KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN KATSAYILARA GÖRE SÜREKLİLİĞİNİN SINIFLANDIRILMASI VE TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burhan PEKTAŞ

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Danışman : Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

MART 2002

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN KATSAYILARA GÖRE SÜREKLİLİĞİNİN SINIFLANDIRILMASI VE TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burhan PEKTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih **:22 Haziran 2001**

Tezin Savunulduğu Tarih **:07 Mart 2002**

Tez Danışmanı	**Üye**	**Üye**
Prof. Dr.	Prof. Dr.	Yard. Doç. Dr.
Alemdar HASANOĞLU	Mehmet CAN	Serdal PAMUK
(.........................)	(.........................)	(.........................)

MART 2002

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN KATSAYILARA GÖRE SÜREKLİLİĞİNİN SINIFLANDIRILMASI ve TERS PROBLEMLER

Burhan PEKTAŞ

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemi, Katsayılara Göre Süreklilik, Adi Diferansiyel Denklemler,Zayıf ve Güçlü Yakınsama, Ters Problemler

Özet: Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörü ile verilen sınır-değer problemi ele alınarak operatörün yapısında bulunan katsayılara göre, çözüm fonksiyonunun sürekliliği incelenmiştir. Daha sonra hangi koşullar altında ne tür yakınsamaların mümkün olacağına dair bir sınıflandırma yapılmıştır. Tezin son kısmında, elde edilen sonuçlar ters katsayı problemlerinin çözümüne uygulanmıştır.

THE CLASSIFICATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH RESPECT TO COEFFICIENT FUNCTIONS AND INVERSE PROBLEMS

Burhan PEKTAŞ

Keywords: Sturm-Liouville Problem, Continuity with Respect to Coefficients, Ordinary Differential Equations,Weak and Strong Convergence, Inverse Problems

Abstract: In this study, the boundary value problem for the Sturm-Liouville operator is consedered and continuity with respect to the leading and multiplied coefficients is analyzed. Based on the analysis some results related to the continuity of the solution with respect to the coefficients are obtained. Finally, the results are applied to solvability of inverse coefficient problems.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

İkinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemler için formüle edilmiş güncel birçok problem Sturm Liouville operatörü ile verilmekte veya ona indirgenebilmektedir.

Bu çalışmanın 2.Bölümünde bu operatör için verilmiş sınır-değer problemi tanımlanarak onun klasik ve zayıf çözümü açıklanmış, ayrıca sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı sonuç ve teoremler verilmiştir.

3.Bölüm bu çalışmanın temel amacını teşkil etmektedir. Bu bölümde daha önce verilmiş olan katsayılara göre süreklilik teoremi baz alınarak $k(x)$ ve $q(x)$ katsayı fonksiyonlarının farklı süreklilik karakterleri ile ilgili karşı örnekler verilmiş ve $u = u(x,k)$ çözüm fonksiyonunun $k = k(x)$ katsayısına göre sürekli bağımlılığının bir analizi yapılmıştır.

4.Bölüm, yapılan çalışmanın ters problemlere uygulanmasını içermektedir. Bu bölümde $k = k(x)$ baş katsayı fonksiyonunun aranması ile ilgili ters problem tanımlanarak yaklaşık çözümün varlığı incelenmiştir.

5. ve son bölüm ekleri içermektedir. Bu bölüm, tezde kullanılan fakat iyi bilinemeyeceği düşünülerek hatırlatma amacıyla verilmiş olan alt yapıyı içermektedir.

Yapılan bu çalışmanın geriden gelecek olan genç araştırmacılara ve bilim dünyasına faydalı olacağını umuyorum. Beni böyle bir konuda çalışmaya sevk eden ve bir araştırmacı olarak yetiştiren değerli hocam sayın Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu'na ve her konuda hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Hüseyin Halilov'a, sayın Doç. Dr. Sadi Bayramov'a, sayın Doç. Dr. Zahir Seyidmamedov'a ve ismini sayamadığım ama üzerimde hakları olduğunu bildiğim Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümünün diğer değerli hocalarına teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

A	: Lineer operatör
$(b_{ij})_{m\times n}$	: $m,n \in Z^+$ olmak üzere $m\times n$ boyutlu gerçel matris
$C^n(a,b)$	: (a,b) aralığında n. dereceye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(a,b)$	: (a,b) aralığında keyfi dereceden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(G)$	: G'de keyfi dereceden türevleri sürekli, kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
D_A	: A operatörünün tanımlandığı lineer küme (lineal olarak adlandırılır)
G	: n boyutlu R^n Öklid uzayında ölçülebilir küme
Γ	: G kümesinin sınırı
$\overline{G}$	: G kümesinin kapanması ($\overline{G} = G\cup\Gamma$)
H	: Gerçel Hilbert uzayı
H_A	: D_A linealının genişletilmesinden elde edilen Hilbert uzayı
$L_2(G)$	: G'de kareleri Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$R_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu matris cismi
Z^+	: Pozitif tamsayılar kümesi
$(.,.)$	: İç çarpım
$(.,.)_0$	: $H^0 = L_2$ Hilbert uzayının iç çarpım fonksiyonu
$(.,.)_A$	: H_A Hilbert uzayının iç çarpım
$\Vert\cdot\Vert$	: Norm fonksiyonu
$\Vert\cdot\Vert_0$	: $H^0 = L_2$ Hilbert uzayında norm
$\Vert\cdot\Vert_A$	: H_A Hilbert uzayında norm
$\Vert\cdot\Vert_e$	: Öklid (Euclid) normu ($\Vert x\Vert_e = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$)
$\Vert\cdot\Vert_\infty$	: sup-norm ($\Vert x\Vert_\infty = \max\{\lvert x_1\rvert,\ldots,\lvert x_n\rvert\}$, $x\in R^n$)

$\hookrightarrow$	: Gömme sembolü
$\mapsto$	: Zayıf yakınsama sembolü
(SL)	: Sturm-Liouville

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kurulan bir matematik modelde, eğer çözüm yoksa, çözüm tek değilse veya elde edilen çözüm giriş verilerine göre sürekli değilse o zaman o modelin uygulama açısından fazla bir önemi olmayacaktır. Dolayısıyla matematiksel bir protipten öteye gidemez. Bu yüzden matematik modellerin pratik açıdan da önem kazanabilmesi için, yukarıda değinilen özellikleri sağlamaları gereklidir. Bunları aşağıdaki örnek üzerinde açıklayalım.

$$Au = f$$

operatör denklemi ile verilmiş olan sınır değer problemini ele alalım. Burada A lineer operatör, u, çözüm fonksiyonu f, ise verilmiş olan sağ taraftır. Bu problem için

a) Problemin çözümünün varlığı,
b) Bu çözümün tekliği,
c) Çözüm fonksiyonunun giriş verilerine göre sürekliliği

koşulları sağlanıyorsa o zaman ele alınan problem düzgün formüle edilmiştir (well-posed) denir. Eğer bu koşullardan biri bile sağlanmıyorsa o zaman söz konusu problem düzgün formüle edilmemiştir (ill-posed) denir. Burada giriş verileri sözcüğü ile, verilmiş olan sağ taraf, deneysel olarak veya doğrudan verilmiş sınır koşulları ve operatörün yapısında bulunan katsayı fonksiyonları kastedilmektedir.

Bu çalışma daha güncel olması açısından düzgün formüle edilme koşullarından sonuncusu baz alınarak hazırlanmış ve katsayılara göre süreklilik sınıflandırılmıştır. Teorik açıdan eğer A lineer operatörü pozitif tanımlı ve simetrik ($A = A^* > 0$) ise o zaman çözüm fonksiyonunun f sağ tarafına göre sürekliliği söz konusu olacaktır.

Fakat katsayılara göre süreklilik bu kadar basit değildir ve bu yüzden de daha güncel konular arasındadır.

Mühendislik ve fizikteki birçok problem ya doğrudan ya da dolaylı olarak Sturm-Liouville[1] (SL) operatörü olarak bilinen (Gelfand-Levitan,1955), (Hochstedt,1973), (Hasanov-Shores,1997), (Hasanov,1997)

$$Au := -\left(k(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x)$$

operatörüyle ifade edilir. Bu operatörün pozitif tanımlı ve kendine eş olması (bak. EK-A) onunla ifade edilen problemlerin zayıf çözümlerinin varlığı ve tekliği açısından son derece önemli olmasına ek olarak çözümün, operatörün yapısında bulunan $k(x)$ baş katsayı ve $q(x)$ çarpım katsayısı fonksiyonlarına göre sürekliliğinin analizi de ilginç konular arasındadır.

Bu çalışmada yukarıda sözü edildiği gibi (SL) operatörünün ifade ettiği sınır-değer problemi ele alınarak $u = u(x)$ çözümünün $k = k(x)$ ve $q = q(x)$ katsayılarına göre sürekliliği, bu sürekliliğin çeşitli yakınsama ölçeklerine göre sınıflandırılması ve daha sonra da onun özellikleri incelenecektir.

[1] Joseph Liouville (1809-1882) Fransız matematikçisi
Jacques Charles Sturm (1803-1855) Fransız Matematikçisi

BÖLÜM 2

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN SINIR-DEĞER PROBLEMİ ve BU PROBLEMİN ZAYIF ÇÖZÜMÜ

Fizikte ve mühendislikte, kurulan bir matematik modelin klasik çözümü ile pratikte elde edilen çözümü karşılaştırılacak olunursa bu çözümlerin birbirinden çok farklı oldukları görülür. Genel olarak klasik çözüm uzayları pratik çözümleri kapsamayacak kadar dar sınıflardır (Hasanov,1997),(Hasanov-Shores,1997). Bu nedenle pratik çözümleri de kapsayacak şekilde çözüm uzayının genişletilmesi ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu düşünceyle tanımlanan çözümlere zayıf (genelleşmiş) çözümler denir. Bu fikir ilk olarak ünlü Rus matematikçisi S.L.Sobolev tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmiştir(Mikhlin,1964),(Lions,1970), (Ladyzhenskaya,1985).

2.1. Sınır-Değer Problemi, Bu Problemin Klasik ve Zayıf Çözümü

(SL) operatörü ile verilmiş aşağıdaki karışık problemi ele alalım.

$$-\left(k(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{2.1}$$

$$u(a) = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(k(x)u'(x)\right)\big|_{x=b} = \varphi, \quad \varphi \in R^1, \tag{2.3}$$

burada

$$c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0, \quad c_2 \geq q(x) \geq 0, \quad k(x), q(x), f(x) \in L_2[a,b] \tag{2.4}$$

ve c_0, c_1, c_2 sabitlerdir.

(2.1)-(2.3) problemine Sturm-Liouville(SL) operatörü için sınır-değer problemi denir. (2.1) denklemi ve (2.2),(2.3) sınır koşullarından görüleceği gibi bu problemin klasik çözümü $C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ sınıfındandır. Pratikte ise çözüm fonksiyonu çoğu zaman bu sınıftan değildir. Yani çözüm fonksiyonunun ikinci mertebeye kadar türevlerinin sürekli olması koşulu pratik çözümler için ağır koşuldur. O zaman yukarıda açıklandığı gibi bu koşulun biraz hafifletilmesi gereği ortaya çıkmaktadır. Bu ise türevin derecesinin düşürülmesiyle mümkündür.

Şimdi ele alınan problemin zayıf çözümünün arayışı içine girişelim. Bunun için önce (2.1) denkleminin her iki yanını şimdilik keyfi olan bir $v(x)$ fonksiyonu ile çarparak $[a,b]$ aralığında integralleyelim.

$$-\int_a^b (k(x)u'(x))' v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Sol taraftaki birinci integrale kısmi integralleme formülü uygulanırsa

$$-k(b)u'(b)v(b) + k(a)u'(a)v(a) + \int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

elde edilir. $v(x)$, keyfi fonksiyon olarak seçildiğinden onun da (2.2) temel sınır koşulunu sağlaması talep edilebilir. Bunu diğer sınır koşulları ile birlikte son eşitlikte göz önüne alırsak o zaman

$$\int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \varphi v(b), \quad u(a) = 0 \qquad (2.5)$$

bulunur. (2.5) eşitliğine (2.1)-(2.3) problemine karşılık gelen integral özdeşlik, bu özdeşliği sağlayan $u(x)$ çözümüne ise ele alınan problemin zayıf çözümü denir. Şimdi bu çözümünün hangi sınıftan olduğunu araştıralım.

(2.5) eşitliğinde $v(x) \equiv u(x)$ kabul edilirse o zaman

$$\int_a^b \left[k(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)\right]dx = \int_a^b f(x)u(x)dx + \varphi u(b) \tag{2.6}$$

enerji özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin sol tarafının anlamının olabilmesi için $u(x)$'in kendisi ve birinci mertebeden türevinin karesi integrallenebilir olmalıdır. Karesi integrallenebilen fonksiyonun kendisi de integrallenebilen olduğundan son eşitliğin sağ tarafı anlamlı olacaktır. Bunlar göz önüne alınacak olunursa, zayıf çözümün aşağıdaki sınıftan olması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır:

$$\overset{0}{H^1}[a,b] = \{u(x) \in L_2[a,b] : u'(x) \in L_2[a,b], \ u(a) = 0\} .$$

Bu tipteki uzaylara Sobolev uzayları denir (Adams,1975),(Rektorys,1975),(bak EK-B). Bu çözüme yüklenen koşullara dikkat edilecek olunursa onun birinci mertebeden bile türevlerinin sürekli olması gerekmiyor, sadece karesiyle integrallenebilen olması yeterlidir. Buna göre (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\exists\, u(x) \in \overset{0}{H^1}[a,b]$,

$$\int_a^b \left(k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\right)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \varphi v(b), \quad \forall\, v(x) \in \overset{0}{H^1}[a,b] \tag{2.7}$$

(2.1) denkleminin sol tarafını ifade eden (SL) operatörü pozitif tanımlı, simetrik ve sağ taraftaki lineer fonksiyonel sınırlı olduğundan, Riesz teoremine göre (2.1)-(2.3) probleminin çözümü vardır ve tektir (bak. EK-A).

