T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FAHRETTİN ÇELİK

NİSAN 2018

MUĞLA

F. ÇELİK MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ MUĞLA 2018

T.C.

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FAHRETTİN ÇELİK

NİSAN 2018

MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

FAHRETTİN ÇELİK tarafından hazırlanan **KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI** başlıklı tezinin, 20/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof.Dr. Mehmet SEZER **(Jüri Başkanı)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU **(Danışman)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Dr.Öğr.Üy. Yalçın ÖZTÜRK **(Üye)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 20/04/2018

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Fahrettin Çelik

20/04/2018

ÖZET

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Fahrettin ÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Nisan 2018,48 sayfa

Bu çalışmada kesirli orthogonal Jacobi fonksiyonları kullanılarak orthogonal fonksiyonlar için kesirli türev operasyonel matrisleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiş ve ikinci bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, kesirli lineer diferansiyel denklemleri çözmek için Kesirli Jacobi Fonksiyonlarının Operasyonel Matris Yöntemi adlı bir yöntem sunulmuştur. Dördüncü bölümde sunulan bu yöntem yardımıyla bahsedilen tip denklemler için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde de örneklerin hata analizlerinin incelenmesi ile yöntemin kullanılabilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Operasyonel Matris, Caputo Kesirli Türevleri, Kesirli Jacobi Fonksiyonları, Ortogonal Açılımlar

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATION

Fahrettin ÇELİK

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

April 2018, 48 pages

İn this study, we introduce fractional orthogonal Jacobi functions and using this functions we obtain fractional derivative operational matrix for orthogonal functions. This thesis consist of five chapters. The first chapter is devoted to introduction and second chapter is necassary definitions which will be needed for later use. Original results are contained third and fourth chapter. In the third chapter, a method called The Operational Matrix of Fractional Jacobi Functions for the fractional linear differential equations is presented. In the fourth chapter, examples of these kind of equations is solved, error analysis is done and graphics are drawn. In the fifth chapter we conclude that this method works good.

Keywords: Operational Matrix, Caputo Fractional Derivatives, Fractional Jacobi Functions, Orthogonal Expansions

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında bana yol gösteren, katkılarını benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof.Dr. Mustafa GÜLSU'ya, çalışma boyunca bilgi ve yardımlarını eksik etmeyen değerli hocam Arş. Gör. Ayşe ANAPALI'ya ve Arş.Gör. Gül Gözde BİÇER'e , Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim. Bu tez, Mugla Sıtkı Koçman Üniversitesi Bilimsel Arastırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 16/125 kod numaralı, "Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları" başlıklı proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$B(p,q)$	Beta Fonksiyonu
D_a^{λ}	Kesirli Türev
$P^{(\alpha,\beta)}(t)$	Jacobi Fonksiyonu
$K^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$	Kesirli Jacobi Fonksiyonu
$\Phi(t)$	Operasyonel Matris
N	Kesme Sınırı

1. GİRİŞ

1.1. Tarihi Gelişim

Kesirli mertebeden türev ve kesirli mertebeden integralin ilk defa ortaya çıkışı 17. yy sonlarına dayanmaktadır. 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'e "Tamsayı mertebeden türevleri, kesirli mertebeden türevlere genelleyebilirmiyiz?" sorusunu sormasıyla kesirli mertebeden türev kavramı ortaya çıktığı düşünülmektedir. Kesirli hesaplama, tamsayı mertebeden integrallenme ve diferansiyellenmenin bir genellemesi olarak ortaya çıkan Kesirli diferansiyel ve kesirli integralleme bir çok fiziksel olgunun modellenmesinde çok önemli bir yer tutmuştur.

Matematiğin birçok alanlarında Leibnitz, Euler, Laplace, Lacroix ve Fourier keyfi mertebeden türevleri kulllanmışlar fakat kesirli türevleri ilk kullanan 1823'te Niels Henrik Abel'dir. Abel kesirli hesaplamaları integral denklemlerin çözümüne uygulamıştır. Daha sonra Liouville kesirli hesaplama üzerine 1832'de çalışmalar yapmış ve kendi tanımını uygulamıştır. 1867'de Liouville fonksiyonları üstel seriler biçiminde açmış ve q sayısını pozitif tamsayı gibi düşünerek serilerin terim terime q. mertebeden türevlerini tanımlamıştır. 1867'de Grunwald kesirli türevler üzerine çalışmıştır. Riemann okul zamanlarında kesirli integrasyon teoremleri geliştirmiş ve 1892 yılında sonuçları yayınlamıştır. Ayrıca Letnikov tarafından bu konuda 1868-1872 yılları arasında çeşitli notlar yazılmıştır. Birçok alanda kesirli türevler tamsayı mertebeden türevlere göre daha gerçekçi model oluşturabilirler.

1996'da Riewe tarafından korunumsuz mekanik sistemleri tanımlamak için varyasyon hesabında kesirli türevleri kullanmıştır. Magin ve Arkadaşları 2009'da Nükleer Manyetik Rezonansın (NMR) geniş aralıklı deneysel durumlarının modellenmesinde kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri kullanmışlardır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde operasyonel matrisler önemli bir yer tutar. Lakestani ve arkadaşları, Lineer B-spline fonksiyonlarını kullanarak kesirli diferansiyel denklemler için Operasyonel matrisleri kullanmışlardır.. Li ve Zhao (2010) ve Li ve Sun (2011) Kesirli diferansiyel denklemler için Haar dalgacık operasyonel matris ve Block Pulse operasyonel matrislerini kullanmışlardır. Ayrıca Mokhtary ve Ghoreishi (2011) Lineer olmayan kesirli integro diferansiyel denklemler için Legendre Spektral Tau Matris metodu üzerine çalışmışlardır.

Kesirli analiz teknikleri geliştikçe kesirli mertebeden türev ve kesirli mertebeden integral kullanılarak Fizik, Mühendislik, Biyoloji ve Finansal problemler farklı açılaradan yorumlanmıştır.

1.2. Problemin Tanıtılması

Bu tez çalışmasında temel amaç kesirli Taylor serisinin matris gösteriminden yararlanarak kesirli Jacobi fonksiyonlarının operasyonel matrislerini bulmak ve uygulamalı matematikte çokça karşılaşılan diferansiyel denklemlerin numerik çözümleri için bir yöntem geliştirmektir. Bu yöntem kesirli Taylor serilerinin katsayıları ve kesirli Jacobi fonksiyon açılımları arasındaki ilişkiye dayanmaktadır . Kesirli Jacobi fonksiyonlarının operasyonel matrisleri kullanılarak kesirli diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümleri araştırılmıştır. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklem

$$D_0^{\lambda_{n+1}} y(t) = F(t, y(t), D_0^{\lambda_1} y(t),..., D_0^{\lambda_n} y(t)), \quad \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n > 0 \tag{1.1}$$

$$y^i(0) = d_i, \quad \text{i=0,1,2,…,r}$$

başlangıç koşullarına gore

$$y(t) \cong \sum_{j=0}^{N} y_j K_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) \tag{1.2}$$

formunda N. Dereceden kesilmiş kesirli Jacobi fonksiyonları yardımıyla nümerik çözümler elde edilecektir.

Burada $r < \lambda_{n+1} \le r+1$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$ ve $d_i, (i = 0,1,2,\cdots,r)$' ler bilinen sabitlerdir(Kilbas, vd., 2006).

