

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elçin ÇELİK

2018

T.C.

**MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TEK TÜR VE BİRBİRİ İLE ETKİLEŞİMLİ
POPÜLASYON MODELLERİNİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR MATRİS METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELÇİN ÇELİK

MAYIS 2018

MUĞLA

**T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TEK TÜR VE BİRBİRİ İLE ETKİLEŞİMLİ
POPÜLASYON MODELLERİNİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR MATRİS METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELÇİN ÇELİK

MAYIS 2018

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

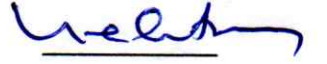
ELÇİN ÇELİK tarafından hazırlanan **TEK TÜR VE BİRBİRİ İLE ETKİLEŞİMLİ POPÜLASYON MODELLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR MATRİS METODU** başlıklı tezinin, 04/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mehmet SEZER (**Jüri Başkanı**)

Matematik Anabilim Dalı,
Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

İmza:



Dr. Öğretim Üyesi Elçin GÖKMEN (**Danışman**)

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

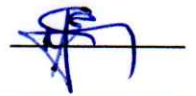
İmza:



Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

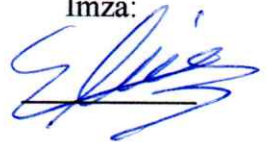
İmza:



Dr. Öğretim Üyesi Elçin GÖKMEN

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Savunma Tarihi: 04/05/2018

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Elçin ÇELİK

04/05/2018

ÖZET
TEK TÜR VE BİRBİRİ İLE ETKİLEŞİMLİ POPÜLASYON
MODELLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN TAYLOR MATRİS
METODU

Elçin ÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Elçin GÖKMEN

Mayıs 2018, 57 sayfa

Bu çalışmada, tek ve birbiri ile etkileşimli türlerin sürekli popülasyon modellerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için bir nümerik metot sunulmuştur. Bu metot kesilmiş Taylor serisi ve serinin matris gösterimine dayalı bir metottur. Taylor polinomları ve sıralama noktaları kullanılarak, bu yöntem popülasyon modellerini bir matris denkleme dönüştürür. Matris denklemi, bilinmeyenleri Taylor katsayıları olan lineer olmayan bir denklem sistemine karşılık gelir. Sistemin katsayılar matrisi lineer olmayan denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri kullanılarak bulunur ve böylece istenen çözüme ulaşılır. Metodun güvenilirliğini ve etkinliğini göstermek için daha önce farklı sayısal metotlarla çözülmüş olan örnekler ele alınarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca yöntemin hassaslığını belirlemek için hata analizi yapılmış ve mutlak hatayı tahmin etmek için residual hata tahmini yöntemi uygulanmıştır. Tüm sayısal hesaplamalar bilgisayar cebir sistemi Maple 16 kullanılarak elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sürekli Nüfus Modelleri, Tek ve Etkileşimli Türler, Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklemler ve Sistemleri, Taylor Polinomları ve Serileri, Sıralama Noktaları.

ABSTRACT
**TAYLOR MATRIX METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF
SINGLE AND INTERACTING POPULATION MODELS**

Elçin ÇELİK

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Elçin GÖKMEN

May 2018, 57 pages

In this study, a numerical approach is presented to obtain the approximate solutions of continuous population models for single and interacting species. This method is essentially based on the truncated Taylor series and its matrix representations with collocation points. By using Taylor polynomials and collocation points, this method transforms population models into a matrix equation. The matrix equation corresponds to a system of nonlinear equations with the unknown Taylor coefficients. To illustrate reliability and efficiency of the method, numerical examples are presented and results are compared with the other numerical methods. Additionally, residual correction procedure is applied to estimate the absolute errors. All numerical computations have been performed on the computer algebraic system Maple 15.

Keywords: Continuous Population Models, Single and Interacting Species, Nonlinear Differential Equations and Their Systems, Taylor Polynomials and Series, Collocation Points.



Canım Aileme Adanmıştır.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında bilgi ve birikimleri ile bana yol gösterici olan değerli danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Elçin GÖKMEN'e, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan değerli hocalarım Matematik Anabilim Dalı Başkanı Prof. Dr. Mustafa GÜLSU ve Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili anneme, babama, ablama ve abime sonsuz şükranlarımı sunarım.

Bu tez, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 17/226 kod numaralı "Tek Tür ve Birbiri ile Etkileşimli Popülasyon Modellerinin Yaklaşık Çözümleri İçin Taylor Matris Metodu" adlı proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	12
2.1. Lojistik Diferansiyel Denklem	12
2.2. Lotka- Volterra Av-Avcı Modeli.....	13
2.3. Lineer Denklem Sistemleri.....	14
2.3.1. Lineer denklem sistemlerinin çözümü (Gauss eliminasyon yöntemi).....	16
2.4. Lineer Olmayan Denklem Sistemleri	16
2.4.1. Newton metodu.....	17
2.5. Taylor Serisi ve Temel Teoremleri.....	18
2.6. Sıralama (Collocation) Noktaları	22
2.7. Polinom Yaklaşımı	23
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	28
3.1. Lojistik Diferansiyel Denklem İçin Taylor Sıralama Yaklaşımı.....	29
3.1.1. Temel matris bağıntıları.....	29
3.1.2. Denklemin temel matris gösterimi.....	30
3.1.3. Taylor sıralama metodu	31
3.1.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini.....	32
3.2. Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli İçin Taylor Sıralama Yaklaşımı.....	33
3.2.1. Temel matris bağıntıları.....	34
3.2.2. Sistemin temel matris gösterimi	35
3.2.3. Taylor sıralama metodu	36
3.2.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini.....	38
3.2.5. Sonuç	39
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	40

4.1. Lojistik Diferansiyel Denklem İçin Örnek	40
4.2. Lotka-Volterra Av-Avcı Denklem Sistemi İçin Örnek	44
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.1. için $y_N(t)$ yaklaşık çözümler ile farklı metodların çözümlerinin karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.2. Örnek 4.1.1. için mutlak hataların sonsuz normları, mutlak hata tahminleri, residual mutlak hataların normları ve mutlak hataların üst sınırları.....	43
Çizelge 4.3. Örnek 4.2.1. için $y_{1,N}(t_i)$ ve $y_{2,N}(t_i)$ yaklaşık çözümler ile farklı metodların çözümlerinin karşılaştırılması	45
Çizelge 4.4. Örnek 4.2.1.'in t_i değerleri için (3.29) denklemini ile verilen çözümlerin doğruluğunun karşılaştırılması	46

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1.1.'in $N = 11$ için mutlak hata fonksiyonu ve $M = 10$ hata tahmini fonksiyonunun karşılaştırılması	43
Şekil 4.2. Örnek 4.1.2. için ADM ve mevcut yöntem ile elde edilen $y_{1,4}(t)$ yaklaşık çözümünün karşılaştırılması	46
Şekil 4.3. Örnek 4.1.2. için ADM ve mevcut yöntem ile elde edilen $y_{2,4}(t)$ yaklaşık çözümünün karşılaştırılması	47
Şekil 4.4. Örnek 4.1.2. için $E_{1,4}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu	47
Şekil 4.5. Örnek 4.1.2. için $E_{1,8}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu	48
Şekil 4.6. Örnek 4.1.2. için $E_{2,4}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu	48
Şekil 4.7. Örnek 4.1.2. için $E_{2,8}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu	49

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ADM	Adomian ayrıştırma metot
HHPM	He's homotopy perturbation metot
N	Kesme sınırı
$P_n(\mathbb{R})$	Derecesi en çok n olan reel değerli polinomlar uzayı
$C[a, b]$	$[a, b]$ 'den \mathbb{R} 'ye giden sürekli fonksiyonlar uzayı
$\ x\ $	x vektörünün normu
$y_{i,N}(t)$	Taylor seri çözümü
$e_{i,N}(t)$	Hata fonksiyonu
e_m^*	e_N hata fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu
$e_{i,m}^*(t)$	$e_{i,N}$ hata fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu
$E_{j,N}(t_i)$	t_i noktalarında çözümün doğruluğu

1. GİRİŞ

Dünya nüfusu artmaya başladıkça “dünyada ne kadar insan, hangi koşullar altında yaşayabilir?” sorusu gündeme gelmeye başlamıştır (Brauer ve Chavez, 2012). İnsanlar karşılaştıkları doğa olaylarını açıklamak için özellikle son yüzyılda bilime dayanarak birçok çalışma yapmışlardır. Bu ise matematik, fizik, mühendislik, kimya, astronomi, biyoloji, psikoloji, sosyal bilimler ve ekonomi gibi temel bilimlerin öne çıkmasını sağlamış ve zamanla bu bilimlerin bir noktada birleşerek kendi aralarında etkileşim içinde olan, genel olarak uygulamalı matematik başlığı altında biofizik, matematiksel biyoloji, matematiksel iktisat gibi daha birçok alanın doğmasına zemin hazırlamıştır (Değirmenci, 2011). Bu alanlarda bir sistemin davranışını matematiksel olarak temsil etmek için matematiksel modeller kullanılır.

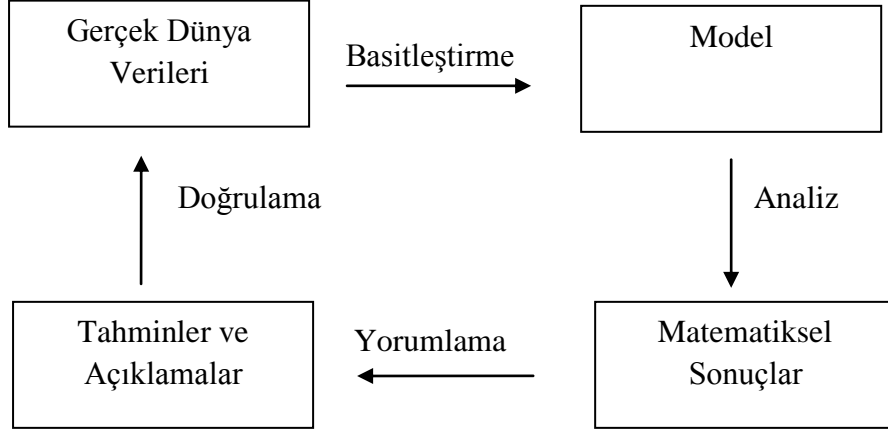
Matematiksel modelleme en genel anlamda gerçek hayat durumunun matematik diline aktarılma ve matematiksel olarak ifade edilme sürecidir (Verschaffel, Greer ve De Corte, 2000). Bu süreç sonunda ortaya çıkan ürüne ise matematiksel model denir. Matematiksel model problem hakkında bilgi vermesi ve tahmin yapılmasına olanak sağlaması açısından çok önemlidir.

Matematiksel model oluşturma süreci

1. Problemi tanımlama
2. Varsayımlar yapma
 - Değişkenleri sınıflandırma
 - Seçilen değişkenler arasındaki ilişkiyi belirleme
3. Modeli çözme ve yorumlama
4. Modeli doğrulama
5. Modeli uygulama
6. Modeli sürdürme

adımlarından oluşur (Giordano, Fox ve Horton, 2014).

Bu süreci şema yardımıyla gösterecek olursak;



şeklinde ifade edebiliriz (Giordano, Fox ve Horton, 2014).

Nüfus artış ve azalışı, radyoaktif bozulma, kimyasal tepkimeler, düşen bir cismin hızı, seri bağlı bir elektrik devresindeki akım, cisimlerin soğuması, kentsel trafik akışı gibi benzeri olaylar matematiksel modelleme kullanılarak çözülebilen problemlere örnekler olarak verilebilir (Özer ve Eser, 1996). Bu problemler ile oluşturulan modellerin çoğu, zamana bağlı değişkenleri ve onun türevlerini içeren bir denklem ve bu denklemi belirli koşullarda sağlayan bir bilinmeyen fonksiyonunu içerir. Nüfus artışı ve cisimlerin soğuması probleminin zamana göre değişiminde ve düşen bir cismin hızının mesafeye bağlı değişiminde olduğu gibi birbirine bağlı olarak değişen, bağımlı ve bağımsız değişkenler vardır. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir bağıntıya diferansiyel denklem adı verilir (Sezer, 2001).

Popülasyon modellerinin çoğu diferansiyel denklemler ile kurulmaktadır. Bu diferansiyel denklemler çeşitli teknikler kullanılarak analitik çözümleri yapılabilmekte veya analitik çözümünün elde edilemediği ya da elde etmenin zor olduğu durumlarda birçok yaklaşık çözüm metodu sunulmaktadır (Salisbury, 2011). Popülasyon dinamikleri, belirli bir türe ait organizmalara uygulandığında doğum ve ölüm hızlarını, göç ve göçü belirleyen karmaşık süreçleri, yaş yapısının etkilerini ve tür üyelerinin hayatta kalmasını ve çoğalmasını etkileyen birçok biyolojik ve

çevresel faktörün etkisini açıklar (Chavas, 2015). Popülasyon dinamikleri ile ilgili literatürde çok çeşitli çalışmalar bulunmaktadır ve bu çalışmalardan ilki Fibonacci'nin bugün bir sorun olarak tarif edilebilecek bir soruyu özetlemesiyle başlamaktadır (Bacaer, 2011). Fibonacci'nin tavşan problemi birkaç yüzyıl göz ardı edilmiştir. Fakat şimdi nüfus dinamiklerinde ilk matematiksel model olarak tanımlanmaktadır. Fibonacci eşleşen tavşanları ve onların belirli bir süreden sonra beklenen yavru sayısını formülize etmiş ve aşağıda verilen fark denklemini yazmıştır.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$$

Bu denklemde P_n , n . aydaki tavşan sayısını göstermektedir (Salisbury, 2011). Ancak Fibonacci'nin bu çalışmasında büyüme, ölüm vs gibi gerçek hayat durumları göz ardı edildiği için popülasyon modelleri üzerine çalışmalara devam edilmiştir.