2.2. Bazı İlk Değerlendirmeler

Lemma 2.1. (2.4) koşullarının sağlandığı durumda, (2.7) probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar (Hasanov-Shores,1997).

$$|u(x_1) - u(x_2)| \le \frac{b-a}{\sqrt{2}\, c_0}\left\{\|f\|_0 + \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,|\varphi|\right\}|x_1 - x_2|^{1/2}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b] . \tag{2.8}$$

İspat. $|u(x_1)-u(x_2)|$ farkına Cauchy eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki bulunur.

$$|u(x_1)-u(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} u'(\xi)d\xi\right| \le \|u'\|_0 |x_1 - x_2|^{1/2}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]\,. \tag{2.9}$$

Öyleyse ispatı tamamlamak için $\|u'\|_0$ normunu değerlendirmek yeterlidir. Bunun için (2.6) enerji özdeşliğinden ve (2.4) koşullarından faydalanalım:

$$\|u'\|_0^2 = \int_a^b (u'(x))^2 dx \le \frac{1}{c_0}\int_a^b \left[k(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)\right]dx = \frac{1}{c_0}\left|\int_a^b f(x)u(x)dx + \varphi u(b)\right|$$
$$\le \frac{1}{c_0}\left\{\left|\int_a^b f(x)u(x)dx\right| + |\varphi|\cdot|u(b)|\right\}.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan $|u(b)|$ terimi, $u \in \overset{0}{H}{}^1[a,b]$ olduğundan dolayı

$$|u(b)| = \left|\int_a^b u'(x)dx\right| \le (b-a)^{1/2}\|u'\|_0$$

şeklinde değerlendirilebilir. O zaman sonuç olarak

$$\|u'\|_0^2 \le \frac{1}{c_0}\left\{\|f\|_0 \cdot \|u\|_0 + |\varphi|\cdot(b-a)^{1/2}\|u'\|_0\right\} \tag{2.10}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Son olarak

$$\|u\|_0 \le \frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|_0 \tag{2.11}$$

(Poincare eşitsizliği) olduğunu göstermek gerekiyor. Gerçekten

$$u(x)=\int_a^x u'(\xi)d\xi \le \left(\int_a^x (u'(\xi)^2)d\xi\right)^{1/2}\left(\int_a^x d\xi\right)^{1/2} \le (x-a)^{1/2}\|u'\|_0$$

olduğundan

$$\|u\|_0=\left(\int_a^b u^2(x)dx\right)^{1/2} \le \|u'\|_0\left(\int_a^b (x-a)dx\right)^{1/2}=\frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|_0$$

bulunur ve (2.11) eşitsizliği ispatlanmış olur. (2.11) eşitsizliği (2.10)'da yazılırsa

$$\|u'\|_0^2 \le \frac{1}{c_0}\left\{\|f\|_0\cdot\frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|_0+|\varphi|\cdot(b-a)^{1/2}\|u'\|_0\right\}=\frac{b-a}{\sqrt{2}\,c_0}\left\{\|f\|_0+\sqrt{\frac{2}{b-a}}|\varphi|\right\}\|u'\|_0 \;;$$

buradan da

$$\|u'\|_0 \le \frac{b-a}{\sqrt{2}\,c_0}\left\{\|f\|_0+\sqrt{\frac{2}{b-a}}|\varphi|\right\}. \tag{2.12}$$

olduğu kanıtlanır. Bu son eşitsizlik (2.8)'de yazılırsa ispat elde edilir. □

Sonuç 2.1. (2.1)-(2.3) sınır-değer probleminin zayıf çözümü H^1-normunda sınırlıdır.

Gerçekten $\|u\|_1^2=\|u\|_0^2+\|u'\|_0^2$ olduğundan (2.11) ve (2.12)'den aşağıdaki elde edilir.

$$\|u\|_1 \le \frac{b-a}{2c_0}\sqrt{(b-a)^2+2}\left\{\|f\|_0+\sqrt{\frac{2}{b-a}}|\varphi|\right\}. \tag{2.13}$$

Şimdi $C^0[a,b]=\{u(x)\in C[a,b]:\ u(a)=0\}$ uzayının alt uzayı olan ve λ dereceden Hölder koşulunu sağlayan $u=u(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu $C^{0,\lambda}[a,b]$, $0<\lambda\le 1$ uzayını tanımlayalım.

Tanım 2.1. Eğer $u = u(x)$, $a \le x \le b$ fonksiyonu için

$$|u(x_1) - u(x_2)| \le M|x_1 - x_2|^{\lambda}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b), \quad \lambda \in (0,1)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir sonlu $M > 0$ sabiti varsa o halde $u = u(x)$ sürekli fonksiyonuna λ dereceden Hölder sürekli fonksiyon denir (Lusternik-Sobolev,1965), (Adams,1975),(Rektorys,1975).

Bu fonksiyonların oluşturduğu $C^{0,\lambda}[a,b]$ uzayı aşağıdaki normla birlikte bir Banach uzayı tanımlar (bak. Ek-B).

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}} := \|u\|_{C^0} + \sup_{x_1,x_2 \in (a,b)} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\lambda}}, \quad x_1 \ne x_2 \ .$$

Bu tanımdan yararlanırsak Lemma 2.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2. (2.1)-(2.3) probleminin $u \in \overset{0}{H}{}^1[a,b]$ çözümü $C^{0,\lambda}[a,b]$, $\lambda = 1/2$, uzayında süreklidir.

Ek-B'deki Teorem 1'den yararlanarak (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümünün $C^{0,\lambda}[a,b]$, $0 < \lambda < 1/2$ Hölder uzayından olduğu sonucunu elde ederiz.

2.3. Sağ Tarafa Göre Süreklilik

Öncelikle sağ tarafa göre sürekliliğin tanımını yapalım.

$$Au = f$$

operatör denklemi verilsin. Burada $A : H_A \to H$ operatörü bir diferansiyel operatör (özellikle pratik problemlerde), $f \in H$ verilmiş olan sağ taraf, $u \in H_A$ ise aranan çözüm fonksiyonudur.

Tanım 2.2. Operatör denklemin $\{f_n\} \subset H$ sağ taraflar dizisine karşılık gelen çözümler dizisini $\{u_n\} \subset H_A$ ile gösterelim: $u_n = u(x, f_n)$, $n = 1,2,\ldots$. Eğer

$$f_n \xrightarrow{H} f, \quad n \to \infty \quad \text{iken} \quad u_n \xrightarrow{H_A} u = (x, f)$$

oluyorsa o zaman $u = u(x)$ çözümü f sağ tarafına göre süreklidir denir.

(2.1)-(2.3) ile verilmiş olan (SL) probleminin zayıf çözümünün sağ tarafa göre sürekliliği aşağıdaki teoremle verilir (Ladyzhenskaya,1985).

Teorem 2.1. $\{f_n(x)\}$, $L_2(a,b)$ uzayında bir dizi, $u_n(x) = u(x, f_n) \in \overset{0}{H}{}^1[a,b]$, $n = 1,2,3,\ldots$ (2.1)-(2.3) probleminin bu diziye karşılık gelen zayıf çözümler dizisi ise, o halde $\|f_n - f\|_0 \to 0$, $n \to \infty$ olduğu zaman $\|u_n - u\|_1 \to 0$ olur. Burada $u = u(x, f) \in \overset{0}{H}{}^1$ fonksiyonu, problemin, $f = f(x)$ sağ tarafına karşılık gelen zayıf çözümüdür.

İspat. $F_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $w_n(x) = u_n(x) - u(x)$, $n = 1,2,\ldots$ olarak gösterelim. O zaman $w_n = w_n(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümü olacaktır.

$$-\left(k(x)w_n'(x)\right)' + q(x)w_n(x) = F_n(x), \quad x \in (a,b),$$

$$w_n(a) = 0,$$

$$\left(k(x)w_n'(x)\right)\Big|_{x=b} = 0 .$$

O zaman (2.13) eşitsizliği bu problem için de sağlanacaktır. Yani

$$\|w_n\|_1 \le \frac{b-a}{2c_0}\sqrt{(b-a)^2 + 2}\,\|F_n\|_0 ,$$

ve buradan teoremin ispatı elde edilir. □

2.4. $H^1[a,b]$ Sobolev Uzayı İle $C^{0,\lambda}[a,b]$, $0<\lambda\le 1/2$ Hölder Uzayının İlişkisi, Gömme Teoremi

Öncelikle gömme ile ilgili aşağıdaki birkaç tanımı verelim (Adams,1975), (Ladyzhenskaya,1985).

Tanım 2.3. H_1 ve H_2 normlu lineer uzaylar,

$$I : H_1 \to H_2 , \quad Iu = u , \quad \forall\, u \in H_1$$

birim operatör olsun. Eğer

a) $H_1 \subset H_2$,
b) I birim operatörü süreklidir ,

koşulları sağlanıyorsa o zaman H_1 uzayı H_2 uzayına gömülür denir ve $H_1 \hookrightarrow H_2$ şeklinde gösterilir. Bu durumda I birim operatörüne gömme operatörü denir.

Tanıma göre $I : H_1 \to H_2$ lineer operatörü sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani,

$$\exists\, M > 0 , \quad \|Iu\|_{H_2} \le M\|u\|_{H_1} , \quad u \in H_1 \tag{2.14}$$

eşitsizliği doğrudur. Buna göre gömülme için (b) koşulu ile (2.14) birbirine denktir. Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım.

$H_1 = H^1[a,b] := W_2^1[a,b]$, $H_2 = H^0[a,b] := L_2[a,b]$ ve $I : H^1[a,b] \to H^0[a,b]$ birim operatör olsun. $H^1[a,b] \subset H^0[a,b]$ olduğu açıktır. Öte yandan $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2$ olduğundan

$$\forall\, u \in H^1[a,b], \quad \|u\|_0 \le M\|u\|_1 , \quad M = 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise yukarıdaki tanıma göre $H^1[a,b] \hookrightarrow H^0[a,b]$ gömülmesidir.

Tanım 2.4. I birim operatörü kompakt operatörse yani sınırlı kümeyi kompakt kümeye dönüştürüyorsa o zaman $H_1 \hookrightarrow H_2$ gömülmesine kompakt gömülme denir.

Teorem 2.2.(Adams,1975) $H^1[a,b]$ Sobolev uzayı $C^{0,\lambda}[a,b]$, $0<\lambda \le 1/2$ Hölder uzayına gömülür. Yani,

$$H^1[a,b] \hookrightarrow C^{0,\lambda}[a,b], \quad 0<\lambda \le \frac{1}{2} .$$

Üstelik $\lambda < 1/2$ durumunda bu gömülme kompaktır.

İspat. $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \ne x_2$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|u(x_1)-u(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u'(x)dx \right| \le \|u'\|_0 |x_1 - x_2|^{1/2} ,$$

burada ise $\|u'\|_0 \le \|u\|_1$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^{1/2}} \le \|u\|_1 \tag{2.15}$$

elde edilir. Öte yandan $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(\xi)d\xi$ olduğundan

$$|u(x)| \le |u(a)| + |b-a|^{1/2} \|u'\|_0 \tag{2.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi bu eşitsizlikteki $u(a)$ terimini değerlendirelim.

$$|u(a)| \le |u(a)-u(x)| + |u(x)| \quad \Rightarrow$$

$$|u(a)|(b-a) \le \int_a^b |u(a)-u(x)|dx + \int_a^b |u(x)|dx \tag{2.17}$$

buluruz. İntegraller için Hölder eşitsizliğine göre

$$|u(a)-u(x)| = \left|\int_a^x u'(\xi)d\xi\right| \le \int_a^x |u'(\xi)|d\xi \le \|u'\|_0 (b-a)^{1/2} \text{ ve } \int_a^b |u(x)|dx \le \|u\|_0 (b-a)^{1/2}$$

olduğundan bunları (2.17)'de yazar ve Poincare eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$|u(a)|(b-a) \le (b-a)^{3/2}\|u'\|_0 + \frac{(b-a)^{3/2}}{\sqrt{2}}\|u'\|_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}(b-a)^{3/2}\|u'\|_0 \,,$$

buradan da

$$|u(a)| \le \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\sqrt{b-a}\,\|u'\|_0 \tag{2.18}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\|u'\|_0 \le \|u\|_1$ olduğundan bunu ve (2.18)'i (2.16)'da kullanırsak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\forall x \in [a,b], \ |u(x)| \le \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\sqrt{b-a}\,\|u\|_1 \quad \Rightarrow$$

$$\|u\|_{C^0} \le M\|u\|_1 \,, \quad M = \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\sqrt{b-a} > 0 \,. \tag{2.19}$$

Böylece $H^1[a,b] \subsetneq C^0[a,b]$ gömülmesini göstermiş oluruz. Şimdi asıl ispatlamamız gereken konuya geri dönelim.

(2.15) eşitsizliği keyfi $x_1, x_2 \in [a,b]$ için doğru olduğundan bu eşitsizliğin sol tarafında maksimuma geçip buna (2.19) eşitsizliğini eklersek

$$\|u\|_{C^{0,1/2}[a,b]} \le M_1 \|u\|_1 , \quad M_1 = M + 1 > 0$$

değerlendirmesini elde ederiz. Bu ise $H^1[a,b] \subsetneq C^{0,1/2}[a,b]$ gömülmesini ifade eder. Öte yandan $\forall \lambda < 1/2$ için $C^{0,1/2}[a,b] \subsetneq C^{0,\lambda}[a,b]$ gömülmesi kompaktır (bak. Ek-B). Buna göre

$$H^1[a,b] \subsetneq C^{0,1/2}[a,b] \subsetneq C^{0,\lambda}[a,b]$$

gömülmesi doğrudur. Teorem ispatlandı. □

BÖLÜM 3

KATSAYILARA GÖRE SÜREKLİLİK ve BU SÜREKLİLİĞİN SINIFLANDIRILMASI

3.1. Katsayılara ve Sağ Tarafa Göre Sürekliliğin Temel Teoremi

İlk olarak (SL) probleminin zayıf çözümü için aşağıdaki integral gösterimi elde edelim. Bunun için önce (2.1) denklemini $[x,b]$ aralığında integralleyip (2.3) sınır koşulunu kullanalım:

$$-\int_x^b \left(k(\xi)u'(\xi)\right)' d\xi = \int_x^b [f(\xi)-q(\xi)u(\xi)]d\xi$$

$$-\varphi + k(x)u'(x) = \int_x^b [f(\xi)-q(\xi)u(\xi)]d\xi \ .$$

Buradan ise

$$u'(x) = \varphi \cdot \frac{1}{k(x)} + \frac{1}{k(x)}\int_x^b [f(\xi)-q(\xi)u(\xi)]d\xi$$

bulunur. Son eşitlik $[a,x]$ aralığında integrallenip (2.2) sınır koşulu kullanılırsa aranan eşitlik elde edilir:

$$u(x) = \varphi\int_a^x \frac{dt}{k(t)} + \int_a^x \frac{\int_t^b [f(\xi)-q(\xi)u(\xi)]d\xi}{k(t)}dt \ . \tag{3.1}$$

Teorem 3.1.(Hasanov-Shores,1997) $\{k_n(x)\}$, $\{q_n(x)\}$ ve $\{f_n(x)\}$ (2.4) koşullarını sağlayan diziler, $u_n(x) = u[x,k_n,q_n,f_n]$, $n = 1,2,\ldots$, ise (2.1)-(2.3) probleminin bu dizilere karşılık gelen zayıf çözümler dizisi olsun. Eğer

$$\frac{1}{k_n(x)} \mapsto \frac{1}{k(x)}, \quad n \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

$$q_n(x) \mapsto q(x), \quad n \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

$$f_n(x) \mapsto f(x), \quad n \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

ise o halde (2.1)-(2.3) probleminin $\{u_n\}$ zayıf çözümler dizisi $C^{0,\lambda}$-normunda $u(x) = u[x,k,q,f]$ çözümüne yakınsar, burada $0 < \lambda < 1/2$ dır.

İspat. Sonuç 2.1'den $u_n(x) = u[x,k_n,q_n,f_n] \in \overset{0}{H^1}(a,b)$, $n = 1,2,\ldots$, zayıf çözümü için aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\|u_n\|_1 \le \frac{b-a}{2c_0}\sqrt{(b-a)^2+2}\left\{\|f_n\|_0 + \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,|\varphi|\right\}. \tag{3.2}$$

Öte yandan $\{f_n\}$ dizisi, $L_2[a,b]$ uzayında f'e zayıf yakınsadığından dolayı, bu uzaydaki zayıf yakınsaklık ölçütüne göre (Lusternik-Sobolev,1965),

a) $\{\|f_n\|_0\}$ dizisi düzgün sınırlıdır,

b) $\int_a^x f_n(\tau)d\tau \to \int_a^x f(\tau)d\tau, \quad \forall x \in [a,b]$

hükümleri doğrudur. $\{\|f_n\|_0\}$ dizisinin sınırlılığı (3.2)'de kullanılırsa $\{u_n\}$ dizisinin H^1-normunda sınırlılığı elde edilir. $H^1[a,b]$'de her sınırlı dizi $C^{0,\lambda}[a,b]$'de kompakt olduğundan (bak. Teorem 2.2) $\{u_n\}$ dizisi $C^{0,\lambda}[a,b]$'de kompaktır. Dolayısıyla $\{u_m\} \subset \{u_n\}$ dizisi $C^{0,\lambda}[a,b]$-normunda $u \in C^{0,\lambda}[a,b]$ fonksiyonuna yakınsar.

