KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

I.N. HERSTEIN'ın BİR TAHMİNİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER

DOKTORA TEZİ

Öznur GÖLBAŞI

Anabilim Dalı : Matematik

I. Tez Danışmanı : Prof. Dr. Kazım KAYA

II. Tez Danışmanı : Doç. Dr. Neşet AYDIN

EKİM 2000

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

I.N. HERSTEIN'IN BİR TAHMİNİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER

DOKTORA TEZİ

Öznur GÖLBAŞI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**: 12.Haziran.2000**
Tezin Savunulduğu Tarih	**: 13.Ekim.2000**

Tez Danışmanı	**Üye**
Prof. Dr. Kazım KAYA	Prof. Dr. Servettin BİLİR
( )	( )

Üye	**Üye**	**Üye**
Prof.Dr.Sait HALICIOĞLU	Doç.Dr.Hatice KANDAMAR	Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV
( )	( )	( )

EKİM 2000

I. N. HERSTEIN'ın BİR TAHMİNİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLLER

Öznur GÖLBAŞI

Anahtar Kelimeler: Türev, Lie ideal, (σ,τ)-Lie ideal, genelleştirilmiş Lie ideal, invariant alt halkalar.

Özet: Türevli asal halkalarda bazı komütatiflik koşullarını inceleyen makalelerin bir arada özetlenerek genelleştirilmiş Lie idealler için bazı sonuçların bulunmasını amaçlayan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

1. Bölümde çalışma tanıtılmış, 2. Bölümde çalışılan konularla ilgili temel bilgiler verilmiştir. 3. Bölümde türevli asal halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler ve I. N. Herstein'in bir tahminiyle ilgili çalışmalar özetlenmiştir.

R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, U ve M sırasıyla R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali ve sol ideali olmak üzere 4. Bölümde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

i) $(d(R), a)=0$ ise $d(a)=0$.
ii) $d(Z)\neq(0)$ ve $(d(R), a)\subset Z$ ise $a\in Z$.
iii) $(d(M), a)=0$ ise $d(a)=0$.
iv) $[d(R), a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$.
v) $d([R, a]_{\sigma,\tau})=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$.
vi) $(R, a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$.
vii) $(U, R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$.

5. Bölümde ise $\sigma d=d\sigma$, $\tau d=d\tau$ ve $d^2(U)=0$ iken $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olduğu (σ,τ)-sol Lie ideal için ispatlanarak, genelleştirilmiş Lie idealler için bazı sonuçlar verilmiştir. 6. Bölümde de I. N. Herstein'ın asal halkalar için vermiş olduğu bir tahminin özel bir koşul altında doğru olduğu gösterilmiştir.

CONJECTURE of I. N. HERSTEIN and GENERALİZED LİE IDEALS

Öznur GÖLBAŞI

Keywords: Derivation, Lie ideal, (σ,τ)-Lie ideal, generalized Lie ideal, invariant subrings

Abstract: The plan followed in this work, which aims at the study of some paper which investigated commutativity conditions in prime rings with derivation have been summarized and some results that given for generalized Lie ideals.

In chapter 1, the study has been told, some general information about studied subjects has been given in chapter 2. In chapter 3, some papers that search commutativity conditions on rings with derivation and studies about conjecture of I. N. Herstein have been summarized.

Under the conditions R is a prime ring of characteristic not two, σ and τ are automorphisms of R, d is a nonzero derivation of R, U and M are nonzero (σ,τ)-left Lie ideal and left ideal of R, the following results have been provided:

i) If $(d(R), a)=0$ then $d(a)=0$.
ii) If $d(Z)\neq(0)$ and $(d(R), a)\subset Z$ then $a\in Z$.
iii) If $(d(M), a)=0$ then $d(a)=0$.
iv) If $[d(R), a]_{\sigma,\tau}=0$ then $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$.
v) If $d([R, a]_{\sigma,\tau})=0$ then $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$.
vi) If $(R, a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ then $a\in Z$.
vii) If $(U, R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ then $U\subset Z$.

In chapter 5, if U (σ,τ)-left Lie ideal, $\sigma d=d\sigma$, $\tau d=d\tau$ and $d^2(U)=0$ then $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ has been proved and some results have been given for generalized Lie ideals. In chapter 6, conjecture that given by I. N. Herstein for prime rings, has been shown that true under the special condition.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocalarım Prof. Dr. Kazım Kaya ve Doç. Dr. Neşet Aydın'a içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

R :Bir halka

D :Türev

U :(σ,τ)-Lie ideal

M :Sol ideal

$[x, y]$:$xy-yx$

(x, y) :$xy+yx$

$[x, y]_{\sigma,\tau}$:$x\sigma(y)-\tau(y)x$

$(x, y)_{\sigma,\tau}$:$x\sigma(y)+\tau(y)x$

J :$\{x\in R \mid \forall r\in R$ için xr, rqr eleman $\}$

T(R) :$\{a\in R \mid ax^n=x^n a,\ n=n(x,a)\geq 1,\ \forall x\in R\}$

G(R) :$\{a\in R \mid ax^n=x^m a,\ n=n(x, a)\geq 1$ ve $m=m(x, a))\geq 1,\ \forall x\in R\}$

$C_{\sigma,\tau}$:$\{ c \in R \mid [c, x]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall x \in R \}$

Z :$\{x\in R \mid xy=yx ,\ \forall y\in R\}$

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

R bir halka, $d : R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlıyor ise d dönüşümüne R halkasının bir türevi denir.

x ve y, R halkasının iki elemanı olmak üzere xy-yx elemanı komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. Benzer biçimde X ve Y, R halkasının iki alt kümesi ise her $x \in X$ ve $y \in Y$ için xy-yx elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup $[X, Y]$ ile gösterilir. R halkasının her $y \in R$ elemanı için $[x, y]=0$ koşulunu sağlayan x elemanlarının oluşturduğu kümeye R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir. Ayrıca xy+yx elemanı da Jordan çarpımı olarak adlandırılır ve (x, y) ile gösterilir.

U, R halkasının toplamsal alt grubu olmak üzere $[U, R] \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir Lie ideali denir.

$\sigma, \tau : R \rightarrow R$ iki dönüşüm olmak üzere $x, y \in R$ için $x\sigma(y)-\tau(y)x$ elemanı $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ve $x\sigma(y)+\tau(y)x$ elemanı da $(x, y)_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. $[U, R]_{\sigma,\tau} \subset U$ koşulu sağlanıyorsa U toplamsal alt grubuna R halkasının bir (σ,τ)- sağ Lie ideali, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ koşulu sağlanıyorsa U toplamsal alt grubuna R halkasının bir (σ,τ)- sol Lie ideali, U, R halkasının hem (σ,τ)-sol ve hem de (σ,τ)-sağ Lie ideali ise U ya R nin bir (σ,τ)- Lie ideali denir.

$x \in R$ elemanı için $x+y+xy=0$ olacak biçimde en az bir $y \in R$ elemanı varsa x elemanına sağ yarı regüler eleman(rqr) ve y elemanına ise x in sağ yarı regüler tersi denir.

$J=\{x \in R \mid \forall r \in R$ için xr, rqr eleman $\}$ kümesine R halkasının Jacobson radikali denir ve J ile gösterilir. Jacobson radikali aynı zamanda R halkasının bir idealidir.

R bir halka, $\varphi: R \to R$ bir otomorfizm olsun. R nin bir A alt halkası için $\varphi(A) \subseteq A$ oluyorsa, A ya R nin φ-invariant alt halkası denir.

$x \in J$ ve x', x elemanının yarı regüler tersi olmak üzere $\varphi: R \to R$, $\varphi(x)=(1+x)a(1+x)^{-1}$ $=(1+x)a(1+x')=a+xa+ax'+xax'$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının bir otomorfizmasıdır.

$T(R) = \{a \in R \mid ax^n=x^na,\ n=n(x,a)\geq 1,\ \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının hypercenter'ı denir. T, R nin bir alt halkasıdır.
$G(R)=\{a \in R \mid ax^n=x^ma,\ n=n(x, a)\geq 1$ ve $m=m(x, a)\geq 1,\ \forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının enlarged hypercenterı denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması olarak alınacak, $x, y \in R$ için $x\sigma(y)-\tau(y)x$ elemanı $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile ve $x\sigma(y)+\tau(y)x$ elemanı da $(x, y)_{\sigma,\tau}$ ile gösterilecektir. Ayrıca $C_{\sigma,\tau} = \{ c \in R \mid [c, x]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall x \in R \}$kümesi ise R halkasının (σ,τ)- merkezi olarak alınacaktır.

Çeşitli koşullar altında halkaların komütatifliği konusu birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada bu koşullardan bazıları altında bir halkanın komütatifliği incelenirken hangi aşamalardan geçtiği, koşullar üzerinde hangi genelleştirmelerin yapıldığı özetlenecektir. Bu koşullardan bazıları aşağıda verilmiştir:

a) $a \in R$ için $ad(R)=(0)$
b) $\forall x \in R$ için $[d(x), x] \in Z$

c) $[d(R), d(R)]=(0)$

d) $[a, d(R)]=(0)$

e) $d(R)\subset Z$

f) $d^2(R)=(0)$

g) $0 \neq d_1 : R \rightarrow R$ ve $0 \neq d_2 : R \rightarrow R$ iki türev olmak üzere $d_1d_2(R)=(0)$

Ayrıca U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere;

h) R halkasının $[R, M]\subset U$ ve $[R, M]\not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

ı) $[a, U]=(0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ dir.

k) $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ veya $U\subset Z$ dir.

Yukarıdaki koşullardan birini sağlayan halkaların komütatifliği incelenirken bir taraftan bu koşullarda R halkası yerine sırayla onun bir ideali, tek yanlı ideali ve Lie ideali , diğer taraftan ise d türevi yerine yarı-türev, α-türev ve (σ,τ)-türev alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

Aşağıda söz konusu koşullar altında bir halkanın komütatifliği ile ilgili çalışmalara ilişkin örnekler mümkün olduğu kadar koşul koşul ele alınarak verilmiştir.

d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a\in R$ için $ad(R)=(0)$ iken $a=0$ olduğu E. Posner tarafından 1957 yılında gösterildi. Daha sonra R karakteristiği 2 den farklı asal halka olmak üzere J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından yukarıdaki teorem, R halkası yerine R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali alınarak genelleştirildi. Lie ideal için ispatlanan bu teorem 1995 yılında (σ,τ)-Lie ideal için N. Aydın ve M. Soytürk tarafından ispatlanmıştır.

E.C. Posner'ın 1957 yılında ispatladığı "d, R asal halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere (b) koşulu sağlanıyorsa R halkası komütatiftir.", teoremi için 1981 yılında P. H. Lee ve T. K. Lee halkanın karakteristiğini 2 den farklı alarak değişik bir ispat verdi. Yine P. H. Lee ve T. K. Lee U, R halkasının bir Lie ideali ve her $u\in U$

için $[d(u), u] \in Z$ koşulu altında $U \subset Z$ olduğunu göstererek yukarıdaki teoremi genelleştirdi.

I. N. Herstein 1978 yılında d, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere (c) koşulu altında R halkasının komütatif olduğunu gösterdi. Ayrıca Herstein $[a, d(R)]=(0)$ koşulunu sağlayan a elemanının halkanın merkezinde olduğunu ispatladı. Herstein' ın bu teoremi $[a, d(R)] \subset Z$ koşulu altında P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olmak üzere $[a, d(U)]= 0$ koşulu altında ise J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından genelleştirildi. Daha sonra P.H. Lee ve arkadaşı $[a,d(U)] \subset Z$ iken $a \in Z$ olduğunu kanıtlayarak Bergen ve arkadaşlarının yukarıdaki teoremini genelleştirdi.

1978 yılında I. N. Herstein'ın "d, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d(R) \subset Z$ koşulu sağlanıyorsa R halkası komütatiftir.", teoremi için J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr, R halkası yerine onun bir U Lie idealini alarak $d(U) \subset Z$ iken $U \subset Z$ olduğunu ispatladılar. 1995 yılında ise Lie ideal için ispatlanan bu teorem N. Aydın ve M. Soytürk tarafından R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali için genelleştirildi. Ayrıca 1999 yılında K. Kaya ve N. Aydın bu teoremi (σ,τ)-sol Lie ideal için genelleştirdiler.

R, karakteristiği 2 den farklı asal halka ve d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R) \subset Z$ koşulu altında R halkasının komütatif olduğu 1981 de P.H. Lee ve T. K. Lee tarafından gösterildi. J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından (f) koşulunda R halkası yerine onun bir U Lie ideali alınarak $U \subset Z$ olduğu ispatlandı. 1995 yılında ise N. Aydın ve M. Soytürk bu teoremi U yu R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali alarak genelleştirdiler.

E. C. Posner karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkada iki türevin bileşkesi de bir türev oluyorsa o zaman bu türevlerden en az birinin sıfır olduğunu ispatladı. 1981 yılında P. H. Lee ve T. K. Lee R halkasının sıfırdan farklı d_1 ve d_2 iki türevi olmak üzere $d_1d_2(R) \subset Z$ iken R halkasının komütatif olduğunu gösterdi. 1981 yılında J.

Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr' in $d_1d_2(U)= 0$ iken $U\subset Z$ olduğunu kanıtladıkları teorem P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından $d_1d_2(U)\subset Z$ koşulu altında ispatlanarak genelleştirildi.

J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr, U, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali ise bu taktirde R halkasının $[R, M]\subset U$ ve $[R, M]\not\subset Z$ olacak biçimde bir M idealinin var olduğunu gösterdiler. Bu teorem N. Aydın ve H. Kandamar tarafından 1994 yılında R asal halkasının merkezi ve (σ,τ)-merkezi tarafından kapsanılmayan bir (σ,τ)- Lie ideali için genelleştirildi.

1981 yılında J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr'in karakteristiği 2 den farklı R asal halkası için ispatladığı (ı) koşulu N. Aydın ve H. Kandamar tarafından U Lie ideali yerine, (σ,τ)-Lie ideal alınarak genelleştirildi. Ayrıca N. Aydın ve H. Kandamar 1994 yılında J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr'in R halkasının bir U Lie ideali için ispatlamış oldukları (k) koşulunu, U yu (σ,τ)-Lie ideal alarak genelleştirdiler. 1997 yılında ise aynı koşul N. Aydın tarafından (σ,τ)-sol Lie ideal için ispatlandı.

Bu çalışmada ele alınacak bir diğer problem ise I. N. Herstein tarafından 1979h yılında yapılan bir tahmin olacaktır. Herstein 1977 yılında, R domain olmayan ve sıfırdan farklı bir nil sağ ideale sahip asal halka, J sıfırdan farklı Jacobson radikali, A, R halkasının $\forall x\in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1}\subseteq A$ sağlayan bir alt halkası olmak üzere $A\subseteq Z$ olduğunu veya A nın , R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsadığını göstermiş ve daha sonra bu teoremin domain olmayan genel bir halka için doğru olacağını ileri sürmüştür.

Bu çalışmanın 2. Bölümünde araştırılan konularla ilgili genel bilgiler verilecek, 3. Bölümünde ise genelleştirilen sonuçlarla ilgili daha önceki çalışmalar özetlenecektir.

4. Bölümünde ise (d) koşuluyla ilgili genelleştirmeler verilecek, bu koşul Jordan komütatörü ve sol ideal için araştırılacaktır.

5. Bölümde genelleştirilmiş Lie idealler ile ilgili bazı sonuçlar verilecek, ayrıca (f) koşulu (σ, τ)-sol Lie ideal için ispatlanacaktır.

6. Bölümde de I. N. Herstein'ın yapmış olduğu tahmin karakteristiği ikiden farklı ve idempotent elemana sahip asal halka için ispatlanacaktır.

BÖLÜM 2

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1 : R bir halka ve A, B, P onun idealleri olsun. $AB\subseteq P$ olduğunda $A\subseteq P$ veya $B\subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının asal ideali denir.

Teorem 2.2 : R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall$ a, $b\in R$ için $aRb\subseteq P$ ise $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(3) $\forall$ a, $b\in R$ için $(a)(b)\subseteq P$ ise $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(4) U, V, R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV\subseteq P$ iken $U\subseteq P$ veya $V\subseteq P$ dir.

(5) U, V, R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV\subseteq P$ iken $U\subseteq P$ veya $V\subseteq P$ dir.

İspat : (1) $\Rightarrow$ (2) : P asal ideal olsun. $\forall a$, $b\in R$ için $aRb\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRRbR\subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR\subseteq P$ veya $RbR\subseteq P$ bulunur. Diğer taraftan (a)=A olmak üzere $A^3 \subseteq RaR\subseteq P$ olduğu açıktır. Yine P asal ideal olduğundan $A^2 \subseteq P$ veya $A\subseteq P$ olur. Yani $A=(a)\subseteq P$ elde edilir. Böylece $a\in P$ bulunur. Benzer şekilde $b\in P$ olduğu gösterilir.

(2) $\Rightarrow$(3) : $\forall a$, $b\in R$ için $aRb\subseteq P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ olsun. $(a)(b)\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $aRb\subseteq(a)(b)\subseteq P$ olduğundan $aRb\subseteq P$ olur. Hipotezden $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(3) $\Rightarrow$(4) : $\forall$ a, $b\in R$ için $(a)(b)\subseteq P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV\subseteq P$ ve $U\not\subset P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u\in U$ ve $u\notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v\in V$ alalım.

$(u)(v) \subseteq UV+UVR \subseteq P$ dir. Hipotezden ve $u \notin P$ olduğundan $v \in P$ bulunur. Bu V sol idealinin her v elemanı için tekrarlanırsa $V \subseteq P$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$(5): Benzer şekilde gösterilir.

(4) $\Rightarrow$(1) : Tanımdan (4) $\Rightarrow$(1) ve (5) $\Rightarrow$(1) olduğu açıktır.

Tanım 2.3 : (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

Önerme 2.4 : R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) $a, b \in R$ için $aRb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.5 : R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının yarı-asal ideali denir.

Teorem 2.6 : R bir halka, Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) Q yarı-asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(3) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(4) U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

(5) U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 2.7 : R bir halka olsun.

(1) $\forall$ $a \in R$ için, $na=0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n'lerin en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $\mathrm{char}R=n$ ile gösterilir.

(2) $a \in R$ için, $a^n=0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın nilpotent elemanı denir. $a^n=0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n ye a nın nilpotentlik indeksi denir.

(3) B, R halkasının bir ideali olsun. B nin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının nil ideali denir.

(4) A, R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemanları için $a_1.a_2.....a_n = 0$ ise A ya R nin nilpotent ideali denir. Her nilpotent ideal nil idealdir.

Tanım 2.8 : Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarı-asal halka denir.

