KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

78257

ELİPTİK TİP SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU ELEMANLAR VE SONLU FARKLAR YÖNTEMLERİNİN KARŞILIKLI ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Metin BAYRAK

Ana Bilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

NİSAN 1998

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK TİP SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU ELEMANLAR VE SONLU FARKLAR YÖNTEMLERİNİN KARŞILIKLI ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Metin BAYRAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.04.1998

Tezin Savunulduğu Tarih :14.05.1998

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Prof Dr.Alemdar HASANOĞLU	Prof Dr.Abdullah ALTIN	Prof Dr. Behiç ÇAĞAL
(............................)	(............................)	(............................)

NİSAN 1998

ELİPTİK TİP SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU ELEMANLAR VE SONLU FARKLAR YÖNTEMLERİNİN KARŞILIKLI ANALİZİ

Metin BAYRAK

Anahtar Kelimeler: Sonlu eleman yöntemi, Sonlu fark denklemi, Sertlik matrisi, Baz fonksiyonu, Varyasyonel problem.

Özet: Sonlu eleman ve klasik sonlu fark yöntemleri, mühendisliğin ve fiziğin birçok uygulamalı problemlerinde sayısal modellemeye temel oluştururlar. Birinci yöntem bir sınır değer probleminin varyasyonel formülasyonuna dayanır. İkinci yöntem ise problemin klasik çözümünü temel alır.

Ancak uygulamalı problemlerin birçoğu zayıf çözüm gerektirirler. Bu nedenle de sonlu elemanlar yönteminin bazı avantajları vardır. Diğer taraftan sonlu fark şemaları nümerik uygulamalar da daha basittir. Bu çalışmada,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y), && (x,y)\in\Omega\subset R^2 \\
&u(x,y)=0, && (x,y)\in\Gamma_1\subset\partial\Omega \\
&\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi(x,y), && (x,y)\in\Gamma_2\subset\partial\Omega, \qquad \Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing
\end{aligned}
$$

karmaşık problemi için her iki yöntem de analiz edilmiştir.

İlk olarak karmaşık problemin varyasyonel ifadesi verilmiştir. Elde edilen varyasyonel problem için sonlu eleman şeması uygulanmıştır.

Lagrange tipi dörtgen ve üçgen elemanlar için sertlik matrisleri elde edilmiştir. Bu matrisler kullanılarak, yeni bir sonlu fark şeması elde etmek için algoritma çıkarılmıştır. Daha sonra sonlu fark şemaları, ele alınan problem için klasik sonlu fark şeması ile karşılaştırılmıştır.

Verilen yaklaşım, eliptik problemler için yeni bir tür sonlu fark şemalarının elde edilmesine olanak sağlar.

A COMPARATIVE ANALYSIS OF FINITE ELEMENTS AND FINITE DIFFERENCE METHODS FOR ELLIPTIC TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Metin BAYRAK

Keywords: Finite Element Method, Finite Difference Equation, Stiffness Matrix, Basis Function, Variational Problem.

Abstract: Finite Element and classical finite difference methods are fundamental to the numerical modeling of many applied problems of engineering and physics. The first method is based on a variational formulation of a boundary value problem, when the second method is based on a classical solution one. However, many applied problems require only a weak solution and therefore finite element method has some advantages. On the other hand, finite difference schemes are simpler in numerical applications.

In this study for mixed problem,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega\subset R^2$$

$$u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Gamma_1\subset\partial\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi(x,y), \qquad (x,y)\in\Gamma_2\subset\partial\Omega, \qquad \Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$$

the both methods are analysed.

First the variational statement of the mixed problem is given. Then for the obtained variational problem finite element scheme is applied. For the Lagrange type rectangular and triangular element the stiffness matrixes are obtained. Then using these matrixes the algorithm to obtain new finite difference schemes is compared with the classical finite difference scheme for the considered problem.

The presented approach permits to obtain new class of finite difference schemes for elliptic problems.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini içeren problemlerle uygulamalı matematikte ve mühendisliğin bir çok alanında karşılaşılmaktadır. Bu konu ile ilgili olarak, literatürde klasik Sonlu Farklar (SF) ve Sonlu Elemanlar (SE) adı ile iki yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen her iki sayısal yaklaşım; differansiyel problemi, cebirsel denklemler sistemine dönüştürmektedir. Bu yöntemlerde, yaklaşım hatası, önemli bir sorun oluşturur.

Sonlu Elemanlar Yönteminin (SEY) yaklaşım hatası, cebirsel denklemler sisteminin iç yapısı ile bağlantılıdır. İç yapı ise, SEY'nde seçilen baz fonksiyonları ile ilgilidir.

Böylelikle, hangi baz fonksiyonunun, hangi SF denklemine karşılık geldiğinin araştırılması, yaklaşım hatası açısından önemlidir.

SEY'nin iki ve üç boyutlu problemlere uygulanması, Sonlu Fark Yönteminin (SFY) aynı problemlere uygulanması ile karşılaştırılırsa daha zordur. Eğer SEY'nin sonucu olan SF elde edebilirsek; o zaman SEY'nin tüm aşamalarını değil, sadece elde edilen SF yazarak SEY'ni uygulayabiliriz. Bu ise, hesaplamaları kolaylaştırır.

Yapılan çalışmalarda, ilk kez SEY'nin iki boyutlu problemlere uygulanması sonucu ortaya çıkan sonlu fark denklemleri elde edilmiştir. Bu ele alınan diferansiyel problem için daha kullanışlı, daha pratik olan SF denklemlerinin elde edilmesi anlamına gelir.

Yapılan çalışmanın sayısal yöntemlerle ilgili çalışmalara katkısının olmasını dilerim.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım, Sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU'na, (KOÜ UMBAM), yardımlarını gördüğüm Sayın Doç. Dr. Zahir SEYİDMEHMEDOV'a (KOÜ UMBAM), tezin yazımında ve şekillerin çiziminde emeği geçen, Müge TEKİN'e ve arkadaşlarım Elektronik ve Hab. Müh. Süleyman TUNÇ'a ve Berna ARPACIOĞLU'na ayrıca sabırlarından dolayı değerli eşim Aylin BAYRAK'a teşekkürlerimi sunarım

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	:Simetrik, pozitif tanımlı ve lineer operatör
a(u,v)	:Bilineer form
b(v)	:Lineer form
$C^{(k)}(\Omega)$	:Ω'da k'inci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$C^{(k)}(\overline{\Omega})$	:$\overline{\Omega}$'de k'inci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
D(A)	:A operatörünün tanım bölgesi
e_m	:Sonlu eleman
e	:Pilot (başlangıç) sonlu eleman
E_n	:n boyutlu öklid uzayı
C_i	:Çözüm fonksiyonunun P_i düğüm noktalarındaki değeri
$\overset{o}{b}_m$	:e_m sonlu elemanına karşılık gelen lokal sertlik matrisi
H	:Reel Hilbert uzayı
H_A	:Skaler çarpımın tanımlı olduğu Hilbert uzayı
$H^l(\Omega)$	:Sobolev uzayı
N_i	:P_i düğüm noktaları ile komşuluğu olan sonlu elemanların sayılarının oluşturduğu küme
η_i	:P_i noktası ile komşuluğu olan sonlu elemanların sayısı
H_h	:$\xi_i(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu boyutlu uzay
M_m	:e_m sonlu elemanında daralmaları sıfırdan farklı olan baz fonksiyonlarının oluşturduğu küme
T_h	:G bölgesinin sonlu elemanlara ayrılması
W_h	:Sonlu farklarda kafes
P_i	:e_m sonlu elemanlarının tepe noktaları (i, düğüm noktalarının numaraları)
$\xi_{i,j}(x,y)$	:İki boyutlu durumda baz fonksiyonu
$\Psi_i(s,t)$	:form fonksiyonlar
$\left\{K_{\ell,k}^{(i,j)}\right\}$	:Lokal sertlik matrisi

s_m	:e_m sonlu elemanının alanı
$\delta_{i,j}$	:Kroneacker sembolü
$\Psi(s,t)$	:e'de (0,0) noktasında yazılmış baz fonksiyonu
h_i,τ_i	:x ve y'ye göre adımlar
$u_{x,i}, u_{\bar{x},i}, u_{x,i}$	:u(x,y) fonksiyonunun x'e göre birinci mertebeden türevlerinin sonlu farklarla ifadeleri
$u_{y,j}, u_{\bar{y},j}, u_{y,j}$	:u(x,y) fonksiyonunun y'ye göre birinci mertebeden türevlerinin sonlu farklarla ifadeleri
$u_{\bar{x}x,i}$	:u(x,y) fonksiyonunun x'e göre ikinci mertebeden türevlerinin sonlu farklarla ifadeleri
$u_{\bar{y}y,j}$	:u(x,y) fonksiyonunun y'e göre ikinci mertebeden türevlerinin sonlu farklarla ifadeleri
$L_2(\Omega)$	:Karesi Ω'da integrallenebilen fonksiyonlar uzayı (Hilbert)
Δ	:Laplace operatörü
Γ	:Ω bölgesinin sınırı
b_m	:e_m sonlu elemanına karşılık gelen global sağ yan vektörü
K_m	:e_m sonlu elemanına karşılık gelen global sertlik matrisi
I_m	:Global numaraları, lokal numaralara dönüştüren dönüşüm
$\overset{o}{K}_m$	: e_m sonlu elemanına karşılık gelen lokal sertlik matrisi
μ_m	:M_m kümesinin ölçüsü
$\eta_i^{(k)}(x)$	:Baz fonksiyonu
$\xi_i(x)$	:Baz fonksiyonu
$\varphi_{m,i}(x)$	:$\xi_i(x)$ baz fonksiyonunun e_m sonlu elemanına daralması
$u_h(x)$	:Yaklaşık çözüm fonksiyonu
supp	:Support
φ_1,φ_2	:D(A)'nın iki elemanı
$\lVert\varphi\rVert_D$	:D(A)'da norm
$\rho(u,v)$	:u ve v arasındaki uzaklık
$\overline{G}$	:$G \cup \partial G$ G kümesinin kapanması

int :interior

G :Sınır değer probleminin tanımladığı bölge ($G \subset R^2$)

$\|U_0\|_0$:L_2 (Ω) uzayında norm

$\|U\|_1$:Sobolev uzayında norm

$W_2^{(k)}(\Omega)$:Elemanları Ω'dan olan ve Ω da k'ıncı mertebeye kadar genelleşmiş türevi olan fonksiyonlar uzayı

SE :Sonlu elemanlar

SEY :Sonlu elemanlar yöntemi

SF :Sonlu farklar

SFY :Sonlu farklar yöntemi

KÜ.UMBAM:Kocaeli Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bilimleri Araştırma Merkezi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için bilimsel literatürlerde birbirlerine paralel iki yaklaşım uygulaması geliştirilmektedir. Bunlardan birisi klasik sonlu farklar yöntemidir (Richtmyer and Morton 1967, Ames 1977, Burdan and Faires 1989, Ceschino and Kuntzmann 1966). Sonlu farklar yöntemini kullanarak diferansiyel denklemle ilgili sınır değer probleminin çözümünün aranması aşağıdaki aşamalardan oluşur.

Önce problemin verildiği geometrik alan kafes (şebeke) şekline getirilir. Denklemlerde verilen türevler yerine, kafesin (x_i,y_j) noktalarında bu türevlere karşı gelen sonlu fark ifadeleri yazılır. Aynı işlemler sınır koşulları için de yapılır. Bunun sonucunda kafesin her düğüm noktası için lineer cebirsel denklemler elde edilir. Bu denklemler sistemin çözümü olan u_h fonksiyonuna ise diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü denir (Rosenberg 1969, Smith 1965, Aziz 1969).

Bu yaklaşımdaki temel varsayımlardan birincisi diferansiyel denklemin klasik çözümünün olmasıdır (Collatz 1966). Bir başka deyişle denklem ikinci dereceden eliptik operatör ise bu koşulda problemin $u = u(x,y)$ çözümünün $C^2(\Omega)$' dan alınması gerekmektedir (Tuncer 1992). Fakat bir çok problem için bu koşul sağlanmayabilir. İkinci varsayım ise problemin varildiği alanla ilgilidir. Özellikle iki veya üç boyutlu problemler için problemin verildiği alanın geometrisi bileşik (veya komplike) ise bu alanın dikdörtgenlerle kafes (şebeke) şekline getirilmesi mümkün değildir. Bu koşulda klasik sonlu farklar yönteminin uygulanması olanaksız hale gelir.

Bu ve diğer nedenlerle bağlantılı olarak 1960. yılların ortalarında sonlu elemanlar yöntemi denilen bir yöntem geliştirilmeye başlanmıştır (Strany and Fix 1973). Bu yöntem diferansiyel problemin klasik çözümüne değil varyasyonel (veya genelleşmiş, zayıf) çözümüne dayalıdır (Mikhlin 1965) ve temel iki aşamadan oluşur. Birinci aşamada problemin verildiği G alanı belli koşulları sağlayan sonlu elemanlara bölünür ve bu elemanlara uygun baz fonksiyonları seçilir (Ciarlet 1976). İkinci aşamada ise

$H_h \subset H$ uzayında J(u) fonksiyonelinin minimum değerinin aranması sonucu lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Klasik çözüm ile varyasyonel çözüm arasındaki fark birincisinin $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sınıfından, ikincisinin ise $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ uzayından oluşmasıdır. $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ uzayı $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sınıfından daha geniş olduğu için, genelleşmiş çözüm daha geniş ve pratik çözümleri de kapsamaktadır. Bu anlamda genelleşmiş çözüm pratik problemlere daha yakın ve kullanış açısından daha avantajlıdır.

Sonlu elemanlar yöntemi, genelleşmiş çözümü baz alan veryasyonel bir yaklaşıma dayanmaktadır. Bu yaklaşımlardan birisi de Rits yöntemidir (Mikhlin 1971, Mikhlin 1965). Fakat Rits yönteminde kullanılan baz fonksiyonları sonucu elde edilen matrisin tüm elemanları sıfırdan farklıdır. Bunun sonucu olarak kafesteki (şebeke) nokta sayısı fazla olduğunda elde edilen lineer cebirsel denklemler sisteminin çözümü bazen olanaksız olur. Bu nedenle 1960. yıllarda Rits yönteminde baz fonksiyonlarını özel seçerek daha basit yapılı (örneğin bant şeklinde) bir matrisin elde edilmesi problemi ortaya atılmıştır. Bu SEY'nin ortaya çıkmasına neden olmuştur (Zienkiewicz and Taylor 1987). İki boyutlu ($\Omega \in R^2$) problemlerde çok kullanılan üçgen ve dörtgen elemanlar için SEY ile elde edilen sonlu farklar (SF) şemalarının yapısı ise bu güne kadar araştırılmamıştır.

Bu yapının araştırılması aşağıdaki nedenler açısından çok önemlidir.

Bunlardan birincisi, her iki sayısal yaklaşım (sonlu farklar ve sonlu elemanlar) sonuç olarak diferansiyel denklemleri cebirsel denklemler sistemine dönüştürürler. Sayısal yöntemlerin başlıca zorluklarından birincisi olan yaklaşım hatasının değerlendirilmesi problemi bu cebirsel denklemler sisteminin iç yapısı ile bağlantılıdır. Bu iç yapı ise baz fonksiyonları ile ilgilidir.

Böylelikle hangi baz fonksiyonunun hangi sonlu fark denklemine karşılık geldiğinin araştırılması yaklaşım açısından önemlidir.

İkincisi SEY'nin iki ve üç boyutlu problemlere uygulanması sonlu farklar yönteminin aynı problemlere uygulanması ile karşılaştırıldığında daha zordur. Eğer SEY'nin sonucu olan sonlu farkları yazabilirsek o zaman SEY'nin tüm aşamalarını değil, sadece onun verdiği SF'ı yazarsak SEY'ni uygulayabiliriz. Bu ise hesaplamaları kolaylaştırır.

Bölüm 2'de, karmaşık problemin varyasyonel çözümü başlığı altında Laplace operatörüne varyasyonel yaklaşım verilmiş, Lineer simetrik ve pozitif tanımlı operatörlerle bağlı bilineer fonksiyonelin minimumu problemi incelenmiştir. Ayrıca sonlu elemanlar yönteminin temel kavramları ve yapısı ile sonlu farklar yönteminin genel tanımları verilmiştir.

3. Bölümde, karmaşık probleme sonlu elemanlarla yaklaşım ele alınmıştır. Bunun için önce dörtgen ve üçgen lagrange sonlu elemanlar uzayında lineer baz fonksiyonları tanımlanmış lokal ve global sertlik matrisleri oluşturulmuştur. Yine bu bölümde bir boyutlu halde doğal koordinatlar tanımlanmış, üçgen ve dörtgen sonlu elemanlarda doğal koordinatlar alınarak karmaşık probleme sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır.

4. Bölümde, SEY'den elde edilen sonlu farkların, klasik sonlu farklarla karşılaştırılması incelenmiştir. Bunun için dörtgen ve üçgen elemanlardan elde edilen sonlu fark denklemleri çıkarılmış ve bu denklemlerin klasik sonlu fark denklemleriyle karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırma sonucu, ele alınan diferansiyel denklemin çözümü için daha az işlem gerektiren sonlu fark denklemleri çıkarılmıştır.

BÖLÜM 2. KARMAŞIK PROBLEMİN VARYASYONEL ÇÖZÜMÜ

2.1. Laplace Operatörü İçin Karmaşık Sınır Değer Problemine Varyasyonel Yaklaşım

$\Omega \subset R^2$ alanında Laplace operatörü için aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım.

$$-\Delta\, u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y)\,,\ (x,y) \in \Omega \quad \Omega = \{(x,y): 0 < x < a, \quad 0 < y < b\} \tag{2.1}$$

$$u(x,y) = 0 \quad , \quad (x,y) \in \Gamma_1 \quad , \quad \operatorname{meas}\Gamma_1 \neq 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = \varphi(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \Gamma_2 \tag{2.3}$$

burada $\Gamma = \partial\Omega$, $\overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \Gamma$ ve $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$

Tanım 2.1. (2.1)-(2.3) problemine, Laplace operatörü için formüle edilmiş karmaşık problem denir.

(2.1) denkleminden u=u(x,y) fonksiyonunun $C^2(\Omega)$'dan, (2.3) koşulundan ise aynı fonksiyonun $C^1(\overline{\Omega})$'dan olmasının istendiği açıkça görülmektedir. Bu nedenle $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olması gerekmektedir.

Fakat pratik problemler incelenirken çoğu kez u=u(x,y) fonksiyonunun $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sınıfından olmadığı ortaya çıkar. Bundan dolayı diferansiyel denklemler teorisinde klasik çözüm ve genelleşmiş çözüm gibi iki kavram vardır.

Tanım 2.2. (2.1)-(2.3) denklemlerini sağlayan ve $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ sınıfından olan u=u(x,y) fonksiyonuna karmaşık problemin klasik çözümü denir.

Klasik çözüm tanımını genişleterek, genelleşmiş çözümü tanımlayalım. Bunun için (2.1) denkleminin her iki yanını şimdilik keyfi v=v(x,y) fonksiyonu ile çarpıp integralleyelim.

$$\iint_{\Omega}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]v\,dxdy=\iint_{\Omega}F(x,y)v\,dxdy$$

sol yanına,

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v\right]dxdy=-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy+\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds \qquad (2.4)$$

Green formülünü (Tuncer 1992) uygularsak yukarıdaki integral eşitlikten,

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Omega}F(x,y)v\,dxdy+\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds$$

elde edilir.

Keyfi olan v(x,y) **fonksiyonunun da** (2.2) Dirichlet koşulunu sağladığını varsayalım. Buna göre sağ yandaki Γ üzerindeki integral yerine sadece Γ_2 üzerinde integral alınır ve (2.3) koşulunu da göz önüne alırsak yukardaki integral eşitliğinden,

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Omega}F(x,y)v\,dxdy+\int_{\Gamma_2}\varphi(s)v\,ds \qquad (2.5)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol yanına dikkat edilirse u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlarından sadece kısmi türevlerinin integrallenebilmesi (Lebesque anlamında) istenir.

Bu nedenle fonksiyonel analizden bilinen $L_2(\Omega)$ ve $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ uzaylarının tanımlarını hatırlamakta yarar vardır, (Renardy and Rogers 1992, Kolmogorov and Formin 1977).

Tanım 2.3. Karesi Ω 'da integrallenebilen fonksiyonlar sınıfına $L_2(\Omega)$ uzayı denir:

$$L_2(\Omega) = \left\{ \exists u: \iint_\Omega u^2(x,y)dxdy < +\infty \right\}$$

(Kolmogrov and Formin 1977). Bu uzayda norm,

$$\|u\|_0 \equiv \left\{ \iint_\Omega u^2(x,y)dxdy \right\}^{1/2}$$

gibi tanımlanır.

Tanım 2.4. Kendisinin ve birinci mertebeden kısmi türevlerinin (genelleşmiş türev anlamında) karesi Ω'da integrallenebilen fonksiyonlar kümesine $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ Sobolev uzayı denir (Adams 1975).

$$H^1(\Omega) = \left\{ \exists u \in L_2(\Omega): \iint_\Omega \left[u^2(x,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy < +\infty \right\}$$

Bu uzayda norm,

$$\|u\|_1 \equiv \left\{ \iint_\Omega \left[u^2(x,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy \right\}^{1/2}$$

gibi tanımlanır.

Tanım 2.5. Eğer $u \in H^1(\Omega)$ ise ve u(x,y) fonksiyonu (2.2) koşulunu sağlıyorsa, buna göre bu fonksiyonlar sınıfı,

$$\overset{o}{H}{}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma_1\}$$

gibi tanımlanır.

Buradan $\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ uzayının $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olduğu açıkça görülür. $H^1(\Omega)$'dan olan fonksiyon sürekli olmayabilir. Bu nedenle burada $u \in H^1(\Omega)$'dan olan fonksiyonlar için u(x,y)=0, $u(x,y)\in\Gamma_1$ değeri izdüşüm anlamındadır.

(2.1)-(2.3) problemini ele alalım. u(x,y) fonksiyonu $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ kümesinin dışında ise, yani u(x,y) daha az süreklilik koşulunu gerektiriyor ise, bu koşulda klasik çözümün tanımı genişletilebilir. Yukarıdaki (2.1)-(2.3) problemi, (2.5) integral eşitliğine dönüştü. Bu eşitlikten görüldüğü gibi $u, v \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ ise (2.5)'in anlamı vardır. (2.5)'te (2.2) ve (2.3) sınır koşulları göz önüne alınmıştır.

Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış oluruz.

Teorem 2.1. Eğer, $u = u(x,y) \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonu (2.1)-(2.3) probleminin çözümü ise bu koşulda keyfi $v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ fonksiyonu için aynı zamanda (2.6) integral eşitliğini de sağlar.

Bu teoremin tersini de kanıtlamak mümkündür. Çalışmamın sınırlı boyutunu göz önüne alarak bununla ilgili olarak Rektorys (1977) monografisini öneririm.

Teorem 2.1'e dayanarak (2.1)-(2.3) probleminin çözümü daha geniş sınıfta tanımlanabilir (Bramble 1970, Bramble and Hilbert 1970, Rektorys 1977).

Tanım 2.6. (2.6) integral eşitliğini $\forall v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ için sağlayan $u \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ fonksiyonuna (2.1)-(2.3) probleminin genelleşmiş (veya zayıf) çözümü denir.

