

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ *FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR METODU İLE
MİKROŞERİT DEVRE ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elo. ve Hab. Müh. S. Cumhur BAŞARAN

96840

Anabilim Dalı : Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği

Danışman : Prof. Dr. Doğan DİBEKÇİ

**Ü.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

TEMMUZ 2000

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ *FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR METODU İLE
MİKROŞERİT DEVRE ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elo. ve Hab. Müh. S. Cumhuri BAŞARAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Haziran 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Temmuz 2000

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Doğan DİBEKÇİ




Üye

Prof. Dr. Fuat ANDAY



Üye

Yrd. Doc. Dr. Serda APAK



TEMMUZ 2000

ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR METODU İLE MİKROŞERİT DEVRE ANALİZİ

S. Cumhur BAŞARAN

Anahtar Kelimeler: ZDSF, FD, Mikroşerit Hatlı Devreler, Dağıtıcı Sınır Koşulu (DBC) ve MUR Sınır Koşulu

Özet: Bu çalışmada, ilk defa 1966 yılında Yee tarafından ortaya atılan Zamanda Sonlu Farklar yöntemi (ZDSF) incelenmiştir. Yöntem incelenirken özellikle, sonlu farklar (FD) yöntemi, ortam modelleme, zamanda ve konumda ayrıklaştırma gibi hususlar üzerinde durulmuştur. Ayrıca, sınırlı sayıda hücre kullanılması nedeniyle yapay sınırlardan yansımalar olmaktadır. Bu yansımaların giderilmesi için uygulanan Dağıtıcı sınır koşulu (DBC) ve MUR tipi sınır koşullarının performansları, ZDSF yönteminin mikroşerit devrelere uygulanmasıyla elde edilen sayısal sonuçlar kullanılarak karşılaştırılmıştır.

MICROSTRIP LINE CIRCUIT ANALYSIS WITH FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN METHOD

S. Cumhur BAŞARAN

Keywords: FDTD, FD, Microstrip Line Circuit, Dispersive Boundary Condition (DBC) and MUR Boundary Condition

Abstract: This study is based on the Finite Difference Time Domain (FDTD) method which was first investigated in 1966 by Yee [2]. This method is especially focused on the issues, finite difference method, line modelling, operation in time and position. Reflections from the artificial boundaries due to using limited number of cells have been observed. The performance of Dispersive boundary condition (DBC) and MUR type boundary conditions are compared with each other through digital results obtained by the application of FDTD method to the microstrip circuits.



ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Günümüz bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler sonucunda, bilgisayarların hız ve kapasiteleri her geçen gün daha fazla artmaktadır. Modern bilgisayarlardaki bu gelişmeler, elektromagnetik problemlerin modellenmesinde kullanılan fonksiyonlarda sürekli değil, ayrık yöntemlerin kullanılmasını teşvik etmektedir. Bu yöntemlerden en fazla kullanılanı Sonlu Farklar Yöntemiyle Sonlu Elemanlar Yöntemidir. Bu çalışmada kullanılan Zamanda Sonlu Farklar Yöntemi (ZDSF), Sonlu Farklar Yöntemiyle diferansiyel formdaki Maxwell denklemlerinin, doğrudan zaman domeninde ayrıklaştırılıp, çözülmesi ilkesine dayanmaktadır.

Örnek problem uzayı olarak seçilen Mikroşerit hatlı devreler, mikrodalga entegre teknolojisinde en çok kullanılan devre tiplerindedir. Üretimi için özel laboratuvar şartlarının gerektiği ve maliyetinin yüksek olduğu bilinen bu devrelerin, ZDSF yöntemiyle önceden tasarlanıp, simüle edilebilmesi büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren danışmanım sayın Prof. Dr. DİBEKÇİ' ye (KO.Ü.), yardımlarını aldığım sayın Prof. Dr. Levent SEVGİ'ye (İ.T.Ü.) ve yardımların esirgemeyip, her türlü desteği veren değerli arkadaşım sayın Yük.Müh. Gonca SINMAZÇELİK'e (K.O.Ü) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR	ix
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. SONLU FARKLAR VE FARK DENKLEMLERİ	3
2.1. Sonlu Farklar Operatörleri.....	3
2.1.1. İleri farklar ve Δ operatörü.....	3
2.1.2. Geri farklar ve ∇ operatörü.....	6
2.1.3. Kaydırma operatörü.....	7
2.1.4. Merkezi farklar ve δ operatörü.....	9
2.1.5. Türev ve diferansiyel operatörleri.....	10
2.2. Sonlu Farklarla Yaklaşık Türev Hesabı.....	11
2.2.1. Birinci mertebeden adi türev yaklaşımı.....	12
2.2.1.1. İleri fark yaklaşımı.....	12
2.2.1.2. Geri fark yaklaşımı.....	12
2.2.1.3. Merkezi fark yaklaşımı.....	13
2.2.2. İkinci mertebeden adi türev yaklaşımı.....	14
2.2.2.1. İleri fark yaklaşımı.....	14
2.2.2.2. Geri fark yaklaşımı.....	16
2.2.2.3. Merkezi farklar yaklaşımı.....	17
2.3. Kısmi Türevlerin Yaklaşık Hesabı.....	18
2.3.1. İleri fark yaklaşımları.....	18
2.3.2. Geri fark yaklaşımları.....	20
2.3.3. Merkezi fark yaklaşımları.....	22

BÖLÜM 3. ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	23
3.1. Giriş.....	23
3.2. Diferansiyel Formda Maxwell Denklemleri.....	25
3.3. Mükemmel İletken İçin ZDSF Formülasyonu.....	30
3.4. Kayıplı Malzeme Formülasyonu.....	34
3.5. ZDSF Metodunun Uygulanmasında Algoritmanın Oluşturulabilmesi İçin Gerekli Öğeler.....	42
BÖLÜM 4. ZAMANDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİNDE TEMEL PRENSİPLER VE ALGORİTMANIN OLUŞTURULMASI	45
4.1. Giriş.....	45
4.2. Hücre Boyutunun Tespiti.....	46
4.3. ZDSF Yönteminde Kaynak Fonksiyonunun Tanımlanması.....	47
4.4. İteratif Denklemlerde Kararlılık İçin Zaman Adımının Tespiti.....	51
4.5. Sınır Koşulunun Tanımlanması.....	52
4.6. Tek Yönlü Dalga Denklemleri.....	54
4.7. Mur Tipi Sınır Koşulu.....	60
4.8. Dağıtıcı Sınır Koşulu (DBC).....	61
BÖLÜM 5. MİKROŞERİT DEVRELERE ZDSF METODUNUN UYGULANMASI	64
5.1. ZDSF Metodu Uygulanan Mikroşerit Hattın Yapısı.....	64
5.2. ZDSF Metodu Uygulanan Mikroşerit Filtrenin Yapısı.....	66
5.3. Programın Tanıtımı.....	69
5.4. Sayısal Sonuçlar.....	70
5.5. Yansıma Katsayısının Hesaplanması.....	78
SONUÇ	85
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	88

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Yee Hücresi.....	33
Şekil 3.2.	Birim hücrede alt yüzeye iletken plaka yerleştirmek için kullanılan elektrik alan bileşeni.....	40
Şekil 3.3.	Birim hücrede ortadaki yüzeye iletken plaka yerleştirmek için kullanılan elektrik alan bileşenleri.....	40
Şekil 3.4.	E_z bileşeninin bulunduğu noktada $+z$ yönündeki akım değerini bulmak için kullanılan magnetik alanlar	42
Şekil 3.5.	ZDSF Metodu İçin Akış Diyagramı.....	43
Şekil 4.1.	Sayısal örneklemenin fiziksel yorumu.....	46
Şekil 4.2.	Genişliği 64 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesi.....	49
Şekil 4.3.	Genişliği 64 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesinin Frekans Spektrumu.....	49
Şekil 4.4.	Genişliği 32 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesi.....	50
Şekil 4.5.	Genişliği 32 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesinin Frekans Spektrumu.....	50
Şekil 4.6.	Yee hücresinde alan bileşenlerinin yerleşimi.....	54
Şekil 5.1.	Mikroşerit Hat.....	65
Şekil 5.2.	Mikroşerit Hatta Uygulanan Gauss Darbesi.....	65
Şekil 5.3.	Gauss fonksiyonun frekans spektrumu.....	66
Şekil 5.4.	Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtre.....	67
Şekil 5.5.	Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtreye Uygulanan Gauss Darbesi.....	68
Şekil 5.6.	Gauss fonksiyonun frekans spektrumu.....	68
Şekil 5.7.	Dispersive Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat Üzerinde Elektrik Alan Bileşeni E_y 'nin Zamana Göre Değişimi.....	71
Şekil 5.8.	Değişik zaman adımlarında Dispersive Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı.....	73
Şekil 5.9.	$k=70$ Düzleminde Gerilimin Zamana Göre Değişimi.....	74

Şekil 5.10.	Mur Sınır Koşulu uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat üzerinde Elektrik alan bileşeni E_y 'nin Zamana göre değişimi.....	74
Şekil 5.11.	Değişik Zaman adımlarında Mur Sınır Koşulu uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı.....	76
Şekil 5.12.	$k=70$ Düzleminde Gerilimin Zamana Göre Değişimi.....	76
Şekil 5.13.	Sonsuz Uzunluktaki Mikroşerit Hat üzerinde E_y alan bileşenin Farklı Sınır Koşullarında Zamana Göre Değişimi.....	77
Şekil 5.14.	Yansıma Katsayısının Hesaplanması İçin Kullanılan Ölçüm Modeli.....	79
Şekil 5.15.	Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat için Yansıma Katsayısı.....	79
Şekil 5.16.	Değişik Zaman adımlarında Dispersive Sınır Koşulu uygulanan Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtre içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı.....	83
Şekil 5.17.	Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtrede $ S_{21} $ 'in Frekansla Değişimi.....	84

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

E	Elektrik Alan Vektörü
H	Manyetik Alan Vektörü
D	Elektrik Alan Endüksiyon Vektörü
B	Manyetik Alan Endüksiyon Vektörü
ϵ	Dielektrik Katsayısı
ϵ_0	Boşluğun Dielektrik Katsayısı
μ	Manyetik Geçirgenlik Katsayısı
μ_0	Boşluğun Manyetik Geçirgenlik Katsayısı
σ	İletkenlik Katsayısı
σ^*	Manyetik kayıp
λ	Dalga Boyu
v	Elektromanyetik Dalganın Yayılım Hızı
c	Işık Hızı
τ	Zaman Gecikmesi (Gauss Darbesi İçin)
β	Gauss Darbesinin Tepe Noktasından Kesim Noktasına Kadar Olan Zaman Adımının Sayısı
T_{eff}	İşaretin etkin süresi
B_{eff}	Etkin band genişliği
T_0	Darbe süresi
L	Dalga operatörü
U	Dalga fonksiyonu
D_x	x 'e göre kısmi türev
D_y	y 'ye göre kısmi türev
D_z	z 'ye göre kısmi türev
Δt	Zaman Adımı
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Hücre Boyutları
h	Mikroşerit Hatta Dielektrik Tabakanın Kalınlığı
w	Mikroşerit Hatta Metal Şeritin Genişliği
t	Mikroşerit Hatta Metal Şeritin Kalınlığı
Γ	Yansıma Katsayısı

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Günümüzde, elektromagnetik alan ve dalga ile mikrodalga tekniği problemlerinde yoğun olarak sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar probleme özgü özel sayısal teknikler olabileceği gibi, ilgili alanlarda, oldukça geniş problem gruplarına uygulanabilen yöntemlerde olabilmektedir. Bu yöntemde denklemlere sürekli değil ayrık yaklaşım söz konusudur. Çünkü ayrık yaklaşım, bilgisayar yardımıyla denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu çalışmada kullanılan ZDSF yöntemi de bu esasa göre oluşturulmuştur. ZDSF yöntemi, diferansiyel formdaki maxwell denklemlerinin doğrudan zaman domeninde üç boyutlu olarak ayrıklaştırılıp çözülmesidir. Maxwell'in rotasyonel denklemlerindeki diferansiyel operatörler sayısallaştırılıp sonlu farklar eşdeğeri ile değiştirilir. Böylece elde edilen ayrık denklemler ele alınan yapıya ait sınır koşulları da sağlanarak iteratif olarak çözülürken, ilgili yapıdaki elektromagnetik dağılım simüle edilmiş olur.

İlk defa 1966 yılında Kane S.Y. tarafından ortaya atılan bu yöntem en genel halde, üç elektrik alan ve üç magnetik alan bileşenlerinin uzayın seçilen ayrık noktalarında ayrık zaman aralıklarında hesaplanmasına dayanır[2]. Bu nedenle performans ve bellek açısından daha modern bilgisayarlara ihtiyaç duyulmaktadır.

İlk zamanlar sadece saçılma problemlerinde kullanılan bu yöntem, zaman içerisinde çeşitli mikroşerit hat ve devrelerin frekansa bağlı karakteristiklerinin çıkarımında ve üç boyutlu tam dalga analizlerinin yapılmasında kullanılmaya başlandı. ZDSF yöntemiyle mikroşerit anten modellenmesi, alçak geçiren filtrenin frekansa bağlı saçılma parametrelerinin hesaplanması, mikroşerit hatlı çeyrek dalga empedans dönüştürücü ve mikroşerit kuple gibi pasif devre elemanlarının frekans yanıtları incelenebilmektedir.

İkinci bölümde ise, literatürde FD ile bilinen Sonlu Farklar ve fark denklemleri incelenmiştir. Tek ve çok değişkenli fonksiyonların türev ifadeleri Taylor serisi açılımıyla elde edilmiş, aynı fonksiyonlara ait İleri, Geri, ve Merkezi fark operatörleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca Taylor serisine açılan sayısal türev ifadesindeki, katkılarının küçük olmasından dolayı ihmal edilen ifadelerden kaynaklanan hatalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmanın temelini teşkil eden ZDSF yöntemi detaylı bir şekilde incelenmiştir. Başta yöntemin dayandığı matematiksel özellikler verilmiş ve ne şekilde elektromagnetik problemlere uygulanması gerektiği anlatılmıştır.

Ayrıca ZDSF metodunun oluşturulmasında kullanılan algoritma verilerek her aşaması detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, ZDSF yönteminin problem uzayına ne şekilde uygulanacağı açıklanmıştır. İlgili yöntemin uygulanmasındaki temel kriterler; uygulanacak olan kaynak (uyarma) fonksiyonu, gerekli kararlılık koşulları ve uygun parametre seçimi üzerinde durulmuştur. Yine bu bölümde, çalışmada kullanılan Dağıtıcı sınır koşulu (DBC) ve MUR sınır koşullarının özellikleri incelenerek, problem uzayının her sınırı için uygulanan denklemler verilmiştir.

Beşinci bölümde, ZDSF yönteminin uygulandığı mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtre devrelerinin yapısı tanımlanmış, bunlara uygulanacak olan kaynak fonksiyonunu ve fonksiyonun frekans spektrumu verilmiştir. Mikroşerit hatlı devrelerin ZDSF yöntemiyle analizi için FORTRAN diliyle yazılan programın ana ve alt programlarının işlevleri anlatılmıştır. Son kısımda ise programın çalıştırılmasıyla alınan veriler ilgili çizim programlarıyla simüle edilerek, sonuçlar yorumlanmıştır.

BÖLÜM 2. SONLU FARKLAR VE FARK DENKLEMLERİ

Bilindiği gibi, fonksiyonların analitik olarak verildiği durumlarda, istenilen noktalardaki fonksiyon değerlerini hesaplamak fonksiyonun belirli noktalarında istenilen mertebeden türevlerini bulmak ya da fonksiyonun belirli aralıklardaki integrallerini hesaplamak kolaylıkla yapılabilmektedir. Ancak, fonksiyonların bazı ayrı noktadaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak yapılabilmektedir. Hatta, analitik çözümlerin belli olduğu durumlarda bile sonlu farklar kullanım kolaylığı açısından tercih edilebilmektedir.

2.1. Sonlu Farklar Operatörleri

Bu bölümde fonksiyonun belli bir x_i noktasındaki değeri, gösterim kolaylığı bakımından $f(x_i)$ yerine f_i ile gösterilecektir.

2.1.1. İleri farklar ve Δ operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasında f_i , x_{i+h} noktasında f_{i+1}, \dots, x_{i+kh} noktasında ise f_{i+k} değerini aldığını varsayalım. Bu halde $f_{i+1} - f_i$ farkına f fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri farkı denir ve

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (2.1)$$

ile gösterilir. Daha açık olarak yazılırsa

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer tarzda ikinci mertebeden ileri fark tanımı yapılabilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[f(x+h) - f(x)] \quad (2.3)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \quad (2.4)$$

veya

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \quad (2.5)$$

elde edilir. Yine bu sonuç kısaltılmış gösterimle;

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı şekilde üçüncü mertebeden ileri fark,

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \quad (2.7)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi de fonksiyonun birinci mertebeden türevinin, ileri farklar yardımıyla nasıl hesaplanabileceğini görelim:

$f(x)$ fonksiyonun Taylor seri açılımını göz önüne alırsak;

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \dots \quad (2.8)$$

yazılabilir. Böylece

$$f_{i+1} - f_i = hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \dots \quad (2.9)$$

elde edilir. h değerinin çok küçük olması durumunda h^2 li ve daha sonraki terimler ihmal edilerek,

$$f'_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{1}{h} \Delta f_i \quad (2.10)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$f_{i+2} = f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{4h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (2.11)$$

$$2f_{i+1} = 2f_i + \frac{2h}{1!} f'_i + \frac{2h^2}{2!} f''_i + \dots \quad (2.12)$$

taraf tarafa çıkartılarak,

$$f_{i+1} - 2f_{i+1} = -f_i + \frac{2h^2}{2} f''_i + \dots \quad (2.13)$$

veya,

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i = h^2 f''_i + \dots \quad (2.14)$$

bulunur. Burada da h^3 lü terim ve sonraki terimlerin ihmal edilmesiyle

$$f''_i \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) formülü ikinci mertebeden ileri farklar kullanılarak

$$f''_i \cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad (2.16)$$

şeklinde gösterilebilir.

Sonuç olarak üçüncü mertebe türev formülünün de benzer yolla hesaplanmasıyla,

$$\begin{aligned} \text{i) } f_i' &\cong \frac{\Delta f_i}{h} & ; \text{ Hata : } -\frac{h}{2} f_i'' \\ \text{ii) } f_i'' &\cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} & ; \text{ Hata : } -h^2 f_i''' \\ \text{iii) } f_i''' &\cong \frac{\Delta^3 f_i}{h^3} & ; \text{ Hata : } -\frac{3h^3}{2} f_i^{(4)} \end{aligned}$$

şeklinde özetlenebilir.

2.1.2. Geri farklar ve ∇ operatörü

f fonksiyonunun x_i noktasında geri farkı $f_i - f_{i-1}$ olarak tanımlanır ve

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad (2.17)$$

şeklinde gösterilir. (2.17) ifadesi açık olarak,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir.

$f(x)$ in yüksek mertebeden geri farkları da benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \quad (2.19)$$

$$\nabla^3 f_i = -f_{i-3} + 3f_{i-2} - 3f_{i-1} + f_i \quad (2.20)$$

Şimdide geri farklar ile fonksiyonun türevleri arasındaki ilişki tanımlanırsa:

$$f_{i-1} = f_i - \frac{h}{1!} f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' - \dots \quad (2.21)$$

olduğundan,

$$f_i - f_{i-1} = hf'_i - \frac{h^2}{2}f''_i + \dots \quad (2.22)$$

yazılabilir. Yine h^2 li terimden sonraki terimler ihmal edilerek

$$f'_i \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (2.23)$$

bulunur. Geri farklar dikkate alınarak

$$f'_i = \frac{\nabla f_i}{h} \quad ; \text{ Hata : } \frac{h}{2}f''_i \quad (2.24)$$

yazılabilir.

2.1.3. Kaydırma operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonu için kaydırma işlemi $f(x+h)$ olarak tanımlanır ve

$$E f(x) = f(x+h) \quad (2.25)$$

veya kısaca

$$E f_i = f_{i+1} \quad (2.26)$$

şeklinde gösterilir.

İleri fark ve Geri fark operatörleri gibi Kaydırma operatörü de lineerdir. Yani;

$$\Delta[f_i \pm g_i] = \Delta f_i \pm \Delta g_i \quad (2.27)$$

$$\nabla[f_i \pm g_i] = \nabla f_i \pm \nabla g_i \quad (2.28)$$

$$E[f_i \pm g_i] = E f_i \pm E g_i \quad (2.29)$$

şeklinde gösterilebilir.

Kaydırma Operatörleri İleri Fark ve Geri Fark operatörleri arasındaki ilişki incelenirse;

$$E f(x) = f(x+h) \quad (2.30)$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (2.31)$$

den,

$$E f(x) = f(x) + \Delta f(x) \quad (2.32)$$

Yazılabilir. O halde sembolik olarak

$$E = 1 + \Delta \quad (2.33)$$

eşitliğinden söz edebiliriz. Benzer şekilde,

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} = f_i - E^{-1} f_i$$

olduğundan

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad (2.34)$$

yazılabilir.

Yüksek Mertebeden Kaydırma Operatörü,

$$E^2f(x) = E(Ef) = f(x+2h)$$

$$E^3f(x) = E(E^2f) = f(x+3h)$$

.....

$$E^n f(x) = E(E^{n-1}f) = f(x+nh) \quad (2.35)$$

olarak tanımlanabilir. Benzer şekilde,

$$E^{-1}f(x) = f(x-h)$$

$$E^{-2}f(x) = E^{-1}(E^{-1}f) = f(x-2h)$$

.....

$$E^{-n} f(x) = E^{-1}(E^{-(n-1)}f) = f(x-nh) \quad (2.36)$$

dır.

2.1.4. Merkezi farklar ve δ operatörü

Bir $f(x)$ fonksiyonunun da, bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki değer ile, yarım adım gerisindeki değer arasındaki fark, Merkezi Fark olarak bilinir ve

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (2.37)$$

şeklinde yada kısaca

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

şeklinde gösterilir. İkinci mertebeden merkezi fark ise yine tanımdan,

$$\delta^2 f_i = \delta(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) = f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \quad (2.39)$$

şeklinde yazılabilir.

Dikkat edilirse (2.39) dan,

$$\delta^2 f_i = \Delta^2 f_{i-1} \quad (2.40)$$

dir. Ayrıca,

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) = E^{1/2}f(x) - E^{-1/2}f(x) \quad (2.41)$$

olduğundan sembolik olarak,

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \quad (2.42)$$

yazılabilir.

2.1.5. Türev ve diferansiyel operatörleri

Bilindiği gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad (2.43)$$

ile ve birinci mertebeden diferansiyeli de

$$df(x) = f'(x).h = h.Df(x) \quad (2.44)$$

ile tanımlanıyordu. Yani kısaca,

$$f'(x) = Df(x) \quad (2.45)$$

$$df(x) = h.Df(x) \quad (2.46)$$

yazılabilir. O halde,

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)Df(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 D^2 f(x_i) + \dots \quad (2.47)$$

Taylor serisinde $x = x_{i+1}$ ve $x_{i+1} - x_i = h$ yazılırsa,

$$f(x_{i+1}) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots\right) f(x_i) \quad (2.48)$$

elde edilir.

2.2.Sonlu Farklarla Yaklaşık Türev Hesabı

Bir takım ayrık noktalarda değeri bilinen $y = f(x)$ fonksiyonunun, bir noktasındaki türevini, bilinen bu değerleri kullanarak, yaklaşık olarak hesaplamak mümkündür. Benzer şekilde $z = f(x,y)$ türündeki çok değişkenli fonksiyonlar için yaklaşık kısmi türev formülleri de verilebilir. Bunun için genellikle bu fonksiyonun söz konusu nokta civarındaki Taylor serisi açılımından yararlanılır.

Türev tanımı göz önüne alınarak İleri Fark Yaklaşımı, Geri Fark Yaklaşımı ve Merkezi Fark Yaklaşımı üzerinde durulmuştur. Ayrıca nokta sayısının artması ile kesme sayısının azalacağı göz önüne alınarak üç nokta ve dört noktaya bağlı olarak daha duyarlı türev formülleri elde edilebilir.