Tanım 2.9 : R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $mx=0$ olduğunda $x=0$ oluyorsa R halkasına m-torsion free halka denir.

Tanım 2.10 : X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

$C_R(X) = \{a \in R \mid xa = ax \ , \ \forall \ x \in X\}$ kümesine X in R deki merkezleştiricisi denir. $\{x \in R \mid xy = yx \ , \ \forall \ y \in R\}$ kümesine ise R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir.

Önerme 2.11 : R asal halka olsun. $ab, b \in Z$ ise $b=0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. $\forall \ x \in R$ için $xab = abx = axb$ olur. Buradan

$$(ax-xa)b=0, \ \forall \ x \in R \qquad (2.1)$$

elde edilir. (2.1) eşitliğinde x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$0=(axy-xya)b = axyb - xyab$

$= axyb - xayb+xayb - xyab$

$= (ax-xa)\,yb + x(ay-ya)\,b$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (2.1) den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(ax-xa)Rb = (0) \quad \forall \ x \in R \qquad (2.2)$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (2.2) den

$b=0$ veya $a \in Z$

bulunur.

Önerme 2.12 : R bir yarı-asal halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a(ax-xa)=0$ oluyorsa $a \in Z$ dir.

İspat: x, $r \in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr) - (xr)a)=0 \qquad (2.3)$$

olur. $a(xr)-(xr)a = (ax-xa)r + x(ar-ra)$ olduğu (2.3) eşitliğinde yerine yazılır ve yine (2.3) eşitliği kullanılırsa

$ax(ar-ra)=0 \quad \forall\, x, r \in R$

elde edilir. Bu ise

$(ar-ra)R(ar-ra)=(0) \quad \forall\, r \in R$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r \in R$ için $ar=ra$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Önerme 2.13 : R yarı - asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştirsin. Bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat: a, R halkasının sıfırdan farklı I sağ idealini merkezleştirsin. $\forall\, x \in R$ için $ax \in I$ dır. Hipotezden, $a(ax) =(ax)a = a(xa)$ olur. Buradan $0 = a(ax - xa)$, $\forall x \in R$ elde edilir. Bu ise Önerme 2.12 den $a \in Z$ demektir.

Önerme 2.14 : Bir asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur.

Tanım 2.15 : R bir halka, x, $y \in R$ olsun. $xy=0$ olduğunda $x=0$ veya $y=0$ oluyor ise bu durumda R halkasına sıfır bölensiz halka denir.

Tanım 2.16 : R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ ($ab + ba \in A$)oluyorsa A ya R nin Lie (Jordan) alt halkası denir.

Tanım 2.17 : A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$ ve $\forall a \in A$ için $ua - au \in U$ ($ua + au \in U$) oluyorsa, U ya A nın bir Lie (Jordan)ideali denir.

Tanım 2.18 : R bir halka ve $d:R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. x, $y \in R$ olmak üzere;

(1) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d ye R halkasının bir türevi denir.

(2) $g: R \to R$ bir fonksiyon olmak üzere

$d(xy) = d(x)y + g(x)d(y) = d(x)g(y) + xd(y)$ ve $gd = dg$

ise d ye g ile belirlenen bir yarı-türev denir.

(3) $0 \neq \alpha : R \to R$ bir endomorfizma olmak üzere $d(xy) = d(x)\alpha(y) + xd(y)$ ise d ye bir α- türev denir.

(4) σ ve τ R halkasının iki otomorfizması ve $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ ise d ye bir (σ,τ) - türev denir.

Önerme 2.19 : R bir halka ve $\rho \neq (0)$ bir sağ ideali olsun. Her $a \in \rho$ için $a^n=0$ olacak biçimde sabit bir n tamsayısı varsa bu durumda R halkasının sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Önerme 2.20 : R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x=0$ olan bir halka olsun. Kabul edelim ki $(0) \neq U$, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $U \subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Önerme 2.21 (Brauer trick) : Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G=A\cup B$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. Bu durumda $G=B$ olduğunu görmeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G=A\cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. İddiamız $G \subset B$ dir. Eğer $G \not\subset B$ olsaydı $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı vardır. $G=A\cup B$ olduğundan $y \in A$ olur.

$x+y \in B$ dir. Gerçekten $x+y \notin B$ olsaydı $G=A\cup B$ olduğundan $x+y \in A$ olurdu. $y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu ki bu $x \notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x+y \in B$ dir. $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ olur ki bu da $y \notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. Yani $G \subset B$ dir. Böylece $G=B$ olur.

Tanım 2.22 : R bir asal halka olsun. U, R nın sıfırdan farklı bir ideali ve $f:U\rightarrow R$ bir sağ R-modül homomorfizması olmak üzere; M ile bütün (U, f) şeklindeki ikililerin kümesini gösterelim. M üzerinde

"$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir $W\subseteq U\cap V$ ideali üzerinde $f = g$"

bağıntısını tanımlayalım. Bu bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre M nin denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Q kümesi

$\overline{(U,f)}+\overline{(V,g)}=\overline{(U\cap V,f+g)}$, $\overline{(U,f)}\,\overline{(V,g)}=\overline{(VU,fg)}$

ikili işlemleri ile R yi kapsayan bir asal halkadır.

(1) Q nın merkezi C ile gösterilir ve C ye R nin genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir. C bir cisimdir.

(2) S = RC ye R nin Q daki merkezi kapanışı (central closure) denir. S , R yi kapsayan bir asal halkadır.

Önerme 2.22 : R bir asal halka olsun. R halkasının d, f, g ve h türevleri için $d(x)g(y)=h(x)f(y)$ $\forall$ $x, y\in R$ olsun. Eğer $d\neq 0$, $f\neq 0$ ise o zaman $\forall$ $x\in R$ için $g(x)=\lambda f(x)$ ve $h(x)=\lambda d(x)$ olacak şekilde bir $\lambda\in C$ vardır.

Önerme 2.23 : $0\neq a\in R$, $b\in R$ olsun. Eğer her $x\in R$ için $axb=bxa$ ise bu durumda bir $\lambda\in C$ için $b=\lambda a$ dır.

Tanım 2.24 : $x, y, z\in R$, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması olmak üzere aşağıdaki bağıntılar vardır.

1)$(xy, z)=x[y, z]+(x, z)y$

2)$(xy, z)=x(y, z)-[x, z]y$

3)$(x, yz)=y(x, z)+[x, y]z$

4)$(x, yz)_{\sigma,\tau}=\tau(y)(x, z)_{\sigma,\tau}+[x, y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

5)$(xy, z)_{\sigma,\tau}=x(y, z)_{\sigma,\tau}-[x, \tau(z)]y$

6)$(xy, z)_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(z)]+(x, z)_{\sigma,\tau}y$

7)$[xy, z]_{\sigma,\tau}=x[y, z]_{\sigma,\tau}+[x, \tau(z)]y$

8)$[xy, z]_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(z)]+[x, z]_{\sigma,\tau}y$

9)$[x, yz]_{\sigma,\tau}=\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau}+[x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

10)$[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}=[x, [y, z]]_{\sigma,\tau}+[[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau}$

11)$[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}=(x, (z, y))_{\sigma,\tau}-((x, z)_{\sigma,\tau}, y)_{\sigma,\tau}$

12)$[(x, y)_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}=([x, z]_{\sigma,\tau}, y)_{\sigma,\tau}+(x, [y, z])_{\sigma,\tau}$

13)$([x, y]_{\sigma,\tau}, z)_{\sigma,\tau}+([x, z]_{\sigma,\tau}, y)_{\sigma,\tau}-[x, (z, y)]_{\sigma,\tau}=0$

14)$[x, [z, y]]=((x, z), y)-((x, y), z)$

15)$[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y]=0$

olur.

BÖLÜM 3

3. TÜREVLİ VE LİE İDEALLİ HALKALAR ile HERSTEIN'IN BİR TAHMİNİ

Bu bölümde çalışılan konularla ilgili daha önceden yayınlanmış olan bazı makaleler ispatsız olarak belirli bir sıra içerisinde verilecektir.

3.1. Türevli Halkalar

Posner, E. C , 1957

Tanım 3.1.1 : R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $xay=0$ iken $x=0$ veya $y=0$ oluyorsa R halkasına asal halka denir.

Lemma 3.1.2 : R bir asal halka, $d:R \to R$ halkasının bir türevi ve $a \in R$ olsun. Buna göre her $x \in R$ için $ad(x)=0$ (veya $d(x)a=0$) oluyorsa $a=0$ veya $d=0$ dır.

Lemma 3.1.3 : R bir asal halka olsun. p, q, $r \in R$ elemanları $\forall\ a \in R$ için $paqar=0$ olacak biçimde ise bu taktirde p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 3.1.4 : R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve d_1, d_2, R halkasının iki türevi olsun. d_1d_2, R halkasının bir türevi ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ dır.

Lemma 3.1.5 : R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev olsun. Bu taktirde her $a \in R$ için $ad(a)-d(a)a=0$ oluyorsa $a=0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 3.1.6 : A bir Lie halka, I, A Lie halkasının bir ideali olsun. Eğer $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x=0$ oluyorsa o zaman her $a \in R$ ve her $x \in I$ için $(da.x)x=0$ olur. (Her $x \in I$ için $dx.x=0$ koşulunu sağlayan $d \in R$ elemanlarının kümesi A' nın bir idealidir.)

Teorem 3.1.7 : R bir asal halka, d, R halkasının bir türevi olsun. Buna göre her $a \in R$ için $ad(a)-d(a)a \in Z$ ise bu taktirde $d=0$ veya R halkası komütatiftir.

Herstein, I. N. , 1978

Teorem 3.1.8 : R herhangi bir halka, $d : R \rightarrow R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 3.1.9 : R bir asal halka, $d : R \rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise bu taktirde

(i) Eğer $charR \neq 2$ ise R halkası komütatif tamlık bölgesidir.

(ii) Eğer $charR = 2$ ise R halkası komütatif veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Herstein, I. N. , 1979

Teorem 3.1.10 : R bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $a \in R$ elemanı her $x \in R$ için $ad(x)=d(x)a$ olacak biçimde ise bu taktirde

(i) $charR \neq 2$ ise $a \in Z$ dir. (Z, R halkasının merkezidir.)

(ii) $charR=2$ ise $a^2 \in Z$ dir. Üstelik $a \notin Z$ ise $\lambda \in C$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere $\forall\ x \in R$ için $d(x)=(\lambda a)x-x(\lambda a)$ dır.

Lee, P. H. ve Lee, T. K. , 1981

Bu makale boyunca R halkası karakteristiği 2 den farklı olan asal halka ve Z, R halkasının merkezi olarak alınacaktır.

Teorem 3.1.11 : R bir asal halka, $0 \neq d:R \rightarrow R$ bir türev, char$R \neq 2$ ve $a \in R$ olsun. $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 3.1.12 : R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $[d(R), d(R)] \subset Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 3.1.13 : R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $d^2(R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 3.1.14 : d_1 ve d_2 R asal halkasının sıfırdan farklı iki türevi ve char$R \neq 2$ olsun. $d_1 d_2(R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 3.1.15 : R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$ bir türevi ve char$R \neq 2$ olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

3.2. Halkalarda Lie İdealler

Herstein, I. N. , 1970

Lemma 3.2.1 : R yarı-asal, 2-torsion free bir halka ve T, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $[T, T] \subset Z$ ise bu taktirde $T \subseteq Z$ olur.

Lemma 3.2.2 : R yarı-asal, 2-torsion free bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $t \in R$, elemanı $[U, U]$ nun her elemanı ile yer değiştirirse bu taktirde t, U Lie idealinin her elemanı ile yer değiştirir.

Teorem 3.2.3 : R yarı - asal, 2-torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $t \in R$, her $u \in U$ için, tu - ut elemanlarıyla yer değiştirirse, t, U Lie idealinin tüm elemanlarıyla yer değiştirir.

Bergen, J. , Herstein, I. N. ve Kerr, J. W. , 1981

Bu makale boyunca R, $\text{char}R \neq 2$ olan bir asal halka, U , R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 3.2.4 : U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali ise bu taktirde R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

Lemma 3.2.5 : U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan R halkasının bir Lie ideali ise $C_R(U)=Z$ dir.

Lemma 3.2.6 : $C_R([U, U])=C_R(U)$ dur.

Lemma 3.2.7 : U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

Lemma 3.2.8 : U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U)=0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 3.2.9 : U, R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 3.2.10 : U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $t \in R$ için $td(U)=0$ (veya $d(U)t=0$) ise bu taktirde $t=0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.2.11 : U, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $d^2(U)=0$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Sonuç 3.2.12: R, 2-torsion free olan bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bir $a \in R$ için $[a, [a, U]]=0$ ise bu taktirde $[a, U]=0$ dır.

Teorem 3.2.13 : $U \not\subset Z$, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $C_R(d(U))=Z$ dir.

Yazar çalışmasının bundan sonraki kısmında $0 \neq d:R \rightarrow R$ bir türev, $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali, $V=[U, U]$ ve $W=[V, V]$ olarak almıştır.

Lemma 3.2.14 : $d^3 \neq 0$ ve $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol λ ve sıfırdan farklı sağ δ idealini kapsarsa bu taktirde $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 3.2.15 : I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı sağ ve sıfırdan farklı sol ideallerini kapsamıyor ise bu taktirde, $[c, I] \subset \overline{d(U)}$ olduğunda $c \in Z$ dir.

Lemma 3.2.16 : $d^2(U)^2=0$ ise $d^3(W)=0$ dır.

Lemma 3.2.17 : $d^3(U)=0$ ise $d^3=0$ dır.

Teorem 3.2.18 : R, char$R\neq 2$ olan asal halka, $0\neq d:R\rightarrow R$ bir türev ve $d^3\neq 0$, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olsun. Bu taktirde $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 3.2.19 : R, char$R\neq 2$ olan asal halka, $U\not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali ve δ, d , R , halkasının türevleri olsunlar. Eğer $\delta d(U)=0$ ise o zaman $\delta=0$ veya $d=0$ dır.

Kaya, K. , 1991

Yazar bu makalede R halkasını karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ iki otomorfizma olarak almıştır.

Lemma 3.2.20 : $d_1: R\rightarrow R$ bir (σ,τ)- türev ve α, R nin bir halka otomorfizmi olmak üzere $d_2:R\rightarrow R$ bir (α,α)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$, $d_1\alpha=\alpha d_1$ olsun. Buna göre $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ dir.

Sonuç 3.2.21 : U, R halkasınınsıfırdan farklı bir ideali ve a, $b\in U$ olsun. Buna göre, $\forall\, x\in U$ için, $[a,[b,x]]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $b\in Z$ dir.

Lemma 3.2.22 : $0\neq d: R\rightarrow R$ bir (σ,τ)- türev ve $U\neq(0)$, R nin bir ideali olsun. $a\in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a\in Z$ dir.

Lemma 3.2.23 : $0\neq d:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)- türev ve $U\neq(0)$, R nin bir ideali olsun. $d(U)\subset U$ ve $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 3.2.24 : $0\neq d_1: R\rightarrow R$ bir (σ,τ) - türev ve $0\neq d_2: R\rightarrow R$ bir türev olsun. $U\neq(0)$, R nin bir ideali ve $d_2(U)\subset U$ olsun. Buna göre $d_1d_2(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

Teorem 3.2.25 : U, R nin bir (σ,τ)- sağ Lie ideali olsun. $[U, U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

Sonuç 3.2.26 : $M \neq (0)$, R halkasinin bir ideali ve $[M,R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

Sonuç 3.2.27 : Her x, y, z, $\in$R için $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}=0$ ise R komütatiftir.

Teorem 3.2.28 : U, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının hem sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve hem de alt-halkası ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Aydın, N. ve Kandamar, H. , 1994

Bu makale boyunca R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka olarak alınmıştır.

Lemma 3.2.29 : U, R nin (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $a \in R$ için $[U, a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Lemma 3.2.30 : $a \in R$ ve $aU=0$ (veya $Ua=0$) olsun.

(a) Eğer U, (σ,τ) - sol Lie ideal ise o zaman $a=0$ veya $U \subset Z$ dir.

(b) Eğer U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise o zaman $a=0$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Teorem 3.2.31 : U, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[U, a]=0$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

$T(U)=\{a \in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ olmak üzere;

Lemma 3.2.32 : R bir halka ve U sıfırdan farklı (σ,τ) -sol Lie ideali olsun. O zaman $R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olur.

Lemma 3.2.33 : U sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve a, $b\in R$ olsun. Bu taktirde $aT(U)b = 0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

Teorem 3.2.34 : U, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

Sonuç 3.2.35 : U sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Buna göre a, $b \in R$ için $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

Aydın, N. , 1996

Bu makale boyunca R asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması ve C genişletilmiş merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 3.2.36 : U, (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. $U\subset Z$ ise $\forall u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R halkası komütatiftir.

Teorem 3.2.37 : U, R asal halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu durumda $\forall u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 3.2.38 : R asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $a\in R$ için $[a, U]=0$ ise o zaman her $u\in U$ için $\tau(u) + \sigma(u)\in Z$ veya $a\in Z$ olur.

Lemma 3.2.39 : R bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $a\in R$ için $[a, U]=0$ ve $[a, U]_{\sigma,\tau}=0$ ise bu taktirde $a=0$ veya $\forall$ $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ dir.

Teorem 3.2.40 : R asal halka, U (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $[U, U]_{\sigma,\tau}=0$ ve $[U, U]=0$ ise o zaman $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.2.41 : R asal halka U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $\forall u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ve sol idealini kapsar.

Teorem 3.2.42 : R asal halka, U, R nin (σ,τ)-sol Lie ideali ve $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ olacak biçimde bir $v \in U$ olsun. O zaman R halkasının sıfırdan farklı bir A sol ve sıfırdan farklı bir B sağ idealleri vardır ve $[R, A]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, A]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ dir.

Teorem 3.2.43 : R asal halka, U, R nin bir (σ,τ)-sol Lie ideali, $v \in U$ için $\tau(v)+\sigma(v) \notin Z$ ve a, $b \in R$ olsun. $aUb = 0$ ise bu taktirde $a=0$ veya $b=0$ dır.

Lemma 3.2.44 : R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, $\forall\ x \in R$ için $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ olsun. Bu taktirde $\sigma=\tau$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 3.2.45 : R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $U \subset Z$ olsun. Bu durumda $\sigma=\tau$ veya R halkası komütatiftir.

Teorem 3.2.46 : R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka U, sıfırdan farklı (σ,τ)- Lie ideal ve $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman $\sigma=\tau$ veya R halkası komütatiftir.