Klasik çözüm ile genelleşmiş çözümü karşılaştıralım. Eğer u=u(x,y) fonksiyonu $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ sınıfından ise ve bu fonksiyon (2.1)-(2.3) karmaşık probleminin de çözümü ise Teorem 2.1'den görüldüğü gibi hem de (2.6) integral eşitliğini sağlar. Fakat $u \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu sadece (2.6) integral eşitliğinin çözümü ise (2.1)-(2.3) probleminin çözümü olmayabilir. Genel çözümün hemde klasik çözüm olması için, klasik çözümün tanımlandığı $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ kümesini genişleterek, genelleşmiş çözümün tanımlandığı $H^1(\Omega)$ uzayını elde etmiş oluruz.

2.2. Lineer, Simetrik ve Pozitif Tanımlı Operatörlerle Bağlı Bilineer Fonksiyonelin Minimumu Problemi

f, g H reel Hilbert uzayının keyfi iki elemanı olsunlar. (f,g)=r olacak şekilde bir $r\in R^1$ skaler çarpım tanımlayalım. Bu skaler çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\forall a\in R^1$ $\quad (af,g)=a(f,g)$
2. $\forall h\in H$ $\quad (f+h,g)=(f,g)+(h,g)$
3. $\forall f\in H$ $\quad (f,f)>0\ ;\ (f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$

H uzayında normu, $\|f\| = \sqrt{f,f}$ şeklinde tanımlayalım.

A:H→H operatörü;

Simetrik,

$$\forall u,v \in H \quad (Au,v)=(u,Av) \tag{2.7}$$

Pozitif tanımlı,

$$\forall u \in H \quad (Au,u) \geq \gamma\|u\|^2, \quad \gamma>0 \qquad \gamma \in R \tag{2.8}$$

ve

$$\forall u, v \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \tag{2.9}$$

lineer operatör olsun.

$$Au = F, \ u \in H, \ F \in H \tag{2.10}$$

operatör denklemini göz önüne alalım, A operatörünün tanım bölgesi D(A) ile gösterelim, D(A)'nın H uzayında yoğun olduğunu varsayalım ve aşağıdaki gibi yeni bir skaler çarpım tanımlayalım.

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(A) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_A = (A\varphi_1, \varphi_2) \tag{2.11}$$

Bu skaler çarpımla,

$$\|\varphi\|_D = \sqrt{(\varphi, \varphi)_A} \quad , \quad \varphi \in D(A)$$

normu tanımlanır.

D(A) kümesi linealdir, yani $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(A)$ için, $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in D(A)$, $\alpha_i \in R^1$. Bu linealde,

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_D, \quad u, v \in D(A) \tag{2.12}$$

metriğini katarak D(A)'da normu tanımlamak mümkündür. D(A) linealinin (2.12) metriği ile oluşturduğu yeni uzayı H_A ile gösterelim. D(A)⊂H olduğundan H_A⊂H ve (2.8)'den,

$$\|u\|_D^2 \geq \alpha \|u\|^2 \text{ veya } \|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|u\|_D$$

elde edilir. Buradaki $\|.\|$ normu H uzayındaki normdur. Buna göre, $\{u_n\} \subset H$ dizisi H_A metrik uzayında yakınsak ise H metrik uzayında da yakınsaktır.

Genel olarak H_A uzayı H-Hilbert uzayında tam değildir (Kolmogorov and Formin 1977). Fakat H_A tam değilse bile "özel" elemanlar ekleyerek onu tam yapmak mümkündür (Rektorys 1977). Bu nedenle H_A'nın H uzayında (2.12) metriği anlamında tam olduğunu varsayacağız. Ayrıca D(A) lineali H_A'da yoğundur Yani, $u \in H_A$ ise onu keyfi D(A)'dan olan elemanlarla yaklaştırmak mümkündür.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in D(A) \quad \|u - v\|_D < \varepsilon$$

$A \equiv \Delta$ Laplace operatörünün tanım alanı $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ genişletilerek $H^1(\Omega)$ sobolev uzayı elde edilmişti. Burada da A pozitif operatörünün tanım alanı olan D(A) linealini genişleterek $H_A \subset H$ tam uzayına geçilmesi (2.10) probleminin klasik çözümü olan $u \in D(A)$ çözümünün daha geniş bir uzayda tanımlanması olanağını sağlar. (2.10) denkleminin her iki yanını skaler olarak $v \in H_A$ ile çarpalım. Buna göre H_A uzayında aşağıdaki problem elde edilir.

$$\exists u \in H_A \quad (Au, v) = (F, v) \quad \forall v \in H_A \tag{2.13}$$

(2.13) probleminin $u \in H_A$ çözümüne (2.10) probleminin genelleşmiş veya zayıf çözümü denir.

Genelleşmiş çözümün bir fonksiyonelin minimumu olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 2.2. Eğer (2.10) denkleminin çözümü varsa bu çözüm,

$$J(u) = 0.5(Au, u) - (F, u),\ u \in D(A),\ F \in H \tag{2.14}$$

fonksiyoneline minimum değer verir veya tersine olarak, eğer D(A)'nın bir u_o elemanı J(u) fonksiyoneline minimum değer veriyorsa, bu koşulda u_o (2.10) denkleminin de çözümüdür, (Rektorys 1977).

Kanıt: $u_o \in D(A)$ (2.10) denkleminin çözümü olsun, $\forall u \in D(A)$ ve $\forall r \in R$ alalım. D(A) kümesi lineer olduğundan $u_r = u_o + rv \in D(A)$ olur. Buradan $(Au_o,v)-(F,v)=0$ olacağından,

$$J(u_r) = 0.5(Au_r, u_r) - (F, u_r) = 0.5(A(u_o + rv), u_o + rv) - (F, u_o + rv)$$

$$= 0.5(Au_o, u_o) + 0.5r^2(Av, v) + r(Au_o, v) - (F, u_o) - r(F, v)$$

$$= 0.5(Au_o, u_o) - (F, u_o) + 0.5r^2(Av, v)$$

$$= J(u_o) + 0.5r^2(Av, v)$$

eşitliğini elde ederiz. A operatörü pozitif tanımlı olduğu için,

$$J(u_r) \geq J(u_o), \quad \forall r \in R \tag{2.15}$$

olur. Bu ise, $u_o \in D(A)$ elemanının (2.14) fonksiyoneline minimum değer vermesi anlamına gelir.

$u_o \in D(A)$ elemanının, (2.14) fonksiyoneline D(A) linealinde minimum değer verdiğini varsayalım ve u_o elemanının, (2.10) denklemini de sağladığını kanıtlayalım. (2.15) eşitliğine göre, $\forall r \in R$ için,

$$J(u_r) = J(u_o + rv) \geq J(u_o)$$

ve

$$J(u_r) - J(u_o) = 0.5r^2(Av, v) + r(Au_o - F, v)$$

olduğundan,

$$0.5r^2(Av,v)+r(Au_o-F,v)\geq 0$$

olur. A operatörü pozitif tanımlı, $r\in R$ ise keyfi olduğu için son eşitsizlikten,

$$Au_o-F=0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu sonuç $u_0\in D(A)$ elemanının (2.10) denkleminin de çözümü olduğunu gösterir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

(2.11) skaler çarpımı ile tanımlanan fonksiyoneli,

$$a(u,v)=(Au,v) \tag{2.16}$$

ile gösterelim. A operatörünün (2.7)-(2.9) özelliklerine göre a(u,v) fonksiyoneli de pozitif tanımlanmış, simetrik ve lineerdir Yani,

$$a(u,v)=a(v,u);\quad a(u,u)>\gamma\|u\|^2,\ \gamma>0$$

$$a(\alpha u_1+\beta u_2,\gamma u_1+\delta u_2)=\alpha\gamma a(u_1,u_1)+(\alpha\delta+\beta\gamma)a(u_1,u_2)+\beta\delta a(u_2,u_2)$$

A operatöründen farklı olarak, a(u,v) fonksiyoneli tüm H uzayında tanımlıdır.

H_A'da (2.13) problemini ele alalım.

$$\exists u\in H_A\quad a(u,v)=b(v),\quad \forall v\in H_A \tag{2.17}$$

Burada $b(v)=(F,v)$, $F\in H$ şeklindedir.

H_A tam uzayında J(u) fonksiyonelinin minimizasyon problemini,

$$J(u)=\min J(v),\quad v\in H_A,\quad J(u)=0.5a(u,u)-b(u) \tag{2.18}$$

ele alalım.

Teorem 2.3. a(u,v) simetrik, pozitif tanımlı, bilineer, b(v) ise lineer formlar olsun. Bu koşulda (2.14) ve (2.18) problemlerinin herbirinin H_A'da birden fazla çözümü olamaz ve bu problemlerden birinin çözümü diğerinin de çözümü olur, (Rektorys 1977).

Kanıt: (2.17) probleminin tek çözümü olduğunu kanıtlayalım. Bunun için tersini varsayalım. Problemin u_1 ve u_2 gibi iki farklı çözümü olsun. Bu durumda,

$$\forall v\in H\quad a(u_1,v)=b(v),\quad a(u_2,v)=b(v)$$

$$\Rightarrow a(u_1-u_2,v)=0\quad \forall v\in H\Rightarrow u_1=u_2$$

olur. $u\in H_A$ (2.18) minimizasyon probleminin çözümü olsun, $\forall r\in R$, $\forall v\in H$ için,

$$\begin{aligned}J(u+rv)&=0.5a(u+rv,u+rv)-b(u+rv)\\&=0.5a(u,u)+0.5r^2a(v,v)+ra(u,v)-b(u)-r(bv)\\&\geq J(u)=0.5a(u,u)-b(u)\end{aligned}$$

veya

$$0.5r^2a(v,v)+r(a(u,v)-b(v))\geq 0$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik $\forall r\in R$ için doğru olduğundan,

$$a(u,v)=b(v)$$

olur.

Son olarak, (2.17) probleminin çözümü olan $u \in H_A$ fonksiyonunun J(u) fonksiyoneline en küçük değer verdiğini kanıtlayalım.

$$\forall r \in R \quad J(u+rv) = 0.5a(u,u) + 0.5r^2 a(v,v) - b(u)$$
$$= J(u) + 0.5r^2 a(v,v), \quad u \in H$$

eşitliğindeki a(u,v) formu pozitif tanımlı olduğu için,

$$\forall r \in R \quad J(u+rv) \geq J(u), \quad v \in H$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Böylece (2.10) probleminin genelleşmiş çözümü, yani (2.17) probleminin çözümünün aranması, (2.18) minimizasyon (veya varyasyonel) probleminin çözümünün aranması problemine getirildi.

(2.17) probleminin çözümünün varlığı Lax-Milgram Lemmasından (Rektorys, 1977) doğrudan elde edilir.

2.3. SEY'nin Temel Kavramları ve Genel Yapısı

2.3.1. SEY'nin temel kavramları

SEY'nin herhangi bir varyasyonel probleme uygulanması temel iki aşamadan oluşur. Birinci aşamada, problemin verildiği G bölgesi belli koşulları sağlayan sonlu elemanlara bölünür ve bu elemanlara uygun baz fonksiyonları seçilir (Ciarlet 1976).

İkinci aşamada ise $H_h \subset H$ uzayında J(u) fonksiyonelinin minimum değerinin aranması sonucu lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

$G \subset E_n$ n boyutlu E_n Öklid uzayında, sınırı ∂G olan bölge olsun. $\overline{G} = G \cup \partial G$ kapalı alanını aşağıdaki koşulları sağlayan sonlu sayıda $e_m, m = \overline{1, M}$ kapalı alanlarına ayıralım:

a) $\bigcup\limits_{m=1}^{M} e_m = \overline{G}$;

b) $\forall m_1 \neq m_2 \ \ \text{int}\, e_{m_1} \cap \text{int}\, e_{m_2} = \varnothing$

c) Eğer $e_{m_1} \cap e_{m_2} \neq \varnothing$ ise, bu koşulda e_{m_1} ve e_{m_2} kümelerinin ortak sınırları vardır.

e_m kümelerine SE denir, G bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesine, G bölgesinin T_h bölgüsü (triangulasyonu) denir. G bölgesinin T_h bölgüsü, SFY'de W_h kafesinin tanımlanmasına benzerdir (burada h, bölgenin bölünme parametresidir).

e_m sonlu elemanının tepe noktasını, yani kafesin düğüm noktalarını P_i ile (i düğüm noktasının numarasıdır), bu nokta ile ilişkisi olan sonlu elemanların sayısını n_i ve bu sayılar kümesini kendisi ise N_i ile gösterelim,

$$n_i = \text{meas} N_i, \quad N_i = \{m : P_i \in e_m\}$$

Herbir P_i noktasında aşağıdaki gibi bir $\xi_i(x)$ $x \in G$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\xi_j(P_i) = \delta_{i,j}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\xi_{i,j}(x) \begin{cases} \neq 0 & x \in G_i, \\ \equiv 0 & x \notin G_i, \end{cases} \quad G_i = \cup e_m, \ m \in N_i \tag{2.20}$$

Birinci koşul, herbir $\xi_i(x)$ fonksiyonunun yalnız x_i düğüm noktasında sıfırdan farklı olduğunu, (2.20) koşulu ise $\xi_i(x)$ fonksiyonunun G bölgesinin sadece G_i kısmında sıfırdan farklı olduğunu belirtir. $\xi_i(x)$ fonksiyonlarına, sonlu dayanıklı (support) fonksiyonlar denir ve $G_i = \mathrm{supp}\xi_i(x)$ şeklinde gösterilir (Rektorys 1977). (2.19) koşuluna göre $\xi_i(x)$ fonksiyonlar sistemi lineer bağımsızdır. Yani,

$$\forall C_i, \quad i=\overline{1,N}, \quad \sum_{i=1}^{N} C_i\xi_i = 0 \Leftrightarrow C_i = 0, \ \forall i$$

Burada N, kafesin düğüm noktalarının sayısıdır. Eğer $\xi_i(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu boyutlu uzayı H_h ile gösterirsek, herhangi $u_h \in H_h$ fonksiyonu için,

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} C_j\xi_j(x) \tag{2.21}$$

olur.

Tanım 2.7. (2.19)-(2.20) özelliklerine sahip $\xi_i(x)$ fonksiyonlar sisteminin oluşturduğu H_h uzayına Lagrange sonlu elemanlar uzayı denir.

Lagrange SE'ının tanımına göre (2.21) ifadesinin C_i katsayıları $u_h(x)$ fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleridir.

$$u_h(P_i) = C_i, \quad i=\overline{1,N} \tag{2.22}$$

Buradan görülebileceği gibi Lagrange SE uzayı sürekli fonksiyonlardan oluşur.

Herbir $P_i \in W_h$ noktasında aşağıdaki özelliklere sahip olan sürekli türevlenebilen $\eta_i^{(k)}(x), \quad x \in G \subset E_n$ fonksiyonlarını tanımlarsak;

$$\eta_j^{(k)}(P_i) = 0, \quad \forall P_i \in W_h, \quad k=\overline{1.n}, \quad i,j=\overline{1.N} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial \eta_j^{(k)}(P_i)}{\partial x_i} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}, \quad k,\ell = \overline{1.n} \tag{2.24}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bunlara ek olarak $\xi_i(x)$ fonksiyonlarının sürekli türevlenebilir olduğunu ve

$$\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1.N}, \quad k = \overline{1,n} \tag{2.25}$$

koşulunu sağladığını varsayalım.

Tanım 2.8. Sürekli türevlenebilir, $\xi_i(x), \eta_i^{(1)}(x), \eta_i^{(2)}(x), \ldots, \eta_i^{(n)}(x)$ fonksiyonlar sistemi (2.19)-(2.20), (2.23)-(2.25) koşullarını sağlıyorsa ve sonlu dayanıklı fonksiyonlar ise, bu durumda $\xi_i(x), \eta_i^{(k)}(x)$ fonksiyonlarının belirlediği H_h uzayına Hermit SE uzayı denir.

Herhangi $u_h(x) \in H_h$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} & u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[C_i^{(0)} \eta_i^{(0)}(x) + C_i^{(1)} \eta_i^{(1)}(x) + \ldots C_i^{(n)} \eta_i^{(n)}(x) \right] \in H_h \\ & \eta_i^{(0)}(x) \equiv \xi_i(x) \end{aligned} \tag{2.26}$$

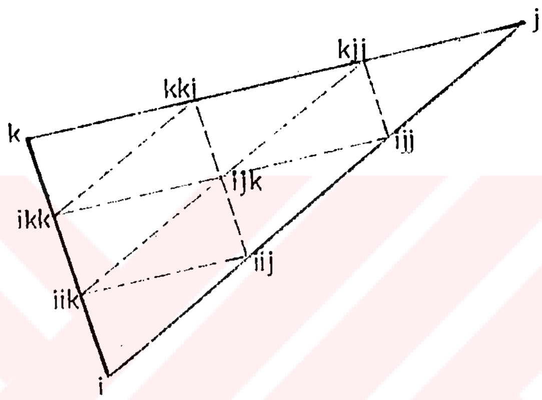
şeklinde yazılabilir. Burada $C_i^{(0)}$ katsayıları $u_h(x)$ fonksiyonunun kendisinin, $C_i^{(k)}$, $k = \overline{1.n}$ ise $u_h(x)$ fonksiyonunun x_k argümanına göre birinci mertebeden türevinin P_i noktasındaki değeridir.

$$\frac{\partial u_h(P_i)}{\partial x_k} = C_i^{(k)}, \quad k = \overline{1.n}, \quad i = \overline{1.N} \tag{2.27}$$

W_h kafesinin esas düğüm noktaları (sonlu elemanların tepe noktaları) konularak elde edilen sonlu elemanlara birinci tip SE denir. Bazı durumlarda H uzayı sonlu boyutlu

H_h uzayı ile yaklaştırıldığında esas düğüm noktaları ve onlara bağlı olan baz fonksiyonları yeterli olmaz ve bu nedenle, ek düğüm noktalarının alınması gerekir. T_h bölgüsünde elemanların kenarlarının orta noktaları olan $P_{ij}=(P_i+P_j)/2$ noktalarını ek nokta olarak tanımlarsak, ek noktalar alınarak tanımlanan sonlu elemanlara ikinci tip SE denir.

Benzer yöntemle üçgen ve piramit şekilli SE de $P_{ijk}=(a_i+a_j+a_k)/3$ $i<j<k$ ve $i\neq k$ için $P_{iik}=(2a_i+a_k)/3$ ek noktalarını alabiliriz. Bu tip elemanlara üçüncü tip SE denir, Şekil 2.1.



Şekil 2.1. Üçgen şekilli sonlu eleman için ek noktaların alınması

Birçok durumlarda sonlu boyutlu H_h uzayında minimize edilen fonksiyonelin değerini hesaplamak için işlemlerin tümünü seçilen herhangi bir sonlu elemanda yapmak ve daha sonra, uygun dönüşümlerin yardımı ile, elde edilen sonuçları diğer sonlu elemanlara genellemek mümkündür. Bu nedenle SEY teorisinde afin sonlu elemanlar ailesinin önemli bir yeri vardır.

Tanım 2.9. E_n öklid uzayında doğrusal uç noktayı başka bir doğrusal uç noktaya bire bir eşleyen dönüşüme afin dönüşümü denir.

Afin dönüşümünün analitik ifadesi,

$$\widetilde{x} = Ax + b$$

formülü ile verilir. Burada A, nxn boyutlu kare matris, $x, \tilde{x}$ ve b ise E_n uzayında n boyutlu vektörleri gösterir (det $A \neq 0$).

Tanım 2.10. Eğer T_h bölgüsünün tüm sonlu elemanları afin dönüşümü ile yalnız seçilen bir sonlu elemandan elde edilirse, bu sonlu elemanlar ailesine afin sonlu elemanlar ailesi denir.

Tanımda sözü edilen, sonlu elemanın basit seçilmesi, sistem matrisinin ve sağ taraf vektörünün, elemanlarının kolayca hesaplanmasını sağlar.

2.3.2. SEY'nin genel yapısı

$$\exists\, u \in H \quad a(u,v) = b(v), \quad \forall v \in H \tag{2.28}$$

şeklinde verilen H gerçel Hilbert uzayında varyasyonel problemi göz önüne alalım. Burada a(u,v) ve b(v) sırasıyla bilineer ve lineer formlardır. Galerkin yöntemine göre (2.28) probleminin,

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} C_i \xi_i \tag{2.29}$$

şeklinde yaklaşık çözümü arandığında,

$$\sum_{j=1}^{N} a(\xi_i, \xi_i) C_j = b(\xi_i), \quad i = \overline{1.N} \tag{2.30}$$

cebirsel denklem sistemine varılır (Zienkiewicz and Taylor, 1987). Lagrange ve Hermit sonlu elemanlarını kullanarak (2.30) denklem sisteminin elde edilmesini araştıralım. (Ciarlet and Raviart 1972)

u(x) fonksiyonunun tanımlandığı G bölgesinin sonlu elemanlara ayrıldığını ve T_h bölgüsünün birinci tip sonlu elemanlardan oluştuğunu varsayalım. u(x) yaklaşık çözümünü H_h birinci tip Lagrange sonlu elemanlar uzayında arayalım. a(u,v) ve b(v) formlarının G bölgesinde toplamsal olduğunu gözönüne alırsak,

$$a(u,v)=\sum_{m=1}^{M} a_m(u,v), \quad b(v)=\sum_{m=1}^{M} b_m(v) \tag{2.31}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $a_m(u,v)$ ve $b_m(v)$ bilineer ve lineer formların e_m sonlu elemanına daralmasıdır.

$$a_m(u,v)=a(u,v)\big|_{e_m}, \quad b_m(v)=b(v)\big|_{e_m} \tag{2.32}$$

Tanım 2.11. $\xi_i(x), i=\overline{1.N}$ baz fonksiyonlarının verilmiş e_m sonlu elemanına daralması olan,

$$\varphi_{m,i}(x)=\xi_i(x)\big|_{e_m}$$

fonksiyonuna e_m sonlu elemanının form fonksiyonu denir.

e_m sonlu elemanında daralmaları sıfırdan farklı olan baz fonksiyonlarının indislerinin oluşturduğu M_m kümesini tanımlayalım:

$$M_m=\{i:\varphi_{m,i}(x)\not\equiv 0\}$$

μ_m=measM_m olsun (2.31) toplamsallık özelliğini (2.30)'da göz önüne alırsak,

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_m(\xi_i,\xi_j)C_j=\sum_{m=1}^{M} b_m(\xi_i), \quad i=\overline{1.N} \tag{2.33}$$

sistemini elde ederiz. Form fonksiyonunun tanımına göre $a_m(\xi_i,\xi_j)=a_m(\varphi_{m,i},\varphi_{m,j})$ olur. Sadece $k\in M_m$ için, $\varphi_{k,m}(x)\neq 0$ olduğundan dolayı herbir $i=\overline{1,N}$ için,

$$a_m\left(\varphi_{m,i},\varphi_{m,j}\right)=\begin{cases}\neq 0 & j\in M_m\\ =0 & j\notin M_m\end{cases} \tag{2.34}$$

olur. Böylece (2.34) özelliğini (2.33) sisteminde göz önüne alırsak,

$$\sum_{j\in M_m}\sum_{m=1}^{M} a_m(\varphi_{m,i},\varphi_{m,j})C_j=\sum_{m=1}^{M} b_m(\varphi_{m,i}),\quad i=\overline{1.N} \tag{2.35}$$

sistemini elde ederiz.

$$K_m=\left\{(k_{i,j}^{m})\right\}=\left\{(a_m(\varphi_{m,i},\varphi_{m,j}))\right\};$$

$$b_m=\left\{(b_m^{(i)})\right\}=\left\{(b_m(\varphi_{m,i}))\right\},\quad i,j=\overline{1,N}; \tag{2.36}$$

$$K=\sum_{m=1}^{M}K_m,\quad b=\sum_{m=1}^{M}b_m$$

ifadelerini tanımlayalım.