Euler P_n , n yılındaki nüfus olmak üzere, nüfusun

$$P_{n+1} = (1 + \alpha) P_n$$

şeklindeki fark denklemi ile verilebileceğini belirtmiştir. Burada $\alpha > 0$ büyüme oranı olmak üzere P_0 başlangıç nüfusu verildiğinde bu denklem ile n . yıla ait nüfus büyüklüğü bulunabilir (Bacaer, 2011).

Bulaşıcı hastalıklar ile ilgili ilk matematiksel model 1766 yılında yayımladığı çalışması ile Daniel Bernoulli'ye aittir. Bu çalışmada, bu dönemde çiçek hastalığı için geliştirilen bir aşılama yöntemi olan variolation tartışmaları matematiksel bir modelle değerlendirilmiştir. Variolation, hafif düzeyde çiçek hastalığı enfeksiyonu taşıyan bir bireyden alınan yara kabuğu veya cerahatın sağlıklı bireylere burun veya ağız yoluyla verilmesi şeklindeki bir aşılama tekniğidir. (Akpınar, 2012). Bernoulli'nin bu aşılama tekniği için varsayımları şu şekilde verilebilir (Bacaer, 2011):

- İlk kez çiçek hastalığı bulaşmış kişilerin (yaştan bağımsız) ölme olasılığı p , hayatta kalma olasılığı $1 - p$,

- Herkese her yıl hastalığın bulaşmış olma olasılığı q , başka bir deyişle x ve $x+dx$ yaş aralığındaki bir kişi için hastalığın bulaşmış olma ihtimali qdx 'dir. (Burada dx sonsuz küçük zaman periyodudur.)
- Çiçek hastalığından hayatta kalan insanlar, yaşamlarının geri kalanında yeni enfeksiyonlara karşı korunmuşlardır (bağışıklık kazanmışlardır).

$m(x)$, çiçek hastalığı dışındaki nedenlerden dolayı x yaşındaki ölümler olsun. Başka bir deyişle, bir kişi için ' x ve $x+dx$ ' sonsuz küçük bir zaman dilimi içinde ölme olasılığı $m(x)$ olsun. P_0 aynı yıl doğmuş olan bir grup insan sayısı olmak üzere;

$S(x)$: çiçek hastalığına yatkın olan x yaşındaki hastalık bulaşmamış olan birey sayısı

$R(x)$: çiçek hastalığı bulaşmış ancak x yaşında hayatta kalan birey sayıları

$$P(x) = S(x) + R(x)$$

olarak tanımlanabilir. Burada doğum yaşı $x=0$ 'dir. Bu yüzden $S(0) = P(0)$ ve $R(0) = 0$ alınır ve her duyarlı bireyde çiçek hastalığı geçirme olasılığı qdx , diğer nedenlerden ölme olasılığı $m(x)dx$ 'dir. Dolayısıyla hastalığa yatkın bireylerin sayısının zamana göre değişimi;

$$dS = -Sqdx - Sm(x)dx$$

$$\frac{dS}{dx} = -qS - m(x)S \quad (1.1)$$

ile verilir. Aynı küçük zaman aralığında, çiçek hastalığından ölen insanların sayısı $pSqdx$ ise çiçek hastalığından hayatta kalan insanların sayısı $(1-p)Sqdx$ 'dir. Ayrıca, burada çiçek hastalığı dışında diğer nedenlerden dolayı ölen bireylerde $Rm(x)$ 'dir.

Böylece model

$$\frac{dR}{dx} = q(1-p)S - m(x)R$$

$$\frac{dP}{dx} = -pdS - m(x)P \quad (1.2)$$

denklemleri ile verilir. Bernoulli (1.1) ve (1.2) denklemlerinden, x yaşında hala duyarlı olan insanları

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{1}{(1-p)e^{qx} + p} \quad (1.3)$$

denklemleri ile modellenmiştir. Bernoulli (1.3) denklemleri ile her yaş için yaşayan bireylerin dağılımını sağlayan Edmond Halley'in yaşam tablosunu kullanarak modelin parametrelerini tahmin etmiştir (Bacaer, 2011).

Thomas Malthus (1798) nüfus üzerine araştırmalarda bulunmuştur ve 18. yüzyılın sonlarında Nüfusun Esasları Üzerine Bir Deneme adlı kitabını yayınlamıştır. Malthus tarafından elde edilen birçok sonuç Graunt ve Petty tarafından da elde edilmesine rağmen, Malthus çalışmalarını çok açık bir şekilde ifade ettiği için bu alanda daha ünlü olmuştur (Kot, 2001).

Malthusyan büyüme modeli olarak adlandırılan model,

$$\frac{dN}{dT} = rN$$

diferansiyel denklemleri ile verilir. Burada N popülasyon sayısı veya $\frac{dN}{dt}$ popülasyon değişim oranı, b doğurganlık oranı ile d ölüm oranı arasındaki farka eşit olan $r = b - d$ tarafından belirlenmektedir (Malthus, 1798). Bu denklem temel olarak gelişmiş bir nüfus modelini temsil eder, ancak oldukça basittir. Bu modelin doğru olması için göç, iklim değişkenleri, sınırlı gıda kaynakları, doğal felaket gibi diğer değişkenler göz ardı edilmektedir (Pulley, 2011). Malthusyan büyüme modeli olarak

adlandırılan model daha sonraları Charles Darwin'in doğal ayıklanma prensibi fikrinin doğmasına neden olan üstel büyüme modelidir. Malthus büyüme modelinden biraz daha farklı bir model Gompertz (1779-1865) tarafından sigorta hesaplamaları için verilen ve bir kanser hücresi büyümesine uygulanan Gompertz modelidir (Özalp, 2015). Malthus ve Gompertz'in nüfus modellerinde büyüme oranı sabit olarak düşünülmüştür. Ancak gerçek dünyada; gıda, alan, rekabet ve türlerin diğer ihtiyaçları gibi nüfus artışı için kısıtlamalar bulunduğundan Pierre-François Verhulst, Malthus denklemine karşı yeni bir denklem önermiştir. Verhulst (1838, 1845)' a göre bir nüfus çok büyük olduğunda kendi kendini sınırlayan bir sürecin uygulanması gerektiğini savunmuş ve büyüme oranı r ve mevcut sürdürülebilir kaynaklarla belirlenen ortamın taşıma kapasitesi olan k (maksimum insan sayısı) değerleri pozitif olmak üzere;

$$\frac{dN}{dT} = rN \left(1 - \frac{N}{k} \right)$$

denklemini tanımlamıştır. Bu modelde $r \left(1 - \frac{N}{k} \right)$ kişi başına düşen doğum artış oranıdır ve N 'ye bağlıdır (Murray, 2002). Belçikalı matematikçi Pierre Verhulst tarafından önerilen bu denklem, lojistik diferansiyel denklem olarak adlandırılmaktadır. Pearl ve Reed (1920) lojistik diferansiyel denklemi üzerine çalışmalar yapmışlar ve bu denklemin “doğanın kanunu” olarak kabul edilmesi için çaba sarf etmişlerdir (Kingsland, 1985).

Literatürde önerilen nüfus modelleme kavramları demografik modellerden bilgi temelli modellere, bilgi üretimine dayalı modellere dönüşmüştür. Bu modelleme yaklaşımında amaç, teknolojik gelişmelere dayalı olarak bilgi üretimini matematiksel olarak tanımlamak ve lojistik fonksiyonları kullanarak demografik büyümeyi klasik matematik modellerine dahil etmektir. Bu yaklaşımdaki zorluklardan ilki teknolojik seviyenin ve bilgi üretim miktarının belirlenmesi, ikincisi ise bu tanımların nüfus modellerinin lojistik fonksiyonlarına sistematik ve mantıklı bir şekilde dahil edilmesidir (Okuducu, 2017). 1920'lerde insanlar popülasyon dizileri ve döngüleri ile tekli tür toplama ya da gruplar üzerine laboratuvar deneylerine ağırlık verirken Raymond Pearl, matematiksel bir bakış açısını deneysel bir stille birleştirmiştir. Pearl

meyve sineği üzerine yaptığı çalışmasıyla, karşılaştırmalı demografide bir program hazırlamıştır ve matematikçi Lowell J. Reed ile popülasyon artış oranlarını analiz etmeye çalışmıştır (Höhler, 2005).

Wright (1945), (1955), Markos ve Kakutani (1958), Jones (1962), Kaplan ve Yorke (1975) ve diğerleri, nüfus modeli olarak

$$y'(t) = -y(t-1)|1 + y(t)|$$

denklemini, Cooke ve Yorke (1972)

$$y'(t) = f(y(t) - f(y(t-e)))$$

denklemini kullanmıştır (Güney, 1989).

Popülasyon dinamiğinde daha gerçekçi modeller, popülasyon dinamiğinin geçmiş durumlarını, yaşadıkları çevrenin popülasyon üzerindeki etkisini de içermelidir (Değirmenci, 2011). Çünkü nüfustaki üreme süreci anlık değildir. Hutchinson (1948), yumurtadan çıkmadan önce τ birim zamanda meydana gelen yumurta oluşumunu düşünerek (1.4) ile ifade edilen gecikmeli diferansiyel denklemini önermiştir (Denghan ve Salehi, 2010). Bu denklem tek türden oluşan popülasyon dinamikleri için

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K} \right) \quad (1.4)$$

modelidir (Gopalsamy, 1992).

Biyolojik dünyadaki en ilginç dinamiklerin çoğu türler arasındaki etkileşim ile ilgilidir. Lojistik denklem, aynı zamanda, bir veya daha fazla popülasyonun büyüme oranının diğer popülasyonların yokluğunda lojistik denklemini karşıladığı varsayıldığı için, birden fazla etkileşen popülasyonu içeren modellerde de önemli rol oynamaktadır (Arino, 2006). Bu etkileşimleri içeren matematiksel modeller çift yönlü faydacılık, rekabet, av-avcı modelleri olarak kategorize edilir. Av-avcı arasındaki bu etkileşimi içeren ilk modellerden biri, 1925 yılında Amerikan

biyofizikçi Alfred Lotka ve İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından önerilmiştir. İki bilim adamı 1920'li yılların ortasında birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarda aynı ekosistemde bulunan farklı canlı türleri arasındaki nüfus dinamiklerini açıklamaya çalışmışlardır (Yerlikaya, 2011). Lotka-Volterra modeli olarak adlandırılan bu sistem; $a > 0$ avın büyüme oranı, $b > 0$ avın avcıya yakalanma oranı, $c > 0$ avcının ölme oranı, $d > 0$ ise avcı nüfusunun büyüme oranı olmak üzere;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)(a - by(t)) \\ \frac{dy}{dt} = -y(t)(c - dx(t)) \end{cases} \quad x(0) = \lambda_1, \quad y(0) = \lambda_2$$

şeklinde tanımlı iki lineer olmayan diferansiyel denklemden oluşan sistemdir. Zaman gecikmeli av-avcı modeli, balık nüfusu üzerinde çalışmaları sonucunda ilk olarak Volterra tarafından 1925 yılında oluşturulmuştur (Volterra, 1926).

Birçok araştırmacı tümör-bağışıklık sistemi etkileşiminin modellenmesinde Lotka-Volterra modeli ve Verhulst (Lojistik) modelinden yararlanmışlardır. Gatenby tümör hücreleriyle, tümör hücrelerinin ortaya çıktığı konak hücreler arasındaki rekabeti standart Lotka-Volterra türleri arası rekabet modelini kullanarak modellemiştir. Costa ve arkadaşlarının (Costa, 2003) oluşturduğu tümör bağışıklık sistemi etkileşimi modeli Lotka-Volterra av-avcı modeline dayanmaktadır. Sakar ve Banerjee (Sakar ve Banerjee, 2005), malignant (kötü huylu tümör) hücrelerle bağışıklık sistemi hücreleri arasındaki etkileşimi av-avcı sistemine benzer bir sistemle modellemişlerdir (Kartal, 2014).

1970'lerde, diferansiyel denklemlerin ve dinamik sistemlerin yeni teorileri ve yöntemleri, popülasyon genetiği, nörobiyoloji, epidemiyoloji, immünoloji, fizyoloji ve çevre kirliliği vs. araştırmalarında yaygın bir şekilde kullanılmıştır (Nie ve Teng, 2013).

Lotka (1880-1949) yaş yapılandırılmış popülasyonların dinamiklerini incelemiş, McKendrick 1926'da, "Tıbbi problemlere matematik uygulamaları" başlıklı bir makale yayınlamış ve burada enfeksiyon ve iyileşmeyi belirleyen olasılıksal etkilere

sahip sürekli salgın modellerini tanımlamıştır (Salisbury, 2011). Kermack ve McKendrick, 1930'lu yıllarda hastalık modelleri geliştirmeye devam etmişlerdir. Bu çalışmalar günümüzün daha karmaşık epidemiyolojik modellerine temel oluşturmaktadır (Salisbury, 2011). Ayrıca Lotka ve Sharpe (1923), Wilson ve Burke (1942), Wilson ve Yorke (1972), London ve Yorke (1973), Hoppensteadt ve Waltman (1970) bulaşıcı hastalıkların yayılması; Kalecki (1935), Goodwin (1951), Cooke ve Yorke (1972) ekonomi ve ticaret alanında çalışmalar yapmıştır.