Sıralama noktaları olarak $K_{N+1}^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ Jacobi fonksiyonlarının (N-r) kökleri alınacak ve başlangıç koşulları yardımı ile oluşturulan (N+1)x(N+1) lineer veya non-lineer denklem sistemi nümerik yöntemlerle çözülerek

$$y(t) \cong \sum_{j=0}^{N} y_j K_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) = U^T \Phi(t) \tag{1.3}$$

formunda nümerik çözüm elde edilecektir.Burada

$$\Phi(t) = \left[\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_{n-1}(t)\right]^T \quad \text{ve} \quad U^T = \left[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_N\right]$$

şeklindedir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Gama ve Beta Fonksiyonları

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu Euler İntegrali olarak adlandırılan

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımı ile tanımlanır(Podlubny, 1999).

$$F(u)=\int_0^\infty e^{-ut}dt=\frac{1}{u} \tag{2.2}$$

(2.2) İntegrali ile tanımlanan fonksiyonun u'ya göre n kez türetilirse

$$(-1)^n F^{(n)}(u)=\int_0^\infty t^n e^{-ut}dt=\frac{n!}{u^{n+1}} \tag{2.3}$$

eşitliğini elde edilir.(2.3) eşitliginde $u=1$ alınırsa

$$\int_0^\infty t^n e^{-ut}dt=\int_0^\infty t^{(n+1)}e^{-t}dt=\Gamma(n+1)=n! \tag{2.4}$$

ifadesi elde edilir.Böylece

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{2.5}$$

sonucu elde edilir.

Gauss integrali olarak bilinen $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ integralini hesaplayalım. Bu amaçla,

$$\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

denir ve her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\mathrm{I}^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)$$

$$\mathrm{I}^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$$

$$\mathrm{I}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \qquad \begin{array}{l} r^2=x^2+y^2 \\ |J|=rdrd\theta \end{array}$$

$$\mathrm{I}^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-(r^2)}drd\theta$$

$$\mathrm{I}^2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(e^{-(r^2)}\right)_{r=0}^{r=\infty}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-1)d\theta$$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi\Rightarrow \mathrm{I}=\sqrt{\pi}$$

elde edilir. Buradan hareketle I integrali

$$\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

şeklinde elde edilir.

Gama Fonksiyonunun temel özelliklerinden biri olan $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ eşitliği

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$$

$$\Gamma(n+1)=\left(-e^{-x}x^n\right)_{x=0}^{x=\infty}+n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir.

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt=1$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\sqrt{\pi}$$

$\Gamma(1)=1$ ve $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ olmak üzere gama fonksiyonlarının bazı sayısal değerleri aşagıdaki şekilde verilir.

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

şeklinde elde edilebilir.

Kesirli türev hesaplamalarında beta fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır. $B(x,y)$ şeklinde gösterilen beta fonksiyonu

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad (\operatorname{Re}(x)>0,\ \operatorname{Re}(y)>0) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999; Diethelm, 2002).

Beta fonksiyonunun başlıca özelliklerini aşağıdaki gibi verebiliriz.

1- $$B(x)=\frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)} \tag{2.8}$$

2- $$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.9}$$

3- $$B(x)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta, \quad (\operatorname{Re}(x)>0,\ \operatorname{Re}(y)>0) \tag{2.10}$$

4- $$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt, \quad (\operatorname{Re}(x)>0,\ \operatorname{Re}(y)>0) \tag{2.11}$$

5- $$B(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{n-y}{n}\right)}{x+n} \tag{2.12}$$

6- Beta fonksiyonu simetriktir yani $B(x,y)=B(y,x)$

Beta Fonksiyonu ve Gama fonksiyonu arasındaki ilişkiyi aşagıdaki şekilde verebiliriz.

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du\int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv,$$

burada $u=a^2, v=b^2$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty e^{-a^2}a^{2x-1}da\int_0^\infty e^{-b^2}b^{2y-1}db,$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(a^2+b^2)}(|a|)^{2x-1}(|b|)^{2y-1}dadb, \quad a=r\cos\theta, b=r\sin\theta;$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-(r^2)}(|r\cos\theta|)^{2x-1}(|r\sin\theta|)^{2y-1}rdrd\theta,$$

$$=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}rd(r)\int_0^{2\pi}\left|(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\right|d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}d(r^2)4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$$

$$=\Gamma(x+y)2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y).$$

şeklinde verilebilir.

Sonuç olarak

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y) \tag{2.13}$$

bağıntısı elde edilir.

2.2. Jacobi Polinomları ve Özellikleri

$w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\langle y_m, y_n\rangle=\int_a^b w(x)y_m(x)y_n(x)dx=\gamma_n\delta_{mn}\ ,\ \ \delta_{mn}=\begin{cases}1 & ,m=n\\ 0 & ,m\neq n\end{cases} \tag{2.14}$$

koşulu gerçeklenmesi halinde $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine ortogonal polinomların bir dizisi denir. Burada $\langle .\,,.\rangle$ iç çarpım ve

$$\gamma_n=\|y_n\|_w^2=\int_a^b w(x)y_n^2(x)dx \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlık fonksiyonu

$$w(x)=(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$$

olarak alındığında $y_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları ortogonal polinomlar olarak tanımlanır ve

$$\left\langle P_m^{(\alpha,\beta)},P_n^{(\alpha,\beta)}\right\rangle=\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx \tag{2.16}$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}(b-a)^{2n+\alpha+\beta+1}\delta_{mn} \tag{2.17}$$

koşulu gerçeklenir. Özel halde $[a,b]=[-1,1]$ seçildiğinde

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{w(x)}D^n\left[w(x)(1-x^2)^n\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}D^n\left[(1-x)^{n+a}(1+x)^{n+\beta}\right] \tag{2.18}$$

elde edilir.

$n=0,1,2,\cdots$ için Leibniz kuralı uygulanırsa;

$$D^n\left[(1-x)^n(1+x)^{n+\beta}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(1-x)^{n+\alpha}D^{n-k}(1+x)^{n+\beta} \tag{2.19}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-k+1)(1-x)^{n+\alpha-k}(n+\beta)(n+\beta-1)\cdots(\beta+k+1)(1+x)^{\beta+k}$$

$$=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(1-x)^{n+\alpha-k}(1+x)^{\beta+k},\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu ifade (2.18) de yerine yazılırsa

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(1-x)^{n+\alpha-k}(1+x)^{\beta+k},\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.21}$$

ifadesi elde edilir.

n. dereceden $P_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobi polinomunun simetrisi;

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x),\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.22}$$

olmak üzere

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n},\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n},\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.23}$$

şeklinde verilir.

$x\neq 1$ olarak alınırsa;

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k,\ n=0,1,2,\cdots$$

ifadesinde

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^i,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.24}$$

yerine yazılırsa

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}\binom{k}{i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^i$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=o}^{n-i}\binom{n+\alpha}{i+k}\binom{n+\beta}{n-i-k}\binom{i+k}{i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^i \tag{2.25}$$

elde edilir.Bu ifade düzenlenirse

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+\alpha}{n-i+k}\binom{n+\beta}{i-k}\binom{n-i+k}{n-i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+\alpha}{n-i+k}\binom{n+\beta}{i-k}\binom{n-i+k}{n-i}\left(\frac{x-1}{2}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-i+k)!\Gamma(i-k+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{(i-k)!\Gamma(n-i+k+\beta+1)}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-i+k)!\Gamma(i-k+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+k)!}{(n-i)!k!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{i}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-n)_i}{\Gamma(i+\alpha+1)i!\Gamma(n-i+\beta+1)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{i}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i)_k(-i-\alpha-1)_k}{(n-i+\beta+1)_k k!} \tag{2.26}$$

şeklinde gerçekleşir. Burada $(p)_k$

$$(p)_0 := 1,\ (p)_k := p(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1);\quad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.27}$$

Pochhammer sembolü olarak tanımlanmıştır.

2.3. Kesirli Jacobi Polinomları ve Özellikleri

$w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\langle y_m, y_n \rangle = \int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = \gamma_n \delta_{mn} \ ,\ \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & ,m = n \\ 0 & ,m \neq n \end{cases} \tag{2.28}$$

koşulu altında $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonal polinomların bir dizisi denir. Burada $\langle .,. \rangle$ iç çarpım olarak alınsın

$$\gamma_n = \|y_n\|_w^2 = \int_a^b w(x) y_n^2(x) dx \tag{2.29}$$

şeklindedir. Ağırlık fonksiyonu $w(x) = (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$ olmak üzere $y_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi ortogonal polinomları (Koekoek vd., 2008)

$$\left\langle P_m^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \right\rangle = \int_a^b (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} (b-a)^{2n+\alpha+\beta+1} \delta_{mn} \qquad (2.30)$$

Göz önüne alalım. Özel halde $[a,b]=[0,1]$ seçildiğinde

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{x^k}{k!} \qquad (2.31)$$

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^{n-k}(k+\alpha+1)_{n-k}\, n!}{(n-k)!(n+k+\alpha+\beta+1)_{n-k}} \qquad (2.32)$$

ve Pochhammer sembolü $(p)_k$ olmak üzere

$$(p)_0 := 1,\ (p)_k := p(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1);$$

$$(p)_k = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \quad , \qquad k = 1,2,3,\ldots \qquad (2.33)$$

şeklinde verilir(Koekoek vd., 2008).