2.2.1. Birinci mertebeden adi türev yaklaşımı

$y = f(x)$ fonksiyonunun bir x_i noktasındaki türevinin; x_{i+1}, x_{i+2}, \dots gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade eden İleri Farklar yöntemiyle, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade eden Geri Farklar yöntemiyle, $x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2}, \dots$ gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade eden Merkezi Farklar yöntemiyle, yaklaşık hesabını veren formüller üzerinde duracağız.

2.2.1.1. İleri fark yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{3}f'''_i + \dots \quad (2.49)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i - \dots \quad (2.50)$$

yazılabilir. Birinci terimden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (2.51)$$

İleri Fark Yaklaşımı elde edilir. Aynı formül,

$$f'_i = \frac{\Delta y_i}{h} + O(h) \quad (2.52)$$

şeklinde de yazılabilir.

2.2.1.2. Geri fark yaklaşımı

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - f'_i h + \frac{1}{2}h^2f''_i - \frac{1}{6}h^3f'''_i + \dots \quad (2.53)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i + \dots \quad (2.54)$$

yazılabilir. Birinci mertebeden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad (2.55)$$

elde edilir. Aynı formül,

$$f'_i = \frac{\nabla y_i}{h} + O(h) \quad (2.56)$$

şeklinde de yazılabilir.

2.2.1.3 Merkezi fark yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{3}f'''_i + \dots \quad (2.57)$$

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (2.58)$$

Taylor seri açılımları göz önüne alınıp, taraf tarafa çıkartma yapılırsa,

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{1}{3}h^3f'''_i + \dots \quad (2.59)$$

sonucu elde edilir. Buradan da,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{1}{6}h^2f'''_i + \dots \quad (2.60)$$

veya,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (2.61)$$

Merkezi Fark Yaklaşımı elde edilir. Dikkat edilecek olursa h küçüldükçe yapılacak hata, diğer iki yaklaşımdaki hataya nazaran daha hızlı küçülür.

2.2.2. İkinci mertebeden adi türev yaklaşımı

$y = f(x)$ fonksiyonunda p .ci mertebeden türevin hesabı için en az $(p+1)$ tane noktanın verilmiş olması gerekir. Ancak, daha fazla noktanın verilmesi halinde hata mertebesinin azalacağı da unutulmamalıdır.

2.2.2.1. İleri fark yaklaşımı

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{1}{2}h^2f''_i + \frac{1}{6}h^3f'''_i + \dots \quad (2.62)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf'_i + \frac{1}{2}4h^2f''_i + \frac{1}{6}8h^3f'''_i + \dots \quad (2.63)$$

açılımlarını göz önüne alalım. İkinciden birincinin 2 katı çıkartılırsa,

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + h^2f''_i + h^3f'''_i + \dots \quad (2.64)$$

elde edilir. Buradan da

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} - hf'''_i - \dots \quad (2.65)$$

veya,

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h) \dots \dots \dots (2.66)$$

bulunur.

Nokta sayısının artması durumunda daha duyarlı sonuçlar veren formüller elde edileceği söylenmişti. Şimdi dört noktaya dayanan ve hata mertebesi h^2 olan bir ileri fark formülünün çıkarılımları aşağıda verilmiştir.

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{1}{2}h^2f_i'' + \frac{1}{6}h^3f_i''' + \frac{1}{24}h^4f_i^{IV} + \dots \dots \dots (2.67)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i' + \frac{1}{2}4h^2f_i'' + \frac{1}{6}8h^3f_i''' + \frac{1}{24}16h^4f_i^{IV} + \dots \dots \dots (2.68)$$

$$f_{i+3} = f_i + 3hf_i' + \frac{1}{2}9h^2f_i'' + \frac{1}{6}27h^3f_i''' + \frac{1}{24}81h^4f_i^{IV} + \dots \dots \dots (2.69)$$

Yukarıda verilen açılımları göz önüne alınarak, ikincinin 4 katından üçüncü ve birincinin 5 katı çıkartılırsa

$$4f_{i+2} - f_{i+3} - 5f_{i+1} = -2f_i + h^2f_i'' - \frac{11}{12}h^4f_i^{IV} + \dots \dots \dots (2.70)$$

elde edilir. Buradan da,

$$f_i'' = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + \frac{11}{12}f_i^{IV}h^2 - \dots \dots \dots (2.71)$$

veya,

$$f_i'' = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + O(h^2) \dots \dots \dots (2.72)$$

bulunur.

2.2.2.2. Geri fark yaklaşımı

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{1}{2}h^2f_i'' - \frac{1}{6}h^3f_i''' + \frac{1}{24}h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.73)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i' + \frac{1}{2}4h^2f_i'' - \frac{1}{6}8h^3f_i''' + \frac{1}{24}16h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.74)$$

açılımlarını göz önüne alalım. İkinciden birincinin 2 katı çıkartılırsa,

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + h^2f_i'' - h^3f_i''' + \frac{7}{12}h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.75)$$

bulunur. Buradan da,

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + hf_i''' - \frac{7}{12}h^2f_i^{IV} + \dots \quad (2.76)$$

veya,

$$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O(h) \quad (2.77)$$

bulunur.

Nokta sayısının dört olması halinde ikinci mertebeden türev için geri fark formülünün çıkartımı aşağıda verilmiştir.

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{1}{2}h^2f_i'' - \frac{1}{6}h^3f_i''' + \frac{1}{24}h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.78)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i' + \frac{1}{2}4h^2f_i'' - \frac{1}{6}8h^3f_i''' + \frac{1}{24}16h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.79)$$

$$f_{i-3} = f_i - 3hf_i' + \frac{1}{2}9h^2f_i'' - \frac{1}{6}27h^3f_i''' + \frac{1}{24}81h^4f_i^{IV} - \dots \quad (2.80)$$

açılımlarını göz önüne alınır, İkincinin 4 katından, birincinin 5 katını ve üçüncüyü çıkartılırsa,

$$4f_{i-2} - 5f_{i-1} - f_{i-3} = -2f_i + h^2f_i'' - \frac{11}{12}h^4f_i^{IV} + \dots \quad (2.81)$$

bulunur. Buradan da,

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} + \frac{11}{12}h^2f_i^{IV} + \dots \quad (2.82)$$

veya,

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.83)$$

bulunur.

2.2.2.3. Merkezi farklar yaklaşımı

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{1}{2}h^2f_i'' + \frac{1}{6}h^3f_i''' + \frac{1}{24}h^4f_i^{IV} + \frac{1}{120}h^5f_i^V + \dots \quad (2.84)$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{1}{2}h^2f_i'' - \frac{1}{6}h^3f_i''' + \frac{1}{24}h^4f_i^{IV} - \frac{1}{120}h^5f_i^V + \dots \quad (2.85)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i' + \frac{1}{2}4h^2f_i'' - \frac{1}{6}8h^3f_i''' + 16h^4f_i^{IV} + \frac{1}{120}32h^5f_i^V + \dots \quad (2.86)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i' + \frac{1}{2}4h^2f_i'' - \frac{1}{6}8h^3f_i''' + \frac{1}{24}16h^4f_i^{IV} - \frac{1}{120}32h^5f_i^V + \dots \quad (2.87)$$

açılımlarını göz önüne alalım. Birincinin 16 katı ile ikincinin 16 katını toplanıp, üçüncü ve dördüncü çıkartılırsa,

$$16f_{i+1} + 16f_{i-1} - f_{i+2} - f_{i-2} = 30f_i + 12h^2f_i'' - \frac{5}{12}h^6f_i^{VI} + \dots \quad (2.88)$$

bulunur. Buradan da,

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + \frac{1}{90}h^4f_i^{IV} + \dots \quad (2.89)$$

veya,

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (2.90)$$

bulunur.

2.3. Kısmi Türevlerin Yaklaşık Hesabı

$U = U(x,y)$, $U = U(x,y,z)$ gibi iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için İleri Fark, Geri ve Merkezi Fark formülleri özet olarak verilecektir.

2.3.1. İleri fark yaklaşımları

$U = U(x,y)$ fonksiyonu için x 'e göre kısmi türev,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{h}[U_{i+1,j} - U_{i,j}] + O(h) = \frac{1}{h}\Delta_x U_{i,j} + O(h) \quad (2.91)$$

şeklindedir.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{k}[U_{i,j+1} - U_{i,j}] + O(k) = \frac{1}{h}\Delta_y U_{i,j} + O(k) \quad (2.92)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden türevler içinde benzer formüller verilebilir.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2}[U_{i+2,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i,j}] + O(h) \quad (2.93)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{k^2}[U_{i,j+2} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j}] + O(k) \quad (2.94)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{hk}[U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j}] + O(h+k) \quad (2.95)$$

$U = U(x,y,z)$ şeklinde üç değişkenli fonksiyon olması durumunda

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h}[U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}] + O(h) \quad (2.96)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{k}[U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}] + O(k) \quad (2.97)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{l}[U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}] + O(l) \quad (2.98)$$

yazılabilir. Benzer şekilde ikinci mertebeden kısmi türevler ifade edilebilir.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} [U_{i+2,j,k} - 2U_{i+1,j,k} + U_{i,j,k}] + O(h) \quad (2.99)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{k^2} [U_{i,j+2,k} - 2U_{i,j+1,k} + U_{i,j,k}] + O(k) \quad (2.100)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{l^2} [U_{i,j,k+2} - 2U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k}] + O(l) \quad (2.101)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h.k} [U_{i+1,j+1,k} - U_{i,j+1,k} - U_{i+1,j,k} + U_{i,j,k}] + O(h+k) \quad (2.102)$$

yazılabilir. Benzer şekilde $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ gibi türevler de ifade edilebilir.

2.3.2. Geri fark yaklaşımları

$U = U(x,y)$ fonksiyonu için,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{h} [U_{i,j} - U_{i-1,j}] + O(h) = \frac{1}{h} \nabla_x U_{i,j} + O(h) \quad (2.103)$$

ve

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{k} [U_{i,j} - U_{i,j-1}] + O(k) = \frac{1}{k} \nabla_y U_{i,j} + O(k) \quad (2.104)$$

yazılabilir.

İkinci mertebeden kısmi türevler için benzer formüller verilebilir.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2} [U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}] + O(h) \quad (2.105)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{k^2} [U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j-2}] + O(k) \quad (2.106)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{h.k} [U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + U_{i-1,j-1}] + O(h+k) \quad (2.107)$$

yazılabilir.

$U=U(x,y,z)$ şeklinde üç değişkenli fonksiyon için de kısmi türev yaklaşımları aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h} [U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}] + O(h) \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{k} [U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}] + O(k) \quad (2.109)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{l} [U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}] + O(l) \quad (2.110)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} [U_{i,j,k} - 2U_{i-1,j,k} + U_{i-2,j,k}] + O(h) \quad (2.111)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{k^2} [U_{i,j,k} - 2U_{i,j-1,k} + U_{i,j-2,k}] + O(k) \quad (2.112)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{l^2} [U_{i,j,k} - 2U_{i,j,k-1} + U_{i,j,k-2}] + O(l) \quad (2.113)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h \cdot k} [U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k} - U_{i-1,j,k} - U_{i-1,j-1,k}] + O(h+k) \quad (2.114)$$

2.3.3. Merkezi fark yaklaşımları

İki değişkenli fonksiyonlar daha önceki bölümlerde ayrıntılı olarak incelendiğinden, burada sadece $U = U(x,y,z)$ gibi üç değişkenli fonksiyonun kısmi türevleri verilecektir.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{2h} [U_{i+1,j,k} - U_{i-1,j,k}] + O(h^2) \quad (2.115)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{2k} [U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}] + O(k^2) \quad (2.116)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{2l} [U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}] + O(l^2) \quad (2.117)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} [U_{i+1,j,k} - 2U_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}] + O(h^2) \quad (2.118)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{k^2} [U_{i,j+1,k} - 2U_{i,j,k} + U_{i,j-1,k}] + O(k^2) \quad (2.119)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{l^2} [U_{i,j,k+1} - 2U_{i,j,k} + U_{i,j,k-1}] + O(l^2) \quad (2.120)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{4h \cdot k} [U_{i+1,j+1,k} - U_{i-1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k} - U_{i-1,j-1,k}] + O(h^2 + k^2) \quad (2.121)$$

yazılabilir.

BÖLÜM 3. ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

3.1. Giriş

Literatürde kısaca (FDTD) olarak bilinen Zamanda Sonlu Farklar Yöntemi, İngilizce (Finite Difference Time Domain) kelimelerinin kısaltılmışıdır. (FDTD) yöntemi ilk kez YEE , K.S. tarafından 1966 yılında ortaya atılmış 1980'li yılların sonunda kişisel bilgisayarların hız ve kapasitelerindeki büyük artış sayesinde hemen her türlü probleme uygulanmaya başlanmıştır.

(FDTD) yöntemi analitik türev operatörünün sayısallaştırılmasına dayanır ve FD (Finite Difference) , sonlu farklar yöntemi olarak isimlendirilir. Kendisi ve türevleri her noktada sürekli olan bir $f(t)$ fonksiyonunun bir t_0 noktasındaki türevi,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. (3.1) bağıntısında Taylor açılımı kullanılır, gerekli düzenlemeler yapılır ve limit operatörü de kaldırılırsa

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2)$$

şeklinde sayısal türevin tanımı kolaylıkla elde edilir.

İleri Sonlu Farklar (İSF) adı verilen (3.2) bağıntısındaki $O(\Delta x)$ ifadesi, katkılarının küçük olduğu varsayılan üst mertebeli terimleri göstermektedir.

Sayısal türev tanımı, yine üst mertebeli terimlerin katkıları küçük olduğu varsayımı ile

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.3)$$

Şeklinde de yapılabilmektedir. (3.3) bağıntısına Geriye Sonlu Farklar (GSF) yöntemi adı verilmektedir. Sayısal türevdeki hata miktarını azaltmak için Merkezi Farklar Yöntemi (MFD) adı verilen üçüncü bir yöntem ise

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.4)$$

şeklindedir. MFD açılımı

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir.

MFD yöntemindeki hata (3.4) bağıntısında da görüldüğü gibi diğer iki yöntemden daha küçüktür. Türev açılımında daha fazla nokta kullanılarak hata istenilen mertebeye indirilebilir, fakat bu durumda bilgisayardaki hesaplama süresi ve bellek gereksinimi artacaktır.

Sonlu Farklar (FD) yöntemi uzun yıllardır bilinmesine rağmen zaman domeninde Maxwell denklemleri için kullanımı ilk kez 1966 yılında Kane S. Yee tarafından ortaya atılmıştır. Bunun sonucunda, elektromagnetik dalga yayılımını modelleyen Maxwell denklemlerinin FD ile yazılması ve zamana göre türevlerinde sayısallaştırılarak genelleştirilmesi yöntemi FDTD adıyla özel olarak adlandırılmış, bu çalışmada ise Türkçe karşılığı olan ZDSF olarak isimlendirilecektir.

3.2. Diferansiyel Formda Maxwell Denklemleri

Elektrik ve manyetik alanın varlığı herhangi bir noktaya getirilen bir yüke tesir eden kuvvet yardımıyla anlaşılır. Elektrik alan ve manyetik alan arasında önemli farklar vardır. Bu farklardan biri elektrik alanın duran ve hareket eden yüklere; manyetik alanın ise sadece hareket halindeki yüklere kuvvet uygulamasıdır. Bir diğeri ise, elektrik alan bir vektörel alan olup, hem duran, hem de hareket eden yükler tarafından oluşturulurken yine bir vektör alanı olan manyetik alanın sadece hareket eden yüklerce oluşturulabilmesidir.

James Clerk Maxwell, 1873 yılında o güne kadar bilinen elektrik ve manyetik etkileri analiz ederek, elektrik ve manyetik alanların aynı bir elektromanyetik alanın farklı durumlarda tezahür formları olduğu sonucuna varmıştır. Maxwell, uzayda keyfi dağılımlı yüklerin ve akımların oluşturduğu elektromanyetik alanın tüm özelliklerini kapsayan diferansiyel denklemler sistemini bulmuştur. Bu denklemler bir çok matematikçi ve fizikçinin elektromanyetik dalgaların yayılması ile ilgili çalışmalarında temel teşkil etmiştir.

Zaman düzleminde sonlu farklar metodunda, bir elektromanyetik dalganın yayılımını ve elektrik ve manyetik alanlar arasındaki ilişkiyi tanımlamak için de Maxwell denklemleri kullanılır. Bu denklemler dört adet olup;

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

\mathbf{E} elektrik alan, \mathbf{H} manyetik alan, \mathbf{D} elektrik alan endüksiyon ve \mathbf{B} manyetik alan endüksiyon vektörleri arasındaki bağıntılar aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (3.12)$$

ϵ dielektrik, μ manyetik geçirgenlik katsayısı, ρ hacimsel yük yoğunluğu, \mathbf{J} akım yoğunluğu vektörü ve σ iletkenlik katsayısı olarak adlandırılır.

Alan ve kaynaklar başlangıçta sıfır alınır. İki diverjans denklemi, rotasyonel denklemlerinde ve başlangıç sınır koşullarında içerildiğinden dolayı gereksizdirler. Bu sebeple ZDSF yönteminin formülasyonu için başlangıç noktası rotasyonel denklemleridir. Bu denklemler ZDSF yönteminin uygulanabilmesi için (3.15) ve (3.18) de verilen biçime dönüştürülmelidir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \cdot \mathbf{H}) - \sigma^* \cdot \mathbf{H} \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma^* \cdot \mathbf{H} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\sigma^*}{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \cdot \mathbf{E}) - \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{-\sigma}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.18)$$

Kayıplı dielektrik malzemeler hesaba katılarak $\mathbf{J}=\sigma.\mathbf{E}$ alınmış, manyetik kayıp olasılığı göz önüne alınarak ise manyetik iletkenlik terimi σ^* eklenmiştir. Formüller sadece elektromanyetik alanlar \mathbf{E} ve \mathbf{H} ' yi ele almakta \mathbf{D} ve \mathbf{B} 'yi içermemektedir. Ayrıca herhangi bir lineer izotropik malzeme özelliğinin belirlenebilmesi için σ , σ^* , μ , ε parametreleri de formül içerisinde yer almaktadır.

Toplam elektromanyetik alan gelen elektromanyetik alan ile saçılan elektromanyetik alanın toplamına eşittir.

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\text{toplam}}=\mathbf{E}^{\text{gelen}}+\mathbf{E}^{\text{saçılan}} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}^{\text{toplam}}=\mathbf{H}^{\text{gelen}}+\mathbf{H}^{\text{saçılan}} \quad (3.20)$$

Eğer mükemmel iletken den saçılma söz konusu ise saçılan alan gelen alanın zıt işaretlisi, yani $\mathbf{E}^{\text{saçılan}}=-\mathbf{E}^{\text{gelen}}$ 'dir. Mükemmel iletken haricinde bir malzeme söz konusu ise, saçılmış alan, malzemenin parametrelerine (σ , σ^* , μ , ε) bağlıdır. Gelen alanın her zaman serbest uzayda yayıldığı kabul edilir.

Toplam alanı elde etmek için gelen ve saçılan alanı birleştirmek her zaman mümkündür. Hatta eğer toplam alanın ZDSF formülleri istenirse, gelen dalga sıfıra çekilerek ve saçılan alana başlangıç koşulları uygulanarak, saçılmış dalga denklemlerinden elde edilebilir.

Gelen alan serbest uzayda yayılıyor şeklinde belirtilir. Eğer gerekiyorsa serbest uzay düzgün dağılımlı bir ortam (örneğin toprak) olarak genelleştirilebilir. Ancak bu tezde çalışmada kolaylık olması için serbest uzay kabul edilmiştir. Gelen dalga serbest uzaydan problem uzayına geçtiğinde, toplam alan serbest uzayda saçıcının dışına doğru saçılır. Saçıcı ortamda toplam alan aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{toplam}} = -\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{toplam}}}{\partial t} - \sigma^* \cdot \mathbf{H}^{\text{toplam}} \quad (3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{toplama}} = -\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{toplama}}}{\partial t} + \sigma \cdot \mathbf{E}^{\text{toplama}} \quad (3.22)$$

Gelen dalgaının serbest uzayda yayıldığı kabul edilerek aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{gelen}} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{gelen}}}{\partial t} \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{gelen}} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.24)$$

Toplam alan denklemlerini tekrar yazılırsa;

$$\nabla \times (\mathbf{E}^{\text{gelen}} + \mathbf{E}^{\text{saçılan}}) = -\mu \cdot \frac{\partial (\mathbf{H}^{\text{gelen}} + \mathbf{H}^{\text{saçılan}})}{\partial t} - \sigma^* (\mathbf{H}^{\text{gelen}} + \mathbf{H}^{\text{saçılan}}) \quad (3.25)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H}^{\text{gelen}} + \mathbf{H}^{\text{saçılan}}) = \varepsilon \cdot \frac{\partial (\mathbf{E}^{\text{gelen}} + \mathbf{E}^{\text{saçılan}})}{\partial t} + \sigma (\mathbf{E}^{\text{gelen}} + \mathbf{E}^{\text{saçılan}}) \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{saçılan}} = -\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{saçılan}}}{\partial t} - \sigma^* \cdot \mathbf{H}^{\text{saçılan}} - \left[(\mu - \mu_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{gelen}}}{\partial t} + \sigma^* \cdot \mathbf{H}^{\text{gelen}} \right] \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{saçılan}} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{saçılan}}}{\partial t} + \sigma \cdot \mathbf{E}^{\text{saçılan}} + \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gelen}}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}^{\text{gelen}} \right] \quad (3.28)$$

denklemleri elde edilir. Saçıcının dışında, serbest uzayda toplam alan (3.29) ve (2.30) denklemlerinde verildiği gibi yazılabilir.

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{toplama}} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{toplama}}}{\partial t} \quad (3.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{toplam}} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{toplam}}}{\partial t} \quad (3.30)$$

Bu denklemler aşağıda verildiği gibi düzenlenebilir.

$$\nabla \times (\mathbf{E}^{\text{gelen}} + \mathbf{E}^{\text{saçılan}}) = -\mu_0 \cdot \partial(\mathbf{H}^{\text{gelen}} + \mathbf{H}^{\text{saçılan}}) / \partial t \quad (3.31)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H}^{\text{gelen}} + \mathbf{H}^{\text{saçılan}}) = \epsilon_0 \cdot \partial(\mathbf{E}^{\text{gelen}} + \mathbf{E}^{\text{saçılan}}) / \partial t \quad (3.32)$$

Gelen dalga ifadesini denklemden çıkartırsak serbest uzayda saçılan alanı elde edilir.

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{saçılan}} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{saçılan}}}{\partial t} \quad (3.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{saçılan}} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{saçılan}}}{\partial t} \quad (3.34)$$

(3.27) ve (3.28) denklemlerinde $\epsilon \rightarrow \epsilon_0, \mu \rightarrow \mu_0, \sigma = 0, \sigma^* = 0$ alınmak suretiyle bu denklemler elde edilebilir.

Özet olarak sadece bir küme denklem alan formülasyonu için yeterlidir. Gelen dalga için (3.23) ve (3.24) denklemleri, saçılan dalga için (3.27) ve (3.28) denklemleri kullanılabilir. Saçıcının içinde $\mu, \epsilon, \sigma, \sigma^*$ kullanılır, saçıcının dışında $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0, \sigma = \sigma^* = 0$ alınır. Saçılan alan denklemleri yeniden düzenlenerek (3.35) ve (3.36) de verilen forma dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{saçılan}}}{\partial t} = & -\frac{\sigma^*}{\mu} \cdot \mathbf{H}^{\text{saçılan}} - \frac{\sigma^*}{\mu} \cdot \mathbf{H}^{\text{gelen}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^{\text{gelen}}}{\partial t} \\ & - \frac{1}{\mu} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{saçılan}}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{saçılan}}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}^{\text{saçılan}} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}^{\text{gelen}} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gelen}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{H}^{\text{saçılan}})$$

(3.36)

3.3. Mükemmel İletken İçin ZDSF Formülasyonu

Saçıcının dışında, saçılmış alan $\sigma^* = \sigma = 0$, $\mu = \mu_0$ ve $\varepsilon = \varepsilon_0$ olduğu serbest uzay koşullarında tanımlanır. Bu sebeple (3.35) ve (3.36) denklemleri (3.37) ve (3.38) de verilen şekli alır.

