KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE KARARLILIK TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem SAKINÇ

Anabilim Dalı : Matematik

I. Danışman: Yrd.Doç. Dr. Serdal Pamuk

II. Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Bereketoğlu

HAZİRAN 2002

<u>KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE KARARLILIK TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem SAKINÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2002

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yrd. Doç. Dr. Serdal PAMUK	Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU	Doç. Dr. Ağacık ZAFER
(..........)	(..........)	(..........)

HAZİRAN 2002

GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE KARARLILIK TEORİSİ

Irem SAKINÇ

Anahtar Kelimeler: Gecikme, Lipschitz, Diferensiyel Denklem, Lyapunov Yöntemi, Teklik ve Varlık

Özet: Bu çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır.Birinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili temel tanımlar ve örnekler ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılan, genel bilgiler ve konuyla ilgili önceden yapılan çalışmalar özet halinde verilmiştir. İkinci bölümde Lipschitz koşulu ve çözümün tekliği araştırılmıştır.Üçüncü bölümde sınırlı gecikmeli sistemler tanıtılarak, bu tür sistemleri içeren başlangıç değer problemlerin teklik ve varlık teoremleri ispatlanmıştır.Dördüncü bölümde lineer gecikmeli sistemlerin, adi diferensiyel denklem sistemleri için bilinen bazı özellikleri sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir.
Son bölümde ise sınırlı gecikmeli diferensiyel denklemler için Lyapunov anlamında kararlılık tanımları ve bazı önemli sonuçlar yer almaktadır.

DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND STABILITY THEORY

Irem SAKINÇ

Key Words: Delay, Lipschitz, Differential Equation, Lyapunov Method, Existence and Uniqueness

Abstract: This Master Thesis consists of five chapters. In chapter 1, we give basic definitions and examples of delay differential equations followed by general informations used for later chapters and a summary of prework for this thesis. In chapter 2, Lipschitz condition and the uniqueness of the solution are studied. In chapter 3, we introduce the bounded delay systems as well as the proof of existence and uniqueness theorems for initial value problems containing these systems.In chapter 4, we discuss whether the linear delay systems satisfy the properties known for ordinary differential equations in the sense of Lyapunov stability.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada Gecikmeli Diferensiyel Denklemler incelenmiştir.

Bu çalışmayı yöneten danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Serdal PAMUK'a, Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU' na ve yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Ağacık ZAFER' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: En az bir
$\cong$	: Denk
Σ	: Toplam Sembolü
$\cup$	: Birleşim
$\subset$	: Kapsar
$\in$	: Eleman
$\Rightarrow$	: Gerek koşul
R	: Reel Sayılar Kümesi
C	: Sürekli Fonksiyonlar Sınıfı
D	: R'de Açık Küme
θ	: Başlangıç Fonksiyonu
t	: Zaman
r	: Gecikme Sabiti
$\times$	: Kartezyen Çarpım

BÖLÜM I

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Giriş

Bir fiziksel olayı adi veya kısmi diferensiyel denklemler yardımıyla tanımlamış olmak, söz konusu sistemin gelecekteki değişimini geçmiş durumundan bağımsız kalarak hesaplamak demektir.

Halbuki gerçek durum, çoğunlukla , bundan farklıdır. Pek çok olayda bir sistemin şu anki durumu geçmişine bağlı olarak ifade edilir. Böyle bir hipotez altında olayın modellenmesi halinde gecikmeli diferensiyel denklemler olarak adlandırılan başka bir denklem sınıfı elde edilmiş olur. Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemler için birer örnektir :

$$x'(t) - x(t-1) - x(t-\sqrt{2}) = 0 \tag{1.1}$$

$$x'(t) = x(t) - x(\frac{t}{2}) \tag{1.2}$$

$$x''(t) - x'(t-1) + x(t) = 0 \tag{1.3}$$

$$x''(t) + x'(t) + x(t-3) = \sin t \tag{1.4}$$

$$x'(t) = x(t)\, x(t-1) \tag{1.5}$$

Bu örneklerden görüleceği üzere bir gecikmeli diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini farklı gecikme argümentlerine bağlı bırakan diferensiyel denklemdir. Bu tür bir denkleme literatürde ilk kez onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında rastlanmıştır. (Kondorse, 1771) Ama böylesi denklemlerin sistematik olarak incelenmesi yirminci yüzyılın ikinci yarısında A.D. Myshkis , E.M. Wright, R . Bellman ve diğerleri tarafından yapılan çalışmalarla başlamıştır.

Gecikmeli diferensiyel denklemler çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin, otomatik kontrol teorisi, self – salınımlı sistemler teorisi, roketleri hareket ettiren yanma ile ilgili problemler ve bir dizi biyoloji problemi gecikmeli diferensiyel denklemler sayesinde incelenebilmektir.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem içindeki bilinmeyen fonksiyonun en yüksek türevinin basamağına denklemin basamağı denir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler için lineerlik kavramı adi diferensiyel denklemlerdekine benzer olarak ifade edilebilir. Buna göre, (1.1), (1.2) ve (1.3) lineer homogen denklemler; (1.4) lineer homogen olmayan denklem ve (1.5) lineer olmayan denklemdir.

1.2 Çözüm Kavramı

Bir gecikmeli diferensiyel denklem ile bir adi diferensiyel denklemin çözüm kavramı arasındaki farkı ortaya koymak üzere

$$x'(t) = kx(t-h) \quad , k,h=\text{sabit}\, , k \neq 0 \tag{1.6}$$

denklemini ele alalım.