Burada K_m ve K matrislerinin NxN boyutlu olduğu bellidir. K_m matrisine e_m sonlu elemanının, K matrisine ise (2.28) sisteminin sertlik (stiffness) matrisi denir.

(2.34) ifadesine göre K matrisinin içinde çok sayıda sıfır vardır. K matrisinin bu özelliği SEY'ne özgüdür ve bu $\xi_i(x)$ baz fonksiyonlarının sonlu dayanıklı fonksiyonlar olmasının sonucudur. K'nın bant matrisi olması hesaplamaları basite indirger ve bilgisayarın belleğine yazılma işlemini kolaylaştırır.

Elemanlarının sayısı μ_m olan M_m kümesinin elemanlarını $Z_m=\{1,2,...,\mu_m\}$kümesine eşleyen I_m birebir dönüşümünü tanımlayalım. e_m sonlu elemanının düğüm noktalarının numaralanmasını Z_m kümesine göre yapalım.

$$\overset{o}{K}_m=\left\{(k_{ij}^{m})\right\}_{i,j\in Z_m},\quad \overset{o}{b}=\left\{(b_m^{(i)})\right\}_{i\in Z_m} \tag{2.37}$$

ile gösterirsek, buna göre $\overset{o}{K}_m$ matrisi $\mu_m x \mu_m$, $\overset{o}{b}_m$ sağ taraf vektörü ise μ_m boyutlu olmalıdır.

$M_m \xrightarrow{I_m} Z_m$ dönüşümünü şöyle açıklayabiliriz. G alanının T_h bölgüsü yapıldığında W_h kafesinin düğüm noktaları belli şekilde numaralanır. Bu numaralamaya düğüm noktalarının global numaralanması denir. M_m kümesi K_m matrisinin sıfırdan farklı elemanlarının hangi satır ve sütunda olduğunu göstermektedir. I_m dönüşümü ile e_m sonlu elemanının düğüm noktalarının global numaraları uygun şekilde "aşağıdan yukarıya, soldan sağa" numaralama kuralı ile bir den μ_m'a kadar lokal numaralara geçer, (Şekil 2.2).

K_m matrisinin sadece sıfır olmayan elemanlarını kullanmakla $\mu_m x \mu_m$ boyutlu $\overset{o}{K}_m$ matrisi kurulur. Bu şekilde tanımlanan $\overset{o}{K}_m$ matrisine e_m sonlu elemanının lokal sertlik matrisi denir.

Böylece, I_m dönüşümünden sonra e_m sonlu elemanı için denklemler sistemi,

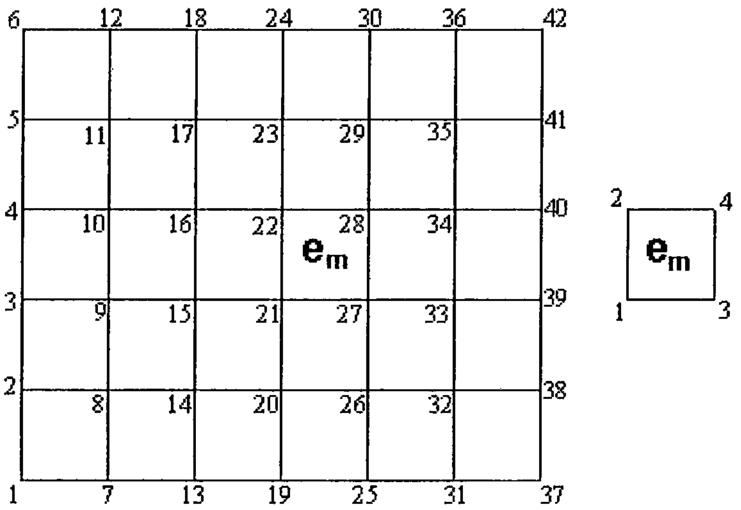
$$\sum_{j=1}^{\mu_m} k_{ij}^{m} C_j = b_m^{(i)}, \quad i \in Z_m \tag{2.38}$$

olur.

Sonlu elemanlar uzayının birinci tip Hermit sonlu elemanlar uzayı, bilinmeyenlerin ise yaklaşık çözümün ve birinci dereceden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri olduğunu varsayalım. (2.36) ifadesi (2.30) da göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=0} a(\eta_i^{(k)}, \eta_j^{(\ell)}) C_j^{(\ell)} = b(\eta_i^{(k)}), \quad i = \overline{1.N}, \quad k = \overline{1,n} \tag{2.39}$$

sistemi elde edilir. Burada N, düğüm noktalarının, n ise bağımsız değişkenlerin sayısıdır.



Şekil 2.2. I_m dönüşümü ile e_m sonlu elemanının düğüm noktalarının aşağıdan yukarıya, soldan sağa numaralandırılması

e_m sonlu elemanlarının form fonksiyonları,

$$\varphi_{m,i}^{(k)}(x) = \eta_i^{(k)}(x)\Big|_{e_m}, \quad k = \overline{0,n}$$

şeklinde yazılırsa, buna göre $m = \overline{1,M}$, $i = \overline{1,N}$ için,

$$a_m\left(\varphi_{m,i}^{(k)}, \varphi_{m,j}^{(\ell)}\right) = \begin{cases} \neq 0 & j \in M_m^{(1)} \\ = 0 & j \notin M_m^{(1)} \end{cases}$$

elde edilir. Burada,

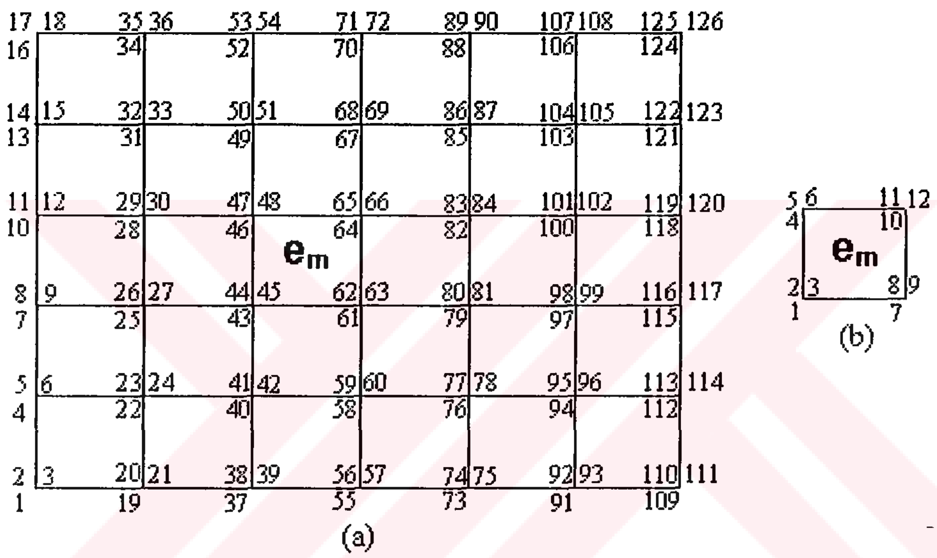
$$M_m^{(1)} = \left\{ i : \varphi_{m,i}^{(k)} \neq 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n \right\}$$

dir. Böylelikle (2.39) sistemi,

$$\sum_{j \in M_m^{(1)}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{\ell=0}^{n} a_m(\varphi_{m,i}^{(k)}, \varphi_{m,j}^{(\ell)}) C_j^{(\ell)} = \sum_{m=1}^{M} b(\varphi_{m,i}^{(k)}) \quad i = \overline{1,N}, \quad k = \overline{0,n} \tag{2.40}$$

şekline dönüşür. (2.40)'dan bu sistemin matrisinin (N+n+1)x(N+n+1) boyutlu olduğu görülür. Benzer şekilde sonlu elemanın sertlik matrisi de tanımlanabilir.

Lagrange sonlu elemanlarından farklı olarak, Hermit sonlu elemanlarının kullanılması durumunda problem aynı kafeste çözüldüğünde sertlik matrisinin boyutu daha da büyür. Örneğin Şekil 2.3'de Lagrange sonlu elemanları kullanıldığı zaman global matris 42x42, lokal matris 4x4 boyutlu, Hermit sonlu elemanları kullanıldığı zaman global ve lokal matrisler sırasıyla, 126x126 ve 12x12 boyutlu olurlar.



Şekil 2.3. Hermit sonlu elemanları kullanıldığında, a) Noktaların global numaralandırılması b) Lokal numaralandırılması

Eğer sonlu elemanlar ailesi afin sonlu elemanları ise, lokal sertlik matrisi sadece pilot (seçilen herhangi bir sonlu eleman) sonlu eleman için hesaplanır.

2.4. SFY'nin Genel Tanımları

SFY genellikle matematiksel fizikte ortaya çıkan kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümünde kullanılır. Kısmi türevli denklemin tanımlı olduğu bir Ω bölgesinde herhangi bir (x_i,y_j) noktasındaki sayısal çözümün bulunması istendiğinde, genelde bölge 0x ve 0y doğrultusunda h ve τ kenarlı dikdörtgenlere ayrılır. Yani, kafes konumuna getirilir. Diğer eğik veya kutupsal koordinatlar sisteminde bölge kenarları eğrisel olan parçalara ya da alanlara ayrılabilir.

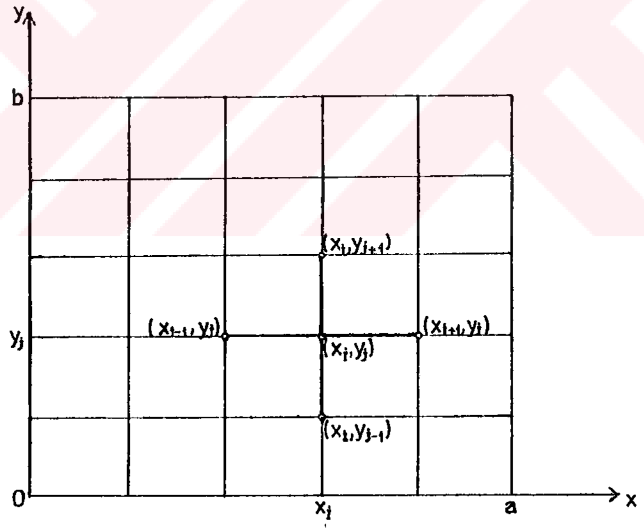
Hangi durumda olursa olsun, (x_i,y_j) noktası bölgenin bir düğüm noktasıdır.

Kısmi türevli denklemleri sonlu fark denklemleri ile ifade etmek için, diferansiyel operatörler yerine fark operatörlerinin yazılması gerekir (Babuska and Aziz 1972, Oden and Reddy 1976).

u(x,y) fonksiyonunun tanım alanı olarak,

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$$

dikdörtgenini ele alalım (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. SFY'de, Ω dikdörtgensel bölgesinin kafes konumuna getirilmesi

$0 \le x \le a$ aralığında,

$$\overline{W}_x = \{x_i,\ i = 0,1,2,\ldots,N,\quad x_o = 0,\quad x_N = a\}$$

$0 \le y \le b$ aralığında ise,

$$\overline{W}_y = \{y_j,\ j = 0,1,2,\ldots,M,\quad y_o = 0,\quad y_M = b\}$$

kafesini tanımlayalım.

$$h_i = x_i - x_{i-1},\quad i = \overline{1,N}$$
$$\tau_j = y_j - y_{j-1},\quad j = \overline{1,M}$$

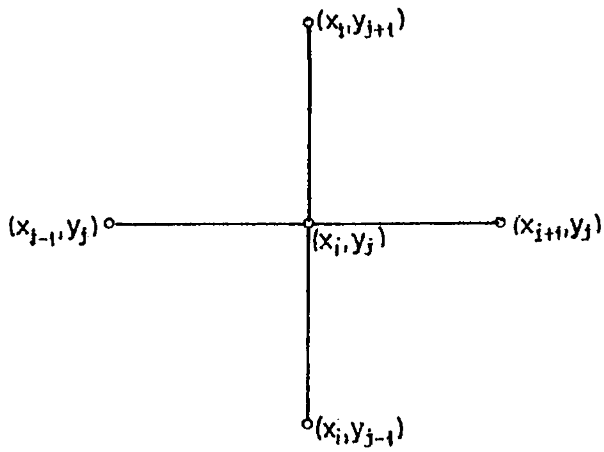
olsun. Burada x_i ve y_i noktalarına sırasıyla $\overline{W}_x$ ve $\overline{W}_y$'nin düğüm noktaları denir.

$$\overline{W} = \{(x_i, y_j) |\ x_i \in \overline{W}_x,\ y_j \in \overline{W}_y,\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,M}\}$$

düğüm noktaları kümesine Ω dikdörtgeninde tanımlanmış kafes denir.

Eğer $h_i = h =$ sabit > 0, $\tau_j = \tau =$ sabit > 0 olursa $\overline{W}$ kafesine dikdörtgen kafes denir.

$h = \tau$ olması durumunda ise kafese kare kafes denir. $\overline{W}$ düzenli kafesinde herhangi bir (x_i,y_j) noktasını ele alalım (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. $\overline{W}$ düzenli kafesinde herhangibir (x_i, y_j) noktası

Sayısal diferansiyelleme formüllerini elde etmek için Ω bölgesinde tanımlı u(x,y) fonksiyonunu $u(x_i,y_j)$ noktasında Taylor serisine açalım.

$$u(x_{i+1},y_j)=u(x_i,y_j)+hu'(x_i,y_j)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i,y_j)+\frac{h^3}{3!}u'''(x_i,y_j)+0(h^4) \quad (2.41)$$

$$u(x_{i-1},y_j)=u(x_i,y_j)-hu'(x_i,y_j)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i,y_j)-\frac{h^3}{3!}u'''(x_i,y_j)+0(h^4) \quad (2.42)$$

$$u(x_i,y_{j+1})=u(x_i,y_j)+\tau u'(x_i,y_j)+\frac{\tau^2}{2!}u''(x_i,y_j)+\frac{\tau^3}{3!}u'''(x_i,y_j)+0(\tau^2) \quad (2.43)$$

$$u(x_i,y_{j-1})=u(x_i,y_j)-\tau u'(x_i,y_j)+\frac{\tau^2}{2!}u''(x_i,y_j)-\frac{\tau^3}{3!}u'''(x_i,y_j)+0(\tau^2) \quad (2.44)$$

(2.41) ve (2.42) ifadelerinde $u(x_i,y_j)$'ler eşitliğin sol tarafına geçirelim, elde edilen ifadeleri h'a bölelim.

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} \sim \frac{u(x_{i+1},y_j)-u(x_i,y_j)}{h}=u_{x,i} \quad (2.45)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} \sim \frac{u(x_i,y_j)-u(x_{i-1},y_j)}{h}=u_{\bar{x},i} \quad (2.46)$$

ifadelerini elde ederiz.

Eğer (2.41)'den (2.42)'yi çıkarırsak,

$$u(x_{i+1},y_j)-u(x_{i-1},y_j)=2hu'(x_i,y_j)+0(h^4)$$

olur. Her iki tarafı 2h'a bölersek birinci dereceden türev için,

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} \sim \frac{u(x_{i+1},y_j)-u(x_{i-1},y_j)}{2h}=u_{\overset{\circ}{x},i} \quad (2.47)$$

elde ederiz.

(2.43) ve (2.44)'den benzer şekilde $\left.\frac{du}{dx}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)}$ için de,

$$u_{y,j}=\frac{u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_j)}{\tau} \tag{2.48}$$

$$u_{\bar{y},j}=\frac{u(x_i,y_j)-u(x_i,y_{j-1})}{\tau} \tag{2.49}$$

$$u_{\overset{0}{y},j}=\frac{u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_{j-1})}{2h} \tag{2.50}$$

elde edilir.

(2.41) ve (2.42) eşitliklerini toplayıp h^2'ye bölersek ikinci dereceden türevler için aşağıdaki yaklaşık ifadeleri buluruz.

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)}\sim\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h^2}=u_{\bar{x}x,i} \tag{2.51}$$

Benzer şekilde (2.43) ve (2.44)'den

$$\left.\frac{d^2u}{dy^2}\right|_{(x,y)=(x_i,y_j)}\sim\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{\tau^2}=u_{\bar{y}y,j} \tag{2.52}$$

ifadesini elde ederiz.

Eğer $\overline{W}_x$ ve $\overline{W}_y$ kafesleri eşit adımlı değillerse, (2.45)-(2.52) ifadeleri aşağıdaki gibi olurlar.

$$u_{x,i} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_{i+1}}$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_i}$$

$$u_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\hbar_i}, \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$$

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{\hbar_i} u(x_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{1}{\hbar}\left[\frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_{i+1}} - \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_i}\right]$$

$$u_{y,j} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\tau_{j+1}}$$

$$u_{\bar{y},j} = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{\tau_j}$$

$$u_{\overset{\circ}{y},j} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\bar{\tau}_j}, \quad \bar{\tau}_j = \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1})$$

$$u_{\bar{y}y,j} = \frac{1}{\bar{\tau}_j}(u_{y,j} - u_{\bar{y},j}) = \frac{1}{\bar{\tau}}\left[\frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\tau_{j+1}} \cdot \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1})}{\tau_j}\right]$$

BÖLÜM 3. KARMAŞIK PROBLEME SE'LA YAKLAŞIM

İki boyutlu problemlerin çözümünde sonlu elemanın yapısının belirlenmesi gerekir. İki boyutlu durumda bölgenin bölüntülenmesi sonucu eğer sınır doğrusal ise, sonuçta üçgen ve dörtgen sonlu elemanlar elde edilir. Eğer bölgenin sınırı eğrisel olursa, sonlu elemanlar da eğrisel üçgen veya eğrisel dörtgenler olurlar. Bu nedenlerle baz fonksiyonlarının seçimi de farklılıklar gösterir, (Becker, Carey and Oden 1981).

3.1. Dörtgen Lagrange SE Uzayında Lineer Baz Fonksiyonları

Dörtgen sonlu elemanlar iki boyutlu halde en basit sonlu eleman şekillerinden birisidir. İki boyutlu sonlu elemanın topolojik çarpımı olmakla bir boyutlu halin genelleşmiş halidir. Dörtgen şekilli G bölgesinde Poisson denklemi için karmaşık sınır problemini inceleyelim.

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{y^2}\right)=F, \quad u=u(x,y), \quad (x,y)\in G \tag{3.1}$$

$$u(x,y)=0, \quad (x,y)\in S_1, \quad S_1\subset\partial G \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=g, \quad (x,y)\in S_2, \quad S_2\subset\partial G \tag{3.3}$$

Burada,

$$G=\{(x,y)|\ 0<x<1, 0<y<1\}$$
$$S_1=\{(x,y)|\ y=0 \quad 0\le x\le 1; \quad x=0 \quad 0\le y\le 1\}$$
$$S_2=\{(x,y)|\ x=1,\ 0<y<1; y=1, 0<x\le 1\}$$

(3.2) koşulu türdeş olmadığı zaman, yani,

$$u(x,y) = u_0, \quad (x,y) \in S_1, \quad S_1 \subset \partial G \tag{3.2'}$$

olursa, $v=u-u_0$ yazarak, (3.1) - (3.3) problemini elde etmenin mümkün olduğunu göz önüne alarak bu probleme sonlu elemanlar yöntemini uygulayalım.

$$\exists u \in \overset{0}{H}{}^1 \in (G) \quad \forall v \in \overset{0}{H}{}^1 \quad a(u,v) = b(v) \tag{3.4}$$

Burada,

$$\begin{cases} a(u,v) = \iint\limits_G \left[\dfrac{\partial u \partial v}{\partial x \partial x} + \dfrac{\partial u \partial v}{\partial y \partial y} \right] \partial x \partial y \\ \\ b(v) = \iint\limits_G F(x)v(x)dx + \int\limits_{S_2} g(s)v(s)ds \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\overset{0}{H}{}^1(G) = \left\{ u \in H^1(G) \middle| \, u = 0, \ S_1\text{'de} \right\} \tag{3.6}$$

3.1.1. Dikdörtgen sonlu elemanlarda lineer baz fonksiyonlarının tanımı

G bölgesini koordinat eksenlerine paralel doğrular ile,

$$e_{ij} = \left\{ (x,y) \in \overline{G} = G \cup \partial G \,\middle|\, x_i \le x \le x_{i+1}, \, y_j \le y \le y_{j+1} \right\} \tag{3.7}$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$

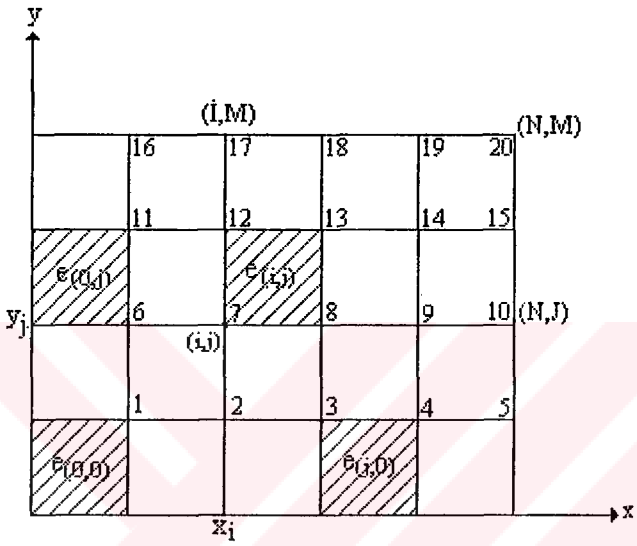
sonlu elemanlarına bölelim.

Baz fonksiyonu olarak, sürekli sonlu dayanıklı $\xi_{ij}(x,y)$ fonksiyonlarını ele alalım ve yaklaşık çözümü,

$$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} C_{ij}\xi_{ij}(x,y) \tag{3.8}$$

$$C_{ij} = u_h(x_i, y_j), \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,M} \tag{3.9}$$

gibi tanımlayalım. i,j düğüm noktasına bağlı olan sonlu dayanıklı $\xi_{ij}(x,y)$ baz fonksiyonu, bölgenin G_{ij} kısmında sıfırdan farklı olmalıdır.



Şekil 3.1. G bölgesinin koordinat eksenine paralel doğrular ile sonlu elemanlara bölünmesi

$$G_{ij} = e_{(i-1,j-1)} \cup e_{(i,j-1)} \cup e_{(i,j)} \cup e_{(i-1,j)} \tag{3.10}$$

Eğer,

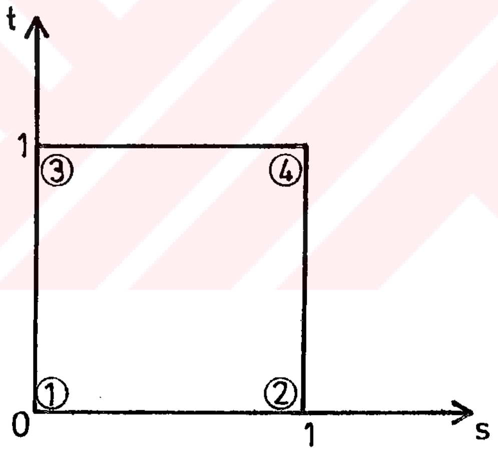
$$\xi_{ij}(x_k, y_\ell) = \delta_{ij,k\ell} = \begin{cases} 0, & (i,j) \neq (k,\ell) \\ 1, & (i,j) = (k,\ell) \end{cases} \tag{3.11}$$

koşulunu sağlayan sürekli $\xi_{ij}(x,y)$ fonksiyonunu $P_1(x,y)=a_0+a_1x+a_2y$ birinci dereceden polinomlar sınıfından alırsak, herbir sonlu elemanda bu polinomları tanımlamak için (3.11) şeklinde dört koşul olduğu halde bilinmeyenler sayısı üçe eşittir. (a_0,a_1,a_2) birinci dereceden polinomlar sınıfından böyle bir fonksiyonun bulunması imkansızdır. Bu nedenle polinomdaki parametrelerin sayısının arttırılması gerekir. $\xi_{ij}(x,y)$ fonksiyonunu $P(1,1)=(a_0+a_1x)(b_0+b_1y)$ bilineer polinomlar sınıfında ararsak isteneni elde edebiliriz. Bu koşulda herbir sonlu elemanda $\xi_{ij}(x,y)$ fonksiyonunu tek değerli tanımlamış oluruz. Bu polinom herbir değişkene göre lineerdir.