$K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ kesirli Jacobi fonksiyonlarını oluşturmak için (2.31) deki denklemde $x := t^{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ konulsun. Bu halde

$$K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) := P_n^{(\alpha,\beta)}(t^{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{t^{k\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} t^{k\lambda} \qquad (2.34)$$

elde edilir. Burada

$$b_{n,k} = \frac{(-1)^{n-k}(k+\alpha+1)_{n-k}\, n!}{(n-k)!k!(n+k+\alpha+\beta+1)_{n-k}} \qquad (2.35)$$

dır. Özel halde $n=k$ için

$$b_{k,k}=1 \tag{2.36}$$

dir.

$K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ kesirli Jacobi fonksiyonları için

$$\left\langle K_m^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t),K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)\right\rangle=\int_0^1 \lambda t^{(\alpha+1)\lambda-1}(1-t^{\lambda})K_m^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)dt$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\delta_{mn} \tag{2.37}$$

ilişkisi gerçeklenir. $K_m^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ kesirli Jacobi fonksiyonlarının Caputo kesirli türevi ise

$$D_0^{(\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma(k\lambda+1-\lambda)}\frac{t^{(k-1)\lambda}}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)}\frac{t^{(k-1)\lambda}}{k!} \tag{2.38}$$

şeklinde verilir.

$$D_0^{(m\lambda)}=\underbrace{D_0^{(\lambda)}D_0^{(\lambda)}...D_0^{(\lambda)}}_{m\ \ defa} \tag{2.39}$$

olmak üzere

$$D_0^{(\lambda)}t^{k\lambda}=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma(k\lambda+1-\lambda)}t^{(k-1)\lambda}=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)}t^{(k-1)\lambda}$$

$$D_0^{(2\lambda)}t^{k\lambda}=D_0^{(\lambda)}D_0^{(\lambda)}t^{k\lambda}=D_0^{(\lambda)}\left(\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)}t^{(k-1)\lambda}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)}\frac{\Gamma((k-1)\lambda+1)}{\Gamma((k-2)\lambda+1)}t^{(k-2)\lambda}$$

$$=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-2)\lambda+1)}t^{(k-2)\lambda}$$

$$D_0^{(2\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-2)\lambda+1)}\frac{t^{(k-2)\lambda}}{k!}$$

$$D_0^{(3\lambda)}t^{k\lambda}=D_0^{(\lambda)}D_0^{(\lambda)}D_0^{(\lambda)}t^{k\lambda}=D_0^{(\lambda)}\left(\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-2)\lambda+1)}t^{(k-2)\lambda}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-2)\lambda+1)}\frac{\Gamma((k-2)\lambda+1)}{\Gamma((k-3)\lambda+1)}t^{(k-3)\lambda}$$

$$=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-3)\lambda+1)}t^{(k-3)\lambda}$$

$$D_0^{(3\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-3)\lambda+1)}\frac{t^{(k-3)\lambda}}{k!}$$

elde edilir.

Benzer işlemler tekrar edilerek $K_m^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ için m. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_0^{(m\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=\sum_{k=m}^{n}a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-m)\lambda+1)}\frac{t^{(k-m)\lambda}}{k!} \qquad (2.40)$$

veya

$$D_0^{(m\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=\sum_{k=m}^{n}c_{n,k}^{(m)}t^{(k-m)\lambda} \qquad (2.41)$$

şekinde verilir.Burada

$$c_{n,k}^{(m)} = a_{n,k}\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-m)\lambda+1)k!} \tag{2.42}$$
$$m = 0,1,2,...,n$$

ve

$$D_0^{(m\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(0) = c_{n,m}^{(m)} + \underbrace{c_{n,m}^{(m)}t^{\lambda} + c_{n,m}^{(m)}t^{2\lambda}\cdots}_{0} = c_{n,m}^{(m)}$$

dır. Bu halde

$$D_0^{(m\lambda)}K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(0) = c_{n,m}^{(m)} \tag{2.43}$$

dır.

2.4. Taylor Serileri ve Ortogonal Açılımlar

$\phi_k(x)$ ortogonal polinom olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\phi_k(x), \tag{2.44}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$c_k = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\phi_k(x)dx}{\|\phi_k(x)\|_w^2} \tag{2.45}$$

ile verilir(Eslahchi, M.R. vd., 2011). Sonsuz mertebeden türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun a komşuluğunda keyfi λ değeri için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-\lambda)^k \tag{2.46}$$

şeklinde yazılabilir ve burada

$$B_k = \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} \tag{2.47}$$

dır. (2.44) de $\phi_k(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ alınırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\alpha,\beta)} P_k^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{2.48}$$

yazılabilir. Burada ;

$$c_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{\left\langle P_k^{(\alpha,\beta)}, f \right\rangle_{w^{(\alpha,\beta)}}}{\left\| P_k^{(\alpha,\beta)}(x) \right\|_{w^{(\alpha,\beta)}}^2} \tag{2.49}$$

olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun Jacobi açılımı elde edilir.

$f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki Jacobi seri açılımı;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\alpha,\beta)} \left(\sum_{i=0}^{k} B_i^{(\alpha,\beta,k)} (x-1)^i \right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(\alpha,\beta)} B_0^{(\alpha,\beta,i)} \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(\alpha,\beta)} B_1^{(\alpha,\beta,i)} \right)(x-1)$$
$$+ \left(\sum_{i=0}^{k} c_i^{(\alpha,\beta)} B_0^{(\alpha,\beta,i)} \right)(x-1)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} c_i^{(\alpha,\beta)} B_k^{(\alpha,\beta,i)} \right)(x-1)^k \tag{2.50}$$

şeklinde elde edilir.

$$\sum_{i=k}^{\infty} c_i^{(\alpha,\beta)} B_k^{(\alpha,\beta,i)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+k}^{(\alpha,\beta)} B_k^{(\alpha,\beta,i+k)} = \frac{f^k(1)}{k!}; \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{2.51}$$

(2.44) ve (2.46) daki denklemleri (2.48) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(2i+2k+\alpha+\beta+1)\binom{i+k}{k}\binom{i+\alpha+\beta+2k}{\alpha+k}A_{i+k}^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{k+\alpha+\beta+1}}{k!}f^{(k)}(1) \tag{2.52}$$

elde edilir. Burada

$$A_{i+k}^{(\alpha,\beta)}=\left\langle P_{i+k}^{(\alpha,\beta)}(x),\, f(x)\right\rangle_{w^{(\alpha,\beta)}}$$

dır.

2.5. Kesirli Taylor Serileri ve Ortogonal Açılımlar

$f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ noktasındaki $n.$ mertebeden Taylor polinomu;

$$f(x)\simeq P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

şeklindedir, $f(x)\simeq P_n(x)$ alındığında buradaki hata $E_{n,c}(x)=\left|f(x)-P_n(x)\right|$ olmak üzere

$$E_{n,c}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad , \quad c<\xi<x \tag{2.53}$$

ile verilir. Sonuç olarak ;

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+E_{(n,c)}(x) \tag{2.54}$$

şeklindeki formüle Lagrange kalanlı Taylor formülü denir (Adams, 2006).

Tanım 2.5.1 $f(t)$ fonksiyonu a noktasında sonsuz kez Caputo türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Kesirli Taylor serileri a noktası civarında yakınsak ise $t=a$ noktasında $f(t)$ kesirli analitik fonksiyonudur denir ve

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_a^{k\lambda}f(a)}{\Gamma(k\lambda+1)}(t-a)^{k\lambda} \tag{2.55}$$

şeklinde yazılır.