Kaya, K.-Aydın, N., 1999

Bu makale boyunca R karakteristiği ikiden farklı asal halka U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 3.2.47 : R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali, a, $b \in R$ olsun (i) $d_1(x)=[x, b]_{\sigma,\tau}$ tanımlı dönüşüm ve $ad_1(R)=0$(veya $d_1(R)a=0$) ise bu durumda $a=0$ veya $b \in Z$ dir. (ii)Eğer $a[R, b]_{\sigma,\tau}=0$(veya $[R, b]_{\sigma,\tau}a=0$) ise bu durumda $a=0$ veya $b \in Z$ dir. (iii) Eğer $Ua=0$(veya $aU=0$) ise bu durumda $a=0$ veya $b \in Z$ dir.

Lemma 3.2.48 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali,d R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. Eğer d(U)=0 ise bu durumda $[U, \sigma(U)]=0$ ve $[\sigma(U), \tau(U)]=0$ dır.

Lemma 3.2.49 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. Eğer d(U)=0 ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur.

Lemma 3.2.50 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali, $a\in R$ olsun Eğer $[a, U]=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur.

Sonuç 3.2.51 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U R nin sıfırdan farklı komütatif bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun Bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur.

Lemma 3.2.52 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsar veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

Lemma 3.2.53 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası, a, $b\in R$ olsun. Eğer aUb=0 ise bu durumda a=0 veya b=0 veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur.

Teorem 3.2.54 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

Teorem 3.2.55 : R, charR$\neq$2 olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R, M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

Aydın, N., 1998

Lemma 3.2.56 : R, bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali ve $T=\{c\in R \mid [R, c]_{\sigma,\tau}\subset U\}$olsun.

(i) T, R nin alt halkasıdır.

(ii) Eğer U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali ise bu durumda T, R nin $[R, T]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $U\subset T$ olan en büyük Lie idealidir.

Lemma 3.2.57 : R, 2- torsion free yarıasal halka ve M, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Bu durumda $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $M\subset Z$ dir. Üstelik $\sigma(m)=\tau(m)$, $\forall m\in M$ dir.

Teorem 3.2.58 : R, 2-torsion free yarıasal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset U$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Üstelik $\sigma(m)\neq\tau(m)$, $\exists m\in M$ ve $[R, M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

Lemma 3.2.59 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali ve $a, b\in R$ olsun. Eğer $aUb=0$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ veya $a=0$ veya $b=0$ dır.

Lemma 3.2.60 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Eğer $d(U)=0$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

Teorem 3.2.61 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali ve $a\in R$ olsun.Eğer $ad(U)=0$ (veya $d(U)a=0$) ise bu durumda $a=0$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

Teorem 3.2.62 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (σ,τ)-sol Lie ideali, d, R halkasının türevi ve $a\in R$ olsun. Eğer $d(Z)\neq 0$ ve

(i) $[d(U), a]=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

(ii) Eğer $d(U)\subset Z$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

3.3. Türevli ve Lie İdealli Halkalar

Awtar , R. ,1973

Yazar bu çalışmasında d: $R \rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev olarak almıştır.

Lemma 3.3.1 : R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ elemanı için $[u, d(u)] \in Z$ ve $u^2 \in U$ ise bu taktirde her $u \in U$ için $[u, d(u)]=0$ olur.

Lemma 3.3.2 : R bir asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] \in Z$ olur. Üstelik her $u \in U$ için $[u, d(u)]=0$ ise her $r \in R$ için $[[d(r), u], u]=0$ olur.

Lemma 3.3.3 : R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U , R nin bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $ud(u)=d(u)u=0$ ise bu taktirde $U=(0)$ dır.

Teorem 3.3.4 : R karakteristiği 2 ve 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.3.5 : R karakteristiği 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.3.6 : R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve U, bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.3.7 : R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. U, R halkasının bir alt halkası ve Lie (Jordan) ideali olsun. Buna göre her $u\in U$ için $[u, d(u)]\in Z$ ise U komütatiftir.

Lee,P. H. ve Lee, T. K. , 1983

Bu makale boyunca R, $\mathrm{char}R\neq 2$ olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 3.3.8 : d, R halkasının sıfırdan farklı türevi, $d(Z)\neq 0$ ve $a\in R$ için $[a, d(U)]\subseteq Z$ ise bu taktirde $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ olur.

Teorem 3.3.9 : d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U)\subseteq Z$ ise bu taktirde $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.10 : d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a\in R$ için $[a, d(U)]\subseteq Z$ ise bu taktirde $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.11 : d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $[d(U), d(U)]\subseteq Z$ ise $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.12 : d ve δ, R nin sıfırdan farklı iki türevi olsun. $d\delta(U)\subseteq Z$ ise bu taktirde $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.13 : Her $u\in U$ için $[u, d(u)]\in Z$ ise $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.14 : $a\in R$ ve $ad(U)\subseteq Z$ ise $a=0$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Awtar, R. , 1984

Teorem 3.3.15 : R, char$R \neq 2$ asal halka, $0 \neq d$, R halkasının türevi, $U \not\subset Z$ olan R nin bir Lie ideali ve $d^2(U) \subseteq Z$ olsun. $a \in R$ için $d(a) = 0$ ve $[a, d(U)] \subset Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 3.3.16 : R, char$R \neq 2$ asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı , her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a, U]=0$ olur. Üstelik $U \not\subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 3.3.17 : R yarı-asal, 2 - torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a,U]=0$ dır.

Teorem 3.3.18 : R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, d(u)] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $d=0$ veya $a \in Z$ dir.

Teorem 3.3.19 : R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R nin Lie ideali olsun. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.3.20 : R, char$R \neq 2$ asal halka ve $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. δ, d , R nin iki türevi ve $\delta d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $\delta=0$ veya $d=0$ dır.

Teorem 3.3.21 : R, char$R \neq 2$ asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise o zaman $U \subset Z$ dir.

Carini , L. , 1985

Bu makalede R yarı-asal, 2-torsion free halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R nin $d^2(U)=0$ ve $d(U)\subset U$ olan bir türevi olarak alınmıştır.

Lemma 3.3.22 : $d([U, R])=0$ dır.

Lemma 3.3.23 : $d(R)[U, R]=0$ dır.

Teorem 3.3.24 : R yarı-asal 2-torsion free halka, d, R halkasının bir türevi ve U Lie ideali olsun. $d^2(U)=0$ ise bu taktirde $d(U)\subset Z$ dir.

Sonuç 3.3.25 : R yarıasal, 2 -torsion free halka ve d, R halkasının bir iç türevi olsun. I, R nin bir ideali olmak üzere $d^2(I)=0$ ise o zaman $d(I)=0$ dır.

Sonuç 3.3.26 : R yarı-asal, 2-torsion free halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. d, R nin $d^2(U)=0$ olan bir iç türevi ise bu taktirde $d(U)=0$ dır.

Kaya, K., 1988

Lemma 3.3.27 : R bir asal halka, d: $x\rightarrow x'$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve U R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $\forall u\in U$ için $(u, u')_{\sigma,\tau}=0$ ise R halkası komütatiftir.

Lemma 3.3.28 : R bir asal halka, d: $x\rightarrow x'$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve U R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. (i) $\forall u\in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau}=0$ ise R halkası komütatiftir. (ii) $\forall u\in U$ için $(u', u)_{\sigma,\tau}=0$ ise R halkası komütatiftir. Üstelik $\sigma=\tau$ dur.

Lemma 3.3.29 : R bir asal halka, b, $ab\in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a\in Z$ veya $b=0$ dır.

Lemma 3.3.30 : R bir asal halka, d: $x \to x'$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, char$R \neq 2$ ve $U \neq 0$ olan R nin bir sağ ideali olsun. Buna göre $\forall u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

Aydın, N. ,1991

Bu makalede R, char$R \neq 2$ olan asal halka, d, R halkasının (σ,τ)-yarı-türevi, U, sıfırdan farklı bir Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 3.3.31 : $d^2(U)=0$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 3.3.32 : $a \in R$ olsun. Buna göre $[d(U), a]=0$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.33 : $[d(U), d(U)]=0$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 3.3.34: $U \not\subset Z$ ve $d^3(U)=0$ ise bu taktirde $d^3(R)=0$ dır.

Lemma 3.3.35 : $a \in R$ ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Buna göre $[d(U), a] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 3.3.36 : $d^2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 3.3.37 : $a \in R$ için $[d(U),a] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.38 : $[d(U), d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.39 : d_1, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-yarı-türevi ve d_2 sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d_1d_2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 3.3.40 : d_1 ve d_2 R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-yarı türevleri olmak üzere $d_1d_2(U)\subseteq Z$ ise bu taktirde $U\subseteq Z$ dir.

Kandamar , H. ve Kaya , K. , 1992

Bu makale boyunca R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, (σ,τ)-türevi olarak alınmıştır.

Lemma 3.3.41 : $d(U)=0$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.42 : $U\not\subset Z$, $t\in R$ olsun. $td(U)=0$ (veya $d(U)t=0$) ise bu taktirde $t=0$ dır.

Lemma 3.3.43 : $d(U)\subset Z$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Teorem 3.3.44 : d, R nin sıfırdan farklı (σ,τ)-türevi , $\sigma d=d\sigma$, $\tau d=d\tau$ ve U sıfırdan farklı Lie ideali için $d(U)\subset U$ olsun. Buna göre $d^2(U)=0$ ise $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.45 : $a\in R$, $U\not\subset Z$ ve $[U, a]\subset Z$ ise bu taktirde $a\in Z$ dir.

Teorem 3.3.46 : $[U, d(U)]\subset Z$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Aydın , N. ve Soytürk, M. , 1995

Yazar bu çalışması boyunca R, char$R\neq 2$ bir asal halka, $0\neq d$, R nin türevi, σ, $\tau:R\to R$ iki otomorfizma ve $d\sigma=\sigma d$, $\tau d=d\tau$ olarak almıştır.

Lemma 3.3.47 : U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 3.3.48 : U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Sonuç 3.3.49 : U, R halkasının (σ,τ)-Lie ideali ve $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.50 : U, R halkasının (σ,τ)-Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Buna göre $d(U)a=0$ (veya $ad(U)=0$) ise bu taktirde $a=0$ veya $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.51 : U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali ve $d^2(U)=0$ olsun. Bu taktirde $d(U)\subset Z$ dir.

Teorem 3.3.52 : U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali ve $d^2(U)=0$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Soytürk, M., 1996

Yazar bu çalışması boyunca R, $\mathrm{char}R\neq 2, 3$ bir asal halka, $0\neq d$, R nin türevi, $\sigma, \tau: R\to R$ iki otomorfizma ve $d\sigma=\sigma d$, $\tau d=d\tau$ olarak almıştır.

Lemma 3.3.53 : R bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)- sol Lie ideali ve $[R, U]_{\sigma,\tau}\subset Z$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.54 : R karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali, d sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $d(U)\subset Z$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.3.55 : R, $\mathrm{char}R\neq 2, 3$ bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali, d, R nin sıfırdan farklı bir , $d(U)\subset U$ ve $d^2(U)\subset Z$ olsun. Eğer $d^3(U)=0$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Teorem 3.3.56 : R, charR$\neq$2, 3 bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali, d, R nin sıfırdan farklı bir , $d(U)\subset U$ olsun. Eğer $d^2(U)\subset Z$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Yenigül, M. Ş.,- Deng, Q., Argaç, N., 1997

d, R halkasının bir (σ, τ)-türevi olsun. Eğer her x, $y\in R$ elemanı için $d(xy)=d(x)d(y)$ veya $d(xy)=d(y)d(x)$ oluyorsa bu durumda d (σ, τ)-türevi, homomorfizm veya anti-homomorfizm olarak adlandırılır.

Teorem 3.3.57 : R yarıasal bir halka, α, σ, τ: $R\rightarrow R$ dönüşümler, α homomorfizm, $\alpha\tau$ örten ve çarpımsal, τ örten, d, R halkasının (σ, τ)-türevi olsun. Eğer αd homomorfizm veya anti-homomorfizm ise bu durumda $\alpha d=0$ dır.

Teorem 3.3.58 : R, charR$\neq$2, bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması, U sıfırdan farklı (σ, τ)-sağ Lie ideali olsun. Eğer $d(U)=0$ ise bu durumda $d(R)=0$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya R halkası komütatiftir.

Teorem 3.3.59 : R, charR$\neq$2, bir asal halka, σ, τ ve T, R halkasının otomorfizmaları, olsun. Eğer $[x^T, x]_{\sigma,\tau} \in Z(R)$, $\forall x\in R$ ise bu durumda R halkası komütatiftir veya $\sigma=\tau=T$ dir.

Lemma 3.3.60 : R, charR$\neq$2, bir asal halka, F, R halkasının aşikar olamayan bir otomorfizması olsun. Eğer $x^2x^F=xx^Fx$, $\forall x\in R$ veya $x^Fx^2=xx^Fx$, $\forall x\in R$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Kaya, A., 1997

Yazar bu çalışması boyunca R charR$\neq$3 bir asal halka, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması, U, sıfırdan farklı (σ, τ)-Lie ideali, d, R nin $\sigma d=d\sigma$ ve $\tau d=d\tau$ sağlayan sıfırdan farklı bir türevi olarak almıştır.

Teorem 3.3.61 : R $charR \neq 3$ bir asal halka, U, sıfırdan farklı (σ, τ)-Lie ideali, d, R halkasının $\sigma d = d\sigma$ ve $\tau d = d\tau$ sağlayan bir türevi ve $d(U) \subset U$ olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 3.3.62 : S, $charS \neq 2$ bir asal halka, D: $R \rightarrow R$, $x \rightarrow x'$ tanımlı sıfırdan farklı türev, C, S halkasının merkezi, $D^3=0$ ve A, S halkasının $A'' \subset C$ olan bir alt kümesi olsun.

(a) Eğer A, S nin sağ ideali ise bu durumda $S'' \subset C$ veya $A'A=0$ dır.

(b) Eğer A, S nin ideali ise bu durumda $S'' \subset C$ dir.

Lemma 3.3.63 : S bir asal halka, D: $R \rightarrow R$, $x \rightarrow x'$ tanımlı sıfırdan farklı türev, C, S halkasının merkezi olsun.

(a) Eğer $r''S's''=0$, $\forall r, s \in S$ ise bu durumda $u'' \neq 0$ olacak biçimde hiç bir $u \in S$ elemanı yoktur.

(b)A, S nin sıfırdan farklı bir ideali, $charS \neq 2$ ve $D^3=0$ olsun. Eğer en az bir $b \in S$ için $A''b=0$ ise bu durumda $u'' \neq 0$ olacak biçimde hiç bir $u \in S$ elemanı yoktur veya $b=0$ dır.

Lemma 3.3.64 : S bir halka, D: $R \rightarrow R$, $x \rightarrow x'$ tanımlı sıfırdan farklı türev, C, S halkasının merkezi, $D^3=0$, $b \in S$ ve $c \in C$ olsun. Eğer

$[[s', b'], b'] + c[s', b'] = 0, \forall s \in S$

eşitliği sağlanırsa bu durumda

(a) $2[s'', b']^2 = 0, \forall s \in S$ dir.

(b) Eğer S'' komütatif ise ve $[r'', [s'', t']] = 0$, $\forall r, s, t \in S$ eşitliği sağlanırsa bu durumda $[r'', [r'', b]]b'' = 0$, $\forall r \in S$ olur. Eğer b'' sıfır bölen değil ve S halkası yarıasal halka ise bu durumda $2S'' \subset C$ dir.

Lemma 3.3.65 : Eğer R, $charR \neq 2$ bir halka ve $U \not\subset Z$ ise bu durumda

(a) U'' ve Z sıfırdan farklıdır.

(b) $[U, U]_{\sigma,\tau}$, U' ve R'', Z tarafından kapsanılmaz.

(c) R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$, fakat $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset Z_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir ideali vardır.

(d) $a \in R$ elemanı için eğer $[U, a]=0$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Lemma 3.3.66 : charR=3 ve $U \not\subset Z$ olsun.

(a) Eğer $U''=0$ ise bu durumda $d^3=0$ dır.

(b) Eğer $d^3=0$ ise bu durumda $Z'=0$ dır.

Lemma 3.3.67 : charR=3, $d^3=0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

(a) $\sigma(c)=\tau(c)$, $\forall c \in Z$ dir ve böylece $[R, Z]_{\sigma,\tau}=0$ olur.

(b) $[Z, M'']_{\sigma,\tau}=0$ dır.

Lemma 3.3.68 : charR=3, $d^3=0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

(a) $[r, s'']_{\sigma,\tau}=[r, \sigma(s'')]$, $\forall r, s \in R$ dir.

(b) $\sigma(r'')= \tau(r'')$, $\forall r \in R$ dir.

Lemma 3.3 69 : charR=3, $d^3=0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

(a) R'' komütatiftir.

(b) $\exists\, u_0 \in U$ ve $\exists\, r_0 \in R$ için $[r_0'', u_0'']_{\sigma,\tau} \neq 0$ dır.

Lemma 3.3.70 : charR=3 ve $d^3=0$ olsun. Bu durumda $U \subset Z$ dir.

3.4. I. N. Herstein'ın Tahmini Üzerine

Herstein, I. N., 1975

Bu makale boyunca R bir halka, J(R)=J, R halkasının Jacabson radikali, Z(R)=Z halkanın merkezi, T(R) halkanın hypercenter ı olarak alınacaktır.

Lemma 3.4.1 : Eğer D bir bölüm halkası ise bu durumda T(D)=Z(D) dir.

Lemma 3.4.2 : Eğer R yarıbasit bir halka ise bu durumda T(R)=Z(R) dir.

Lemma 3.4.3 : R herhangi bir halka olsun. Eğer $a \in T(R)$ elemanı nilpotent ise bu durumda aR, R halkasının sağ nil idealidir. Böylece aR, J de kapsanılır.

Teorem 3.4.4 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir asal halka olsun. Bu durumda T(R) nin nilpotent elemanları yoktur.

Lemma 3.4.5 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir asal halka olsun. Bu durumda T(R) komütatiftir ve T(R) nin sıfırdan farklı elemanı R halkasında sıfır bölen değildir.

Teorem 3.4.6 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir asal halka olsun. Bu durumda T(R)=Z(R) dir.

Teorem 3.4.7 : R bir halka, T(R) onun hypercenterı olsun. $a \in T(R)$ ve $x \in R$ olmak üzere ax-xa elemanları R halkasında bir nil ideal(iki yanlı) üretir. Özel olarak, her $x \in R$ elemanı için ax-xa elemanı nilpotenttir.

Felzenswalb, B., 1976

R bir halka ve A onun bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ elemanı için $r^{n(r)} \in A$ olacak biçimde $n=n(r) \geq 1$ sayısı var ise bu durumda R halkasına A-radikal halka denir.