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{\text{saçılan}}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{saçılan}})$$

(3.37)

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\nabla \times \mathbf{H}^{\text{saçılan}})$$

(3.38)

Mükemmel iletken içinde denklem (3.36), (3.39)'de verildiği gibi yazılabilir.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{saçılan}}}{\partial t} = -\mathbf{E}^{\text{saçılan}} - \mathbf{E}^{\text{gelen}} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gelen}}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{H}^{\text{saçılan}})$$

(3.39)

Mükemmel iletkende $\sigma \approx \infty$ olduğundan denklem (3.39) aşağıda verilen şekle dönüşür.

$$\mathbf{E}^{\text{saçılan}} = -\mathbf{E}^{\text{gelen}}$$

(3.40)

Mükemmel iletken içinde (3.40) denklemi uygulanır. Bu sebeple , sadece serbest uzay ve mükemmel iletken söz konusu ise, gelen alanın tanımı yapılır ve (3.37) ve (3.38) denklemleri (3.40) denklemine eklenerek ZDSF yöntemi uygulanır.

Türev ifadeleri için fark yaklaşımları aşağıda gösterilmiştir.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t_1 + \Delta t) - f(x, t_1)}{\Delta t} \approx \frac{f(x, t_2) - f(x, t_1)}{\Delta t_1} \quad (3.41)$$

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_2, t) - f(x_1, t)}{\Delta x_1} \quad (3.42)$$

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1$$

Saçılan alan bileşenleri (3.43) denklemlerinde gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial E_x^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\partial H_z^{\text{saçılan}}}{\partial y} - \frac{\partial H_y^{\text{saçılan}}}{\partial z} \right] \quad (3.43a)$$

$$\frac{\partial E_y^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\partial H_x^{\text{saçılan}}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{\text{saçılan}}}{\partial x} \right] \quad (3.43b)$$

$$\frac{\partial E_z^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\partial H_y^{\text{saçılan}}}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{\text{saçılan}}}{\partial y} \right] \quad (3.43c)$$

$$\frac{\partial H_x^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial E_y^{\text{saçılan}}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{\text{saçılan}}}{\partial y} \right] \quad (3.43d)$$

$$\frac{\partial H_y^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial E_z^{\text{saçılan}}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{\text{saçılan}}}{\partial z} \right] \quad (3.43e)$$

$$\frac{\partial H_z^{\text{saçılan}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial E_x^{\text{saçılan}}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{\text{saçılan}}}{\partial x} \right] \quad (3.43f)$$

$$\frac{E_x^{s,n} - E_x^{s,n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\Delta H_z^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{\Delta H_y^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{E_y^{s,n} - E_y^{s,n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\Delta H_x^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{\Delta H_z^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] \quad (3.45)$$

$$\frac{E_z^{s,n} - E_z^{s,n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\Delta H_y^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{\Delta H_x^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \quad (3.46)$$

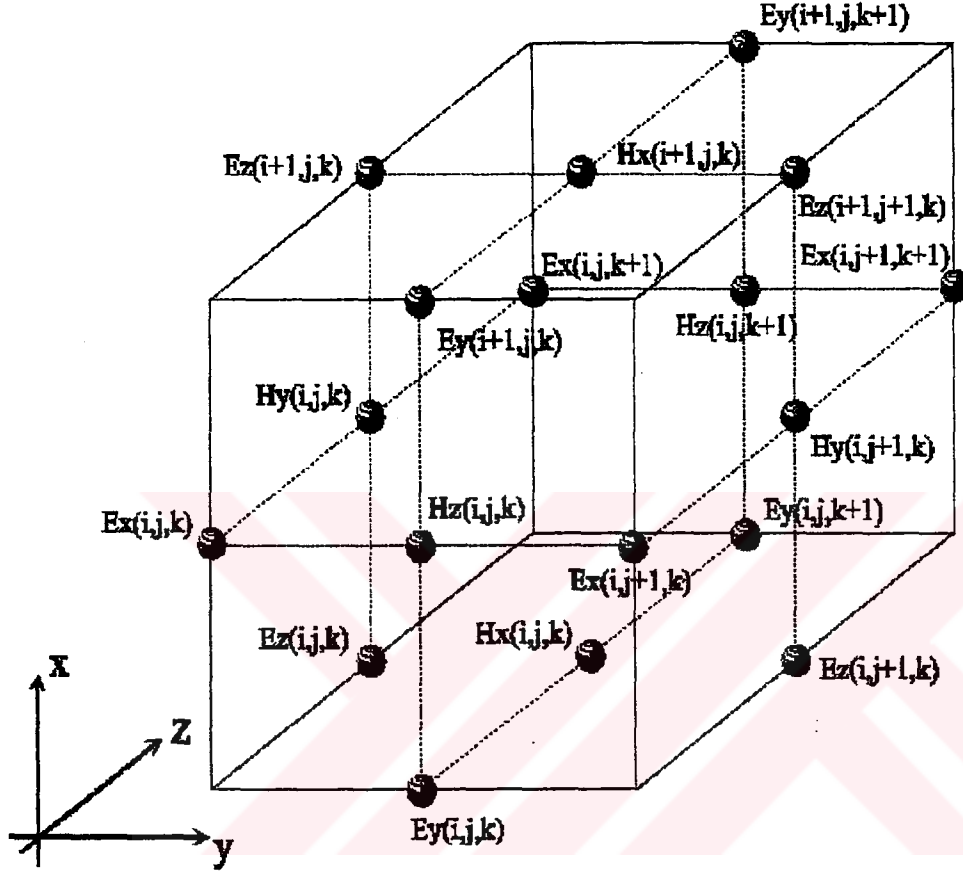
$$\frac{H_x^{s,n+\frac{1}{2}} - H_x^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\Delta E_y^{s,n}}{\Delta z} - \frac{\Delta E_z^{s,n}}{\Delta y} \right] \quad (3.47)$$

$$\frac{H_y^{s,n+\frac{1}{2}} - H_y^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\Delta E_z^{s,n}}{\Delta x} - \frac{\Delta E_x^{s,n}}{\Delta z} \right] \quad (3.48)$$

$$\frac{H_z^{s,n+\frac{1}{2}} - H_z^{s,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\Delta E_x^{s,n}}{\Delta y} - \frac{\Delta E_y^{s,n}}{\Delta x} \right] \quad (3.49)$$

Fark denklemleri şeklinde tanımlanan saçılmış alan bileşenleri formülleri, küçük bir çalışma ile mükemmel iletken için ZDSF koduna dönüştürülebilir. Uzay $x_i=I.\Delta x$, $y_j=J.\Delta y$, $z_k=K.\Delta z$ ve zaman $\tau_n=n.\Delta t$ şeklinde nicemlenebilir. Problem uzayı düzgün

hücrelere bölünüp bu hücrelerde alan bileşenlerinin yeri seçilebilir. Yee notasyonunda, $E_z^n(L,J,K)$, $x=L.\Delta x$, $y=J.\Delta y$, $z=(K+1/2)\Delta z$ yerinde ve $t=n.\Delta t$ zamanında elektrik alanın z bileşenini göstermektedir.



Şekil-3.1. Yee Hücresi

$E_x^{s,n}$ 'in, L,J,K 'ıncı Yee yücresinde FORTRAN tanımı $EXS(L,J,K)$ şeklinde yapılmıştır. Benzer şekilde $H_y^{s,n+1/2}$, L,J,K hücresinde $HYS(L,J,K)$ olarak tanımlanmıştır.

$$EXS(L, J, K) = EXS(L, J, K) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \left[\frac{HZS(L, J, K) - HZS(L, J - 1, K)}{\Delta Y} - \frac{HYS(L, J, K) - HYS(L, J, K - 1)}{\Delta Z} \right] \quad (3.50)$$

$$EYS(I, J, K) = EYS(I, J, K) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \left[\frac{HXS(I, J, K) - HXS(I, J, K - 1)}{\Delta Z} - \frac{HZS(I, J, K) - HZS(I - 1, J, K)}{\Delta X} \right] \quad (3.51)$$

$$EZS(I, J, K) = EZS(I, J, K) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \left[\frac{HYS(I, J, K) - HZS(I - 1, J, K)}{\Delta X} - \frac{HXS(I, J, K) - HXS(I, J - 1, K)}{\Delta Y} \right] \quad (3.52)$$

$$HXS(I, J, K) = HXS(I, J, K) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{EYS(I, J, K + 1) - EYS(I, J, K)}{\Delta Z} - \frac{EZS(I, J + 1, K) - EZS(I, J, K)}{\Delta Y} \right] \quad (3.53)$$

$$HYS(I, J, K) = HYS(I, J, K) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{EZS(I + 1, J, K) - EZS(I, J, K)}{\Delta X} - \frac{EXS(I, J, K + 1) - EXS(I, J, K)}{\Delta Z} \right] \quad (3.54)$$

$$HZS(I, J, K) = HZS(I, J, K) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{EXS(I, J + 1, K) - EXS(I, J, K)}{\Delta Y} - \frac{EYS(I + 1, J, K) - EYS(I, J, K)}{\Delta X} \right] \quad (3.55)$$

3.4. Kayıplı Malzeme Formülasyonu

$$\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^s + \mathbf{E}^s \quad (3.56)$$

$$\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^s \quad (3.57)$$

(3.56) ve (3.57) denklemleri kullanılarak kayıplı malzeme içinde saçılmış alan yayılımı için denklemler türetilbilir.

$$\frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} = -\frac{\sigma^*}{\mu} \mathbf{H}^s - \frac{\sigma^*}{\mu} \mathbf{H}^s - \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} - \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}^s) \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}^s - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}^s - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{H}^s) \quad (3.59)$$

(3.59) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}^s = -\sigma \mathbf{E}^s - (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{H}^s) \quad (3.60)$$

Merkezi sonlu fark yaklaşımı kullanılarak denklem(3.60) aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon(\mathbf{E}^{s,n} - \mathbf{E}^{s,n-1}) + \sigma \Delta t \mathbf{E}^{s,n} = -\sigma \Delta t \mathbf{E}^{s,n} - (\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t \mathbf{E}^{s,n} + (\nabla \times \mathbf{H}^{s,n-1/2}) \Delta t \quad (3.61)$$

$$(\varepsilon + \sigma \Delta t) \mathbf{E}^{s,n} = \varepsilon \mathbf{E}^{s,n-1} - \sigma \Delta t \mathbf{E}^{i,n} - (\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t \mathbf{E}^{i,n} + (\nabla \times \mathbf{H}^{s,n-1/2}) \Delta t \quad (3.62)$$

$$\mathbf{E}^{s,n} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \mathbf{E}^{s,n-1} - \left(\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \mathbf{E}^{i,n} - \left(\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \mathbf{E}^{i,n} + (\nabla \times \mathbf{H}^{s,n-1/2}) \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \quad (3.63)$$

Benzer şekilde (3.58) denklemini de aşağıda verildiği gibi düzenleyebiliriz.

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} + \sigma^* \mathbf{H}^s = -\sigma^* \mathbf{H}^s - (\mu - \mu_0) \frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E}^s) \quad (3.64)$$

$$\mu (\mathbf{H}^{s,n+1/2} - \mathbf{H}^{s,n-1/2}) + \sigma^* \Delta t \mathbf{H}^{s,n+1/2} = -\sigma^* \Delta t \mathbf{H}^{s,n+1/2} - (\mu - \mu_0) \Delta t \mathbf{H}^{s,n+1/2} - (\nabla \times \mathbf{E}^s) \Delta t \quad (3.65)$$

$$\mu(H^{s,n+\frac{1}{2}} - H^{s,n-\frac{1}{2}}) + \sigma^* \Delta t H^{s,n+\frac{1}{2}} = -\sigma^* \Delta t H^{g,n+\frac{1}{2}} - (\mu - \mu_0) \Delta t H^{g,n+\frac{1}{2}} \quad (3.65)$$

$$- (\nabla \times E^s) \Delta t$$

$$(\mu + \sigma^* \Delta t) H^{s,n+\frac{1}{2}} = \mu H^{s,n-\frac{1}{2}} - \sigma^* \Delta t H^{g,n+\frac{1}{2}} - (\mu - \mu_0) \Delta t H^{g,n+\frac{1}{2}} \quad (3.66)$$

$$- (\nabla \times E^s) \Delta t$$

$$H^{s,n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mu}{\mu + \sigma^* \Delta t} \right) H^{s,n-\frac{1}{2}} - \left(\frac{\sigma^* \Delta t}{\mu + \sigma^* \Delta t} \right) H^{g,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{(\mu - \mu_0) \Delta t}{\mu + \sigma^* \Delta t} \right) H^{g,n+\frac{1}{2}} \quad (3.67)$$

$$- (\nabla \times E^{s,n}) \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \Delta t} \right)$$

(3.68) ve (3.69) denklemlerinin fortran tanımları aşağıda verilmiştir.

$$E_x^s(I, J, K)^n = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_x^s(I, J, K)^{n-1} - \left(\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_x^i(I, J, K)^n$$

$$- \left(\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_x^i(I, J, K)^n + \frac{H_z^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_z^s(I, J-1, K)^{n-1/2}}{\Delta y} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right)$$

$$+ \frac{H_y^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_y^s(I, J, K-1)^{n-1/2}}{\Delta z} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \quad (3.68)$$

$$E_y^s(I, J, K)^n = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_y^s(I, J, K)^{n-1} - \left(\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_y^i(I, J, K)^n$$

$$- \left(\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_y^i(I, J, K)^n + \frac{H_x^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_x^s(I, J, K-1)^{n-1/2}}{\Delta z} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right)$$

$$+ \frac{H_z^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_z^s(I-1, J, K)^{n-1/2}}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
E_z^s(I, J, K)^n &= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sigma \cdot \Delta t} \right) E_z^s(I, J, K)^{n-1} - \left(\frac{\sigma \cdot \Delta t}{\varepsilon + \sigma \cdot \Delta t} \right) E_z^i(I, J, K)^n \\
&- \left(\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta t}{\varepsilon + \sigma \cdot \Delta t} \right) E_z^i(I, J, K)^n + \frac{H_y^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_y^s(I-1, J, K)^{n-1/2}}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \cdot \Delta t} \right) \\
&+ \frac{H_x^s(I, J, K)^{n-1/2} - H_x^s(I, J-1, K)^{n-1/2}}{\Delta y} \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon + \sigma \cdot \Delta t} \right) \quad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\mu}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_x^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\sigma^* \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_x^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} \\
&- \left(\frac{(\mu - \mu_0) \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_x^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_z^s(I, J, K)^n - E_z^s(I, J-1, K)^n}{\Delta y} \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_y^s(I, J, K)^n - E_y^s(I, J, K-1)^n}{\Delta z} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\mu}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_y^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\sigma^* \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_y^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} \\
&- \left(\frac{(\mu - \mu_0) \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_y^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_x^s(I, J, K)^n - E_x^s(I, J, K-1)^n}{\Delta z} \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_z^s(I, J, K)^n - E_z^s(I-1, J, K)^n}{\Delta x} \quad (3.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\mu}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_z^s(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\sigma^* \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_z^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} \\
&- \left(\frac{(\mu - \mu_0) \cdot \Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) H_z^g(I, J, K)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_y^s(I, J, K)^n - E_y^s(I-1, J, K)^n}{\Delta x} \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{\mu + \sigma^* \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{E_x^s(I, J, K)^n - E_x^s(I, J-1, K)^n}{\Delta y} \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Örnek teşkil etmesi açısından sadece (3.63) denkleminin fortran tanımı yapılacaktır. Öncelikle her hücredeki her bir alan bileşeni için çoklu terimlerin tümünün kaydedilmesi önemli miktarda ek hafıza gerektireceğinden dolayı, denklemlerde tekrarlanan sabit çoklu terimler değerlendirilmeli ve kısa isimler altında tanımlanmak suretiyle tekrar kullanılmak üzere kaydedilmelidir.

Problem uzayımız milyonlarca hücreden meydana gelebilir ama belki sadece birkaç farklı iletkenlik, geçirgenlik ve dielektrik katsayısına sahip malzeme modellenecektir. Bunun için malzeme tiplerini önceden tanımlamalıyız. Mesela IDBIR(I,J,K), elektrik alanın x bileşenini gösterebilir, IDBIR(I,J,K)=0 'ın anlamı programımız için I,J,K hücresindeki elektrik alanın x bileşeninin serbest uzayda yer aldığıdır. IDBIR(I,J,K)=1 ise aynı bileşenin mükemmel iletken içinde olduğunu göstermektedir.

M, ZDSF problem uzayında yer alan m. tip kayıplı dielektrik malzemeyi göstermek üzere, bu malzeme için çoklu sabitlerin tanımları aşağıda verilmiştir.

$$ECRLY(M) = \frac{DT}{(EPS(M) + SIGMA(M) * DT) * DY} \left(= \frac{\Delta t}{(\epsilon + \sigma \Delta t) \Delta Y} \right) \quad (3.74)$$

$$ECRLZ(M) = \frac{DT}{(EPS(M) + SIGMA(M) * DT) * DZ} \left(= \frac{\Delta t}{(\epsilon + \sigma \Delta t) \Delta Z} \right) \quad (3.75)$$

$$ESCTC(M) = EPS(M) / (EPS(M) + SIGMA(M) * DT) \left(= \frac{\epsilon}{\epsilon + \sigma \Delta t} \right) \quad (3.76)$$

$$EINCC(M) = SIGMA(M) * DT / (EPS(M) + SIGMA(M) * DT) \left(= \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon + \sigma \Delta t} \right) \quad (3.77)$$

$$EDEVCN(M) = DT * (EPS(M) - EPS0) / (EPS(M) + SIGMA(M) * DT) \left(= \frac{(\epsilon - \epsilon_0) \Delta t}{\epsilon - \sigma \Delta t} \right) \quad (3.78)$$

Bu tanımlar kullanılarak kayıplı dielektrik malzeme içinde E_x^s için FORTRAN tanımını denklem (3.79)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} EXS(LJ,K) = & EXS(LJ,K) * ESCTC(IDONE(LJ,K)) - EINCC(IDONE(LJ,K)) * EXI(LJ,K) \\ & - EDEVCN(IDONE(LJ,K)) * DEXI(LJ,K) \\ & + (HZS(LJ,K) - HZS(LJ-1,K)) * ECRLY(IDONE(LJ,K)) \\ & - (HYS(LJ,K) - HYS(LJ,K-1)) * ECRLZ(IDONE(LJ,K)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

şekil 3.1' de verilen Yee birim hücresi incelendiğinde, FDTD yapısı için şu noktaların altı çizilebilir.

1. Her hücrede üç elektrik ve üç magnetik alan bileşeni vardır; hücre numarası (i,j,k) olarak adlandırılmaktadır.

2. (i,j,k) hücresinde, örneğin elektrik alanın x- bileşeni $E_x(i,j,k)$ ve magnetik alanın y- bileşeni $H_y(i,j,k)$ aynı indislerle belirtilmelerine karşın hücre içerisindeki konumları farklıdır.

3. Hücre içerisinde farklı konumda olmalarının yanı sıra elektrik ve magnetik alan bileşenleri arasında zamanda da $\Delta t/2$ kadar fark vardır. Yani $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ anlarında elektrik alan bileşenleri hesaplanırken, $t = \Delta t/2, 3\Delta t/2, \dots$ anlarında magnetik alanlar hesaplanmaktadır.

4. ZDSF uzayında herhangi bir noktada alan bileşenleri komşu noktadaki bileşenlerin aritmetik ortalaması ile bulunur. Örneğin (i,j,k) hücresinin merkezindeki E_z yi bulmak için

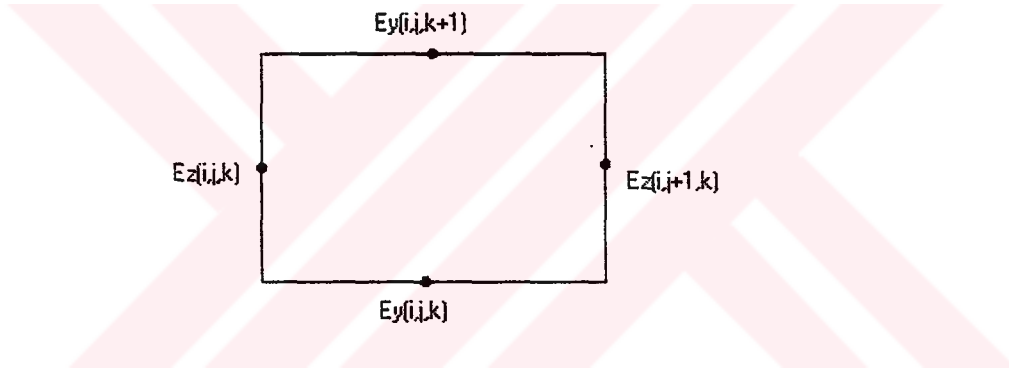
$$E_z = \frac{E_z(i, j, k) + E_z(i + 1, j, k) + E_z(i, j + 1, k) + E_z(i + 1, j + 1, k)}{4} \quad (3.80)$$

kullanılmaktadır.

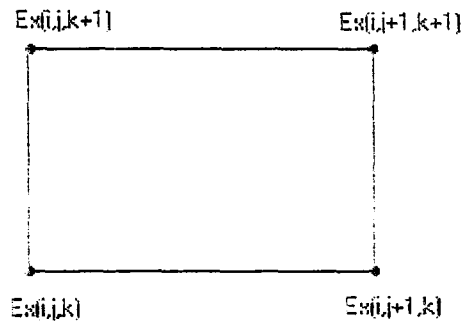
5. İteratif denklemlerinden görüleceği üzere, üç magnetik alan ve üç elektrik alan bileşenin hesabında (μ, ϵ) ortam parametreleri yer almaktadır. Bu nedenle her hücrede (μ, ϵ) ortam parametreleri farklı verilerek değişik cisimler modellenebilmektedir. Örneğin (i,j,k) hücresinde (Şekil 3.1) yz düzleminde sonsuz ince mükemmel iletken bir tabaka modellemek için şekil 3.2'deki dört noktanın σ değerini sonsuz almak yeterlidir. Sayısal hesaplamalarda $\sigma \rightarrow \infty$ anlamsız olduğundan mükemmel iletken olan yüzeylerde elektrik alanın teğetsel bileşenleri hesap yapılmadan zaman simülasyonu boyunca sıfır alınarak PEC (Perfectly

elektrical conductor) etkisi sağlanır. Benzer şekilde (i,j,k) hücresinde aynı iletken tabaka hücre ortasına (Şekil 3.3) bu kez ilgili dört düğüm elektrik alanının x- bileşeni düğümleri olacaktır.

6. Birim hücrede üç elektrik alan bileşeninin farklı noktalarda tanımlanması sonsuz ince tabakaların simülasyonuna sonsuz ince çizgisel elemanların modellenmesine de olanak sağlamaktadır. Örneğin z eksenini boyunca (i,j,k) hücresinden başlayarak 4 hücre boyunca ($l = 4\Delta_z$) bir ince anten yerleştirmek için (i,j,k), (i,j,k+1), (i,j,k+2) ve (i,j,k+3) hücrelerindeki E_z bileşenlerinin olduğu noktalarda $\sigma \rightarrow \infty$ yapmak yeterlidir. Sayısal hesaplamalarda da bu, zaman simülasyonu boyunca $E_z(i,j,k) = E_z(i,j,k+1) = E_z(i,j,k+2) = E_z(i,j,k+3) = 0$ alınarak sağlanmaktadır.



Şekil 3.2. Birim hücrede alt yüzeye iletken plaka yerleştirmek için kullanılan elektrik alan bileşeni



Şekil 3.3 Birim hücrede ortadaki yüzeye iletken plaka yerleştirmek için kullanılan elektrik alan bileşenleri

7. ZDSF hacmi içerisinde yüz binlerce hücrede, zaman iterasyonu boyunca (V/m) olarak elektrik alan ve (A/m) olarak magnetik alan değerleri hesaplanmaktadır. Herhangi bir noktada istenilen alan bileşenleri biriktirilerek E(t) ve H(t) zaman değişimi elde edilebilir. Bu sayede, yapının hem geçici hem de sürekli zaman davranışı gözlenebilmektedir. Zaman davranışında da Fourier dönüşümü ile E(f) ve/veya H(f) frekans davranışı çıkarılabilir.

