983), **Matrix Transformations and sequence spaces**, Miramare-Trieste.

Nakano, H., (1953), **Concave modulars**, J. Math. Soc. Japan, 5: 29-49.

Pehlivan, S., (1990), **Modulus fonksiyonu ile tanımlanmış kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler**, III. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirileri, Yüzüncü Yıl Üniv. Yayınları, No:6: 67-72.

Petersen, M.G., (1966), **Regular Matrix Transformations**, Mc.Graw-Hill.

Ruckle, W.H., (1973), **FK spaces in which the sequence of coordinat vectors in bounded**, Canad. J. Math., 25: 973-978.

Salat, T., (1980), **On statistically convergence sequences of real numbers**, Math. Slovaca, 30: 139-150.

Simons, S., **The sequence Spaces $l(p_v)$ and $m(p_v)$.** Proc.London Math. Soc., (3) 15 (1965), 422-436.

Wilansky, A., (1964), **Functional Analysis**, Blaisdell, Waltham, Mass.

Yurtsever, B., (1980), **Matematik Analiz Dersleri**, Cilt I, Diyarbakır Üniv. Fen Fak. Yayınları.