Lemma 3.4.8 : R sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan bir halka ve $a \in R$ elemanı için $ax^{n(x)}a=0$, $n(x) \geq 1$, $\forall x \in R$ ise bu durumda $a=0$ dır.

Teorem 3.4.9 : R sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan bir asal halka, a, $b \in R$ olsun. Eğer $ax^{n(x)}b=0$, $n(x) \geq 1$, $\forall x \in R$ ise bu durumda $a=0$ veya $b=0$ dır.

Uyarı 3.4.10 : R aşikar olmayan merkeze sahip bir asal halka, a, $b \in R$ için $ax^{n(x)}b=0$, $n(x) \geq 1$, $\forall x \in R$ olsun. Eğer char $R=0$ veya $\forall x \in R$ için $p \mid n(x)$ olmak üzere $\text{char}R=p(\neq 0)$ ise bu durumda $a=0$ veya $b=0$ dır.

Teorem 3.4.11 : R sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan ve A-radikal olan bir halka ise bu durumda A, sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan bir halkadır.

Teorem 3.4.12 : R sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan ve A-radikal olan bir halka ise bu durumda A, sıfırdan farklı nil sağ idealleri olmayan asal halkadır.

Giambruno, A., 1977

Lemma 3.4.13 : $a \in G(R)$ elemanı R halkasında regüler bir eleman olsun. Eğer $x \in R$ elemanı regüler bir eleman ise bu durumda $a^r x^s = x^s a^r$, olacak biçimde $r=r(a, x) \geq 1$ ve $s=s(a, x) \geq 1$ tamsayıları vardır.

Lemma 3.4.14 : $a \in G(R)$ ve $x \in R$ elemanları R halkasında regüler elemanlar ve $ax^n = x^m a$, $n,m \geq 1$ ve $n \neq m$ olsun. Bu durumda $C_R(a) \cap C_R(x)$ kümesindeki tüm y elemanları periyodiktir. (Yani, $y^r=y$, $\exists r>1$)

Lemma 3.4.15 : Eğer R yarıbasit halka ise bu durumda $G(R)=Z(R)$ dir.

Lemma 3.4.16 : G(R) nin nilpotent elemanları yoktur.

Lemma 3.4.17 : G(R) de sıfır bölen elemanlar yoktur.

Lemma 3.4.18 : G(R)$\subset$T(R) dir.

Teorem 3.4.19 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka ise bu durumda G(R)=Z(R) dir.

Sonuç 3.4.20 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Eğer $G_R(I)=\{a\in R \mid ax^n=x^m a,\ n=n(x,\ a)\geq 1$ ve $m=m(x,\ a)\geq 1,\ \forall x\in I\}$ olarak tanımlanırsa bu durumda $G_R(I)=C_R(I)$ dır.

Lemma 3.4.21 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka, J(R)$\neq$(0) olsun. g.c.(R)$=\{a\in R \mid (ax)^n=(xa)^m,\ n=n(x,\ a)\geq 1$ ve $m=m(x,\ a)\geq 1,\ \forall x\in R\}$ kümesine R halkasının genelleştirilmiş merkezi denir. $a\in$g.c.(R) elemanı olmak üzere au=0, $u\in R$ olması için gerek ve yeter koşul ua=0 olmasıdır.

Teorem 3.4.22 : R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka olsun. Bu durumda g.c.(R)=Z(R) dir.

Sonuç 3.4.23 : Sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir R halkası için g.c.(R)=Z(R) olması durumu Köethe conjecture'ına denktir.

Herstein, I.N., 1977

Teorem 3.4.24 : R sıfırdan farklı bir nil sağ ideale sahip asal halka, M, R halkasının tüm sağ nil ideallerinin birleşim kümesi olsun. Eğer A, R halkasının $\forall x\in M$ için $(1+x)A(1+x)^{-1}\subseteq A$, olan bir alt halkası ise bu durumda $A\subseteq Z$ dir veya A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Herstein, I.N., 1979

Teorem 3.4.25 : R bir asal halka, Z, R halkasının merkezi, $a \in R$ ve $a \notin Z$ olsun. Eğer her $x \in R$ elemanı ve sabit bir $n>0$ tamsayısı için $(ax-xa)^n \in Z$ oluyorsa bu durumda R halkası 4-boyutlu basit bir cebirde order olur.

Teorem 3.4.26 : R bir asal halka, J, R halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali ve A, R halkasının $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, $\forall x \in J$ olan bir alt halkası olsun. A nın sıfırdan farklı bir elemanı R halkasında sıfır bölen olsun. Eğer A, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsamıyorsa bu durumda J nin tüm nilpotent elemanları tarafından üretilen N alt halkası, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsamaz.

Conjecture 3.4.27 : R sıfır bölensiz olmayan bir asal halka, J, R halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali olsun. Eğer A, R halkasının $\forall x \in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, sağlayan bir alt halkası ise bu durumda $A \subseteq Z$ dir veya A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Conjecture 3.4.28 : R sıfır bölensiz bir halka, J, R halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali olsun. Eğer A, R halkasının $\forall x \in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, sağlayan bir alt halkası ise bu durumda $A \subseteq Z$ dir veya A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Herstein, I.N., 1979

Bu çalışma boyunca R, Z merkezli ve $0,1 \neq e \in R$ idempotent elemanına sahip bir asal halka, J, R nin Jacabson radikali, C, R halkasının genişletilmiş merkezi(extended centroid), A, R halkasının $\forall x \in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, sağlayan bir alt halkası olarak alınmıştır.

Teorem 3.4.29 : Eğer R halkası mod 2 ye göre denk olan tamsayılar halkası (yani GF(2)) üzerinde 2x2 tipindeki matrisler halkası dışında bir halka ise bu durumda $A \subseteq Z$ veya A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 3.4.30 :

(a) $u \in R$ elemanı $t^2=0$ olan tüm $t \in R$ elemanlarıyla değişmeli ise bu durumda $u \in Z$ dir.

(c) $u \in R$ elemanı tüm idempotentler ile değişmeli ise bu durumda $u \in Z$ dir.

Lemma 3.4.31 : A yarıasal halkadır.

Lemma 3.4.32 : Eğer A komütatif ve $A \not\subset Z$ ise bu durumda R halkası GF(2) üzerinde 2x2 tipindeki matrisler halkasıdır.

Lemma 3.4.33 : B, R halkasının sıfırdan farklı ve $t^2=0$ olan her $t \in R$ elemanı için $(1+t)B(1+t)^{-1} \subseteq B$, olan bir alt kümesi olsun. Eğer $xB=0$ ise bu durumda $x=0$ dır.

Lemma 3.4.34 : $A \not\subset Z$ ve $x, y \in RC$ elemanı için $xAy=0$ ise bu durumda $x=0$ veya $y=0$ dır.

Lemma 3.4.35 : $0,1 \neq f \in RC$ idempotent bir eleman, $0 \neq W$, R halkasının $0 \neq Wf \subset R$ ve $0 \neq fW \subset R$ sağlayan bir ideali olsun. Eğer $fW \cap A \neq 0$ ve $Wf \cap A \neq 0$ ise bu durumda A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 3.4.36 : Eğer $fW \cap A=0$ ise bu durumda fRC, RC nin minimal sağ idealidir. Benzer şekilde eğer $Wf \cap A=0$ ise bu durumda fRC, RC nin minimal sağ idealidir. Üstelik charR=2 ve M=fRC ise bu durumda $Hom_{RC}(M, M)=C$ olur.

Kaya, K., 1983

Bu çalışma boyunca, R sıfır bölensiz olmayan bir asal halka, J, R halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali, A, R halkasının $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, $\forall x \in J$ olan bir alt halkası olarak alınacaktır.

Lemma 3.4.37 : Eğer $A \cap J$ değişmeli ise bu durumda $A \cap J$ nin bir elemanı R halkasında sol sıfır bölen değildir.

Teorem 3.4.38 : R bir asal halka, J, R halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali olsun. Eğer A, R halkasının $\forall x \in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, sağlayan bir alt halkası ve $A \cap J$ değişmeli ise bu durumda $A \subseteq Z$ dir veya A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Uyarı 3.4.39 : A, R halkasının tek yanlı ideali ise bu durumda A, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Uyarı 3.4.40: $[A \cap J, R] \subset A \cap J$ ise o zaman $A \subset Z$ dir veya A, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar.

BÖLÜM 4

4. ASAL HALKALARDA BAZI SONUÇLAR

d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ için $ad(R)=(0)$ iken $a=0$ olduğu E. Posner tarafından 1957 yılında gösterilmiştir. Daha sonra R karakteristiği 2 den farklı asal halka olmak üzere J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından yukarıdaki teorem, R halkası yerine R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali alınarak genelleştirilmiştir. Lie ideal için ispatlanan bu teorem 1995 yılında (σ,τ)-Lie ideal için N. Aydın ve M. Soytürk tarafından ispatlanmıştır. Bu bölümde ise R halkası yerine onun sıfırdan farklı sol ideali alınarak genelleştirilecektir. İkinci olarak; I. N. Herstein tarafından 1979 yılında ispatlanan "d, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $[a, d(R)]=(0)$ koşulunu sağlayan a elemanı halkanın merkezindedir." teoremi ele alınacaktır. Herstein' ın bu teoremi $[a, d(R)]\subset Z$ koşulu altında P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olmak üzere $[a, d(U)]= 0$ koşulu altında ise J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından genelleştirilmiştir. Daha sonra P.H. Lee ve arkadaşı $[a,d(U)]\subset Z$ iken $a\in Z$ olduğunu kanıtlayarak Bergen ve arkadaşlarının yukarıdaki teoremini genelleştirmişlerdir. Bu bölümde ise R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve Jordan çarpımı için $(a, d(M))=0$ koşulu şeklinde araştırılacaktır. Ayrıca bu teorem $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=0$ hipoteziyle genelleştirilecek ve ek olarak Jordan çarpım ile ilgili bazı özdeşlikler ispatlanacaktır.

Bu bölümde R bir halka, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması, M, R halkasının sıfırdan farklı sol ideali, U, (σ,τ)-sol Lie ideali, $d: R\to R$ sıfırdan farklı bir türevi olarak alınacaktır.

Lemma 4.1 : M, R halkasının sıfırdan farklı sol ideali ve $a\in R$ olsun. M, halka olarak sıfırdan farklı nilpotent sağ ideal kapsamıyorsa ve $d(M)a=0$ ise bu durumda $a=0$ dır.
İspat: $a\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $r\in R$ ve $m\in M$ elemanı için hipotezden

$0=d(rm)a=d(r)ma+rd(m)a=d(r)ma$

Yani, $d(R)Ma=0$

bulunur. Burada Lemma 3.1.2 kullanılarak $Ma=(0)$ elde edilir. Şimdi

$L=\{x\in R \mid Mx=0\}$

kümesini tanımlayalım. $0\neq a\in L$ olduğundan, L kümesi R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealidir ve $ML=(0)$ dır. Üstelik

$(M\cap L)(M\cap L)\subset ML=(0)$

olduğundan $(M\cap L)^2=(0)$ olur.

$M\cap L\neq(0)$ ise, $M\cap L$, M halkasının bir sağ ideali ve $(M\cap L)^2=(0)$ olduğundan Önerme 2.19 dan M nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde $M\cap L=(0)$ dır. Bu durumda

$LM\subset M\cap L=(0)$

olmasından $LM=(0)$ bulunur. Asal halkada bir sağ idealin sağ sıfırlayanı sıfır olduğundan $M=(0)$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $a=0$ olmalıdır.

Lemma 4.2 : $a\in R$ için eğer $(d(R), a)=0$ ise bu durumda $d(a)=0$ dır.

İspat: Eğer $a=0$ ise $d(a)=0$ dır. O halde $a\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $x\in R$ elemanı için hipotezden

$0=(d(xa), a)=(d(x)a+xd(a), a)=d(x)[a, a]+(d(x), a)a+x(d(a), a)-[x, a]d(a)$

ve dolayısıyla

$$[x,a]d(a)=0 \qquad \forall\, x\in R \tag{4.1}$$

bulunur. (4.1) de x yerine xy, $y\in R$ yazarsak ve (4.1) eşitliğini kullanırsak;

$0=[xy, a]d(a)=[x, a]yd(a)+x[y, a]d(a)=[x, a]yd(a)$

olur. Yani,

$[R, a]Rd(a)=0$

elde ederiz. Bu ise R asal halka olduğu için

$a\in Z \qquad \text{veya} \qquad d(a)=0$

olduğunu verir. Eğer $a\in Z$ ise bu durumda

$0=d(a)a+ad(a)=2d(a)a$ ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $d(a)a=0$ olur. $a\in Z$, $d(a)a=0$ ve R asal halka olduğu için buradan $d(a)=0$ veya $a=0$ olur. Böylece her iki durumda da $d(a)=0$ elde edilir.

Lemma 4.3 : M, R halkasının sıfırdan farklı sol ideali olsun. M halka olarak sıfırdan farklı sağ nilpotent ideal kapsamıyorsa ve $(d(M), a)=0$ ise $d(a)=0$ dır.

İspat: $k,m \in M$ elemanları için hipotezden

$0=(d(km), a)=(d(k)m+kd(m), a)=d(k)[m, a]+(d(k), a)m+k(d(m), a)-[k, a]d(m)$

olur. Bu ifadede hipotezi kullanırsak;

$$0=d(k)[m, a]-[k, a]d(m) \qquad \forall k, m\in M \tag{4.2}$$

bulunur. Şimdi $f(x)=[x, a]$ iç türevini tanımlayalım. Bu durumda (4.2) eşitliğinden

$$d(k)f(m)=f(k)d(m) \qquad \forall k, m\in M \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) de k yerine ak, $k\in M$ yazalım. Bu durumda $f(a)=0$ olduğunu ve (4.3) eşitliğini kullanarak

$d(ak)f(m)=f(ak)d(m)$

$(d(a)k+ad(k))f(m)=af(k)d(m)$

$d(a)kf(m)+ad(k)f(m)=af(k)d(m)$

$$d(a)kf(m)=0 \qquad \forall k, m\in M \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu durumda $d(a)Mf(m)=0$ olur. Burada $Mf(m)$, R halkasının sol ideali ve R asal halka olduğundan;

$d(a)=0$ veya $Mf(m)=0, \forall m\in M$

bulunur. Şimdi $Mf(m)=0, \forall m\in M$ olsun. Bu durumda her $m\in M$ için $f(m)=0$ olduğunu gösterelim. Eğer $\exists m\in M$ elemanı için $f(m_0)\neq 0$ olursa bu durumda

$L=\{t\in R \mid Mt=0\}$

kümesini tanımlayalım. L kümesi R halkasının sıfırdan farklı sağ idealidir. Üstelik

$(M\cap L)(M\cap L) \subset ML=(0)$

olduğundan $(M\cap L)^2=(0)$ olur. $M\cap L$, M nin sağ ideali olduğu için hipotezden $M\cap L=(0)$ elde edilir. Öte yandan

$LM\subset M\cap L=(0)$

olduğundan $LM=(0)$ bulunur. R asal halka, M, R halkasının sıfırdan farklı sol ideali olduğu için $L=(0)$ ve dolayısıyla $f(m_0)=0$ çelişkisi elde edilir. O halde her $m\in M$ için $f(m)=0$ olur. m yerine xm, $x\in R$ yazarsak;

$0=f(xm)=f(x)m+xf(m)=f(x)m$

olur ki R halkası asal halka olduğundan buradan f=0 yani $a \in Z$ elde edilir. Dolayısıyla $d(a) \in Z$ bulunur.

Not : Şimdi $([R,a], a)=0$ iken $a \in Z$ olamayacağına dair bir örnek verelim.

Örnek : $R=\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in I\}$ halkasını ve $A=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. Bu halkanın merkezi $Z=\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in I\}$ şeklindedir. Üstelik $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z$ dir. Dolayısıyla $([R, A], A)=0$ sağlanır. Ancak $A \notin Z$ olduğu açıktır.

Öte yandan $d: R \to R$, $d\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2y+(x-z)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A matrisi ile belirlenen iç türev tanımlarsak $(d(R), A)=0$ dır. Ancak $A \notin Z$ ve ayrıca $d(A)=0$ olur.

Teorem 4.4 : $(d(R), a)=0$ ve $d(Z) \neq 0$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğu için $0 \neq d(\alpha) \in d(Z)$ olacak biçimde bir $\alpha \in Z$ vardır.

Bu durumda hipotezden ve $\alpha \in Z$ olduğundan;

$0=(d(\alpha x), a)= (d(\alpha)x+ \alpha d(x), a)= d(\alpha)[x, a]+(d(\alpha), a)x+ \alpha(d(x), a)-[\alpha, a]d(x)$

$0=d(\alpha)[x, a] \qquad \forall x \in R$

bulunur. $0 \neq d(\alpha) \in Z$ olduğundan bu son ifadeden $a \in Z$ sonucu elde edilir.

Not : Yukarıda verilen örnek aynı zamanda $d(Z)=0$ iken Teorem 4.4 ün sonucunun $a \in Z$ olamayacağına dair örnektir.

Teorem 4.5 : $(d(R), a) \subset Z$ ve $d(Z) \neq 0$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğu için $0 \neq d(\alpha) \in d(Z)$ olacak biçimde bir $\alpha \in Z$ vardır. Yine hipotezden dolayı

$Z \ni (d(\alpha x), a)=(d(\alpha)x+\alpha d(x), a)=d(\alpha)[x, a]+(d(\alpha), a)x+\alpha(d(x), a)-[\alpha, a]d(x)$

bulunur. Z alt halka olduğundan bu son ifadeden

$$d(\alpha)[x, a]+(d(\alpha), a)x \in Z \qquad \forall x \in R \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) ifadesini açarsak;

$Z \ni d(\alpha)xa - d(\alpha)ax + d(\alpha)ax + d(\alpha)xa = d(\alpha)xa + d(\alpha)ax = d(\alpha)(x, a)$

$$d(\alpha)(x, a) \in Z, \qquad \forall x \in R \tag{4.6}$$

olur. $0 \neq d(\alpha) \in Z$ olduğundan (4.6) dan

$$(x, a) \in Z, \qquad \forall x \in R \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) de x yerine xa yazarsak;

$Z \ni (xa, a) = x[a, a] + (x, a)a = (x, a)a$

Bulunur. Öte yandan $(x, a) \in Z$ olduğu için bu son ifadeden

$(x, a) = 0 \qquad$ veya $\qquad a \in Z$

elde edilir. Eğer $(x, a) = 0$, $\forall x \in R$ ise bu durumda x yerine xy, $y \in R$ yazarsak;

$0 = (xy, a) = x[y, a] + (x, a)y = x[y, a]$

elde edilir. R halkası asal halka olduğu için bu son eşitlikten de $a \in Z$ bulunur.