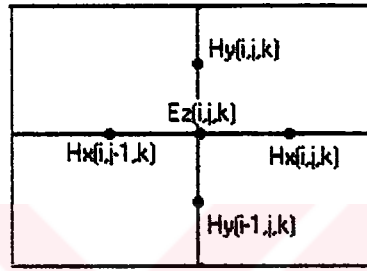
8. ZDSF hacmi içinde kaynak uygulama problemi oldukça kolay bir şekilde çözümlenebilmektedir. Modellenen yapıya ve gerçekleştirilmek istenen analize bağımlı olarak kaynağın farklı noktalara ve farklı şekillere uygulanması gerekebilir. Kaynak tek bir noktada tek bir bileşene uygulanabileceği gibi, birden fazla noktada ve/veya birkaç bileşene de uygulanabilir. Örneğin $i = IL, j = JL, k = KL$ noktasında E_y bileşenine kaynak uygulanacak ise, zamandaki davranışı belirlenmiş olan kaynak fonksiyonu $f(t)$ o noktada E_y bileşenine $E_y(i,j,k) = E_y(i,j,k) + f(n\Delta t)$ şeklinde eklenmektedir. Kaynak olarak sinuzoidal veya gauss tipi kaynak fonksiyonu kullanılabilir

9. ZDSF hacmi içindeki tüm hücrelerde elektrik ve magnetik alan bileşenleri hesaplandığı için, yapının herhangi bir noktasındaki gerilim veya akım değerlerini hesaplamak mümkündür. Genel olarak x_1 ve x_2 şeklinde tanımlanan iki nokta arasında n anındaki potansiyel farkı, $\int_{x_1}^{x_2} E_y^n dl$ olarak, iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki elektrik alanların integrali alınarak bulunabilir. Sayısal olarak ise, örneğin ZDSF hacmi içinde (IL, JL, KL) ile (il,jl+n,kl) hücreleri arasındaki potansiyel farkını bulmak için, Yee hücresinde de görüldüğü gibi y - ekseninde elektrik alanın E_y bileşeni yer aldığından, Δy Yee hücresinin y - eksenindeki boyutu olmak üzere, belirtilen iki hücre arasındaki $V = \sum_{i=jl}^n (E_y^n(il, j, kl)\Delta y)$ toplamını bulmak yeterlidir. Bir noktadaki akımı hesaplamak için de, o noktanın etrafındaki kapalı çevre üzerinde magnetik alanların $\int_C H_y dl$ şeklinde entegre edilmesi gerekmektedir. Örnek olarak,

eğer (i,j,k) hücresinde E_z bileşeninin bulunduğu noktada n anında (Şekil 3.1) +z yönündeki akım değeri (şekil 3.4) bulunmak isteniyorsa

$$I(i, j, k) = [H_x^n(i, j-1, k) - H_x^n(i, j, k)]\Delta x + [H_y^n(i, j, k) - H_y^n(i-1, j, k)]\Delta y$$

şeklinde bir bağıntı kullanılmaktadır[9].

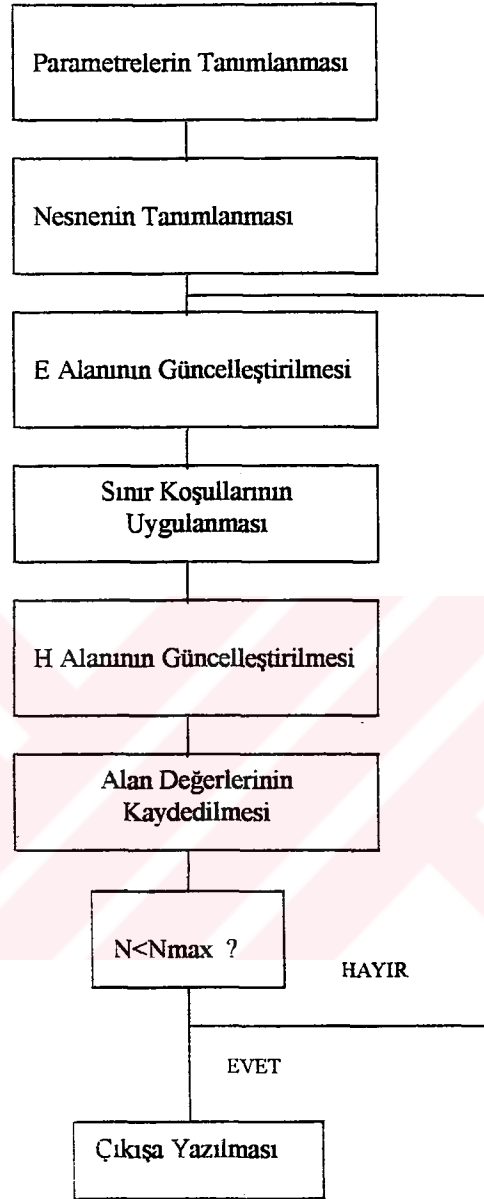


Şekil 3.4. E_z bileşeninin bulunduğu noktada +z yönündeki akım değerini bulmak için kullanılan magnetik alanlar

3.5. ZDSF Metodunun Uygulanmasında Algoritmanın Oluşturulabilmesi İçin Gerekli Öğeler

Şekil 3.5’de görülen ZDSF algoritması üç boyutlu ortamda alan bileşenlerini belirleyen ayrı konumlarda ve ayrı zamanlarda dönüşümlü olarak hesaplamaktadır. ZDSF algoritmasının oluşturulmasında, Yee hücresi kullanılmak üzere, üç boyutlu dikdörtgenler prizması şeklindeki problem uzayı içinde altı alan bileşeni hesaplanacaktır. ZDSF metodu için akış diyagramı ve bu algoritmanın oluşturulabilmesi için bazı gereksinimler aşağıda sunulmuştur.

Problem Uzayının Tanımlanması: Problem uzayının boyutları, hücre boyutları ve hücre sayısı tanımlanır ve tanımlanan hücre boyutları ve Courant kararlılık koşulu uygulanmak suretiyle zaman adımının boyutu tespit edilir.



Şekil 3.5. ZDSF Metodu İçin Akış Diyagramı

Parametrelerin Tanımlanması ve Alt Programlara Dailanmaların Yer Aldığı Ana Programın Oluşturulması: İlk olarak problem uzayının ve test edilecek devrenin tanımlarının yer aldığı alt programa dallanılır. Daha sonra her zaman adımında elektrik ve manyetik alanların ve sınır koşullarının hesaplandığı alt programlar çalıştırılır ve hesaplamalar sonucunda elde edilen verilerin kaydedilmesi için ilgili alt program çağrılır.

Test Edilecek Nesnenin Tanımlanması: Bu tez çalışmasında test edilecek nesne olarak mikroşerit devre seçilmiştir. Test edilecek nesneyi oluşturan her bir hücrenin altı alan bileşeninin bulunduğu malzeme tipleri tanımlanır.

Elektrik ve Manyetik Alanın Hesaplanmasına İlişkin Algoritmanın Oluşturulması: Alan bileşenlerinin içinde bulunduğu malzeme tipine bakılarak serbest uzay, mükemmel iletken veya kayıplı dielektrik olmasına göre her hücre için elektrik manyetik alan bileşenleri hesaplanır.

Sınır Koşullarının Belirlenmesi ve elde edilen verilerin kaydedilmesi de analizin yapılmasında gerekli ve önemli öğelerdir [4]



BÖLÜM 4. ZAMANDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİNDE TEMEL PRENSİPLER VE ALGORİTMANIN OLUŞTURULMASI

4.1. Giriş

Zamanda Sonlu Farklar Yöntemini problem uzayına uygularken bazı kriterler dikkate alınmalıdır. ZDSF yönteminin uygulanmasında hücre boyutu seçimi oldukça önemlidir. Hücre sayısı doğrudan malzemeye bağlıdır. Hücre boyutu yüksek frekanslarda doğru sonuçların alınabilmesi için yeterince küçük, idare edilebilen kaynak gereksinimlerini saklayabilmek için ise yeterince büyük olmalıdır. Önce hücre boyutu seçilmelidir daha sonra Courant kararlılık koşulu kullanılarak maksimum zaman adımı tespit edilmelidir. Küçük zaman adımları her zaman için doğru sonuçlar elde etmemiz açısından daha uygundur [6].

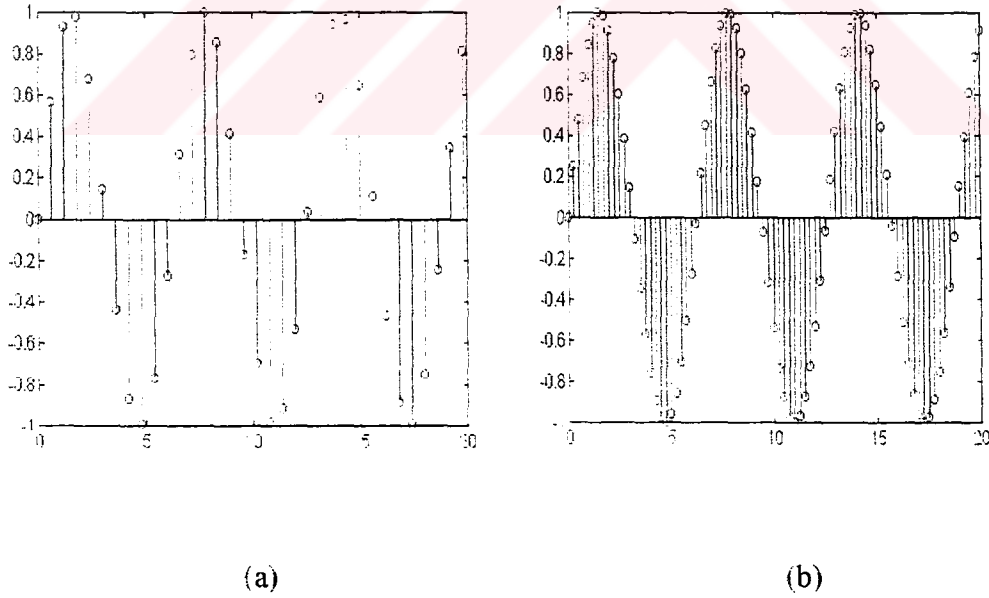
Saçılmış alan ZDSF formülleri kullanıldığında, gelen alan analitik olarak belirtilmelidir. Sonsuz sayıda dalga biçimi olabilir, fakat denemeler sonucunda gelen dalga için gauss darbesi uygun görülmüştür. İstisna olarak frekansa bağlı malzemeler söz konusu edilmişse kosinüs darbesi kullanmak avantajlı olur [7].

ZDSF yönteminde, doğruluk, hücre boyutuna, frekansa ve objenin şekline göre ± 0.1 dB elde edilebilir. Malzeme tanımlanması için tam sayı değerleri kullanılır ve farklı tam sayılar farklı malzemeleri ifade ederler. Örneğin bu çalışmada serbest uzay sıfır ile, mükemmel iletken 1 ve kayıplı dielektrikler ise 1'den büyük tam sayılarla gösterilmiştir. Kullanıcı hücre boyutunu tespit ettikten sonra, problem uzayının saçıcı objeyi kuşatacak genişlikte olmasına dikkat etmelidir. Hücre sayısını ve zaman adımını kaynak gereksinimleri belirler. Bu kaynaklar CPU zamanı, RAM ve hard disk kapasitesidir.

4.2. Hücre Boyutunun Tespiti

Arzu edilen doğru sonuca ulaşmak için hücre boyutunun dalga boyundan küçük olması gerekmektedir. Dolayısıyla simüle edilen işaret içerisinde en küçük dalga boyuna (en yüksek frekansa) sahip bileşenin konumunda kaç hücre ile örneklenmesi gerekliliği incelenmelidir Nyquist teoremine göre bir işaretin bilgi kaybı olmadan tekrar elde edilebilmesi için zamanda örnekleme hızının içerdiği en yüksek frekansın en az iki katı olması gerekir. Benzer şekilde ZDSF uygulamaları içinde aynı prensip geçerli olup, literatürde genelde hücre boyutunun dalga boyunda 10 hücre olacak şekilde seçildiği görülmektedir.[8],[9] Sonuç olarak her hücrenin kenar boyu $1/10\lambda$ alınmıştır.

Şekil (4.1)'de örnekleme aralığına Δ_x denirse (a) şıkında $\lambda_{\min} = 10\Delta_x$, (b) şıkında ise $\lambda_{\min} = 24\Delta_x$ ile örneklenmiştir. Bu durumda (b) şıkında ZDSF' nin λ_{\min} bileşeninin dalga yayılımını daha iyi simüle edeceği açıktır.



Şekil 4.1. Sayısal örneklemenin fiziksel yorumu

olmasa da dalga boyunda dört hücre kullanmak suretiyle de mantıklı sonuçlar elde etmemiz mümkündür. Özetle, hücre boyutu Nyquist örnekleme limitinden ($\lambda=2.\Delta x$) ne kadar küçük seçilirse, doğru sonuca o derece yaklaşılr.

4.3. ZDSF Yönteminde Kaynak Fonksiyonunun Tanımlanması

ZDSF yöntemi için zaman domeninde sonlu ve sınırlı frekans spektrumuna sahip dalga biçimi uygundur. Ancak fiziksel olarak bu mümkün değildir, çünkü zaman domeninde sonlu bir işaretin frekans spektrumu sonsuzdur. Aynı şekilde frekans domeninde sınırlı bir işaret de zaman domeninde sonsuz olmaktadır.

Genel olarak işaretin zaman domenindeki şekli ile frekans band genişliği arasında ters ilişki vardır; işaretin süresi zaman domeninde kıaldıkça frekans spektrumu genişler. Buna göre, herhangi bir $f(t)$ işaretinin etkin süresi (T_{eff}) ile etkin band genişliği (B_{eff}) çarpımı bir sabite eşittir.[5]

$$T_{eff} \times B_{eff} = \text{sabit} \quad (4.1)$$

ZDSF yöntemi için geniş bantlı kaynak modellenmesinde en uygun işaret, zaman band genişliği ($T_{eff} \times B_{eff}$) çarpımı minimum olan işarettir. Bu tip bir işaretin hem zaman süresi hem de frekans band genişliği oldukça küçüktür; bu sayede Fourier dönüşümündeki örtüşme hataları azalmaktadır. Teorik olarak zaman band genişliği çarpımı

$$T_{eff} \times B_{eff} \geq 1/2 \quad (4.2)$$

değerini almaktadır[5]. Bu koşulları en iyi sağlayan fonksiyon gauss darbesidir.

Gauss darbesi iki şekilde tanımlanmaktadır.

$$f(t) = \exp\left[\frac{-t^2}{(4T_{eff}^2)}\right] \quad (4.3a)$$

yada

$$f(t) = \exp[-B_{\text{eff}}^2 t^2] \quad (4.3b)$$

(4.3) denklemlerinde tanımlanan Gauss darbesi sonsuz sürelidir. ZDSF' de sonlu değerlerle çalışıldığından bu gauss darbesi belli bir T_0 süreli ve birim genlikli bir işaretle ($p(t/T_0)$) çarpılarak sınırlandırılmaktadır. Bu şekilde, sonsuz süreli gauss darbesi zamanda dikdörtgen bir darbe ile çarpılarak sonlu hale getirilmektedir. Bu fonksiyon;

$$g(t) = f(t) \times p(t / T_0) \quad (4.4)$$

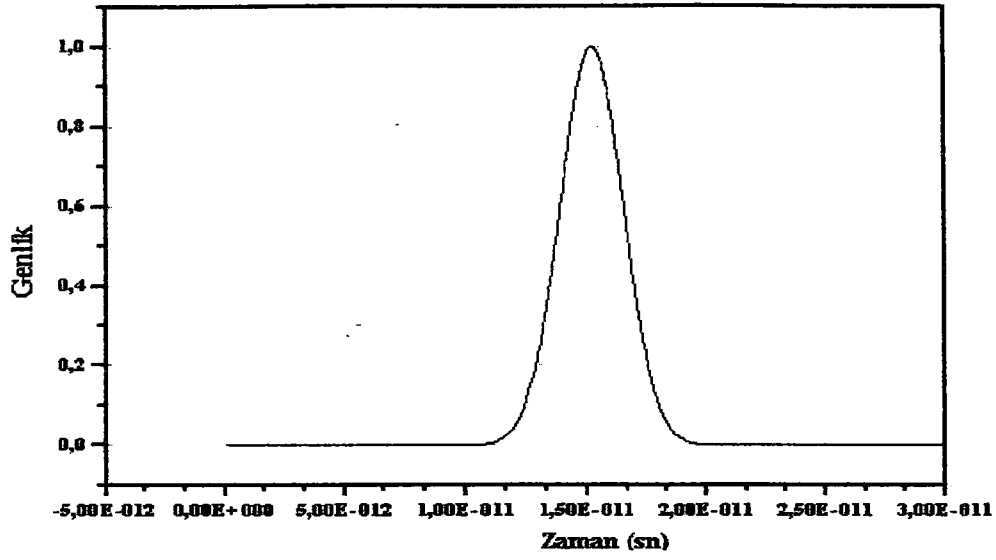
şeklinde tanımlanmaktadır [5]. Gauss darbesini zamanda sınırlı yapmak için T_{eff} değerini azaltıp B_{eff} 'i artırmak gerekir. Ancak uygun T_0 değerleri yardımıyla bu değişiklik çok küçük tutulabildiğinden, sınırlı gauss darbesinin T_{eff} ve B_{eff} değerleri orijinal gauss darbesininkilerle eşit kabul edilebilir.

Sonuç olarak gelen dalga denklemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

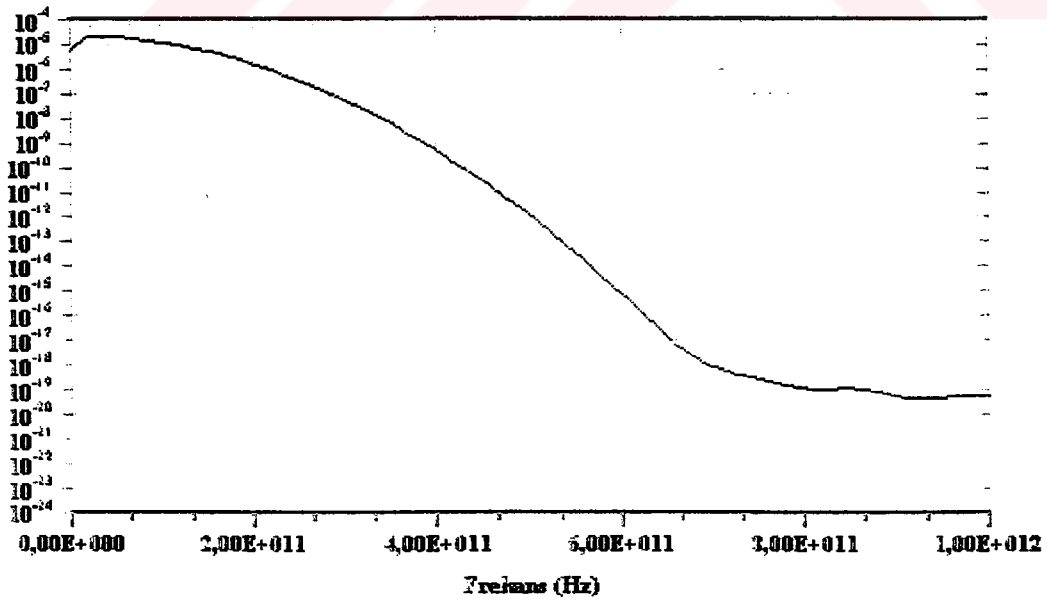
$$E_x^i(I, J, K)^n = E_x \cdot \exp(-\alpha(\tau - \beta \cdot \Delta t)^2) \quad (4.5)$$

α ve β seçilirken zaman adımının boyutu göz önüne alınmalıdır. β , gauss darbesinin tepe noktasından kesim noktasına kadar olan zaman adımının sayısıdır. Darbe $\tau=0$ 'dan $\tau=2 \cdot \beta \cdot \Delta t$ 'ye kadar mevcuttur. Tepe değer $\tau=\beta \cdot \Delta t$ 'dir. Kesim noktasının değerini α tayin eder. Kesim noktasının değeri maksimumdan $\exp(-\alpha(\pm\beta \cdot \Delta t)^2)$ kadar aşağıdadır

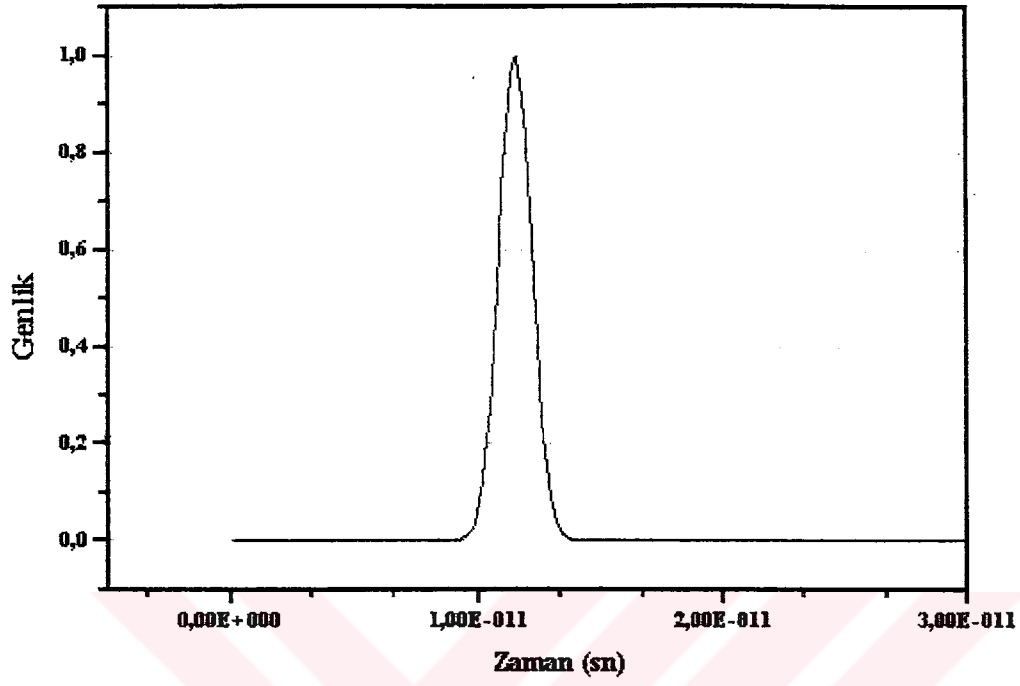
$\alpha=(4/(\beta \cdot \Delta t))^2$ alırsak kesim noktası maksimumdan $\exp(-16)$ yaklaşık 140dB aşağıda olur.