Şimdi verilen $k(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$ limit fonksiyonları için (2.1)-(2.3) sınır-değer probleminin zayıf çözümünün $u(x)$ limit fonksiyonu olduğunu ispatlayalım.

Gerçekten de, integral gösterimden aşağıdaki elde edilir:

$$u_m(x) = \varphi \int_a^x \frac{dt}{k_m(t)} + \int_a^x \frac{P_m(t)}{k_m(t)} dt \ , \tag{3.3}$$

burada

$$P_m(t) = \int_t^b [f_m(\xi) - q_m(\xi) u_m(\xi)] d\xi \, . \tag{3.4}$$

İlk önce $P_m(t) \to P(t)$, $\forall t \in [a,b]$, $m \to \infty$ yakınsamasını ispat edelim. $L_2[a,b]$'de $f_m(t) \mapsto f(t)$ zayıf yakınsamasından ve zayıf yakınsama ölçütlerinden

$$\int_t^b f_m(\xi) d\xi \to \int_t^b f(\xi) d\xi \, , \quad \forall t \in [a,b], \ m \to \infty$$

olduğunu elde ederiz (Lusternik-Sobolev,1965) ,(Brown-Page,1983). (3.4)'ün sağ tarafındaki ikinci terimi ele alalım. $L_2[a,b]$'de $q_m(\xi) \mapsto q(\xi)$ zayıf yakınsamasından ve $C^{0,\lambda}$-normundaki $u_m(x) \to u(x)$ yakınsamasından $L_2[a,b]$'de $q_m(\xi) u_m(\xi) \mapsto q(\xi) u(\xi)$ yakınsamasını elde ederiz ve dolayısıyla

$$P_m(t) = \int_t^b [f_m(\xi) - q_m(\xi) u_m(\xi)] d\xi \to P(t) = \int_t^b [f(\xi) - q(\xi) u(\xi)] d\xi \, , \quad t \in [a,b], \ m \to \infty$$

olur. Şimdi

$$\int_a^x \frac{P_m(t)}{k_m(t)} dt \to \int_a^x \frac{P(t)}{k(t)} dt \, , \quad x \in [a,b], \quad m \to \infty$$

yakınsamasını ispat edelim.

$$\left| \int_a^x \frac{P_m(t)}{k_m(t)} dt - \int_a^x \frac{P(t)}{k(t)} dt \right| \le \left| \int_a^x \frac{P_m(t) - P(t)}{k_m(t)} dt \right| + \left| \int_a^x \left[\frac{1}{k_m(t)} - \frac{1}{k(t)} \right] P(t) dt \right| \le$$

$$\frac{1}{c_0}\left|\int_a^x [P_m(t)-P(t)]dt\right| + \left|\int_a^x \left[\frac{1}{k_m(t)}-\frac{1}{k(t)}\right]P(t)dt\right|$$

elde edilir. $\{P_m(t)\}$ dizisinin yakınsaklığından sağ taraftaki ilk terim sıfıra yakınsar ve $L_2[a,b]$'de zayıf yakınsama ölçütüne göre ikinci terimin de sıfıra yaklaştığı sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_a^x \frac{dt}{k_m(t)} \to \int_a^x \frac{dt}{k(t)}, \quad \int_a^x \frac{P_m(t)}{k_m(t)}dt \to \int_a^x \frac{P(t)}{k(t)}dt, \quad \forall x \in [a,b], \quad m \to \infty$$

yakınsamalarından (3.3) ile gösterilen $u_m(x)$ fonksiyonlar dizisinin $\forall x \in [a,b]$ için (3.1) ile gösterilen $u(x)$ çözümüne yakınsadığı gösterilmiş olur.

(2.1)-(2.3) problemi tek çözüme sahip olduğundan tüm $\{u_n(x)\}$ dizileri $\forall x \in [a,b]$ için (2.1)-(2.3) probleminin $u(x)$ çözümüne yakınsar. Bununla ispat tamamlanır. □

Yukarıdaki teorem ve kompakt gömülmeden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. Teorem 3.1'in koşulları sağlandığında $H^1[a,b]$'de $u_n(x) \mapsto u(x)$ $n \to \infty$, zayıf yakınsaması geçerlidir.

3.2. (SL) Operatörünün k(x) ve q(x) Katsayılarının Farklı Süreklilik Karakterleri İle İlgili Karşı Örnekler

$k(x)$ ve $q(x)$ katsayılarının farklı yakınsaklık durumlarında onlara bağlı olarak, özellikle türev altındaki $k(x)$ baş katsayısına göre, (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümünün yakınsaklığı da farklılık gösterir.

Şimdi bu konu ile alakalı olarak öncelikle aşağıdaki karşı örneği ele alalım.

Örnek 1.(Murat,1971) (2.1) denkleminde $q(x) \equiv k(x)$, $f(x) \equiv 0$ olarak kabul edelim. Buna göre problem aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{cases} -\left(k(x)u'(x)\right)' + k(x)u(x) = 0, \quad x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \\ \left(k(x)u'(x)\right)\big|_{x=b} = \varphi, \end{cases} \tag{3.5}$$

Bu problem için

$$k_n \mapsto k, \quad n \to \infty, \quad (L_2(a,b)\text{'de zayıf yakınsama}) \tag{3.6}$$

yakınsamasının (3.5) probleminin çözümler dizisinin yakınsaklığı için yeterli olamayacağını gösterelim.

(3.6) koşulu sağlansın. O zaman genel olarak

$$\frac{1}{k_n} \not\mapsto \frac{1}{k}, \quad n \to \infty,$$

yani $\{1/k_n\}$ dizisi $\{1/k\}$dizisine yakınsamayabilir. Burada $k = k(x)$ fonksiyonu (3.6) ifadesindeki limit fonksiyonudur. $\{k_n^{-1}\}$ dizisinin de zayıf limitinin varolduğunu kabul edelim ve bu limiti $\tilde{k}^{-1}$ ile gösterelim:

$$\frac{1}{k_n} \mapsto \frac{1}{\tilde{k}}, \quad n \to \infty, \quad k \neq \tilde{k} \ (L_2(a,b)\text{'de zayıf yakınsama}). \tag{3.7}$$

(3.5) probleminin $u = u[x;k]$ çözümü H^1-normunda düzgün sınırlı olduğundan $u_n(x) = u[x;k_n]$ fonksiyonları da aynı normda sınırlıdır ($f(x) \equiv 0$).

$$\|u_n\|_1 \leq \frac{b-a}{2c_0}\sqrt{(b-a)^2+2}\left\{\sqrt{\frac{2}{b-a}}|\varphi|\right\}. \tag{3.8}$$

H^1 uzayında sınırlı dizinin zayıf yakınsak alt dizisi vardır. Bu iddianın doğruluğunu genel durum için aşağıdaki teoremle verelim (Lusternik-Sobolev,1965), (Adams,1975), (Brown-Page,1983).

Teorem 3.2. Hilbert uzayında sınırlı küme zayıf yakınsaklık anlamında prekompaktır (yani zayıf prekompaktır).

İspat. H Hilbert uzayı $H_1 \subset H$ sınırlı küme olsun. Keyfi $\{g_k\} \subset H_1$ dizisinin zayıf yakınsak alt dizisinin varlığını gösterelim. Gerçekten de,

L uzayı, $\{g_k\}$ dizisi ile üretilen alt uzay olsun: $L = \langle \{g_k\} \rangle$. H_1 kümesi sınırlı olduğundan $\forall k$ için $\|g_k\| < C$ 'dır. Şimdi skaler çarpımlardan oluşan $\{(g_1, g_k)\}$ gerçel sayılar dizisini ele alalım. Cauchy eşitsizliğine göre

$$|(g_1, g_k)| \leq \|g_1\| \|g_k\| \leq C^2$$

olduğundan dolayı $\{(g_1, g_k)\}$ sayısal dizisi sınırlıdır. R 'de sınırlı dizi prekompakt olduğundan bu dizinin yakınsak alt dizisi vardır: $\{g_{1k}\} \subset \{g_k\}$ ve $\{(g_1, g_{1k})\}$ sayı dizisi yakınsaktır.

Şimdi $\{(g_2, g_{1k})\}$ dizisini ele alalım. Benzer şekilde

$$|(g_2, g_{1k})| \leq \|g_2\| \|g_{1k}\| \leq C^2$$

olduğundan bu dizi de sınırlıdır ve yakınsak alt dizisi vardır: $\{g_{2k}\} \subset \{g_{1k}\} \subset \{g_k\}$ ve $\{(g_2, g_{2k})\}$ sayı dizisi yakınsaktır. Bu işlemleri sonsuz şekilde devam ettirirsek m. adımda

$$\{g_{mk}\}_k \subset \{g_{m-1k}\}_k \subset \cdots \subset \{g_{2k}\} \subset \{g_{1k}\} \subset \{g_k\}$$

dizisini elde ederiz ve $\{(g_m, g_{mk})\}_k$ sayı dizisi yakınsak olur.

Şimdi her bir $\{g_{mk}\}_k$, $m=1,2,\ldots$ dizisinin birer g_{kk}, $k=1,2,\ldots$ köşegen elemanını seçerek $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{kk}, \ldots$ dizisini ele alalım. $\forall g_r \in \{g_k\}$ için $k>r$ ise $g_{kk} \in \{g_{rk}\}_k$ dır. Yani $\{(g_r, g_{kk})\}_k \subset \{(g_r, g_{rk})\}_k$ olacaktır $(k>r)$. $\{(g_r, g_{rk})\}_k$ dizisi yakınsak olduğundan $\{(g_r, g_{kk})\}_k$ dizisi de yakınsaktır $(k>r)$.

Öte yandan $\forall x \in L = \langle g_k \rangle$ için $x = \lambda_1 g_{k1} + \lambda_2 g_{k2} + \ldots + \lambda_n g_{kn}$ olduğundan $\{(x, g_{kk})\}$ dizisi için,

$$\{(x, g_{kk})\} = \{\lambda_1 (g_{k1}, g_{kk}) + \lambda_2 (g_{k2}, g_{kk}) + \cdots + \lambda_n (g_{kn}, g_{kk})\}$$

dizisi, yakınsak dizilerin lineer kombinasyonu olduğundan dolayı yakınsaktır. Yani $\{(x, g_{kk})\}$ dizisi $\forall x \in L$ için yakınsaktır.

Diğer yandan $H = L \oplus L^{\perp}$ olduğundan

$$\forall h \in H \text{ için } h = x + y, \quad x \in L, \quad y \in L^{\perp}, \quad (x, y) = 0$$

eşitlikleri doğrudur. O zaman $\{(h, g_{kk})\}$ dizisi için

$$\forall h \in H, \quad \{(h, g_{kk})\} = \{(x+y, g_{kk})\} = \{(x, g_{kk}) + (y, g_{kk})\}$$

elde edilir. Tüm k-lar için $(y, g_{kk}) = 0$ olacağından,

$$\{(h, g_{kk})\} = \{(x, g_{kk})\}$$

bulunur. Son eşitlikte sağ taraftaki dizi $\forall x \in L$ için yakınsak olduğundan $\forall h \in H$ için $\{(h, g_{kk})\}$ dizisi de yakınsaktır. Yani $\{g_{kk}\}$ dizisi zayıf yakınsaktır. Teorem ispatlandı. □

Şimdi tekrar ele aldığımız karşı örneğe dönecek olursak, $\{u_n\}$ dizisi H^1-normunda sınırlı olduğundan Teorem 3.2'ye göre o zaman onun zayıf yakınsak alt dizisi vardır.

$\{u_m\} \subset \{u_n\}$, $u_m \mapsto u$, $m \to \infty$. ($H^1[a,b]$'de zayıf yakınsama)

Bunu (3.5) denkleminde göz önüne almak için onu

$$(k_m(x)u_m'(x))' = k_m(x)u_m(x) \tag{3.9}$$

şeklinde yazalım. $k_m \in L_2[a,b]$, $k_m \mapsto k$ ve $u_m \in H^1[a,b] \subset L_2[a,b]$, $u_m \mapsto u$ olduğundan dolayı $\{k_m\}$ ve $\{u_m\}$ dizileri L_2-normunda sınırlıdır. Buradan ise $\{k_m(x)u_m(x)\}$ dizisinin L_2-normunda sınırlı olması elde edilir. Öyleyse yine Teorem 3.2'ye göre bu diziden L_2'de zayıf yakınsak alt dizi seçebiliriz:

$\{k_l(x)u_l(x)\} \subset \{k_m(x)u_m(x)\}$.

O zaman (3.9) eşitliğine göre $\{(k_m(x)u_m'(x))'\}$ dizisi $L_2[a,b]$'de zayıf yakınsar. Türevi $L_2[a,b]$'de zayıf yakınsayan dizinin kendisi $H^1[a,b]$'de zayıf yakınsar, dolaysıyla $\{k_m(x)u_m'(x)\}$ dizisi $H^1[a,b]$'de zayıf yakınsar. Sobolev'in gömme teoremine göre [bak. EK-B] ise H^1'de zayıf yakınsayan dizi L_2'de güçlü yakınsar. Yani $\{k_m(x)u_m'(x)\}$ dizisi $L_2[a,b]$'de güçlü yakınsar. O zaman,

$k_l(x)u_l'(x) \to \alpha_0(x) \in L_2[a,b]$, $l \to \infty$ ($L_2[a,b]$'de güçlü yakınsama).

Şimdi (3.5) probleminde $\{k_l\},\{u_l\}$ dizilerine karşılık gelen

$$-(k_l(x)u_l'(x))' + k_l(x)u_l(x) = 0$$

denkleminde zayıf limite geçersek o zaman,

$$-\frac{d}{dx}(\alpha_0(x)) + k(x)u(x) = 0, \quad x \in (a,b) \tag{3.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{k_l(x)} \cdot (k_l(x)u_l'(x)) \mapsto \frac{1}{\tilde{k}(x)} \cdot \alpha_0(x), \quad l \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

$$\frac{1}{k_l(x)} \cdot (k_l(x)u_l'(x)) = u_l'(x) \mapsto u'(x), \quad l \to \infty \qquad (H^1[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

yakınsamaları doğrudur. Sol taraflar eşit olduğundan sağ taraflar da eşit olmak zorundadır. Buna göre,

$$\frac{1}{\tilde{k}(x)} \cdot \alpha_0(x) = u'(x)$$

ve buradan da

$$\alpha_0(x) = \tilde{k}(x)u'(x)$$

elde edilir. Bunu (3.10) eşitliğinde yazarsak sonuç olarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$-(\tilde{k}(x)u'(x)) + k(x)u(x) = 0, \quad \tilde{k}(x) \neq k(x) \ . \tag{3.11}$$

(3.11) ile (3.5) denklemlerinin birbirinden farklı oldukları açıkça görülmektedir. Bu ise (3.6) koşulunun sağlanması durumunda $u_n \not\mapsto u$, $n \to \infty$, olması anlamına geliyor. Yani $\{k_n\}$ katsayı dizisine karşılık gelen $\{u_n\}$ zayıf çözümler dizisi ele alınan problemin $u = u(x)$ çözümüne $L_2[a,b]$'deki zayıf yakınsama anlamında bile yakınsamıyor.