Gopalsamy (1992), popülasyon dinamiğinde gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını ve salınımlarını incelemiştir. Kuang (1993), gecikmeli popülasyon dinamiği üzerine çalışmalarda bulunmuştur. Baker (1999), biyolojik bilimlerde gecikmeli diferansiyel denklemleri kullanarak matematiksel bir modelleme yapmıştır. Bochorov (2000), gecikmeli diferansiyel denklemleri kullanarak biyolojik bilimlerde karşılaşılan olayların sayısal modellemesini ele almış ve Buric (2002), gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenen tümör büyümesinin bağışıklığının dinamiğini incelemiştir. Nelson (2002), HIV-1 hastalığının gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenmesinin matematiksel analizi üzerine çalışmalarda bulunmuştur. Caberlin (2002) biyolojik sistemler alanında çalışmalar yapmıştır. Bilim ve teknolojinin hızla ilerlemesi, özellikle bilgisayar ve internetin hızlı gelişimi ile biyolojik nüfus hakkında daha fazla bilgi sahibi olunmuştur. Bu gelişim ile birlikte Shampine (2001), gecikmeli diferansiyel denklemlerin MATLAB yardımıyla çözümünü yapmıştır. Arikoğlu ve Özkol (2006), diferansiyel fark denklemleri için diferansiyel dönüşüm teorisini vermiş, bu yöntemle elde edilen sayısal sonuçları Taylor polinom yaklaşımıyla karşılaştırmıştır (Gülen, 2010).

Literatürde popülasyon dinamiklerinin yaklaşık çözümleri için homotopi pertürbasyon metodu (HPM) (Shakeri ve Dehghan, 2008), homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu (HPDM), homotopi analiz metodu (HAM), diferansiyel dönüşüm metodu (DTM), varyasyonel iterasyon metodu (VIM) (Saadatmandi ve Dehghan, 2009), Adomian decomposition metodu (Adomian ayrıştırma metodu) (ADM) (Evans, 2005; Shakeri ve Dehghan, 2010), Laplace Adomian decomposition metodu (LADM), Legendre multi-wavelet metodu, Runge-Kutta-Fehlberg metodu (RFK), Chebyshev spectral Metodu (Susmita, 2016), Spline polinom Yaklaşımı (Ramadan, 2005; Ramadan vd., 2006; Ramadan vd., 2009), Taylor polinom yaklaşımı (Sezer ve

Akyüz, 2006; Gökmen ve Sezer, 2013a) ve Bessel matris ve sıralama metodu (Yüzbaşı vd., 2011; Yüzbaşı vd., 2012) kullanılmaktadır.

Taylor serisi ilk olarak 1715 yılında İngiliz matematikçi Brook Taylor tarafından ortaya atılmıştır. Taylor serisinin orijin civarında açılması durumunda Maclaurin serisi olarak adlandırılması İskoçyalı matematikçi Colin Maclaurin'den sonra olmuştur. 18.yy'da Taylor serilerinin özel durumları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Bülbül, 2011).

Taylor polinom yaklaşımı popülasyon dinamiklerinin modellenmesinde geniş bir yer tutar; özellikle Leibniz-Maclaurin-Taylor yöntemleri, birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin herhangi bir x_0 noktası ve civarında verilen başlangıç koşuluna göre Taylor serisi formunda çözümünü bulmak için kullanılmıştır. Ayrıca, Kanwal ve Liu (1989), Fredholm integral denklemlerinin çözümü için bir Taylor açılım yöntemi vermiştir. Bu yöntem 1994'de Sezer tarafından Volterra tipi integral denklemlerin, daha sonra Sezer ve çalışma arkadaşları tarafından yüksek mertebeden adi diferansiyel, integral, integro-diferansiyel, fark, diferansiyel-fark, pantograph tipi denklemlerin ve bu denklemlerin sistemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmıştır (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd., 2000; Yalçınbaş, 2002; Karamete ve Sezer, 2002; Sezer vd., 2005; Gülsu ve Sezer, 2005; Sezer vd., 2006; Gülsu vd., 2007; Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer, 2007; Kurt ve Sezer, 2008; Bülbül vd., 2010; Gökmen ve Sezer, 2013; Gökmen vd. 2015; Gökmen vd. 2017).

Bu çalışmanın amacı; literatürde diferansiyel denklemler (Sezer, 1996; Karamete ve Sezer, 2002), fark denklemleri (Sezer ve Gülsu, 2005) diferansiyel-fark denklemleri (Sezer ve Akyüz-Daşcıoğlu, 2006), pantograph denklemleri (Sezer ve Akyüz-Daşcıoğlu, 2007), diferansiyel denklem sistemleri (Akyüz ve Sezer, 2003), lineer ve lineer olmayan diferansiyel fark denklem sistemleri (Gökmen ve Sezer, 2013; Gökmen ve Işık, 2015), lineer olmayan gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem sistemleri (Gökmen ve Sezer, 2015), Volterra fonksiyonel integral denklemler (Gökmen, Yüksel, Sezer, 2017) için kullanılmış olan Taylor sıralama yöntemini geliştirerek, belirli koşullar altında gecikmeli lojistik denklem ve iki tür için av-avcı etkileşimini veren diferansiyel denklem sistemine uygulamak; en iyi

yaklaşımı verecek şekilde seri kesme sınırını ve hata sınırlarını tayin etmek için bir yöntem belirlemek veya geliştirmektir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Lojistik Diferansiyel Denklem

Son yıllarda, matematiksel biyolojinin çeşitli alanlarında popülasyon modelleri kapsamlı bir şekilde incelenmektedir. Belli bir bölgede yaşayan, aynı türe ait bireylerin oluşturduğu topluluğa popülasyon denir. Av-avcı yapısı, popülasyon dinamiklerinin temelini oluşturur. Bir popülasyonda nüfus artış modelini oluşturmak için öncelikle o popülasyonun niceliğini etkileyen faktörlere karar verilmesi gerekir. $x(t)$, t zamanındaki popülasyon büyüklüğü olsun. $\Delta t > 0$ olmak üzere $[t, t + \Delta t]$ zaman aralığında b doğum oranını ve d ölüm oranını gösterebilir. Bu durumda verilen aralıkta nüfustaki değişim

$$\frac{dx}{dt} = (b - d)x = rx \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem ilk olarak nüfus modellerinin öncüsü olan İngiliz nüfus bilimci ve matematikçi Thomas Malthus (1798) tarafından önerilmiştir (Özalp, 2015). Malthus'un, XVIII. yy. sonlarında yazdığı "Nüfus İlkeleri Üzerine Bir Deneme" adlı çalışma, modern anlamda nüfus üzerinde yapılan ilk eser olarak kabul edilmektedir. Bu nedenle nüfus teorileri ele alınırken Malthus öncesi ve sonrası olarak ele alınması bir gelenek olmuştur (Güneş, 2009).

Bir popülasyonun alabileceği maksimum birey sayısına o popülasyonun taşıma kapasitesi denir. Bir ekosistemin taşıma kapasitesi tarafından tanımlanan sınırlı kaynakların varlığı kabul edildiği takdirde, üstel büyümeyi süresiz olarak desteklemeyen bir modelin kurulması gerekliliği doğmuştur. Bu durumda en basit model, kişi başına düşen büyüme oranı G 'nin popülasyon büyüklüğüne bağlı olduğu varsayıldığında elde edilir. Bu ise matematiksel olarak

$$\frac{dx}{dt} = xG(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir (Brauer, 2012). Burada, nüfusun yeterince büyük olduğu ve böylece zamanın sürekli bir fonksiyonu olduğu kabul edilmektedir.

Nüfus problemine bir doğrusal yaklaşım, 1838 yılında Belçikalı matematikçi Pierre F. Verhulst'un insan nüfusu için önerdiği ve lojistik denklem olarak adlandırdığı Verhulst-Pearl denklemi olarak da bilinen denklemdir (Özalp, 2015). Genel olarak Verhulst-Pearl denklemi, $r > 0$ gerçel büyüme oranı, $k > 0$ taşıma kapasitesi olmak üzere;

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{1}{k} y(t) \right) \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanır. Verhulst-Pearl denkleminin günümüzde, istatistik, tıp, kimya, fizik, dilbilim, ekonomi gibi daha birçok alanda uygulaması bulunmaktadır (Kartal, 2014).

Verhulst-Pearl modeli başlangıçta Malthusian model gibi üstel olarak büyür ve büyüme oranının maksimum olduğu bir noktaya ulaşır. Bu noktadan sonra büyüme oranı düşmeye başlar ve bir noktada sabitleşir. Eğer popülasyonun taşıma kapasitesinin nüfusu aştığı bir durum söz konusu ise, yani yeni yavrular doğmuş veya bu bölgeye dışarıdan yeni bireyler taşınmış ise, bu durumda sınırlı kaynaklardan dolayı nüfus azalacak ve taşıma kapasitesine erişecektir. Bununla birlikte bu model, kaynaklar için rekabet veya avcının doyum noktasına ulaşması gibi, av ve avcı arasında birçok etkileşimi karşılamaz (Ekici, 2016). Bu sebeple adı geçen etkileşimleri de içeren denklem sistemlerine ihtiyaç duyulmuştur.

2.2. Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli

Lojistik büyüme modelinde, bir türün büyümesi besindeki sonluluk nedeni ile

sınırlıdır (Brauer, 2012). Bu nedenle 20. yy.'da iki türden oluşan bir ekosistem üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. 1925 yılında Amerikan biyofizikçi Alfred Lotka ve İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından bir sistem ileri sürülmüştür. Bu sisteme göre, aynı ekosistemdeki iki farklı türe ait nüfus büyüklükleri y_1, y_2 olmak üzere her bir türün nüfusundaki değişim oranının sadece türlerin nüfuslarına bağlı olduğu kabul edilirse matematiksel model,

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= g(y_1, y_2)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Genel olarak iki türün etkileşimi çift yönlü faydacılık, rekabet ve av-avcı ilişkisi olarak sınıflandırılır. Bu ilişkilerden av-avcı ilişkisi; $a > 0$ avın büyüme oranı, $b > 0$ avın avcıya yakalanma oranı, $c > 0$ avcının ölme oranı, $d > 0$ ise avcı nüfusunun büyüme oranı olmak üzere;

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(a - by_2(t)) \\ y_2'(t) = -y_2(t)(c - dy_1(t)) \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.3. Lineer Denklem Sistemleri

$b, a_{i,j} \in \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} ve x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

ifadesine bir lineer denklem adı verilir. Lineer denklem sistemi ise;

Teorem 2.3.1. $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(F)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.

1. \mathbf{A} tersinirdir.
2. $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ dir.
3. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homojen denklem sisteminin sadece aşıkâr (sıfır) çözümü vardır.
4. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ homojen olmayan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

2.3.1. Lineer denklem sistemlerinin çözümü (Gauss eliminasyon metodu)

n bilinmeyen n denklemden oluşan

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

lineer denklem sistemini ele alalım. Katsayılar matrisi $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tekil olmayan matris olmak üzere, Gauss eliminasyon metodu, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sistemini elementer satır işlemleri yardımı ile kendine satırca denk olan $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ üst üçgensel sistemine dönüştürmeye dayanır. \mathbf{U} tekil olmayan matris olmak üzere $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ sistemi geriye yerine koyma yöntemi ile kolayca çözümlenerek bilinmeyen katsayılar hesaplanır.

2.4. Lineer Olmayan Denklem Sistemleri

Lineer olmayan denklemler ve denklem sistemleri ile günümüzde matematik, fizik, ekonomi gibi birçok alanda çeşitli modellemeler yapılabilmektedir. Ancak bu denklemlerin veya denklem sistemlerinin çözümleri lineer denklemler gibi kolay olmamaktadır (Kemancı, 2007). Bu sebeple, bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için bazı iterasyon metotları kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bazılarını Newton yöntemleri, yarı-Newton yöntemleri, homotopy yöntemi şeklinde sıralayabiliriz. Lineer olmayan denklem sistemi

kapalı formda,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya daha kısa olarak

$$F(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n] = 0 \quad F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

biçimde ifade edilebilir.

2.4.1. Newton Metodu

Tanım 2.4.1.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisine F nin Jakobiyen matrisi denir.

Newton metodu $F(x) = 0$ ile belirtilen lineer olmayan denklem sistemini

$$f_i(x) = f_i(x_k) + \nabla f_i(x_k)(x - x_k) + o(\|x - x_k\|^2)$$

şeklinde tanımlı Taylor formülünü kullanarak çözer. Jakobiyen matrisini kullanarak ifade

$$F(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) + o(\|x - x_k\|^2)$$

şekline dönüşür. Buradan

$$J(x_k)(x - x_k) = -F(x_k) \quad (2.8)$$

yazılabilir. Eğer Jakobiyen matrisi tersinir ise (2.8)'un tek bir x_{k+1} çözümü vardır ve

$$x_{k+1} - x_k = -J(x_k)^{-1} F(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)$$

sistemine Newton metodu denir. Newton metodu

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k) \quad x_{k+1} = x_k + s_k$$

ile gösterilir (Kemancı, 2007).