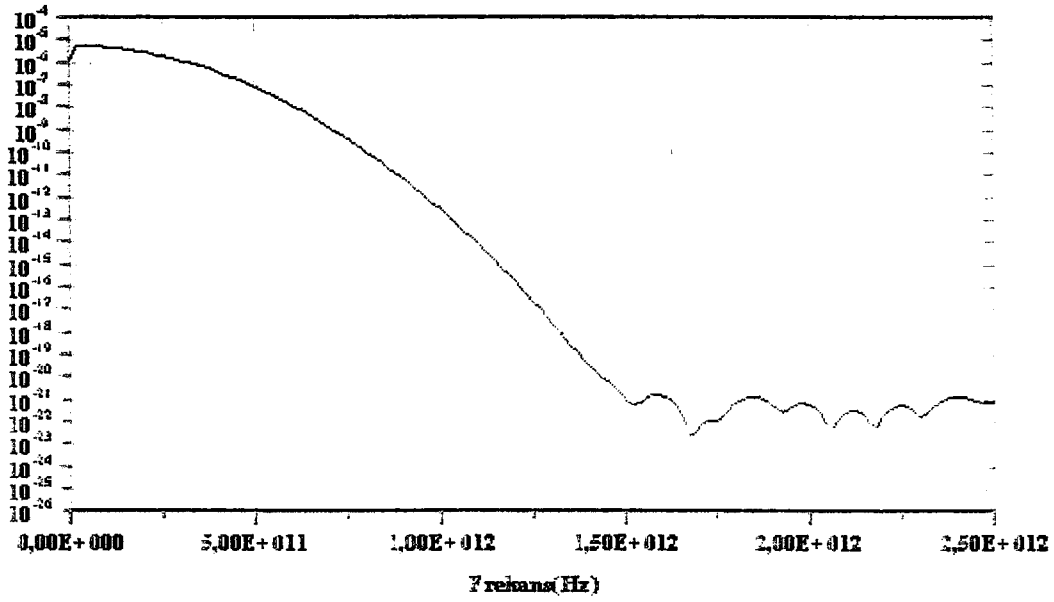
Şekil-4.2. Genişliği 64 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesi



Şekil-4.3. Genişliği 64 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesinin Frekans Spektrumu



Şekil 4.4. Genişliği 32 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesi



Şekil 4.5. Genişliği 32 Zaman Adımı Olan Gauss Darbesinin Frekans Spektrumu

Benzetimin başlangıcında, elektrik ve manyetik alanların tümü sıfırlanır. Gauss darbesi sadece toprak düzlemine dik alan bileşeni olacak şekilde uygulanır (bizim benzetim çalışmamız için bu bileşen E_y bileşenidir.)

Gauss darbesinin genişliği, istenilen kesim frekansına göre seçilebilir. Şekil 4.2’de genişliği 64 olan bir gauss darbesi ve şekil 4.3’de ise bu darbenin frekans cevabı gösterilmektedir. Şekil 4.4’de gauss darbesinin genişliği 32 alınmıştır dolayısıyla şekil 4.5’de de görüldüğü üzere bant genişliği azalmıştır.

4.4. İteratif Denklemlerde Kararlılık İçin Zaman Adımının Tespiti

Ayrıklaştırılıp sayısallaştırılan ZDSF denklemleri elektrik (magnetik) alan bileşenlerini kendilerinin bir önceki anda bulunan değerleri ve komşu hücrelerdeki elektrik (magnetik) alan bileşenleri cinsinden iteratif biçimde hesaplanmasına olanak sağlar. İteratif denklemler açık denklem sistemi oluşturduğundan her zaman sonlu çözümü garanti etmezler. İlgili denklemlerdeki konum ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) ve zaman Δt boyutları keyfi seçilemez. İteratif denklemlerin kararlı sonsuza gitmeyen sayısal çözümleri garantilemesi için bu hücre boyutları arasında önemli bir ilişki sağlanmalıdır. Courant kararlılık kriteri[4] denilen bu bağıntı zaman ve konum adımları arasında sağlanması gereken ilişkiyi belirlemektedir.

Courant kararlılık koşulunun temelini anlamak için ZDSF kafesi içinde yayılan bir düzlem dalgayı düşünelim. Bir zaman adımında bu dalga üzerinde herhangi bir noktadan bir hücreden daha fazlası geçmemelidir. Kafes boyutuna d , hücrelerin kenar uzunluğuna Δu , yayılım hızına da v dersek

$$v \cdot \Delta t \leq \frac{\Delta u}{d} \quad (4.6)$$

koşulu sağlanmalıdır. Üç boyutlu kafes için denklem (4.7)’de verilen koşul geçerlidir[4],[10].

$$v \cdot \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (4.7)$$

İletkenliği ($\sigma > 0$) sıfırdan büyük olan malzemeler için zaman adımı Courant limitinden küçük alınmalıdır. Ancak, hız olarak ışık hızı alındığından bu problem yaratmaz, çünkü malzeme içinde yayılım hızı ışık hızından daha küçüktür. Ayrıca Courant koşulunun sadece kararlılığı sağladığı ancak doğruluğu garanti etmediğini bilmek gerekir.

4.5. Sınır Koşulunun Tanımlanması

ZDSF yönteminde ele alınan elektromagnetik problemler yapıları açılarından

- Kapalı bölgelerde (Örneğin rezonatörler, dalga kılavuzları)
- Açık bölgelerde (örneğin anten, saçılma, vb.)

olmak üzere iki başlık altında toplanabilir. ZDSF'nin uygulanabilirliği açısından, kapalı bölgelerde sorun yoktur. ZDSF hacminin sınırları ele alınan kapalı bölgenin sınırları ile karşılaştırılarak sorun giderilmektedir. Örneğin, dalga kılavuzu içindeki elektromanyetik olay modellenecek ise, teğet elektrik alan duvarlar üzerinde sıfırdır ve bu durumda ayrıca sınır koşulu tanımına gerek duyulmaz.

Bir çok uygulamada, serbest uzay içerisinde yer alan yapılar modellenir ve alanların sınırsız uzayda yayılması veya saçılması istenir. ZDSF uzayı sınırlandırılmayı gerektirir ve saçılan ve yayılan alanlar sınıra ulaştıkları zaman önem alınmadığı takdirde problem uzayına geri yansiyabilirler.

Genellikle ZDSF problem uzayının sınırı, saçılan yada yayılan alanların sınıra ulaşması durumunda absorbe edecek şekilde seçilir. Böylece sınırsız uzayda yayılıyormuş gibi benzetim yapmak mümkün olabilir. Bu problemler için bir diğer

alternatif yöntem dış sınırdan yansımadan önce zaman ilerleyişini durdurmaktadır, ancak çoğu problem için uygun bir alternatif değildir.

Günümüze kadar yapılan çalışmalar neticesinde birçok sınır koşulu tanımlanmıştır ancak içlerinde en sık kullanılan sınır koşulları **Dispersive** ve **Mur** sınır koşullarıdır [11],[12].

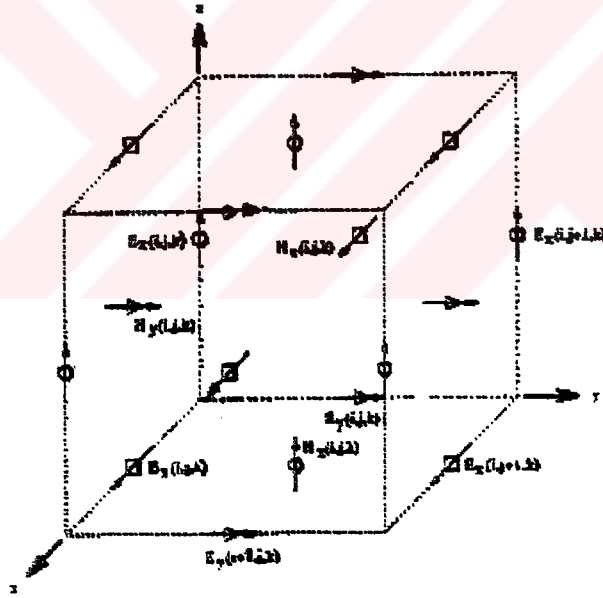
Zaman düzleminde elektromanyetik alan problemlerinin üç boyutlu sonlu farklar formülasyonu, saçılma problemlerinin çözümü için oldukça elverişlidir. Bu yöntemin temel avantajı, iletken, dielektrik ve manyetik engellere ister homojen olsun ister olmasın, kolay uygulanabilmesidir. Bu engeller keyfi şekillerde olabilir. Ayrıca sonlu farklar metodu Maxwell denklemlerinin çözümü için de oldukça elverişlidir. Sonlu farklar metodunda bir uzay-zaman kafesi oluşturulur ve Maxwell denklemleri, sonlu fark denklemleri sistemi ile kafes üzerine yerleştirilir. Bu yolla alan problemlerinin çözümü denendiğinde saçılma problemi gibi bir sorunla karşılaşılır. Yani alanın içinde bulunduğu düzlem sınırsızdır ancak bilgisayarda sınırsız sayıda veri saklanamayacağına göre alanın hesaplandığı düzlem sınırlandırılır. Bunun için sınırlı boyutta kafes kullanılır fakat engeli kapsayacak kadar geniş bir kafes olmalıdır ve doğruya yakın bir sonuç elde edebilmek için kafesin dış yüzeyinde gelen alanı absorbe edecek şekilde sınır koşulları kullanılmalıdır. Bu tip sınır koşullarına **açık sınır koşulları** adı verilir.

Maxwell denklemlerinin sonlu fark yaklaşımı için dış sınır koşulları ilk olarak Taylor tarafından tanımlanmıştır, bilinene dayalı tahmin metodunu kullanmıştır [13]. Taflove ve Brodwin giden dalgaların benzetimi konusunda çalışmışlardır [14], alternatif bir metod Taflove tarafından geliştirilmiştir. Taflove yapının etrafındaki bölgedeki kayıpların modellenebileceğini ortaya koymuştur. Böylece ilerleyen dalgalar ve yansıyan dalgalar absorbe edilebilecektir. Giden dalgaların verimii bir şekilde emilmesi ve doğru sonuçların elde edilmesi için bu yöntemde nispeten kalın bir iletken tabakanın kullanılması gerekir.

Merewether , Kunz ve Lee sınır koşullarını elde etmek için, saçıcının merkezinden uzak bir bölgede radyasyon koşullarını kullanmışlardır. Tanımlanan bu sınır koşulunun birinci yaklaşımları ne kadar kullanışlı olsa da, kafesin yakınında alanlar belirli bir yönde yayılmayıp yansımaya uğramaktadırlar.

Mur'un çalışmasında, Enquist ve Majda'nın çalışmaları temel alınmak suretiyle dış sınır koşulları tanımlanmıştır [15].

Şekilde (4.6)'da verilen yee hücresi üzerinde tanımlanan Maxwell denklemleri için sınır koşulu tanımı yapılırken sadece elektrik alanın üç bileşeni için tanım yapılması yeterlidir. Bu üç alan bileşeni, üç boyutlu skaler dalga denklemi olarak ifade edilebilir.



Şekil 4.6. Yee hücresinde alan bileşenlerinin yerleşimi

4.6. Tek Yönlü Dalga Denklemleri

Belili bir noktada kesilen ZDSF uzayında istenmeyen yansımalar oluşur. Bu yansımaların önüne geçmek için ZDSF uzayının sınırlarında hesap yapılmaz. Bu sınır noktalarındaki alan değerleri üç noktalarda hesaplanan değerler cinsinden beili bir denkleme uyacak şekilde yazılır. Bu denklemin seçimi yansımalar açısından

önemlidir. Seçilecek denklem, geriye yansımaları yok edecek yada en aza indirecek şekilde olmalıdır. Genelde yapılan; iki yönde dalga iletimini modelleyen dalga denklemini ileri ve geri giden bileşenlere ayırıp, geri giden kısmı sıfırlamaktır.

Enguist ve Majda [15] kartezyen kordinatlarda ZDSF uygulamalarındaki ABC ihtiyaçlarına uygun bir tek- yönlü dalga denklemi teorisi geliştirmişlerdir. Bu teori, kısmi türev operatörlerinin çarpanlara ayrılması yoluyla açıklanabilir. Bunun için öncelikle kartezyen kordinatlarda iki boyutlu bir dalga denklemi göz önüne alınmaktadır. U skalar bir alan bileşenini, c ise dalganın faz hızını göstermek üzere iki boyutlu dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde verilebilir. Burada kısmi türev operatörü

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda dalga denklemi

$$LU = 0 \quad (4.10)$$

Şeklinde yazılmaktadır. L dalga operatörü

$$LU = L^+ L^- U = 0 \quad (4.11)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Burada

$$L^- = D_x - \frac{Dt}{c} \sqrt{1-S^2} \quad (4.12a)$$

$$S = \frac{Dy}{(Dt/c)} \quad (4.12b)$$

$$L^- = D_x + \frac{Dt}{c} \sqrt{1-S^2} \quad (4.12c)$$

olarak tanımlanmaktadır. L^- (- x) yönünde, L^+ (+x) yönünde ilerleyen dalgalara ait operatörlerdir.

Enguist ve Majda [15], $x = 0$ sınırında U dalga fonksiyonuna

$$L^- U = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde L^- uygulandığında sınıra doğru herhangi bir α açısıyla gelen bir düzlem dalganın yutulacağını göstermiştir. Benzer şekilde, $x = x_{\max}$ sınırındaki düzlem dalga için L^+ operatörü aynı sonucu vermektedir.

(4.12) ile verilen denklemlerde L^- ve L^+ zaman ve konum değişkenlerine göre diferansiyel operatörlerini içermektedir. Aynı zamanda bu ifadeler de karekök içerisinde olabilmektedir. Bu haliyle operatörler sayısallaştırılmaya uygun değildir. Kareköklü ifade L^- ve L^+ 'yı hem konum hem de zaman değişkenleri içinde yerel olmayan sözde-diferansiyel operatörler haline getirdiği için, ABC olarak kullanılan (4.13) denkleminin doğrudan doğruya sayısal hale getirilmesini engellemektedir. Bu sorun kareköklü ifade normal kısmi diferansiyellerden oluşan bir seriye yaklaştırılarak çözümlenebilir ve ZDSF uygulamalarında sayısal olarak kullanılacak hale getirilebilir [5]. Verilen L^- ve L^+ operatörleri çok küçük S değerleri için

$$\sqrt{1-S^2} \cong 1 \quad (4.14)$$

şeklinde tek terimli Taylor serisi açılımı ile kullanılabilir. S değerinin çok küçük olması, ilerleyen dalganın y- eksenine göre olan türevinin; zamana göre türevinin ışık

hızına bölünmesi sonucunda elde edilen değerden çok daha küçük olması anlamına gelmektedir. Bu durumda (4.14) denklemi, (4.12a) eşitliğinde kullanılırsa

$$L^- \cong D_x - \frac{D_t}{c} \quad (4.15)$$

elde edilmektedir. (4.15) denklemi (4.13) eşitliği içine yerleştirilirse, $x = 0$ sınırı üzerinde sayısal olarak uygulanabilecek olan birinci-derece ABC eşitliği

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.16)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (4.12a) eşitliğindeki kareköklü ifade Taylor serisine açılır ve ilk iki terim alınırsa daha büyük S değeri için uygun olan

$$\sqrt{1-S^2} \cong 1 - \frac{1}{2}S^2 \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir [5]. Bu ifade (4.12a) eşitliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} L^- &\cong D_x - \frac{D_t}{c} \left(1 - \frac{1}{2}S^2\right) \\ &\cong D_x - \frac{D_t}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{cD_y}{D_t}\right)^2\right] \\ &\cong D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{cD_y^2}{2D_t} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilebilir. (4.18) denklemi (4.13) eşitliğine D_t ile çarpılarak ve diferansiyel operatörler kısmi türevler şeklinde kabul edilerek uygulanırsa $x = 0$ için ikinci dereceden ABC ifadesi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4.19a)$$

şeklinde elde edilir. Aynı ifade;

$x = x_{\max}$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4.19b)$$

$y = 0$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (4.19c)$$

$y = y_{\max}$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (4.19d)$$

olarak elde edilir.

Benzer işlemler 3D durumu için

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (4.20)$$

şeklinde verilen dalga denkleminde tekrarlanabilir. Burada kısmi türev operatörü

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (4.21)$$

şeklindedir. L operatörü (4.12a) bağıntısındaki gibi belirlenen ve $x = 0$ düzleminde yutuculuğu sağlayan L^- operatörünü verecek şekilde (4.11) denklemindeki gibi ayrıştırılabilir. Bu durumda sadece S tanımı

$$S = \sqrt{\left(\frac{D_y^2}{D_t/c}\right)^2 + \left(\frac{D_z^2}{D_t/c}\right)^2} \quad (4.22)$$

olarak değişmektedir.

3D için birinci-derece ABC, iki boyutlu durumda elde edilen (4.16) denklemindeki gibidir. Fakat iki - terimli Taylor seri açılımını kullanan ikinci-derece ABC koşulu 3D için farklıdır ve

$$\left(D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{c D_y^2}{2 D_t} + \frac{c D_z^2}{2 D_t}\right) \quad (4.23)$$

şeklinde belirlenmektedir. (4.23) denklemini D_t ile çarpılıp diferansiyel operatörleri kısmi türevler olarak yazılırsa

$x = 0$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24a)$$

$x = x_{\max}$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24b)$$

$y = 0$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24c)$$

$y = y_{\max}$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24d)$$

$z = 0$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4.24e)$$

$z = z_{\max}$ sınırında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4.24f)$$

olarak bulunmaktadır [5]. Gerek 2D gerekse 3D için elde edilen bu ifadeler sonlu farklar yaklaşımı ile ayrıklaştırılarak sınırlarda sağlaması gereken iteratif denklemlere ulaşılır.

4.7. Mur Tipi Sınır Koşulu

Yukarıda anlatıldığı gibi belirlenen ABC, Mur tarafından ZDSF algoritmasına uygun hale getirilmiştir [2]. Üç boyutlu durumda $x = 0$ sınırındaki ABC için sonlu fark denklemlerinin çıkarılması için öncelikle Yee birim hücresindeki

- Hücre, her koordinatta o eksene dik iki yüzeyle sınırlıdır. Bu yüzeyler (i,j,k) noktalarından geçmektedir.
- E elektrik alan bileşenleri bu yüzeylere teğet, H magnetik alan bileşenleri ise dik doğrultudadır.

özellikler göz önüne alınmaktadır [16].

Uygun FDTD iterasyonları ile bir sonraki hücreye ait elektrik ve magnetik alan bileşenleri hesaplanabilmektedir. Ancak sınır üzerindeki teğetsel elektrik alan bileşenlerinin değerleri bu şekilde elde edilemez; çünkü bu bağıntıda sınırın dışarısında yer alan magnetik alan bileşenlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden açık bölge sınır koşullarının, sadece yüzeye teğet elektrik alan bileşenleri için elde edilmesi yeterlidir [16].

Üç boyutlu durumda $x = 0$ sınırında birinci-derece Mur ABC E_z için çıkarılacak olursa

$$E_z^{n+1}(0, j, k) = E_z^n(1, j, k) + \frac{c_0 \Delta t - \delta}{c_0 \Delta t + \delta} (E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(0, j, k)) \quad (4.25)$$

elde edilmektedir [16]. İkinci-derece Mur ABC ise

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(0, j, k) = & -E_z^{n-1}(1, j, k) + \frac{c_0 \Delta t - \delta}{c_0 \Delta t + \delta} (E_z^{n+1}(i, j, k) \\ & + E_z^{n-1}(0, j, k)) + \frac{2\delta}{c_0 \Delta t + \delta} (E_z^n(0, j, k) \\ & + E_z^n(1, j, k)) + \frac{(c_0 \delta t)^2}{c_0 \Delta t + \delta} (E_z^n(0, j+1, k) - 2E_z^n(0, j, k) \\ & + (E_z^n(0, j-1, k)) + E_z^n(1, j+1, k) - 2E_z^n(1, j, k) \\ & + (E_z^n(1, j-1, k) + (E_z^n(0, j, k+1) - 2E_z^n(0, j, k) \\ & + (E_z^n(0, j, k-1) + (E_z^n(1, j, k+1) \\ & - 2E_z^n(1, j, k) + (E_z^n(1, j, k-1)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.8. Dağıtıcı Sınır Koşulu (DBC)

İkinci derece MUR tipi sınır koşulu gibi sınırdaki teğetsel alanların ikinci derecedenine türevlerinden ibarettir; bu da teğetsel bileşenlerin birinci türevlerinin

sürekliliğini zorunlu kılmaktadır. Ancak, mikroşerit hatlarda, hava-dielektrik sınırı boyunca süreksizdirler; bu da teğetsel türevin tanımsız hale gelmesine yol açmaktadır. Buna ek olarak, teğetsel bileşenlerin ikinci dereceden türevlerinin hesaplanabilmesi için yan hücrelerdeki alanların değeri de gerekmektedir. Ancak bu durumda sınırların köşelerindeki hücrelerde değerleri bilinmeyen alan bileşenleri hesaplamaya girecektir. Bu özellikleri nedeniyle ikinci-derece MUR tipi sınır koşulları mikroşerit hatlar için uygun değildir.

Birinci derece MUR tipi sınır koşulu ise, sadece tek bir frekanstaki dalgaları yutabilmektedir.

Dağıtıcı sınır koşulu olarak tanımlanan DBC (Dispersive Boundary Condition) [17], daha geniş bir frekans bandı üzerinde etkili olmaktadır. Bir mikroşerit yapıda, güç akışının büyük bir kısmı klavuzlanma yönünde, yani metal şerit doğrultusundadır. Metal şeritin klavuzlama özelliği iyi ve dielektrik sabitin değeri yüksekse sızıntı ve yükselti çok azalacaktır ve tek boyutlu yayıma denk hale gelecektir. Bu özellikler göz önünde bulundurulursa, yansıyan dalgalar için tek boyutlu sınır koşulu kullanılabilir.

Tek boyutlu yayımda, dalga denklemi

$$(\partial_z^2 - v_i^{-2} \partial_t^2)E = 0$$

$$(\partial_z - v_i^{-1} \partial_t)(\partial_z + v_i^{-1} \partial_t)E = 0 \quad (4.27)$$

şekindedir [6]. Burada (-)'li terim ilerleyen, (+)'lı terim yansıyan dalgalara karşı düşmektedir. Sayısal yöntemlerde yapay sınır koşulları yansıyan terimlerin yutulması için kullanıldığından, yansıyan dalga

$$(\partial_z + v_i^{-1} \partial_t)E = 0 \quad (4.28)$$

şeklinde yok edilebilir [17]. Ancak, bu koşul sadece frekansı v_i hızına karşı düşen dalga için etkili olacaktır. bunun sonucunda da sınırlardan yansıyan enerji, diğer

frekanslardaki dalgalar nedeniyle oldukça artabilecektir. Ama (4.28) eşitliğindeki koşul, birden fazla hız için uygulanabilir.

$$(\partial_z - v_1^{-1}\partial_t)(\partial_z + v_2^{-1}\partial_t)E = 0 \quad (4.29)$$

Bu tip bir sınır koşulu, v_1 ve v_2 hızlarıyla ilerleyen her türlü düzlemsel dalga kombinasyonunu yutma özelliğine sahiptir.