Baz fonksiyonunu önce,

$$e = \{(s,t) | \, 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1\}$$

doğal sonlu elemanı için yazalım (Şekil 3.2). Bunun için (s,t)=(0,0) noktasında bire, (0,1), (1,0), (1,1) noktalarında sıfıra eşit olan iki değişkenli bilineer bir fonksiyonu tanımlamalıyız.



Şekil 3.2. $e = \{(s,t) | \, 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1\}$ doğal sonlu elemanı

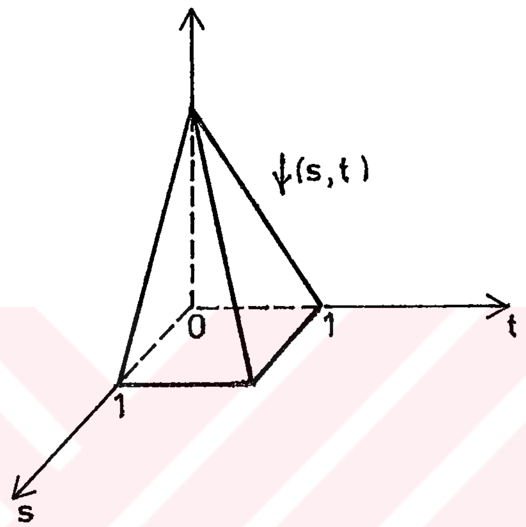
Böyle bir fonksiyon,

$$\Psi(s,t) = (1-s)(1-t) \tag{3.12}$$

şeklindedir. Bu koşulda (0,0) noktası ile bağlı olan Lagrange baz fonksiyonu (Şekil 3.3),

$$\xi(s,t)=\begin{cases}(1-s)(1-t); & 0\le s\le 1,\quad 0\le t\le 1\\ (1-s)(1+t); & 0\le s\le 1,\quad -1\le t\le 0\\ (1+s)(1-t); & -1\le s\le 0,\quad 0\le t\le 1\\ (1+s)(1+t); & -1\le s\le 0,\quad -1\le t\le 0\end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde olur. $\xi(s,t)$ fonksiyonunu kullanmakla, koordinatları (x_i,y_i) olan P_k noktası ile bağlı $\xi_{ij}(x,y)$ baz fonksiyonunu yazabiliriz. Bunun için,



Şekil 3.3. $\Psi(s,t)=(1-s)(1-t)$ olmak üzere (0,0) noktası ile bağlı olan Lagrange baz fonksiyonu

$h_{i+1}=x_{i+1}-x_i,\quad \tau_{j+1}=y_{j+1}-y_j,\quad i=\overline{1,N-1},\quad j=\overline{1,N-1},$
$h_1=x_1-x_0,\quad \tau_1=y_1-y_0,\quad (x_0,y_0)=(0,0)$

almakla,

$$s=\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\quad t=\frac{y-y_j}{\tau_{j+1}},\quad (x,y)\in e_{(i,j)} \tag{3.14}$$

afin dönüşümünü kullanarak, $1\le i\le N$, $1\le j\le M$ iç düğüm noktası için baz fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\xi_{ij}(x,y)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1-\dfrac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right); & (x,y)\in e_{(i,j)},\\ \left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1+\dfrac{y-y_j}{\tau_j}\right); & (x,y)\in e_{(i,j-1)},\\ \left(1+\dfrac{x-x_i}{h_i}\right)\left(1-\dfrac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right); & (x,y)\in e_{(i-1,j)},\\ \left(1+\dfrac{x-x_i}{h_i}\right)\left(1+\dfrac{y-y_j}{\tau_j}\right); & (x,y)\in e_{(i-1,j-1)},\end{cases} \tag{3.15}$$

Baz fonksiyonlarını tanımlamak için önce bilinmeyenler sayısını belirleyelim. (3.7)'ye göre kafeste (N+1)(M+1) sayıda düğüm noktası vardır. Bu noktalardan $(x_0,y_0)=(0,y_j),\ j=\overline{1,M}\,;(x_i,y_0)=(x_i,0),\ j=\overline{1,N}$ noktaları sınırın S_1 kısmına aittir. S_1 kısmına ait olan noktaların sayısı N+M+1'e eşittir. Bu noktalarda (3.2) sınır koşulu verildiği için çözüm fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri bellidir. Buna göre problemin bilinmeyen sayısı (N+1)(M+1)-N-M-1=NM olmalıdır. Buna göre H_h birinci tip Lagrange sonlu elemanlar uzayı NM boyutludur. Buna göre sınır noktalarından $(i,M),\ i=\overline{1,N-1};(N,J),\ j=\overline{1,M-1}$ ve (N,M) için baz fonksiyonlarının tanımlanması gerekir. Baz fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\xi_{i,M}(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x-x_i}{h_i}\right)\left(1+\dfrac{y-y_M}{\tau_M}\right), & (x,y)\in e_{(i-1,M-1)}\\ \left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1-\dfrac{y-y_M}{\tau_M}\right), & (x,y)\in e_{(i,M-1)}\end{cases} \tag{3.16}$$

$$\xi_{N,J}(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x-x_N}{h_N}\right)\left(1+\dfrac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right), & (x,y)\in e_{(N-1,J-1)}\\ \left(1+\dfrac{x-x_N}{h_N}\right)\left(1-\dfrac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right), & (x,y)\in e_{(N-1,j)}\end{cases} \tag{3.17}$$

$$\xi_{N,M}(x,y)=\left(1+\frac{x-x_N}{h_N}\right)\left(1+\frac{y-y_N}{\tau_N}\right),\quad (x,y)\in e_{(N-1,M-1)} \tag{3.18}$$

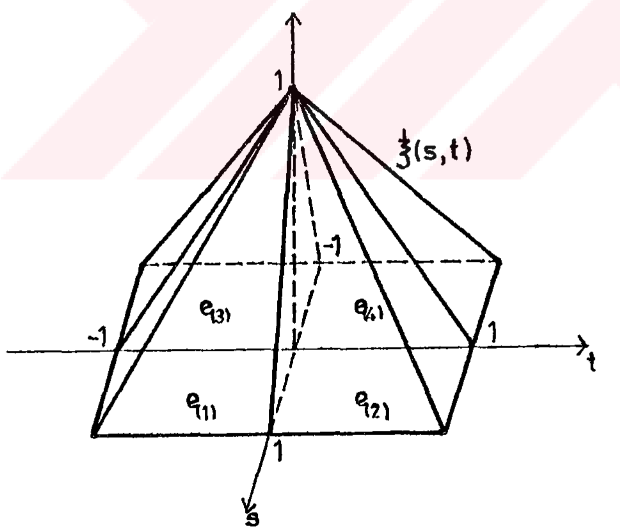
SEY'nin genel yapısına uymakla herbir $e_{(i,j)}$ sonlu elemanı için $M_{(i,j)}$ kümesini tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
&M_{(i,j)} = \{(i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)\}, \quad 1 \le i \le N-1, 1 \le j \le M-1 \\
&M_{(0,j)} = \{(1,j), (1,j+1)\}, \quad j = \overline{1, M-1} \\
&M_{(i,0)} = \{(i,1), (i+1,1)\}, \quad i = \overline{1, N-1} \\
&M_{(0,0)} = \{(1,1)\}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Şimdi e_{ij} sonlu elemanı ile bağlı olan fonksiyon formları tanımlayalım.

$$\varphi_{ij,\ell k}(x,y) = \xi_{\ell,k}(x,y)\Big|_{e_{(i,j)}}$$

Doğal sonlu elemanı için böyle bir fonksiyon Şekil 3.4'de verilmiştir. Bu fonksiyon (0,0) noktası ile bağlıdır. Yani, (0,0) noktasında bire, öteki noktalarda sıfıra eşittir. Herhangi $e_{(i,j)}$ iç sonlu elemanı için fonksiyon formları,



Şekil 3.4. e_{ij} sonlu elemanı ile bağlı olan $\xi(s,t)$ fonksiyonu

$$
\begin{cases}
\varphi_{ij,ij}(x,y) = \left(1 - \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_j}{\tau_{j+1}}\right) \\
\varphi_{i+1j,ij}(x,y) = \left(1 + \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_j}{\tau_{j+1}}\right)
\end{cases}
\quad (x,y) \in e_{(i,j)}
$$

$$\begin{cases} \varphi_{ij+1,ij}(x,y)=\left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)\left(1+\dfrac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}}\right) \\ \varphi_{i+1j+1,ij}(x,y)=\left(1+\dfrac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\left(1+\dfrac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}}\right) \end{cases} \tag{3.20}$$

gibi tanımlayabiliriz.

(3.20) formüllerini, (3.14) dönüşümlerini kullanmakla (3.12) fonksiyon formlarından da elde edebiliriz.

3.1.2. Lokal ve global sertlik matrislerinin oluşturulması

Herhangi $e_{(i,j)}$ sonlu elemanları için cebirsel denklemler sistemini,

$$\sum_{(p,q)\in M_{(i,j)}} a_{(i,j)}(\varphi_{ij,\ell k},\varphi_{ij,pq})C_{(p,q)} = b_{\ell k}^{(i,j)}, \quad (\ell,k)\in M_{(i,j)} \tag{3.21}$$

şeklinde yazalım.

$$K_{(i,j)}=\left\{\left(K_{\ell k,pq}^{(i,j)}\right)\right\}=\left\{a_{(i,j)}(\varphi_{ij,\ell k},\varphi_{ij,pq})\right\}, \quad (\ell,k),(p,q)\in M_{(ij)} \tag{3.22}$$

lokal sertlik matrisinin elemanları ve,

$$b_{(i,j)}=\left\{\left(b_{\ell k}^{(i,j)}\right)\right\}^T, \quad (\ell,k)\in M_{(i,j)} \tag{3.23}$$

sağ taraf vektörünün bileşenleri (3.5) formülüne göre,

$$a_{(ij)}(\varphi_{ij,\ell k},\varphi_{ij,pq})=\iint_{e_{(ij)}}\left[\frac{\partial\varphi_{ij,\ell k}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_{ij,pq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{ij,\ell k}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_{ij,pq}}{\partial y}\right]dxdy \tag{3.24}$$

$$b_{\ell k}^{(i,j)}=\iint_{e_{(i,j)}}F(x)\varphi_{ij,\ell k}(x)dxdy(1-\delta_{N,\ell k})+\int_{e_{(i,j)}\cap S_2} q(s)\varphi_{ij,\ell k}(x,y)\Big|_{S_2}ds \tag{3.25}$$

gibi hesaplanır. Burada N , S_2 sınırına ait noktaların numaraları, $\varphi|_{S_2}$ ise φ fonksiyonunun S_2 sınırındaki izi, δ_{ij} ise Kronecker sembolüdür. Buradaki sonlu elemanlar afin sonlu elemanları olduğu için, lokal sertlik matrisinin elemanlarını, Ost düzleminde e doğal sonlu elemanları için hesaplayalım (Şekil 3.2). Bunun için T_{ij} dönüşümünü kullanarak $M_{(i,j)}$ indeksler kümesinden $Z_{(i,j)}$ kümesine geçelim.

$$M_{(i,j)} = \{(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)\} \xrightarrow{T_{(i,j)}} Z_{(i,j)} = \{1,2,3,4\},$$
$$i = \overline{1,N-1},\ j = \overline{1,M-1}$$

$$M_{(0,j)} = \{(i,j),(i,j+1)\} \xrightarrow{T_{(0,j)}} Z_{(0,j)} = \{1,2\},\ j = \overline{1,M-1},$$

(3.26)

$$M_{(i,0)} = \{(i,1),(i+1,1)\} \xrightarrow{T_{(i,0)}} Z_{(i,0)} = \{1,2\},\ i = \overline{1,N-1},$$

$$M_{(0,0)} = \{(1,1)\} \xrightarrow{T_{(0,0)}} Z_{(0,0)} = \{1\}$$

(3.14) dönüşümünü göz önüne alarak (3.20) fonksiyon formlarından doğal sonlu eleman için aşağıdaki fonksiyon formları elde ederiz.

$$\Psi_1(s,t) = (1-s)(1-t),\quad \Psi_2(s,t) = t(1-s)$$
$$\Psi_3(s,t) = (1-t)s,\qquad \Psi_4(s,t) = st \qquad (3.27)$$

Burada,

$$\Psi_1(s,t) \equiv \varphi_{ij,ij}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right),\quad \Psi_2(s,t) \equiv \varphi_{i+1j,ij}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right)$$

(3.28)

$$\Psi_3(s,t) \equiv \varphi_{ij+1,ij}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right),\quad \Psi_4(s,t) \equiv \varphi_{i+1j+1,ij}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right)$$

(3.28) eşitliklerini (3.24)'de yazarsak,

$$a_{(i,j)}(\Psi_\ell,\Psi_k)=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}\cdot\frac{\partial\Psi_\ell}{\partial s}\cdot\frac{\partial\Psi_k}{\partial s}+\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}\cdot\frac{\partial\Psi_\ell}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Psi_k}{\partial t}\right]dsdt \quad k,\ell=\overline{1,4} \tag{3.29}$$

ifadesini elde ederiz. (3.27)'deki fonksiyonların türevlerini hesaplarsak,

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial s}=t-1,\quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial s}=-t,\quad \frac{\partial\Psi_3}{\partial s}=1-t,\quad \frac{\partial\Psi_4}{\partial s}=t$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}=s-1,\quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=1-s,\quad \frac{\partial\Psi_3}{\partial t}=-s,\quad \frac{\partial\Psi_4}{\partial t}=s$$

eşitlikleri bulunur. Bunları (3.29)'da yerlerine yazarsak, lokal sertlik matrisinin elemanlarını bulmak için kolayca hesaplanabilen integraller elde ederiz.

$e_{(i,j)}$, $i=\overline{1,N-1}$, $j=\overline{1,M-1}$ iç sonlu elemanı için cebirsel denklemler sistemi aşağıdaki gibi olur.

$$\left\{\left(K_{\ell,k}^{(i,j)}\right)\right\}xC^{(i,j)}\equiv\begin{bmatrix}\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}\\ \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}\\ -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}\\ -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}C_{i,j}\\ C_{i+1,j}\\ C_{i,j+1}\\ C_{i+1,j+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{i,j}^{(ij)}\\ b_{i+1,j}^{(ij)}\\ b_{i,j+1}^{(ij}\\ b_{i+1,j+1}^{(ij)}\end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$e_{(0,j)}$, $j=\overline{1,M-1}$ sonlu elemanları için denklemler sistemini (3.30)'daki lokal sertlik matrisinin birinci ve üçüncü satır ve sütun elemanlarını, bilinmeyenler ve sağ taraf vektörünün ise birinci ve üçüncü bileşenlerini yok etmekle elde edebiliriz. Bunun nedeni ise $e_{(0,j)}$ sonlu elemanının birinci ve üçüncü düğüm noktalarında esas sınır koşullarının verilmesidir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} \\ -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{1,j} \\ C_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,j}^{(0,j)} \\ b_{1,j+1}^{(0,j)} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

(3.30)'dan lokal sertlik matrisinde birinci ve ikinci satır ve sütun elemanlarını, bilinmeyenler ve sağ taraf vektörünün ise birinci ve ikinci bileşenlerini yok etmekle, $(e_{i,0})$, $i=\overline{1,N-1}$ sonlu elemanı için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \\ \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}}, & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{i,j+1} \\ C_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i,1}^{(i,0)} \\ b_{i,2}^{(i,0)} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$e_{(0,0)}$ sonlu elemanının üç noktasında esas sınır koşulu verildiği için benzer denklemler sistemi yalnız bir denklemden oluşur.

$$\left(\frac{\tau_1}{3h_1}+\frac{h_1}{3\tau_1}\right)C_{11} = b_{1,1}^{(0,0)} \tag{3.33}$$

Böylelikle (keyfi) herhangi sonlu eleman için cebirsel denklemler sistemi oluşturulmuş olur.

Şimdi global sertlik matrisini ve sağ taraf vektörünü oluşturabiliriz. Bir boyutlu halden farklı olarak iki boyutlu halde düğüm noktalarının numaralandırılması keyfi olabilir. Bu numaralamayı "soldan sağa, aşağıdan yukarıya" alalım (Şekil 3.1). Bu halde, örneğin P_k noktasının (i,j) numarası kabul edilmiş numaralamada, k=(j-1)N+i olur. Herhangi $e_{(i,j)}$ sonlu elemanının düğüm noktalarının global numaraları, $k_1=(j-1)N+i$, $k_2=(j-1)N+i+1$, $k_3=jN+i$, $k_4=jN+i+1$ olmalıdır.

$k_{(i,j)} = \left\{\left(k_{\ell,k}^{(i,j)}\right)\right\}$, $\ell, k \in M_{(i,j)}$ (3.3) lokal sertlik matrisinin elemanları global matriste k_1, k_2, k_3, ve k_4 nolu satır ve sütunların kesişiminde yer alırlar.

$$k_{(i,j)} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ k_1 \rightarrow \\ \\ \\ \\ k_3 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{12}^{(ij)} & k_{12}^{(ij)} & 0 & 0 & k_{13}^{(ij)} & k_{14}^{(ij)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(ij)} & k_{22}^{(ij)} & 0 & 0 & k_{23}^{(ij)} & k_{24}^{(ij)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{31}^{(ij)} & k_{32}^{(ij)} & 0 & 0 & k_{33}^{(ij)} & k_{34}^{(ij)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41}^{(ij)} & k_{42}^{(ij)} & 0 & 0 & k_{43}^{(ij)} & k_{44}^{(ij)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (3.34)$$

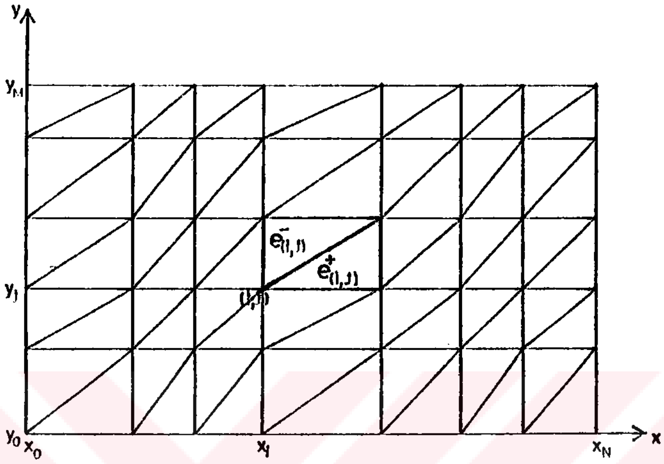
$k_{(ij)}$-$e_{(ij)}$ sonlu elemanının (NM)x(NM) boyutlu global sertlik matrisidir. (3.31) ve (3.32) sistemlerini benzer şekilde global numaralarla yazabiliriz. Bu matrisleri toplamakla (3.8)'in C_{ij} katsayılarını bulmak için cebirsel denklemler sisteminin global matrislerini elde ederiz. Laplace operatörü pozitif tanımlı olduğu için bu matris simetrik, baz fonksiyonları ise G_{ij}'de sıfırdan farklı sonlu dayanıklı fonksiyon oldukları için bant şekillidir.

Benzer şekilde sağ taraf vektörünü global numaralarla yazabiliriz. Örneğin, (3.30) sisteminin sağ taraf vektöründe k_1, k_2, k_3, k_4 numaralı bileşenler sıfırdan farklı diğerleri sıfıra eşit olmalıdır.

$$b^{(i,j)} = \left(0,\ldots,0, b_{ij}^{(ij)}, b_{i+1j}^{(ij)}, 0,\ldots,0, b_{ij+1}^{(ij)}, b_{i+1j+1}^{(ij)}, 0,\ldots,0\right) \qquad (3.35)$$

3.2. Üçgen Lagrange SE Uzayında Lineer Baz Fonksiyonları

Bir önceki konuda verilen problemi ele alalım. G bölgesi dikdörtgen olsun. Bu bölgeyi önce dörtgen sonlu elemanlara bölelim ve bu elemanların (i-1,j-1) ve (i,j) numaralı tepe noktalarından geçen köşegenleri çizelim. Böylece, G bölgesini üçgen sonlu elemanlara bölmüş oluruz, (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. G bölgesinin üçgen sonlu elemanlara bölünmesi

Bölgenin bu şekilde üçgen elemanlara bölünmesine soldan üçgenleştirme denir. Eğer üçgen sonlu elemanlar (i-1,j) ve (i,j-1) tepe noktalarını birleştiren köşegenler çizmekle elde edilirse, alanın bu şekilde bölünmesine de sağdan üçgenleştirme denir. Buradan da anlaşılacağı gibi dikdörtgen sonlu elemanlarda bölge, bu şekilde dörtgenlere ayrılırken, üçgen sonlu elemanlara bölündüğünde iki farklı şekilde dik üçgenler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
e_{ij}^{+} &= \left\{(x,y) \in \overline{G} \,\middle|\, x_i \le x \le x_{i+1},\, y_j \le y \le y_{j+1} \quad x \ge y\right\} \\
e_{ij}^{-} &= \left\{(x,y) \in \overline{G} \,\middle|\, x_i \le x \le x_{i+1},\, y_j \le y \le y_{j+1} \quad x \le y\right\}
\end{aligned}
\qquad (3.36)
$$

$i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M; \quad (x_o,y_o)=(0,0)$

$u_h(x,y)$ yaklaşık çözümünü birinci dereceden polinomlar uzayında arayalım. Sonlu eleman için tanımlayacağımız P(x,y)=ax+by+c polinomu üç parametre içerir. Elde edilen kafeste 2NM sayıda üçgen eleman olduğu için toplam 6NM parametrenin belirlenmesi gerekir.

Üçgen elemanların kenarlarında lineerlik özelliğinden ve ∂G sınırının S_1 kısmında esas sınır koşullarını kullanmakla bu bilinmeyenlerin bir kısmı yok edilebilir.

Her bir $e_{ij}^{+}, e_{ij}^{-}, i=\overline{1,N-1}, j=\overline{1,M-1}$ iç sonlu elemanlar için 2+2+1=5 koşul olduğundan iç sonlu elemanlar için toplam 5(N-1)(M-1), dış e_{ij}^{+}, e_{ij}^{-} $i=\overline{1,N-1}$, $j=M-1, i=N-1, j=\overline{1,M-1}$ sınır sonlu elemanları için, 2(N-1)+2(M-1), (N,M) noktası için ise bir tane koşul vardır. Esas sınır koşullarında ise (i,1), $i=\overline{0,M}$ ve (1,j) $j=\overline{0,M}$ noktaları için sırasıyla 3(N-1)+2+1 ve 3(M-1)+1 sayıda koşul olduğunu gözönüne alırsak toplam,

5(N-1)(M-1)+ 2(N-1)+ 2(M-1)+1+3(N-1)+3+3(M-1)+1=5NM

koşul olduğunu buluruz. Böylece bilinmeyenlerin sayısı;

6NM-5NM=NM

olur. Yani yaklaşık çözümün arandığı sonlu boyutlu H_h uzayı NM boyutludur.