2.5. Taylor Serisi ve Temel Teoremleri

Tüm mertebeden türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

ifadesine f fonksiyonunun $x = x_0$ noktası civarındaki Taylor serisi denir. Bu serinin ilk n teriminden oluşan

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ifadesine de n . dereceden Taylor polinomu denir (Ekici, 2016).

$f(x)$ fonksiyonu, x_0 noktasında ve onun herhangi civarında $(n+1)$. mertebeden türeve sahip ise, o zaman

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

dır. Burada

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \quad (\xi = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1)$$

kalan terimidir. Açıktaır ki x_0 noktasında ve onun herhangi civarında $f(x)$ fonksiyonunun keyfi mertebeden türevi varsa ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

ise, o zaman, $n \rightarrow \infty$ 'da

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

formülü,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

şeklini alır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki seriye, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası civarında Taylor Serisi denir (Halilov vd., 2001).

Teorem 2.5.1. (Taylor Teoremi) $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ve f , $|x - x_0| < r$ aralığında $m+1$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\exists c \in (x_0, x)$ öyle ki

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)(x-x_0)^{m+1} \quad (2.9)$$

dir. (Simon, 2008).

İspat: (Simon, 2008) $0 < x - x_0 < r$ olsun. ($-r < x - x_0 < 0$ olması durumunda benzer işlemler yapılır). $|t - x_0| < r$ için

$$g(t) = f(t) - \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (t-x_0)^n - M(t-x_0)^{m+1} \quad (2.10)$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada M bir sabit ve $g(t) = 0$ olduğu düşünülürse (2.10) denklemden

$$M = \frac{f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^{m+1}}$$

elde edilir. Ayrıca (2.10) denkleminde doğrudan hesaplamalarla,

$$\begin{cases} g^{(n)}(x_0) = 0, \forall n = 0, \dots, m \\ g^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}(t) - M(m+1)!, |t-x_0| < r \end{cases} \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada $g(x) = g(x_0) = 0$ olduğundan ortalama değer teoremine göre, $g'(c_1) = 0$ olacak şekilde $c_1 \in (x_0, x)$ vardır. Benzer şekilde $g'(x) = g'(x_0) = 0$ olduğundan $g''(c_2) = 0$ olacak şekilde $c_2 \in (x_0, x)$ vardır.

Bu işlem $m+1$ adım için tekrarlanırsa $(m+1)$. adımda $g^{(m+1)}(c_{m+1})=0$ olacak şekilde bir $c_{m+1} \in (x_0, x)$ sabiti olduğu sonucu çıkarılır. Ancak, (2.11) denkleminde

$$g^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}(t) - M(m+1)!$$

dir. Böylece

$$M = \frac{f^{(m+1)}(c_{m+1})}{(m+1)!}$$

olacak şekilde elde edilir.

M 'nin tanımından, $c = c_{m+1}$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.5.2. (Simon, 2008) f fonksiyonu $|x-x_0| < r$ aralığında tüm mertebeden türevlenebilir ve

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| r^n \leq C, \quad \forall n \geq 0, |x-x_0| < r \quad (2.12)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcut ise, $|x-x_0| < r$ özelliğindeki her x için

$\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ serisi $f(x)$ 'e yakınsar.

İspat: (2.12) koşulu ile (2.9) denkleminin sağındaki $\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x-x_0)^{(m+1)}$

terimi için

$$\left| \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x-x_0)^{(m+1)} \right| \leq C \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^{m+1}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Böylece (2.11) ifadesinde $m=N$ için $N \rightarrow \infty$

iken

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \right| \leq C \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^{(N+1)} \rightarrow 0$$

olur. Buradan, $|x-x_0| < r$ için

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x)$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x), |x-x_0| < r$$

elde edilir.

2.6. Eşit Aralıklı Sıralama (Kolakasyon) Noktaları

Problemin tanım aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olmak üzere, x_0, x_1, \dots, x_N noktaları ile N eşit parçaya bölelim. Bu şekilde elde edilen

$$x_i = a + i \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

noktalarına sıralama (kolakasyon) noktaları denir. Aynı zamanda x_i sıralama noktalarını

$$x_i = b - i \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

dönüşümü ile

$$x_N = a < x_{N-1} < \dots < x_1 < x_0 = b$$

aralığında tanımlayabiliriz (Karamete, 1996).

2.7. Polinom İnterpolasyonu

İnterpolasyon kelimesi, bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen ara değerlerinin hesaplanması işlemidir. Başka bir deyişle, verilmiş bir fonksiyonun özellikleri bilinen daha basit bir $P(x)$ polinomu ile temsil edilmesi veya onun yerine kullanılması işlemidir. O halde polinomlarla işlem yapmak kolay olduğundan ve polinomların birçok özellikleri bilindiğinden, fonksiyonların yerine onları temsil edebilecek polinomları araştırıp kullanmak büyük kolaylık sağlar. Eğer bir aralıkta, bir $f(x)$ fonksiyonu ile bir $P(x)$ polinomunun aldığı değerler farkı istenildiği kadar küçükse, $P(x)$ polinomuna $f(x)$ fonksiyonunun bir yaklaşma polinomu denir. Böyle durumlarda $f(x)$ fonksiyonu yerine $P(x)$ polinomunu incelemek yeterli olabilir (Bayram, 2009).

O halde polinom interpolasyon, bir fonksiyonun sonlu sayıda $x_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ noktasında aldığı $f(x_i) \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ değerleri bilinmek kaydıyla

$$p(x_i) = a_n (x_i)^n + \dots + a_1 x_i + a_0 = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlı $p \in P_n(\mathbb{R})$ polinomunu bulma problemidir (Quarteroni vd., 2007).

Teorem 2.7.1. $X = \{x_i | i = 0, \dots, n\} \subset [a, b]$, $n+1$ farklı nokta, $f \in C[a, b]$ $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ olmak üzere (2.13) denklemini sağlayan bir tek $p \in P_n$ vardır (Quarteroni vd., 2007).

$(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ noktalarından geçen n . dereceden

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.14)$$

polinomunu belirlemek için

$$p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.15)$$

lineer denklem sistemi çözülerek a_0, a_1, \dots, a_n katsayıları belirlenir. Sistemin matris formda gösterimi

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisidir ve singüler değildir. O halde (2.15) sisteminin bir tek çözümü vardır (Philips, 2003).

Teorem 2.7.2. (Weierstrass Yaklaşım Teorisi): Eğer $f \in [a, b]$ ise $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir P polinomu vardır (Mason, 2003).

2.7.3. En iyi yaklaşım

Tanım 2.7.3. (Norm) $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olmak üzere, V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: V \rightarrow F$ fonksiyonu $\forall x, x_1, x_2 \in V$ ve $\forall \alpha \in F$ için

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $x = \theta \Leftrightarrow \|x\| = 0$ (θ , V 'nin sıfır vektörü),

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

N4) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V vektör uzayında tanımlı norm ve $(V, \|\cdot\|)$ 'a da normlu lineer uzay denir.

Fonksiyon uzayları için aşağıdaki normlar verilebilir (Mason, 2003):

1. L_∞ norm (sonsuz norm, max norm, Chebyshev norm):

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

2. L_2 norm (en küçük kareler normu, Öklid normu):

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad w(x) \text{ negatif olmayan ağırlık}$$

fonksiyonu

3. L_1 norm (1-normu, Manhattan norm):

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_a^b w(x) |f(x)| dx$$

4. L_p norm (Hölder norm):

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

5. Ağırlıklı minimax norm:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

Tanım 2.7.4. (Mason, 2003) N normlu lineer uzay, $f \in N$ olmak üzere $f(x)$

'in olası yaklaşım fonksiyonları $f^*(x)$ 'ler bir \mathbf{A} ailesi tanımlar ve

$\mathbf{A} = \{f^*(x) | f^*(x) = p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7.5. (Mason, 2003) N normlu lineer uzay, $f \in N$ ve \mathbf{A} yaklaşımlar ailesi, N 'nin bir alt uzayı olmak üzere,

1. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $f^*(x)$ varsa, $f^*(x)$ 'e \mathbf{A} da bir iyi yaklaşımdır denir.

2. $f^*(x)$, \mathbf{A} da bir yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_B^*\| \leq \|f - f^*\|$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir $f_B^*(x)$ varsa, $f_B^*(x)$ 'e \mathbf{A} da bir en iyi

yaklaşımır denir.

3. ρ pozitif gerçel sayı ve $f_B^*(x)$, \mathbf{A} da bir en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_N^*\| \leq (1 + \rho) \|f - f_B^*\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $f_N^*(x)$ varsa, $f_N^*(x)$ 'e \mathbf{A} da en iyiye yakın bir yaklaşımır denir.

Bu çalışmada yaklaşım normu olarak $\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ maksimum

normu kullanılacaktır. f yaklaşım yapılmak istenen fonksiyon, $p_n f$, f 'nin n . mertebeden yaklaşım polinomu, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots$ olmak üzere

interpolasyon hatası

$$E_{n,\infty}(x_i) = \|f - p_n f\|_\infty, n = 0, 1, \dots$$

$p_n^* \in P_n$ en iyi yaklaşım polinomunu göstermek üzere hata, $\forall q_n \in P_n$ için

$$E_n^* = \|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty$$

şeklindedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde literatürde diferansiyel denklemler, fark denklemleri, diferansiyel-fark denklemleri, pantograph denklemleri, diferansiyel denklem sistemleri, lineer ve lineer olmayan diferansiyel fark denklem sistemleri, lineer olmayan gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem sistemleri, Volterra fonksiyonel integral denklemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılmış olan Taylor sıralama yöntemi, belli koşullar altında gecikmeli lojistik denklem ve iki tür için av-avcı etkileşimini veren diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmek için uygulanmıştır. Matris denklemi bilinmeyenleri Taylor katsayıları olan bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemine eşlenir ve cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerinden yararlanarak sistemin çözümü ve dolayısıyla da modellerin yaklaşık çözümleri elde edilir.

Sunulan yöntemin hassasiyetini ve çözümlerin doğruluğunu göstermek amacı ile hata analizi yapılmıştır. Verilen problemlerin tam çözümleri biliniyorsa, yaklaşım teorisi gereğince yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki fark ölçülerek, yöntem literatürde kullanılan diğer yöntemlerle kıyaslanmaktadır. Verilen problemin tam çözümlerinin bilinmediği durumlarda ise Oliveira (1980), Çelik (2005) ve Shahmorad (2005) tarafından önerilen kalan doğrulaması (residual correction) verilen denklem için yeniden düzenlenerek hata tahmini yapılmaktadır.

$y_i(t)$ ve $y_{i,N}(t)$, sırasıyla tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere, hata hesaplamalarında kullanılan hata normlarından bazıları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$1. L_2 \text{ hata} = \left(\sum_{i=0}^n (y_i(t) - y_{i,N}(t))^2 \right)^{1/2},$$

$$2. L_\infty \text{ hata} = \max_{t \in [a,b]} |y_i(t) - y_{i,N}(t)|.$$

(Gökmen,2014)

3.1. Lojistik Diferansiyel Denklem için Taylor Sıralama Yaklaşımı

$r, k > 0$ sabitler olmak üzere

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{1}{k} y(t) \right) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan lojistik diferansiyel denklemin

$$y(0) = \lambda \quad (3.2)$$

başlangıç koşulları altında

$$y(t) = \sum_{n=0}^N y_n t^n, \quad y_n = \frac{y^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq a \quad (3.3)$$

şeklinde N . mertebeden kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümü elde edilecektir. Burada N pozitif tamsayı ve serinin kesme sınırı, y_n 'ler belirlenecek olan Taylor katsayılarıdır. (Gökmen vd. 2015).

3.1.1. Temel matris bağıntıları

Bu bölümde (3.1) ile verilen denklem (3.2) başlangıç koşulları altında bir matris denklemine dönüştürülecektir. Bu amaçla ilk olarak (3.3) ile tanımlanan çözüm ve onun ilk türevini ele alacak olursak

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$
$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}^T$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$y(t) = T(t)Y \quad (3.4)$$

$$y'(t) = T(t)BY \quad (3.5)$$

biçiminde matris forma dönüştürülür. Benzer şekilde lineer olmayan $y^2(t)$ ifadesinin matris formu da

$$T^*(t) = \begin{bmatrix} T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad Y^* = \begin{bmatrix} y_0 Y \\ y_1 Y \\ \vdots \\ y_N Y \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

olmak üzere

$$y^2(t) = T(t)T^*(t)Y^* \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir.

3.1.2. Denklemin temel matris gösterimi

Bu bölümde ilk olarak (3.1) ile verilen denklem düzenlenirse

$$-ry(t) + y'(t) + \frac{r}{k}y^2(t) = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde denklem elde edilir. (3.7) olarak verilen bu denklemde bir önceki bölümde bulduğumuz (3.4)-(3.6) ifadeleri yerine yazılırsa

$$-rT(t)Y + T(t)BY + \frac{r}{k}T(t)T^*(t)Y^* = 0 \quad (3.8)$$

denklemini elde edilir.

Böylece (3.1) denkleminin matris gösterimi

$$A(t) = -rT(t) + T(t)B$$

$$H(t) = \frac{r}{k} T(t)T^*(t)$$

olmak üzere

$$A(t)Y + H(t)Y^* = G(t) \quad (3.9)$$

şekline dönüşür.