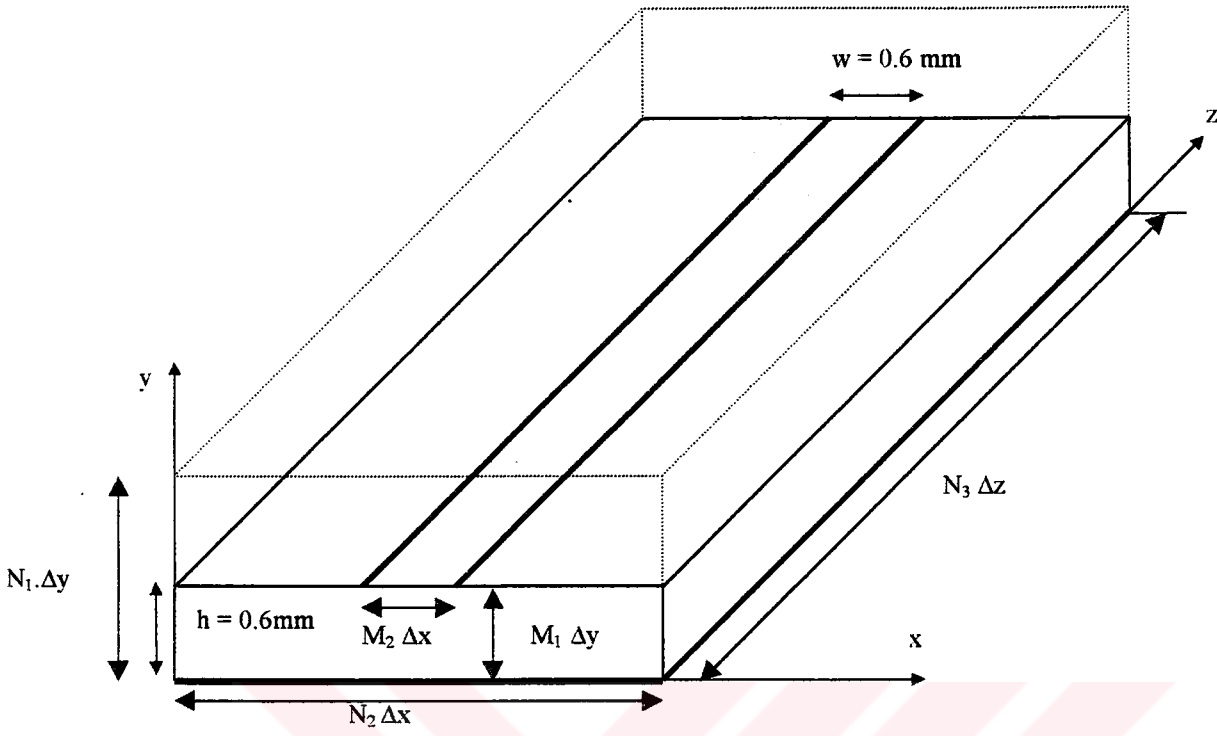
BÖLÜM 5. MİKROŞERİT DEVRELERE ZDSF METODUNUN UYGULANMASI

5.1. ZDSF Metodu Uygulanan Mikroşerit Hattın Yapısı

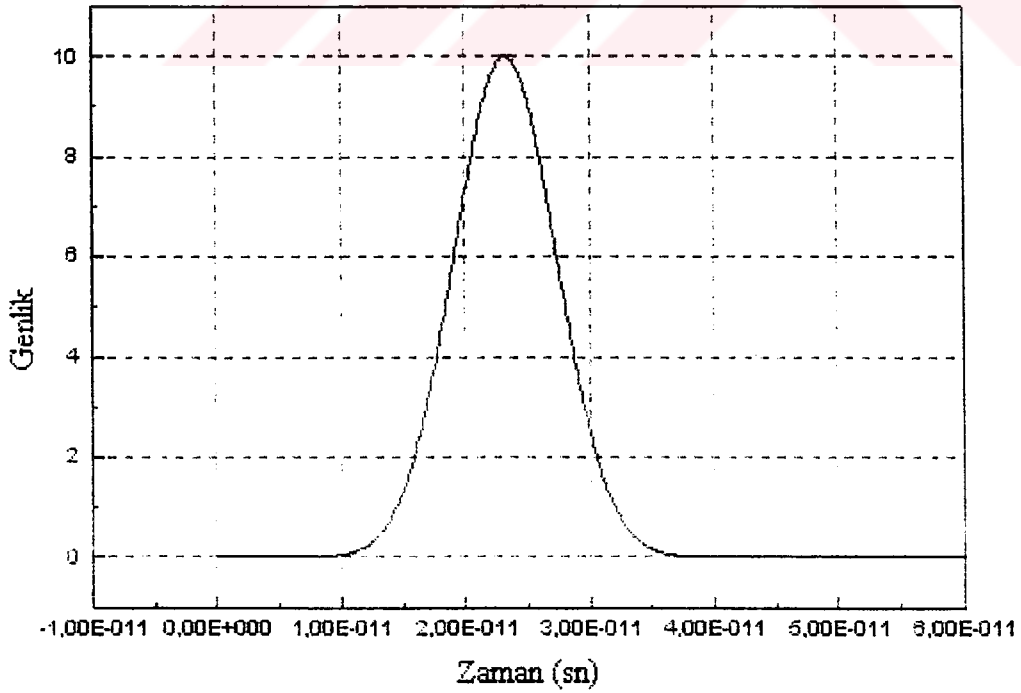
Mikroşerit hattın yapısı programda üç boyutlu olarak tanımlanmıştır. $y=0$ düzlemi tamamen iletken bir malzeme ile kaplanmış, onun üzerine h yüksekliğinde dielektrik malzeme yerleştirilmiş, dielektriğin en üst kısmına ise w genişliğindeki iletken şerit konmuştur. Burada şeritin ve alttaki iletkenin kalınlığı $t=0$ alınmıştır. Şekil 5.1'de programda tanımlanan mikroşerit hattın yapısı görülmektedir.

Programda kafes yapısını oluşturan hücrelerin kenarları $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.06$ mm alınmıştır. Courant koşulunun en kötü halde bile sağlanabilmesi için, $c =$ ışık hızı olmak üzere, $\Delta t = \Delta x / c\sqrt{3}$ kabul edilmiştir. ZDSF mantığına uygun olarak, programda $n.\Delta t$ anlarında elektrik alanlar, $(n+1/2).\Delta t$ anlarında manyetik alanlar hesaplanmıştır. Her zaman adımının sonunda ise, incelemesi yapılacak olan sınır koşulu uygulanmıştır.

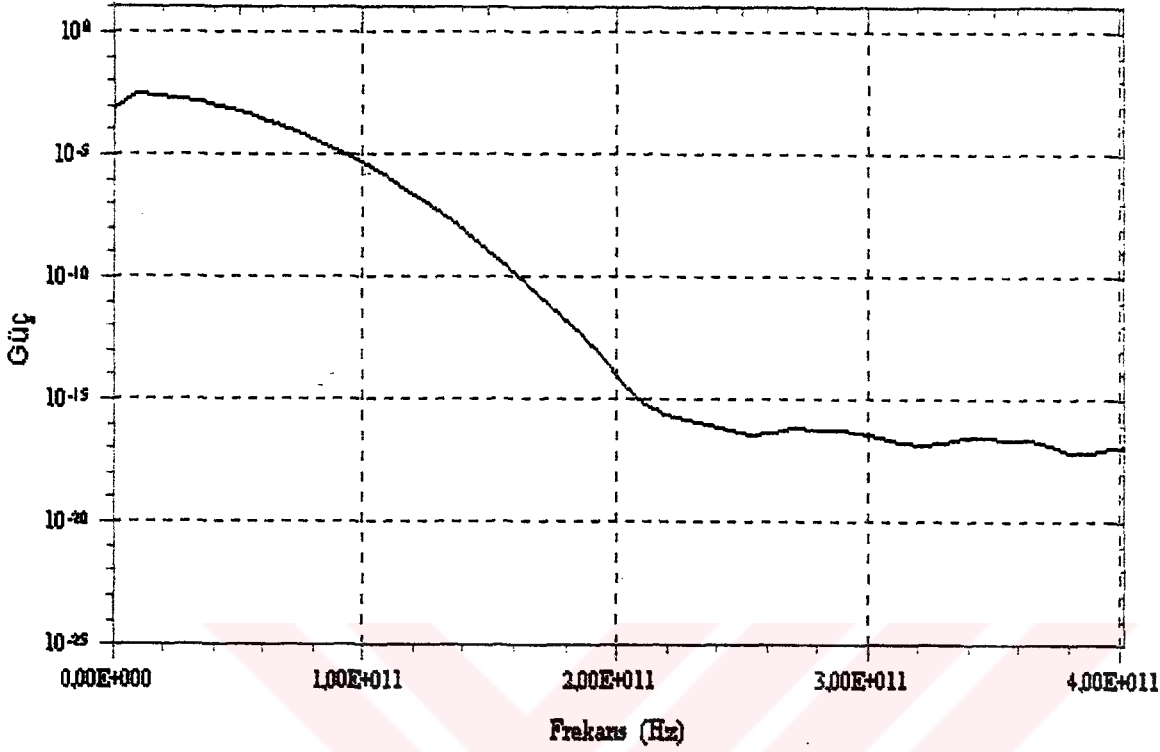
Programda uyarma kaynağı olarak Gauss fonksiyonu kullanılmıştır. Bu kaynak, bir $z =$ sabit düzlemi üzerinde, doğrudan elektrik alanın y bileşenine eklenmek suretiyle uygulanmıştır. Gauss fonksiyonu, programda, $e^{-\alpha(t-\beta.\Delta t)^2}$, $\alpha=(4/\beta\Delta t)^2$ şeklinde kullanılmıştır. β değeri arttığında işaretin periyodu artarken, frekans spektrumu küçülmektedir. ZDSF metoduyla inceleme yapılırken, uygulanan kaynağın frekans bandının dışındaki sonuçlar aniam raşımadiğundan gauss fonksiyonunun frekans spektrumu hakkında bilgi sahibi olunması gerekmektedir [18],[10]. Şekil 5.2'de uygulanan gauss darbesi, Şekil 5.3'de ise gauss darbesinin frekans spektrumu görülmektedir.



Şekil 5.1. Mikroşerit Hat



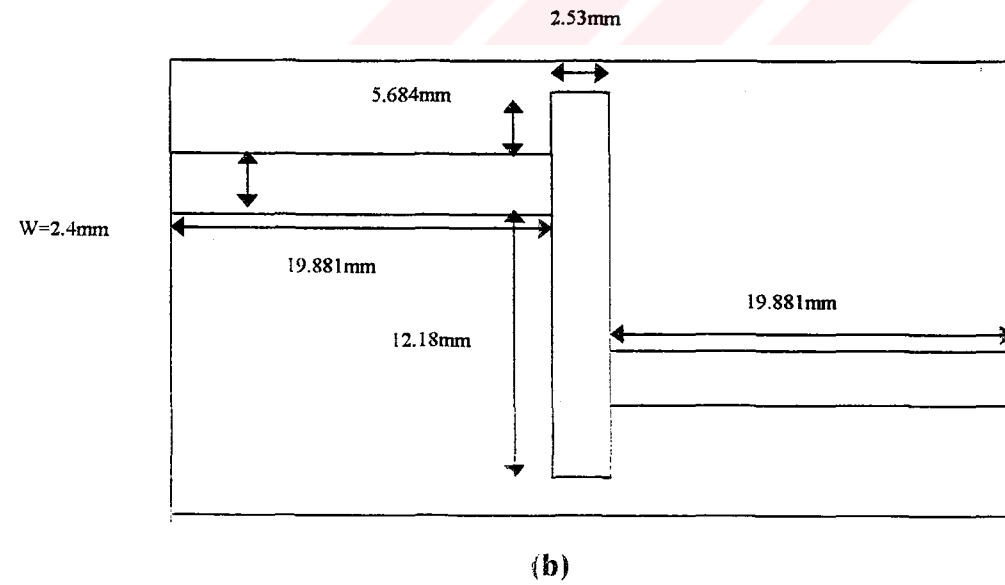
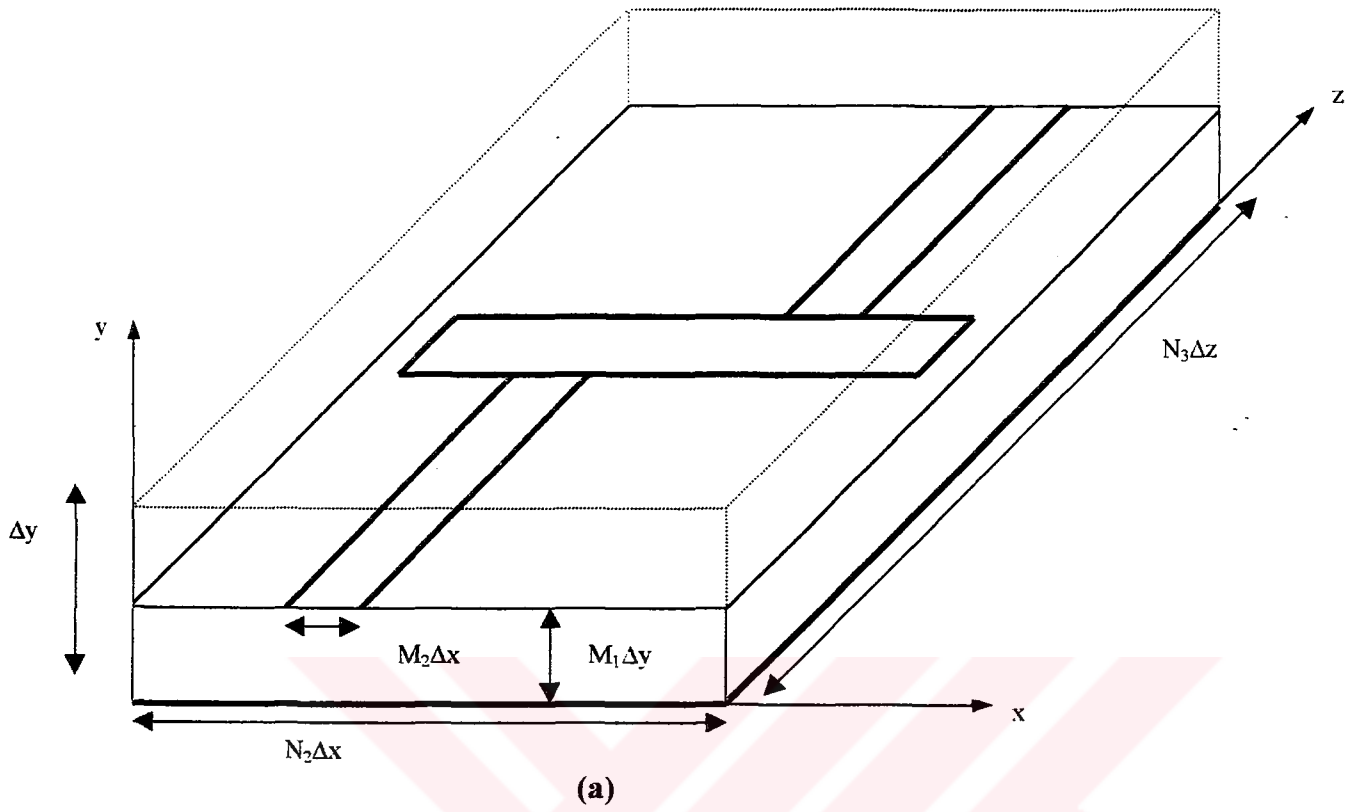
Şekil 5.2. Mikroşerit Hattta Uygulanan Gauss Darbesi



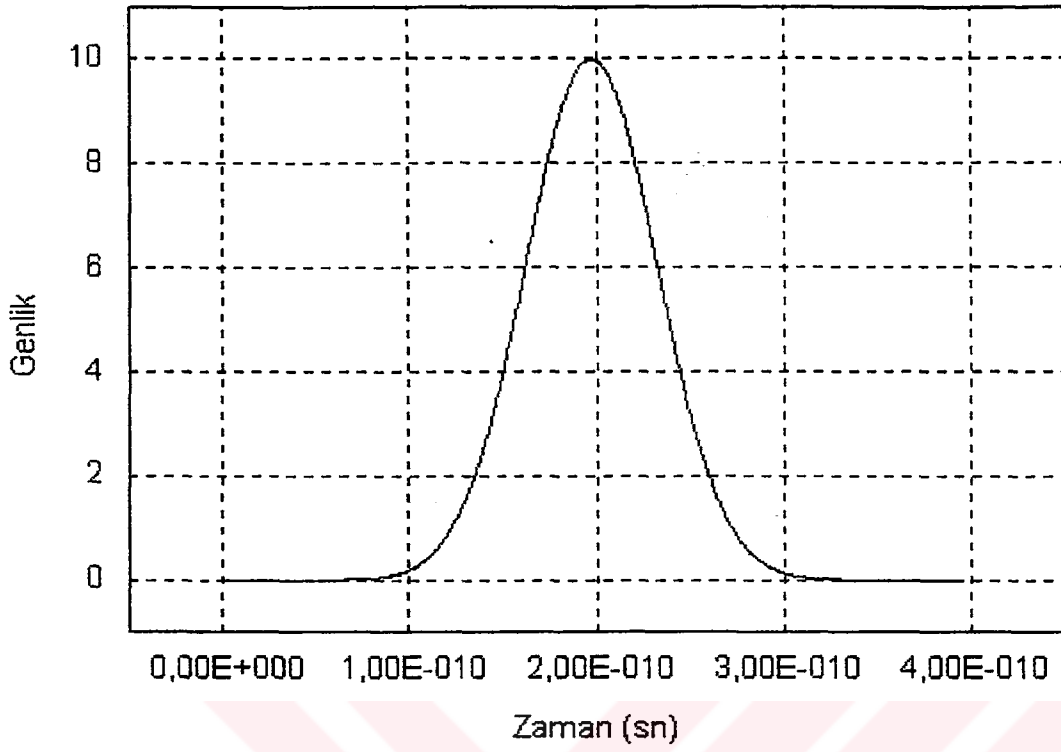
Şekil 5.3. Gauss fonksiyonunun frekans spektrumu

5.2. ZDSF Metodu Uygulanan Mikroşerit Filtrenin Yapısı

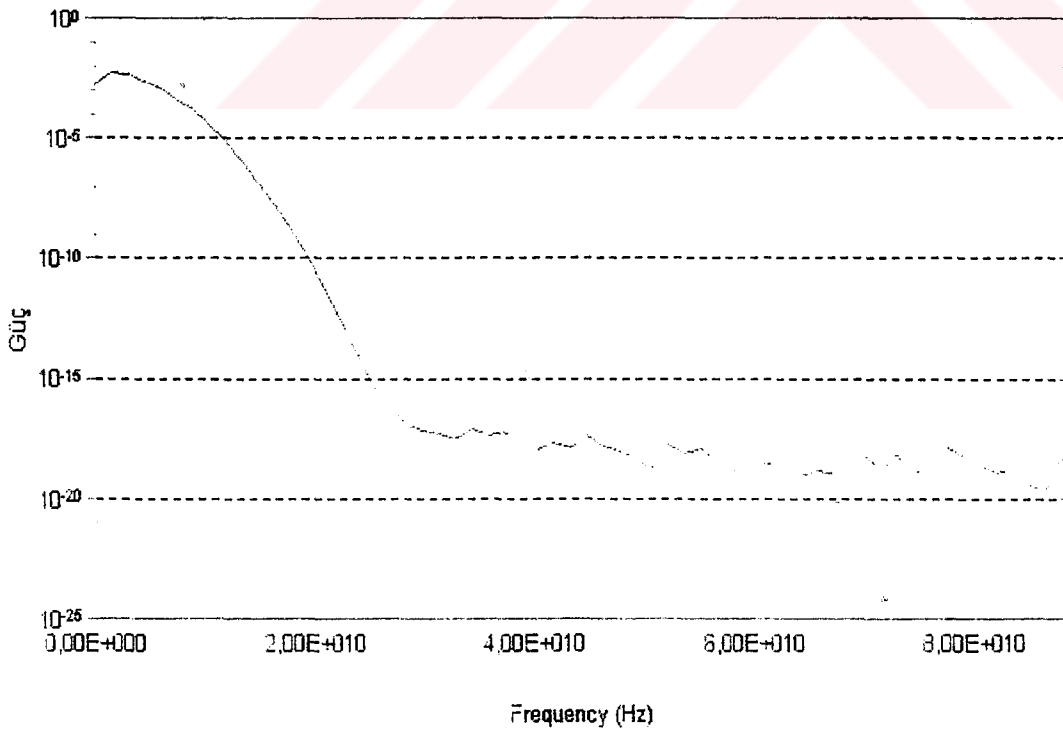
Mikroşerit hatlı devrelere ait ikinci bir örnekte alçak geçiren filtreye aittir Şekil 5.4.a ve Şekil 5.4.b'de devrenin üstten ve yandan görünüşü verilmiş, mm olarak ölçüleri gösterilmiştir. ZDSF uzayında hücre boyutları $\Delta x=0.406\text{mm}$, $\Delta y=0.265\text{mm}$, $\Delta z=0.423\text{mm}$, mikroşerit yüksekliği $h=0.8\text{mm}$ ve mikroşerit genişliği de $W=2.4\text{mm}$ alınmıştır. Z yönünde hücre indisi k olmak üzere $k=20$ 'de kaynak uygulanmış ve $k=50$ ve $k=80$ de $G1$ ve $G2$ S_{21} 'in elde edilmesi için gözlem noktaları olarak seçilmiştir. Toplam simülasyon adım sayısı hatta oranın çok daha fazla seçilmiş, $NSTOP=400$ alınmıştır. Devrede ardışıl yansımaların giriş ve çıkışa ulaşan geç zaman bileşenleri vardır ve bunlar zamanda çok küçük genliklerde olsalar, devrenin frekans cevabını doğrudan belirlemektedir[19].



Şekil 5.4. Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtre



Şekil 5.5. Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtreye Uygulanan Gauss Darbesi



Şekil 5.6. Gauss fonksiyonunun frekans spektrumu

5.3. Programın Tanıtımı

Mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtrenin ZDSF yöntemi ile analizi için FORTRAN diliyle program yazılmıştır. Program ZDSF.FOR ana programı ile verilerin okunduğu DATA.FOR programından ibarettir. DATA.FOR programında hücre ve problem uzayının boyutları, uygulanan gauss darbesinin genliği, kaynağın uygulandığı hücrelerin konumu ve zaman adımı sayısının yanı sıra programda yer alan bütün parametrelerin değerleri verilmiştir. ZDSF.FOR programı ana ve alt programlardan meydana gelmiştir. Ana programda elde edilecek verilerin kaydedileceği veri dosyaları açılmış ve alt programlara dallanmalara yer verilmiştir. Alt programların işlevleri ise aşağıda açıklanmıştır.

SIFIR Alt Programı: Bu alt programda başlangıç koşulu olarak bütün değişkenlere sıfır değeri atanır.

YAPI ve YAPI2 Alt Programları: Mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtrenin yapısı tanımlanır. Yee hücresindeki alan bileşenlerinin içinde bulunduğu malzeme tipleri belirlenir.

HESAP Alt Programı: Program içerisinde kullanılacak değişkenlerin hesapları yapılır.

Alan Hesaplarının Yapıldığı Alt Programlar: EXALAN,EYALAN ve EZALAN alt programlarında elektrik alan bileşenleri , HXALAN, HYALAN ve HZALAN alt programlarında ise manyetik alan bileşenlerinin hesabı yapılır. EYALAN alt programında ayrıca belirli zaman adımlarında E_y bileşenlerinin değerleri veri dosyalarına kaydedilir.

DATSAV Alt Programı: Mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtrenin üzerinde referans alınan noktalarda istenilen alan bileşenlerinin değerleri veri dosyalarına kaydedilir.

Sınır Koşullarının belirlendiği Alt Programlar: MURX, MURY, MURZ alt programlarında problem uzayının sınırlarına Mur, SINIRX, SINIRY, SINIRZ alt programlarıyla da Dağıtıcı sınır koşulları uygulanır.

GERILIM Alt programı: Referans seçilen bir gözlem noktasında gerilim değerleri hesaplanır ve veri dosyasına kaydedilir. Yansıma katsayısı hesaplanırken bu veri dosyasında yer alan gerilim değerleri kullanılır.

5.4. Sayısal Sonuçlar

Bu çalışmada Zaman düzleminde sonlu farklar metodu ile, Şekil 5.1’de verilen mikroşerit hat ve Şekil 5.4’de verilen mikroşerit hatlı alçak geçiren filtre analizi yapılmıştır. Mikroşerit hat için kullanılan parametrelerin değerleri aşağıda verilmiştir.

Dielektrik tabakanın kalınlığı : $h = 0.6 \text{ mm}$

Metal şeritin genişliği : $w = 0.6 \text{ mm}$

Metal şeritin kalınlığı : $t = 0$

Problem uzayının oluşturulmasında aşağıda verilen parametreler kullanılmıştır.