Örnek : $(d(R), a) \subset Z$ ve $d(Z) = 0$ iken $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ sonuçlarının olamayacağına dair bir örnek verelim. $R = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in I\}$ halkasını ve $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $d: R \to R$, $d\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ türevi ve R halkasının merkezi $Z = \{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in I\}$ dir. $A \notin Z$ ve $d(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğu açıktır. Üstelik $(d(R), A) = \begin{pmatrix} 2z - y & 0 \\ 0 & 2z - y \end{pmatrix} \in Z$ dir. Ancak $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in Z$ dir.

Lemma 4.6 : $a \in R$ olsun. Eğer $[d(R), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $\sigma(a) + \tau(a) \in Z$ olur.

İspat: Eğer $a \in Z$ ise ispat açıktır. O halde $a \notin Z$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden

$0 = [d(x\sigma(a)), a]_{\sigma,\tau} = [d(x)\sigma(a) + xd(\sigma(a)), a]_{\sigma,\tau}$

$= d(x)[\sigma(a), \sigma(a)] + [d(x), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + x[d(\sigma(a)), a]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(a)]d(\sigma(a))$

$$[x, \tau(a)]d(\sigma(a)) = 0 \qquad \forall x \in R \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) de x yerine xy, $y \in R$ yazarsak

$0 = [xy, \tau(a)]d(\sigma(a)) = [x, \tau(a)]yd(\sigma(a)) + x[y, \tau(a)]d(\sigma(a)) = [x, \tau(a)]yd(\sigma(a))$

ve dolayısıyla R halkası asal halka ve $a \notin Z$ olduğu için

$$d(\sigma(a))=0 \tag{4.9}$$

bulunur. Şimdi $D(x)=[x, \sigma(a)]$ ve $H(x)=[x, a]_{\sigma,\tau}$ dönüşümlerini tanımlayalım. D, R halkasının bir türevidir ve üstelik $\forall x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} H(xy)&=[xy, a]_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(a)]+[x, a]_{\sigma,\tau}\, y \\ &=H(x)y+xD(y) \end{aligned} \tag{4.10}$$

ve

$$\begin{aligned} H(xy)&=[xy, a]_{\sigma,\tau}=x[y, a]_{\sigma,\tau}+[x, \tau(a)]y \\ &=[x, \tau(a)]y+xH(y) \end{aligned} \tag{4.11}$$

dir. Öte yandan hipotezden dolayı

$$Hd(x)=0, \qquad \forall x \in R \tag{4.12}$$

olur. Keyfi bir $r \in R$ elemanı için hipotezden

$0=[d(r), a]_{\sigma,\tau}=d(r)\sigma(a)-\tau(a)d(r)$ ve böylece

$$\begin{aligned} 0=d(0)&=d(d(r)\sigma(a)-\tau(a)d(r))=d^2(r)\sigma(a)+d(r)d(\sigma(a))-d(\tau(a))d(r)-\tau(a)d^2(r) \\ &=[d^2(r), a]_{\sigma,\tau}-d(\tau(a))d(r) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise hipotezden dolayı $d(\tau(a))d(r)=0$, $\forall r \in R$ demektir. d, R asal halkasının sıfırdan farklı türevi olduğu için Lemma 3.1.2 kullanılarak $d(\tau(a))=0$ sonucu elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} dH(x)&=d([x, a]_{\sigma,\tau})=d(x\sigma(a)-\tau(a)x)=d(x)\sigma(a)+xd(\sigma(a))-d(\tau(a))x-\tau(a)d(x) \\ &=[d(x), a]_{\sigma,\tau}=0 \end{aligned}$$

olduğu için

$$dH(R)=0 \tag{4.13}$$

olur. Şimdi herhangi $x,y \in R$ elemanları için

$$\begin{aligned} 0=Hd(xH(y))&=H(d(x)H(y)+xdH(y))=H(d(x)H(y))=Hd(x)H(y)+d(x)DH(y) \\ &=d(x)DH(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$d(R)DH(R)=0$$

ve yine d, sıfırdan farklı türev olduğundan Lemma 3.1.2 den dolayı $DH(R)=0$ elde edilir. Yani

$[[x, a]_{\sigma,\tau}, \sigma(a)]=0, \qquad \forall x\in R \qquad (4.14)$

bulunur. (4.14) de x yerine $\tau(a)x$, $x\in R$ yazarsak bu durumda

$0=[[\tau(a)x, a]_{\sigma,\tau}, \sigma(a)]=[\tau(a)[x, a]_{\sigma,\tau}+[\tau(a), \tau(a)]x, \sigma(a)]=[\tau(a)[x, a]_{\sigma,\tau}, \sigma(a)]$

$=\tau(a)[[x, a]_{\sigma,\tau}, \sigma(a)]+[\tau(a), \sigma(a)][x, a]_{\sigma,\tau}$

ve böylece

$[\tau(a), \sigma(a)][x, a]_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall x\in R \qquad (4.15)$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde x yerine xy yazarsak bu durumda

$0=[\tau(a), \sigma(a)][xy, a]_{\sigma,\tau}=[\tau(a), \sigma(a)][x, a]_{\sigma,\tau}y+[\tau(a), \sigma(a)]x[y, \sigma(a)]$

$=[\tau(a), \sigma(a)]x[y, \sigma(a)]$

bulunur. R halkası asal halka olduğu için bu son ifadeden

$a\in Z \qquad$ veya $\qquad [\tau(a), \sigma(a)]=0$

elde edilir. $a\notin Z$ kabul ettiğimiz için $[\tau(a), \sigma(a)]=0$ olur. Öte yandan (4.14) eşitliğinden $HD(x)=0$, $\forall x\in R$ demektir. Böylece

$DH(R)=HD(R)=0 \qquad (4.16)$

elde edilir. Bu durumda

$0=HD(xy)=H(D(x)y+xD(y))=HD(x)y+D(x)D(y)+xHD(y)+[x, \tau(a)]D(y)$

$=D(x)D(y)+[x, \tau(a)]D(y)=([x, \sigma(a)]+[x, \tau(a)])D(y)$

$=[x, \sigma(a)+\tau(a)]D(y)$

bulunur. Bu son ifadeden D, R asal halkasında bir türev olduğu için Lemma 3.1.2 kullanılarak

$D=0 \qquad$ veya $\qquad \sigma(a)+\tau(a)\in Z$

$a\notin Z$ kabul ettiğimiz için $D\neq 0$ ve dolayısıyla $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ dir.

Sonuç 4.7 : Eğer $[d(R), U]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur.

İspat: Lemma 4.6 uygulanarak $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

Teorem 4.8 : Eğer $d([R, a]_{\sigma,\tau})=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ dir.

İspat: $0= d([\tau(a)r, a]_{\sigma,\tau})=d(\tau(a)[r, a]_{\sigma,\tau})= d(\tau(a))[r, a]_{\sigma,\tau} + \tau(a)d([r, a]_{\sigma,\tau})$

$0=d(\tau(a))[r, a]_{\sigma,\tau}$ $\forall r\in R$ (4.17)

olur. (4.17) de r yerine rs, r, s∈R yazalım ve yine (4.17) eşitliğini kullanalım

$0=d(\tau(a))[rs, a]_{\sigma,\tau}=d(\tau(a))r[s, \sigma(a)]+ d(\tau(a))[r, a]_{\sigma,\tau}\, s$

$d(\tau(a))R[s, \sigma(a)]=0$ $\forall s\in M$

elde edilir. R halkası asal halka olduğu için buradan

$d(\tau(a))=0$ veya $a\in Z$ (4.18)

bulunur. Eğer $a\in Z$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olur ve ispat tamamlanır. O halde $a\notin Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hipotezden

$0=d([r\sigma(a), a]_{\sigma,\tau})=d([r, a]_{\sigma,\tau}\sigma(a))=d([r, a]_{\sigma,\tau})\sigma(a))+[r, a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))=[r, a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))$

olur. Bu son ifadede r yerine rs, r, s∈R elemanı yazarsak ve yine bu ifadeyi kullanırsak;

$0=[rs, a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))=r[s, a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))+[r, \tau(a)]sd(\sigma(a))=[r, \tau(a)]sd(\sigma(a))$

bulunur. R halkası asal halka olduğundan ve $a\notin Z$ kabul ettiğimiz için $d(\sigma(a))=0$ elde edilir. Öte yandan hipotezde $d(\sigma(a))=0$ ve $d(\tau(a))=0$ olduğu kullanılarak

$0=d([r, a]_{\sigma,\tau})=d(r\sigma(a)-\tau(a)r)=d(r)\sigma(a)+rd(\sigma(a))-d(\tau(a))r-\tau(a)d(r)=[d(r), a]_{\sigma,\tau}$

bulunur. Yani,

$$0=[d(R), a]_{\sigma,\tau}$$

olur. Bu ise Lemma 4.6 dan $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ dir.

Sonuç 4.9 : $d([R, U]_{\sigma,\tau})=0$ ise $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

İspat: $\forall u\in U$ için $d([R, u]_{\sigma,\tau})=0$ ise Teorem 4.8 uygulanarak $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

Önerme 4.10 : M, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $([R, M]_{\sigma,\tau}, a)_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ dir.

İspat: $m\in M$ elemanı için $d_1(r)=[r, m]_{\sigma,\tau}$ ve $d_2(r)=(r, a)_{\sigma,\tau}$ dönüşümlerini tanımlayalım. Bu durumda

$d_2d_1(r)= d_2([r, m]_{\sigma,\tau})=([r, m]_{\sigma,\tau}, a)_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan $d_2d_1(R)=0$ olur. Öte yandan

$d_1(r\sigma(m))=[r\sigma(m), m]_{\sigma,\tau}=r[\sigma(m), \sigma(m)]+[r, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m)=d_1(r)\sigma(m)$

elde edilir. Eğer $d(a)=0$ ise bu durumda

$0=d((r, a))=(d(r), a)+(r, d(a))=(d(r), a)$

olur ve böylece $(d(R), a)=0$ bulunarak istenen elde edilmiş olur.

Eğer $a \in Z$ ise bu durumda $0=d((a, a))=2d(a)a+2ad(a)=4d(a)a$

ve $charR \neq 2$ olduğu için $d(a)a=0$ olur. $a \in Z$ olduğundan buradan $d(a)Ra=0$ düşünülerek $d(a)=0$ veya $a=0$ elde edilir. Her iki durumda da $(d(R), a)=0$ olduğu açıktır.

Önerme 4.12 : $[d(R), a]=0 \Leftrightarrow d([R, a])=0$

İspat: $\Rightarrow$: $[d(R), a]=0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.10 (i) den $a \in Z$ olacağı için $[R, a]=0$ ve dolayısıyla da $d([R, a])=0$ dır.

$\Leftarrow$: $d([r, a])=0$ olsun. r yerine ar, $r \in R$ yazalım. Bu durumda

$0=d([ar,a])]=d([a[r, a])=d(a)[r, a]+ad([r, a])$

hipotezden

$$0=d(a)[r, a] \qquad \forall r \in R \qquad (4.21)$$

olur. (4.21) de r yerine rs, r, $s \in R$ yazalım ve (4.21) eşitliğini yeniden kullanalım.

$0=d(a)[rs, a]=d(a)r[s, a]+d(a)[r, a]s=d(a)r[s, a]$

Yani

$$0=d(a)R[s, a] \qquad \forall s \in R$$

olur. R halkası asal halka olduğu için

$$d(a)=0 \qquad \text{veya} \qquad a \in Z \qquad (4.22)$$

bulunur. Eğer $d(a)=0$ ise bu durumda

$0=d([r, a])=[d(r), a]+[r, d(a)]=[d(r), a]$

bulunarak ispat tamamlanır. Eğer $a \in Z$ ise zaten$[d(R), a]=0$ dır.

Sonuç 4.13 : $d([R, a])=0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Önerme 4.12 den $[d(R), a]=0$ ve dolayısıyla $a \in Z$ olur.

Sonuç 4.14 : $d([R, R])=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: Sonuç 4.13 ten $R \subset Z$ ve dolayısıyla R komütatif olur.

Lemma 4.15 : $(R, a)_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in Z$ dir.

İspat: Hipotezden $(x, a)_{\sigma,\tau}=0$, $\forall\ x\in R$ dir. Burada x yerine xy, $y\in R$ yazalım.

$0=(xy, a)_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(a)]+ (x, a)_{\sigma,\tau}y=x[y, \sigma(a)]$

$0=R[R, \sigma(a)]$

bulunur. R halkası asal halka olduğundan $a\in Z$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.16 : i) $(R, R)_{\sigma,\tau}=0$ ise R halkası komütatiftir.

ii) $(R, R)=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: (i) Lemma 4.15 den $R\subset Z$, yani R halkası komütatif olur.

(ii) Lemma 4.15 de $\sigma=\tau$, birim dönüşüm olarak alınırsa $R\subset Z$, yani R halkası komütatif olur.

Teorem 4.17 : $(R, a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $a\in Z$ dir.

İspat: Hipotezden $(x, a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$, $\forall\ x\in R$ dir. Burada x yerine $x\sigma(a)$, $x\in R$ yazarsak

$C_{\sigma,\tau}\ni(x\sigma(a), a)_{\sigma,\tau}=x[\sigma(a), \sigma(a)]+(x, a)_{\sigma,\tau}\sigma(a)=(x, a)_{\sigma,\tau}\sigma(a)$

olur. Bu ifadedeki $(x, a)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğu için Sonuç 3.3.29 dan

$(R, a)_{\sigma,\tau}=0$ veya $a\in Z$

bulunur. Eğer $(R, a)_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda Lemma 4.15 den $a\in Z$ olur.

Sonuç 4.18 : Eğer $(R, a)\subset Z$ ise bu durumda $a\in Z$ dir.

İspat: Teorem 4.17 de $\sigma=\tau$, birim dönüşüm alınarak istenen elde edilir.

Sonuç 4.19 : Eğer $(R, R)\subset Z$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

İspat: $\forall r\in R$ elemanı için hipotezden $(R, r)\subset Z$ olur. Sonuç 4.18 den $\forall r\in R$ için $r\in Z$ ve dolayısıyla R halkası komütatif olur.

Sonuç 4.20 : $(R, U)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: Teorem 4.17 den $U\subset Z$ olduğu açıktır.

Teorem 4.21 : Eğer $(U, a)\subset Z$ ise bu durumda $a^2\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

İspat: Hipotezden $(u, a)=ua+au\in Z$, $\forall u\in U$ dur. Buna göre $\forall x\in R$ ve $\forall u\in U$ için $[x, u]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $a[x, u]_{\sigma,\tau}+[x, u]_{\sigma,\tau}a\in Z$ olur. Bu elemanı a ile komute edersek;

$0=[a[x, u]_{\sigma,\tau}+[x, u]_{\sigma,\tau}, a]=a[[x, u]_{\sigma,\tau}, a]+[[x, u]_{\sigma,\tau}, a]a$

olur ki bu

$$([[x, u]_{\sigma,\tau}, a], a)=0, \qquad \forall x\in R, \forall u\in U \tag{4.23}$$

demektir. Şimdi

$([[x, u]_{\sigma,\tau}, a], a)=[[x, u]_{\sigma,\tau}, (a, a)]-([[x, u]_{\sigma,\tau}, a], a)$

bağıntısını kullanarak

$0=[[x, u]_{\sigma,\tau}, (a, a)]=[[x, u]_{\sigma,\tau}, 2a^2]=2[[x, u]_{\sigma,\tau}, a^2]$

$\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan

$$[[x, u]_{\sigma,\tau}, a^2]=0, \qquad \forall x\in R \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) eşitliğinde x yerine $x\sigma(u)$ yazarsak

$0=[[x\sigma(u), u]_{\sigma,\tau}, a^2]=[x[\sigma(u), \sigma(u)]+[x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u), a^2]$

$\quad=[[x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u), a^2]=[x, u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u), a^2]+[[x, u]_{\sigma,\tau}, a^2]\sigma(u)$

ve dolayısıyla

$$[x, u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u), a^2]=0, \qquad \forall x\in R \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) eşitliğinde x yerine xy yazarsak ve yine (4.25) eşitliğini kullanırsak

$0=[xy, u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u), a^2]=x[y, u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u), a^2]+[x, \tau(u)]y[\sigma(u), a^2]=[x, \tau(u)]y[\sigma(u), a^2]$

olur. Yani

$[R, \tau(u)]R[\sigma(u), a^2]=0$

demektir. Buradan ise R halkası asal halka olduğu için

$$u\in Z \qquad \text{veya} \qquad [\sigma(u), a^2]=0$$

bulunur. $u\in Z$ ise $[\sigma(u), a^2]=0$ olduğundan Sonuç olarak $[\sigma(u), a^2]=0$, $\forall u\in U$ yani; $[U, \sigma^{-1}(a^2)]=0$ elde edilir. Bu durumda Lemma 3.2.50 kullanılarak $a^2\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.22 : Eğer $(U, R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden her $u\in U$ ve her $r\in R$ elemanları için;

$0=[(u, r)_{\sigma,\tau}, r]_{\sigma,\tau} = [u\sigma(r)+\tau(r)u, r]_{\sigma,\tau} = u[\sigma(r), \sigma(r)]+[u, r]_{\sigma,\tau}\sigma(r)+\tau(r)[u, r]_{\sigma,\tau}+$
$[\tau(r), \tau(r)]u=[u, r]_{\sigma,\tau}\sigma(r)+\tau(r)[u, r]_{\sigma,\tau}$

olur. Bu

$$([u, r]_{\sigma,\tau}, r)_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall r\in R, \forall u\in U \qquad (4.26)$$

demektir. Öte yandan (4.26) eşitliğini

$0=([u, r]_{\sigma,\tau}, r)_{\sigma,\tau}=(u\sigma(r)-\tau(r)u, r)_{\sigma,\tau}=u\sigma(r)\sigma(r)-\tau(r)u\sigma(r)+\tau(r)u\sigma(r)-\tau(r)\tau(r)u$
$=u\sigma(r^2)-\tau(r^2)u=[u, r^2]_{\sigma,\tau}$

Böylece

$$[u, r^2]_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall r\in R, \forall u\in U \qquad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) ifadesinde r yerine r+s, r, s∈R alalım.

$0=[u, r^2+s^2+rs+sr]_{\sigma,\tau}=[u, r^2]_{\sigma,\tau}+[u, s^2]_{\sigma,\tau}+[u, rs]_{\sigma,\tau}+[u, sr]_{\sigma,\tau}$
$=u\sigma(r)\sigma(s)-\tau(r)\tau(s)u+u\sigma(s)\sigma(r)-\tau(s)\tau(r)u$
$=u(\sigma(r), \sigma(s))-(\tau(r), \tau(s))u$

elde edilir. Bu ifade ise

$$[u, (r, s)]_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall r, s\in R, \forall u\in U \qquad (4.28)$$

demektir. Şimdi (4.28) eşitliğinde r yerine rs, s∈R, yazalım ve yine (4.28) eşitliğini kullanalım.