Bir zamanlar bu durum ters veya optimal kontrol problemlerinin düzgün formüle edilmeyen problemler olmasının bir sonucu olarak açıklanmıştır (Murat,1971). Halbuki Teorem 3.1'de $u_n \mapsto u$ için $L_2[a,b]$'de $k_n \mapsto k$ (zayıf) yakınsaması değil $1/k_n \mapsto 1/k$ (zayıf) yakınsaması gerekmektedir. (3.5) denkleminde ise $k(x) \equiv q(x)$ ve $\{1/k_n\}$ ve $\{k_n\}$ dizilerinin zayıf limitleri de birbirinden farklı olduğundan dolayı limit denkleminde $k(x) \neq \widetilde{k}(x)$ olarak elde edilmiştir.

Şimdi $L_2[a,b]$'de $\dfrac{1}{k_n} \mapsto \dfrac{1}{k}$ (zayıf), $k_n \mapsto \widetilde{k}$ (zayıf) olacak şekilde ve yukarıdaki durumu açıklayan, ayrıca optimal kontrol teorisinde önemli uygulamaları olan aşağıdaki diğer örnekleri ele alalım (Banks-Kunisch,1989), (Murat,1971).

Örnek 2. Aşağıdaki sınır-değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} -\left(k(x)u'(x)\right)' = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \quad k(1)u'(1) = 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

ve bu problemin $u(1) = 1$ ek koşulunu sağlayan $u = u[x;k]$ çözümünü arayalım. Öncelikle

$$k_n(x) = \left(1 + \frac{2n}{2n+1}\cos 2n\pi x\right)^{-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.13}$$

katsayılar dizisinin $L_2(0,1)$ uzayında zayıf yakınsamadığını fakat bunlara karşılık gelen çözüm fonksiyonlarının $C[0,1]$'de yakınsadığını gösterelim. Bunun için (3.12) denklemini integralleyerek sınır koşullarını dikkate alalım. Buna göre

$$u'(x) = \frac{1}{k(x)},$$

buradan da

$$u_n(x) = x + \frac{1}{(2n+1)\pi}\sin 2n\pi x \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) fonksiyonlarının ek koşulu sağladığı ve $u_n(x) \to u(x) = x$, $n \to \infty$ yakınsamasının doğruluğu açıktır. Bununla birlikte (3.13) dizisi ıraksaktır.

Bu durum da yazarlar tarafından optimal kontrol problemlerinin düzgün formüle edilmemiş problemler olduğunun bir göstergesi olarak açıklanmıştır (Banks-Kunisch,1989). Halbuki zayıf yakınsama ölçütüne göre (Lusternik-Sobolev,1965)

$$\int_0^x \frac{d\xi}{k_n(\xi)} = \int_0^x \left[1 + \frac{2n}{2n+1}\cos 2n\pi\xi\right] d\xi = x + \frac{\sin 2n\pi x}{(2n+1)\pi} \to x = \int_0^x d\xi, \quad n \to \infty$$

ve $\forall x \in (0,1)$ için $\|k_n\|_0$ düzgün sınırlı olduğundan $(k(x))^{-1} = 1$ fonksiyonu $L_2(0,1)$ uzayında $\{(k_n(x))^{-1}\}$ dizisinin zayıf limitidir. O zaman Teorem 3.1'e göre $u[x;k] = x$ aranan çözüm fonksiyonudur. Gerçekten (3.12)'de $k(x) = 1$, $u(x) = x$ yazılırsa denklemin ve sınır koşullarının sağlandığı görülür.

Örnek 3. Örnek 1'de ele aldığımız genel durumu ($k(x) \equiv q(x)$) katsayıları özel olarak seçerek bir daha ele alalım (Banks-Kunisch,1989), (Murat,1971).

$$-(k(x)u'(x))' + k(x)u(x) = 0, \quad x \in (0,1) \tag{3.15}$$

$$u(0) = 1 \tag{3.16}$$

$$k(1)u'(1) = \frac{4}{3} \tag{3.17}$$

sınır değer probleminin $x = 1$ noktasında

$$u(x,k)_{x=1} = 2 \tag{3.18}$$

ek koşulunu sağlayan $u = u[x;k]$ çözümünü doğuran bir $k = k(x)$ katsayısının bulunması problemini ele alalım. $k(x) \in K = \{k(x) \in L_2[0,1] : c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0\}$ olduğunu varsayalım ve aşağıdaki katsayılar dizisini tanımlayalım.

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2}, & \frac{m}{n} < x \leq \frac{2m+1}{2n} \\ 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2}, & \frac{2m+1}{2n} < x \leq \frac{m+1}{n} \end{cases} \tag{3.19}$$

$m = 0,1,2,\ldots,n-1$. Böylelikle her bir $k_n(x)$, $n \in N^+$ fonksiyonu için $[0,1]$ aralığı $2n$ -tane parçaya bölünmüş olur. Bu fonksiyonlar için

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k_n(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Dolayısıyla $k_n(x) \in K$, $c_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, c_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Şimdi aşağıdaki yakınsamaların doğruluğunu ispatlayalım.

$$k_n(x) \mapsto q_0(x) = 1, \quad n \to \infty \qquad (L_2[0,1]\text{'de zayıf yakınsama}) \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{k_n(x)} \mapsto k_0^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^{-1}, \quad n \to \infty \qquad (L_2[0,1]\text{'de zayıf yakınsama}) \tag{3.21}$$

(3.20) ifadesinin doğruluğunu ispatlayalım (Benzer şekilde (3.21)'de ispatlanabilir).

$H^0[a,b] \equiv L_2[a,b]$ uzayında zayıf yakınsaklık ölçütüne göre

a) $\{\|k_n\|_0\}$ dizisi sınırlıdır

b) $\int_a^x k_n(\xi)d\xi \to \int_a^x k(\xi)d\xi$, $n \to \infty$, $x \in [a,b]$

koşulları zayıf yakınsaklık için gerek ve yeter koşullardır. O zaman (3.20)'nin ispatı için bunları ispatlamak yeterlidir.

(a) şıkkının doğruluğu açıktır. Şimdi (b) şıkkını ispatlayalım. Bunun için önce aşağıdaki integralin değerini hesaplayalım:

$$\int_0^x k_n(\xi)d\xi = \sum_{m=0}^{n-1}\left\{ \int_{I_1(m)} \left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^{1/2}\right]dx + \int_{I_2(m)} \left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^{1/2}\right]dx \right\}$$

burada $I_1(m)=\left[\frac{m}{n},\frac{2m+1}{2n}\right]$, $I_2(m)=\left[\frac{2m+1}{2n},\frac{m+1}{n}\right]$'dır. O zaman

$$\int_0^x k_n(\xi)d\xi = \sum_{m=0}^{n-1}\left\{ \int_{I_1(m)} dx + \int_{I_2(m)} dx \right\} + \sum_{m=0}^{n-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\int_{I_2(m)} \sqrt{3-x^2}\,dx - \int_{I_1(m)} \sqrt{3-x^2}\,dx \right]\right\}$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte $t = x - \frac{1}{2n}$ dönüşümü yapılarak $I_2(m)$ bölgesi $I_1(m)$ bölgesine taşınır. Ayrıca $\sum_{m=0}^{n-1}\left\{ \int_{I_1(m)} dx + \int_{I_2(m)} dx \right\} = \int_0^x d\xi$ olduğundan bütün bunları göz önüne alıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\int_0^x k_n(\xi)d\xi = \int_0^x d\xi + \sum_{m=0}^{n-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{m/n}^{(2m+1)/2n} \left(\sqrt{3-\left(x-\frac{1}{2n}\right)^2} - \sqrt{3-x^2} \right) dx \right\} = \int_0^x d\xi + \frac{1}{4\sqrt{6}n^2} \times$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{I_1(m)} \frac{4nx-1}{\sqrt{3-\left(x-\frac{1}{2n}\right)^2}+\sqrt{3-x^2}}\,dx$$

elde edilir. Şimdi ispata geçersek

$$\left|\int_0^x k_n(\xi)d\xi - \int_0^x d\xi\right| \le \frac{1}{4\sqrt{6}n^2}\sum_{m=0}^{n-1}\left|\int_{I_1(m)} \frac{4nx-1}{\sqrt{3-\left(x-\frac{1}{2n}\right)^2}+\sqrt{3-x^2}}dx\right|$$

$$\le \frac{1}{4\sqrt{6}n}\sum_{m=0}^{n-1}\left|\int_{I_1(m)} \frac{4x-1/n}{\sqrt{3-\left(x-\frac{1}{2n}\right)^2}+\sqrt{3-x^2}}dx\right|$$

bulunur. Bu son eşitsizlikte toplam altındaki ifade sınırlıdır. O zaman bu eşitsizliğin sağ tarafı $n \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır. Yani

$$\left|\int_0^x k_n(\xi)d\xi - \int_0^x d\xi\right| \to 0, \quad n \to \infty .$$

Böylelikle (b) şıkkı, dolayısıyla da (3.20) ispatlandı. □

(3.15) denkleminde (3.20) ve (3.21)'deki limit fonksiyonları yazılırsa o zaman katsayılara göre yakınsaklık teoremine göre (Teorem 3.1), bu limit fonksiyonları aşağıdaki problemi sağlamak zorundadır.

$$\begin{aligned}
&-\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{6}\right)u'\right)' + u = 0, \quad x \in (0,1), \\
&u(0) = 1, \\
&k_0(1)u'(1) = \frac{4}{3}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = 1 + x^2 \tag{3.23}$$

fonksiyonudur ve bu fonksiyon için (3.18) ek koşulu sağlanır.

Teorem 3.1'in doğal sonucu olarak elde edilen ve (3.23) ile verilen $u[x;k;q]=\lim_{n\to\infty} u[x;k_n;q_n]$ $(k(x)\equiv q(x),\ k_n(x)\neq q_n(x))$ kesin çözümünü (3.15) denkleminde yazarsak

$$-\left(k(x)\left(1+x^2\right)'\right)'+(1+x^2)k(x)=0 \tag{3.24}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi $k(x)$'e göre çözersek

$$\widetilde{k}(x)=\widetilde{C}\sqrt{x}e^{x^2/4} \tag{3.25}$$

fonksiyonunu elde ederiz. Nitekim görülüyor ki (3.21) ile tanımlı $k_0(x)$ ve (3.25) ile tanımlı $\widetilde{k}(x)$ fonksiyonları birbirinden farklıdırlar.

Bu durum da optimal kontrol veya en küçük kareler problemlerinin çözümünün olmaması olarak yorumlanmaktadır (Lions,1970), (Banks-Kunisch,1989), (Murat,1971). Bununla birlikte elde ettiğimiz bu çelişki

$$-\left(k(x)u'\right)'+q(x)u(x)=f(x)$$

denkleminde

$$q(x)\equiv k(x),\quad x\in(a,b)$$

özdeşliğinin sonucu olarak ortaya çıkıyor. Zira (3.19) fonksiyonlar dizisi öylesine seçilmiştir ki $L_2[0,1]$'deki zayıf limit anlamında

$$k_n(x)\mapsto 1 \text{ ve } \frac{1}{k_n(x)}\mapsto\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^{-1},\quad n\to\infty$$

koşulları sağlanıyor ve doğal olarak zayıf limitler birbirinden farklıdırlar. Bunun da sonucu olarak (3.22) denkleminde farklı katsayılar elde ediliyor.

3.3. u(x) Çözüm Fonksiyonunun Katsayılara Göre Sürekliliğinin Sınıflandırılması

Yukarıda ele aldığımız karşı örnekler sınır-değer probleminin çözümünün sürekliliğinin farklı katsayılara göre farklı yapıya sahip olduğunu göstermek açısından çok önemlidir. Bunun da doğal sonucu olarak katsayıların farklı süreklilik durumları için çözüm fonksiyonunun sürekliliğinin sınıflandırılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Ele alınan problemde $k(x)$ ve $q(x)$ katsayıları $L_2[a,b] = H^0[a,b]$ uzayından, $u(x)$ çözüm fonksiyonu ise $\overset{0}{H}{}^1[a,b]$ Sobolev uzayından olduğundan ve bu uzaylarda hem zayıf hem de güçlü yakınsaklık söz konusu olduğundan, sınıflandırmayı dört ana kısımda toplamak doğaldır. Bunlar,

1) Zayıf - Zayıf
2) Zayıf - Güçlü
3) Güçlü - Zayıf
4) Güçlü - Güçlü .

Buradaki yakınsamaların birincisi katsayı dizisinin, ikincisi ise katsayılara karşılık gelen çözüm fonksiyonları dizisinin yakınsamasını ifade etmektedir. Bu sınıflandırma dışında literatürde G-yakınsama olarak isimlendirilen ve zayıf yakınsamadan daha da zayıf olan yakınsama tanımı da mevcuttur (Spagnolo,1968), (Jhikov-Kozlov-Oleinik-Ngoan,1979,1979b), (Shaposhnikova,1984). Fakat bu ve bu gibi soyut yakınsama kavramları pratik problemlerin çözümünde hemen hemen kullanılmadığı için burada da ele alınmamıştır (Canon-Duchateau,1973), (Colton-Ewing-Rundell,1990), (Hasanov,1988,1995).

Şimdi aşağıdaki tanımı vererek sırayla bu yakınsama durumlarının inceleyelim.

Tanım 3.1. $\{k_n\} \subset L_2[a,b]$ ve $\{u_n\} \subset \overset{0}{H}{}^1[a,b]$ dizileri için aşağıdaki koşul sağlansın.

$k_n \to k, \quad n \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de}) \qquad \Rightarrow \qquad u_n = [x;k_n] \to u = [x;k], \quad n \to \infty$

($\overset{0}{H^1}[a,b]$'de).

a) $\{k_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizilerinin her ikisinin de zayıf yakınsamaları durumunda bu yakınsamaya "zayıf–zayıf",

b) $\{k_n\}$'in zayıf, $\{u_n\}$'in ise güçlü yakınsaması durumunda bu yakınsamaya "zayıf–güçlü",

c) $\{k_n\}$'in güçlü, $\{u_n\}$'in ise zayıf yakınsaması durumunda bu yakınsamaya "güçlü–zayıf",

d) $\{k_n\}$ ve $\{u_n\}$'in her ikisinin de güçlü yakınsaları durumunda ise bu yakınsamaya "güçlü–güçlü" yakınsama denir.

Benzer tanım, $q(x)$ katsayısı için de geçerlidir. Her bir durumu incelemeden önce aşağıdaki lemmaların verilmesi yerinde olacaktır

Lemma 3.1. H, bir Hilbert uzayı $\{u_n\} \subset H$ olsun. Eğer $u_n \mapsto u$, $n \to \infty$ zayıf yakınsamasıyla beraber $\|u_n\|_H \to \|u\|_H$, $n \to \infty$ yakınsaması da sağlanıyorsa o zaman $\{u_n\}$ dizisi u'ya H uzayında güçlü yakınsar. Yani, $\|u_n - u\|_H \to 0$, $n \to \infty$ yakınsaması doğrudur (Lusternik-Sobolev,1965).

İspat. Teoremin koşuluna göre,

$$\forall v \in H, \ (u_n, v) \to (u, v), \quad \|u_n\| \to \|u\|, \quad n \to \infty,$$

yakınsamaları doğrudur. O zaman

$$\|u_n - u\|^2 = (u_n - u, u_n - u) = (u_n, u_n) + (u, u) - 2(u_n, u) = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2(u_n, u)$$

eşitliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ durumunda sıfıra yakınsar. Teorem ispatlandı. □

Lemma 3.2. (Hasanov-Shores,1997) $\{k_n\} \subset L_2[a,b]$ dizisi (2.4) koşullarını sağlayan bir dizi ve L_2-normunda $k_n \to k$, $n \to \infty$ olsun. O zaman L_2'de zayıf yakınsama anlamında $\frac{1}{k_n} \mapsto \frac{1}{k}$, $n \to \infty$ olur.