Hücre boyutu $\Delta h = h / 10 = 0.06 \text{ mm}$;

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$;

$N_1 = 20, N_2 = 60, N_3 = 150, M_1 = M_2 = 10$

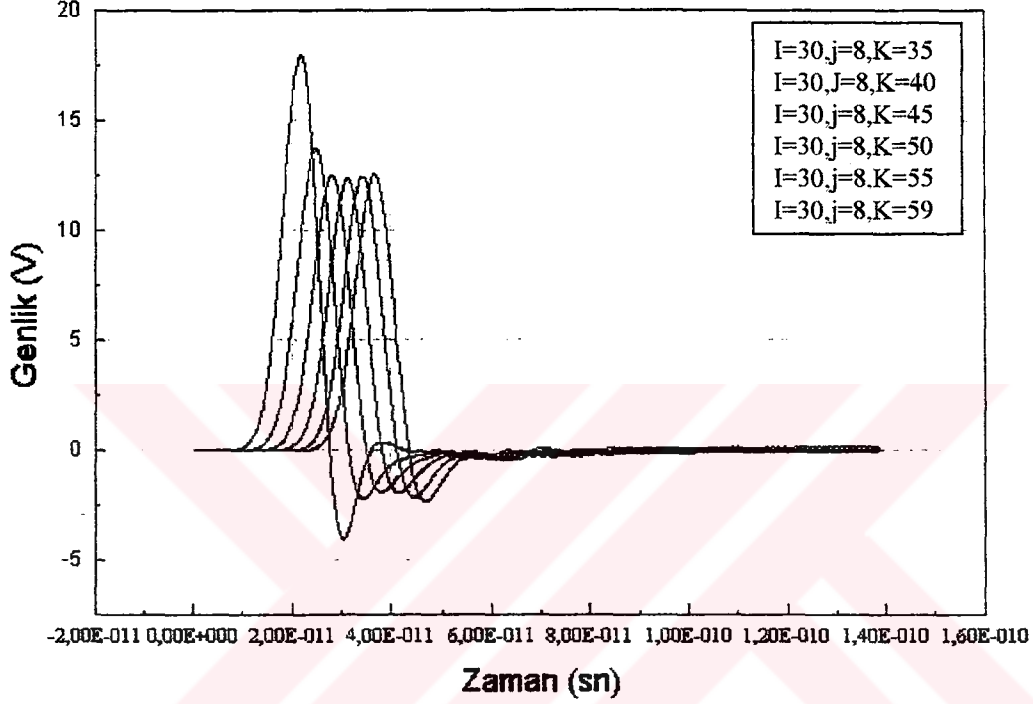
Zaman adımının tespitinde courant kararlılık koşulu kullanılmıştır. Bu koşul kullanılarak zaman adımı ,

$$c.\Delta t \leq \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{(6.10^{-3})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

$$\Delta t = 0.11547 \text{ ps}$$

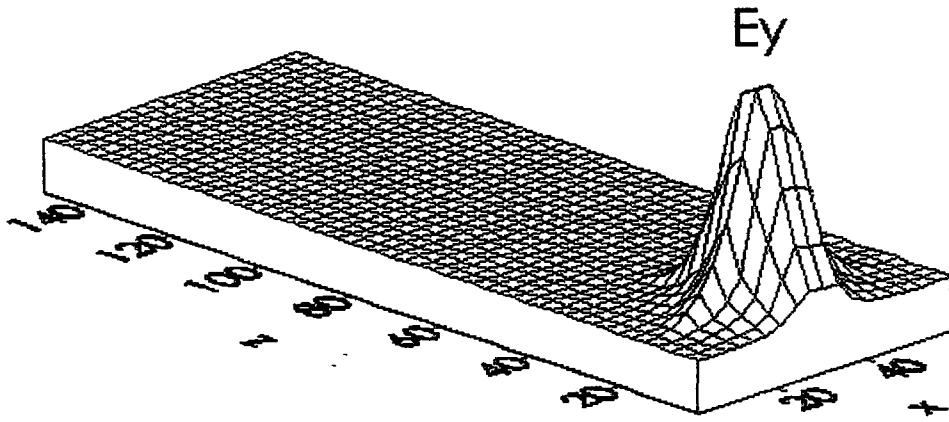
bulunur.

Mikroşerit hat'a DBC ve MUR sınır koşulları ayrı ayrı uygulanıp E_y elektrik alan bileşeninin referans alınan noktalarda zamana göre değişimi her iki sınır koşulu içinde simüle edilmiştir.

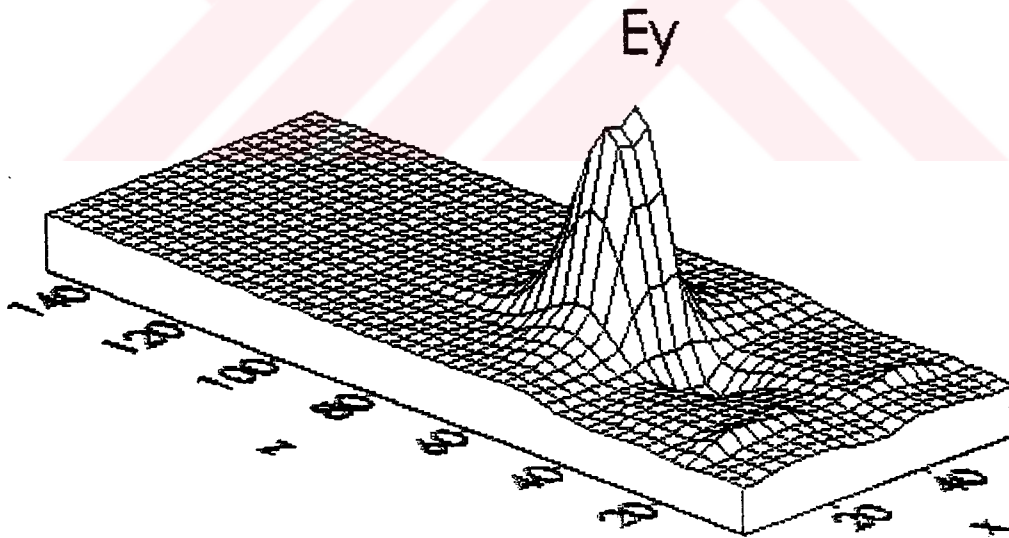


Şekil 5.7. Dağıtıcı Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat Üzerinde Elektrik Alan Bileşeni E_y 'nin Zamana Göre Değişimi

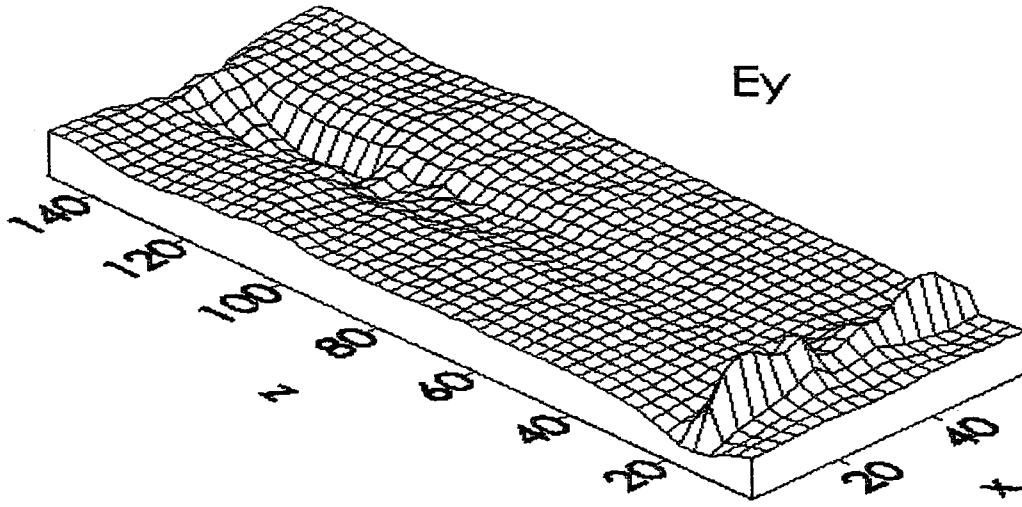
Şekil 5.7'de verilen zaman analizi I, ve J'nin sabit değerleri için K değiştirilerek yapılmıştır. Şekilden de görüldüğü gibi E_y alan bileşeni mikroşerit hat boyunca (z-ekseni yönünde) ilerlemektedir. Kaynağa yakın bölgede darbe genliği yüksektir, ancak birkaç zaman adımı sonrasında genlikte ani bir düşme meydana gelmekte ve yayılım kararlı bir hal almaktadır. Hat sonundan göz ardı edilebilecek derecede az yansıma olmakta alan bileşeni sonsuz uzun bir hat boyunca yayılıyormuş gibi davranmaktadır.



Şekil 5.8.a. $200\Delta t$ Zaman Adımındaki



Şekil 5.3.b. $400\Delta t$ Zaman Adımındaki



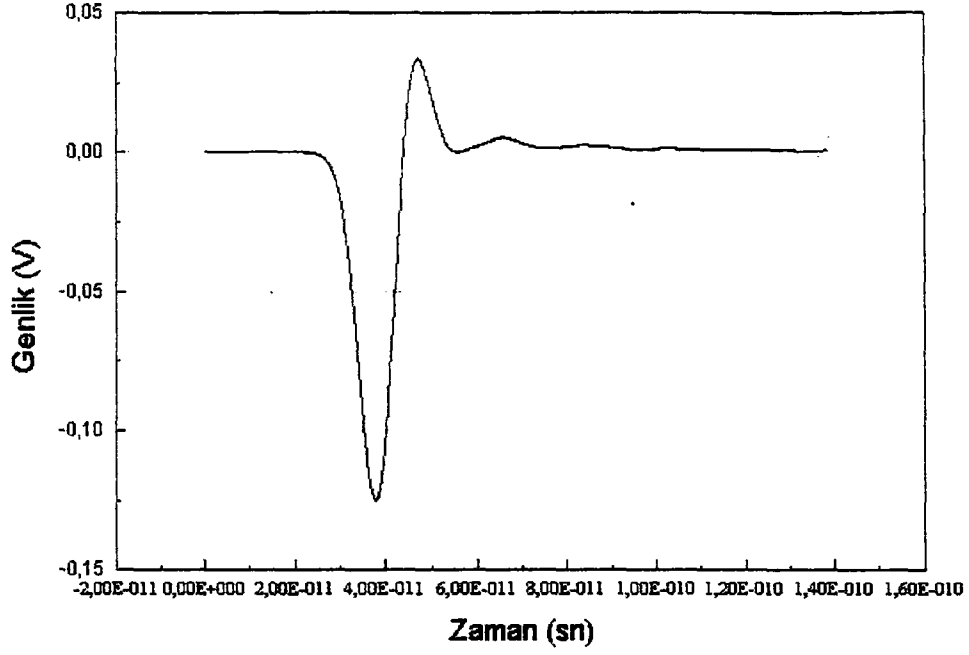
Şekil 5.8.c. 1000Δt Zaman Adımındaki

Şekil 5.8. Değişik zaman adımlarında Dispersive Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı

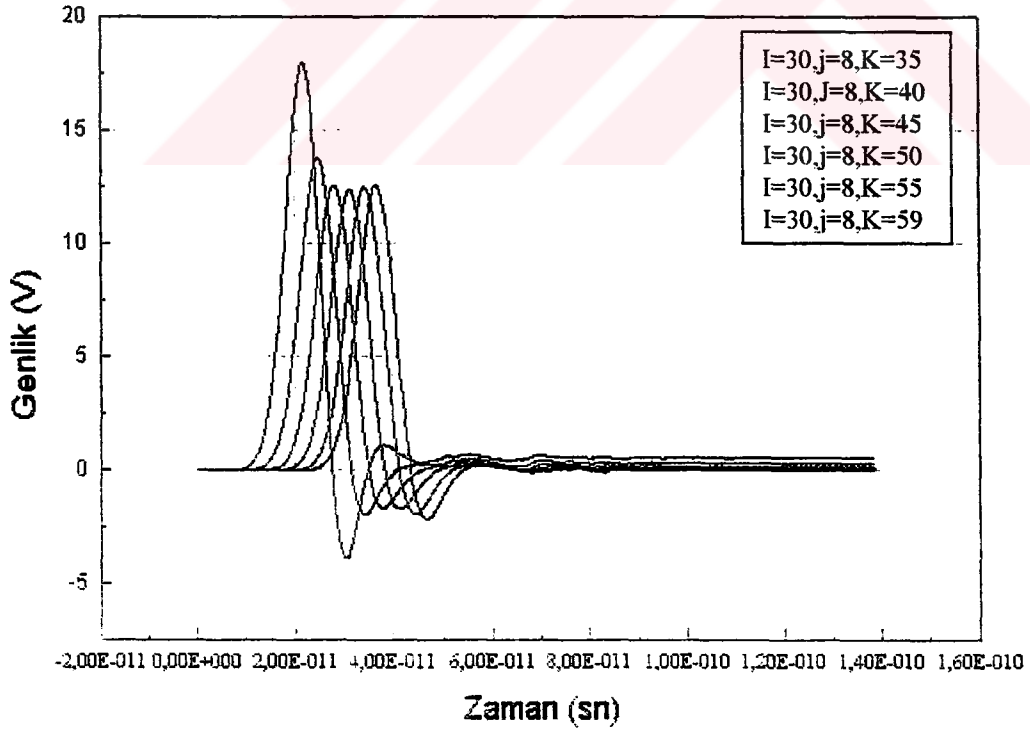
Şekil 5.8'de görüldüğü gibi enerjinin büyük bir kısmı şeritin altında, z- doğrultusu boyunca iletilmektedir. 1100. Zaman adımıında dalganın çok az bir kısmının geri yansıdığı ve ilerleyişini problem uzayının devamında sürdürüyormuş izlenimini verdiği görülmektedir. Bu da istenen bir durumdur çünkü mikroşerit hattın sonsuz uzun olduğu kabul edilmiştir, dolayısıyla sınırdan yansımalar olmamalıdır.

Şekil 5.9' da $k=70$ düzleminde gerilimin zamana göre değişimi verilmiştir. Gerilim hesabı yapılırken, " $z=70$ " ve " $x=$ metal şeridin orta noktası" alınarak, metal şerit ile

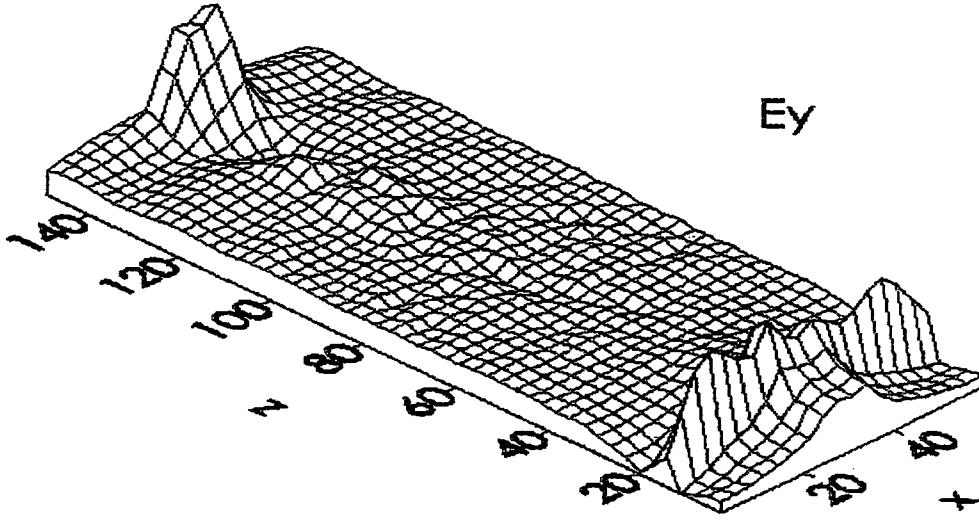
dielektriğin altındaki iletken tabaka arasındaki $\int_0^h E_y dy$ hesaplanmıştır.



Şekil-5.9. $k=70$ Düzleminde Gerilimin Zamana Göre Değişimi

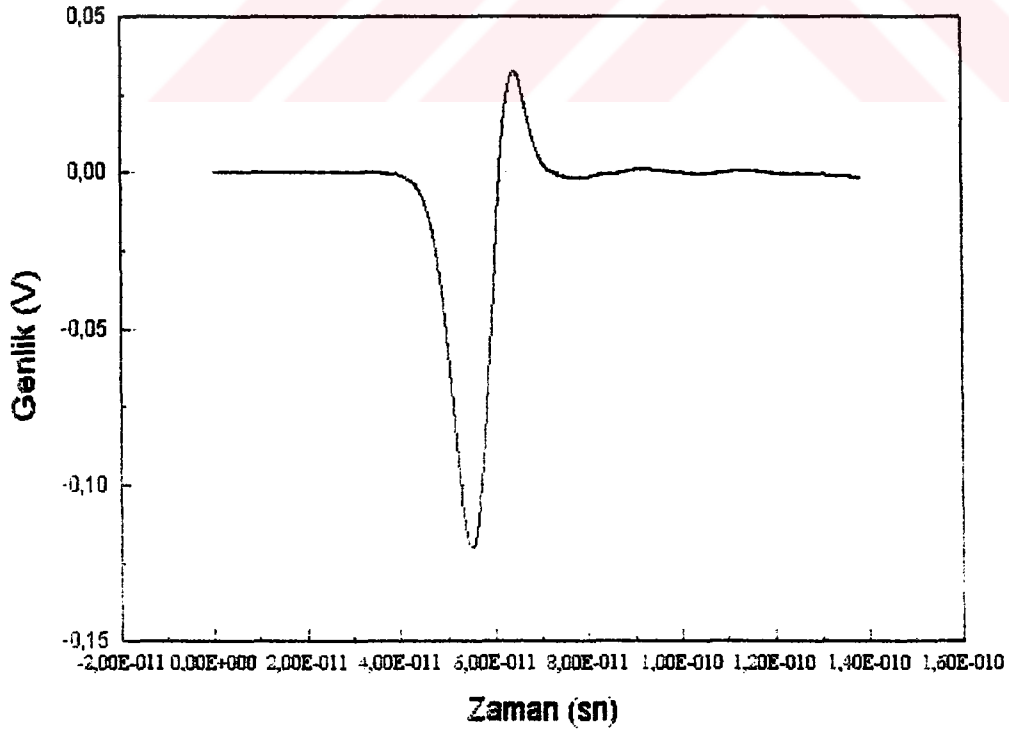


Şekil 5.10. Mur Sınır Koşulu uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat üzerinde Elektrik alan bileşeni E_y 'nin Zamana göre değişimi.



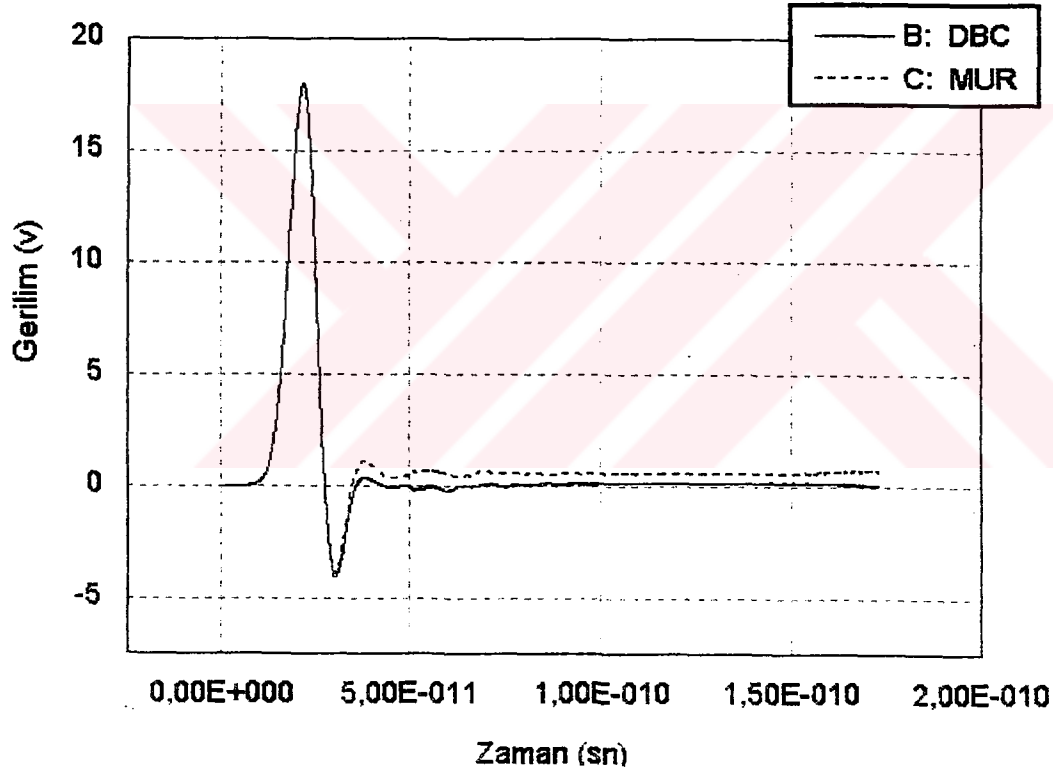
Şekil 5.11.c. $1000\Delta t$ Zaman Adımındaki

Şekil 5.11. Değişik Zaman adımlarında Mur Sınır Koşulu uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı



Şekil-5.12. $k=70$ Düzleminde Gerilimin Zamana Göre Değişimi

Dağıtıcı sınır koşulu(DBC) ve Mur sınır koşullarının ayrı ayrı aynı mikroşerit hatta uygulanmasıyla elde edilen simülasyon sonuçlarından DBC'nin daha iyi yutma özelliği gösterdiği, yani sınıra ulaşan dalganın ilerleyişini problem uzayının devamında sürdürüyormuş izlenimi vererek, ilgili dalganın çok az bir kısmını yansıtmıştır. Şekil 5.8.c'de DBC uygulanan mikroşerit hattaki elektrik alan bileşeni E_y , 1000.zaman adımıında hattı terk ediyormuş gibi davranırken, çok az bir yansıma gözlemlenmektedir. Oysa Şekil 5.11.c'de Mur sınır koşulunun uygulandığı aynı hat üzerinde ve aynı zaman adımıında, hattın üst ve kenar sınırlarından oldukça büyük yansımalar olduğu açık bir şekilde görülebilmektedir.



Şekil 5.13. Sonsuz Uzunluktaki Mikroşerit Hat üzerinde E_y alan bileşenin Farklı Sınır Koşullarında Zamana Göre Değişimi

Şekil 5.13'den de görüleceği gibi dağıtıcı sınır koşulu (DBC) uygulanması durumunda sınırdan yansımalar MUR tipi sınır koşuluna göre daha az olmaktadır.

5.5. Yansıma Katsayısının Hesaplanması

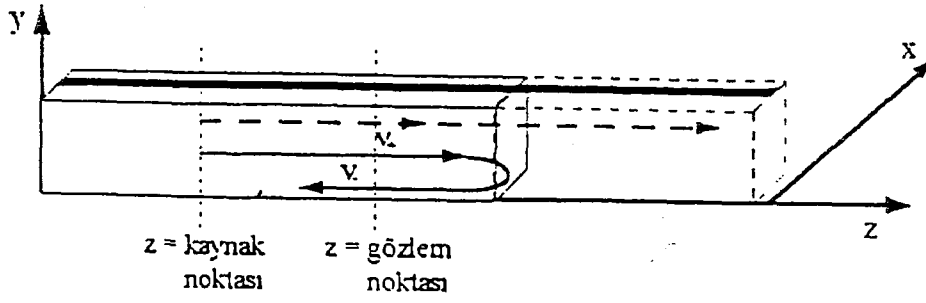
Zaman düzleminde sonlu farklar metodu ile incelenmekte olan bir mikroşerit hat, geçirgen bir yapıya sahip olduğu için, sınır koşulları uygulandığı zaman yansıma katsayısının mümkün olduğunca sıfır değerine yakın olması gerekmektedir.