Bilinmeyenler olarak, yaklaşık çözümün düğüm noktalarındaki değerlerini ele alalım. O halde (0,j), (i,0); $i=\overline{0,N}$, $j=\overline{0,M}$ noktalarında esas sınır koşullarını verildiği için yaklaşık çözümü;

$$u_h(x,y)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}C_{ij}\xi_{ij}(x,y) \tag{3.37}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada;

$$\xi_{ij}(x_\ell y_k)=\delta_{ij,\ell k} \tag{3.38}$$

dır.

3.2.1. Üçgen SE'da lineer baz fonksiyonlarının tanımı

$\xi_{i,j}(x,y)$ baz fonksiyonu olarak, yalnız bölgenin,

$$G_{(i,j)} = e^{-}_{(i-1,j-1)} \cup e^{+}_{(i-1,j-1)} \cup e^{-}_{(i,j-1)} \cup e^{+}_{(i-1,j)} \cup e^{-}_{(i,j)} \cup e^{+}_{(i,j)}$$

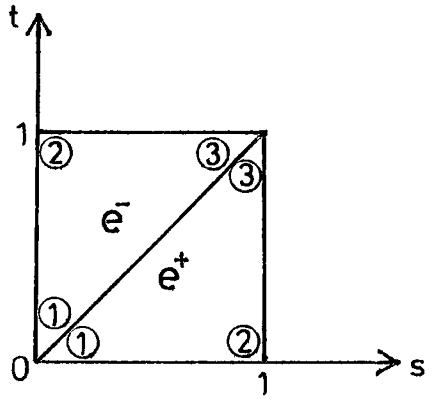
kısmında sıfırdan farklı, analitik şekli ise, aşağıdaki gibi olan sonlu dayanaklı fonksiyonu alalım.

$$\xi_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1+(x-x_i)/h_i, & (x,y)\in e^{-}_{(i-1,j-1)}; \\ 1+(y-y_j)/\tau_j, & (x,y)\in e^{+}_{(i-1,j-1)}; \\ 1-(x-x_i)/h_{i+1}+(y-y_j)/\tau_j, & (x,y)\in e^{-}_{(i,j-1)}; \\ 1+(x-x_i)/h_i+(y-y_j)/\tau_{j+1}, & (x,y)\in e^{+}_{(i-1,j)}; \\ 1-(y-y_j)/\tau_{j+1}, & (x,y)\in e^{-}_{(i,j)}; \\ 1-(x-x_i)/h_{i+1}, & (x,y)\in e^{+}_{(i,j)}; \\ 0, & (x,y)\notin G_{(ij)}. \end{cases} \tag{3.39}$$

incelediğimiz bu üçgen sonlu elemanlar ailesi afin ailesidir ve burada dörtgen sonlu sonlu elemanlardan farklı olarak, iki başlangıç elemanı vardır. e^- ve e^+ (Şekil 3.6).

Diğer elemanlar (3.14) dönüşümü ile sırasıyla $e^{-}_{(ij)}$ ve $e^{+}_{(ij)}$ sonlu elemanlarından elde edilir.

Doğal sonlu elemanlar için baz fonksiyonu,

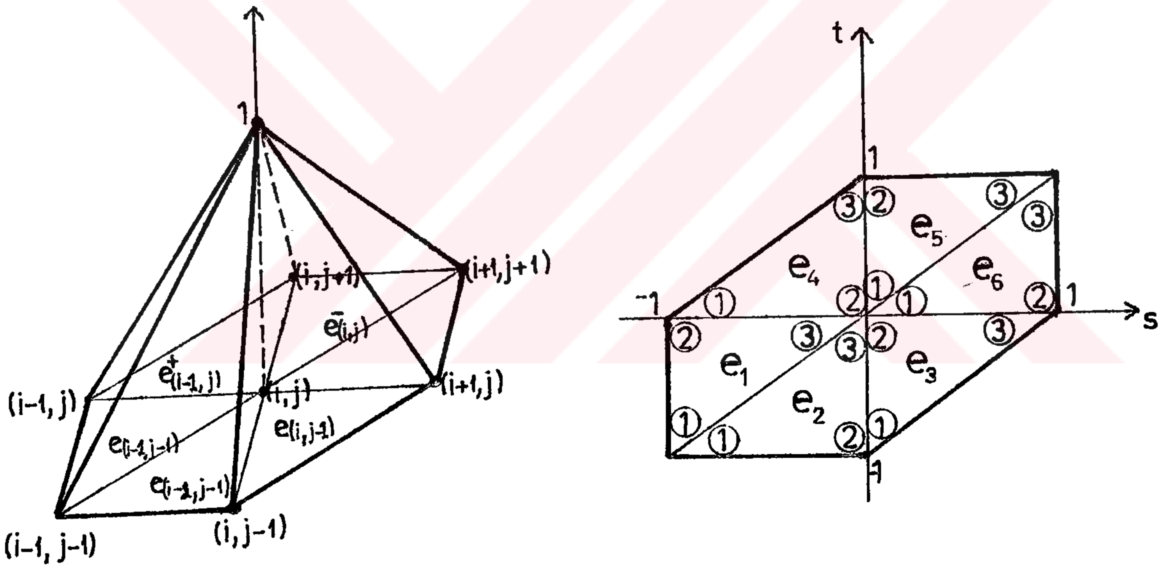


Şekil 3.6. Üçgen sonlu elemanlar ailesinin, e^- ve e^+ başlangıç elemanları

$$\xi(s,t)=\begin{cases}1+s, & (s,t)\in e_1\\ 1+t, & (s,t)\in e_2\\ 1+t-s, & (s,t)\in e_3\\ 1+s-t, & (s,t)\in e_4\\ 1-t, & (s,t)\in e_5\\ 1-s, & (s,t)\in e_6\end{cases} \tag{3.40}$$

şeklindedir, (Şekil 3.7). (3.40)'dan e^+ ve e^- doğal sonlu elemanlar için fonksiyon formlarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned}&\psi_1^+(s,t)=1-s, \quad \psi_2^+(s,t)=s-t, \quad \psi_3^+(s,t)=t, \quad (s,t)\in e^+;\\ &\psi_1^-(s,t)=1-t, \quad \psi_2^-(s,t)=t-s, \quad \psi_3^-(s,t)=s, \quad (s,t)\in e^-\end{aligned} \tag{3.41}$$



Şekil 3.7. Üçgen doğal sonlu elemanlar için $\xi(s,t)$ baz fonksiyonu

3.2.2. Lokal ve global sertlik matrislerinin oluşturulması

Dörtgen sonlu elemanlarda olduğu gibi burada da $e^{\pm}$ başlangıç sonlu elemanı için bilineer formu hesaplarsak;

$$a^{\pm}(\psi_\ell,\psi_k)=\iint\limits_{e^{\pm}}\left[\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}\frac{\partial\psi_{\ell^{\pm}}}{\partial S}\frac{\partial\psi_{k^{\pm}}}{\partial S}+\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}\frac{\partial\psi_{\ell^{\pm}}}{\partial t}\frac{\partial\psi_{k^{\pm}}}{\partial t}\right]dsdt \qquad \ell,k=1,2,3 \tag{3.42}$$

formülünü elde ederiz. $\psi_i^{\pm}$ fonksiyonlarının türevlerini hesaplayalım:

$$\frac{\partial\psi_1^+}{\partial S}=-1,\quad \frac{\partial\psi_2^+}{\partial S}=1,\quad \frac{\partial\psi_3^+}{\partial S}=0,\quad \frac{\partial\psi_1^+}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\psi_2^+}{\partial t}=-1,\quad \frac{\partial\psi_3^+}{\partial t}=1,$$

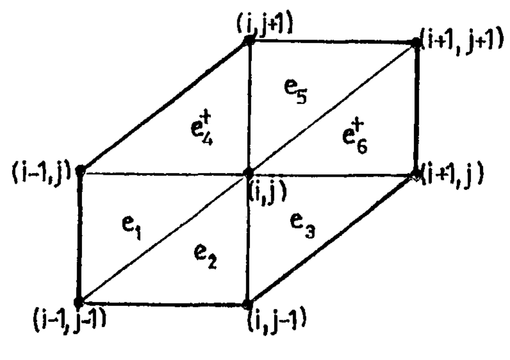
$$\frac{\partial\psi_1^-}{\partial S}=0,\quad \frac{\partial\psi_2^-}{\partial S}=-1,\quad \frac{\partial\psi_3^-}{\partial S}=1,\quad \frac{\partial\psi_1^-}{\partial t}=-1,\quad \frac{\partial\psi_2^-}{\partial t}=1,\quad \frac{\partial\psi_3^-}{\partial t}=0.$$

ifadelerini elde ederiz. Bunları (3.42) da kullanarak, herhangi $e_{(ij)}^{\pm}$ sonlu elemanı için lokal sertlik matrisini elde ederiz.

$$K_{(ij)}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} & 0 \\ -\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & -\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} \\ 0 & -\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$K_{(ij)}^{-}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & -\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & 0 \\ -\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} \\ 0 & -\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

$h_i=h=$sabit, $\tau_j=\tau=$sabit olduğu zaman (3.43 ve 3.44) matrisleri;



Şekil 3.8. Üçgen sonlu elemanlarda (i,j) noktasının komşuluğundaki e_i, $i=\overline{1,6}$ noktaları

$$K_m^+ = \frac{1}{2h\tau}\begin{bmatrix} \tau^2 & -\tau^2 & 0 \\ -\tau^2 & \tau^2+h^2 & -h^2 \\ 0 & -h^2 & h^2 \end{bmatrix}, \quad K_m^- = \frac{1}{2h\tau}\begin{bmatrix} h^2 & -h^2 & 0 \\ -h^2 & \tau^2+h^2 & -\tau^2 \\ 0 & -\tau^2 & \tau^2 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

şeklini alır. Dörtgen sonlu elemanlardan farklı olarak, üçgen sonlu elemanları kullandığımız zaman başlangıçta iki lokal sertlik matrisi elde ederiz. Bu matrislerden biri diğerinin satır ve sütunlarının yerini değiştirmekle de elde edilebilir.

Global matrisin $K_l=(i-1)M+j$ nolu satırını oluşturmak için (i,j) noktasının komşuluğundaki Şekil 3.8, e_i, $i=\overline{1.6}$ sonlu elemanlarına karşılık gelen lokal sertlik matrisini yazalım;

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i-1,j-1} \\ C_{i-1,j} \\ C_{i,j} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i-1,j-1} \\ C_{i,j-1} \\ C_{i,j} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 \\ k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i,j-1} \\ C_{i,j} \\ C_{i+1,j} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i-1,j} \\ C_{i,j} \\ C_{i,j+1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} k_{11}^5 & k_{12}^5 & k_{13}^5 \\ k_{21}^5 & k_{22}^5 & k_{23}^5 \\ k_{31}^5 & k_{32}^5 & k_{33}^5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i,j} \\ C_{i,j+1} \\ C_{i+1,j+1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} k_{11}^6 & k_{12}^6 & k_{13}^6 \\ k_{21}^6 & k_{22}^6 & k_{23}^6 \\ k_{31}^6 & k_{32}^6 & k_{33}^6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_{i,j} \\ C_{i+1,j} \\ C_{i+1,j+1} \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{3.46}$$

(3.46) matrislerinde üst indisler sonlu elemanın numarasını gösterir. e_1 ve e_2 sonlu elemanlarına karşılık gelen lokal matrislerin üçüncü, e_3 ve e_4'de karşılık gelenlerin ikinci, e_5 ve e_6 ya karşılık gelenlerin ise birinci satırlarını bilinmeyenler vektörü ile çarpıp toplayalım:

$$\begin{aligned}
&k_{31}^1 C_{i-1,j-1} + k_{32}^1 C_{i-1,j} + k_{33}^1 C_{i,j} + k_{31}^2 C_{i-1,j-1} + k_{32}^2 C_{i,j-1} + k_{33}^2 C_{i,j} \\
&+k_{21}^3 C_{i,j-1} + k_{22}^3 C_{i,j} + k_{23}^3 C_{i+1,j} + k_{21}^4 C_{i-1,j} + k_{22}^4 C_{i,j} + k_{23}^4 C_{i,j+1} \\
&+k_{11}^5 C_{i,j} + k_{12}^5 C_{i,j+1} + k_{13}^5 C_{i+1,j+1} + k_{11}^6 C_{i,j} + k_{12}^6 C_{i+1,j} + k_{13}^6 C_{i+1,j+1} = b_{i,j}
\end{aligned}$$

Bu ifadeyi düzenlersek;

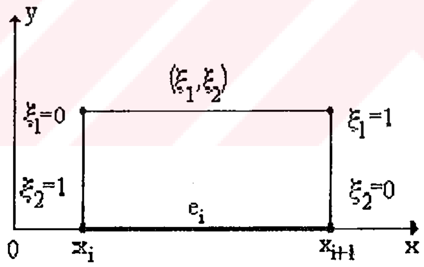
$$
\begin{aligned}
&(k_{31}^{1} + k_{31}^{2})C_{i-1,j-1} + (k_{32}^{1} + k_{21}^{4})C_{i-1,j} + (k_{32}^{2} + k_{21}^{3})C_{i,j-1} \\
&+(k_{33}^{1} + k_{33}^{2} + k_{22}^{3} + k_{22}^{4} + k_{11}^{5} + k_{11}^{6})C_{i,j} + (k_{23}^{4} + k_{12}^{5})C_{i,j+1} \\
&+(k_{23}^{3} + k_{12}^{6})C_{i+1,j} + (k_{13}^{5} + k_{13}^{6})C_{i+1,j+1} = b_{i,j}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

olur. Bu global sertlik matrisinin genel ifadesidir. i ve j indisleri değiştirilerek global matris oluşturulur.

3.3. Doğal Koordinatlarda Lineer Baz Fonksiyonları

3.3.1. Bir boyutlu halde doğal koordinatlar

Sonlu elemanların yalnız kendilerine bağlı olan koordinat sistemlerinin seçilmesi ile (örneğin sonlu elemanın alanına bağlı) ortaya çıkan koordinat sistemlerine doğal koordinatlar sistemi denir.



Şekil 3.9. xoy koordinat sisteminde bir $e_i = [x_i, x_{i+1}]$ sonlu elemanı

xoy koordinat sisteminde bir boyutlu $e_i = [x_i, x_{i+1}]$ sonlu elemanını inceleyelim, (Şekil 3.9). Başlangıcı x_i noktasında olan ve 0x ekseni boyunca yönelen $0\bar{\xi}_1$ koordinat sistemini tanımlayalım. Buna göre, başlangıçtaki sistem ile yeni tanımlanan sistem arasındaki bağıntı,

$$\bar{\xi}_1 = x - x_i \tag{3.48}$$

şeklinde olur. (3.48) formülüne yeni bir değişken ekleyelim,

$$\xi_1 = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, \qquad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \tag{3.49}$$

Benzer şekilde, başlangıcı x_{i+1} noktasında olan ve ox ekseninin zıt yönüne yönelen $0\bar{\xi}_2$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntıyı yazalım:

$$\bar{\xi}_2 = x_{i+1} - x \tag{3.50}$$

Buradan yeni bir ξ_2 değişkeni tanımlayalım:

$$\bar{\xi}_2 = \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \tag{3.51}$$

Tanımladığımız ξ_i, $i = 1,2$ koordinatlarına bir boyutlu halde doğal koordinatlar denir.

Buradan;

$$\begin{aligned} &\xi_1(x) = 0, \quad x = x_i; \quad \xi_1(x) = 1, \quad x = x_{i+1} \\ &\xi_2(x) = 1, \quad x = x_i; \quad \xi_2(x) = 0, \quad x = x_{i+1} \end{aligned} \tag{3.52}$$

olduğunu gösterebiliriz. (2.3.2) ve (2.3.4) formüllerine göre;

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{3.53}$$

Bu son formül ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerinden yalnız birinin bağımsız olması anlamına gelir.

Bu koordinatları bir boyutlu halde birinci tip Lagrange sonlu elemanları ile karşılaştırırsak;

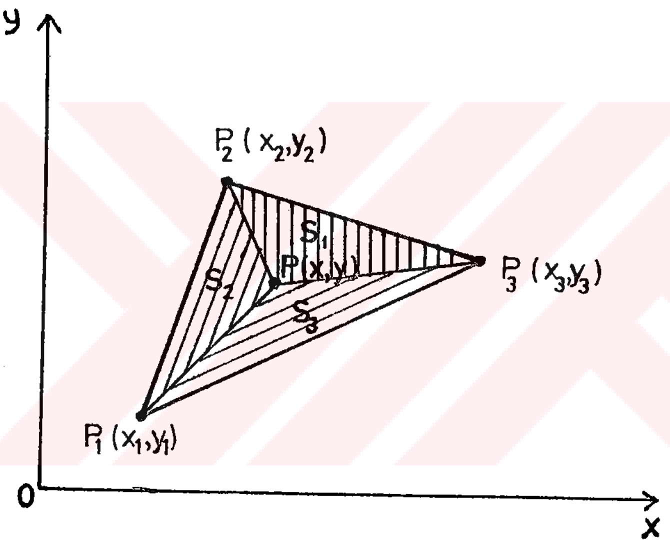
$$\xi_1 = \varphi_{i,i}(x), \quad \xi_2 = \varphi_{i,i+1}(x) \tag{3.54}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Böylelikle bir boyutlu halde doğal koordinatların birinci tip Lagrange sonlu elemanları için tanımlanmış olan fonksiyon formlarıyla aynı olduğu görülür.

3.3.2. Üçgen SE'da doğal koordinatlar

İki boyutlu sonlu elemanları gözönüne alalım. Birinci tip Lagrange sonlu elemanında (Şekil 3.10) düğüm noktalarını $P_i=(x_i,y_i)$, i=1,2,3 alalım.



Şekil 3.10. İki boyutlu halde üçgen Lagrange sonlu elemanı için $P_i=(x_i,y_i)$, i=1,2,3 düğüm noktaları

Bu sonlu elemanın içinde herhangi bir P(x,y) noktasını ele alalım ve aşağıdaki oranları tanımlayalım.

$$\xi_1=\frac{S_1}{S_m},\quad \xi_2=\frac{S_2}{S_m},\quad \xi_3=\frac{S_3}{S_m} \tag{3.55}$$

Burada S, S_1, S_2 ve S_3 sırası ile $P_1P_2P_3$, PP_2P_3, PP_1P_3 ve PP_1P_2 üçgenlerinin alanlarıdır. Bu alanlar;

$$S_m = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x_2 & x \\ y & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.

(3.55) formülleri ile tanımlanan ξ_i, i=1,2,3 değişkenlerine iki boyutlu halde doğal koordinatlar denir. (3.55)'e göre ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 kordinatlarının toplamı 1'e eşit olur.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{3.56}$$

Şekil 3.10'dan görüleceği gibi P noktası P_1, P_2ve P_3 ile aynı olduğunda sırasıyla ξ_1, ξ_2, ξ_3 kordinatları bire eşit olurlar. Yine P noktası P_2P_3 üzerinde olduğu zaman ξ_1 koordinatı sıfıra, P_1P_3 üzerinde olduğunda ξ_2 koordinatı sıfıra ve P_1P_2 üzerinde olduğunda ξ_3 koordinatı sıfıra eşit olur.

ξ_i doğal koordinatlarını;

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{S_m} \quad , \ i=1,2,3 \tag{3.57}$$

x_i,y_i, i=1,2,3 değerlerinden yararlanarak a_i, b_i ve c_i'nin değerlerini bulalım.

$$\xi_1 = \frac{1}{S_m}\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{S_m}\left\{x\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y & y_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y & y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{S_m}$$

eşitliklerinden,

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad c_1 = x_3 - x_2, \quad b_1 = y_2 - y_3$$

eşitliklerinden elde edilir. Aynı yöntemle ξ_2 ve ξ_3 'den

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad c_2 = x_3 - x_1, \quad b_2 = y_3 - y_1;$$
$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad c_3 = x_1 - x_2, \quad b_3 = y_1 - y_2$$

olduğu görülür. a_i, b_i, c_i'yi genel olarak

$$\begin{aligned} a_i &= x_{[i+1]} y_{[i+2]} - x_{[i+2]} y_{[i+1]} \\ b_i &= y_{[i+1]} - y_{[i+2]} \\ c_i &= x_{[i+2]} - x_{[i+1]} \end{aligned} \tag{3.58}$$

şeklinde yazarız. [N], N'in mod 3'e göre değerini göstermektedir. İki boyutlu halde doğal koordinatlar tepe noktaları (x_i,y_i), i=1,2,3 olan üçgen sonlu eleman için yazılmış olan fonksiyon formlarıdır.

$$\xi_1 = \psi_1(x,y), \quad \xi_2 = \psi_2(x,y), \quad \xi_3 = \psi_3(x,y) \tag{3.59}$$

eşitliklerine göre lokal sertlik matrisinin elemanlarını hesaplamak için doğal koordinatları da kullanabiliriz.

3.3.3. Üçgen SE'da doğal koordinatlardan yararlanarak karmaşık probleme SEY'nin uygulanması

$$a_m(u,v) = \iint_{G_m} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy \tag{3.60}$$

bilineer formuna karşı gelen lokal sertlik matrisinin elemanlarını doğal koordinatları kullanarak belirleyelim.

$$K^m \equiv K_1^m + K_2^m + K_3^m = \left\{a_m^1(\xi_i,\xi_j)\right\} + \left\{a_m^2(\xi_i,\xi_j)\right\} + \left\{a_m^3(\xi_i,\xi_j)\right\}$$

ile gösterilir. Burada;

$$a_m^1(\xi_i,\xi_j) = \iint\limits_{G_m} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^T dxdy \tag{3.61}$$

$$a_m^2(\xi_i,\xi_j) = \iint\limits_{G_m} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial y}\right)^T dxdy \tag{3.62}$$

$$a_m^3(\xi_i,\xi_j) = \alpha \iint\limits_{G_m} \vec{\xi}\,\vec{\xi}^T dxdy, \qquad \vec{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T \tag{3.63}$$

(3.57)'den doğal kordinatların x ve y değişkenlerine göre türevleri için,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{b_i}{S_m}, \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{c_i}{S_m} \tag{3.64}$$

formüllerini elde ederiz. Bu formülleri (3.61) de göz önüne alırsak,

$$K_1^m = \frac{1}{S_m}\begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3^2 \end{bmatrix}, \qquad K_2^m = \frac{1}{S_m}\begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & b_2b_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{bmatrix}$$

olur. (3.63)'den K_3^m elemanlarının hesaplanması için,

$$\iint\limits_{G_m} \xi_i \xi_i dxdy$$

şeklindeki integrallerin hesaplanması gerekir. Genelde böyle integraller,

$$\iint_{G_m} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}\, dxdy$$

şeklinde yazılabilir.