İspat. Gerçekten $k_n > c_0$, $k > c_0$ olduğundan $\forall p(x) \in L_2[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\left| \int_a^b \left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k} \right) p(x) dx \right| \le \frac{1}{c_0^2} \|k_n - k\|_0 \|p\|_0 . \tag{3.26}$$

Koşula göre (3.26) eşitsizliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ durumunda sıfıra yakınsar. Bu ise $\left\{ \frac{1}{k_n} \right\}$ dizisinin $L_2[a,b]$ uzayında $\frac{1}{k}$'a zayıf yakınsaması demektir. □

Şimdi (a) ve (b) durumlarını ele alalım. Burada $\{k_n\}$ dizisinin zayıf yakınsaklığı söz konusudur. Katsayılara göre sürekliliğin temel teoremine göre (Teorem 3.1) $\{k_n\}$ dizisinin zayıf yakınsaması, $\{u_n\}$ dizisinin zayıf veya güçlü yakınsaması için yeterli değildir. Öyleyse bu koşulun güçlendirilmesi gerekmektedir. Eğer $\{k_n\}$ dizisinin Lemma 3.1'in koşullarını sağladığını kabul edersek o zaman Lemma 3.2 ve Sonuç 3.1'e göre $\{u[x;k_n]\}$ dizisi $\overset{0}{H}{}^1[a,b]$ uzayında $u[x;k]$ çözümüne zayıf yakınsayacaktır. Yani tanım 3.1'deki "zayıf-zayıf" yakınsaması bu durumda geçerli olacaktır. "Zayıf-güçlü" yakınsaması içinse $\{u[x;k_n]\}$ dizisinin güçlü yakınsaması gerekmektedir. Bunun içinse bu dizi için Lemma 3.1'in koşulundaki ikinci yakınsamanın sağlanmasının gerekliliği açıktır.

Benzer durum $\{q_n\}$ dizisi için de düşünülebilir fakat burada $u_n = u[x;q_n]$, $n = 1,2,\ldots$ dizisini zayıf yakınsaklığı için $\{q_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak olması yeterli olacaktır. Aşağıdaki probleme bakalım (Gelfand-Levitan,1955).

$$\begin{cases} -u''(x)+q(x)u(x)=f(x), & x\in(a,b) \\ u(a)=0, \quad u'(b)=\varphi \end{cases}$$

Bu problem, ele aldığımız (SL) probleminin $k(x)\equiv 1$ için bir özel durumudur. O zaman Sonuç 3.1'e göre $\{q_n\}$ dizisi için

$q_n \mapsto q$, $n\to\infty$ (L_2 'de zayıf yakınsama) $\Rightarrow$ $u[x;q_n]\mapsto u[x;q]$, $n\to\infty$ ($\overset{0}{H}{}^1$ 'de zayıf yakınsama)

"zayıf-zayıf"yakınsaması doğrudur.

(c) ve (d) durumları aslında ilk iki durumun koşullarının güçlendirilmesinden başka bir şey değildir. Bu durumlarda $\{u[x;k_n]\}$ dizisinin zayıf ve güçlü yakınsaklıklarının nasıl olacağını zaten yukarıda ele almıştık.

Böylece bu doğal sınıflandırma sonucu sınır-değer problemlerinin $u=u[x;k;q]$ çözümünün $k(x)$ ve $q(x)$ katsayılarına göre sürekliliğinin temin edilebilmesinin azami koşulları elde edilebilir. Ayrıca farklı katsayılara göre bu sürekliliğin farklı yapılarının olduğu görülür. Bu ise ters ve optimal kontrol problemlerinde yardımcı fonksiyonellerin en küçük değeri ile ilgili problemlerin çözümünde oldukça önemlidir. Şöyle ki, bu fonksiyonellerin sürekliliği, doğrudan $u[x;k]$ ilişkisinin yukarıdaki tanımlardan herhangi birisi anlamındaki sürekliliğinin sonucu olarak elde edilir (Lions,1970), (Duvant-Lions,1976), (Tikhonov-Arsenin,1977), (Beck-Blackwell-Clair,1985), (Hasanov,1988,1995,19971998), (Inverse Problems in PDE,1990), (Isakov,1998), (Badia,1999).

BÖLÜM 4

KATSAYILARA GÖRE SÜREKLİLİĞİN OPTİMAL KONTROL ve TERS PROBLEMLERE UYGULANMASI

4.1. $k = k(x)$ Katsayısının Aranması İle İlgili Ters Problemin Formülasyonu

Ters problemler günümüzde uygulamalı matematiğin ve bilimin ilgi duyduğu en önemli konulardan biridir (Adams,1975), (Payne,1975), (Tikhonov-Arsenin,1977), (Sylvester-Uhlmann,1986), (Pilant-Rundell,1988), (Lowe-Rundell,1994,1995), (Isakov,1998). Bu problemler içinde çeşitli sınıfların yanı sıra diferansiyel denklemin sağ tarafının ve katsayılarının aranması ile ilgili olarak iki büyük sınıf mevcuttur. Bunların içinde ters katsayı problemleri önemli bir yer tutmaktadır (Canon-Duchateau,1973), (Duchateau-Rundell,1985), (Banks-Kunisch,1989), (Duchateau,1995). Diğer ters problemler içinde, hem pratik hem de matematiksel açıdan katsayıların (özellikle de baş katsayısının) aranması ile ilgili ters problemlerin en önemli ve en zor oldukları fikri yaygındır. Bunun da nedeni, eğer Tikhonov'un quazi-çözüm teorisi söz konusu ise, önce katsayılara göre sürekliliğin belirli normlarda temin edilmesinin gerekliliğidir (Canon-Duchateau,1973), (Hasanov,1997), (Tikhonov-Arsenin,1977). Katsayıların aranması ile ilgili ters problemlerin temel özellikleri aşağıda ele alınan bir boyutlu model üzerinde gösterilecektir.

Şimdi $k = k(x)$ katsayısının aranması ile ilgili aşağıda (SL) operatörü ile verilmiş karışık problemi ele alalım.

$$-\left(k(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{4.1}$$

$$u(a) = 0, \tag{4.2}$$

$$\left(k(x)u'(x)\right)\Big|_{x=b} = \varphi, \quad \varphi \in R^1 . \tag{4.3}$$

(4.1) denkleminde aranan fonksiyonun sadece $u = u(x)$ değil onunla birlikte $k = k(x)$ katsayısının da bilinmeyen fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\langle u, k \rangle$ çiftinin (4.2)-(4.3) sınır koşullarından birebir olarak belirlenebilmesi doğal olarak mümkün olamayacaktır zira bu koşullar sadece $u(x)$'in tek olarak belirlenebilmesini mümkün kılmaktadır. O zaman aranan $k(x)$ fonksiyonunun da bulunabilmesi için bu koşulların haricinde ek koşul veya koşullara ihtiyaç vardır. Bu ihtiyacın giderilmesi için pratik açıdan verilmesi mümkün olabilen deneysel ölçümlerden elde edilen koşullar kullanılır. Ele alınan problemde $x = a$ sınırında Dirichlet türü sınır koşulu, $x = b$ sınırında ise Neuman türü sınır koşulu verilmiş olduğundan deneysel açıdan ek koşullar $x = a$ 'da ek olarak Neuman türü, $x = b$ 'de ise Dirichlet türü sınır koşulları olacak şekilde verilebilir.

$$\left(k(x)u'(x)\right)\Big|_{x=a} = \varphi_0 \tag{4.4}$$

$$u(b) = \beta. \tag{4.5}$$

Burada φ_0 ve β deneysel ölçümlerden elde edilen verilerdir.

Bu koşulların fiziksel anlamı ise şöyledir. (4.1)-(4.3) problemine bir boyutlu malzemede ısının transferi problemi olarak bakacak olursak $u = u(x)$, x noktasındaki sıcaklığın değeri olacaktır. Bu koşullar $u(x)$ sıcaklık fonksiyonunu (4.1)-(4.3) sınır-değer probleminin tek çözümü olarak tanımlar. Eğer ayrıca malzemenin $k = k(x)$ ısı transferi katsayısının da belirlenmesi gerekiyor ise, o halde deneysel olarak verilebilir ek koşulların tanımlanması gerekiyor. Eğer sol sınırda sıcaklığın değeri önceden verilmişse (bak. (4.2)) o sınırda ek olarak ısı akısının da bilinmesi ve sağ sınırda önceden ısı akısı verilmişse (bak. (4.3)) o sınırda ek olarak ısının değerinin bilinmesi istenmektedir.

Şimdi $k(x)$ katsayısının belirlenmesi ile ilgili ters problemi tanımlayalım.

Tanım 4.1. (Hasanov,1988,1997) (4.1)-(4.5) probleminde $\langle u, k \rangle$ fonksiyonlar çiftinin aranması problemine $k(x)$ katsayısı için ters problem (TP), $\langle u, k \rangle$ çiftine ters problemin çözümü, (4.1)-(4.3) problemine ise bu ters probleme karşılık düz problem (DP) denir.

4.2. Ters Problemin Yaklaşık Çözümü

(4.1)-(4.3) probleminde $k = k(x)$ katsayısı için aşağıdaki koşul sağlanır.

$$k(x) \in L_2[a, b], \quad c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0$$

O zaman $k(x)$ katsayısı için olası katsayılar sınıfı (the set of admissible coefficients) diyeceğimiz aşağıdaki kümeyi oluşturabiliriz.

$$K = \{k(x) \in L_2[a, b] : c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0 \}$$

Şimdi ters problemin çözüm yöntemini inceleyelim. (4.1)-(4.3) düz probleminde K sınıfından seçilen keyfi $k(x)$ katsayı fonksiyonu, şimdilik bilinen bir fonksiyon olarak ele alınırsa, elde edilen problemin tek çözümünün varlığından, seçilen $k(x)$'e karşılık gelen bir $u = u[x; k]$ zayıf çözümü elde edilir. Eğer bulunan $u = u[x; k]$ fonksiyonu ilaveten (4.4) ve (4.5) koşullarını da sağlarsa yani,

$$\left(k(x)u'[x; k]\right)\big|_{x=a} = \varphi_0 \tag{4.6}$$

$$u[b; k] = \beta \tag{4.7}$$

olursa, o zaman $\langle u; k \rangle$ çifti ters problemin kesin çözümü olacaktır. Fakat gerek φ_0 ve β'nın deneysel ölçümlerden elde edilmesinden gerekse de düz problemin çözümündeki çeşitli hatalardan dolayı, (4.6) ve (4.7) koşullarının kesin olarak sağlanması pratik açıdan mümkün değildir. Bu halde onların birbirine en yakın olması talebi ileri sürülebilir. Bir başka deyişle

$$\left|\left(k(x)u'[x;k]\right)\right|_{x=a} - \varphi_0\Big| \le \varepsilon_1 \tag{4.8}$$

$$\left|u[b;k] - \beta\right| \le \varepsilon_2 \tag{4.9}$$

koşulları sağlanacak şekilde bir $k \in K$ fonksiyonunun bulunması problemi ele alınabilir. Burada ε_1 ve ε_2 önceden verilmiş sayılardır. İşte Tikhonov'un ters problemler için ortaya attığı yaklaşık çözüm (quasi-solution) teorisi de bu fikre dayanmaktadır (Tikhonov-Arsenin,1977).

Söylediklerimizi matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

(4.8) ve (4.9)'dan yola çıkarak aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım:

$$J(k) = J_1(k) + J_2(k), \quad k \in K. \tag{4.10}$$

burada

$$J_1(k) = \left|\left(k(x)u'[x;k]\right)\right|_{x=a} - \varphi_0\Big|, \quad k \in K \tag{4.11}$$

$$J_2(k) = \left|u[b;k] - \beta\right|, \quad k \in K\ . \tag{4.12}$$

O zaman yukarıdaki ters problem

$$J(k_0) = \min_{k \in K} J(k) \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $k_0 \in K$ elemanının bulunması ile ilgili en küçük değer problemine dönüşür. (4.13) en küçük değer probleminin çözümüne ters problemin yaklaşık çözümü veya quazi çözümü denir. Bu kavram ilk olarak 1939 yılında A.

Tikhonov tarafından verilmiş, daha sonra diğer problemlere uygulanarak çeşitli biçimlerde geliştirilmiştir (Alessandrini,1988,1990),(Anger,1990),(Duchateau,1996), (Baumeister,1986), (Hasanov,1988,1997),(Isakov,1988),(Lions,1970),(Payne,1975).

4.3. Ters Problemin Yaklaşık Çözümünün Varlığı

Lemma 4.1. (Hasanov-Shores,1997) $\{k_n(x)\} \subset K$ ve

$$\frac{1}{k_n} \mapsto \frac{1}{k}, \quad n \to \infty \qquad (L_2[a,b]\text{'de zayıf yakınsama})$$

koşulu sağlansın. O zaman $J_1(k_n) \to J_1(k), \quad n \to \infty$ yakınsaması doğrudur.

İspat. Bölüm 3'de elde ettiğimiz (3.1) integral gösteriminden aşağıdakini elde ederiz.

$$k(x)u'(x) = \varphi + \int_x^b [f(\xi) - q(\xi)u(\xi)]d\xi, \quad x \in [a,b].$$

Burada $x = a$ yazarsak

$$(k(x)u'(x))_{x=a} = \varphi + \int_a^b [f(x) - q(x)u(x)]dx \tag{4.14}$$

eşitliğini elde ederiz. Öte yandan Lemmanın koşulu sağlandığında katsayılara göre sürekliliğin temel teoremine göre (Teorem 3.1) $C^{0,\lambda}[a,b]$, $\lambda < \frac{1}{2}$ uzayında

$$u_n(x) = u[x;k_n] \to u(x) = u[x;k], \quad n \to \infty, \quad \forall x \in [a,b] \tag{4.15}$$

düzgün yakınsaması doğrudur. Bu yakınsama, (4.14) ve

$$(k_n(x)u'[x;k_n])_{x=a} = \varphi + \int_a^b [f(x) - q(x)u[x,k_n]]dx$$

eşitliklerinin sağ taraflarına uygulanırsa o zaman $\{(k_n(x)u'[x;k_n])_{x=a}\}$ sayı dizisinin $(k(x)u'[x;k])_{x=a}$ sayısına yakınsaması elde edilir. Bu ise $J_1(k_n) \to J_1(k)$, $n \to \infty$ yakınsaması demektir. □

Uyarı 4.1. (4.11) fonksiyoneli $k \in K$'ya göre aşağıdaki anlamda süreklidir.

$k_n \to k$, $n \to \infty$ (L_2-normunda güçlü yakınsama) $\Rightarrow$ $J_1(k_n) \to J_1(k)$, $n \to \infty$.

İspat. Lemma 3.2 ve Lemma 4.1'den elde edilir. □

Uyarı 4.2. (4.12) ile tanımlı $J_2(k)$ fonksiyoneli Uyarı 4.1'deki anlamda $k \in K$'ya göre süreklidir.

İspat. (4.15) yakınsamasından hemen elde edilir.

Sonuç 4.1. $K \subset L_2[a,b]$ olası katsayılar kümesi kompakt ise o zaman ters problemin $k_0 \in K$ yaklaşık çözümü vardır.