Yansıma katsayısı $\Gamma = V_- / V_+$ şeklinde tanımlanmaktadır. En yüksek enerji z-doğrultusunda taşındığı için yansıma katsayısının özellikle $z=z_{\max}$ düzleminde gelen yansımaları gösterecek şekilde belirlenmesi yeterli olacaktır. Bunun için programda öncelikle, “z = herhangi bir nokta “ ve “ x = metal şeritin tam orta noktası ” olarak alınmış ve bu çizgi boyunca, metal şeritle dielektriğin altındaki iletken tabaka

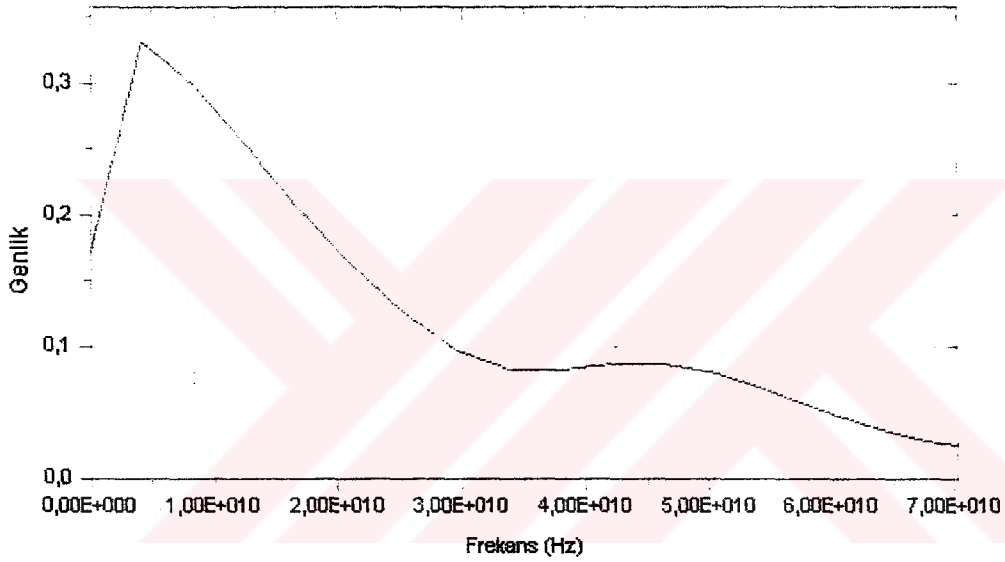
arasındaki $\int_0^h E_y dy$ hesaplanmıştır. Bu da, seçilen x,z için y = h noktası ile y = 0

arasındaki potansiyel farkına denk düşmektedir. Tüm yüzeye ait yansıma katsayısı ile ilgilenildiği için, bütün x noktalarındaki gerilim değerleri toplanarak gözlem yüzeyindeki potansiyel değeri bulunmuştur. Ancak yansıma katsayısının hesaplanabilmesi için hem “ V_- = yansıyan gerilim “ hem de “ V_+ = ilerleyen gerilim “ değerlerinin ayrı ayrı bulunması gerekmektedir.[11]

Programda NX, x- doğrultusundaki, NY, y- doğrultusundaki, NZ ise z- doğrultusundaki hücre sayısını; NSON da kaç tane zaman iterasyonu uygulanacağını belirlemektedir. V_+ potansiyelinin hesaplanabilmesi için , NZ, ilerleyen dalganın NSON süresince $z = z_{\max}$ düzlemine çarpıp $z=$ gözlem düzlemine ulaşamayacağı kadar büyük seçilmiştir. Böylelikle, gözlem noktasında hesaplanan gerilim sadece V_+ potansiyeline eşit olmuştur. Daha sonra, NZ ilerleyen dalganın NSON süresince $z=z_{\max}$ düzlemine ulaşıp buradan yansıyarak $z=gözlem$ düzlemine ulaşabilmesini sağlayacak şekilde seçilmiş ve gerilim hesabına hem ilerleyen hem de yansıyan terimler girdiği için gözlem noktasında $V_T = V_+ + V_-$ potansiyelinin değeri bulunmuştur.(Şekil 5.14. 'de bu yöntemin nasıl uygulandığı görülmektedir). Daha sonra V_- / V_+ hesaplanmış ve fourier dönüşümü alınarak yansıma katsayısının değeri sonsuz uzun hat için frekans düzleminde hesaplanmıştır. (Şekil 5.15.)



Şekil 5.14. Yansıma Katsayısının Hesaplanması İçin Kullanılan Ölçüm Modeli



Şekil 5.15. Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat için Yansıma Katsayısı

ZDSF yöntemiyle ikinci uygulama olarak seçilen mikroşerit hatlı alçak geçiren filtrenin parametre değerleri aşağıda verilmiştir.

Dielektrik tabakanın kalınlığı : $h = 1.06 \text{ mm}$

Metal şeritin genişliği : $w = 2.436 \text{ mm}$

Metal şeritin kalınlığı : $t = 0$

Problem uzayının oluşturulmasında aşağıda verilen parametreler kullanılmıştır.

Hücre boyutları $\Delta x = 0.406 \text{ mm}$, $\Delta y = 0.265 \text{ mm}$, $\Delta z = 0.423 \text{ mm}$

$$N_1 = 16, N_2 = 80, N_3 = 100$$

$$M_1 = 8, M_2 = 6$$

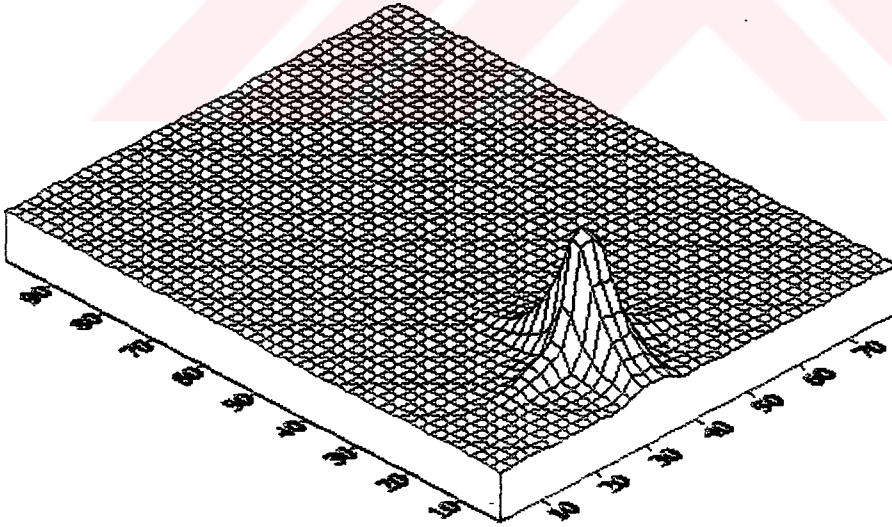
Zaman adımının tespitinde courant kararlılık koşulu kullanılmıştır. Bu koşul kullanılarak zaman adımı ,

$$c.\Delta t \leq \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

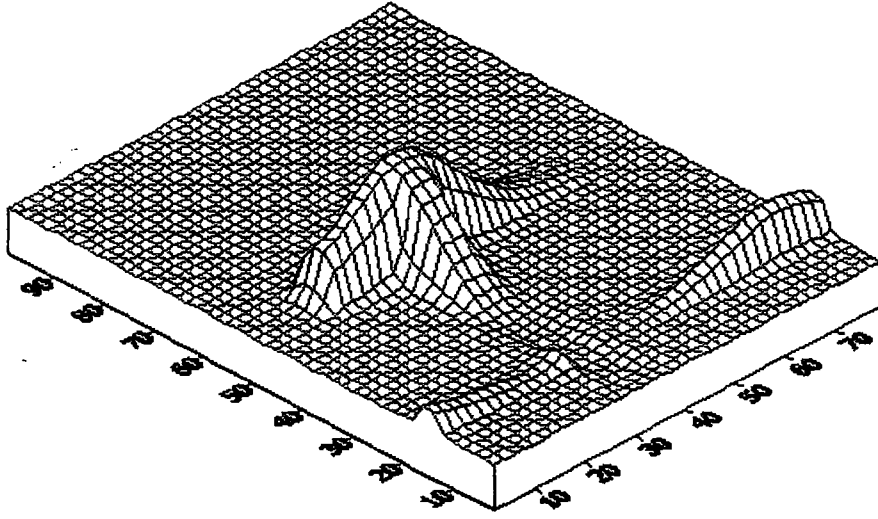
(5.2)

$$\Delta t = 0.655484 \text{ ps}$$

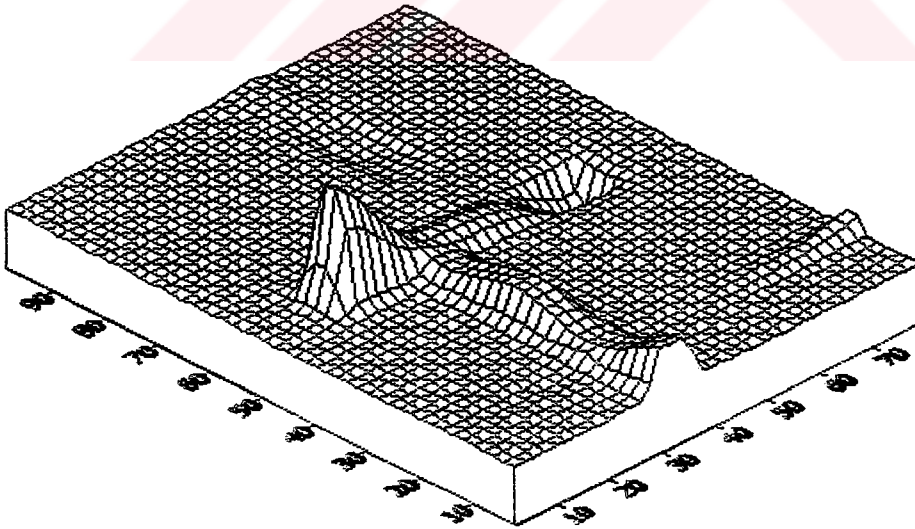
bulunur.



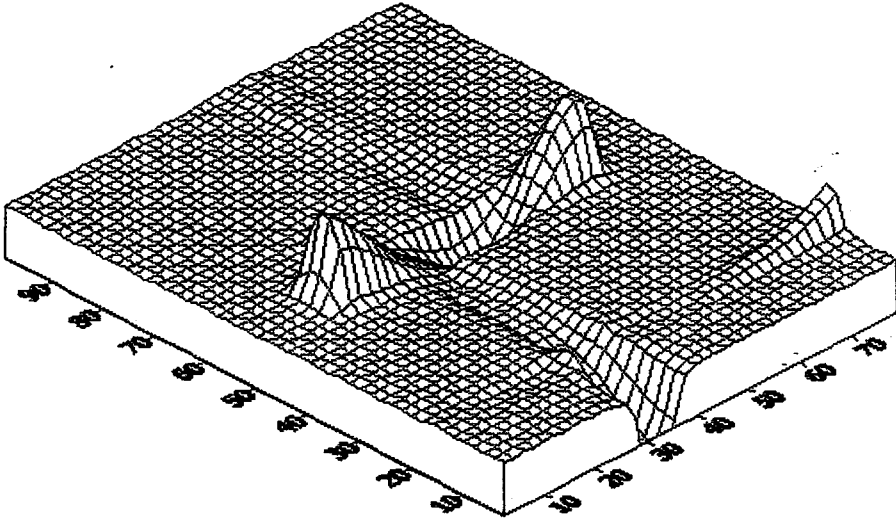
Şekil 5.16.a. $300\Delta t$ Zaman Adımında



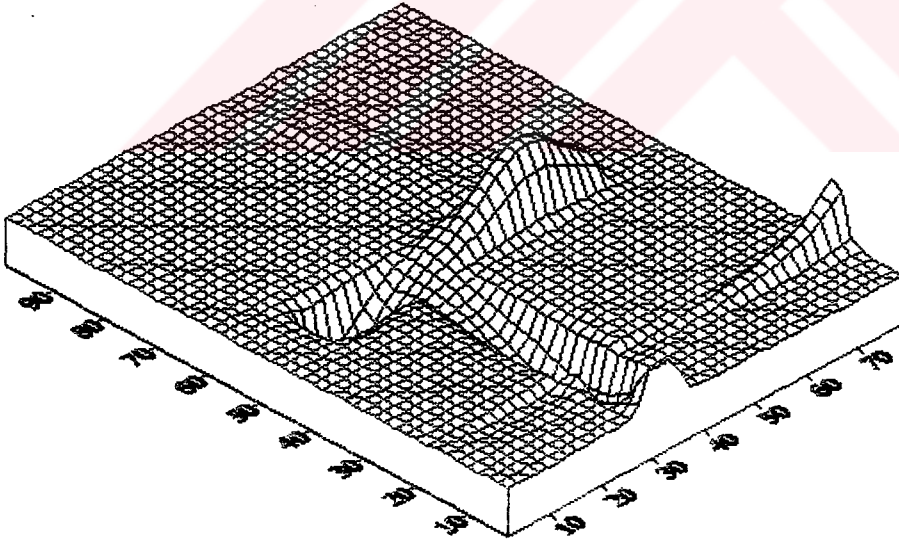
Şekil 5.16.b. $500\Delta t$ Zaman Adımında



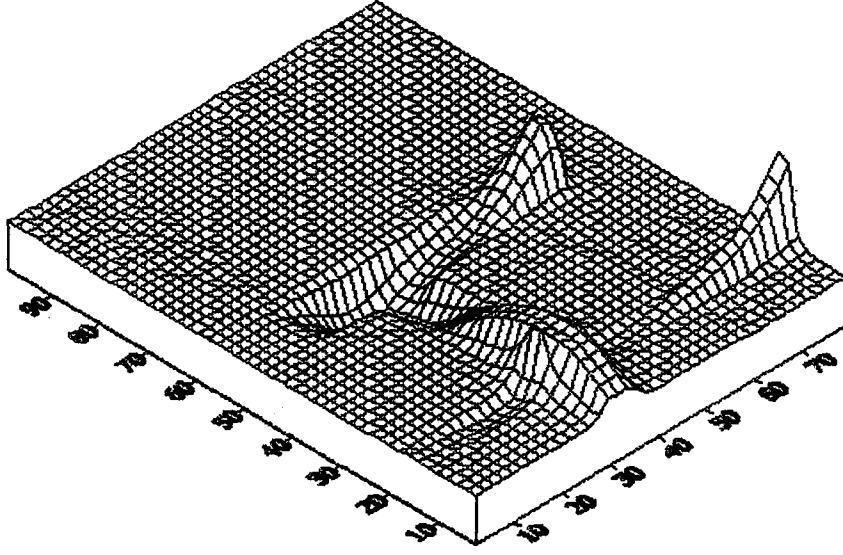
Şekil 5.16.c. $1000\Delta t$ Zaman Adımında



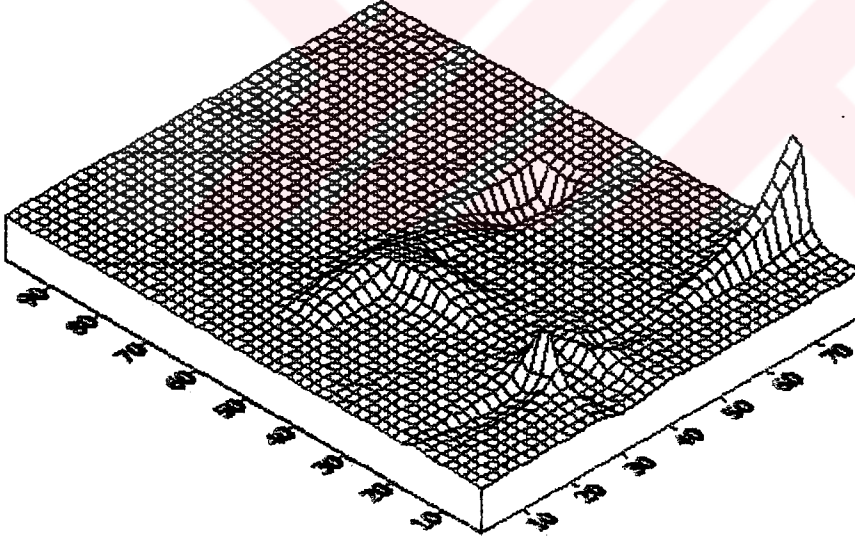
Şekil 5.16.d. $1500\Delta t$ Zaman Adımında



Şekil 5.16.e. $2000\Delta t$ Zaman Adımında



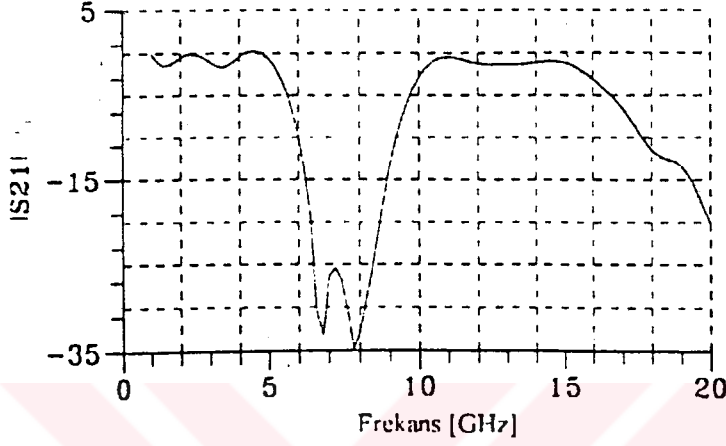
Şekil 5.16.f. $3000\Delta t$ Zaman Adımında



Şekil 5.16.g. $4000\Delta t$ Zaman Adımında

Şekil 5.16. Değişik Zaman adımlarında Dispersive Sınır Kosulu uygulanan Mikroserit Hatlı Alçak Geçiren Filtre içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı

Şekil 5.5'deki kaynak fonksiyonu uygulanan mikroşerit hatlı alçak geçiren filtreye, daha iyi sonuçlar verdiği bilinen dağıtıcı sınır koşulu (DBC) uygulanarak, şerit içerisindeki elektrik alan bileşeni E_y 'nin çeşitli zaman adımları için değişimi üç boyutlu olarak Şekil 5.16'da simüle edilmiştir.



Şekil 5.17. Mikroşerit Hatlı Alçak Geçiren Filtrede $|S_{21}|$ 'in Frekansla Değişimi.[19]

Şekil 5.17'da Şekil 5.4'de gösterilen mikroşerit hatlı alçak geçiren filtreye $|S_{21}|$ 'in frekansla değişimi verilmiştir. İlgili şekilden görüldüğü gibi, devre alçak frekanslardan 5GHz'e kadar oldukça iyi geçirme karakteristiğine sahiptir. Oysa 5GHz den sonra 10GHz'e kadar yaklaşık 30dB Bastırma özelliği göstermektedir. Her ne kadar devrenin frekans davranışı bir band geçiren filtre gibi görünse de, bu devre bir alçak geçiren filtredir ve yüksek frekanslardaki davranışı ile ilgilenilmemektedir. Geniş bantlı devreler tasarlandıkları frekansların ötesinde farklı özellikler gösterebilir.[19]

SONUÇ

Bu tez çalışmasında bir çok elektromagnetik problemin çözümünde kullanılan ZDSF yöntemi incelenmiştir. Örnek problem uyu olarak mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtre seçilmiştir. Bilindiği gibi son yıllarda mikroşerit hatlar mikrodalga teknolojisinde sıkça kullanılmaya başlanmıştır. Fakat labratuvar şartlarında üretmesi ve maliyetinin yüksek olması nedeniyle üretiminden önce nümerik analiz yöntemleriyle tasarlanarak simüle edilmesi önemli bir avantaj sağlamaktadır.

ZDSF yöntemiyle yapılan uygulamalarda FORTRAN programlama dili kullanılış ve programın çalıştırılmasıyla elde edilen veriler Matlap, Surfer ve Origin çizim programlarıyla simüle edilmiştir. Uygulamalar neticesinde şu sonuçlara varılmıştır.

- 1) Mikroşerit hat ve mikroşerit hatlı alçak geçiren filtreye uygulanan kaynak fonksiyonunun(gauss darbesi), devreler üzerinde oluşturduğu elektromagnetik alan bileşenleri hesaplanmıştır. Elektrik alan bileşeni E_y 'nin çeşitli zaman adımlarındaki değerleri her iki hat içinde hesaplanarak simüle edilmiştir.
- 2) Mikroşerit hatta Dağıtıcı sınır koşulu (DBC) ve MUR sınır koşulu ayrı ayrı uygulanarak, hat üzerindeki etkileri birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak DBC'nin daha iyi performans gösterdiği ve sınırdan yansımaların göz ardı edilecek kadar az olduğu gözlenmiştir.
- 3) Hatta oluşan gerilim değerleri hesaplanarak, sonsuz uzun hat için yansım katsayısı hesaplanmıştır.
- 4) Mikroşerit hatlı alçak geçiren filtreye daha iyi performans gösterdiği bilinen DBC uygulanış ve çeşitli zaman adımlarındaki elektrik alan bileşeni E_x 'nin değişimi çizdirilmiştir. Ayrıca $|S_{21}|$ 'in frekansla değişimi verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] TÜRKER, E.S.,ve CAN, E., 1997. Sayısal Analiz Yöntemleri. Değişim Yayınları, Adapazarı
- [2] K.S.Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media ", IEEE Trans. Antennas and Propagat., AP-14, pp.302-307, 1966.
- [3] SINMAZÇELİK, G., 1999. Zaman Düzleminde Sonlu Farklar Metodu İle Mikroşerit Hat Analizi. KO.Ü. Fen Bil.Ens. Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli
- [4] Karl S.Kunz , Raymond J. Luebbers, " The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics ", CRC Press, INC,1993.
- [5] AKLEMAN, F., 1998. Zamanda Sonlu Farklar Yöntemi ve Yutucu Sınır Koşulları. İTÜ. Fen Bil.Ens. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul
- [6] A.Taflove ,” Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method ”, Artech House, Norwood, MA,1995.
- [7] Ingo Wolff “ Finite Difference Time-Domain Simulation of Electromagnetic Fields and Microwave Circuits”, Int. Jour. Of MIMICAE, vol.5, no.3,pp.163-182, © 1992.
- [8] Martin L. Zimmerman, Richard Q.Lee, “ Use of the FDTD Method in the Design of Microstrip Antenna Arrays”, International Journal of Microwave and Milimeter-Wave Computer-Aided Engineering, vol.4, No-1, pp.58-66, 1994.
- [9] Xiaolei Zhang, Kenneth K.Mei, “ Time Domain Finite Difference Approach to the Calculation of the Frequency-Dependent Characteristics of Microstrip Discontinuities” , IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques, vol.36, No.12, December, 1988.
- [10] S.S. Zivanovic, K.S.Yee , K.K.Mei “ A Subgridding Method for the Time Domain Finite Difference Method to Solve Maxwell's Equations “, IEEE Trans. MTTT, V-39, No.7, pp.471-479, 1991.
- [11] Mur, Gerrit “ Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time Domain Electromagnetic Field Equations”, IEEE Trans. On Electromagnetic Comp. Vol.EMC.23, No.4,November, 1983.
- [12] Zhiqiang Bi, Keli Wu, Chen Wu, John Litva,” A Dispersive Boundary Condition for Microstrip Component Analysis Using The FD-TD Method “,

- IEEE Trans. On Microwave Theory and Techniques, vol.40, no.4, April, 1992.
- [13] C.D. Taylor, D.-H.Lam, T.H. Shumpert, "Electromagnetic Pulse Scattering in Time varying Inhomogeneous Media", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-17, pp.585-589, Sept., 1969.
- [14] A. Taflove, M.E. Brodwin, "Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time Dependent Maxwell's Equations", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-23, pp.623-630, Aug.1975.
- [15] R.L. Higdon, "Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equations", Math. Comp. , vol.49, pp. 65-90, July, 1987.
- [16] MUR, G. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximations of the Time-Domain Electromagnetic Field Equations. IEEE Trans. Electromag. Comp., Vol.23, pp.377-382, (Nov. 1963)
- [17] BI, Z. Q., WU, K. L., WU, C. and LITVA, J. A Dispersive Boundary Conditions for Microstrip Component Analysis Using the FD-TD Method. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.40,pp.774-777, (1992)
- [18] Tsugumichi Shibata, Toshio Hayashi, Tadakatsu Kimura," Analysis of Microstrip Circuits Using Three-Dimensional Full-Wave Electromagnetic Field Analysis in the Time Domain", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.36, no.6, pp.1064-1070, June 1988.
- [19] SEVGİ, L., 1999. Elektromagnetik Problemler ve Sayısal Yöntemler. Birsen Yayınevi Ltd.Şti., Y.0029, İstanbul
- [20] D. M. Sheen S. M. Ali M.D. Abouzahra, J.A. Kong. Application of the 3d finite-difference time-domain method to the analysis of microstrip discontinuities. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.38, No 7, pp.849-857, (1990)

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Bayburt'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bayburt'da, lise öğrenimini ise, Antalya da tamamladı. 1992 yılında girdiği Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Bölümünden, 1993 yılında yatay geçiş yaparak, Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Bölümüne geçti. 1996 yılında mezun oldu ve aynı yıl girdiği Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Anabilimdalı'ndan mezuniyet durumundadır.

1998 yılından itibaren Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