$0=[u, (rs, s)]_{\sigma,\tau}=[u, r[s, s]+(r, s)s]_{\sigma,\tau}=\tau((r, s))[u, s]_{\sigma,\tau}+[u, (r, s)]_{\sigma,\tau}\sigma(s)$

ve dolayısıyla

$$\tau((r, s))[u, s]_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall r, s\in R, \forall u\in U \qquad (4.29)$$

bulunur. Bu eşitlikte r yerine rt, r, t∈R yazalım.

$0=\tau((rt, s))[u, s]_{\sigma,\tau}=\tau(r)\tau((t, s))[u, s]_{\sigma,\tau}-\tau([r, s])\,\tau(t)[u, s]_{\sigma,\tau}$
$=\tau([r, s])\,\tau(t)[u, s]_{\sigma,\tau}$

olur. Bu ifade ise τ, R nin bir otomorfizması ve R halkası asal halka olduğundan

$$s\in Z \qquad \text{veya} \qquad [U, s]_{\sigma,\tau}=0 \qquad (4.30)$$

demektir.

Eğer $[U, s]_{\sigma,\tau}=0$ ve $s\notin Z$ ise bu durumda hipotezden $(U,R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan r, s∈R elemanları için,

$C_{\sigma,\tau} \ni (u, rs)_{\sigma,\tau}=u\sigma(rs)+\tau(rs)u=u\sigma(r)\sigma(s)+\tau(r)\tau(s)u$

olur. Öte yandan $[u, s]_{\sigma,\tau}=0$ olduğu için;

$C_{\sigma,\tau} \ni u\sigma(r)\sigma(s)+\tau(r)\tau(s)u=u\sigma(r)\sigma(s)+\tau(r)u\sigma(s)$

$=(u\sigma(r)+\tau(r)u)\sigma(s)=(u, r)_{\sigma,\tau}\sigma(s)$

bulunur. $(u, r)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Sonuç 3.3.29 dan

$(U, r)_{\sigma,\tau}=0$ veya $s\in Z$ bulunur.

$s\notin Z$ kabul ettiğimiz için $(U, r)_{\sigma,\tau}=0$, $\forall r\in R$ olmalıdır. Böylece $s\in R$ elemanı için $(U, s)_{\sigma,\tau}=0$ ve $[U, s]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan bu eşitlikleri açılıp taraf tarafa toplanırsa;

$0=u\sigma(s)+\tau(s)u$

$0=u\sigma(s)-\tau(s)u$

$2u\sigma(s)=0$, $\forall u\in U$ elde edilir. $charR\neq 2$ olduğundan

$U\sigma(s)=0$

olur. Bu ise Lemma 3.2.30 (i) den $s=0$ veya $U\subset Z$ olduğunu verir. $s\notin Z$ kabul ettiğimiz için $U\subset Z$ dir.

Önerme 4.23 : Eğer $(U, a)_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

İspat: Herhangi bir $r\in R$ ve $u\in U$ elemanı için $[\tau(r)u, r]_{\sigma,\tau}\in U$ dur. Yani;

$[\tau(r)u, r]_{\sigma,\tau}=\tau(r)[u, r]_{\sigma,\tau}+[\tau(r), \tau(r)]u=\tau(r)[u, r]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Bu durumda hipotezden

$0=(\tau(u)[r, u]_{\sigma,\tau}, a)_{\sigma,\tau}=\tau(u)([r, u]_{\sigma,\tau}, a)_{\sigma,\tau}-[\tau(u), \tau(a)][r, u]_{\sigma,\tau},$

$=-[\tau(u), \tau(a)][r, u]_{\sigma,\tau},$

ve dolayısıyla

$$[\tau(u), \tau(a)][r, u]_{\sigma,\tau}, =0, \qquad \forall u\in U, \forall r\in R \tag{4.31}$$

bulunur. (4.31) eşitliğinde r yerine rs, $r, s\in R$ yazalım ve (4.31) eşitliğini tekrar kullanalım.

$0=[\tau(u), \tau(a)][rs, u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u), \tau(a)]r[s, \sigma(u)]+[\tau(u), \tau(a)][r, u]_{\sigma,\tau}s$

$=[\tau(u), \tau(a)]r[s, \sigma(u)]$

olur. R halkasını asal halka olduğu kullanılarak bu son ifadeden

$[u, a]=0$ veya $u\in Z$

elde edilir. Eğer $u \in Z$ ise $[u, a]=0$ olacağı için Sonuç olarak $[U, a]=(0)$ bulunur. Bu durumda Lemma 3.2.50 kullanılarak $a \in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ elde edilir. Böylece $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ bulunur.

Önerme 4.24 : (a) Eğer $(R, U)_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

(b) Eğer $(R, U)=0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

İspat: (a) Keyfi $x, y \in R$ ve $u \in U$ elemanları için hipotezden

$$0=(xy, u)_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(u)]+(x, u)_{\sigma,\tau}y$$
$$=x[y, \sigma(u)]$$

olur. R halkası asal halka olduğundan $U \subset Z$ elde edilir.

(b) (a) da $\sigma=\tau$, Birim dönüşüm alındığında ispat açıktır.

BÖLÜM 5

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

R, karakteristiği 2 den farklı asal halka ve d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R)\subset Z$ koşulu altında R halkasının komütatif olduğu 1981 de P.H. Lee ve T. K. Lee tarafından gösterilmiştir. J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr ise R halkası yerine onun bir U Lie ideali alınarak $U\subset Z$ olduğu ispatlamışlardır. 1995 yılında da N. Aydın ve M. Soytürk bu teoremi U yu R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali alarak genelleştirmişlerdir. Bu bölümde ise U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali alınarak ispatlanacaktır. Ayrıca 1970 yılında I. N. Herstein tarafından ispatlanan ve T yerine U, (σ,τ)-sağ Lie ideali alınarak 1992 yılında K.Kaya tarafından genelleştirilen, "R karakteristiği ikiden farklı asal halka, T onun bir Lie ideali olmak üzere $[T, T]\subset Z$ iken $T\subset Z$ dir". teoremi (σ,τ)-sol Lie ideal için ispatlanacaktır. Ek olarak, (σ,τ)-Lie idealler için bazı sonuçlar verilecektir.

Bu bölümde, R bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali ve $0\neq d: R\rightarrow R$, $\sigma d=d\sigma$, $d\tau=\tau d$ koşulunu sağlayan bir türevi olarak alınacaktır.

Uyarı 5.1: $d(U)+U$, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie idealidir.

İspat: $\forall u,v\in U$ ve $\forall x\in R$ için

$$[x, d(u)+v]_{\sigma,\tau} = [x, d(u)]_{\sigma,\tau}+ [x, v]_{\sigma,\tau}$$

$$= [x, d(u)]_{\sigma,\tau}+ [d(x), u]_{\sigma,\tau} - [d(x), u]_{\sigma,\tau}+ [x, v]_{\sigma,\tau}$$

$$= d([x, u]_{\sigma,\tau}) - [d(x), u]_{\sigma,\tau} + [x, v]_{\sigma,\tau} \in d(U)+U$$

bulunur. Böylece $d(U)+U$ R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie idealidir.

Not 5.2 : Eğer $d^2(U)=0$ ise bu durumda $d(d(U)+U)\subset d(U)\subset d(U)+U$ ve üstelik $d^2(d(U)+U)=0$ dır. O halde genelliği bozmadan $d^2(U)=0$ iken $d(U)\subset U$ kabul edebiliriz.

Lemma 5.3 : Eğer $d^2(U)=0$ ve $d(U)\subset Z$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

İspat: $U\subset Z$ ise ispat açıktır. O halde $U\not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. $u\in U$ ve $x\in R$ için,

$U\ni[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u), \tau(u)]x=\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}$ olur. Bu durumda

$\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}\in U$ elemanı için hipotezden

$0=d^2(\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau})= d(d(\tau(u))[x, u]_{\sigma,\tau}+\tau(u)d([x, u]_{\sigma,\tau}))=2\, d(\tau(u))d([x, u]_{\sigma,\tau})$

bulunur. $\mathrm{char}R\neq2$ olduğundan,

$d(\tau(u))d([x, u]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall u\in U, \forall x\in R$

olur. $d(U)\subset Z$ olduğu için bu son eşitlikten

$$d(u)=0 \quad \text{veya} \quad d([x, u]_{\sigma,\tau})=0 \tag{5.1}$$

bulunur. $d(u)\neq0$ olsun. Eğer $d([x, u]_{\sigma,\tau})=0$, $\forall x\in R$ olursa bu durumda x yerine $x\sigma(u)$ elemanını yazarsak ve yine bu eşitliği kullanırsak;

$0= d([x\sigma(u), u]_{\sigma,\tau}=d(x[\sigma(u), \sigma(u)]+[x, u]_{\sigma,\tau})=d([x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u))$

$=d([x, u]_{\sigma,\tau})\sigma(u)+[x, u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))$

$$[x, u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=0 \qquad \forall u\in U, \forall x\in R \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) de x yerine xy, $\forall y\in R$ yazalım ve yine (5.2) eşitliğini kullanalım.

$0=[x, \tau(u)]y\, d(\sigma(u))+x[y, u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))= [x, \tau(u)]yd(\sigma(u))$

olduğundan $[x, \tau(u)]Rd(\sigma(u))=(0)$ elde edilir. R halkası asal halka ve $d(u)\neq0$ olduğu için $u\in Z$ bulunur. O halde (5.1) den $d(u)=0$ veya $u\in Z$ sonucuna varılır. Şimdi, $K=\{u\in U \mid d(u)=0\}$ ve $L=\{u\in U \mid u\in Z\}$ kümelerini tanımlarsak, K ve L kümeleri U'nun iki toplamsal öz alt grubudur. Brauer-Trick'ten dolayı U=K veya U=L olmalıdır. Eğer U=L olursa bu durumda $U\subset Z$ olacağı için bu kabulümüzle çelişir. O halde U=K yani $d(U)=0$ olmalıdır. Bu durumda

$0=d(([x, u]_{\sigma,\tau})=[d(x), u]_{\sigma,\tau}$

olur. Bu ise Lemma 4.7 den $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ sonucunu verir.

Teorem 5.4 : Eğer $d(U) \subset Z$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ dur.

İspat: Eğer $U \subset Z$ ise ispat açıktır. O halde $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall x, y \in R$ ve $v, u \in U$ elemanı için hipotezden

$$Z \ni d([d(v)x, u]_{\sigma,\tau})=d(d(v)[x, u]_{\sigma,\tau} + [d(v), \tau(u)]x)$$

$$= d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau} + d(v)d([x, u]_{\sigma,\tau})$$

olur. Bu ifadenin sağındaki terim hipotezden dolayı zaten Z'nin elemanı olduğu için;

$$d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau} \in Z, \qquad \forall x \in R\ \forall u, v \in U \tag{5.3}$$

elde edilir. (5.3) de x yerine $x\sigma(u)$, $u \in U$ yazarsak,

$$d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in Z$$

olur. Yine $d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan bu son ifade ve Önerme 2.11 den

$$d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u \in U \qquad \text{veya} \qquad u \in Z$$

bulunur. Eğer $d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau}=0$, $\forall v \in U$ ise x yerine xy, $y \in R$ yazarsak;

$$0=d^2(v)[x, u]_{\sigma,\tau}y+ d^2(v)x[y, \sigma(u)]= d^2(v)x[y, \sigma(u)]$$

elde edilir. Bu ise R halkası asal halka olduğu için

$$d^2(v)=0 \qquad \text{veya} \qquad u \in Z$$

sonucunu verir. Birinci durumda ise Lemma 5.3 den $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ bulunur. $u \in Z$ ise yine $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir. O halde $\forall u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ elde edilir.

Lemma 5.5 : $d^2(U)=0$ ve $ad([R, U]_{\sigma,\tau}) = 0$ ise bu durumda $a=0$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ dur.

İspat: $[x\sigma(u), u]_{\sigma,\tau} \in [R, U]_{\sigma,\tau}$ alalım. Buna göre

$[x\sigma(u), u]_{\sigma,\tau}=x[\sigma(u), \sigma(u)]+ [x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in [R, U]_{\sigma,\tau}$ ve dolayısıyla

$[x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in [R, U]_{\sigma,\tau}$ elemanı için hipotezden;

$$0=ad([x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u))= ad([x, u]_{\sigma,\tau})\sigma(u) + a[x, u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))$$

$$a[x, u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=0 \qquad \forall u \in U \tag{5.4}$$

olur. Öte yandan $d^2(U)=0$ için Not 5.2 den $d(U) \subset U$ alınabileceği için (5.4) de u yerine $u+d(v)$, $u, v \in U$ yazar ve (5.4) eşitliğiyle $\sigma d=d\sigma$ ve $d^2(u)=0$ olduğunu kullanırsak;

$0=a[x, u+d(v)]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u+d(v)))=a([x, u]_{\sigma,\tau}+[x, d(v)]_{\sigma,\tau})(d(\sigma(u))+d(\sigma(d(v)))$

$=a[x, u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u)) + a[x, d(v)]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u))$

$a[x, d(v)]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u))=0 \qquad \forall u, v\in U, \forall x\in R$

elde edilir. Bu ise ; $\sigma d=d\sigma$ olduğundan;

$\sigma^{-1}(a[x, d(v)]_{\sigma,\tau})d(U)=0$

demektir. Bu son ifadeye Teorem 3.2.61 uygulanarak $\forall u\in U$ için

$\sigma(u)+\tau(u)\in Z, \qquad$ veya $\quad a[x, d(v)]_{\sigma,\tau}=0, \forall v\in U$

bulunur. ($U\subset Z$ ise zaten $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. Bu nedenle $U\not\subset Z$ olduğunu varsayarak Teorem 3.2.61 i kullanabiliriz.) Eğer $a[x, d(v)]_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda x yerine xy, $y\in R$ yazarsak;

$0=a[xy, d(v)]_{\sigma,\tau} = a[x, d(v)]_{\sigma,\tau}y + ax[y, \sigma(d(v))]$

$=ax[y, \sigma(d(v))] \qquad \forall v\in U, \forall x, y\in R$

olur. R halkası asal olduğundan bu son eşitlikten

$a=0 \qquad$ veya $\qquad d(U)\subset Z$

elde edilir. Eğer $d(U)\subset Z$ ise Teorem 5.4 den $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.6 : Eğer $d^2(U)=0$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur.

İspat: Eğer $U\subset Z$ ise ispat açıktır. O halde $U\not\subset Z$ kabul edelim. Bu durumda

$\exists u_0\in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z \qquad (5.5)$

olur. $[x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in U$ elemanı için hipotezden;

$0=d^2([x, u]_{\sigma,\tau}\sigma(u))= d(d([x, u]_{\sigma,\tau})\sigma(u) + [x, u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u)))=2d([x, u]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u))$

$charR\neq 2$ olduğundan,

$d([x, u]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u))=0 \qquad \forall u\in U, \forall x\in R \qquad (5.6)$

bulunur. Benzer şekilde $\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ elemanı için yine hipotezden ve $charR\neq 2$ olduğundan

$d(\tau(u))d([x, u]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall u\in U, \forall x\in R \qquad (5.7)$

olur. Öte yandan ,

$0=d^2([u, v]_{\sigma,\tau}) =d([d(u), v]_{\sigma,\tau}+ [u, d(v)]_{\sigma,\tau}=2[d(u), d(v)]_{\sigma,\tau}$

charR≠2 olduğundan,

$$[d(u), d(v)]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall u, v\in U \qquad (5.8)$$

bulunur. Bu ise ;

$$d(u)\sigma d(v))=\tau(d(v))d(u) \qquad (5.9)$$

demektir. (5.7) ifadesinde u yerine u+v yazalım

$0=d(\tau(u+v))d([x,u+v]_{\sigma,\tau})$

$=d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,v]_{\sigma,\tau})$

Bu son ifadede (5.7) eşitliğini kullanırsak;

$$d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall x\in R,\forall u,v\in U \qquad (5.10)$$

bulunur. (5.10) eşitliğini sağdan $d(\sigma(u))$ ile çarpar ve sırasıyla (5.9) ve (5.7) eşitliklerini kullanırsak;

$0 = d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u)) + d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u))=d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u))$

$= d(\tau(u)) d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})= \tau(d(u)^2) d([x,v]_{\sigma,\tau})$

yani;

$\tau(d(u)^2) d([R, U]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall u\in U$

elde edilir. Bu ise Lemma 5.5 den

$$\sigma(v)+\tau(v)\in Z, \forall v\in U \qquad \text{veya} \qquad d(u)^2 =0, \forall u\in U$$

bulunur. Birinci durum (5.5) kabulü ile çelişeceği için $d(u)^2=0$, $\forall u\in U$ olmalıdır. Öte yandan (5.10) eşitliğinde v yerine d(v), $v\in U$ yazar ve $d\tau=\tau d$ olduğunu kullanırsak;

$0=d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(d(v)))d([x,u]_{\sigma,\tau})$

$=d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) + \tau(d^2(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})$

hipotez kullanılarak;

$0=d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=\tau(d(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})$

$=\tau(d(u))[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}+\tau(d(u))[x,d^2(v)]_{\sigma,\tau}$

elde edilir. Buradan

$d(u)\,\tau^{-1}([d(x),d(v)]_{\sigma,\tau})=0, \quad \forall x\in R, \forall u,v\in U$

olur. Bu ise;

$d(U)\,\tau^{-1}([d(x),d(v)]_{\sigma,\tau})=0, \quad \forall\, v\in U$

olduğunu verir. Buradan Teorem 3.2.61 kullanılarak

$\sigma(u)+\tau(u)\in Z, \forall u\in U \qquad$ veya $\qquad [d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}=0, \quad \forall v\in U, \forall x\in R$

bulunur. Birinci durum (5.5) kabulüyle çelişeceği için $[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}=0, \forall v\in U, \forall x\in R$ olmalıdır. Bu eşitlikte x yerine xd(u), $u\in U$ yazarsak ve bu eşitliği tekrar kullanırsak;

$0= [d(xd(u)),d(v)]_{\sigma,\tau} = [d(x)d(u), d(v)]_{\sigma,\tau}= [d(x), \tau(d(v))]d(u)$

Bu ise

$$[d(x), \tau(d(v))]d(U)=0 \tag{5.11}$$

olduğunu verir. Yine Teorem 3.2.61 den

$\sigma(u)+\tau(u)\in Z, \forall u\in U \qquad$ veya $\quad [d(R), \tau(d(U))]=0$

bulunur. (5.9) ifadesinde birinci durum yine (5.5) kabulüyle çelişir. İkinci durumda ise Teorem 3.1.10 (i) den $d(U)\subset Z$ elde edilir. Bu ise yine Teorem 5.4 den $\sigma(u)+\tau(u)\in Z, \forall u\in U$ sonucunu verir.