$y_k(t)$, [a,b] üzerinde ortogonal bir polinom olmak üzere $f(t)$ kesirli analitik bir fonksiyon, $w(t)$, $[a,b]$ üzerinde ağırlık fonksiyonu ve

$$A_k^{(\alpha,\beta)}=\frac{\int w(t)f(t)y_k(t)dt}{\|y_k\|_w^2}$$

olmak üzere

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\alpha,\beta)}y_k(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $y_k(t)=K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ alınırsa,

$$A_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\frac{\left\langle f,K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}\right\rangle}{\left\|K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}\right\|_w^2}$$

ve $w(t)=\lambda t^{(\alpha+1)\lambda-1}(1-t^{\lambda})^{\beta}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\alpha,\beta)}K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$$

şeklinde yazılır. Bu halde, $f(t)$ kesirli analitik fonksiyonu için kesirli Taylor serisi

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}\left(\sum_{i=0}^{k}b_{k,i}t^{i\lambda}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}(b_{k,0}+b_{k,1}t^{\lambda}+b_{k,2}t^{2\lambda}+\cdots+b_{k,k}t^{k\lambda})$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,0}\right)+\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,1}\right)t^{\lambda}+\left(\sum_{i=2}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,2}\right)t^{2\lambda}+\dots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,k}\right)t^{k\lambda} \tag{2.56}$$

şeklinde verilir. Ayrıca

$$\sum_{i=k}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,k}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{i+k}^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i+k,k}=\frac{D_0^{(k\lambda)}f(0)}{\Gamma(k\lambda+1)}:=\frac{f^{(k\lambda)}(0)}{\Gamma(k\lambda+1)},\quad k=0,1,2\dots$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.5.1 (Kayedi-Bardeh, A. vd., 2012) $[0,1]$ aralığında $w(x)=\lambda x^{(\alpha+1)\lambda-1}(1-x^{\lambda})^{\beta}$ ağırlık fonksiyonu ve $K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}$ kesirli jacobi fonksiyonları olmak üzere

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}(x)$$

açılımı vardır ve

$$\sum_{i=k}^{\infty}A_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i,k}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{i+k}^{(\alpha,\beta,\lambda)}b_{i+k,k}=\frac{f^{(k\lambda)}(0)}{\Gamma(k\lambda+1)}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.57}$$

dir. Burada;

$$A_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\frac{\left\langle f,K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}\right\rangle}{\left\|K_k^{(\alpha,\beta,\lambda)}\right\|_w^2}\ ,\quad b_{i,k}=\frac{(-1)^{i-k}(k+\alpha+1)_{i-k}\,i!}{(i-k)!k!(i+k+\alpha+\beta+1)_{i-k}}$$

ile verilir.

2.6. Kesirli Türev ve Kesirli İntegral

Kesirli Türev ve Kesirli İntegraller bugüne kadar birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır. Bu çalışmada kesirli türev ve integrallerin gösterimi sembol olarak

$$D_{\alpha}^{\lambda}$$

kullanılacaktır. Burada $\lambda > 0$ olduğunda kesirli türevi, $\lambda < 0$ olduğunda ise kesirli integrali göstermektedir.

2.6.1. Grünwald Letnikov Kesirli Türev

f, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere α ıncı mertebeden Grünwald-Letnikov türevi

$$ {}_{t}D_{b}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=b-t}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{\alpha}{r} f(t+rh) \tag{2.58}$$

şeklinde verilir.

2.6.2. Riemann Liouville Kesirli Türev

Riemann Liouville kesirli türevi

$$ {}_{a}D_{t}^{p} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p} f(\tau)d\tau, \quad (m \le p < m+1) \tag{2.59}$$

şeklinde tanımlanır(Podlubny, 1999). Riemann Liouville Kesirli Türevi

$$ {}_{a}D_{t}^{p} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p} f(\tau)d\tau$$

$$ = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{(m-p)} f^{(m+1)}(\tau)d\tau$$

$$= {}_aD_t^p f(t), \quad (m \le p < m+1) \tag{2.60}$$

açık olarak yazılabilir.

2.6.3 Caputo Kesirli Türevleri

Tanım 2.6.3.1. Bir f(x) fonksiyonunun $a \ge 0$ iken $\lambda > 0$ mertebeden Caputo anlamında kesirli türevi $\beta - 1 < \lambda \le \beta, \quad \beta \in N, \quad x \ge a$ olmak üzere

$$(D_a^\lambda f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\lambda)} \int_a^x \frac{f^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}} dt \tag{2.61}$$

şeklinde tanımlanır(Diethelm, 2004).

$k \ge 0$ için $f(x) = (x-a)^k$ fonksiyonu için Caputo anlamında kesirli türevi

$$D_a^\lambda f(x) = \begin{cases} 0, \quad k \in \{0,1,2,\ldots,\beta-1\} \\ \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\lambda)}(x-a)^{k-\lambda}, \quad (k \in \mathrm{N}, k \ge \beta) \vee (k \notin \mathrm{N}, k > \beta - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 2.6.3.1. (Podlubny, 1999) $f(x)$ fonksiyonu n kez Caputo anlamında türevlenebilir ve $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{\alpha \to n} D_*^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

$$\lim_{\alpha \to n-1} D_*^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) \tag{2.62}$$

koşulları gerçeklenir.

İspat:

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-f^{(n)}(\tau)\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t -f^{(n+1)}(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\,d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f^{(n)}(0)t^{n-a}+\int_0^t f^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha}\,d\tau\right)$$

$\alpha \to n$ ve $\alpha \to n-1$ için,

$$\lim_{\alpha\to n} D_*^{\alpha} f(t)=\left(f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0)\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=f^{(n)}(t)$$

ve

$$\lim_{\alpha\to n-1} D_*^{\alpha} f(t)=\left(f^{(n)}(0)t-f^{(n)}(\tau)(t-\tau)\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t -f^{(n)}(\tau)d\tau$$

$$=f^{(n-1)}(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t}$$

$$=f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0)$$

elde edilir.

2.6.4.. Kesirli Türevlerin Bazı Özellikleri

1) Lineerlik Özelliği

Caputo kesirli türevleri için n_1, n_2 sabitler olmak üzere

$$D_a^{\lambda}(n_1 f_1(x)+n_2 f_2(x))=\frac{1}{\Gamma(\beta-\lambda)}\int_a^x \frac{(n_1 f_1+n_2 f_2)^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta-\lambda)}\int_a^x \frac{(n_1 f_1)^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}}dt+\frac{1}{\Gamma(\beta-\lambda)}\int_a^x \frac{(n_2 f_2)^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}}dt$$

$$= \frac{n_1}{\Gamma(\beta-\lambda)} \int_a^x \frac{f_1^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}} dt + \frac{n_2}{\Gamma(\beta-\lambda)} \int_a^x \frac{f_2^{(\beta)}(t)}{(x-t)^{\lambda+1-\beta}} dt$$

$$= n_1 D_a^{\lambda} f_1(x) + n_2 D_a^{\lambda} f_2(x) \tag{2.63}$$

lineerlik özelliği gerçeklenir. Riemann Liouville kesirli türevleri için

$${}_aD_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau) d\tau$$

$$= \lambda \, {}_aD_t^p f(t) + \mu \, {}_aD_t^p g(t) \tag{2.64}$$

lineerlik özelliği sağlanır.

2) Leibniz Kuralı

$f(\tau)$ fonksiyonu $[a,t]$ aralığında sürekli ve $\varphi(\tau)$ fonksiyonu $[a,t]$ aralığında $n+1$ kez türevlenebilir ise $\varphi(t) f(t)$ çarpımının kesirli türevi;

$${}_aD_t^p(\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) \, {}_aD_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t) \tag{2.65}$$

dır. Burada $n \geq p+1$ ve

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n d\xi \tag{2.66}$$

dır.