3.1.3. Taylor sıralama metodu

Bu bölümde

$$t_n = 0 + \frac{a-0}{N}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (3.9) matris denkleminde yerine yazılırsa eğer

$$A(t_n)Y + H(t_n)Y^* = G(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

olmak üzere lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini

$$A = \begin{bmatrix} A(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y \\ Y \\ \vdots \\ Y \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

$$H = \begin{bmatrix} H(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^3}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y^* \\ Y^* \\ \vdots \\ Y^* \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1}$$

olmak üzere, (3.10) denklemini

$$A\bar{Y} + H\bar{Y} = G \quad (3.11)$$

matris denkleminde dönüşür. (3.4) bağıntısı kullanılarak koşullu matris formu

$$T(0)Y = \lambda \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

(3.12) matrisi (3.11) denkleminin katsayılar matrisinin uygun olan herhangi bir satırı ile değiştirilerek koşula bağlı matris denkleminde elde edilir. Böylece (3.1) denkleminin (3.2) başlangıç koşulları altında temel matris denkleminde $n = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere y_n bilinmeyenli $(N + 1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklemler sistemine dönüşür. Burada bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{n=0}^N y_n t^n$$

Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur.

3.1.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini

Yaklaşık çözümlerin doğruluğu mutlak hata hakkında herhangi bir bilgi veremeyebilir. Bu kısıtlamayı kaldırmak için tam çözümün bilinmediği durumlarda, Oliveira (1980), Çelik (2005) ve Shahmorad (2005) tarafından verilen kalan doğrulaması (residual correction) (3.1) denkleminde düzenlenerek, hata tahmini yapılabilir. Ayrıca, bu prosedürü kullanarak minimal mutlak hatayı veren en uygun M 'yi tahmin edebiliriz. Bu yöntem (3.1) denkleminde uygulanırsa

$$e(t) = y(t) - y_N(t)$$

ve

$$R = y_N'(t) - ry_N(t) + \frac{r}{k} y_N^2(t)$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$e'(t) - re(t) + \frac{r}{k} e^2(t) + \frac{2r}{k} y_N(t)e(t) = -R \quad (3.13)$$

denklemini elde edilir. (3.13)'ün Taylor seri çözümü e_M^* olsun. Eğer yeteri kadar küçük ε için

$$\|e(t) - e_M^*(t)\| < \varepsilon$$

oluyorsa mutlak hata, $e_M^*(t)$ yardımıyla tahmin edilebilir. Böylece, minimum mutlak hatayı veren en uygun M , herhangi bir normdaki $e_M^*(t)$ hata fonksiyonlarının ölçülmesiyle elde edilebilir.

3.2. Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli için Taylor Sıralama Yaklaşımı

Bu kesimde bir önceki bölümde tek türden oluşan nüfus modeli için elde edilen yöntem geliştirilerek iki türden oluşan av-avcı sistemine uyarlanmıştır.

Burada amaç, $a > 0$ avın büyüme oranı, $b > 0$ avın avcıya yakalanma oranı, $c > 0$ avcının ölme oranı, $d > 0$ ise avcı nüfusunun büyüme oranı olmak üzere;

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(a - by_2(t)) \\ y_2'(t) = -y_2(t)(c - dy_1(t)) \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanan (3.14) sisteminin

$$y_1(0) = \lambda_1 \quad \text{ve} \quad y_2(0) = \lambda_2 \quad (3.15)$$

başlangıç koşulları altında

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} (t-c)^n, \quad y_{i,n} = \frac{y_i^n(c)}{n!}, \quad i=1,2 \quad 0 \leq t \leq \alpha \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlı kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır (Gökmen vd. 2015).

3.2.1. Temel matris bağıntıları

Bu bölümde, (3.14) ile verilen sistem (3.15) başlangıç koşulları altında bir matris sistemine dönüştürülecektir. Bu amaçla ilk olarak (3.16) ile tanımlanan çözüm ve onun ilk türevini ele alacak olursak

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} & y_{i,2} & \dots & y_{i,N} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}^T$$

olmak üzere

$$y_i(t) = T(t)Y_i \quad (3.17)$$

$$y_i'(t) = T(t)BY_i \quad (3.18)$$

şeklinde matris forma dönüştürülür. Benzer şekilde sistemin lineer olmayan

$$y_1(t)y_2(t) \quad \text{ve} \quad y_2(t)y_1(t)$$

terimlerinin matris formları da

$$T^*(t) = \begin{bmatrix} T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

olmak üzere

$$y_1(t)y_2(t) = T(t)T^*(t)\bar{Y}_{1,2} \quad (3.19)$$

$$y_2(t)y_1(t) = T(t)T^*(t)\bar{Y}_{2,1} \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir.

3.2.2. Sistemin temel matris gösterimi

Bir önceki bölümde tanımlanmış olan (3.17)-(3.20) ifadeleri (3.14) ile tanımlanan sistemde yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} T(t)BY_1 = aT(t)Y_1 - bT(t)T^*(t)\bar{Y}_{1,2} \\ T(t)BY_2 = -cT(t)Y_2 + dT(t)T^*(t)\bar{Y}_{2,1} \end{cases}$$

şeklinde iki matris denklemi elde edilir. Bu denklem sistemi tekrar düzenlenirse

$$\begin{cases} T(t)BY_1 - aT(t)Y_1 + bT(t)T^*(t)\bar{Y}_{1,2} = 0 \\ T(t)BY_2 + cT(t)Y_2 - dT(t)T^*(t)\bar{Y}_{2,1} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece (3.14) sisteminin matris gösterimi;

$$\begin{aligned} D_1(t) &= T(t)B - aT(t), \\ D_2(t) &= T(t)B + cT(t), \\ H_1(t) &= bT(t)T^*(t), \\ H_2(t) &= -dT(t)T^*(t) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{cases} D_1(t)Y_1 + H_1(t)\bar{Y}_{1,2} = 0 \\ D_2(t)Y_2 + H_2(t)\bar{Y}_{2,1} = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

biçiminde ifade edilir. Sonuç olarak (3.14) sisteminin matris denklemi;

$$\begin{aligned} D(t) &= \begin{bmatrix} D(t_1) & 0 \\ 0 & D(t_2) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, & Y &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \\ H(t) &= \begin{bmatrix} H(t_1) & 0 \\ 0 & H(t_2) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, & \bar{Y} &= \begin{bmatrix} \bar{Y}_{1,2} \\ \bar{Y}_{2,1} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}, \\ G(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$D(t)Y + H(t)\bar{Y} = G(t) \quad (3.23)$$

şeklinde matris denklemine dönüşür.

3.2.3 Taylor sıralama metodu

Bu bölümde

$$t_n = 0 + \frac{\alpha - 0}{N}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (3.23) matris denkleminde yerine yazılırsa

$$D(t_n)Y + H(t_n)\bar{Y} = G(t_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

denklemler sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemleri

$$D = \begin{bmatrix} D(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad Y^* = \begin{bmatrix} Y \\ Y \\ \vdots \\ Y \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}$$

$$H = \begin{bmatrix} H(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Y} \\ \vdots \\ \bar{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1}$$

olmak üzere;

$$DY^* + H\bar{Y} = G \quad (3.25)$$

şekline dönüşür. (3.17) bağıntısını kullanarak koşulların matris formunu da

$$T(0)Y_1 = \lambda_1 \quad (3.26)$$

$$T(0)Y_2 = \lambda_2 \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir.

(3.26) ve (3.27) satır matrisleri (3.25) denkleminin katsayılar matrisinin uygun olan iki satırı ile değiştirilerek, koşullara bağlı matris denklemi elde edilir. Böylece (3.14) denklem sisteminin (3.15) başlangıç koşulları altında temel matris denklemi $n = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür. Burada bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,N} t^n, \quad i = 1, 2 \quad (3.28)$$

Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur.

3.2.4. Çözümlerin doğruluğu ve residual hata tahmini

$y_i(t)$ ve $y_{i,n}(t)$ sırasıyla, tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere mutlak hata fonksiyonları, verilen aralıkların seçilmiş noktalarında

$$e_{i,n}(t) = |y_i(t) - y_{i,n}(t)|, \quad i = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için (3.28) ile elde edilen yaklaşık çözümler (3.14) denkleminde yerine yazılır. (3.28) polinom çözümü sistemin bir çözümü olduğu için denklem (3.14)'ü sağlamalıdır. O halde $t \in [0, \alpha]$ için

$$\begin{aligned} E_{1,N}(t) &= \left| \frac{d_{y_{1,N}}(t)}{dt} - y_{1,N}(t)(a - by_{2,N}(t)) \right| \\ E_{2,N}(t) &= \left| \frac{d_{y_{2,N}}(t)}{dt} + y_{2,N}(t)(c - dy_{2,N}(t)) \right| \end{aligned} \quad (3.29)$$

dir. Sıralama noktalarında $E_{i,N}(t) = 0$ olması beklenir. $t \in [0, \alpha]$ için $y_i(t) \cong y_{i,n}(t)$ ise $E_{i,N}(t) \cong 0$ 'dır.

(3.1.4)'teki benzer prosedür kullanılarak minimum mutlak hatayı veren en uygun M tahmin edilebilir. Bu yöntem (3.14) sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} e_{1,N}(t) &= y_1(t) - y_{1,N}(t) \\ e_{2,N}(t) &= y_2(t) - y_{2,N}(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_1 &= y'_{1,N}(t) - y_{1,N}(t)[a - by_{2,N}(t)] \\ R_2 &= y'_{2,N}(t) + y_{2,N}(t)[c - dy_{2,N}(t)] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned}
& e'_{1,N}(t) - ae_{1,N}(t) + be_{1,N}(t)e_{2,N}(t) \\
& + by_{1,N}(t)e_{2,N}(t) + by_{2,N}(t)e_{1,N}(t) = -R_1
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ve

$$\begin{aligned}
& e'_{2,N}(t) + ce_{2,N}(t) - dy_{1,N}(t)e_{2,N}(t) \\
& - dy_{2,N}(t)e_{1,N}(t) - de_{2,N}(t)e_{1,N}(t) = -R_2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

denklemleri elde edilir.

(3.30) ve (3.31)'un Taylor seri çözümleri $e_{1,m}^*$ ve $e_{2,m}^*$ olsun. Yeteri kadar küçük ε_1 ve ε_2 için

$$\|e_{1,N} - e_{1,m}^*\| < \varepsilon_1$$

$$\|e_{2,N} - e_{2,m}^*\| < \varepsilon_2$$

oluyorsa mutlak hatalar, $e_{1,m}^*$ ve $e_{2,m}^*$ yardımıyla tahmin edilebilir. Bunun sonucu olarak, $i=1,2$ için $\min_n \|e_{i,n}\|_\infty$ ifadesini sağlayan n sayısının seçimi, $\|e_{i,m}^*\|_\infty$ ölçülerek hesaplanabilir. Açıkça, $y_{i,N} + e_{i,m}^*$, $i=1,2$, (3.14) sisteminin bir yaklaşık çözümüdür ve farklı m değerleri için daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir. Uygulamada $m \geq n$ seçilmesi daha tutarlı sonuçlar verebilir.

3.2.5 Sonuç $y_{1,N}$ ve $y_{2,N}$ (3.14) sisteminin Taylor seri çözümleri ise, $y_{1,N} + e_{1,m}^*$ ve $y_{2,N} + e_{2,m}^*$ da (3.14)'ün yaklaşık çözümleridir ve hataları $e_{1,N} - e_{1,m}^*$ ve $e_{2,N} - e_{2,m}^*$ kadardır. $\{y_{1,N} + e_{1,m}^*, y_{2,N} + e_{2,m}^*\}$ yaklaşık çözüm kümesinin, $\{y_{1,N}, y_{2,N}\}$ 'e göre daha iyi bir yaklaşım olduğu unutulmamalıdır. Burada $y_{1,N} + e_{1,m}^*$ ve $y_{2,N} + e_{2,m}^*$ düzeltilmiş Taylor serisi çözümleri olarak adlandırılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, metodun doğruluğunun ve etkinliğinin gösterilebilmesi için literatürde karşılaşılan örnekler ele alınmıştır. Lojistik denklem için verilen aralıkların seçilmiş noktalarında $y(t)$ tam çözümleri, $y_N(t)$ yaklaşık çözümleri, $e_N(t) = |y(t) - y_N(t)|$ mutlak hata fonksiyonları hesaplanmış ve sonuçlar tablo ve şekillerle gösterilmiştir. Ayrıca sonuçlar Adomian decomposition metot (ADM) (Pamuk, 2005) ve homotopy pertürbasyon metot (HHPM) (Pamuk ve Pamuk, 2010) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Aynı şekilde Lotka Volterra av-avcı denklem sistemi için verilen aralıkların seçilmiş noktalarında $y_i(t)$, $i=1,2$ tam çözümleri, $y_{i,N}(t)$, $i=1,2$ yaklaşık çözümleri ve $e_{i,N}(t) = |y_i(t) - y_{i,N}(t)|$, $i=1,2$ mutlak hata fonksiyonları hesaplanmış ve sonuçlar tablo ve şekillerle gösterilmiştir. Denklem sistemi için çalışmamızdan elde edilen sonuçlar diğer sayısal metotlar ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Pamuk, 2005, Pamuk ve Pamuk, 2010). Bu bölümde kullanılan tüm nümerik hesaplamalar Maple 16 kullanılarak elde edilmiştir.