Bu integrali hesaplamak için doğal koordinatlarda integralleme formülünü kullanabiliriz.

$$\iint_{G_m} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}\, dxdy = S_m \cdot \frac{n_1!\,n_2!\,n_3!}{(n_1+n_2+n_3+2)!} \tag{3.65}$$

Böylece K_3^m matrisini hesaplarsak,

$$K_3^m = S_m \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{4!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} \\ \frac{1}{4!} & \frac{2}{4!} & \frac{1}{4!} \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} & \frac{2}{4!} \end{bmatrix}$$

olur.

$$K^m = K_1^m + K_2^m + K_3^m$$

olduğunu göz önüne alırsak G_m sonlu elemanı için lokal sertlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K^m = \frac{1}{S_m} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 + \frac{2}{4!}S_m^2 & b_1b_2 + c_1c_2 + \frac{1}{4!}S_m^2 & b_1b_3 + c_1c_3 + \frac{1}{4!}S_m^2 \\ b_2b_1 + c_2c_1 + \frac{1}{4!}S_m^2 & b_2^2 + c_2^2 + \frac{2}{4!}S_m^2 & b_2b_3 + c_2c_3 + \frac{1}{4!}S_m^2 \\ b_3b_1 + c_3c_1 + \frac{1}{4!}S_m^2 & b_3b_2 + c_3c_2 + \frac{1}{4!}S_m^2 & b_3^2 + c_3^2 + \frac{2}{4!}S_m^2 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

(3.60) ifadesinde $\alpha=0$ alınırsa Poisson denklemine karşılık gelen bilineer form elde edilir.

$$a_m(u,v)=\iint\limits_{G_m}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy$$

Buna göre (3.66) matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$K^m=\frac{1}{S_m}\begin{bmatrix} b_1^2+c_1^2 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_1+c_2c_1 & b_2^2+c_2^2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_1+c_3c_1 & b_3b_2+c_3c_2 & b_3^2+c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

(3.65) formülünü kanıtlayalım.

$$x=AX+BY, \quad y=CX+DY \tag{3.68}$$

lineer türdeş dönüşüm olsun. Bu dönüşüm,

$$\iint\limits_{G_m} f(x,y)dxdy$$

integraline uygulanırsa (X,Y) değişkenlerine göre,

$$\iint\limits_{G_m} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G}\tilde{f}(X,Y)\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|dXdY$$

integrali elde edilir. Burada;

$$\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}=AD-BC$$

(3.68) dönüşümünün Jakobienidir ve yine bu dönüşüme göre, dx=Adx+Bdy,   dy=Cdx+Ddy

olur. Bunların dış çarpımları ise;

dxdy=ACdXdX+ADdXdY+ BCdYdX+ BDdYdY=(AD-BC)dXdY

elde edilir, (dxdy=-dydx, dxdx=dydy=0).

(3.55)'den doğal koordinatlar için

$$x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$$
$$y = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3$$

yazılabilir. $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$x = (x_1 - x_3)\cdot\xi_1 + (x_2 - x_3)\cdot\xi_2 + x_3$$
$$y = (y_1 - y_3)\cdot\xi_1 + (y_2 - y_3)\cdot\xi_2 + y_3$$

elde edilir. Buna göre;

$$dxdy = \left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]d\xi_1 d\xi_2$$

olur. Bu koşulda Jakobienin üçgen elemanın alanına eşit olduğu görülür.

$$dxdy = Sd\xi_1 d\xi_2$$

Buna göre,

$$\iint_{G_m} \xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3}dxdy = S\cdot\int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3}d\xi_2$$
$$= S\cdot\int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}(1-\xi_1-\xi_2)^{n_3}d\xi_2$$

olur.

$$t=\frac{\xi_2}{1-\xi_1},\qquad dt=\frac{1}{1-\xi_1}d\xi_2$$

değişken dönüştürmesi yapılırsa,

$$\iint_{G_m}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3}dxdy=S\cdot\int_0^1 d\xi_1\cdot\int_0^1\xi_1^{n_2}(1-\xi_1)^{n_2}t^{n_2}(1-\xi_1-(1-\xi_1)t)^{n_3}(1-\xi_1)dt$$
$$=S\left\{\int_0^1\xi_1^{n_1}(1-\xi_1)^{n_1+n_3+1}d\xi_1\cdot\int_0^1 t^{n_2}(1-t)^{n_3}dt\right\}$$

elde edilir. Buradan;

$$\iint_{G_m}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3}dxdy=S\frac{n_1!(n_2+n_3+1)!}{(n_1+n_2+n_3+2)!}\cdot\frac{n_2!n_3!}{(n_2+n_3+1)!}$$
$$=S\frac{n_1!n_2!n_3!}{(n_1+n_2+n_3+2)!}$$

bulunur.

3.3.4. Dörtgen SE'da doğal koordinatlar

İki boyutlu halde doğal koordinatları dörtgen sonlu elemanlar için de tanımlayabiliriz. Örneğin, tepe noktaları (x_i,y_i), $i=1,2,3,4$ olan dikdörtgen sonlu eleman için doğal koordinatlar bir boyutlu $\xi_i^{(x)},\xi_i^{(y)}$ doğal koordinatların çarpımı gibi tanımlanabilir, (Şekil 3.11).

Buna göre;

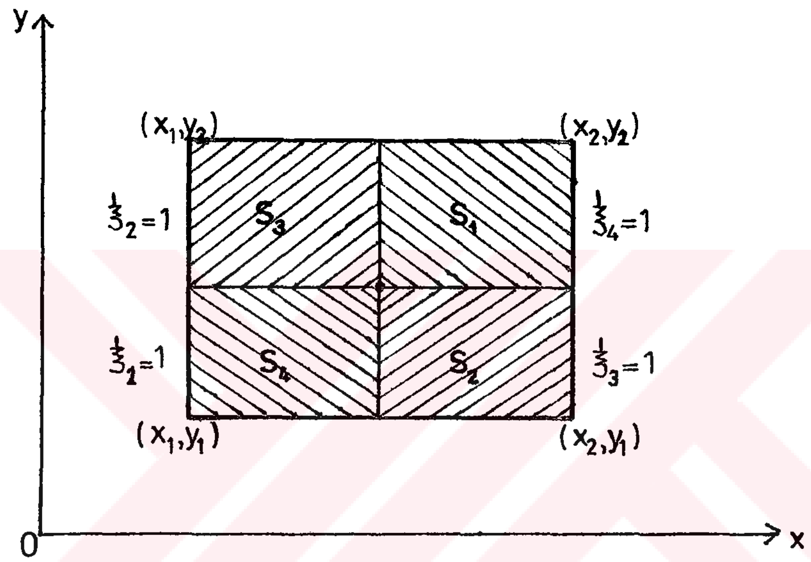
$$\xi_1=\xi_1^{(x)}\cdot\xi_1^{(y)},\quad \xi_2=\xi_2^{(x)}\cdot\xi_1^{(y)},\quad \xi_3=\xi_1^{(x)}\cdot\xi_2^{(y)},\quad \xi_4=\xi_2^{(x)}\cdot\xi_2^{(y)}$$

ve ayrıca,

$$\xi_1 = \frac{S_1}{S}, \quad \xi_2 = \frac{S_2}{S}, \quad \xi_3 = \frac{S_3}{S}, \quad \xi_4 = \frac{S_4}{S} \tag{3.69}$$

dir.

$S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ dikdörtgen sonlu elemanının, $S_1 = (x_2 - x)(y_2 - y)$, $S_2 = (x - x_1)(y_2 - y)$, $S_3 = (x_2 - x)(y - y_1)$, $S_4 = (x - x_1)(y - y_1)$ ler ise sırasıyla $\xi_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$ doğal koordinatlara karşı gelen dikdörtgenlerin alanlarıdır.



Şekil 3.11.İki boyutlu halde tepe noktaları (x_i,y_i), i=1,2,3,4 olan dikdörtgen sonlu eleman

Düzlemde bağımsız dört koordinatın olamayacağı açıktır. Bu nedenle $\xi_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$ doğal koordinatları arasında iki bağıntı formülü olmalıdır. Bu formüllerden bir tanesi (3.69)'dan elde edilebilir.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \tag{3.70}$$

İkinci formül ise alanlar arasındaki,

$$S_1(x - x_1) = S_3(x_2 - x), \quad S_2(x - x_1) = S_4(x_2 - x)$$

bağıntısından (3.69)'u gözönüne alarak elde edebiliriz.

$$\frac{\xi_1}{\xi_3}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{x_2-x}{x-x_1}=\frac{\xi_1(x)}{\xi_2(x)};$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_4}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{x_2-x}{x-x_1}=\frac{\xi_1(x)}{\xi_2(x)} \tag{3.71}$$

Buradan;

$$\xi_1\xi_4=\xi_2\xi_3 \tag{3.72}$$

elde edilir. (3.70) ve (3.71) formüllerinden dikdörtgen sonlu elemanlarda doğal koordinatlar için bazı özellikleri elde edebiliriz. Bunun için önce (3.70)'i sıfırdan farklı olan ξ_1 ile çarpalım. (3.71)'i gözönüne alırsak;

$$(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)=\xi_1 \tag{3.73}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}(\xi_2+\xi_1)(\xi_2+\xi_4)&=\xi_2\\(\xi_3+\xi_1)(\xi_3+\xi_4)&=\xi_3\\(\xi_4+\xi_2)(\xi_4+\xi_3)&=\xi_4\end{aligned} \tag{3.74}$$

eşitliklerini elde ederiz. (3.73)-(3.74) özelliklerine göre herhangi bir doğal koordinatın iki komşusu ile (dikdörtgen elemanın kenarına göre) toplamlarının çarpımı bu doğal koordinatın kendisini verir.

(3.69) doğal koordinatlarını,

$$\xi_i=\frac{a_i+b_ix+c_iy+d_ixy}{S},\quad i=1,2,3,4 \tag{3.75}$$

şeklinde yazalım. Buna göre a_i, b_i, c_i, d_i katsayılarının dikdötgenin tepe noktalarının koordinatları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{array}{llll} a_1 = x_2 y_2, & b_1 = -y_2, & c_1 = -x_2, & d_1 = 1; \\ a_2 = -x_2 y_1, & b_2 = -y_1, & c_2 = x_2, & d_2 = -1; \\ a_3 = -x_1 y_2, & b_3 = y_2, & c_3 = x_1, & d_3 = -1; \\ a_4 = x_1 y_1, & b_4 = -y_1, & c_4 = -x_1, & d_4 = 1. \end{array} \tag{3.76}$$

3.3.5. Dörtgen SE'da doğal koordinatlardan yararlanarak karmaşık probleme SEY'nin uygulanması

$$a_m(u,v) = \iint_{G_m} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy \tag{3.77}$$

bilineer formuna karşı gelen sertlik matrisini doğal koordinatları kullanarak oluşturalım.

$$K^m = K_1^m + K_2^m, \qquad K_\ell^m = \left\{ (k_{ij}^\ell) \right\}_{i,j=\overline{1.4}}$$

olsun. Burada;

$$k_{ij}^1 = \iint_{G_m} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} dxdy, \qquad k_{ij}^2 = \iint_{G_m} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} dxdy \tag{3.78}$$

olur. Önce doğal koordinatların x ve y değişkenlerine göre türevlerini bulalım. (3.76) formüllerini gözönüne alırsak, (3.75)'den;

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x} = \dfrac{b_i + y}{S_{ij}}, & i = 1;4; & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x} = \dfrac{b_i - y}{S_{ij}}, & i = 2;3; \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial y} = \dfrac{c_i + x}{S_{ij}}, & i = 1;4; & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial y} = \dfrac{c_i - x}{S_{ij}}, & i = 2;3. \end{array} \tag{3.79}$$

elde ederiz. $G_m = \{(x,y) | x_i \le x \le x_{i+1}; y_j \le y \le y_{j+1}\}$ dikdörtgen sonlu elemanı için (3.76) daki tepe noktalarının koordinatları cinsinden ifadeleri,

$$\begin{array}{llll} a_1 = x_{i+1}y_{j+1}, & b_1 = -y_{j+1}, & c_1 = -x_{i+1}, & d_1 = 1; \\ a_2 = -x_{i+1}y_j, & b_2 = -y_j, & c_2 = x_{i+1}, & d_2 = -1; \\ a_3 = -x_i y_{j+1}, & b_3 = y_{j+1}, & c_3 = x_i, & d_3 = -1; \\ a_4 = x_i y_j, & b_4 = -y_j, & c_4 = -x_i, & d_4 = 1. \end{array} \tag{3.80}$$

olur.

$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad \tau_{j+1} = y_{j+1} - y_j$ olsun.

Bu durumda sonlu elemanın alanı $S_{ij} = h_{i+1}\tau_{j+1}$ 'e eşit olur.

Bu eşitlikleri gözönüne alarak K_1^m matrisinin elemanlarını hesaplayalım. (3.75) ve (3.79) formüllerinden,

$$k_{11}^1 = \frac{1}{S_{ij}^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(b_1+y)^2\,dxdy = \frac{1}{3S_{ij}^2}(x_{i+1}-x_i)(-y_{j+1}-y)^3\Big|_{y_j}^{y_{j+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}}$$

$$k_{12}^1 = \frac{1}{S_{ij}^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(b_1+y)^2(b_2-y)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{S_{ij}^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left[-(b_1+y)^2+(b_1+b_2)(b_1+y)\right]dxdy = \frac{1}{6}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}$$

$$k_{13}^1 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{14}^1 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{22}^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{23}^1 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}},$$

$$k_{24}^1 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{33}^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{34}^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}}, \qquad k_{44}^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}},$$

$$k^1_{ij} = k^1_{ji}$$

$$k^2_{11} = \frac{1}{S^2_{ij}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (c_1 + x)^2 dxdy = \frac{1}{3S^2_{ij}} (y_{j+1} - y_j)(-x_{i+1} - x)^3 \Big|_{x_i}^{x_{j+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}},$$

$$k^2_{12} = \frac{1}{S^2_{ij}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (c_1 + x)^2 \cdot (c_2 - x) dxdy$$
$$= \frac{1}{S^2_{ij}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[-(c_1 + x)^2 + (c_1 + c_2)(c_1 + x) \right] dxdy = -\frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}};$$

$$k^2_{13} = \frac{1}{6} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{14} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{22} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{23} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}},$$

$$k^2_{24} = \frac{1}{6} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{33} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{34} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}}, \qquad k^2_{44} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}},$$

$$k^2_{ij} = k^2_{ji}$$

bulunurlar. $K^m = \left\{ (k^1_{ij} + k^2_{ij}) \right\}$ olur.

BÖLÜM 4. SEY'DEN ELDE EDİLEN SONLU FARKLARIN KLASİK SONLU FARKLARLA KARŞILAŞTIRILMASI

4.1. Dörtgen Elemanlardan Elde Edilen SF Denklemi

Herhangi (i,j), $1<i<N$, $1<j<M$ iç düğüm noktası için cebirsel denklemi bir başka deyişle, SEY'den elde edilen SE şemasını elde edelim. Bunun için global sertlik matrisinin $K_1=(j-1)N+i$ numaralı satırını bilinmeyenler vektörü ile çarpmak ve sağ taraf vektörünün K_1'inci bileşenine eşitlemek gerekiyor. Bu satır $e_{(i-1,j-1)}$, $e_{(i,j-1)}$, $e_{(i-1,j)}$, $e_{(i,j)}$ sonlu elemanlarının lokal sertlik matrislerinin elemanlarından oluşur. Global sertlik matrisinin K_1'inci satırına bu matrislerin sırasıyla dördüncü, üçüncü, ikinci ve birinci satırları katkıda bulunur. Katsayıları sütun numaraları $e_{(i,j)}$ sonlu elemanlarının $M_{(i,j)}$ kümelerinin elemanları ile belirlenir. Böylelikle cebirsel denklemler sisteminin K_1 nolu denklemi aşağıdaki şekilde olur.

$$k_{41}^{(i-1,j-1)}C_{i-1,j-1}+(k_{42}^{(i-1,j-1)}+k_{31}^{(i,j-1)})C_{i,j-1}+k_{32}^{(i,j-1)}C_{i+1,j-1}+(k_{43}^{(i-1,j-1)}+k_{21}^{(i-1,j)})C_{i-1,j}$$

$$+(k_{44}^{(i-1,j-1)}+k_{33}^{(i,j-1)}+k_{22}^{(i-1,j)}+k_{11}^{(i,j)})C_{i,j}+(k_{34}^{(i,j-1)}+k_{12}^{(i,j)})C_{i+1,j}+k_{23}^{(i-1,j)}C_{i-1,j+1}$$

$$+(k_{24}^{(i-1,j)}+k_{13}^{(i,j)})C_{i,j+1}+k_{14}^{(i,j)}C_{i+1,j+1}=b_{k_1}^{ij}$$

$$b_{k_1}^{(ij)}=b_{ij}^{(i-1,j-1)}+b_{ij}^{(i,j-1)}+b_{ij}^{(i-1,j)}+b_{ij}^{(i,k)},\quad k_1=(j-1)N+i \tag{4.1}$$

Bu gösterimdeki üst indis $e_{(ij)}$ sonlu elemanının numarasını göstermektedir.

Kolaylık açısından $h_i=h=$sabit, $\tau_i=\tau=$sabit olduğunu varsayalım ve (4.1) ifadesinde $k_{\ell k}^{(ij)}$ elemanının değerini ((3.30) sisteminden) yerine yazalım. O halde eşit adımlı kafeste (4.1) denkleminin ifadesini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\frac{1}{6}\left\{\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j-1}+\left(-4\frac{\tau}{h}+2\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j-1}+\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i+1,j-1}+\left(2\frac{\tau}{h}-4\frac{h}{\tau}\right)C_{i-1,j}\right.$$

$$+\left(8\frac{\tau}{h}+8\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j}+\left(2\frac{\tau}{h}-4\frac{h}{\tau}\right)C_{i+1,j}+\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i-1,j+1}+\left(-4\frac{\tau}{h}+2\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j+1}$$

$$\left.+\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i+1,j+1}\right\}$$

veya

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{\tau}{h}\left(-C_{i-1,j-1}-4C_{i,j-1}-C_{i+1,j-1}+2C_{i-1,j}+8C_{i,j}+2C_{i+1,j}-C_{i-1,j+1}-4C_{i,j+1}-C_{i+1,j+1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\tau}\left(-C_{i-1,j-1}+2C_{i,j-1}-C_{i+1,j-1}-4C_{i-1,j}+8C_{i,j}-4C_{i+1,j}-C_{i-1,j+1}+2C_{i,j+1}-C_{i+1,j+1}\right)\right\}$$

$$=b_{K_l}^{ij}$$

Bu son denklemi sonlu farklar teorisi terimleri ile,

$$-\frac{h^3}{\tau}C_{\bar{x}x}-\frac{\tau^3}{h}C_{\bar{y}y}-\frac{1}{6}\tau^3 hC_{\bar{x}x\bar{y}y}-\frac{1}{6}h^3\tau C_{\bar{x}x\bar{y}y}=b_{k_l}^{(i,j)}$$

şeklinde yazılır. Eğer sonlu elemanlar kare olursa, yani h=τ olursa bu denklem daha basite indirgenir.

$$-h^2\left[C_{\bar{x}x}+C_{\bar{y}y}\right]-\frac{1}{3}h^4C_{\bar{x}x\bar{y}y}=b_{K_l}^{(i,j)}$$

veya

$$-C_{\bar{x}x}-C_{\bar{y}y}-\frac{1}{3}h^2C_{\bar{x}x\bar{y}y}=\frac{1}{h^2}b_{k_l}^{(i,j)} \qquad (4.2)$$

(4.2) dokuz noktalı fark şemasıdır ve dikdörtgen kafeste yakınsaklık hatası $0(h^2)$'dir.

4.2. Üçgen Elemanlardan Elde Edilen SF Denklemi

Şekil (3.9)'da gösterilen herhangi (i,j) noktasını gözönüne alalım. Bu noktanın altı tane üçgen sonlu eleman ile komşuluğu vardır. Buna göre "aşağıdan-yukarıya", "soldan-sağa" numaralama yapıldığı zaman K_1=(i-1)M+j nolu denklemin sıfırdan farklı katsayıları, e_i, $i=\overline{1.6}$ sonlu elemanlarının lokal sertlik matrislerinin elemanlarının toplamı şeklinde bulunur.

(3.47)'de global sertlik matrisinin k_1 numaralı satırından elde edilen denklemi alalım:

$$(k_{31}^1+k_{31}^2)C_{i-1,j-1}+(k_{32}^1+k_{21}^4)C_{i-1,j}+(k_{32}^2+k_{21}^3)C_{i,j-1}$$

$$+(k_{33}^1+k_{33}^2+k_{22}^3+k_{22}^4+k_{11}^5+k_{11}^6)C_{i,j}+(k_{23}^4+k_{12}^5)C_{i,j+1}$$

$$+(k_{23}^3+k_{12}^6)C_{i+1,j}+(k_{13}^5+k_{13}^6)C_{i+1,j+1}=b_{i,j}$$

(3.43) ve (3.44)'de h_i=h=sabit, τ_i=τ=sabit olduğunu varsayalım ve yukarıda eşitlikte $k_{i,j}$ lerin değerlerini yerlerine yazalım.

$$\frac{1}{2}\left\{(0+0)C_{i-1,j-1}+\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{\tau}{h}\right)C_{i-1,j}+\left(-\frac{h}{\tau}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j-1}\right.$$
$$+\left(\frac{\tau}{h}+\frac{\tau}{h}+\frac{h}{\tau}+\frac{h}{\tau}+\frac{h}{\tau}+\frac{\tau}{h}+\frac{h}{\tau}+\frac{\tau}{h}\right)C_{i,j}+\left(-\frac{h}{\tau}-\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j+1}$$
$$\left.+\left(-\frac{\tau}{h}-\frac{\tau}{h}\right)C_{i+1,j}+(0+0)C_{i-1,j}\right\}=b_{i,j}$$

bu ifadeyi düzenlersek

$$\frac{1}{2}\left\{-2\frac{\tau}{h}C_{i-1,j}-2\frac{h}{\tau}C_{i,j-1}+4\left(\frac{\tau}{h}+\frac{h}{\tau}\right)C_{i,j}-2\frac{h}{\tau}C_{i,j+1}-2\frac{\tau}{h}C_{i+1,j}\right\}=b_{i,j}$$

olur. Bu son ifadeyi aşağıdaki gibi yazıp düzenlersek,

$$-\frac{\tau}{h}C_{i-1,j}+2\frac{\tau}{h}C_{i,j}-\frac{\tau}{h}C_{i+1,j}-\frac{h}{\tau}C_{i,j-1}+2\frac{h}{\tau}C_{i,j}-\frac{h}{\tau}C_{i,j+1}=b_{i,j}$$

$$-\frac{\tau}{h}(C_{i-1,j}-2C_{i,j}+C_{i+1,j})-\frac{h}{\tau}(C_{i,j-1}-2C_{i,j}+C_{i,j+1})=b_{i,j}$$

olur. Elde edilen bu ifadeyi $h\tau$ çarpımına bölelim;

$$-\frac{(C_{i+1,j}-2C_{i,j}+C_{i-1,j})}{h^2}-\frac{(C_{i,j+1}-2C_{i,j}+C_{i,j-1})}{\tau^2}=\frac{1}{h\tau}b_{i,j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeyi SF terimleri ile yazarsak;

$$-C_{\bar{x}x}-C_{\bar{y}y}=\frac{1}{h\tau}b_{ij} \qquad (4.3)$$

elde edilir. Özel olarak $h=\tau$ olursa, bu koşulda aşağıdaki SF denklemi elde edilir.

$$-C_{\bar{x}x}-C_{\bar{y}y}=\frac{1}{h^2}b_{ij} \qquad (4.4)$$

4.3. SE'dan Elde Edilen SF Denklemlerinin Klasik SF Denklemleri ile Karşılaştırılması

(4.2) ve (4.4) sonlu fark denklemleri incelendiğinde bu denklemlerden herbirinin (2.1) denklemine sonlu elemanlarla yaklaşımdan elde edilen sonlu fark denklemleri olduğu görülür. Her iki denklemde de ilk terimler $(-C_{\bar{x}x}-C_{\bar{y}y})$ aynıdır. (4.2) denklemindeki $-\frac{1}{3}h^2C_{\bar{x}x\bar{y}y}$ terimlerinin ise $|C_{\bar{x}x\bar{y}y}|$'nın sınırlı olduğu varsayılırsa, $O(h^2)$ düzeyinde olduğu açıkça görülür. Toplam hata $O(h^2)$ olduğundan bu terim toplam hatayı değiştirmez.