İspat. Weierstrass teoremine göre kompakta sürekli her fonksiyonelin minimumu veya maksimumu vardır. $J(k) = J_1(k) + J_2(k)$ fonksiyoneli K kompakt kümesinde sürekli olduğundan ispat elde edilir. □

4.4. Deney Verilerindeki Hata Payının Çözüme Etkisi

Daha önce de belirttiğimiz gibi ters problemde ek koşullar deneysel ölçümlerin sonucu belli bir hata payı ile verildiğinden dolayı (4.4) ve (4.5) ek sınır koşulları belirli bir hata payı içeriyor. Hatasız veriler φ_0 ve β, hatalı veriler de $\widetilde{\varphi}_0$ ve $\widetilde{\beta}$ ile gösterilirse, hata payının sırasıyla $\varepsilon_\varphi > 0$ ve $\varepsilon_\beta > 0$ olarak bulunduğu durumda

$$|\widetilde{\varphi}_0 - \varphi_0| \le \varepsilon_\varphi, \qquad |\widetilde{\beta} - \beta| \le \varepsilon_\beta$$

olacaktır. Hatalı verileri içeren aşağıdaki fonksiyoneli tanımlayalım:

$$\widetilde{J}(k) = \widetilde{J}_1(k) + \widetilde{J}_2(k), \quad k \in K. \tag{4.17}$$

Burada

$$\widetilde{J}_1(k) = \left| (k(x)u'[x;k])\big|_{x=a} - \widetilde{\varphi}_0 \right|, \quad \widetilde{J}_2(k) = \left| u[b;k] - \widetilde{\beta} \right|, \quad k \in K$$

sırasıyla $\widetilde{\varphi}_0$ ve $\widetilde{\beta}$ verilerini içeren yardımcı fonksiyonellerdir. Deney verilerindeki hata payının çözüm üzerinde ne kadar etkili olduğunu onlara karşılık gelen fonksiyonellerin farkını değerlendirerek görebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{J}(k) - J(k)| = |\widetilde{J}_1(k) + \widetilde{J}_2(k) - J_1(k) - J_2(k)| \le |\widetilde{J}_1(k) - J_1(k)| + |\widetilde{J}_2(k) - J_2(k)| \\
&\le \Big| \left| (k(x)u'[x;k])\big|_{x=a} - \widetilde{\varphi}_0 \right| - \left| (k(x)u'[x;k])\big|_{x=a} - \varphi_0 \right| \Big| + \Big| |u[b;k] - \widetilde{\beta}| - |u[b;k] - \beta| \Big| \\
&\le |\widetilde{\varphi}_0 - \varphi_0| + |\widetilde{\beta} - \beta| \le \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\beta
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Demek ki deney verilerindeki hata payının fonksiyonele etkisi hataların toplamından büyük olamaz.

4.5. Optimal Kontrol Problemi ve Bu Problemin Çözümünün Varlığı

$k(x)$ katsayısının belirlenmesi ile ilgili aşağıdaki optimal problemini ele alalım.

(4.1)-(4.3) düz probleminin $u = u[x;k] \in \overset{0}{H}{}^1[a,b]$ çözümünün

$$J(k) = \int_a^b (u[x,k])^2 \, dx, \quad k \in K \tag{4.18}$$

fonksiyoneline en küçük değer verecek şekilde bir $k \in K$ katsayısının bulunması problemini ele alalım.

Bu türden olan problemlere literatürde optimal kontrol problemi denir (Banks-Kunisch,1989),(Lions,1970). Burada K, olası katsayılar kümesidir.

Bu problemin sınır verilerine dayalı (4.1)-(4.5) ters katsayı probleminden farkı (4.18) fonksiyonelinin yapısından da görüleceği gibi, çözümün, sadece belirli birkaç noktadaki (sınır noktaları) ölçülmüş verilere yakınlığı ile değil tüm bölgede düz problemin çözümünün karesinin belirli integralinin en küçük olması talep edilerek kontrol edilmesinden kaynaklanmaktadır. Yani, klasik ters problemlerden farklı olarak optimal kontrol probleminde, giriş verilerindeki sınır ölçümlerinden kaynaklanan hata payı söz konusu değildir.

Bu problemin yaklaşık çözümü

$$\exists k_0 \in K, \quad J(k_0) = \min_{k \in K} J(k) \tag{4.19}$$

en küçük değer probleminin çözümü olacaktır.

Lemma 4.2. (4.18) ile tanımlı $J(k)$ fonksiyoneli Uyarı 4.1'deki anlamda $k \in K$'ya göre süreklidir.

İspat. Öncelikle $|J(k_n) - J(k)|$ farkını Cauchy eşitsizliğinden yararlanarak değerlendirelim:

$$|J(k_n) - J(k)| = \left| \int_a^b (u[x;k_n])^2 dx - \int_a^b (u[x;k])^2 dx \right| = \left| \int_a^b \left[(u[x;k_n])^2 - (u[x;k])^2 \right] dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b (u[x;k_n] - u[x;k])(u[x;k_n] + u[x;k]) dx \right| \le \| u[x;k_n] - u[x;k] \|_0 \cdot \| u[x;k_n] + u[x;k] \|_0$$

$$\le \| u[x;k_n] - u[x;k] \|_0 \cdot \left(\| u[x;k_n] \|_0 + \| u[x;k] \|_0 \right).$$

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ durumunda birinci norm sıfıra yakınsar, parantez içindeki normlar ise sonludur. Lemma ispatlandı. □

$u = u[k]$ fonksiyonel bağıntısının dışbükeyliğinin belirlenmesi imkansız olduğundan $J(k)$ fonksiyonelinin dışbükeyliğinin pratikte belirlenmesi de hemen hemen mümkün değildir. Bu nedenle (4.19) probleminin çözümünün varlığı için genel olarak Dışbükey Analizin (Ekland-Teman,1976) sonuçlarından faydalanamayız. Biz yine Weierstrass teoremi türünden olan sonuçlardan faydalanacağız.

L_2-normunda $k_n \to k$ olduğu zaman $J(k_n) \to J(k)$ ise $J(k)$ fonksiyoneli süreklidir. Eğer K olası katsayılar kümesi de kompakt ise (örneğin L_2'de) o halde (4.19) probleminin tek çözümü vardır. Böylece katsayılara göre kararlılığın incelenmesinin optimal kontrol problemlerinin incelenmesinde büyük payı olduğu görülür.

4.6. $C[a,b]$ ve $L_p[a,b]$ Uzaylarında Kompaktlık Ölçütleri

Bu bölümde sözü edilen uzaylardaki kümelerin kompaktlığı için gerekli teorem ve lemmalar ispatsız olarak verilecektir. Öncelikle genel olarak metrik uzaylarda bir kümenin kompaktlığı nedir onu görelim (Brown-Page,1983),(Lusternik-Sobolev,1965).

Tanım 4.2. (X,ρ) bir metrik uzay $M \subset X$ olsun. Eğer M'nin her sonsuz alt kümesinde yakınsak dizi varsa ve bu dizinin limiti M kümesine aitse o zaman M'e kompakt küme denir. Eğer limit noktası M'e ait değilse o zaman M'e prekompakt küme denir.

Tanım 4.3. (X,ρ) bir metrik uzay $M,N \subset X$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in M$ için $\rho(x,x_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde $x_\varepsilon \in N$ varsa o zaman N kümesine M'nin ε-şebekesi denir.

Teorem 4.2. (X,ρ) metrik uzay $M \subset X$ olsun. M kümesinin prekompakt olması için bir sonlu ε-şebekeye sahip olması gereklidir. Eğer X tam uzaysa o zaman bu koşul aynı zamanda yeterlilik koşuludur.

4.6.1. $C[a,b]$ uzayında kompaktlık ölçütleri

Bu uzaydaki keyfi K kümesi için düzgün sınırlılık ve düzgün süreklilik tanımlarını verelim (Lusternik-Sobolev,1965),(Brown-Page,1983).

Tanım 4.4. (Düzgün Sınırlılık) $\forall x(t) \in K$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $|x(t)| \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa o zaman $x(t)$ fonksiyonları K'da düzgün sınırlıdır denir.

Tanım 4.5. (Aynı Mertebeden Süreklilik) $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa o zaman $x(t)$ fonksiyonları K'da aynı mertebeden süreklidir denir.

Lemma 4.3. K kümesindeki tüm $x(t)$ fonksiyonları aynı, $L > 0$ sabiti için Lipschitz koşulunu sağlıyorlarsa, yani

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b],$$

o zaman bu fonksiyonlar aynı mertebeden süreklidirler.

Lemma 4.4. $\forall x(t) \in K$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $|x'(t)| \leq L$ olacak şekilde $L > 0$ sabiti varsa o zaman tüm $x(t)$ fonksiyonları Lipschitz koşulunu sağlarlar.

Teorem 4.3.(Ascoli-Arzela) $K \subset C[a,b]$ kümesinin prekompakt olması için gerek ve yeter koşul K'deki fonksiyonların düzgün sınırlı ve aynı mertebeden sürekli olmalarıdır.

4.6.2. $L_p[a,b]$ uzayında kompaktlık ölçütleri

Teorem 4.4.(Kolmogorov) $K \subset L_p[a,b]$ kümesinin prekompaktlığı için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir.

a) K kümesi bu uzayda düzgün sınırlıdır. Yani, $\forall x(t) \in K$ için $\|x\| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

b) $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x(t) \in K$ için $\|x(t) - x_h(t)\|_{L_p} < \varepsilon$, $0 < h < \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sabiti vardır.

Burada $x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau$ şeklindeki fonksiyonlardır.

Teorem 4.5.(Riesz) $K \subset L_p[a,b]$ kümesinin prekompaktlığı için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir.

a) K kümesi bu uzayda düzgün sınırlıdır.

b) $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x(t) \in K$ için $\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$, $0 < h < \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sabiti vardır.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Sonuçlar

1. $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında $k_n \rightharpoonup k$ zayıf yakınsamasına karşılık genel olarak $1/k_n \not\rightharpoonup 1/k$ zayıf yakınsamaması örnek ile gösterilmiştir.
2. (1)'deki durum baz alınarak ele alınan (SL) probleminin zayıf çözümünün katsayılara göre sürekliliğinin sınıflandırılmasının gerekliliği vurgulanmıştır.
3. Katsayı ve zayıf çözüm fonksiyonlarının tanımlandığı uzaylar dikkate alınarak zayıf çözümün katsayılara göre sürekliliği ile ilgili böyle bir sınıflandırma yapılmıştır.
4. Bu sınıflandırmada yakınsamaların sağlanması için gerekli asgari talepler belirtilmiştir.

Öneriler

1. Sonuç 1'de verilen durumu destekleyen daha güzel örnekler üretilebilir.
2. Sayısal yöntemler açısından çözüm fonksiyonuna belli bir polinomla yaklaşılarak katsayı fonksiyonlarının yaklaşık değerleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. ADAMS, R.A.,1975. Sobolev Spaces. Academik Press, New York.

2. ALESSANDRINI, G.,1988. Stable Determination of Conductivity by Boundary Measurements. Applic. Analysis, 27, 153-172.

3. ALESSANDRINI, G.,1990. Singular Solutions of Elliptic Equations and the Determinations of Conductivity by Boundary Measurements. Diff.Equat.,84, 252-273.

4. ALESSANDRINI, G., ISAKOV, V. And POWEL, J., 1995. Local Uniqueness in the Inverse Conductivity Problem with One Measurements. Trans. of AMS.,347, 3031-3041.

5. AMES, K:A: And STRAUGHAN, A.,1997. Non-Standard and Improperly Posed Problems. Mathematics in Science and Engineering Series,San Diego Academic Press, 194.

6. ANGER; G.1990. Inverse Problems in Differential Equations. London: Plenum Publ.

7. BADIA, A. 1999. Coefficient identification in some partial differential equations from partial boundary measurements. Inverse Problems, 15, 11-18.

8. BANKS, T.H. And KUNISCH, K.,1989.Estimation Techniques for Distributed Parameter Sysytems. Birkhäuser, Boston.

9. BAUMEISTER 1986. Stable Solutions of Inverse Problems. Braunschweig: Vieweg Birkhauser.

10. BECK, J.V., BLACKWELL, B. And CLAIR, C.R. 1985. Inverse Heat Conduction. Ill-Posed Problems, New York, John Wiley.

11. BROWN, A.L. And PAGE, A. 1983. Elements of Functional Analysis. Van Nostrand Reinhold Company,London.

12. CANON, J.R. And DUCHATEAU, P.,1973. Determining Unknown Coefficients in a Nonlinear Heat Conduction Problem. SIAM J. Appl. Math., 24, 298-314.

13. CANON, J.R. And DUCHATEAU, P.,1974. Determination of the Conductivity of an Isotropic Medium. J. Math. Anal. Appl., 48, 699-707.

14. CANON, J.R. And DUCHATEAU, P.,1980. An Inverse Problem for a Nonlinear Diffusion Equation. SIAM J. Appl. Math. 39, 272-289.

15. CANON, J.R. And RUNDELL, W. 1987. An Inverse Problem for an Elliptic Partial Differential Equation. J. Math. Anal. Appl., 126, 329-340.

16. COLTON, D.,EWING, R. And RUNDELL, W. 1990. Inverse Problems in Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM Proceedings in Apllied Mathematics.

17. DUCHATEAU, P.C.,1981. Monotonicity and Uniqueness Results in Identifying an Unknown Coefficient in a Nonlinear Diffusion Equation. SIAM J. Appl. Math., 41, 310-323.

18. DUCHATEAU, P.C.,1995. Monotonicity and Invertibility of Coefficient-to-Data Mappings for Parabolic Inverse Problems. SIAM J. Math. Anal., 26, 1473-1487.

19. DUCHATEAU, P.C.,1996. Introduction to Inverse Problems in Partial Differential Equations for Engineers, Physicists and Mathematicians In: Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology (J Gottlieb and P DuChateau eds). Kliver Academic Publishers,) Netherland, 3-38.

20. DUCHATEAU, P. And RUNDEL, W.,1985. Unicity in an Inverse Problem for an Unknown Reaction Term in Reaction-Diffusion Equation. J. Diff. Equations, 59, 155-164.

21. DUVANT, G. and LIONS J.L. 1976. Inequalities in Mechanics and Physics.: Springer-Verlag, Berlin.

22. EKLAND, I. And TEMAN, R.,1976. Convex Analysis and Variational Problems. Elsevier, New York.

23. GELFAND, I.M. And LEVITAN, B.M.,1955. On The Determination of a Differantial Equation From its Spectrum. Trans. Amer. Math. Soc., 1, 255-304.

24. HASANOV, A., 1988. An inverse problem in Nondestructive Diagnostics of an Elastoplastic Medium. Dokl. Akad. Nauk., SSSR, 37, 242-6.

25. HASANOV, A., 1995. An Inverse Problem for an Elastoplastic Medium SIAM J. Appl. Math., 55, 1736-1752}

26. HASANOV, A. and SEYIDMAMEDOV, Z., 1995. The solution of an Axisymmetric Inverse Elasto-Plastic Problem Using Penetration Diagram. Int. J. Non-linear Mech., 30, 465-77.

27. HASANOV, A. 1997. Inverse Coefficient Problems for Monotone Potential Operators. Inverse Problems, 13, 1265-78.

28. HASANOV, A. And SHORES, T.S.,1997. Solution of an Inverse Coefficient Problem for an Ordinary Differential Equation. Applicable Analysis, 67, 11-20.

29. HASANOV, A. 1997. Coefficient Stability and Existence of a Quasisolution of an Inverse Parabolic Problem. Applicable Analysis, 67, 1-9.

30. HASANOV, A., 1998. Strong Coefficient Stability for Quasilinear Elliptic Equations with Application to Inverse Coefficient Problems. Applicable Analysis, 68, 313-331.

31. HOCHSTEDT, H. 1973. The Inverse Sturm-Liouville Problem. Comm. Pure Appl. Math., 26, 715-729.

32. Inverse Problems in PDE. SIAM Proc. Series, Philadelphia, 1990.

33. IVANOV, V.K., VASIN, V.V., TANANA, V.P., 1978. Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications. Nauka, Moscow.