Böylece tüm durumlarda çelişki bulunduğu için kabulümüz yanlıştır $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olmalıdır.

Teorem 5.7 : R karakteristiği iki ve üçten farklı asal halka olsun. $d(U)\subset U$ ve $d^2(U)\subset Z$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z, \forall u\in U$ dır.

İspat: Eğer $U\subset Z$ ise ispat açıktır. O halde $U\not\subset Z$ kabul edelim. Bu durumda

$$\exists\, u_0\in U \text{ elemanı için } \sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z \tag{5.12}$$

olur.

İlk olarak $d(Z)=0$ durumu için ispat yapalım. Bu durumda $d^3(U)=d(d^2(U))\subset d(Z)=0$ olduğundan $d^3(U)=0$ alabiliriz. $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ elemanı için;

$$\begin{aligned}0&= d^3(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}) = d^2(d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + \tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau})\\&= d(d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+ 2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) +\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})\\&= 3\,(d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau}))\end{aligned}$$

char $R \neq 3$ olduğunu kullanırsak;

$$d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=0 \qquad (5.13)$$

(5.13) ifadesinde u yerine $d(u) \in U$ yazarak, $d\tau=\tau d$ ve $d^3(U)=0$ olduğunu kullanırsak:

$$\tau(d^2(u))d^2([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))=0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $d^2(U) \subset Z$ hipotezi kullanılarak;

$$d^2(u)=0, \text{ veya } d^2([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))=0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (5.14)$$

bulunur. Bu durumda $K=\{u \in U | \ d^2(u)=0\}$ ve $L=\{u \in U | \ d^2([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))=0\}$kümelerini tanımlayalım. K ve L kümeleri, U toplamsal grubunun iki öz alt grubu olduğundan Brauer-Trick'ten U=K veya U=L olmalıdır.

Eğer U=K olursa bu durumda Teorem 5.6 dan $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ olacağı için bu (5.12) kabulü ile çelişir. O halde U=L olmalıdır. Yani

$$d^2([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))=0 \qquad \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (5.15)$$

olur. (5.15) ifadesinde x yerine $\tau(d(u))x$, $x \in R$, $u \in U$ yazalım ve $\tau d=d\tau$ olduğunu kullanalım :

$$0= d^2(\tau(d(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau}) = d(\tau(d^2(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau}+ \tau(d(u))d([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))$$

$$=\tau(d^3(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau}+2\tau(d^2(u))d([x, d(u)]_{\sigma,\tau})+ \tau(d(u))d^2([x, d(u)]_{\sigma,\tau}))$$

Bu son ifadede $d^3(U)=0$, char$R \neq 2$ olduğunu ve (5.15)eşitliğini kullanırsak;

$$\tau(d^2(u))d([x, d(u)]_{\sigma,\tau}) =0 \qquad \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (5.16)$$

bulunur. $d^2(U) \subset Z$ olduğundan (5.16) eşitliğinden;

$$d^2(u)=0 \qquad \text{veya} \qquad d([x, d(u)]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (5.17)$$

olur. (5.14) deki gibi düşünülerek $d^2(u)=0$, $\forall u \in U$ olması durumunda Teorem 5.6 dan (5.12) kabulü ile çelişeceğimiz için (5.17) den;

$$d([x, d(u)]_{\sigma,\tau})=0 \qquad \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (5.18)$$

elde edilir. (5.18) de x yerine $\tau(d(u))x$, $x\in R$, $u\in U$ yazalım ve $\tau d=d\tau$ olduğunu kullanalım;

$0= d(\tau(d(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau} = \tau(d^2(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau}+ \tau(d(u))d([x, d(u)]_{\sigma,\tau})$

olur. Bu ifadenin son terimi (5.18) den dolayı sıfır olduğundan;

$$\tau(d^2(u))[x, d(u)]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall x\in R, \forall u\in U \tag{5.19}$$

bulunur. Yine $d^2(U)\subset Z$ olduğundan

$d^2(u)=0$ veya $[x, d(u)]_{\sigma,\tau}=0$ $\quad \forall x\in R, \forall u\in U$

elde edilir. (5.14) deki gibi tartışırsak

$$[x, d(u)]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall x\in R, \forall u\in U \tag{5.20}$$

bulunur. Bu ifadede x yerine xy, $y\in R$ yazarsak ve (5.20) eşitliğini tekrar kullanırsak;

$0=[xy, d(u)]_{\sigma,\tau} = x[y, d(u)]_{\sigma,\tau} + [x, \sigma(d(u))]y$

$$[x, \sigma(d(u))]y=0 \qquad \forall x\in R, \forall u\in U \tag{5.21}$$

olur. (5.21) den R asal halka olduğundan $d(U)\subset Z$ ve Teorem 5.4 den ise $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ dur. Bu da (5.12) kabulüyle çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $d(Z)=0$ durumunda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ olmalıdır.

Şimdi $d(Z)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0\neq d(\alpha)\in d(Z)$ olacak biçimde $\alpha\in Z$ elemanı vardır. $U\ni[\alpha x, u]_{\sigma,\tau}=\alpha[x, u]_{\sigma,\tau}+[\alpha, \tau(u)]=\alpha[x, u]_{\sigma,\tau}\in U$ elemanı için hipotezden;

$$Z \ni d^2(\alpha [x, u]_{\sigma,\tau})= d(d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}+ \alpha d([x, u]_{\sigma,\tau}))$$
$$= d^2(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau} +2 d(\alpha)d([x, u]_{\sigma,\tau})+ \alpha d^2 ([x, u]_{\sigma,\tau})$$

olur. Bu ifadede $\alpha d^2([x, u]_{\sigma,\tau})\in Z$ olduğu için;

$$d^2(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau} +2 d(\alpha)d([x, u]_{\sigma,\tau}) \in Z \quad \forall x\in R, \forall u\in U \tag{5.22}$$

bulunur. (5.22) ifadesinde x yerine $x\alpha$ yazalım.

$$Z \ni d^2(\alpha)[x\alpha, u]_{\sigma,\tau} +2 d(\alpha)d([x\alpha, u]_{\sigma,\tau})$$
$$= d^2(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}\, \alpha+2 d(\alpha)d([x, u]_{\sigma,\tau})\, \alpha+2 d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}d(\alpha)$$
$$= (d^2(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau} +2 d(\alpha)d([x, u]_{\sigma,\tau}))\, \alpha+2 d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}d(\alpha)$$

olur. Bu ifadede (5.22) eşitliği ve $\alpha \in Z$ olduğu kullanılırsa;

$$2d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}d(\alpha) \in Z \qquad \forall x \in R, \forall u \in U \qquad (5.23)$$

elde edilir. R asal halka, char$R \neq 2$ ve $0 \neq d(\alpha) \in Z$ olduğu kullanılırsa (5.23) ifadesinden

$$[x, u]_{\sigma,\tau} \in Z \qquad \forall x \in R, \forall u \in U \qquad (5.24)$$

bulunur. (5.24) ifadesinden Lemma 3.3.53 kullanılarak $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ elde edilir. Bu ise (5.12) ifadesi ile çelişeceği için kabulümüz yanlıştır.

O halde $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ olmalıdır.

Teorem 5.8 : R karakteristiği ikiden farklı asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideal, $a \in R$ olsun. Eğer $[U, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ dir.

İspat: $\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ elemanı için hipotezden

$$0=[\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[[x, u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} + [\tau(u), \tau(a)][x, u]_{\sigma,\tau}$$

Hipotezi tekrar kullanırsak,

$$\tau([u, a])[x, u]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall x \in R, \forall u \in U \qquad (5.25)$$

olur. (5.25) eşitliğinde x yerine xy, $x,y \in R$, yazar ve (5.25) eşitliğini tekrar kullanırsak;

$$0=\tau([u, a])[xy, u]_{\sigma,\tau} = \tau([u, a])x[y, \sigma(u)]+ \tau([u, a])[x, u]_{\sigma,\tau}y=\tau([u, a])x[y, \sigma(u)]$$

olur. Yani,

$$\tau([u, a])R[y, \sigma(u)]=0 \qquad \forall y \in R, \forall u \in U \qquad (5.26)$$

bulunur. R asal halka olduğundan (5.26) eşitliğinden;

$$[u, a]=0 \qquad \text{veya} \qquad u \in Z \qquad \forall u \in U$$

olur. Eğer $u \in Z$ ise $[u, a]=0$ olacağı için $[U, a]=0$ elde edilir. Bu ise Lemma 3.2.50.den $a \in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ olduğunu verir.

Sonuç 5.9 : R karakteristiği ikiden farklı asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. Eğer $[U, U]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ dur.

İspat Teorem 5.8 uygulanarak istenen kolayca görülür.

Lemma 5.10 : R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka, d: $R\rightarrow R$, $d(x)=[x, a]_{\sigma,\tau}$ şeklinde tanımlı bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer $d^2(R)=0$ ise $a\in Z$ dir.

İspat: $x,y\in R$ elemanları için,

$d(xy)=[xy, a]_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(a)]+[x, a]_{\sigma,\tau}y$

$$d(xy)=x[y, \sigma(a)]+d(x)y \qquad \forall x, y\in R \tag{5.27}$$

olduğu görülür. Hipotezden,

$0=d^2(xy)=d(d(xy))=d(d(x)y+x[y, \sigma(a)])=d^2(x)y+d(x)[y, \sigma(a)]+d(x)[y, \sigma(a)]$
$+x[[y, \sigma(a)], \sigma(a)]$

olur. Bu ifadede $d^2(R)=0$ olduğunu kullanırsak;

$$2d(x)[y, \sigma(a)]+x[[y, \sigma(a)], \sigma(a)]=0 \qquad \forall x, y\in R \tag{5.28}$$

bulunur. (5.28) eşitliğinde x yerine d(x) yazar ve $d^2(x)=0$ olduğunu kullanırsak;

$$d(x)[[y, \sigma(a)], \sigma(a)]=0 \qquad \forall x, y\in R \tag{5.29}$$

elde edilir. Bu ifade ise Lemma 3.2.47 (i) den

$$a\in Z \quad \text{veya} \quad 0=[[y, \sigma(a)], \sigma(a)],\ \forall\, y\in R \tag{5.30}$$

bulunur. Böylece $\forall\, y\in R$ için $[[y, \sigma(a)], \sigma(a)]=0$ elde edilir. Burada, $I_{\sigma(a)}: R\rightarrow R$, $I_{\sigma(a)}(y)=[y, \sigma(a)]$ iç türevini tanımlarsak ifademiz $I^2_{\sigma(a)}(R)=0$ olur ki bu ise Lemma 3.1.4 den $I_{\sigma(a)}=0$ dolayısıyla $a\in Z$ demektir.

Teorem 5.11 : R bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideal olsun.
Eğer $[U, U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: $\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}\in U$ elemanı için hipotezden;

$$C_{\sigma,\tau}\ni [\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[[x, u]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau},\ \forall\, x\in R,\ \forall\, u\in U \tag{5.31}$$

olur. Öte yandan hipotezden $[[x, u]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan (5.31) ifadesinde Sonuç 3.3.29 kullanılarak;

$$[[x, u]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau}=0 \quad \text{veya} \quad u\in Z \quad \forall\, x\in R,\ \forall\, u\in U \tag{5.32}$$

bulunur. Eğer $\forall$ $x\in R$, için $[[x, u]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda $d: R\to R$, $d(x)=[x, u]_{\sigma,\tau}$ toplamsal dönüşümünü tanımlarsak (5.32) eşitliğinden $d^2(x)=0$, $\forall$ $x\in R$ bulunur. Bu ise Lemma 5.10 dan $u\in Z$, ,$\forall$ $u\in U$ olduğunu verir. O halde (5.32) deki her iki durumda da $u\in Z$ bulunur. Dolayısıyla $U\subset Z$ elde edilir.

Teorem 5.12 : R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal, $a,b\in R$ olsun. Eğer $f:R\to R$, $f(x)=xa-bx$, dönüşümü için $f(U)=0$ ise bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ veya $f=0$ dır.

İspat: İlk olarak a veya b elemanlarından herhangi birinin merkezde olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(U)=0$ olduğundan

$0=ua-bu=u(a-b)$, $\forall u\in U$

olur. Yani; $U(a-b)=0$ ve dolayısıyla Lemma 3.2.30 (i) den $a=b$ veya $U\subset Z$ olmalıdır. Eğer $a=b$ ise bu durumda f dönüşümü, a elemanı ile belirlenen iç türev haline gelir ve buna göre $f(U)=0$ olduğundan Lemma 3.2.60 dan $a\in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$, $\forall u\in U$ bulunarak ispat tamamlanır.

O halde şimdi a ve b elemanlarından hiçbirinin merkezde olmadığını kabul edelim. $f(U)=0$ olduğundan u yerine $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ yazalım.

$$\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}a-b\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}=0 \tag{5.33}$$

bulunur. (5.33) de $[x,u]_{\sigma,\tau}a=b[x,u]_{\sigma,\tau}$ hipotezini kullanırsak;

$$(\tau(u)b-b\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall u\in U, \forall x\in R \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.34) de x yerine xy, $y\in R$ yazılır ve (5.34) eşitliği kullanılırsa;.

$$0=[\tau(u), b][xy, u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u), b]x[y, \sigma(u)]+[\tau(u), b][x, u]_{\sigma,\tau}y$$
$$=[\tau(u), b]x[y, \sigma(u)]$$
$$[\tau(u), b]R[y, \sigma(u)]=0 \qquad \forall u\in U, \forall y\in R \tag{5.35}$$

bulunur. R asal halka olduğu için (5.35) eşitliğinden;

$$[\tau(u), b]=0 \quad \text{veya} \quad [y, \sigma(u)]=0 \quad \forall y\in R \tag{5.36}$$

bulunur. Eğer $[y, \sigma(u)]=0$, $\forall y\in R$ ise bu durumda $\sigma(u)\in Z$ ve dolayısıyla $u\in Z$ olduğundan (5.36) ifadesinden olur. Yani; $U(a-b)=0$ ve dolayısıyla Lemma 3.2.30 (ii) den $a=b$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olmalıdır. Eğer $a=b$ ise bu durumda f dönüşümü, a(veya b) elemanı ile belirlenen iç türev haline gelir ve buna göre $f(U)=0$ olduğundan Teorem 3.2.31 den $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunarak ispat tamamlanır.

O halde şimdi a ve b elemanlarından hiçbirinin merkezde olmadığını kabul edelim. $\tau(y)[u, z]_{\sigma,\tau}+[u, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)=[u, yz]_{\sigma,\tau}\in U$ için hipotezden;

$$\tau(y)[u, z]_{\sigma,\tau}a+[u, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)a-b\tau(y)[u, z]_{\sigma,\tau}-b[u, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)=0 \qquad (5.38)$$

bulunur. (5.38) de hipotez kullanılırsa;

$0=\tau(y)b[u, z]_{\sigma,\tau}+ [u, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)a- b\tau(y)[u, z]_{\sigma,\tau}- [u, y]_{\sigma,\tau}a\sigma(z)$

ve dolayısıyla

$$[\tau(y), b][u, z]_{\sigma,\tau} + [u, y]_{\sigma,\tau}[\sigma(z), a]=0 \qquad (5.39)$$

elde edilir. (5.39) da z yerine $\sigma^{-1}(a)$ yazarsak son ifadeden

$$[\tau(y), b]\,[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0, \qquad \forall y\in R \qquad (5.40)$$

bulunur. (5.40) da y yerine yx, $\forall x,y\in R$ yazılır ve (5.40) eşitliği kullanılırsa;

$0=\tau(x)[\tau(y), b]\,[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}+[\tau(x), b]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$

$=[\tau(x), b]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}, \forall x,y\in R$

bulunur. $\tau: R\to R$ otomorfizm olduğu için;

$$[\tau(x), b]=0 \quad \text{veya} \quad [u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0 \qquad \forall x\in R, \forall u\in U \qquad (5.41)$$

olur. Eğer $[\tau(x),b]=0$, $\forall x\in R$ ise $b\in Z$ ve bu durumda hipotezden

$0=ua-bu=ua-ub=u(a-b) \qquad \forall u\in U$

olduğu için $U(a-b)=0$ bulunur. Bu ise Lemma 3.2.30 (ii) den $U\subset C_{\sigma,\tau}$, veya $a=b$ olduğunu verir. Eğer $a=b$ ise $b\in Z$ olduğu kullanılarak

$f(x)=xa-bx=xb-bx=xb-xb=0 \quad \forall x\in R$

bulunur. Böylece $U\subset C_{\sigma,\tau}$, veya $f=0$ elde edilir.

Öte yandan eğer $[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$, $\forall u\in U$ ise Lemma 3.2.29 dan $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Eğer $a\in Z$ ise yukarıdaki gibi $f(x)=xa-bx$ tanımı ve $f(U)=0$ hipotezi kullanılarak $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $f=0$ bulunur.

Sonuç 5.16 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Lie ideal olsun. Eğer $[U, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $f{:}R \rightarrow R$, $f(x)= [x, a]_{\sigma,\tau}=x\sigma(a)-\tau(a)x$ dönüşümü tanımlayalım. Hipotezden $f(U)=0$ olduğundan Teorem 5.15 den dolayı $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $f=0$ dır.

Eğer $f=0$ ise,

$0=[xy, a]_{\sigma,\tau}=x[y, a]_{\sigma,\tau}+[x, \tau(a)]y=[x, \tau(a)]y \qquad \forall x, y \in R$

olur. R halkası asal olduğu için bu son eşitlikten $a \in Z$ elde edilir.

Sonuç 5.17 : R karakteristiği ikiden farklı asal halka,U, (σ,τ)- sağ Lie ideal olsun. Eğer $[U, U]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: Sonuç 5.16 kullanılarak istenen elde edilir.

Teorem 5.18 : R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, f ve g, R halkasının sıfırdan farklı olan iki türevi, $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için $uf(x)=g(x)u$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$

ii) Eğer U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezde x yerine xy, $x,y \in R$ yazalım.

$0=uf(xy)-g(xy)u$

$=uf(x)y+uxf(y)-g(x)yu-xg(y)u \qquad (5.42)$

(5.42) de hipotezi tekrar kullanırsak;

$g(x)[u,y]+[u,x]f(y)=0 \qquad \forall x,y \in R, \forall u \in U \qquad (5.43)$

(5.43) de y yerine yu, $u \in U$, $y \in R$ yazarsak ve (5.43) eşitliğini tekrar kullanırsak;

$0=g(x)[u,y]u+[u,x]f(y)u + [u,x]yf(u)=(g(x)[u,y]+[u,x]f(y))u + [u,x]yf(u)$

$[u,x]yf(u)=0 \qquad \forall x,y \in R, \forall u \in U \qquad (5.44)$

bulunur. R asal halka olduğundan bu son ifadeden;

$u \in Z$ veya $f(u)=0 \qquad \forall u \in U \qquad (5.45)$

BÖLÜM 6

6. İNVARİANT ALT HALKALAR

I. N. Herstein [19] daki makalesinde invariant alt halkalarla ilgili şu tahmini verdi: "R sıfır bölensiz olmayan bir asal halka, J sıfırdan farklı Jacobson radikali, A, R halkasının $\forall x \in J$ için $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, sağlayan bir alt halkası olsun. Bu durumda $A \subseteq Z$ dir veya A, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar."