4.4 Yaklaşık Çözüm İle Kesin Çözümün Karşılaştırılması, Uygulamalı Problem

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x \le 3.14;\ 0 \le y \le 3.14\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y) \tag{4.5}$$

$$u(3.14, y) = \varphi_2(y)$$

$$u(x, 0) = \varphi_3(x)$$

$$u(x, 3.14) = \varphi_4(x)$$

sınır değer problemini ele alalım.

Eğer,

$$u(x, y) = Sin^2 x + Sin^2 y \tag{4.6}$$

fonksiyonunu (4.5)'de yerine yazarsak hesaplamalar sonucu;

$$F(x, y) = 2(Cos2x + Cos2y) \quad ,$$

$$\varphi_1(y) = Sin^2 y \quad ,$$

$$\varphi_2(y) = Sin^2 y \quad , \tag{4.7}$$

$$\varphi_3(x) = Sin^2 x \quad ,$$

$$\varphi_4(x) = Sin^2 x \quad ,$$

elde edilir.

(4.6) eşitliği ile verilmiş U(x,y) fonksiyonu (4.7) verileri ile verilen (4.5) problemin analitik çözümü olacaktır. Üçgen sonlu elemanlardan elde ettiğimiz sonlu fark şemasını kullanarak düğüm noktalarında bulacağımız sonuçlar ile analitik çözümün bu noktalara karşı gelen değerlerini karşılaştırarak yaklaşım hatasını değerlendirelim.

Problemin sayısal çözümü için N=21, M=21 alarak,

$$\Omega_h = \left\{ (x_i, y_j) \middle| x_{i+1} = x_i + h,\ y_{j+1} = y_j + \tau \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0 \right\} \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M}$$

$$h = \frac{3.14}{N}; \qquad \tau = \frac{3.14}{M}$$

kafesini tanımlayalım.

Poisson denklemi için sınır değer problemine karşılık gelen bilineer formun,

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy$$

Lineer formun ise;

$$b(v) = \iint_{\Omega} F(x, y) v(x, y)\, dxdy$$

olduğu açıktır.

$h = \tau$ olarak (3.25) ve (3.42) formüllerini kullanarak, lokal sertlik matrisinin ve sağ yan vektörünün bileşenlerini bulabiliriz. Buna göre;

$$K^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad K^{-} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

(4.5) probleminin sayısal çözümünün bulunması için elde edilen lineer cebirsel denklemler sisteminin global matrisi (3.47) deki gibi oluşturulur.

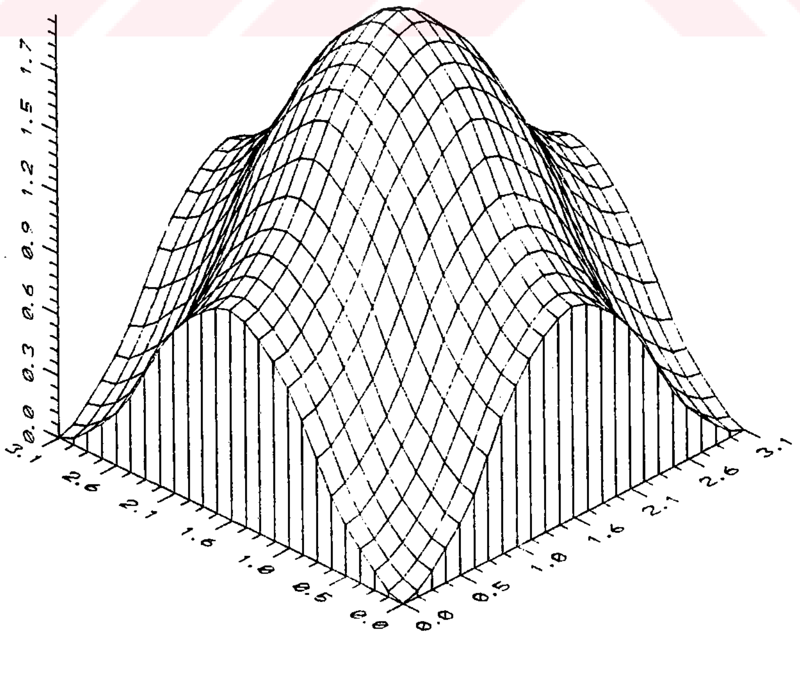
Kesin ve yaklaşık çözümlerin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1'de verilmiştir. Bu tablodan görülebileceği gibi,

$$\max\left|U - U_h\right| = 0.01085$$

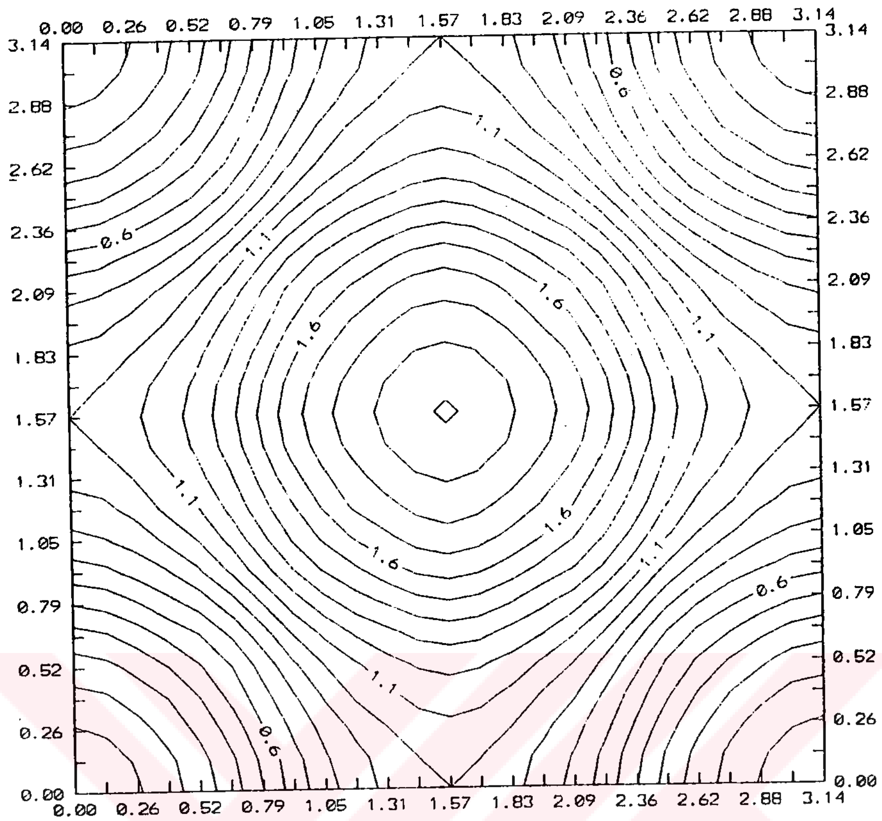
dir.

Çözüm fonksiyonunun kendisinin ve kesitinin grafikleri Şekil 4.1 ve Şekil 4.2' de verilmiştir.

Problem [41]'de verilmiş yöntem bazında hazırlanan DRIV_SOL03 programı ile çözülmüştür.



Şekil 4.1. Problem (4.5)'in yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 4.2. Problem (4.5)'in yaklaşık çözümünün kesit görünümü

Tablo 1. Kesin ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması

a1=3.14 a2=3.14

n1=21 n2=21

h1=0.16 h2=0.16

x(i)	y(i)	Kesin Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata	Mutlak Hata
.000	.000	.0000000	.0000000	.0000000	.00000
.000	.157	.0244471	.0244471	.0000000	.00000
.000	.314	.0953979	.0953979	.0000000	.00000
.000	.471	.2059142	.2059142	.0000000	.00000
.000	.628	.3451886	.3451886	.0000000	.00000
.000	.785	.4996019	.4996019	.0000000	.00000
.000	.942	.6540540	.6540540	.0000000	.00000
.000	1.099	.7934415	.7934415	.0000000	.00000
.000	1.256	.9041337	.9041337	.0000000	.00000
.000	1.413	.9753063	.9753063	.0000000	.00000
.000	1.570	.9999993	.9999993	.0000000	.00000
.000	1.727	.9757982	.9757982	.0000000	.00000
.000	1.884	.9050694	.9050694	.0000000	.00000
.000	2.041	.7947294	.7947294	.0000000	.00000
.000	2.198	.6555684	.6555684	.0000000	.00000
.000	2.355	.5011945	.5011945	.0000000	.00000
.000	2.512	.3467037	.3467037	.0000000	.00000

.000	2.669	.2072035	.2072035	.0000000	.00000
.000	2.826	.0963356	.0963356	.0000000	.00000
.000	2.983	.0249415	.0249415	.0000000	.00000
.000	3.140	.0000025	.0000025	.0000000	.00000
.157	.000	.0244471	.0244471	.0000000	.00000
.157	.157	.0488943	.0484037	.0004906	100.345
.157	.314	.1198451	.1192478	.0005973	.49837
.157	.471	.2303613	.2298753	.0004860	.21097
.157	.628	.3696358	.3693898	.0002460	.06654
.157	.785	.5240490	.5241106	.0000616	.01175
.157	.942	.6785012	.6788883	.0003871	.05706
.157	1.099	.8178886	.8185771	.0006884	.08417
.157	1.256	.9285809	.9295115	.0009307	.10022
.157	1.413	.9997535	10.008.410	.0010875	.10878
.157	1.570	10.244.460	10.255.890	.0011421	.11149
.157	1.727	10.002.450	10.013.340	.0010885	.10882
.157	1.884	.9295166	.9304494	.0009328	.10035
.157	2.041	.8191766	.8198681	.0006916	.08443
.157	2.198	.6800156	.6804062	.0003906	.05745
.157	2.355	.5256416	.5257069	.0000653	.01243
.157	2.512	.3711508	.3709084	.0002424	.06531
.157	2.669	.2316507	.2311677	.0004830	.20849
.157	2.826	.1207827	.1201877	.0005950	.49265
.157	2.983	.0493886	.0488991	.0004895	.99112
.157	3.140	.0244497	.0244497	.0000000	.00000
.314	.000	.0953979	.0953979	.0000000	.00000
.314	.157	.1198451	.1192477	.0005973	.49840
.314	.314	.1907958	.1900941	.0007017	.36779
.314	.471	.3013121	.3008326	.0004794	.15911
.314	.628	.4405865	.4405361	.0000504	.01145
.314	.785	.5949998	.5954894	.0004896	.08228
.314	.942	.7494519	.7505099	.0010580	.14117
.314	1.099	.8888394	.8904223	.0015829	.17809
.314	1.256	.9995316	10.015.360	.0020047	.20057
.314	1.413	10.707.040	10.729.810	.0022773	.21269
.314	1.570	10.953.970	10.977.690	.0023723	.21657
.314	1.727	10.711.960	10.734.750	.0022793	.21278
.314	1.884	10.004.670	10.024.760	.0020084	.20075
.314	2.041	.8901273	.8917156	.0015883	.17844
.314	2.198	.7509664	.7520305	.0010641	.14170
.314	2.355	.5965924	.5970886	.0004963	.08318
.314	2.512	.4421016	.4420575	.0000441	.00997
.314	2.669	.3026015	.3021274	.0004741	.15667
.314	2.826	.1917335	.1910356	.0006979	.36397
.314	2.983	.1203394	.1197441	.0005953	.49470
.314	3.140	.0954005	.0954005	.0000000	.00000
.471	.000	.2059142	.2059142	.0000000	.00000
.471	.157	.2303613	.2298752	.0004861	.21101
.471	.314	.3013121	.3008326	.0004794	.15911
.471	.471	.4118283	.4117129	.0001154	.02802
.471	.628	.5511028	.5515890	.0004862	.08822
.471	.785	.7055160	.7067323	.0012164	.17241
.471	.942	.8599682	.8619429	.0019747	.22962
.471	1.099	.9993556	10.020.260	.0026708	.26725

.471	1.256	11.100.480	11.132.760	.0032283	.29083
.471	1.413	11.812.210	11.848.090	.0035883	.30378
.471	1.570	12.059.140	12.096.270	.0037136	.30795
.471	1.727	11.817.120	11.853.040	.0035912	.30390
.471	1.884	11.109.840	11.142.170	.0032334	.29104
.471	2.041	10.006.440	10.033.220	.0026782	.26764
.471	2.198	.8614826	.8634655	.0019829	.23017
.471	2.355	.7071086	.7083337	.0012251	.17326
.471	2.512	.5526178	.5531124	.0004946	.08950
.471	2.669	.4131177	.4130094	.0001082	.02620
.471	2.826	.3022497	.3017754	.0004743	.15693
.471	2.983	.2308556	.2303721	.0004835	.20944
.471	3.140	.2059167	.2059167	.0000000	.00000
.628	.000	.3451886	.3451886	.0000000	.00000
.628	.157	.3696358	.3693898	.0002459	.06653
.628	.314	.4405865	.4405361	.0000504	.01145
.628	.471	.5511028	.5515890	.0004862	.08822
.628	.628	.6903772	.6916341	.0012569	.18206
.628	.785	.8447905	.8469431	.0021526	.25481
.628	.942	.9992427	10.023.090	.0030664	.30687
.628	1.099	11.386.300	11.425.280	.0038981	.34235
.628	1.256	12.493.220	12.538.830	.0045609	.36507
.628	1.413	13.204.950	13.254.830	.0049883	.37776
.628	1.570	13.451.880	13.503.250	.0051368	.38187
.628	1.727	13.209.870	13.259.780	.0049914	.37785
.628	1.884	12.502.580	12.548.250	.0045673	.36531
.628	2.041	11.399.180	11.438.250	.0039066	.34271
.628	2.198	10.007.570	10.038.330	.0030758	.30735
.628	2.355	.8463831	.8485458	.0021628	.25553
.628	2.512	.6918923	.6931589	.0012666	.18306
.628	2.669	.5523921	.5528865	.0004944	.08951
.628	2.826	.4415242	.4414797	.0000445	.01007
.628	2.983	.3701301	.3698871	.0002430	.06565
.628	3.140	.3451912	.3451912	.0000000	.00000
.785	.000	.4996019	.4996019	.0000000	.00000
.785	.157	.5240490	.5241105	.0000615	.01174
.785	.314	.5949998	.5954893	.0004895	.08226
.785	.471	.7055160	.7067322	.0012162	.17238
.785	.628	.8447905	.8469430	.0021526	.25480
.785	.785	.9992037	10.024.000	.0031964	.31990
.785	.942	11.536.560	11.578.970	.0042409	.36760
.785	1.099	12.930.430	12.982.260	.0051821	.40077
.785	1.256	14.037.360	14.096.640	.0059282	.42231
.785	1.413	14.749.080	14.813.160	.0064080	.43447
.785	1.570	14.996.010	15.061.760	.0065747	.43843
.785	1.727	14.754.000	14.818.110	.0064113	.43455
.785	1.884	14.046.710	14.106.060	.0059348	.42251
.785	2.041	12.943.310	12.995.220	.0051908	.40104
.785	2.198	11.551.700	11.594.220	.0042514	.36803
.785	2.355	10.007.960	10.040.040	.0032078	.32053
.785	2.512	.8463055	.8484689	.0021634	.25562
.785	2.669	.7068054	.7080306	.0012252	.17335
.785	2.826	.5959374	.5964335	.0004961	.08325
.785	2.983	.5245433	.5246082	.0000648	.01236

.785	3.140	.4996044	.4996044	.0000000	.00000
.942	.000	.6540540	.6540540	.0000000	.00000
.942	.157	.6785012	.6788880	.0003868	.05701
.942	.314	.7494519	.7505096	.0010576	.14112
.942	.471	.8599682	.8619424	.0019742	.22957
.942	.628	.9992427	10.023.090	.0030661	.30684
.942	.785	11.536.560	11.578.970	.0042408	.36759
.942	.942	13.081.080	13.135.030	.0053951	.41243
.942	1.099	14.474.950	14.539.200	.0064250	.44387
.942	1.256	15.581.880	15.654.250	.0072368	.46444
.942	1.413	16.293.600	16.371.170	.0077571	.47608
.942	1.570	16.540.530	16.619.910	.0079374	.47988
.942	1.727	16.298.520	16.376.140	.0077614	.47620
.942	1.884	15.591.230	15.663.680	.0072441	.46463
.942	2.041	14.487.830	14.552.170	.0064341	.44410
.942	2.198	13.096.230	13.150.280	.0054057	.41277
.942	2.355	11.552.490	11.595.010	.0042526	.36811
.942	2.512	10.007.580	10.038.350	.0030777	.30754
.942	2.669	.8612576	.8632419	.0019843	.23040
.942	2.826	.7503896	.7514547	.0010651	.14194
.942	2.983	.6789955	.6793861	.0003906	.05752
.942	3.140	.6540566	.6540566	.0000000	.00000
1.099	.000	.7934415	.7934415	.0000000	.00000
1.099	.157	.8178886	.8185767	.0006881	.08413
1.099	.314	.8888394	.8904222	.0015829	.17808
1.099	.471	.9993556	10.020.260	.0026707	.26724
1.099	.628	11.386.300	11.425.280	.0038978	.34232
1.099	.785	12.930.430	12.982.260	.0051823	.40078
1.099	.942	14.474.950	14.539.210	.0064255	.44390
1.099	1.099	15.868.830	15.944.080	.0075250	.47420
1.099	1.256	16.975.750	17.059.620	.0083872	.49407
1.099	1.413	17.687.480	17.776.860	.0089383	.50535
1.099	1.570	17.934.410	18.025.700	.0091289	.50902
1.099	1.727	17.692.400	17.781.820	.0089425	.50544
1.099	1.884	16.985.110	17.069.050	.0083944	.49422
1.099	2.041	15.881.710	15.957.050	.0075345	.47441
1.099	2.198	14.490.100	14.554.460	.0064366	.44421
1.099	2.355	12.946.360	12.998.300	.0051945	.40124
1.099	2.512	11.401.450	11.440.550	.0039098	.34292
1.099	2.669	10.006.450	10.033.260	.0026810	.26793
1.099	2.826	.8897770	.8913676	.0015906	.17876
1.099	2.983	.8183829	.8190753	.0006924	.08460
1.099	3.140	.7934440	.7934440	.0000000	.00000
1.256	.000	.9041337	.9041337	.0000000	.00000
1.256	.157	.9285809	.9295114	.0009305	.10021
1.256	.314	.9995316	10.015.360	.0020049	.20058
1.256	.471	11.100.480	11.132.760	.0032282	.29082
1.256	.628	12.493.220	12.538.830	.0045608	.36506
1.256	.785	14.037.360	14.096.640	.0059284	.42233
1.256	.942	15.581.880	15.654.250	.0072374	.46448
1.256	1.099	16.975.750	17.059.630	.0083877	.49410
1.256	1.256	18.082.670	18.175.540	.0092862	.51354
1.256	1.413	18.794.400	18.893.000	.0098594	.52459
1.256	1.570	19.041.330	19.141.910	.0100577	.52820

1.256	1.727	18.799.320	18.897.950	.0098634	.52467
1.256	1.884	18.092.030	18.184.970	.0092938	.51370
1.256	2.041	16.988.630	17.072.600	.0083973	.49429
1.256	2.198	15.597.020	15.669.510	.0072484	.46473
1.256	2.355	14.053.280	14.112.690	.0059407	.42273
1.256	2.512	12.508.370	12.554.100	.0045727	.36558
1.256	2.669	11.113.370	11.145.760	.0032389	.29144
1.256	2.826	10.004.690	10.024.820	.0020125	.20115
1.256	2.983	.9290752	.9300099	.0009347	.10061
1.256	3.140	.9041363	.9041363	.0000000	.00000
1.413	.000	.9753063	.9753063	.0000000	.00000
1.413	.157	.9997535	10.008.410	.0010873	.10876
1.413	.314	10.707.040	10.729.820	.0022779	.21274
1.413	.471	11.812.210	11.848.090	.0035884	.30379
1.413	.628	13.204.950	13.254.830	.0049880	.37773
1.413	.785	14.749.080	14.813.160	.0064079	.43446
1.413	.942	16.293.600	16.371.180	.0077572	.47609
1.413	1.099	17.687.480	17.776.860	.0089384	.50535
1.413	1.256	18.794.400	18.893.000	.0098596	.52460
1.413	1.413	19.506.130	19.610.580	.0104457	.53551
1.413	1.570	19.753.060	19.859.540	.0106483	.53907
1.413	1.727	19.511.050	19.615.540	.0104498	.53558
1.413	1.884	18.803.760	18.902.420	.0098666	.52471
1.413	2.041	17.700.360	17.789.840	.0089481	.50553
1.413	2.198	16.308.750	16.386.430	.0077682	.47632
1.413	2.355	14.765.010	14.829.210	.0064198	.43480
1.413	2.512	13.220.100	13.270.100	.0049999	.37820
1.413	2.669	11.825.100	11.861.090	.0035989	.30435
1.413	2.826	10.716.420	10.739.270	.0022851	.21324
1.413	2.983	10.002.480	10.013.390	.0010914	.10911
1.413	3.140	.9753089	.9753089	.0000000	.00000
1.570	.000	.9999993	.9999993	.0000000	.00000
1.570	.157	10.244.460	10.255.890	.0011420	.11148
1.570	.314	10.953.970	10.977.700	.0023724	.21658
1.570	.471	12.059.140	12.096.270	.0037134	.30793
1.570	.628	13.451.880	13.503.240	.0051363	.38182
1.570	.785	14.996.010	15.061.750	.0065739	.43838
1.570	.942	16.540.530	16.619.910	.0079376	.47988
1.570	1.099	17.934.410	18.025.700	.0091292	.50903
1.570	1.256	19.041.330	19.141.910	.0100580	.52822
1.570	1.413	19.753.060	19.859.540	.0106484	.53907
1.570	1.570	19.999.990	20.108.510	.0108525	.54262
1.570	1.727	19.757.980	19.864.500	.0106523	.53914
1.570	1.884	19.050.690	19.151.340	.0100652	.52834
1.570	2.041	17.947.290	18.038.680	.0091392	.50922
1.570	2.198	16.555.680	16.635.160	.0079486	.48012
1.570	2.355	15.011.940	15.077.800	.0065863	.43874
1.570	2.512	13.467.030	13.518.510	.0051484	.38230
1.570	2.669	12.072.030	12.109.270	.0037243	.30851
1.570	2.826	10.963.350	10.987.150	.0023804	.21712
1.570	2.983	10.249.410	10.260.870	.0011460	.11181
1.570	3.140	10.000.020	10.000.020	.0000000	.00000
1.727	.000	.9757982	.9757982	.0000000	.00000
1.727	.157	10.002.450	10.013.340	.0010886	.10884