4.1. Lojistik Diferansiyel Denklemin Uygulaması

Örnek 4.1.1. (Pamuk, 2005; Pamuk ve Pamuk, 2010; Yüzbaşı, 2012) $r=1$, $k=1$,

olmak üzere tam çözümü $y(t) = \frac{2}{2 - e^{-t}}$ olan

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{1}{k} y(t) \right) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

lojistik diferansiyel denklemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında ele alalım. $y_N(t)$ yaklaşık

çözümünü bulmak için Bölüm 3.1'de sunulan metot ile, $y_N(t) = \sum_{n=0}^N y_n t^n$ kesilmiş

Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümler elde edilir. $N=3$ için sıralama

noktalarının kümesi $\left\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1\right\}$ şeklindedir. Denklem çözülerek

Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2.00000000 \\ 2.31357346 \\ -1.16689640 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece yaklaşık çözüm

$$y_3(t) = 2 - 2.00000000t + 2.31357346t^2 - 1.16689640t^3$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde $N = 4, 5, \dots, 14$ değerleri için de Taylor polinom yaklaşımları hesaplanmıştır. Çizelge 4.1.'de ADM ve HHPM yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin sonuçları ve mevcut yöntemin sonuçları karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.2.'de ise N 'nin farklı değerleri için mutlak hata tahminleri ve hata üst sınırları verilmiştir. Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2.'den de anlaşılacağı gibi, sunulan yöntemle elde edilen sonuçların diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.1'de mutlak hata fonksiyonu $e_{11}(t)$ ve hata tahmini fonksiyonu $e_{10}(t)$ karşılaştırması yapılmıştır.

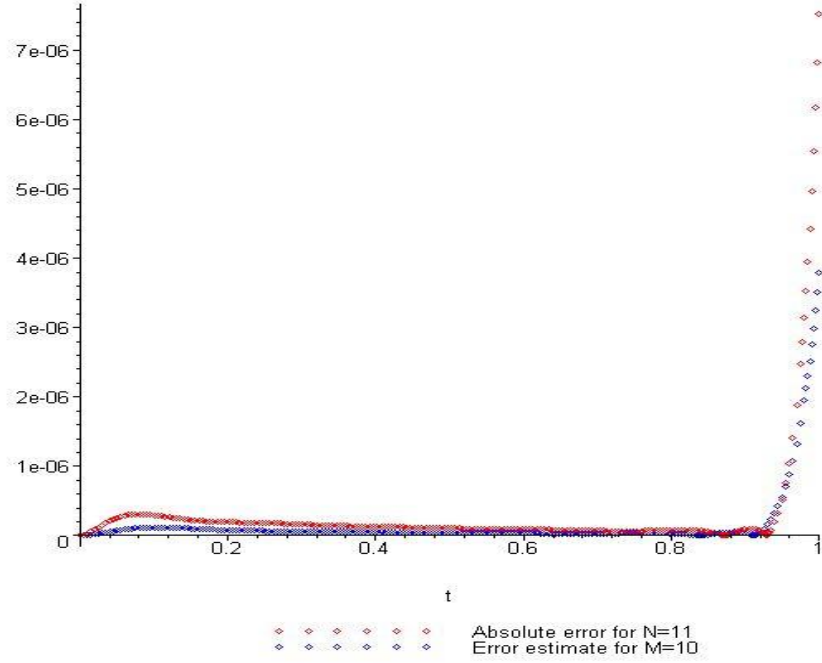
Çizelge 4.1. Örnek 4.1.1. için $y_N(t)$ yaklaşık çözümler ile farklı metotların çözümlerinin karşılaştırılması

Tam Çözüm		Sunulan Yöntem		
t_i	$y(t_i) = \frac{2}{2-e^{-t_i}}$	$y_5(t_i)$	$y_8(t_i)$	$y_{11}(t_i)$
0	2	2.00000000	2.00000000	2.00000000
0.2	1.69309410	1.69247244	1.69308560	1.69309391
0.4	1.50412134	1.50394442	1.50411547	1.50412121
0.6	1.37818084	1.37785840	1.37817656	1.37818075
0.8	1.28976421	1.28997910	1.28976100	1.28976412
1.0	1.22539967	1.21819554	1.22562396	1.22539215

HHPM			ADM	
t_i	$y_6(t_i)$	$y_8(t_i)$	$y_5(t_i)$	$y_8(t_i)$
0	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000
0.2	1.69328053	1.69310962	1.69244800	1.69310962
0.4	1.52361813	1.51061414	1.47033600	1.51061414
0.6	1.65978080	1.58918166	1.05286400	1.58918166
0.8	3.11680853	3.72352625	-0.29324800	3.72352625
1.0	8.90833333	17.2164186	-4.10000000	17.21641865

Çizelge 4.2. Örnek 4.1.1. için mutlak hataların sonsuz normları, mutlak hata tahminleri, residual mutlak hataların normları ve mutlak hataların üst sınırları

N	3	4	5	6
$\ f - y_N\ _\infty$	0.078	0.02255	0.720E-2	0.220E-2
$\ e_{10}^*\ _\infty$	0.080	0.02253	0.722E-2	0.218E-2
$\ f - y_N - e_{10}^*\ _\infty$	0.231E-4	0.231E-4	0.231E-4	0.231E-4
N	7	8	9	10
$\ f - y_N\ _\infty$	0.716E-3	0.224E-3	0.730E-4	0.231E-4
$\ e_{10}^*\ _\infty$	0.739E-3	0.201E-3	0.961E-4	0.153E-4
$\ f - y_N - e_{10}^*\ _\infty$	0.231E-4	0.231E-4	0.231E-4	0.231E-4
N	11	12	13	14
$\ f - y_N\ _\infty$	0.752E-5	0.238E-5	0.776E-6	0.247E-6
$\ e_{10}^*\ _\infty$	0.379E-5	0.517E-6	0.209E-6	0.209E-6
$\ f - y_N - e_{10}^*\ _\infty$	0.372E-5	0.290E-5	0.986E-6	0.372E-7



Şekil 4.1. Örnek 4.1.1.'in $N = 11$ için mutlak hata fonksiyonu ve $M = 10$ hata tahmini fonksiyonunun karşılaştırılması

4.2. Lotka Volterra Av-Avcı Denkleminin Uygulaması

Örnek 4.2.1. (Pamuk, 2005; Pamuk ve Pamuk, 2010; Yüzbaşı, 2012) Bu örneğimizde,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1(t)(1 - y_2(t)), \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2(t)(-1 + y_1(t)), \end{cases}$$

denklemin sistemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında

$$y_1(0) = 1.3 \text{ ve } y_2(0) = 0.6$$

başlangıç koşulları altında ele alalım. $y_{i,N}(t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için Bölüm 3.2'de sunulan metot uygulandığında, $N = 3$ için

$$y_{i,N}(t) = \sum_{n=0}^3 y_{i,n} t^n, \quad i = 1, 2$$

şeklinde kesilmiş Taylor serisi cinsinden yaklaşık çözümler elde edilir. $N = 3$ için sıralama noktalarının kümesi $\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1 \right\}$ şeklindedir. Sistem çözülerek Taylor katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.52000000 \\ 0.00806629 \\ -0.17760849 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.18000000 \\ 0.18657650 \\ 0.04417669 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece yaklaşık çözümler

$$y_{1,3}(t) = 1.3 + 0.52000000t + 0.00806629t^2 - 0.17760849t^3$$

$$y_{2,3}(t) = 0.6 + 0.18000000t + 0.18657650t^2 + 0.04417669t^3$$

şeklinde elde edilir.

ADM ve HHPM yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin sonuçları ve mevcut yöntemin sonuçları Çizelge 4.3. ile verilmiştir. Şekil 4.2. ve Şekil 4.3.'te, $N = 4$ için Taylor polinom metodu ile elde edilen çözümler, ADM ile elde edilen yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca Çizelge 4.4.'te yaklaşık çözümlerin doğruluğu farklı N değerleri için hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.'de gösterilmiştir. Çizelge ve şekillerden de görüleceği üzere N değerleri arttıkça hatalar hızlı bir şekilde azalmaktadır.

Çizelge 4.3. Örnek 4.2.1. için $y_{1,N}(t_i)$ ve $y_{2,N}(t_i)$ yaklaşık çözümler ile farklı metotların çözümlerinin karşılaştırılması

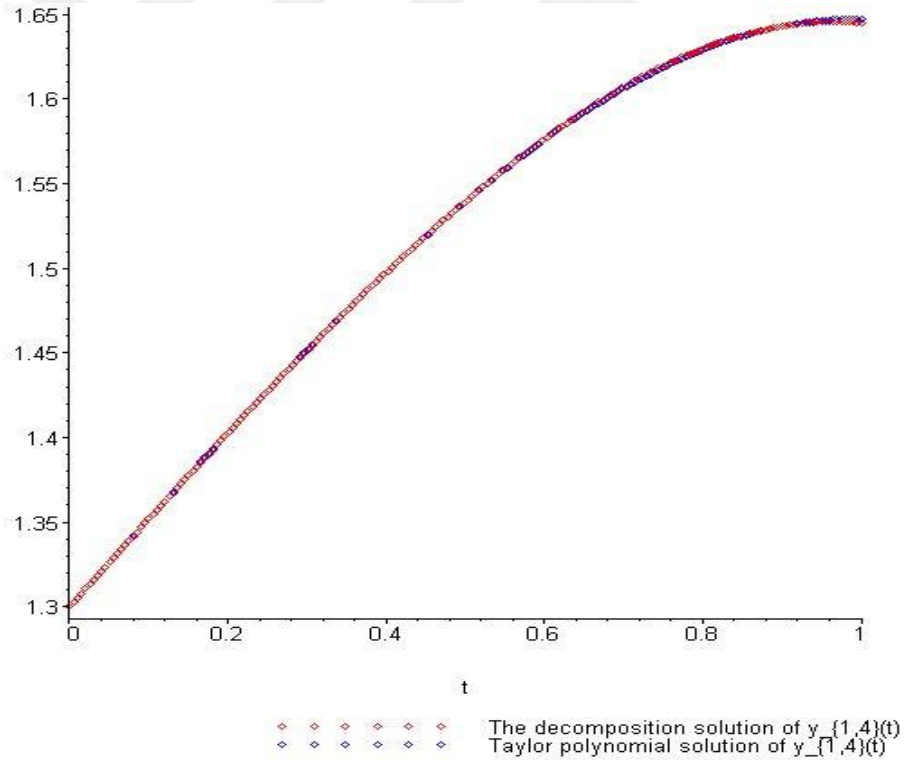
Sunulan Yöntem				
t_i	$y_{1,4}(t_i)$	$y_{1,8}(t_i)$	$y_{2,4}(t_i)$	$y_{2,8}(t_i)$
0	1.30000000	1.30000000	0.60000000	0.60000000
0.2	1.40256036	1.40250074	0.64364900	0.64370909
0.4	1.49748120	1.49742150	0.70442621	0.70445827
0.6	1.57653121	1.57645686	0.78455663	0.78458889
0.8	1.63002455	1.62988609	0.88557147	0.88563513
1.0	1.64682086	1.64800015	1.00830815	1.00702215

ADM		HHPM		
t_i	$y_{1,3}(t_i)$	$y_{1,4}(t_i)$	$y_{2,3}(t_i)$	$y_{2,4}(t_i)$
0	1.30000000	1.30000000	0.60000000	0.60000000
0.2	1.40258240	1.40257444	0.64369520	0.64371104
0.4	1.49873920	1.49861196	0.70428160	0.70453504
0.6	1.58308480	1.58244068	0.78401040	0.78529344
0.8	1.65023360	1.64819788	0.88513280	0.88918784
1.0	1.69480000	1.68983000	1.00990000	1.01980000

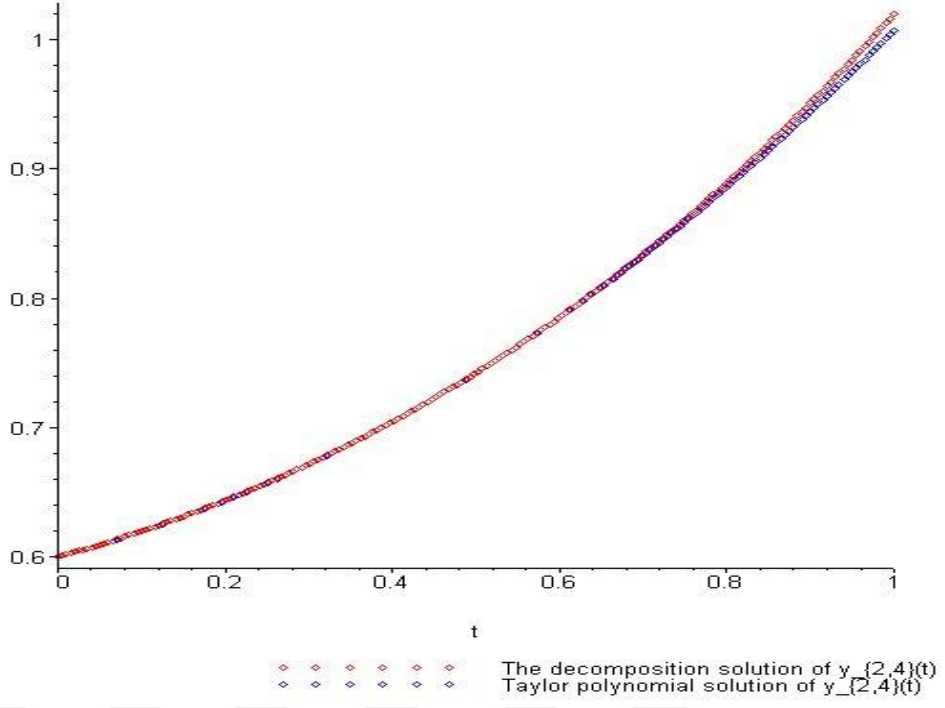
Çizelge 4.4. Örnek 4.2.1.'in t_i değerleri için (3.29) denklemleri ile verilen çözümlerin doğruluğunun karşılaştırılması