Tanım 2.6.3.2. $a \geq 0$ ve $\alpha, (\alpha > 0)$ mertebenin Riemann Liouville İntegral operatörü

$$(J_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \ , \ x > a$$

$$(J_a^{\alpha} f)(x) = f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Riemann Liouville İnteğral operatörünün özelliklerini aşagıdaki gibi verebiliriz.

1) $(J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f)(x) = (J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f)(x) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x), \quad \alpha, \beta > 0, \quad a \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}, \ \gamma > -1$

2) $$J_a^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B_{\frac{x-a}{x}}(\alpha, \gamma+1),$$

3) $$J_a^{\alpha} e^{cx} = e^{ac} (x-a)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c(x-a))^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} \ .$$

Teorem 2.6.3.2 (Odibat vd., 2007) $D_a^{k\alpha} f(x) \in C(a,b]$, $0 < \alpha \leq 1$, $k = 0,1,2,\cdots,n+1$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) + \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} .(x-a)^{(n+1)\alpha} \ , \ a \leq \xi \leq x \ , \forall x \in (a,b],$$

dır.Burada

$$D_a^{n\alpha} = \underbrace{D_a^{\alpha}.D_a^{\alpha} \cdots D_a^{\alpha}}_{n \quad kez}$$

dır..

İspat:

$$(J_a^{n\alpha} D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} (D_a^{n\alpha} f)(a),$$

$$\sum_{i=0}^{n} (J_a^{i\alpha} D_a^{i\alpha} f)(x) - (J_a^{(i+1)\alpha} D_a^{(i+1)\alpha} f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a)$$

oldugundan

$$f(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a)$$

gerçekleşir. İntegral Ortalama Değer Teoremini uyarınca

$$(J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{(n+1)\alpha} (D_a^{(n+1)\alpha} f)(t) dt,$$

$$= \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{(n+1)\alpha} dt,$$

$$= \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}$$

$$f(x) - \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} .(x-a)^{(n+1)\alpha} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) + \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} .(x-a)^{(n+1)\alpha} .$$

elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Operasyonel Matris Yöntemi

Operasyonel Matrisler, Dinamik Sistemler, Optimal kontrol sistemleri, robotik sistemler gibi birçok mühendislik ve fiziksel problemlerin çözümü için kullanılmıştır. Özellikle integral denklemler, diferansiyel denklemler, integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinde önemli bir yer tutar.

$$\Phi(t) = \left[\phi_0(t), \phi_1(t), ..., \phi_{n-1}(t)\right]^T \qquad (3.1)$$

$\phi_0(t), \phi_1(t), ..., \phi_{n-1}(t)$ [a,b] aralığı üzeinde temel fonksiyonlar olmak üzere

E_{nxn} ve F_{nxn} Matrislerinin türev ve integralinin operasyonel matris gösterimleri

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \cong E\Phi(t) \qquad (3.2)$$

$$\int_a^x \Phi(t) \cong F\Phi(x) \qquad (3.3)$$

şeklinde verilir,

E_{NxN} , F_{NxN} $(N+1)x(N+1)$ tipinde matrislerdir.

3.1.1. Genel Jacobi Polinomları için Operasyonel Matris Yöntemi

Bu bölümde genel Jacobi polinomlarının Operasyonel Matrislerini araştıralım.

$$\phi_i(t) = P_i^{(\alpha,\beta)}(t)$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dx} P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^{i-1} C_{i,j} P_j^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$= \sum_{j}^{i-1} \sum_{k=0}^{j} C_{i,j} B_j^{(\alpha,\beta,j)} (x-1)^k; \qquad i = 1,2,3,... \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer bir ifadeyle $P_i^{(\alpha,\beta)}(t) = P_i(t)$ ve $f^{(k-1)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} P_i(x) = P_i^{(k)}(x)$ olarak tanımlanır.

$$\sum_{j=k}^{i-1} C_{i,j} B_k^{(\alpha,\beta,j)}(x) = \frac{f^{(k)}(1)}{k!} = \frac{P_i^{(k+1)}}{k!}; \quad k = 0,1,...,i-1 \quad \text{ve} \quad i = 1,2,3,... \tag{3.5}$$

$$P_i^{(k+1)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+i+2+k)}{2^{k+1}\Gamma(\alpha+\beta+i+1)} P_{i-k-1}^{(\alpha+k+1,\beta+k+1)}(1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+i+2+k)}{2^{k+1}\Gamma(\alpha+\beta+i+1)} \begin{pmatrix} i+\alpha \\ i-k-1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) yardımı ile

$$\begin{bmatrix} B_0^{(\alpha,\beta,0)} & \cdots & B_0^{(\alpha,\beta,i-3)} & B_0^{(\alpha,\beta,i-2)} & B_0^{(\alpha,\beta,i-1)} \\ 0 & B_1^{(\alpha,\beta,1)} & \cdots & B_1^{(\alpha,\beta,i-2)} & B_1^{(\alpha,\beta,i-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{i-2}^{(\alpha,\beta,i-2)} & B_{i-2}^{(\alpha,\beta,i-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{i-3}^{(\alpha,\beta,i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{i,0} \\ C_{i,1} \\ \vdots \\ C_{i,i-2} \\ C_{i,i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^{'}(1)/0! \\ P_i^{''}(1)/1! \\ \vdots \\ P_i^{(i-1)}(1)/(i-2)! \\ P_i^{i}(1)/(i-1)! \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

matris gösterimi elde edilir. Burada

$$C_{i,i-1} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2i+k)}{2^i\Gamma(\alpha+\beta+i+1)}}{2^{-i+1}\dfrac{(2i+\alpha+\beta-2)!}{(i-1)!(\alpha+\beta+i-1)}(i-1)!}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+2i)!}{2(\alpha+\beta+i)!}\frac{(\alpha+\beta+i-1)!}{(2i+\alpha+\beta-2)!}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+2i)}{2(\alpha+\beta+i)}(\alpha+\beta+2i-1) \tag{3.8}$$

ve

$$C_{i,j}=\frac{P_i^{(j+1)}(1)-j!\sum_{k=i-1}^{j+1}B_j^{(\alpha,\beta,k)}C_{i,k}}{j!B_j^{(\alpha,\beta,j)}} \quad ; \quad j=0,1,2,...,i-2 \tag{3.9}$$

dir (Eslahchi M.R., vd., 2011).

3.1.2. Kesirli Türevler İçin Operasyonel Matris Yöntemi

Tanım : $\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots,\phi_{n-1}(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde baz fonksiyonları olmak üzere $\phi(t)=[\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots,\phi_{n-1}(t)]^T$ matrisini göz önüne alalım. Bir E_{nxn} matrisi

$$\frac{d}{dt}\phi(t)=E\phi(t) \tag{3.10}$$

koşulu gerçeklenmesi halinde türev operasyonel matrisi adını alır. Kesirli Jacobi fonksiyonları $\phi_i(t)=K_i(t)=K_i^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ için Caputo kesiri türevleri kullanılarak

$$\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}K_i(t)=D_0^{(\lambda)}K_i(t)=\sum_{j=0}^{i-1}M_{i,j}K_j(t) \tag{3.11}$$