1.727	.314	10.711.960	10.734.760	.0022796	.21281
1.727	.471	11.817.120	11.853.030	.0035911	.30389
1.727	.628	13.209.870	13.259.780	.0049912	.37784
1.727	.785	14.754.000	14.818.110	.0064113	.43455
1.727	.942	16.298.520	16.376.130	.0077611	.47619
1.727	1.099	17.692.400	17.781.820	.0089425	.50544
1.727	1.256	18.799.320	18.897.960	.0098637	.52469
1.727	1.413	19.511.050	19.615.540	.0104494	.53556
1.727	1.570	19.757.980	19.864.500	.0106523	.53914
1.727	1.727	19.515.960	19.620.500	.0104541	.53567
1.727	1.884	18.808.680	18.907.390	.0098714	.52483
1.727	2.041	17.705.280	17.794.810	.0089532	.50568
1.727	2.198	16.313.670	16.391.400	.0077729	.47647
1.727	2.355	14.769.930	14.834.160	.0064237	.43492
1.727	2.512	13.225.020	13.275.050	.0050032	.37831
1.727	2.669	11.830.020	11.866.030	.0036013	.30442
1.727	2.826	10.721.340	10.744.210	.0022870	.21332
1.727	2.983	10.007.400	10.018.320	.0010922	.10914
1.727	3.140	.9758008	.9758008	.0000000	.00000
1.884	.000	.9050694	.9050694	.0000000	.00000
1.884	.157	.9295166	.9304497	.0009332	.10039
1.884	.314	10.004.670	10.024.760	.0020090	.20081
1.884	.471	11.109.840	11.142.170	.0032334	.29104
1.884	.628	12.502.580	12.548.250	.0045670	.36529
1.884	.785	14.046.710	14.106.070	.0059352	.42253
1.884	.942	15.591.230	15.663.680	.0072447	.46467
1.884	1.099	16.985.110	17.069.060	.0083956	.49429
1.884	1.256	18.092.030	18.184.980	.0092947	.51375
1.884	1.413	18.803.760	18.902.430	.0098674	.52476
1.884	1.570	19.050.690	19.151.340	.0100652	.52834
1.884	1.727	18.808.680	18.907.390	.0098718	.52486
1.884	1.884	18.101.390	18.194.410	.0093021	.51389
1.884	2.041	16.997.990	17.082.040	.0084054	.49450
1.884	2.198	15.606.380	15.678.940	.0072563	.46496
1.884	2.355	14.062.640	14.122.110	.0059474	.42292
1.884	2.512	12.517.730	12.563.520	.0045786	.36577
1.884	2.669	11.122.730	11.155.160	.0032434	.29161
1.884	2.826	10.014.050	10.034.210	.0020157	.20129
1.884	2.983	.9300109	.9309474	.0009365	.10070
1.884	3.140	.9050719	.9050719	.0000000	.00000
2.041	.000	.7947294	.7947294	.0000000	.00000
2.041	.157	.8191766	.8198680	.0006915	.08441
2.041	.314	.8901273	.8917156	.0015883	.17844
2.041	.471	10.006.440	10.033.220	.0026779	.26762
2.041	.628	11.399.180	11.438.240	.0039063	.34268
2.041	.785	12.943.310	12.995.230	.0051917	.40111
2.041	.942	14.487.830	14.552.190	.0064354	.44419
2.041	1.099	15.881.710	15.957.070	.0075357	.47449
2.041	1.256	16.988.630	17.072.620	.0083984	.49435
2.041	1.413	17.700.360	17.789.850	.0089496	.50562
2.041	1.570	17.947.290	18.038.680	.0091397	.50925
2.041	1.727	17.705.280	17.794.810	.0089535	.50569
2.041	1.884	16.997.990	17.082.050	.0084063	.49455
2.041	2.041	15.894.590	15.970.040	.0075454	.47471

2.041	2.198	14.502.980	14.567.450	.0064470	.44453
2.041	2.355	12.959.240	13.011.270	.0052036	.40154
2.041	2.512	11.414.330	11.453.510	.0039178	.34324
2.041	2.669	10.019.330	10.046.210	.0026877	.26825
2.041	2.826	.8910649	.8926605	.0015956	.17906
2.041	2.983	.8196709	.8203659	.0006950	.08480
2.041	3.140	.7947319	.7947319	.0000000	.00000
2.198	.000	.6555684	.6555684	.0000000	.00000
2.198	.157	.6800156	.6804061	.0003905	.05743
2.198	.314	.7509664	.7520301	.0010637	.14164
2.198	.471	.8614826	.8634652	.0019826	.23013
2.198	.628	10.007.570	10.038.330	.0030758	.30735
2.198	.785	11.551.700	11.594.220	.0042514	.36803
2.198	.942	13.096.230	13.150.290	.0054060	.41279
2.198	1.099	14.490.100	14.554.470	.0064373	.44426
2.198	1.256	15.597.020	15.669.520	.0072502	.46484
2.198	1.413	16.308.750	16.386.450	.0077704	.47646
2.198	1.570	16.555.680	16.635.180	.0079505	.48023
2.198	1.727	16.313.670	16.391.400	.0077738	.47652
2.198	1.884	15.606.380	15.678.950	.0072572	.46502
2.198	2.041	14.502.980	14.567.450	.0064473	.44455
2.198	2.198	13.111.370	13.165.550	.0054184	.41326
2.198	2.355	11.567.630	11.610.260	.0042634	.36856
2.198	2.512	10.022.720	10.053.590	.0030869	.30799
2.198	2.669	.8627720	.8647640	.0019920	.23089
2.198	2.826	.7519040	.7529749	.0010709	.14242
2.198	2.983	.6805099	.6809038	.0003939	.05788
2.198	3.140	.6555710	.6555710	.0000000	.00000
2.355	.000	.5011945	.5011945	.0000000	.00000
2.355	.157	.5256416	.5257067	.0000651	.01238
2.355	.314	.5965924	.5970882	.0004959	.08311
2.355	.471	.7071086	.7083332	.0012246	.17318
2.355	.628	.8463831	.8485456	.0021625	.25550
2.355	.785	10.007.960	10.040.040	.0032076	.32050
2.355	.942	11.552.490	11.595.010	.0042523	.36809
2.355	1.099	12.946.360	12.998.310	.0051951	.40128
2.355	1.256	14.053.280	14.112.700	.0059417	.42280
2.355	1.413	14.765.010	14.829.220	.0064216	.43492
2.355	1.570	15.011.940	15.077.820	.0065881	.43886
2.355	1.727	14.769.930	14.834.180	.0064254	.43503
2.355	1.884	14.062.640	14.122.130	.0059489	.42303
2.355	2.041	12.959.240	13.011.290	.0052047	.40162
2.355	2.198	11.567.630	11.610.270	.0042641	.36862
2.355	2.355	10.023.890	10.056.080	.0032190	.32113
2.355	2.512	.8478982	.8500715	.0021734	.25632
2.355	2.669	.7083980	.7096319	.0012339	.17418
2.355	2.826	.5975300	.5980327	.0005027	.08413
2.355	2.983	.5261359	.5262043	.0000684	.01301
2.355	3.140	.5011970	.5011970	.0000000	.00000
2.512	.000	.3467037	.3467037	.0000000	.00000
2.512	.157	.3711508	.3709083	.0002426	.06535
2.512	.314	.4421016	.4420571	.0000445	.01007
2.512	.471	.5526178	.5531118	.0004939	.08938
2.512	.628	.6918923	.6931582	.0012659	.18296

2.512	.785	.8463055	.8484684	.0021628	.25556
2.512	.942	10.007.580	10.038.350	.0030773	.30749
2.512	1.099	11.401.450	11.440.550	.0039098	.34292
2.512	1.256	12.508.370	12.554.110	.0045732	.36561
2.512	1.413	13.220.100	13.270.110	.0050008	.37827
2.512	1.570	13.467.030	13.518.530	.0051495	.38238
2.512	1.727	13.225.020	13.275.060	.0050044	.37840
2.512	1.884	12.517.730	12.563.530	.0045801	.36589
2.512	2.041	11.414.330	11.453.520	.0039189	.34333
2.512	2.198	10.022.720	10.053.600	.0030879	.30809
2.512	2.355	.8478982	.8500715	.0021733	.25632
2.512	2.512	.6934074	.6946834	.0012761	.18403
2.512	2.669	.5539072	.5544097	.0005025	.09072
2.512	2.826	.4430392	.4430011	.0000382	.00862
2.512	2.983	.3716452	.3714056	.0002396	.06446
2.512	3.140	.3467062	.3467062	.0000000	.00000
2.669	.000	.2072035	.2072035	.0000000	.00000
2.669	.157	.2316507	.2311675	.0004831	.20856
2.669	.314	.3026015	.3021270	.0004745	.15679
2.669	.471	.4131177	.4130089	.0001088	.02634
2.669	.628	.5523921	.5528861	.0004939	.08942
2.669	.785	.7068054	.7080304	.0012250	.17331
2.669	.942	.8612576	.8632417	.0019841	.23037
2.669	1.099	10.006.450	10.033.260	.0026810	.26793
2.669	1.256	11.113.370	11.145.760	.0032386	.29141
2.669	1.413	11.825.100	11.861.090	.0035988	.30434
2.669	1.570	12.072.030	12.109.270	.0037245	.30852
2.669	1.727	11.830.020	11.866.040	.0036023	.30450
2.669	1.884	11.122.730	11.155.180	.0032448	.29172
2.669	2.041	10.019.330	10.046.220	.0026889	.26837
2.669	2.198	.8627720	.8647650	.0019930	.23100
2.669	2.355	.7083980	.7096322	.0012342	.17423
2.669	2.512	.5539072	.5544099	.0005027	.09076
2.669	2.669	.4144071	.4143057	.0001014	.02446
2.669	2.826	.3035391	.3030701	.0004690	.15450
2.669	2.983	.2321450	.2316646	.0004804	.20696
2.669	3.140	.2072061	.2072061	.0000000	.00000
2.826	.000	.0963356	.0963356	.0000000	.00000
2.826	.157	.1207827	.1201876	.0005952	.49275
2.826	.314	.1917335	.1910354	.0006981	.36409
2.826	.471	.3022497	.3017750	.0004747	.15704
2.826	.628	.4415242	.4414795	.0000447	.01012
2.826	.785	.5959374	.5964335	.0004960	.08324
2.826	.942	.7503896	.7514545	.0010649	.14191
2.826	1.099	.8897770	.8913675	.0015905	.17875
2.826	1.256	10.004.690	10.024.810	.0020121	.20112
2.826	1.413	10.716.420	10.739.270	.0022852	.21325
2.826	1.570	10.963.350	10.987.150	.0023801	.21710
2.826	1.727	10.721.340	10.744.210	.0022874	.21335
2.826	1.884	10.014.050	10.034.220	.0020168	.20140
2.826	2.041	.8910649	.8926612	.0015963	.17914
2.826	2.198	.7519040	.7529755	.0010715	.14251
2.826	2.355	.5975300	.5980329	.0005029	.08416
2.826	2.512	.4430392	.4430012	.0000381	.00860

2.826	2.669	.3035391	.3030702	.0004689	.15447
2.826	2.826	.1926711	.1919773	.0006939	.36013
2.826	2.983	.1212770	.1206840	.0005930	.48899
2.826	3.140	.0963381	.0963381	.0000000	.00000
2.983	.000	.0249415	.0249415	.0000000	.00000
2.983	.157	.0493886	.0488990	.0004896	.99124
2.983	.314	.1203394	.1197440	.0005954	.49477
2.983	.471	.2308556	.2303720	.0004836	.20946
2.983	.628	.3701301	.3698871	.0002430	.06565
2.983	.785	.5245433	.5246083	.0000649	.01237
2.983	.942	.6789955	.6793863	.0003908	.05755
2.983	1.099	.8183829	.8190755	.0006925	.08462
2.983	1.256	.9290752	.9300102	.0009350	.10064
2.983	1.413	10.002.480	10.013.400	.0010918	.10916
2.983	1.570	10.249.410	10.260.870	.0011460	.11181
2.983	1.727	10.007.400	10.018.320	.0010926	.10917
2.983	1.884	.9300109	.9309479	.0009370	.10076
2.983	2.041	.8196709	.8203663	.0006954	.08484
2.983	2.198	.6805099	.6809042	.0003942	.05793
2.983	2.355	.5261359	.5262046	.0000687	.01306
2.983	2.512	.3716452	.3714058	.0002394	.06442
2.983	2.669	.2321450	.2316647	.0004803	.20691
2.983	2.826	.1212770	.1206840	.0005930	.48896
2.983	2.983	.0498829	.0493945	.0004884	.97902
2.983	3.140	.0249440	.0249440	.0000000	.00000
3.140	.000	.0000025	.0000025	.0000000	.00000
3.140	.157	.0244497	.0244497	.0000000	.00000
3.140	.314	.0954005	.0954005	.0000000	.00000
3.140	.471	.2059167	.2059167	.0000000	.00000
3.140	.628	.3451912	.3451912	.0000000	.00000
3.140	.785	.4996044	.4996044	.0000000	.00000
3.140	.942	.6540566	.6540566	.0000000	.00000
3.140	1.099	.7934440	.7934440	.0000000	.00000
3.140	1.256	.9041363	.9041363	.0000000	.00000
3.140	1.413	.9753089	.9753089	.0000000	.00000
3.140	1.570	10.000.020	10.000.020	.0000000	.00000
3.140	1.727	.9758008	.9758008	.0000000	.00000
3.140	1.884	.9050719	.9050719	.0000000	.00000
3.140	2.041	.7947319	.7947319	.0000000	.00000
3.140	2.198	.6555710	.6555710	.0000000	.00000
3.140	2.355	.5011970	.5011970	.0000000	.00000
3.140	2.512	.3467062	.3467062	.0000000	.00000
3.140	2.669	.2072061	.2072061	.0000000	.00000
3.140	2.826	.0963381	.0963381	.0000000	.00000
3.140	2.983	.0249440	.0249440	.0000000	.00000
3.140	3.140	.0000051	.0000051	.0000000	.00000

Tmax=1.00345 Maxel=23

Tmax=0.01085 Maxel=221

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Laplace operatörü için karmaşık problemin Sobolev uzayında varyasyonel çözümü araştırılmış ve bu problem için SEY'nin genel yapısı geliştirilmiştir.

İki boyutlu problemler için yaygın olarak kullanılan üçgen ve dörtgen sonlu elemanların yapısı verilmiş, bu elemanlar için sertlik matrisleri elde edilmiştir. Bu sertlik matrisleri kullanılarak SEY'nin verdiği SF denklemleri açık şekilde çıkarılmıştır. Literatürde yeni olan bu SF denklemleri klasik SF denklemleri ile karşılaştırılmıştır.

SEY'de hata, baz fonksiyonunun verilmesi ile belli olduğu için, burada elde edilen SF denklemleri, klasik SF denklemlerinden daha kullanışlıdır.

Çalışmada geliştirilen yöntem, diğer eliptik denklemler için de aynen geçerlidir. Bu nedenle, pratik problemlerin sayısal çözümlerinde bu yöntem kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. ADAMS, R. A., 1975. Sobolev spaces, Academic Press, New York.

2. ALLGOWER, E. L. and GEORG, K., 1990. Numerical continuation methods, New York, springer verlag.

3. AMES, W.F., 1977. Numerical methods for partial differential equations, New York, Academic Press.

4. ATKINSON, K., 1985. Elementary numerical analysis New York, wiley.

5. AZIZ, A.K., 1969. Numerical solution of differential equations. New York. Van Nostrand.

6. BABUSKA, I., PRAGER, M. and VITASEK, E., 1966. Numerical processes in differential equations. New York. Wiley interscience

7. BABUSKA, I., 1972. The finite method for infinite domains I, Math. Comput. 26,1,11

8. BABUSKA, I. and AZIZ, A. K.,1972. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in the mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, Academic press, New York.

9. BABUSKA, I., 1973. The finite eşement method with penalty, math. comp., 27, 221-228.

10.BABUSKA, I. and ZLAMAL, M., 1973. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. SIAM J. Numer. Anal. 10, 863-875.

11.BABUSKA, I., 1976.Singularities problem in the finite element method, technical note. BN-835, Institute for fluid dynamics and applied mathematics, University of Maryland, Collage Park.

12.BECKER, E. B., CAREY, G. F. and ODEN, J. T., 1981. Finite elements, an introduction vol.1. Englewood cliffs, N. J. prentice hall.

13.BEREZZI, F. and MARRINI, D., 1975. On the numerical solution of plate bending problems by hybrid methods, Rev. Française Automat.Informat. Recherche Operationnelle, Ser. Rouge Anal. Numer. R-3, 5-50.

14.BIRKHOFF, G. and LYNCH, R. E., 1984. Numerical solution of elliptic problems. Philadelphia, SIAM.

15.BLUM, E. K., 1972. Numerical analysis computation. Theory and pratice. Reading, Mass. Addison-Wesley.

16.BOTHA, J. F. and PINDER, G. F., 1983. Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations. New York. Wiley.

17.BOYCE, W. E. and DIPRIMA, R. C., 1977. Elemantary differential equations and boundary value problems, New York, Wiley.

18.BRAMBLE J. H., 1970. Variational methods for the numerical solution of eliptic problems, Chalmers Institute of Technology and the University of Göteborg.

19.BRAMBLE J. H. and HILBERT S. R., 1970. Estimation of linear functional Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation, SIAM J. Numer Anal. 7, 113-124.

20.BRAMBLE J. H. and HILBERT S. R., 1971. Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, Numer. Math. 16, 362-369.

21.BRAUN, M., 1982. Differential equations and their applications 3rd edition.

22.BRENNER, S. C., and SCOTT, L. R., 1994. The Mathmetical Theory of Finite Element Method, Springer-Verlang NewYork.

23.BURDEN, R. L. and FAIRES, J. D., 1985. Numerical analysis fourth edition.

24.BURDEN, R. L. and FAIRES J. D., 1989. Numerical Analysis. 4th ed. Boston, PWS-Kent.

25.CESCHINO, F. and KUNTZMANN, J., 1966. Numerical solution of inital-value problems. Englewood cliffs, N.J., Prentice Hall.

26.CHAN, S. H. and TUBA, I. S., 1971. A finite element method for contact problems of solid bodieies. Part I. Theory and validation, Internat. J. Mach. Sci., 13, 615-625.

27.CHENEY, E. W., 1966. Introduction to approximation theory, Mc Graw Hill.

28.CHENEY, E. W. KINCAID, D., 1985. Numerical Mathematics and computing. 2nd ed. Pacific Grove, Calif. Brooks/Cole.

29.CIARLET, P. G. and RAVIART, P. A., 1972. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite elements methods, Arch. Rational Mech. Anal., 46, 177-199.

30.CIARLET, P.G., 1976. The finite element method for elliptic problems, 78-79.

31.COLLATZ, L., 1966. Functional analysis and numerical mathematics cs. 3rd ed. New York, Academic Press.

32.CONTE, S. D., 1966. The numerical solution of linear boundary value problems. SIAMREV 8, 309-321.

33.DAVIS, P.J., 1982. Interpolation and approximation. New York. Dover.

34.DE BOOR, C. and GOLUB, G. H., 1978. Recent advances in numerical analysis. New York, Academic Press.

35.FALK, R. S., 1974. Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, Math. comp., 28, 863-971.

36.FICHERA, G., 1964. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II.Problema di signorini con ambique candizioni'al contorno, Men. Accad, Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, sez. I. 5, 91-140.

37.FRASYTHE, G. E. and WASOW, W. R., 1960. Finite difference methods for partial differential equations. New York, Wiley.

38.FOSTER, L. V., 1981. Generalizations of Laguerre's method. Higher order methods. SIAMNA 18, 1004-1018.

39.GENERALD, C. F. and WHEATLEY, P. O., 1989. Applied numerical analysis. 4th ed. Reading, Mass. Addison, Wesley.

40.GLADWELL, J. and WAIT, R., 1979. A survey of numerical methods for partial differential equations. New York, Oxford University press.

41.GRISVARO, P., 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, London.

42.HASANOV, A. and KAPORIN I., 1986. Application of the elimination method in the solution of strangly elliptic systems by the finite element method. Zh-Vychisl-Mat.-i-Mat.-Fiz. (Akademiya Nauk SSSR-Zhurnal-Vychislitelnoi-Mat.-i-Mat.-Fiziki), 26, 6, 837-580.

43.HASANOV, A., 1997. Varyasyonel problemler ve sonlu elemanlar yöntemi, Kocaeli Üniversitesi, (Ders notu).

44.KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA, G., 1980. An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York.

45.KOLMOGOROV, A. N. and FORMIN, S. V., 1977. Ölçüm Lebesque integrali ve Hilbert uzayları. Çev. KARACAY, T. ve ATAMAN Y. Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara, 92-96, 116-118.

46.LAKSHMIKANTHAM, V. and TRIGIANTE, D., 1988. Theory of differential equations, numerical methods and examples. New York, Academic press.

47.LANCASTER, P. and TISMENETSKY, M., 1985. Theory of matrices 2nd ed. New York, Academic press.

48.LAPIDUS, L. and SCHIESSER, W. E., 1976. Numerical methods for differential equations. New York, Academic press.

49.LINEAR, P., 1979. Theoretical numerical analysis. New York, Wiley.

50.MICCHELLI, C. A., 1986. Algebraic aspects of interpolation. In approximation theory (C. De Boor, ed.) Proceeding of Symposia in applied math. 36, 81-102, Providence, R. I., Ams.

51.MICCHELLI, C. A., 1986. Interpolation of scattered data. Distance matrices and conditionally positive definite functions. Consturctive Approximation 2, 11-22.

52.MICKENS, R. E., 1987. Difference equations. New York, Van Nostrand-Reinhold.

53.MIKHLIN, S. G., 1965. The problem of the minimum of a quadratic functional, Holdenday, San Francisco.

54.MIKHLIN, S. G., 1971. The numerical performance of variational methods walters noordhoff, the Netherlands.

55.MITCHELL, A. R., 1969. Computational methods in partial differential equations. New York, Wiley.

56.MITCHELL, A.R. and WAIT, R., 1977. The finite element method in partial differential equations New York, Wiley.

57.ODEN, J. T. and REDDY, J. N., 1976. An introduction to the mathematical theory of finite elements. New York, Wiley.

58.OHTAKE, K., ODEN, J. T. and KIKUCHI, N., 1980. Analysis of certain unilateral problems in von karmen plate theory by a penalty method, Part II. comput. meth. Appl. mech. Eng., 24, 317-337.

59.ORTEGA, J. M. and POOLE, W. C., 1981. An introduction to numerical methods for differential equations marchfield, Mass. Pitman.

60.POWERS, D., 1972. Boundary value problems. New York, Academic press.

61.REKTORYS, K., 1977. Variational methods in mathematics, science and engineering unilateral, D. Reidel Publishing Company, Boston.

62.RENARDY, M. and ROGERS, R. C., 1992. An introduction to partial differential equations, springer verlag, (elliptic equations) classification, 294-296.

63.RICHTMYER, R. D. and MORTON, K. W., 1967. Difference methods for initial value problems, interscience publishers, New York.

64.ROSENBERG, D. V., 1969. Methods for the numerical solution of partial differential equations, American Elsevier, New York.

65.SMITH, G. D., 1965. Numerical solution of partial differential equations, Oxford University Press, New York.

66.STRANY, W. G. and FIX, G. J., 1973. An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

67.TUNCER, T., 1992. Kısmi türevli diferansiyel denklemler, Mimar Sinan Üniversitesi yayınları, İstanbul, 16, 496-405.

68.TUNCER, T., 1995. Matematik sözlüğü.

69.ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R.L., 1987. The finite element method, 215-218, 235.

ÖZGEÇMİŞ

1963 Yılında Kars'ta doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Kars'ta tamamladı. 1981 yılında girdiği Dicle Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Anabilim Dalından 1985 yılında Lisans ve öğretmenlik diploması alarak mezun oldu. 1988-1990 yılları arasında Yıldız Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1988-1992 yılları arasında Yıldız Üniversitesi, Kocaeli Mühendislik Fakültesinde, Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 1993 yılından beri Kocaeli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.