Sunulan Yöntem				
t_i	$E_{1,4}(t_i)$	$E_{1,8}(t_i)$	$E_{2,4}(t_i)$	$E_{2,8}(t_i)$
0	0	0	0	0
0.2	0.152582 E-3	0.133054 E-6	0.185271 E-3	0.990741 E-7
0.4	0.223599 E-3	0.347114 E-7	0.265203 E-3	0.262717 E-7
0.6	0.382779 E-3	0.542112 E-7	0.445184 E-3	0.415516 E-7
0.8	0.907477 E-3	0.599012 E-6	0.103823 E-2	0.463089 E-6
1.0	0.0144644486	0.587349 E-4	0.016321765	0.455900 E-4

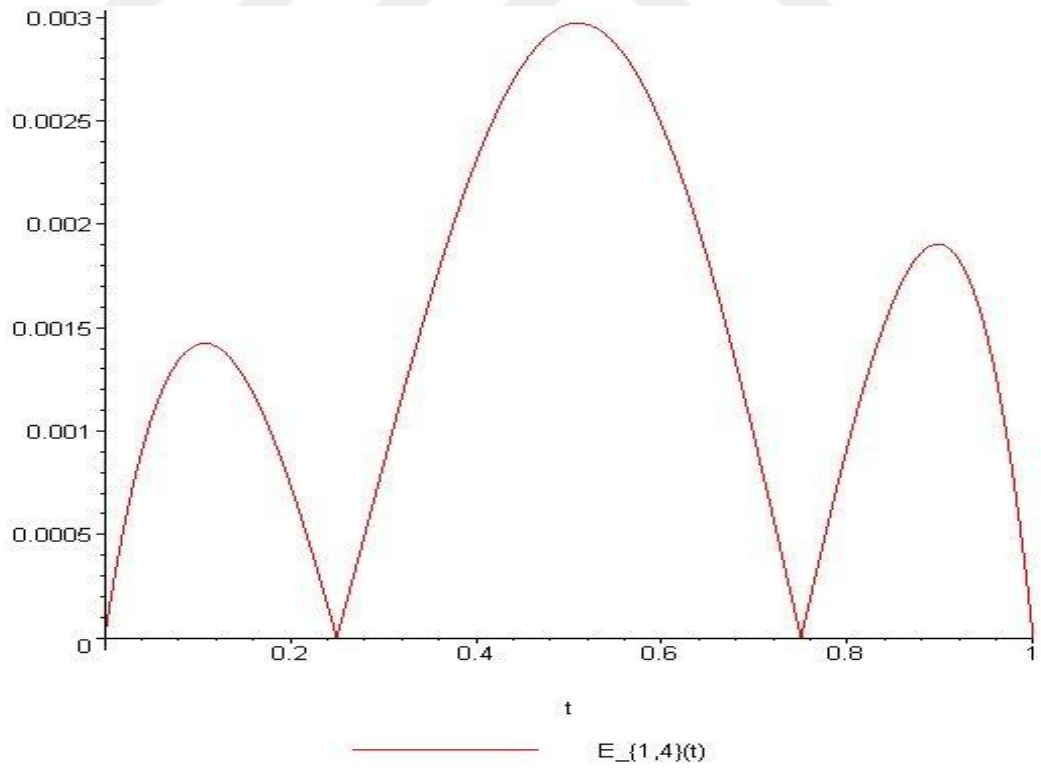
ADM		HHPM		
t_i	$E_{1,3}(t_i)$	$E_{1,4}(t_i)$	$E_{2,3}(t_i)$	$E_{2,4}(t_i)$
0	0	0	0	0
0.2	0.15892 E-2	0.14552 E-2	0.31236 E-3	0.31834 E-5
0.4	0.012539	0.011684	0.23408 E-2	0.15680 E-3
0.6	0.041294	0.039170	0.68925 E-2	0.14187 E-2
0.8	0.094218	0.090957	0.012695	0.67535 E-2
1.0	0.17418	0.17098	0.014979	0.022811



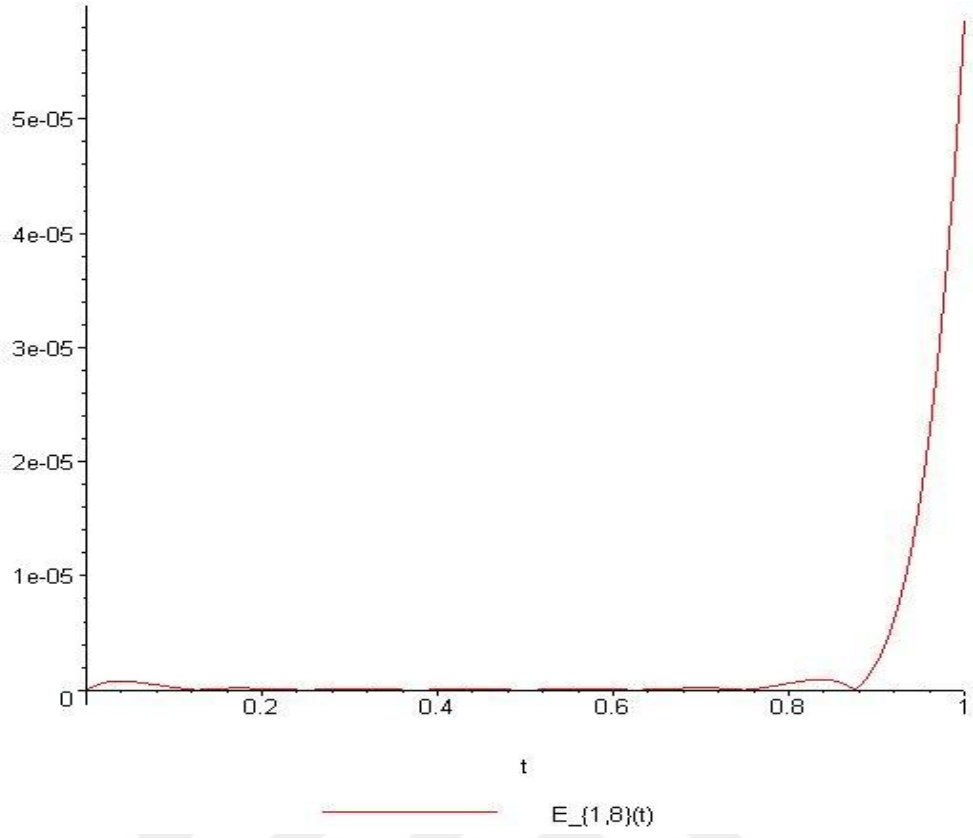
Şekil 4.2. Örnek 4.1.2. için ADM ve mevcut yöntem ile elde edilen $y_{1,4}(t)$ yaklaşık çözümün karşılaştırılması



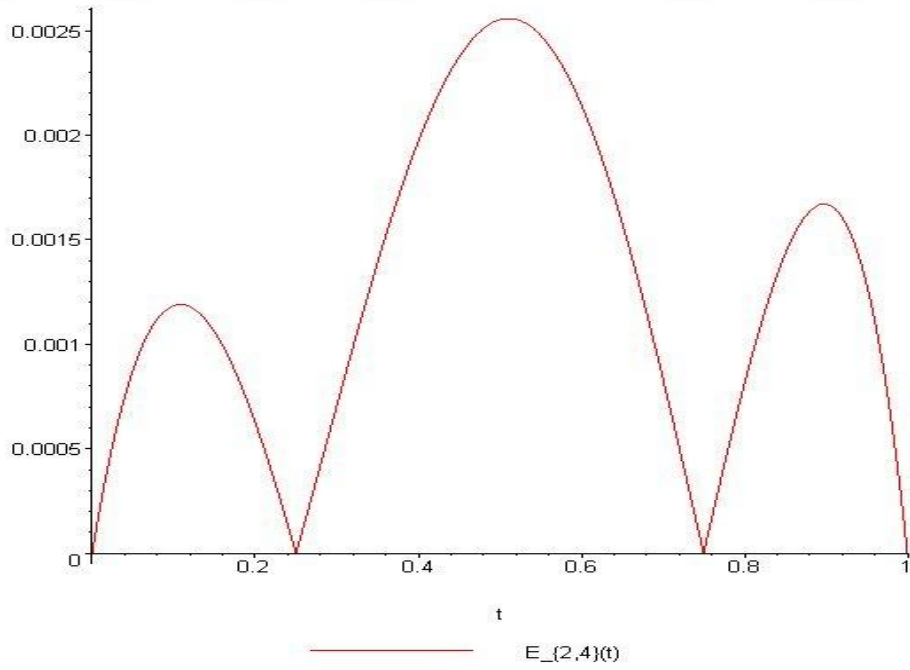
Şekil 4.3. Örnek 4.1.2. için ADM ve mevcut yöntem ile elde edilen $y_{2,4}(t)$ yaklaşık çözümün karşılaştırılması



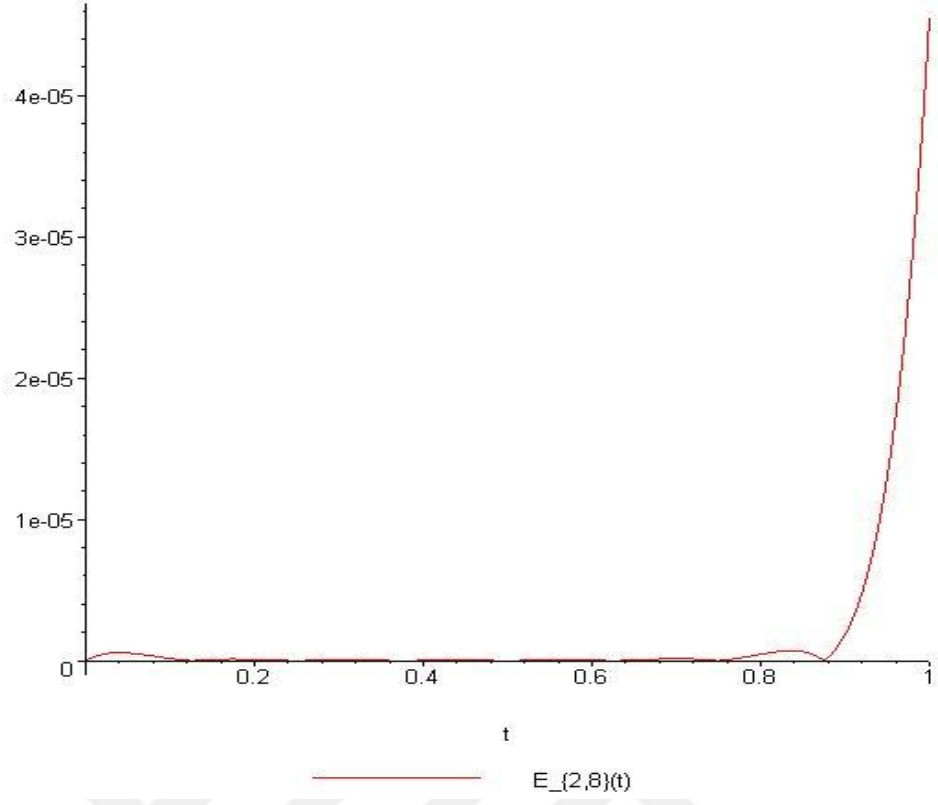
Şekil 4.4. Örnek 4.1.2. için $E_{1,4}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu



Şekil 4.5. Örnek 4.1.2. için $E_{1,8}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu



Şekil 4.6. Örnek 4.1.2. için $E_{2,4}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu



Şekil 4.7. Örnek 4.1.2. için $E_{2,8}(t)$ Taylor seri çözümünün doğruluğu

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezin amacı, biyoloji, ekoloji, iktisat alanlarında sıkça karşılaşılan lojistik diferansiyel denklem ve Lotka-Volterra av-avcı modeli için Taylor polinom yöntemini geliştirerek, modellerin Taylor seri çözümlerini bulmaktır. Bu yöntem ile her iki model için yaklaşık çözümler elde edilmiş ve çözümlerin doğruluğu incelenmiştir. Ayrıca tam çözümlerin bilinmediği durumlarda kalan doğrulaması (residual correction) prosedürü verilmiştir. İncelenen problemler sonucunda Taylor matris metodun avantajları ve dezavantajları şu şekilde sıralanabilir.

1. Yöntem hem lojistik diferansiyel denkleme hem de Lotka-Volterra av-avcı modeline kolayca uygulanabilmektedir.
2. Taylor matris metodunda en iyi yaklaşımı elde edebilmek için N kesme sınırının tayini büyük önem taşımaktadır. N 'nin küçük alınması durumunda bulunan çözüm istenilen doğrulukta olmayabilir. N 'nin çok büyük seçilmesi durumunda da bilgisayarda işlem yükü artacağından, bilgisayar programları daha yavaş sonuç verebilir. O yüzden N değerinin yeteri kadar büyük seçilmesi durumunda, çözüme o kadar iyi yaklaşım sağlanabilmektedir.
3. Bilgisayar yuvarlama hatalarını azaltmak için işlem basamak sayısının yüksek seçilmesi önemlidir.
4. Tam çözümün bilinmediği durumlarda, kalan doğrulaması (residual correction) verilen denklem veya sistemler için düzenlenerek hata tahmini yapılabilir. Ayrıca bu prosedür ile minimum mutlak hatayı veren en uygun M hesaplanır.