Çalışmanın bu bölümünde I. N. Herstein'ın bu tahmininin idempotent elemana sahip halkalar için doğru olduğu gösterilerek, invariant alt halkalarla ilgili bir Sonuç verilecektir.

Bu bölümde R halkası karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0, 1 \neq e \in R$ idempotent eleman, A R halkasının $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, $\forall x \in J$ olan bir alt halkası olarak alınacak ve A, alt halkasının R nin sıfırdan farklı ideallerini kapsamadığı kabul edilecektir.

Lemma6.1[20, Lemma1]: a) $u \in R$ elemanı $t^2 = 0$, $\forall t \in R$ elemanı ile değişmeli ise bu durumda $u \in Z$ dir.

b) $u \in R$ elemanı R halkasının tüm idempotent elemanları ile değişmeli ise bu durumda $u \in Z$ dir.

İspat: (a) $t^2=0$ ve $ut=tu$ ise herhangi bir $x \in R$ ve $y \in R$ elemanı ve $0, 1 \neq e$ idempotenti için

$(ex(1-e))^2=0$ ve $((1-e)ye)^2=0$ olduğundan hipotezden;

$uex(1-e)=ex(1-e)u$ ve $u(1-e)ye=(1-e)yeu$

olur. Böylece u, $eR(1-e)Re$ yi merkezleştirir.

Şimdi $W=R(1-e)R$ olsun Buna göre W, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. u elemanı, eWe yi merkezleştirdiği için

$eW(1-e) \subseteq eR(1-e)$

olduğu düşünülerek, u elemanı $eW(1-e)$ yi merkezleştirir. O halde u, eW yı merkezleştirir. Benzer biçimde u elemanı We yi merkezleştirir. Böylece u, R halkasının sıfırdan farklı WeW idealini merkezleştirir. Bu ise $u\in Z$ demektir.

(b) u, R halkasının tüm idempotent elemanlarıyla değişmeli olsun. $e^2=e\neq 0,1$ idempotent elemanı ve herhangi bir x elemanı için

$f=e+xe-exe$

elemanı da bir idempotent elemandır. Dolayısıyla hipotezden u elemanı

$f-e=xe-exe=(1-e)xe$

elemanı ile komüte eder. Benzer biçimde u, $ey(1-e)$ elemanıyla da komüte eder. Bu durumda (a) daki tartışmaya benzer yöntem uygulanarak $u\in Z$ bulunur.

Aşağıdaki Lemma[20, Lemma2] deki teknik kullanılarak ispatlanacaktır.

Lemma 6.2 : R halkasının sıfırdan farklı idempotent elemanı varsa $a^2=0$ olacak biçimdeki bir $a\in A\cap J$ elemanı için $a(A\cap J)a=0$ iken $a=0$ dır.

İspat: $a\in A\cap J$ ve $a^2=0$ olsun. $t^2=0$ olacak biçimdeki $t\in R$ elemanı için

$(1+t)a(1+t)^{-1}-a=ta-at-tat\in A\cap J$

olur. Yani;

$$ta-at-tat\in A\cap J,\ t^2=0,\ a^2=0,\ a\in A\cap J \tag{6.1}$$

bulunur. Buna göre $aA\cap Ja=0$ ve $a^2=0$ olduğunu kullanarak;

$0=a(ta-at-tat)a=-atata$

$$atata=0,\ t^2=0,\ a^2=0,\ a\in A\cap J \tag{6.2}$$

elde edilir. Öte yandan $t^2=0$, olduğundan $\forall r\in R$ için $(trt)^2=0$ ve dolayısıyla (6.2) den

$atrtatrta=0, \quad \forall r\in R$

bulunur. Yani $(tatr)^3=0$, $\forall r\in R$ olur. Bu ise $tatR$ sağ nil idealinin her elemanının sabit bir kuvvetinin sıfır olması demektir. Böylece Önerme 2.19([13, Lemma1.1]) dan dolayı R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir idealinin varlığını söyler ki bu R nin asal halka olmasıyla çelişir. O halde $tatR=0$ ve dolayısıyla $tat=0$ olmalıdır.

$$tat=0,\ t^2=0,\ \forall t\in R,\ a^2=0,\ a\in A\cap J \tag{6.3}$$

bulunur. Şimdi $0 \neq e \in R$ idempotent eleman olmak üzere;

$t = ex(1-e) = ex - exe \in R$ elemanını alırsak $t^2 = 0$ olduğu için (6.3) ten

$ex(1-e)aex(1-e) = 0$, $\forall x \in R$ olur. Bu ise $(1-e)aeR$ nil sağ idealinin her elemanın sabit bir kuvvetinin sıfır olduğunu verir. Yine Önerme 2.24 den çelişki olacağı için $(1-e)aeR = 0$ ve R halkası asal olduğu için $(1-e)ae = 0$ yani,

$$ae = eae,\ a^2 = 0,\ a \in A \cap J \tag{6.4}$$

bulunur. Benzer şekilde $t = (1-e)ye = ye - eye \in R$ elemanını alırsak bu durumda $t^2 = 0$ olduğundan (6.3) ten dolayı $(1-e)yea(1-e)ye = 0$ ve $(ea(1-e)R)^3 = 0$ olur. Bu ise Önerme 2.24 den $ea(1-e)R = 0$ ve R halkası asal halka olduğundan ise $ea(1-e) = 0$, yani;

$$ea = eae,\ a^2 = 0,\ a \in A \cap J \tag{6.5}$$

olur. Böylece (6.4) ve (6.5) eşitliklerinden

$$ea = eae = ae,\ a^2 = 0,\ a \in A \cap J$$

elde edilir. Bu ise $a^2 = 0$, $a \in A \cap J$ elemanının R halkasının idempotentleriyle comute ettiğini söyler. O halde Lemma6.1 (b) den $a \in Z$ olur. Öte yandan R halkası asal halka olduğu için merkezinde nilpotent eleman bulundurmaz. Bu durumda $a^2 = 0$, $a \in A \cap J$ elemanı için $a \in Z$ olduğundan $a = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak;

$a^2 = 0$ olan $a \in A \cap J$ elemanı için $aA \cap Ja = 0$ iken $a = 0$ olur.

Teorem 6.3 : R halkasının 0, $1 \neq e \in R$ idempotent elemanı var olsun. R nin A alt halkası $(1+x)A(1+x)^{-1} \subseteq A$, $\forall x \in J$ koşulunu sağlasın. Buna göre A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealinin kapsar veya $A \cap J$ sol sıfır böleni yoktur.

İspat: $A \cap J \subseteq A$ olduğundan her $a \in A \cap J$ elemanı ve $x \in J$ elemanı için

$(1+x)a(1+x)^{-1} \in A$ ve $(1+x)a(1+x)^{-1} \in J$

olur ve dolayısıyla

$$(1+x)A \cap J(1+x)^{-1} \subseteq A \cap J,\ \forall x \in J \tag{6.6}$$

bulunur.

Şimdi A nın, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsamadığını ve $A \cap J$ nin de bir sol sıfır bölen bulundurduğunu varsayalım. Buna göre

$0\neq a\in A\cap J$ ve $0\neq y\in R$ elemanı için $ay=0$ olur. Öte yandan [19] da "R asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a\neq 0$ olan bir sol sıfır bölen ise bu durumda $ax=0$ fakat $xa\neq 0$ olacak biçimde $x\in U$ elemanı vardır." olduğu ispatlandı. O halde; $ay=0$ ve $ya\neq 0$ olacak biçimde bir $y\in J$ elemanı vardır. Üstelik $y\in J$ olduğundan $y+y'+yy'=0$ ve dolayısıyla; $ay+ay'+ayy'=0$ yani; $ay'=0$ olur. Bu nedenle

$ya=ya+ay'+yay'=(1+y)a(1+y)^{-1}-a\in A\cap J$ ve $(ya)^2=0$

bulunur. Yani,

$b^2=0$ olacak biçimde bir $b\in A\cap J$ elemanı vardır. (6.7)

Öte yandan $\forall x\in J$ için $bx\in J$ olduğundan

$(1+bx)b(1+bx)^{-1}\in A\cap J$

dir. Yine $bx+(bx)'+bx(bx)'=0$ ifadesi soldan b ile çarpılıp $b^2=0$ olduğu kullanılırsa;

$b(bx)'=0$

elde edilir. Böylece;

$(1+bx)b(1+bx)^{-1}=b+bxb+b(bx)'+bxb(bx)'\in A\cap J$

ifadesinden

$bJb\subseteq A\cap J$

bulunur. Yine $bx+(bx)'+bx(bx)'=0$ dan $(bx)'=-bx-bx(bx)'$ olduğu düşünülürse $c\in A\cap J$ ve $\forall x\in J$ elemanları için

$(c(bx)-(bx)c)(1+bx)^{-1}=c-(1+bx)c(1+bx)^{-1}\in A\cap J$

ifadesi soldan b ile çarpılıp $b^2=0$ olduğu kullanılarak

$bcbx(1+bx)^{-1}\in A\cap J,\ \forall c\in A\cap J,\ \forall x\in J$ (6.8)

olur. Halbuki $v\in J$ için $x=(1-vb)^{-1}v\in J$ alınırsa; $v=x(1+bx)^{-1}\in J$ bulunur. O halde $\forall v\in J$ elemanı için (6.8) ifadesinden

$bcbJ\subset A\cap J$

elde edilir. Buna göre $t\in J$ ise

$(1+t)bcbJ(1+t)^{-1}\subseteq(1+t)A\cap J(1+t)^{-1}\subseteq A\cap J$

olur. Bu son ifadeyi açarsak

$JbcbJ\subseteq A\cap J$ (6.9)

elde edilir. $A\cap J$ nin, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsamadığını kabul ettiğimiz için $JbcbJ=(0)$, $\forall c\in A\cap J$ olur. R halkası asal halka olduğundan $bcb=0$, yani;

$b(A\cap J)b=0$

elde edilir. Bu ise Lemma 6.2 den $b=0$ olduğunu verir ki bu b nin sıfırdan farklı alınışıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $A\cap J$ nin sol sıfır böleni yoktur veya A, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Sonuç 6.4 : $A\cap J$ nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur veya A, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsar.

İspat: $0\neq a\in A\cap J$ elemanı nilpotent olsun. Bu taktirde $a^n=0$ ve $a^{n-1}\neq 0$ olacak biçimde n pozitif tamsayısı vardır. Halbuki, A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealinin kapsamıyorsa Teorem 6.3 e göre $A\cap J$ nin sol sıfır böleni yoktur. O halde

$0=a^n=aa^{n-1}$ olduğu için bu durumda $a=0$ veya $a^{n-1}=0$ olmalıdır. Her iki durumda da çelişki elde edileceği için A, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsamalıdır veya $A\cap J$ nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur

Teorem 6.5 : R sıfırdan farklı sağ nil idealleri olmayan bir halka, J(A), A halkasının sıfırdan farklı Jacabson radikali ve her $x\in R$ elemanı için $Ax^{n(x)}\subset A$ olsun. Bu durumda A, R nin bir alt halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: $S=\{r\in R \mid Ar\subset A\}$ kümesini tanımlayalım. $A^2\subset A$ olduğu için $A\subset S$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $S\neq\emptyset$ dir.

S, R halkasının bir alt halkasıdır. Gerçekten;

i) $r_1, r_2\in S$ elemanları için $A(r_1-r_2)\subset A$ olduğundan $r_1-r_2\in S$ olur.

ii) $r_1, r_2\in S$ elemanları için $A(r_1r_2)=(Ar_1)r_2\subset Ar_2\subset A$ olduğundan $r_1r_2\in S$ olur.

Öte yandan hipoteze göre her $x\in R$ elemanı için $Ax^{n(x)}\subset A$ olduğundan $x^{n(x)}\in S$ dir. Yani, R halkası bir S-radikaldir. O halde Teorem 3.4.11 e göre S nin sıfırdan farklı sağ nil ideali yoktur. Yine Teorem 3.4.12 den S asal halkadır.

Şimdi $A\subset S$ olduğundan $J(A)\subset J(S)$ dir. Hipoteze göre J(A) sıfırdan farklı olduğu için $J(S)\neq(0)$ olur. Aynı zamanda $S\subset R$ olduğundan $J(S)\subset J(R)$ dir. Öyleyse her $b\in J(S)$ için

$(1+b)A(1+b)^{-1}\subseteq A$

dır. Öte yandan A, S nin bir sağ idealidir. Gerçekten;

i) $a_1, a_2 \in A$ elemanları için A alt halka olduğundan $a_1 - a_2 \in A$ olur.

ii) $a \in A$ ve $s \in S$ için $As \subset A$ olduğu için $as \in A$ olur.

O halde A, S halkasının bir sağ idealidir. Bu durumda $(1+b)A(1+b)^{-1} \subseteq A$ ifadesinden

$(1+b)A(1+b)^{-1}(1+b) \subseteq A$

ve dolayısıyla

$(1+b)A \subseteq A$

elde edilir. Buna göre her $a \in A$ için $(1+b)a \in A$, yani; $ba \in A$, $\forall b \in J(S)$ olur. Böylece $J(S)A \subseteq A$ elde edilir. S asal halka ve J(S), S nin ideali olduğu için $J(S)A \neq (0)$ dır. O halde A, R nin S alt halkasının $J(S)A \neq (0)$ idealini kapsar.

KAYNAKLAR

1- AYDIN, N., 1991a. (σ,τ)-Yarı- türevli Asal Halkalar ve Lie İdealler. C. Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 14.

2- AYDIN, N., KANDAMAR, H., 1994b. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. Doğa- Tr. J. Of Math., 18 (2) , 143-148.

3- AYDIN, N., SOYTÜRK, M., 1995c. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with - Derivations. Doğa- Tr. J. Of Math., 19 , 239-244.

4- AYDIN, N., 1997d. On One Sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. Doğa- Tr. J. Of Math. 21, 1-7.

5- AYDIN, N., 1998e. Notes on Generalized Lie Ideals. Analele Universitatii din Timisoara, Seria Matematica-Informatica, Vol. XXVI, fasc. 2.

6- AWTAR, R., 1973a. Lie and Jordan Structure in Prime Rings with Derivations. Proc. Amer. Math. Soc. Voll. 41, No:1, 67-74.

7- AWTAR, R., 1984b. Lie Structure in Prime Rings with Derivations. Publ. Math. Debrecen 31, 209-215.

8- BERGEN, J., HERSTEIN, I. N., KERR J. W. , 1981. Lie Ideals and Derivation of prime Rings. J. Of Algebra, 71, 259-267.

9- BRESAR, M.., 1993. Centralizing Mappings and Derivations in Prime Ring. J. Of Algebra 156, 385-394.

10- CARINI, L., 1985. Derivations on Lie Ideals in Semiprime Rings. Rend. Del. Circolo. Mat. Di Polermo Serie II, Tomo XXXIV, 122-126.

11- FELZENSWALB, B., 1976. Rings Radikal Over Subrings. Israel J. Of Math. Vol. 23

12- GIAMBRUNO, A., Some Generalizations of the Center of Ring.

13- HERSTEIN, I. N., 1969a. Topics in Ring Theory. University of Chicago Press.

14- HERSTEIN, I. N., 1970b. On the Lie Structure of Assosiative Rings. J. Of Algebra, 14, 561-571.

15- HERSTEIN, I. N., 1975c. On the Hypercenter of Ring. J. Of Algebra 36, 151-157
16-HERSTEIN, I. N., 1977d. Invariant Subrings of a Certain Kind. Israel J. Of Math., Vol.26, No:2, 205-208.
17-HERSTEIN, I. N., 1978e. A Note on Derivations. Canad. Math. Bull. Vol.21(3), 369-370.
18-HERSTEIN, I. N., 1979f. A Note on Derivations II. Canad. Math. Bull. Vol.22(4), 509-511.
19-HERSTEIN, I. N., 1979g. Center Like Elements in Prime Rings,. J. Of Algebra 60, 567-574.
20-HERSTEIN, I. N., 1983h. A Theorem on Invariant Subrings. J. Of Algebra 83, 26-32.
21-KAYA, K., 1983a. Asal Halkalarda Herstein'ın Bir Tahmini Üzerine. C. Ü. Fen-Edebiyat Fak. Dergisi, Cilt:1, Sayı:1.
22-KAYA, K., 1988b. On (σ,τ)-Derivation of Prime Rings. TU Math. D. C. 12(2), 46-51
23-KAYA, K., 1992c. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. An. Üniv. Timisoara, Stiinte Mat. 30, No.2-3, 251-255.
24- KANDAMAR, H., KAYA; K.:; 1992d. Asal Halkalarda (σ,τ)-Türev ve Lie İdealler. Hacettepe Bull. Of Natural Scien. And Engin. Vol. 21, 29-33.
25-KAYA, A., 1997e. On a Generalization of Lie Ideals in Prime Rings. Tr. J. Math., 21, 285-294.
26-KAYA, K., AYDIN, N., 1999f. Some Results in Generalized Lie Ideal. Albasapr, A Scientitic Journal Issued by Jordan University for Women, 3(1).
27-LEE, P. H. And LEE T. K., 1981a. On Derivations of prime Rings. Chines J. Math. Vol9(2), 107-110.
28-LEE, P. And LEE, T. K., 1983b. Lie İdeals of prime Rings with Derivations. Bull. Inst. Of Math. Academia Sinica II, 75-79.
29-POSNER, E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1093-1100.
30-SOYTÜRK, M., 1984. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation. Doğa-Tr. J. Of Math.18, 280-283.

31-YENİGÜL, M. Ş., ARGAÇ, N., 1994. On Prime and Semiprime Rings with α-derivations. Tr. J. Of Math. 18, 280-283.

ÖZGEÇMİŞ

Öznur GÖLBAŞI 1971 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk ve ortaokulu Nevşehir'de, liseyi Samsun'da bitirdi. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başlayarak,"Türevli Halkalarda Lie İdealler" isimli yüksek lisans tezini 1996 yılında tamamladı. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. 1995 yılında Adnan Menderes Üniversitesi, 1998 yılında Kocaeli Üniversitesi ve 1999 yılında ise Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevliliği yaptı. Halen Cumhuriyet Üniversitesi'nde çalışmaktadır.