34. ISAKOV, V., 1998. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer, New York.

35. LADYZHENSKAYA, O.A., 1985. Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Springer Verlag,New York.

36. LIONS, J.L. 1970. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer.

37. LOWE, B. and RUNDELL, W. 1994. An Inverse Problem for a Sturm-Liouville Operator. J. Math. Anal. Appl., 181, 188-199.

38. LOWE, B. and RUNDELL, W. ,1995. Unique Recovery of a Coefficient in an Elliptic Equation from Input Sources. Inverse Problems, 11, 211-215.

39. LOWE, B. and RUNDELL, W. 1995. Coefficient Recovery in Diffusion Processes. Proc. GAMM-SIAM Symposium (SIAM)} ed., 120-129.

40. LUSTERNIK, L.A. and SOBOLEV, V.I.,1965. Elements of Functional Analysis. Nauka, Moscow.

41. MIKHLIN, S.G., 1964. Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press, New York.

42. MURAT, F.,1971. Un Contre Exemple Pourdes Problems De Controle Dans Les Coefficients. C. R. Acad. Sci., 273, 708-11, Paris.

43. NATANSON, I.P., 1974. Theory of Functions Real Variable. Nauka, Moskow.

44. PAYNE, L.E., 1975. Inverse Problems in Partial Differential Equations. SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia.

45. PILANT, M. and RUNDELL, W., 1988. A Uniqueness Theorem for Determining Conductivity from Overspecified Boundary Data. J. of Math. Anal. Appl., 136, 20-28.

46. REKTORYS, K.,1975. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. D. Reidel Publishing Company, USA.

47. SHAPOSHNIKOVA, T.A., 1984. On the Strong *G*-Convergence of a Sequence of Systems of Elasticity Theory. Vestnik Moskovskogo Universiteya, Seriya Matematika i Mekhanika, 39, 41-46.

48. SPAGNOLO, S., 1968. Sulla Convergenza di solutioni di Equazioni Paraboliche ed Ellittiche. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., 22, 577-597.

49. SYLVESTER, J. and UHLMANN, G., 1986. A Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem in Electrical Prospection. Comm. Pure Appl. Math., 39, 92-112.

50. SYLVESTER, J. and UHLMANN, G., 1987. A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem. Annals of Math., 125, 153-169.

51. SYLVESTER, J. and UHLMANN, G., 1988. Inverse Boundary Value Problems of the Boundary Continuous Dependence. Comm. Pure Appl. Math., 41, 197-219.

52. TADI, M., 1997. Inverse Heat Conduction Based on Boundary Measurement. Inverse Problems, 13, 1585-1605.

53. TIKHONOV, A. and ARSENIN, V., 1977. Solution of Ill-Posed Problems. John Wiley, New York.

54. ZHIKOV, V.V., KOZLOV, S.M., OLEINIK, O.A. and NGOAN, K.T., 1979. Homogeneisation and *G*-convergence of differential operators. Uspekhi Mat. Nauk., 34, 65-133.

55. (b) ZHIKOV, V.V., KOZLOV, S.M., OLEINIK, O.A. and NGOAN, K.T., 1979. Averaging and *G*-Convergence of Differential Operators. Uspekhi Mat. Nauk, 34, 65-133.

EKLER

EK-A FONKSİYONEL ANALİZDEN HATIRLATMALAR

Bu bölümde tezdeki çalışmama temel oluşturan fonksiyonel analiz konuları kısaca ele alınarak,gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu ekteki bilgileri (Ladyzhenskaya,1985) ve (Rektorys,1975) kaynaklarında bulmak mümkündür.

Hilbert Uzaylarında Operatörler

$$A : D_A \subset H \to H$$

operatörünü ele alalım. Burada D_A lineer kümesi A operatörünün tanım kümesi H ise Hilbert uzayıdır.

Tanım 1. $\forall u_1, u_2 \in D_A$, $\forall a_1, a_2 \in R$ olmak üzere

$$A(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 A(u_1) + a_2 A(u_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman A operatörüne tanım kümesinde lineer operatör denir.

Tanım 2. $\{u_n\} \subset D_A$ keyfi dizi $u_0 \in D_A$ olsun. Eğer

$$\|u_n - u_0\| \to 0, \quad n \to \infty \;\Rightarrow\; \|A(u_n) - A(u_0)\| \to 0, \quad n \to \infty$$

koşulu sağlanıyorsa o zaman A operatörüne u_0 noktasında süreklidir denir. Eğer süreklilik koşulu D_A 'nın tüm noktalarında sağlanıyorsa o zaman operatör D_A 'da süreklidir denir.

Tanım 3. $K > 0$ olmak üzere keyfi $u \in D_A$ için

$$\|Au\| \le K\|u\| \tag{A1}$$

oluyorsa o zaman A operatörüne tanım kümesinde sınırlıdır denir.

(A1) eşitsizliğini sağlayan K sayılarının en küçüğüne A operatörünün normu denir ve $\|A\|$ şeklinde gösterilir.

Sınırlı operatörler için verilmiş aşağıdaki örneklere bakalım.

Örnek 1. Farz edelim ki $w(s,x)$ reel değerli fonksiyonu $G = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le s \le 1\}$ bölgesinde tanımlı ve $w \in L_2(G)$ olsun. O zaman

$$\int_0^1\int_0^1 w^2(s,x)dsdx = C^2, \quad C>0$$

yazabiliriz. Şimdi $L_2(0,1)$ Hilbert uzayında aşağıdaki operatörü ele alalım.

$$Au = \int_0^1 w(s,x)u(x)dx = v(s), \quad u \in L_2(0,1).$$

Yukarıdaki farzımıza göre tüm *s* değerleri için bu integralin varlığı ve linerliği açıkça görülmektedir. Üstelik $v(s) \in L_2(0,1)$'dır. Shwartz eşitsizliğine göre

$$v^2(s) = \left(\int_0^1 w(s,x)u(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 w^2(s,x)dx \cdot \int_0^1 u^2(x)dx$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_0^1 v^2(s)ds \le \int_0^1\left(\int_0^1 w^2(s,x)dx \cdot \int_0^1 u^2(x)dx\right)ds = \int_0^1 u^2(x)dx \int_0^1\int_0^1 w^2(s,x)dxds$$

Sonucu elde edilir. Yani,

$$\|v\|_0^2 \le C^2\|u\|_0^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise A operatörünün $L_2(0,1)$ uzayında sınırlı olması anlamına geliyor

Örnek 2. $L_2(0,1)$ Hilbert uzayında $D_A = C^1(0,1)$ lineer kümesini ele alalım ve aşağıdaki operatörü tanımlayalım.

$$Au = \frac{du}{dx} = u'(x).$$

Bu operatörün D_A'da sınırlı olmadığını gösterelim. Bunun için (A1) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $K>0$ sayısının bulunamayacağını göstermek yeterlidir. İspat için tersini, yani böyle bir sayının varlığını kabul edelim ve pozitif n tamsayıları için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$v(x) = \sin(n\pi x).$$

Bu fonksiyonların D_A'ya ait oldukları açıktır. Üstelik,

$$Av = n\pi\cos(n\pi x).$$

Normun tanımına göre,

$$\|v\|_0 = \sqrt{\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \|Av\|_0 = \sqrt{\int_0^1 n^2\pi^2 \cos^2(n\pi x)dx} = \sqrt{\frac{1}{2}}n\pi .$$

Ele aldığımız fonksiyonları $n\pi > K$ olacak şekilde seçersek o zaman çelişki elde ederiz. Bu ise farzımız yanlış olduğunu yani böyle bir K sayısının bulunamayacağını gösterir. Öyleyse operatör tanım kümesinde sınırlı değildir.

Aslında sınırlı olmama, sadece bu operatör için değil, genel olarak tüm diferansiyel operatörlerin ortak özelliğidir. Bu durum özellikle kısmi diferansiyel denklemler teorisinde karşılaşılan ciddi zorlukların kaynağıdır.

Lineer operatörlerin sınırlılığı ile sürekliliği arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 1. A operatörü H Hilbert uzayında tanımlı lineer operatör olsun. A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul onun sınırlı olmasıdır.

Tanım 4. A, lineer operatör, D_A ise H Hilbert uzayında yoğun lineer küme olsun. Eğer,

$$\forall u, v \in D_A, \quad (Au, v) = (u, Av)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman A'ya D_A'da simetrik (veya kendine eşlenik) operatör denir.

Tanım 5. A, operatörü $D_A \subset H$ tanım kümesinde simetrik olsun. Eğer,

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D_A, \qquad (Au, u) = 0 \;\Rightarrow\; u = 0, \quad u \in D_A$$

oluyorsa o zaman A'ya pozitif operatör,

C>0 sayısı için

$$(Au, u) \geq C^2\|u\|^2, \quad \forall u \in D_A$$

eşitsizliği sağlandığında ise pozitif tanımlı operatör denir.

Örnek 3. Aşağıdaki problemin sol tarafını ifade eden (SL) operatörü pozitif tanımlı ve simetriktir.

$$Au := -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b)$$
$$u(a) = 0, \quad k(b)u'(b) = \varphi .$$

Burada $0 < c_0 \le k(x) \le c_1$, $\quad 0 \le q(x) \le c_2$, $\quad k, q, f \in L_2[a,b]$.

$D_A = \{u(x) \in C^2[a,b] : u(a) = 0\}$ linealı $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında yoğundur. Öte yandan $\forall u, v \in D_A$ için (Au, v) biliner formu şu şekilde tanımlanır.

$$(Au, v)_0 = \int_a^b [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx. \qquad \text{(A2)}$$

Operatörün tanım kümesinde simetrikliği (A2) eşitliğinden görünmektedir. Şimdi onun pozitif tanımlılığını gösterelim.

$$(Au, u)_0 = \int_a^b [k(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)]dx \ge c_1 \int_a^b (u'(x))^2 dx + c_2 \int_a^b u^2(x)dx = c_1\|u'\|_0^2 + c_2\|u\|_0^2$$

bulunur. Poincare eşitsizliğine göre (bak. (2.11)) $\|u'\|_0 \ge \frac{\sqrt{2}}{b-a}\|u\|_0$ olduğundan

$$(Au, u)_0 \ge C^2\|u\|_0^2, \quad C^2 = \frac{2c_1 + c_2(b-a)^2}{(b-a)^2}$$

elde edilir.

Tanımdan da görüldüğü gibi tanım kümesinde pozitif tanımlı her operatör pozitiftir. İler ki konularda da göreceğimiz gibi operatörlerin simetrik ve pozitif tanımlı olması ifade ettikleri problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği açısından son derece önemlidir.

Şimdi operatörlerin özel bir durumunu oluşturan ve çalışmamızda da kullandığımız, fonksiyonel kavramını ele alalım.

Tanım 6. F bir operatör, D_F ise onun tanım kümesi olsun. Eğer F, tanım kümesindeki her u elemanını Fu reel (veya kompleks) sayısına dönüştürüyorsa o zaman ona reel (veya kompleks) fonksiyonel denir.

Fonksiyonellerin Hilbert Uzaylarında özel bir anlamı vardır ve bu anlam aşağıda ispatsız verilmiş olan teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.(Riesz) H, Hilbert uzayında tanımlı her lineer, sınırlı F fonksiyoneli

$$Fu = (u, w), \quad w \in D_F$$

şeklinde iç çarpımla ifade edilebilir. Burada $w \in H$, F ile birebir tanımlı tek olarak belirlenen bir elemandır ve üstelik $\|w\| = \|F\|$ eşitliği doğrudur.

Operatör Denklem ve Genelleşmiş (Zayıf) Çözüm

Aşağıdaki operatör denklemi ele alalım.

$$Au = f, \tag{A3}$$

burada A, bir Hilbert uzayda tanımlı belirli bir lineer operatör, f, bu uzayda verilmiş sağ taraf, u ise aranan çözüm fonksiyonudur.

Şimdi (A3) eşitliğinin her iki tarafını D_A 'da ki keyfi v fonksiyonu ile sağdan skaler olarak çarpalım. O zaman,

$$(Au, v) = (f, v), \quad \forall v \in D_A \tag{A4}$$

eşitliği özdeş olarak sağlanacaktır.

Tanım 7. (A4) eşitliğini sağlayan $u \in D_A$ fonksiyonuna (A3) denkleminin genelleşmiş (zayıf) çözümü denir.

Bu ifadeleri daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4. Poisson denklemi için Dirichlet Problemine bakalım.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G \subset R^2 \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{A5}$$

burada $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ Laplace operatörü Γ ise G bölgesinin sınırıdır. Verilen denkleme ve sınır koşuluna bakacak olursak Δ operatörünün

$$D_\Delta = \{u(x) \in C^2(G) \cap C(\overline{G}) : \ u(x) = 0, \ \ x \in \Gamma\}$$

lineer kümesinde tanımlı olduğunu görürüz. Bu küme ise $L_2(G)$ Hilbert uzayında yoğundur. Bu uzaydaki iç çarpımın tanımını uygulayarak tanım kümesindeki keyfi v fonksiyonu ile denklemin her iki tarafını sağdan skaler olarak çarparak sol tarafa Green Teoremini uygularsak,

$$(\Delta u, v)_0 = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_G f v dx_1 dx_2 = (f, v)_0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağlayan $u \in D_\Delta$ fonksiyonu ele alınan Poisson Denkleminin genelleşmiş çözümüdür. Yukarıdan da görüldüğü gibi genelleşmiş çözümün birinci dereceden kısmi türevleri karesiyle integrallenen fonksiyonlar sınıfındandır. Yani u genelleşmiş çözüm ise

$$u \in \overset{0}{H}{}^1(G) = \left\{ u(x): \ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L_2(G), \ u(x) = 0, \ x \in \Gamma \right\}.$$

Bu tipteki Hilbert uzaylarına Sobolev Uzayları denir. Bu uzayın $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ uzayından daha geniş bir uzay olduğu açıktır. Zaten genelleşmiş çözüm teorisi vermenin temel amacı pratik çözümleri de içine alacak biçimde çözüm uzayını genişletmektir.

Ayrıca bu operatörün tanım bölgesinde simetrik ve pozitif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi (A3) ile verilen operatör denklemin iyi tanımlılığı (well-posed) yani,

a) Problemin çözümü vardır,
b) Bu çözüm tektir,
c) Çözüm, giriş verilerine göre süreklidir,

aşamaları üzerinde duralım.

Teorem 3. A operatörü D_A tanım kümesinde pozitif operatör, $f \in H$ olsun. O zaman (A3) ile verilmiş olan denklemin H Hilbert uzayında en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Tersini farz edelim. Yani,

$$Au_1 = f, \quad Au_2 = f, \quad u_1, u_2 \in D_A$$

olacak şekilde çözümler var olsun. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkartırsak,

$$A(u_1 - u_2) = 0$$

elde edilir. Şimdi son eşitliğin her iki tarafını da $(u_1 - u_2) \in D_A$ elemanı ile sağdan skaler olarak çarpıp A'nın pozitifliğini göz önünde bulundurursak,

$$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0 \ \Rightarrow \ u_1 - u_2 = 0 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2$$

ispat elde edilmiş olur. □

Teorem 4. A operatörü, H Hilbert uzayında yoğun olan D_A tanım kümesinde tanımlı pozitif operatör, $f \in H$ olsun. Eğer $u \in D_A$ fonksiyonu (A3) denkleminin genelleşmiş çözümü yani,

$$(Au, v) = (f, v), \quad \forall v \in D_A$$

ise o zaman bu çözüm

$$Fu = \frac{1}{2}(Au,u) - (f,u) \tag{A6}$$

fonksiyoneline D_A'da minimum değeri verir ve tersine eğer $u \in D_A$ (A6) fonksiyonelinin minimumu ise o aynı zamanda (A3) denkleminin de genelleşmiş çözümüdür.