(2.34) ve (2.35) ten faydalanarak

$$=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j}M_{i,j}b_{i,j}t^{k\lambda}, \quad i=1,2,3,\ldots \tag{3.12}$$

gerçeklenecek şekilde $M_{i,j}$ vardır. $f^{(k-1)\lambda}(t) = D_0^{(k\lambda)} K_i(t) = K_i^{(k\lambda)}(t)$ olmak üzere

$$\sum_{j=k}^{i-1} M_{i,j} b_{j,k} = \frac{f^{(k\lambda)}(0)}{\Gamma(k\lambda+1)} = \frac{K_i^{(k+1)\lambda}(0)}{\Gamma(k\lambda+1)}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,i-1, i = 1,2,3,\ldots \tag{3.13}$$

elde edilir. Bu halde $M_{i,j}$ katsayılarını aşağıdaki denklem sisteminden bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{1,0} & \ldots & b_{i-2,0} & b_{i-1,0} \\ 0 & b_{1,1} & \ldots & b_{i-2,1} & b_{i-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{i-2,i-2} & b_{i-1,i-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{i-1,i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{i,0} \\ M_{i,1} \\ \vdots \\ M_{i,i-2} \\ M_{i,i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i^{(\lambda)}(0)/\Gamma(1) \\ K_i^{(\lambda)}(0)/\Gamma(\lambda+1) \\ \vdots \\ K_i^{(\lambda)}(0)/\Gamma((i-2)\lambda+1) \\ K_i^{(\lambda)}(0)/\Gamma((i-1)\lambda+1) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Bu şekilde bulunan lineer denklem sistemi çözüldüğünde

$$M_{i,i-1} = \frac{K_i^{(i)\lambda}(0)}{b_{i-1,i-1}\Gamma((i-1)\lambda+1)} \tag{3.15}$$

$$M_{i,j} = \frac{K_i^{(j+1)\lambda}(0) - \Gamma(j\lambda+1)\sum_{k=j+1}^{i-1} b_{k,j} M_{i,k}}{b_{j,j}\Gamma(j\lambda+1)}; \quad j = i-2, i-3, \ldots, 1, 0 \tag{3.16}$$

değerleri elde edilir. Burada $b_{i,i} = 1$

$$c_{n,k}^{(m)} = a_{n,k} \frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-m)\lambda+1)k!}, \qquad m = 0,1,\cdots,n \tag{3.17}$$

$$D_0^{(m\lambda)} K_n^{(\alpha,\beta,\lambda)}(0) = c_{n,m}^{(m)} \tag{3.18}$$

dir (3.17) ve (3.18) den

$$\frac{K_n^{(k)\lambda}(0)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)}=\frac{\Gamma(k\lambda+1)}{\Gamma((k-1)\lambda+1)k!}\frac{(-1)^{n-k}(k+\alpha+1)_{n-k}\,n!}{(n-k)!(n+k+\alpha+\beta+1)_{n-k}} \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilir. Operasyonel matrisi tanımlamak için, $E^{(\alpha,\beta,\lambda)}$, $(N+1)x(N+1)$ tipinde bir matris olmak üzere

$$\frac{d^{\lambda}}{dt^{\lambda}}\phi(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ M & 0\end{bmatrix}\phi(t):=(E^{(\alpha,\beta,\lambda)})\phi(t) \tag{3.20}$$

şeklinde yazalım. Bu halde

$$\frac{d^{(n\lambda)}}{dt^{(n\lambda)}}\phi(t)=(E^{(\alpha,\beta,\lambda)})^{n}\phi(t),\quad n\in \mathrm{N} \tag{3.21}$$

gerçeklenir. Özel halde, N=4 ve $\lambda\in(0,1]$ olsun.Bu halde,

$$E^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ M_{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0\\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0 & 0 & 0\\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & 0 & 0\\ M_{4,0} & M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & 0\end{bmatrix} \tag{3.22}$$

elde edilir (Kayedi-Bardeh, A., vd., 2012).

3.1.3. Çok Katlı Kesirli Türevler İçin Operasyonel Matris Yöntemi

Çok Katlı Kesirli Diferansiyel Denkemini başlangıç koşulları ile birlikte

$$U^{T}E^{(\alpha,\beta,\lambda_2)}\phi(t)\cong F(t,U^{T}\phi(t),U^{T}E^{(\alpha,\beta,\lambda_1)}\phi(t)) \tag{3.23}$$

$$u^{(i)}(0)=d_i\,,\quad i=0,1,...,r \tag{3.24}$$

göz önüne alınsın.

Bu problemin nümerik çözümünü bulmak amacı ile $K_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}$ kesirli Jacobi fonksiyonundan yararlanarak yaklaşık çözüm

$$u(t) \cong \sum_{j=0}^{N} u_j K_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) = U^T \phi(t) \ , \ U^T = [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_N] \tag{3.25}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem kesirli diferansiyel denklemlerin yardımı ile

$$U^T E^{(\alpha,\beta,\lambda_{n+1})}\phi(t) \cong F(t, U^T\phi(t), U^T E^{(\alpha,\beta,\lambda_1)}\phi(t), \ldots, U^T E^{(\alpha,\beta,\lambda_n)}\phi(t)) \tag{3.26}$$

şeklinde yazılır (Kayedi-Bardeh, A. vd., 2012). Sıralama noktaları için $K_{N+1}^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)$ kesirli Jacobi fonksiyonun ilk $(N-r)$ kökleri kullanılır ve başlangıç koşullarına uygulandığında oluşturulan (N+1)x(N+1) lineer veya non-lineer denklem sistem çözülerek nümerik çözüm elde edilir.

3.1.4. Çözümün Kontolü ve Hata Hesabı

(1.2)'deki kesilmiş kesirli Jacobi serisi (1.1) denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan $y(t)$ çözüm fonksiyonu (1.1) de yerine yazıldığında denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Bu durumda her $t = t_i$, $i = 0,1,2,\cdots,N$ için

$$E(t_i) = \left| D_0^{\lambda_{n+1}} y(t_i) - F(t_i, y(t_i), D_0^{\lambda_1} y(t_i), \ldots, D_0^{\lambda_n} y(t_i)) \right| \cong 0$$

veya

$E(x_i) \leq 10^{-k_i}$ (k_i) (herhangi bir pozitif tamsayı)

olmalıdır. Eğer maksimum $(10^{-k_i}) = 10^{-k}$ önceden belirlenirse, o zaman N kesme sınırı t_i noktalarının her birindeki $E(t_i)$ değeri 10^{-k} dan küçük oluncaya kadar arttırılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 4.1.1. Homojen olmayan

$$y''(t) + y'(t) = 2 + 2t$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1 \ , y'(0) = 0$$

koşulları altında

$$y(t) \cong \sum_{i=0}^{N} y_i P_i^{(\alpha,\beta)}(t) = U^T \Phi(t)$$

formunda yaklaşık çözümlerini araştıralım. Bu problemin çözümü için $(\alpha, \beta, n) = (0,0,1)$ ve $N = 2$ alınsın. Bu halde

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad E^{(\alpha,\beta,n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1,0} & 0 & 0 \\ C_{2,0} & C_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{bmatrix} \ \text{(bilinmeyen vektör)}$$

$$\phi_i(t) = P_i^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{k=0}^{i} B_k^{(\alpha,\beta,i)} (x-1)^k \quad ; \quad \alpha, \beta > -1$$

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{i+\alpha}{i}$$

$$B_{i-1}^{(\alpha,\beta,n)} = 2^{-k}\binom{n+\alpha+\beta+k}{k}\binom{n+\alpha}{n-k} \text{ ; k=0, 1, 2, . . . , n ;}$$

$$C_{i,j} = \frac{P_i^{(j+1)}(1) - j!\sum_{k=i-1}^{j+1} B_j^{(\alpha,\beta,k)} C_{i,k}}{j!\, B_j^{(\alpha,\beta,j)}} \quad ; \quad j = 0,1,2,\ldots,i-2$$

$$C_{i,i-1} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2i+k)}{2^i\,\Gamma(\alpha+\beta+i+1)}}{2^{-i+1}\dfrac{(2i+\alpha+\beta-2)!}{(i-1)!(\alpha+\beta+i-1)}(i-1)!} = \frac{(\alpha+\beta+2i)!}{2(\alpha+\beta+i)!}\frac{(\alpha+\beta+i-1)!}{(2i+\alpha+\beta-2)!}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2i)}{2(\alpha+\beta+i)}(\alpha+\beta+2i-1)$$

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(t) = P_i(t) \text{ ve } f^{(k-1)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}P_i(x) = P_i^{(k)}(x)$$

$$P_i^{(k+1)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+i+2+k)}{2^{k+1}\Gamma(\alpha+\beta+i+1)} P_{i-k-1}^{(\alpha+k+1,\beta+k+1)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+i+2+k)}{2^{k+1}\Gamma(\alpha+\beta+i+1)}\binom{i+\alpha}{i-k-1}$$

$$\phi_0(t) = 1 \;,\; \phi_1(t) = t \;,\; \phi_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2$$

$$C_{1,0} = 1 \;,\; C_{2,0} = 0 \;,\; C_{2,1} = 3$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler yerine konulursa,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix} \text{ ve } E^{(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.21) denkleminden yararlanılarak $E^{(0,0,2)} = (E^{(0,0,1)})^2$