Bu yöntem daha sonraki çalışmalarda gecikmeli lojistik diferansiyel denklemlere, gecikmeli Lotka-Volterra av-avcı denklem sistemlerine ve rekabet modellerine uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Akpınar, H. (2012) Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması, *Öneri.C.*, 18 (38): 97-103.
- Arikoğlu, A. ve Özkol, I. (2006) Solution of Differential-Difference Equation by Using Differential Transform Method, *Applied Mathematics and Computation*, 181 (1): 153-162.
- Akyüz, A. ve Sezer, M. (2003) Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 144: 237-247.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A. ve Sezer, M. (2007) A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument, *Journal of Comput. and Appl. Math.*, 200: 217-25.
- Arino, J., Wang, L. ve Wolkowicz, G.S.K. (2006), An alternative formulation for a delayed logistic equation, *Journal of Theoretical Biology*, 241: 109-119.
- Bacaër, N. (2011) *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, London: Springer, 160s.
- Bayram, M. (2009) *Nümerik Analiz*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 495s.
- Bellen, A. ve Zennaro, M. (2003) *Numerical Methods for Delay Differential Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation Series*, Oxford Science Publication, 412s.
- Berryman, A.A. ve Kindlmann, P. (2008) *Population systems: a general introduction. Population (English Edition)*, London: Springer-Verlag, 222s.
- Boyce, W.E. ve DiPrima, R.C. (2012) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10. Baskı, United States of America, 811s.
- Brauer, F. ve Chavez, C.C. (2012) *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, 2. Baskı, Springer, 508s.
- Bülbül, B. (2011) *İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri*, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 88s.
- Bülbül, B., Gülsu, M. ve Sezer, M. (2010) A new Taylor collocation method for nonlinear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *Numer. Meth. Part. Dif. Equ.*, 26 (5): 1006-1020.
- Chavas, J.P. (2015) Modeling population dynamic: A quantile approach, *Mathematical Biosciences*, 262: 138-146.

- Costa O.S., Molina L.M., Perez D.R., Antoranz J.C. ve Reyes M.C. (2003) Behaviour of tumors under nonstationary therapy, *Physica D.*, 178: 242-253.
- Çelik, I. (2005) Approximate calculation of eigenvalues with the method of weighted residuals-collocation method, *Appl. Math. and Comput.*, 160 (2): 401-410.
- Değirmenci, E. (2011), *Dağımlı Gecikmeli Bir Av-Avcı Sisteminde Hopf Çatallanma ve Kararlılık Analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Bahçeşehir Üniversitesi, İstanbul, 72s.
- Denghan, M. ve Salehi, R. (2010) Solution of a Nonlinear Time-Delay Model in Biology via Semi-analytical Approaches, *Computer Physics Communications*, 181 (7): 1255-1256.
- Ekici, M. (2016) *Lineer Olmayan Bazı Matematiksel Modeller İçin Bir Yöntem*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, 94s.
- Evans, D.J. ve Raslan, K.R. (2005) The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.*, 82: 49-54.
- Giordano, F.R., Fox, W.P. ve Horton S.B. (2014) *A First Course in Mathematical Modelling*, 5. Baskı, Boston, USA, 676s.
- Gopalsamy, K. (1992) *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers Netherlands, 507s.
- Gökmen, E. ve Sezer, M. (2013) Taylor collocation method for system of high order linear differential-difference equations with variable coefficients, *Ain Shams Engineering Jour.*, 4: 117-125.
- Gökmen, E. ve Sezer, M. (2013) Taylor collocation method for nonlinear system of second-order boundary value problems, *Düzce University Journal of Science & Technology*, 1: 11-24.
- Gökmen, E. (2014) *Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Diferansiyel-Fark Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri İçin Taylor Sıralama Yöntemi*, Doktora Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 128s.
- Gökmen, E., Işık, R.O. ve Sezer, M. (2015), Taylor collocation approach for delayed Lotka–Volterra predator–prey system, *Applied Mathematics and Computation*, 268: 671-684.
- Gökmen, E. ve Sezer, M., (2015) Approximate solution of a model describing biological species living together by Taylor collocation method, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3 (2): 147-158.
- Gökmen, E., Yüksel, G. ve Sezer, M. (2017), A numerical approach for solving Volterra type functional integral equations with variable bounds and mixed delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 311: 354-363.

- Gülen, S. (2010) *Bazı Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 86s.
- Gülsu, M. ve Sezer, M. (2005) The approximate solution of high-order linear difference equation with variable coefficients in terms of Taylor polynomials, *Appl. Math. Comput.*, 168: 76-88.
- Gülsu, M. ve Sezer M. (2007) On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method, *Appl. Math. Comput.*, 188: 446-449.
- Güneş, H.H. (2009) İktisat Tarihi Açısından Nüfus Teorileri ve Politikaları, *ISSN:1304-0278*, 8 (28): 126-138.
- Güney, Z. (1989) *Gecikmeli Diferansiyel Denklemler Üzerine*, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 45s.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M. (2001) *Yüksek Matematik 2 Çok Değişkenli Fonksiyonların Analizi*, Birinci Basım, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 935s.
- Höhler, S. (2005) *A "Law of Growth": The Logistic Curve and Population Control since World War II*, International Conference "Technological and Aesthetic (Trans)Formations of Society", Darmstadt Technical University, 17s.
- Ince, E.L. (1956) *Ordinary Differential Equations*, 1. Baskı, Dover Publications, Inc., New York, 558s.
- Karamete, A. (1996) *Lineer Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Sıralama Yöntemi*, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, 43s.
- Karamete, A. and Sezer, M. (2002) Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients, *International Journal of Computer Mathematics*, 79 (9): 987–1000.
- Kartal, Ş. (2014) Bağışıklık sistemi etkisi altında tümör büyümesinin modellenmesi, *Nevşehir Bilim ve Teknolojin Dergisi*, 3 (1): 45-55.
- Kemancı, B. (2007) *Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 131s.
- Kingsland, S. E. (1985) *Modelling Nature: Episodes in the History on the Ecology*, University of Chicago Press, 315s.
- Kolman, B. ve Hill, D.R. (2010) *Uygulamalı Lineer Cebir*, Dokuzuncu Baskıdan Çeviri, Palme Yayınları, Ankara, 614s.
- Kot, M. (2001) *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, 464s.

- Kurt, N. ve Sezer, M. (2008) Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, *J. Franklin Ins.*, 345 (8): 839-850.
- Lotka, A.J. (1907). Relation between birth rates and death rates. *Science*, 26 (653): 21-22.
- Mason, J.C. ve Handscomb, D.C. (2003) *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/Crc., Washington, 341s.
- Malthus, T. (1798). *An Essay on the Principle of Population, as it Affects the Future Improvement of Society with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*, London, 125s.
- Murray, J.D. (2002) *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 551s.
- Nas, Ş., Yalçınbaş, S. ve Sezer, M. (2000) A Taylor polynomial approach for solving high-order linear fredholm integro-differential equatins, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 32 (2): 213-225.
- Nie, L.-F. ve Teng, Z.-D. (2013) The control data method: a new method of modelling in population Dynamics, *Journal of Applied Mathematics*, 2013: 8.
- Okuducu, M.B. ve Aral, M.M. (2017) Knowledge based dynamic human population models, *Technological Forecasting & Social Change* 122: 1-11.
- Oliveira, F.A. (1980) Collocation and residual correction, *Numer. Math.*, 36: 27-31.
- Özer M.N. ve Eser D. (1996) *Diferansiyel denklemler (Teori ve Uygulamaları)*, Cilt1, Eskişehir, 461s.
- Özalp, N. (2015) *Matematiksel Modelleme*, 1. Baskı, Gazi Kitabevi, 185s.
- Pamuk, S. (2005) The decomposition method for continuous population models for single and interacting species, *Applied Mathematics and Computation*, 163: 79–88.
- Pamuk, S. ve Pamuk, N. (2010) He's homotopy perturbation method for continuous population models for single and interacting species. *Comput. Math. Appl.*, 59: 612–621.
- Paul, S., Mondal, S.P. ve Bhattacharya, P. (2016) Numerical solution of Lotka Volterra prey predator model by using Runge-Kutta-Fhelberg method and Laplace Adomian decomposition method, *Alexandria Engineering Journal*, 55: 613-617.
- Philips, G.M. (2003) *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, New York, 312s.

- Pulley, L.C. (2011) *Analyzing Predator-Prey Models Using Systems of Ordinary Linear Differential Equations*, Southern Illinois University Carbondale, Honors Theses, 344s.
- Quarteroni, A., Sacco, R. ve Saleri, F. (2007) *Numerical Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 339s.
- Ramadan, M.A. (2005) Spline solution of first order delay differential equation, *J.Egyptian Math. Soc.*, 1: 7-18.
- Ramadan, M.A., El-Sherbeiny, A.A. ve Sheriff, M.N. (2006) Numerical solution of system of first order delay differential equations using spline functions, *Int. J. Comput. Math.*, 83 (12): 925-937.
- Ramadan, M.A., El-Sherbeiny, A.A. ve Sheriff, M.N. (2009) The use of polynomial spline functions for the solution of system of second order delay differential equations, *Int. J. Comput. Math.*, 86 (7): 1167-1181.
- Saadatmandi, A. ve Dehghan, M. (2009) Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation, *Comput. Math. Appl.*, 58: 2190-2196.
- Sarkar R.R. ve Banerjee S. (2005) Cancer self remission and tumor stability- a stochastic approach, *Math. Biosci.*, 196: 65-81.
- Salisbury, A. (2011) *Mathematical Models in Population Dynamics*, Lisans Tezi, Sarasota, Fl, 104s.
- Sezer, M. (1994) Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 25 (5): 625-633.
- Sezer, M. (1996) A method for the approximate solution of the second-order linear differential equations in terms of Taylor polynomials, *Int. J. Math. Ed. Sci. Technol.*, 27 (6): 821-834.
- Sezer, M. (2001) *Birinci Mertebeden Lineer ve Lineer Olmayan Denklemler Uygulamalar ve Çözümlü Sınav Problemleri*, Kanyılmaz Matbaası, İzmir, 236s.
- Sezer, M. ve Gülsu, M. (2005) A new polynomial approach for solving difference and Fredholm integro-difference equations with mixed argument, *Appl. Math. Comput.*, 171: 332-344.
- Sezer M.; Akyüz-Daşcıoğlu A. (2006) Taylor polinomial solutions of general linear differential-difference equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 174 (2): 1526-1538.
- Sezer, M., Gülsu, M. ve Tanay, B. (2006) A matrix method for solving high-order linear difference equations with mixed argument using hybrid Legendre and Taylor polynomials, *J. Franklin Ins.*, 363 (6): 647-659.

- Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu A. (2007) [A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument](#), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200 (1): 217-225.
- Shahmorad, S. (2005) Numerical solution of the general form linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by The Tau method with an error estimation, *Appl. Math. and Comput.*, 167: 1418-1429.
- Shakeri F. ve Dehghan M. (2008) Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 48: 685-699.
- Shakeri F. ve Dehghan M. (2008) Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method, *Math. Comput. Modelling*, 48 (3-4): 486-498.
- Shakeri F. ve Dehghan M. (2010) Application of the decomposition method of Adomian for solving the pantograph equation of order m , *Z. Naturforsch.*, 65a: 453-460.
- Simon, L. (2008) *An introduction to multivariable mathematics*, Morgan and Claypool Publishers, Stanford University, 121s.
- Verschaffel, L., Greer, B. ve de Corte, E. (2000) Making Sense of Word Problems, *Educational Studies in Mathematics*, 42 (2): 211-213.
- Volterra, V. (1926) Variazioni e fluttazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Mem. Acad. Sci. Lincei*, 2: 31-113.
- Yalçınbaş, S. (2002) Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm interal equation, *Appl. Math. Comput.*, 127 (2): 196-206.
- Yerlikaya, Ö. (2011) İş Çevrimlerinin Lineer Olmayan Dinamikleri, Goodwin'in Büyüme Çevrimleri ve Ampirik Bir Uygulama, *Sosyal Bilimler Dergisi*, 1: 33-48.
- Yüzbaşı, S. (2012) Bessel collocation approach for solving continuous population models for single and interacting species, *Appl. Math. Modelling*, 36: 3787-3802.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Yıldırım, A. (2011) Numerical solutions of system of high-order linear differential-difference equations with Bessel polynomial bases, *Zeitschrift für Naturforschung A, A Journal of Physical Sciences*, 66a: 519-532.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. (2012) A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations, *Numer. Meth. Part. Dif. Equ.*, 28 (4): 1105-1123.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Elçin Çelik
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Muğla 30/06/1990
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 506 131 63 63
E-posta : celikelcin48@hotmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2008
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2013
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2014
Formasyon	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2014
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2018

Yabancı Dil

Dil (İngilizce)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma		X	
Anlama			X
Okuma			X

Bilimsel Faaliyetler

1. Taylor Polynomial Approach For Solving Continuous Population Models For Single, II. International Academic Research Congress, 18-21 Ekim 2017, Alanya/Antalya.