Eğer A pozitif tanımlı operatör ise o zaman D_A'nın genişletilmesiyle elde edilen H_A Hilbert uzayının varlığından söz edilebilir. Bu uzayda iç çarpım,

$$(u,v)_A = (Au,v), \quad \forall u,v \in H_A$$

şeklinde tanımlanır. Öyleyse (A6) ile tanımlanan fonksiyonel H_A uzayına genişletilebilir.

$$Fu = \frac{1}{2}(Au,u) - (f,u), \quad u \in H_A \, . \tag{A7}$$

(f,u) lineer fonksiyoneli H_A uzayında sınırlıdır. Gerçekten de Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre,

$$|(f,u)| \leq \|f\| \|u\|, \quad u \in H_A$$

bulunur. Öte yandan A pozitif tanımlı operatör olduğundan

$$\|u\| \leq \frac{1}{C}\|u\|_A, \quad u \in H_A$$

eşitsizliği doğrudur. Son iki eşitsizlikten (f,u) fonksiyonelinin sınırlılığı elde edilir.

$$|(f,u)| \leq K\|u\|_A, \quad K = \frac{\|f\|}{C} > 0, \quad u \in H_A \, .$$

O zaman Riesz teoremine göre $f \in H$ belirli elemanına karşılık H_A uzayında tek olarak elde edilecek $u_0 \in H_A$ elemanı bulunabilir ve

$$(f,u) = (u_0,u)_A, \quad u \in H_A \tag{A8}$$

eşitliği sağlanır. Yukarıdaki eşitliği (A7) fonksiyonelinde yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak o zaman,

$$Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \quad u \in H_A$$

elde edilir. Bu aşamada aşağıdaki varlık teoremini verebiliriz.

Teorem 5.(Varlık-Teklik Teoremi) A pozitif tanımlı operatör, D_A, H Hilbert uzayında yoğun alt küme olsun. O zaman (A7) ile verilen F fonksiyoneli H_A Hilbert uzayında en küçük değerini alır. F fonksiyoneline bu en küçük değeri veren $u_0 \in H_A$ elemanı (A8) eşitliğinden tek olarak belirlenir.

Örnek 5. Örnek 3'de verilen problemin zayıf çözümü vardır ve tektir.

Gerçekten de söz konusu problemin zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(Au, v)_0 = (f, v)_0, \quad \forall u, v \in H_A = \overset{0}{H}{}^1[a, b],$$

burada

$$(Au, v)_0 = \int_a^b [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx, \quad (f, v)_0 = \int_a^b f(x)v(x)dx + \varphi v(b)$$

şeklinde tanımlanır. A operatörü pozitif tanımlı ve simetrik olduğundan yukarıdaki teoreme göre

$$Fu = \frac{1}{2}(Au, u)_0 - (f, u)_0, \quad \forall u \in \overset{0}{H}{}^1[a, b]$$

fonksiyoneli minimum değerini $\overset{0}{H}{}^1[a, b]$ uzayında alır ve $(f, u)_0$ lineer fonksiyoneli sınırlı olduğundan Riesz teoremine göre bu çözüm tektir.

Zayıf çözümlerin giriş verilerine göre sürekliliği ise şu anlama gelmektedir. Eğer giriş verilerindeki küçük bir hata, bu verilere karşılık elde edilen çözümde kendisini yine küçük olarak gösteriyorsa o zaman çözüm fonksiyonu giriş verilerine göre süreklidir denir.

Bu açıklamayla da bu ek kısmı bitiriyoruz.

EK-B SOBOLEV UZAYLARI ve GÖMME TEOREMLERİ

Adams (1975)'de verilen bilgilerden yararlanarak burada Sobolev Uzaylarında gömme teoremlerini n boyutlu durum için sadeleştirilmiş biçimde verelim.

Tanım 1. $\Omega \subset R^n$ açık küme, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-indeks ve $\varphi \in C_0^\infty(G)$ olmak üzere aşağıdaki integral denklemi sağlayan $w \in L_2(G)$ fonksiyonuna $u \in L_2(G)$ fonksiyonunun $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ -dereceden genelleşmiş türevi denir:

$$\int_G w\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G u D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Bu denklem, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ fonksiyonları için Green formülünün genel ifadesi olmakla birlikte bu eşitliğe göre yeterince pürüzsüz $u \in L_2(G)$ fonksiyonları için genelleşmiş türev kavramı ile klasik anlamdaki türev kavramının çakışacağı açıktır.

Tanım 2. $\Omega \subset R^n$ bir küme, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-indeks olmak üzere

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega): \ D^\alpha u \in L_p(\Omega), \ p \geq 1, \ m \in Z^+ \cup \{0\}\} \tag{B1}$$

şeklinde tanımlı uzaylara Sobolev uzayları denir. Burada $D^\alpha u$ ile u fonksiyonunun $|\alpha| \leq m$ -dereceden genelleşmiş türevi gösterilmiştir.

$W_p^0 = L_p$ olacağı açıktır. Bu tip uzaylara H^0 uzayı olarak da bakılabilir. Genel olarak W_p^m, Banach uzayı olmasına karşın $p = 2$ olduğunda elde edilen $W_2^m = H^m$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

$p = 2, \ m = 1, \ \Omega = [a, b]$ durumunda (B1) ifadesi

$$W_2^1[a,b] = H^1[a,b] = \{u(x) \in C^\infty[a,b]: \ u(x), u'(x) \in L_2[a,b]\}$$

şeklini alır. Bu ise ele aldığımız (SLP)'nin zayıf çözümünün tanımlandığı uzaydır. Şimdi $\Omega \subset R^n$ olmak üzere $C^{m,\lambda}(\Omega)$, $\lambda \leq 1$, $m \in Z^+ \cup \{0\}$ uzaylarının aşağıdaki gömme teoremlerini ele alalım. Bunların içinde özellikle kompakt gömmeler, kısmi diferansiyel denklemlerin zayıf çözüm teorisi ve analizde birçok uygulamaya sahiptir. Bunun dışında Sobolev uzaylarının özellikleri, özellikle gömmeler, Adams'ın kitabında ayrıntılı olarak incelenmiştir (Adams,1975).

Tanım 3. $\Omega \subset R^n$ açık kümesinde tanımlı ve $|\alpha| \leq m$ dereceye kadar kısmi türevleri sürekli $u(x)$ reel değerli fonksiyonların sınıfı, $C^m(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzay

$$\|u\|_{C^m} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| ,$$

normuyla beraber Banach uzayıdır.

Tanım 4. $\lambda \in (0,1)$ ve $u \in C^m(\Omega)$ olmak üzere $K > 0$ için

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le K \|x - y\|_e^\lambda, \quad \forall x, y \in \Omega$$

oluyorsa o zaman $u(x)$ fonksiyonu λ-dereceden Hölder koşulunu sağlıyor denir. Burada $\|\cdot\|_e$ ile Öklid-normu gösterilmiştir (bak. Kısaltmalar). O zaman $C^{m,\lambda}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}} := \|u\|_{C^m} + \max_{0 \le |\alpha| \le m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \ne y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|_e^\lambda}$$

normuyla beraber Banach uzayıdır.

Teorem 1. $\Omega \subset R^n$ sınırlı küme, m, negatif olmayan tamsayı ve $0 < \nu < \lambda \le 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdaki gömülmeler kompaktır.

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{B2}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{B3}$$

İspat. $C^{m,\lambda} \subset C^m$ olduğu açıktır ve $\forall u \in C^m(\overline{\Omega})$ için $\|u\|_{C^m} \le \|u\|_{C^{m,\lambda}}$ eşitsizliği doğru olduğundan (B2) gömülmesi sağlanır. Şimdi (B3)'ü ispatlayalım. $\|x - y\|_e < 1$ ve $|\alpha| \le m$ için $\nu < \lambda$ olduğundan

$$\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|_e^\nu} \le \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|_e^\lambda}$$

bulunur. Yani $\|x - y\|_e < 1$ için $\|u\|_{C^{m,\nu}} \le M \|u\|_{C^{m,\lambda}}$, $M = 1$ elde edilir. $\|x - y\|_e \ge 1$ içinse

$$\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|_e^\nu} \le \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x)|}{\|x - y\|_e^\nu} + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|_e^\nu} \le 2 \sup_{z \in \Omega} |D^\alpha u(z)|$$

olur. O zaman bu ve (B2) gömülmesinden

$$\|u\|_{C^{m,\nu}} := \|u\|_{C^m} + \max_{|\alpha| \le m} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|_e^\nu} \le 3 \|u\|_{C^m} \le 3 \|u\|_{C^{m,\lambda}}$$

bulunur. Bu ise (B3) gömülmesinin sağlanması demektir.

Şimdi bu gömülmelerin kompaktlığını gösterelim. Önce $m = 0$ durumunu ele alalım. $K \subset C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ sınırlı küme olsun. Gösterelim ki K, $C^0(\overline{\Omega})$'da prekompaktır. K sınırlı olduğundan $\|u\|_{C^0} \le c$, $\forall u \in K$ olur. Öte yandan $u \in C^{0,\lambda}$ olduğundan, bu uzayın tanımına göre $|u(x) - u(y)| \le L\|x - y\|_e^{\lambda}$ eşitsizliği tüm u'lar için sağlanacaktır. Bu ise $C^0(\overline{\Omega})$ uzayında bu fonksiyonların aynı mertebeden sürekliliği anlamına geliyor. O zaman Ascoli-Arzela teoremine göre (Teorem 4.3) K, kümesi bu uzayda prekompaktır. Şimdi ispatı $m \ge 1$ için genişletelim. $K \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ sınırlı küme olsun. O zaman yukarıda ispatladığımıza göre $\{u_n\} \subset K$ dizisi C^0 uzayında prekompaktır. Yani $u_n(x) \to u_0(x)$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. Şimdi $\{Du_n\}$ dizisine bakalım. Bu dizi de $C^{0,\lambda}$ uzayında sınırlıdır ve dolayısıyla C^0'da prekompaktır. O zaman bu diziden yakınsak alt dizi seçebiliriz. $\exists\{u_m\} \subset \{u_n\}$, $u_m(x) \to v(x)$, $n \to \infty$. C^0 uzayındaki yakınsama düzgün yakınsama olduğundan $v(x) = Du_0(x)$ elde edilir. Bu süreç $m > 1$ için devam ettirilecek olunursa o zaman $D^{\alpha}u_m(x) \to D^{\alpha}u_0(x)$, $n \to \infty$, $|\alpha| \le m$, elde edilir. Bu ise (B2) gömülmesinin kompaktlığı demektir.

(B3) gömülmesinin kompaktlığı için yine sınırlı $K \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ kümesini ele alalım ve onun $C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$ uzayında prekompaktlığını gösterelim. K sınırlı olduğundan $\forall u \in K$ için $\|u\|_{C^{M,\lambda}} \le M$, $M > 0$ eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliği aşağıda kullanırsak

$$\frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{\|x - y\|_e^{\nu}} = \left(\frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{\|x - y\|_e^{\lambda}}\right)^{\nu/\lambda} |D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^{1-\nu/\lambda}$$
$$\le M^{\nu/\lambda}|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^{1-\nu/\lambda}$$

buluruz. Bu eşitsizlik gösteriyor ki $C^m(\overline{\Omega})$ uzayında yakınsak olan keyfi dizi $C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$ uzayında da yakınsaktır. O zaman (B2) gömülmesinden (B3) gömülmesinin kompaktlığı elde edilir. □

Tanım 4. $\Omega \subset R^n$ kümesi için

$$\forall x, y \in \Omega, \quad tx + (1-t)y \in \Omega, \quad t \in (0,1)$$

koşulu sağlanıyorsa o zaman ona konveks küme denir.

Teorem 2. Teorem 1'in koşullarına ek olarak $\Omega \subset R^n$ kümesi konveks ise o zaman aşağıdaki gömülmeler kompaktır.

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{B4}$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \quad 0<\lambda\leq 1. \tag{B5}$$

İspata geçmeden önce kullanacağımız bazı lemma ve çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremini verelim

Lemma 1. $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ olmak üzere

$$\|x\|_e \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\|.\|_\infty$ sup-normdur (bak. Kısaltmalar).

Lemma 2. $B=(b_{ij})_{m\times n}\in R_{m\times n}$ bir matris, $x\in R^n$ olmak üzere

$$\|Bx\|_e \leq \sqrt{mn}\|B\|_\infty\|x\|_e, \quad \forall x\in R^n$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemma 1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\|Bx\|_e = \left\|\left(\sum_{j=1}^n b_{1j}x_j,\dots,\sum_{j=1}^n b_{mj}x_j\right)\right\| \leq \sqrt{m}\max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j\right| \leq \sqrt{m}\max_{1\leq i\leq m}\sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2}\|x\|_e$$
$$\leq \sqrt{mn}\max_{1\leq i\leq m}\max_{1\leq j\leq n}|b_{ij}|\|x\|_e = \sqrt{mn}\|B\|_\infty\|x\|_\infty$$

ispat elde edilir. □

Teorem 3. (Ortalama Değer Teoremi) $\Omega\subset R^n$ açık küme, $L(x,a)$, $x,a\in\Omega$ noktalarını birleştiren doğru parçası ve $f:\Omega\to R^m$, Ω'da diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer Ω konveks ise o zaman verilen $\forall z\in R^m$ için

$$z\cdot(f(x)-f(a)) = z\cdot(Df(c)(x-a)) \tag{B6}$$

olacak şekilde $c\in L(x,a)$ elemanı vardır. Burada Df ile, f fonksiyonunun kısmi türevi gösterilmektedir ve Df, $m\times n$ boyutlu matris, $Df(c)(x-a)$ ise matris çarpımıdır.

Şimdi Teorem 2'yi ispatlayalım.

İspat. $C^{m+1}(\overline{\Omega})\subset C^m(\overline{\Omega})$ olduğu açıktır. Öte yandan $\|u\|_{C^m}\leq\|u\|_{C^{m+1}}$ eşitsizliğinden (B4) gömülmesinin doğruluğu elde edilir. $\Omega\subset R^n$ kümesi konveks olduğundan Ω üzerindeki keyfi x,y noktalarını birleştiren doğru parçası üzerindeki tüm z noktaları yine Ω'ya aittir. O zaman ortalama değer teoremine göre

$\exists z \in \Omega, \quad D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y) = \nabla D^{\alpha}u(z)(x-y), \quad \forall u \in C^{m+1}(\Omega),$

elde edilir. Burada $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörlerdir.
Her iki tarafın normunu alıp sağ tarafa Lemma 2'yi ($m = 1$) uygulayalım.

$$|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| \leq \sqrt{n} \|x-y\|_e \|u\|_{C^{m+1}} .$$

Bu ise $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,v}(\overline{\Omega})$ olması demektir. Her iki tarafı $\|x-y\|_e$ ile bölersek

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{\|x-y\|_e} \leq \sqrt{n} \|u\|_{C^{m+1}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan ise aşağıdaki elde edilir.

$$\|u\|_{C^{m,1}} \leq M \|u\|_{C^{m+1}}, \quad M = \sqrt{n} + 1 > 0 .$$

Son eşitsizlik $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \subsetneq C^{m,1}(\overline{\Omega})$ gömülmesi anlamına geliyor. O zaman (B5) gömülmesi, bu ve (B3) gömülmesinden elde edilir.

Bu gömülmelerin kompaktlığı ise (B2) ve (B3) kompakt gömülmelerinden elde edilir ($\lambda = 1$) . □

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Gebze'de doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Gebze'de tamamladı. 1993 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1998 yılında bölüm birinciliği derecesiyle mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda araştırma görevlisi olarak işe başladı.

Halen Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi kadrosundaki görevini sürdürmektedir.