şeklinde yazılabilir. Sıralama noktası olarak $P_3^{(0,0)}(t)$ Jacobi denkleminin ilk kökü alınsın. Bu halde

$$P_3^{(0,0)}(t)=\sum_{k=0}^{3} B_k^{(\alpha,\beta,i)}(t-1)^k=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t$$

olduğundan denkleminin ilk kökü $t_1=-\frac{\sqrt{15}}{5}$ olarak bulunur. Genel denklemde yerine konursa birinci kök için

$$U^T E^{(0,0,2)}\Phi(t_1)+U^T E^{(0,0,\frac{3}{2})}\Phi(t_1)+U^T\Phi(t_1)-t_1-1=0$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u_1+(3+\frac{3\sqrt{15}}{5})u_2+\frac{2\sqrt{15}}{5}-2=0$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$y(0)=1$ koşulu için

$$U^T\Phi(0)=u_{01}-\frac{1}{2}u_2=1$$

denklemi ve $y^{'}(0)=1$ koşulu için

$$U^T E^{(0,0,1)}\Phi(0)=u_1=0$$

denklemi elde edilir. Bu 3 denklemden oluşan 3 bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü

$$U^T=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

olmak üzere yerine konursa

$$y(t)=U^T\Phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t\\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2\end{bmatrix}=1+t^2$$

diferansiyel denklemin tam çözümü elde edilir.

4.2. Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 4.2.1 Homojen olmayan

$$D_0^{\frac{1}{2}}u(t)+u(t)=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}+2t-1$$

kesirli lineer diferansiyel denkleminin

$$u(0)=-1\ ,u^{'}(0)=2$$

koşulları altında

$$u(t)\cong\sum_{j=0}^{N}u_jK_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=U^T\Phi(t)$$

formunda yaklaşık çözümlerini araştıralım.

Bu problemin çözümü için $(\alpha,\beta,\lambda)=(0,0,\frac{1}{2})$ ve $N=2$ alınsın. Bu halde

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\\ \phi_2(t)\end{bmatrix}\ \text{ve}\ E^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ M_{1,0} & 0 & 0\\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0\end{bmatrix}$$

$$U^T=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\phi_0(t)=1\ ,\ \phi_1(t)=t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ ,\ \phi_2(t)=t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}$$

$$M_{1,0}=0.8862269255\ ,\ M_{2,1}=1.128379167\ ,\ M_{2,0}=-0.3220373420$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler yerine konulursa,

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1\\ t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\ t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\end{bmatrix}\ \text{ve}\ E^{(0,0,\frac{1}{2})}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0.8862269255&0&0\\ -0.3220373420&1.128379167&0\end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.21) denkleminden yararlanılarak

$$E^{(0,0,1)}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^2$$

şeklinde yazılabilir. Sıralama noktası olarak $K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)$ kesirli Jacobi denkleminin ilk kökü alınsın.Bu halde

$$K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)=\sum_{k=0}^{3}b_{3,k}t^{k\frac{1}{2}}=t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{5}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{20}$$

olduğundan denkleminin ilk kökü $t_1=0.01270166538$ olarak bulunur. Genel denklemde yerine konursa birinci kök için

$$U^TE^{(0,0,\frac{3}{2})}\Phi(t_1)+\frac{1}{2}U^TE^{(0,0,\frac{1}{2})}\Phi(t_1)+U^T\Phi(t_1)-t_1-1=0$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u_0+(0.4989285909)u_1-(0.6923900475)u_2+0.9745966692-\frac{0.4508066616}{\sqrt{\pi}}=0$$

elde edilir. Benzer şekilde $u(0)=-1$ koşulu için

$$U^T\Phi(0)=u_0-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{6}u_2=-1$$

denklemi ve $u^{'}(0)=2$ koşulu için

$$U^T E^{(0,0,1)}\Phi(0)=u_2=2$$

denklemi elde edilir. Bu 3 denklemden oluşan 3 bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü

$$U^T=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.3333333333 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu değerler yerine konursa,

$$y(t)=U^T\Phi(t)=\begin{bmatrix}-0.3333333333 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\ t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\end{bmatrix}=-0.9999999997+2t$$

kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü elde edilir.

4.3. Çok Katlı Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek4.3.1 Homojen olmayan

$$D_0^{\frac{3}{2}}u(t)+\frac{1}{2}D_0^{\frac{1}{2}}u(t)+u(t)=t+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}+1$$

kesirli lineer diferansiyel denkleminin

$$u(0)=1 \ , u^{'}(0)=1$$

koşulları altında

$$u(t)\cong\sum_{j=0}^{N}u_jK_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t)=U^T\Phi(t)$$

formunda yaklaşık çözümlerini bulalım.

Bu problemin çözümü için $(\alpha,\beta,\lambda)=(0,0,\frac{1}{2})$ ve $N=2$ alınsın. Bu halde

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\\ \phi_2(t)\end{bmatrix} \text{ ve } E^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ M_{1,0} & 0 & 0\\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0\end{bmatrix}$$

$$U^T=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu halde

$$\phi_0(t)=1 \ , \ \phi_1(t)=t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2} \ , \ \phi_2(t)=t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}$$

$$M_{1,0}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ , \ M_{2,1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \ , \ M_{2,0}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler yerine konulursa,

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1\\ t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\ t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\end{bmatrix} \text{ ve } E^{(0,0,\frac{1}{2})}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.21) denkleminden yararlanılarak

$$E^{(0,0,1)}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^2\ ,\ E^{(0,0,\frac{3}{2})}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^3$$

şeklinde yazılabilir. Sıralama noktası olarak $K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)$ kesirli Jacobi denkleminin ilk kökü alınsın.Bu halde

$$K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)=\sum_{k=0}^{3}b_{3,k}t^{k\frac{1}{2}}=t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{5}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{20}$$

olduğundan denkleminin ilk kökü $t_1=\frac{\left(-5+\sqrt{15}\right)^2}{100}$ olarak bulunur. Genel denklemde yerine konursa birinci kök için

$$U^TE^{(0,0,\frac{3}{2})}\Phi(t_1)+\frac{1}{2}U^TE^{(0,0,\frac{1}{2})}\Phi(t_1)+U^T\Phi(t_1)-t_1-1=0$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u_0+(\frac{442}{7919})u_1-(\frac{37249}{119059})u_2-\frac{156265}{145189}=0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$u(0)=1$$

koşulu için

$$U^T\Phi(0)=u_0-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{6}u_2=1$$

denklemi ve $u^{'}(0)=1$ koşulu için

$$U^TE^{(0,0,1)}\Phi(0)=u_2=1$$

denklemi elde edilir. Bu 3 denklemden oluşan 3 bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü

$$U^T = [u_0 \quad u_1 \quad u_2] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu değerler yerine konursa,

$$y(t) = U^T \Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ t - t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} = 1 + t$$

kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü elde edilir.

4.4. Bagley Torvik Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 4.4.1: Homojen olmayan

$$\frac{1}{2} D_0^2 y(t) + 2 D_0^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = 1 + 2t$$

Bagley-Torvik kesirli lineer diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1 \; , \; y^{'}(0) = 2$$

koşulları altında

$$y(t) \cong \sum_{j=0}^{N} y_j K_j^{(\alpha,\beta,\lambda)}(t) = U^T \Phi(t)$$

formunda yaklaşık çözümlerini bulalım.

Bu problemin çözümü için $(\alpha, \beta, \lambda) = (0,0,\frac{1}{2})$ ve $N = 2$ alınsın. Burada

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\\ \phi_2(t)\end{bmatrix} \text{ ve } E^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ M_{1,0} & 0 & 0\\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0\end{bmatrix}$$

$$U^T=[u_0 \quad u_1 \quad u_2]$$

şeklindedir. Bu halde

$$\phi_0(t)=1\ ,\ \phi_1(t)=t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ ,\ \phi_2(t)=t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}$$

$$M_{1,0}=\frac{248}{167}\ ,\ M_{2,1}=\frac{167}{248}\ ,\ M_{2,0}=-\frac{1587}{4928}$$

ifadeleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler yerine konulursa,

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1\\ t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\ t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\end{bmatrix} \text{ ve } E^{(\alpha,\beta,\lambda)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{248}{167} & 0 & 0\\ -\frac{1587}{4928} & \frac{167}{248} & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.21) denkleminden yararlanılarak

$$E^{(0,0,1)}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^2\ ,\ E^{(0,0,\frac{3}{2})}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^3 \text{ ve } E^{(0,0,2)}=(E^{(0,0,\frac{1}{2})})^4$$

şeklinde yazılabilir. Sıralama noktası olarak $K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)$ kesirli Jacobi denkleminin ilk kökü alınsın.Bu halde

$$K_3^{(0,0,\frac{1}{2})}(t)=\sum_{k=0}^{3}b_{3,k}t^{k\frac{1}{2}}=t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{5}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{20}$$

olduğundan denkleminin ilk kökü $t_1=\frac{248}{19525}$ olarak bulunur. Genel denklemde yerine konursa birinci kök için

$$\frac{1}{2}U^T E^{(0,0,2)}\Phi(t_1)+2U^T E^{(0,0,\frac{3}{2})}\Phi(t_1)+U^T\Phi(t_1)-2t_1-1=0$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u_0+(-\frac{\sqrt{15}}{10})u_1+(\frac{1}{15})u_2-\frac{20021}{19525}=0$$

elde edilir. Benzer şekilde $y(0)=1$ koşulu için

$$U^T\Phi(0)=u_0-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{6}u_2=1$$

denklemi ve $y^{'}(0)=2$ koşulu için

$$U^T E^{(0,0,1)}\Phi(0)=u_2=2$$

denklemi elde edilir. Bu 3 denklemden oluşan 3 bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü

$$U^T=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & 2 & 2\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu değerler yerine konursa,

$$y(t)=U^T\Phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\ t-t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\end{bmatrix}=1+2t$$

kesirli diferansiyel denkleminin tam çözümü elde edilir.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için farklı yöntemler çalışılmıştır. Bu amaçla kesirli Taylor serisinden yararlanarak kesirli Jacobi fonksiyonlarının operasyonel matrisleri araştırılmıştır. Bu yöntem kesirli Taylor serilerinin katsayıları ve kesirli Jacobi fonksiyon açılımları arasındaki ilişki dayanmaktadır. Kesirli Jacobi fonksiyonlarının operasyonel matrisleri kullanılarak kesirli diferansiyel denkleminin nümerik çözümleri incelenmiştir. Üzerinde çalışılan yöntem lineer diferansiyel denklemlere, Kesirli lineer diferansiyel denklemlere ve çok katlı lineer kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Özel olarak yöntem Bagley Torvik diferansiyel denklemine uygulanmış ve benzer diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır.

Burada çalışılan operasyonel matris yönteminin disiplinler arası birçok alanda karşılaşılan problemlere farklı bir yorum getirilebileceği düşünülmektedir. Yöntem uygulandığında hassasiyeti yüksek çözümler verdiği görülmektedir. Bu yöntem fractional integro diferansiyel denklemlerede uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Bagley, R.L., Torvik, P.J. (1984), *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, Applied Mechanics 51: 294–298.

Diethelm K. ve Ford N.J., (2002), *Numerical solution of the Bagley–Torvik equation*. BIT Numerical Mathematics 42: 490–507.

Diethelm, K., (2002) *Analysis of Fractional Differential Equations*, J Math Anal Appl, 265: 229– 248.

Diethelm K, Ford J.M., Ford J.N. ve Weilbeer M (2006) *Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations.* Journal of Computational and Applied Mathematics 186: 482–503.

Diethelm K., Ford N.J., (2004) *Multi-order fractional differential equations and their numerical solution*, Appl. Math. Comput. 154 621_640.

Eslahchi, M.R., ve Dehghan, M. (2011), *Application of Taylor series in obtaining the orthogonal operational matrix*, Computers & Mathematics with Applications 61: 2596–2604.

Esmaeili S, Shamsi M ve Luchko Y (2011) *Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Mu¨ntz polynomials.* Computers & Mathematics with Applications 62: 918–929.

Funaro D., (1992*) Polynomial Approximation of Differential Equations*. Lecture Notes in Physics. Berlin Heilderberg: Springer-Verlag.

Gejji VD.,ve Jafari H., (2007) *Solving a multi-order fractional differential equation*. Applied Mathematics and Computation 187: 541–548.

Huang, L., Li, X.F., Zhao Y. ve Duan, X.Y., (2011) *Approximate solution of fractional integro-differential equations by Taylor expansion method,* Comp. and Math Appl, 62: 1127-1134.

Kayedi-Bardeh, A., Eslahchi, MR., Dehghan, M., (2012*), A method for obtaining the operational matrix of fractional functions and applications,* J. Vibration and Control, 20(5):736-748

Kılıcman A., ve Al Zhour Z.A.A. (2007), *Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications*, Applied Mathematics and Computation 187: 250–265.

Kilbas AA., Srivastava H.M., ve Trujillo J.J., (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier.

Koekoek, R., et.al., (2008), *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-analogues*, Berlin.

Kumar P., Agrawal O.P., (2006), *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations*, Signal Processing 86 2602_2610.

Leszczynski C., ve Ciesielski M., (2002), *A numerical method for solution of ordinary differential equations of fractional order*. Parallel Processing and Applied Mathematics 695–702.

Lİ,Y. Ve Zhao W. (2010) *Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations*, Appl Math Comput, 216: 2276–2285.

Miller, K.B. ve Ross, B. (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York., 366s.

Momani S., Noor M.A., (2006) *Numerical methods for fourth-order fractional integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 182 754_760.

Muslih S.I. ve Baleanu D. (2007) *Fractional Euler–Lagrange equations of motion in fractional space.* Journal of Vibration and Control 13: 1209–1216.

Odibat Z., ve Shawagfeh N. (2007), *Generalized Taylor's formula*, Applied Mathematics and Computation 186: 286–293.

Odibat Z., Momani S., (2006) *Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order*, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7 271_279.

Oldham KB., and Spanier J., (1974) *The Fractional Calculus*, Mathematics in Science and Engineering. New York: Academic Press.

Osler TJ., (1971) *Taylor's series generalized for fractional differential equations*. SIAM Journal on Mathematical Analysis 2: 37–48.

Paul Dienes, (1931) *The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, The Clarendon Press., 552s

Podlubny I., (1999) *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, CA, USA., 340s

Podlubny I., (2002) *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fract. Calculus Appl. Anal. 5 367_386.

Rawashdeh EA., (2006) *Numerical solution of fractional integro– differential equations by collocation method*. Applied Mathematics and Computation 176: 1–6.

Ross B., (1975) *The development of fractional calculus 1695–1900*. Historical Mathematics 4(1): 75–89.

Saadatmandi A. ve Dehghan M., (2011*) A Legendre collocation method for fractional integro–differential equations*. Journal of Vibration and Control 17(13): 2050–2058.

Saadatmandi A., ve Dehghan M. (2010), *A new operational matrix for solving fractional-order differential equations*, Computers & Mathematics with Applications 59: 1326–1336.

Szego G., (1975) *Orthogonal polynomials. 4th ed.* Providence, RI: American Mathematic Society.

Sweilam N.H., Khader M.M., Al-Bar R.F., (2007) *Numerical studies for a multi-order fractional differential equation*, Phys. Lett. A 371 26_33.

Trinks C., ve Ruge P., (2002), *Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory- integrals*, Computational Mechanics 29: 471–476.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyadı :Fahrettin ÇELİK

Uyruk : T.C.

Doğum Yeri ve Tarihi: MUĞLA-1992

E-posta : fahrettincelik10@gmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Bursa Nilüfer Fatih Lisesi	2010
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2014
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
Eylül 2017 –	Özel Bursa Altınküre Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma	X		
Anlama		X	
Okuma		X	