Bu denklemin x(t) çözümü $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında incelenmiş olsun, yani

$x : [\alpha,\beta] \to R, \ \ \beta \rangle \alpha + h$.

h=0 için (1.6) bir adi diferensiyel denklemdir ve bu durumda x(t) çözümü $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığı boyunca tanımlıdır.

$h \rangle 0$ halinde $\alpha \leq t \langle \alpha + h$ için $t - h \langle \alpha$ olduğundan, (1.6) gecikmeli diferensiyel denklemlerinin ikinci yanı tanımsızdır. Bu sıkıntı aşağıdaki tanımla aşılmaktadır.

Tanım 1.2.1: (1.6) nın $\alpha \le t \le \beta$ aralığı üzerinde tanımlı bir $x(t)$ çözümü, $t-h\langle\alpha$ için (1.6) denkleminin sağındaki x(t-h) yerine $\alpha - h \le t\langle\alpha$ aralığından tanımlı olan bir ϕ başlangıç fonksiyonunun değerlerini koymak üzere her $t \in [\alpha,\beta]$ için (1.6) denklemini sağlayan bir fonksiyondur. Bu tanıma göre

$x(t-h) = \phi(t), \quad t-h\langle\alpha$

olduğu kabul edilmiştir. Bu başlangıç fonksiyonu ya verilir ya da ek koşullardan elde edilir.

1.3 Adımlar Yöntemi

Basit bir gecikmeli diferensiyel denklem ile bir başlangıç fonksiyonundan meydana gelen başlangıç değer problemi

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)) \tag{1.7}$$

$$x(t) = \theta_0(t), \quad t_0 - r \le t \le t_0 \tag{1.8}$$

biçimindedir; burada r⟩0 gecikme sabitidir. Bu problem için en doğal çözüm yöntemi adımlar yöntemidir. Bu yönteme göre artık gecikme içermeyen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \theta_0(t-r)), \quad t_0 \le t \tag{1.9}$$

$$x(t_0) = \theta_0(t_0) \tag{1.10}$$

problemi göz önüne alınır. Zira $t_0 \le t \le t_0 + r$ için t-r argümenti $t_0 - r \le t \le t_0$ başlangıç aralığında değişmektedir ve $x(t-r) = \theta_0(t-r)$ dir.

(1.9) – (1.10) probleminin

$x(t) = \varphi_1(t)$, çözümünün $[t_0, t_0 + r]$ aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

İkinci adımda

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-r)), \quad t_0 + r \le t \tag{1.11}$$

$$x(t_0 + r) = \varphi_1(t_0 + r) \tag{1.12}$$

biçiminde gecikme içermeyen başka bir başlangıç değer problemi elde edilir.

(1.11) – (1.12) probleminin

$x(t)=\varphi_2(t)$, çözümünün $t_0+r\le t\le t_0+2r$ aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

Üçüncü adımda

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_2(t-r)),\quad t_0+2r\le t \tag{1.13}$$

$$x(t_0+2r)=\varphi_2(t_0+2r) \tag{1.14}$$

başlangıç değer problemi çıkar. Böyle devam edilirse,
n yinci adımda

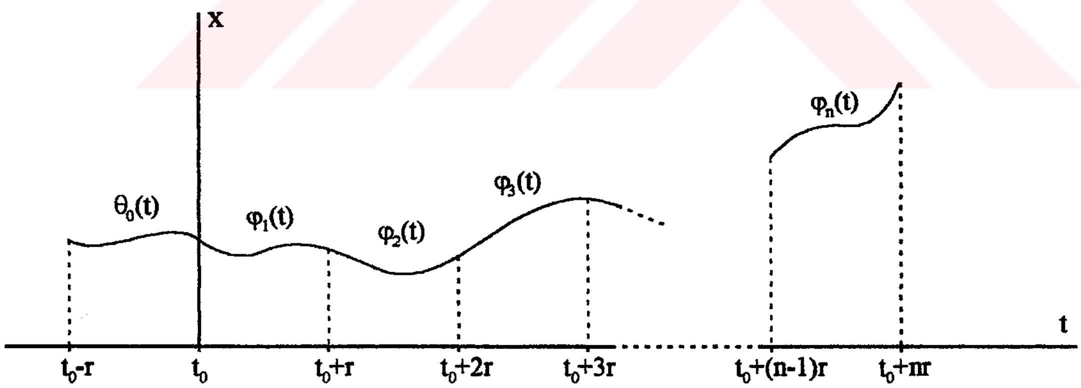
$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_{(n-1)}(t-r)),\quad t_0+(n-1)r\le t \tag{1.15}$$

$$x(t_0+(n-1)r)=\varphi_{n-1}(t_0+(n-1)r) \tag{1.16}$$

problemi bulunur.

(1.15) – (1.16) başlangıç değer probleminin
$x(t)=\varphi_n(t)$, çözümünün $t_0+(n-1)r\le t\le t_0+nr$ aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

Böylece (1.7)–(1.8) probleminin x(t) çözümü $[t_0,t_0+nr]$ aralığı boyunca tanımlanmış oldu.



Şekil 1.1: Gecikmeli diferensiyel denklemin $[t_0,t_0+nr]$ aralığındaki çözüm grafiği

Adımlar yöntemi x(t) çözümünü sonlu sayıda aralıklar üzerinde belirlemekle beraber θ_0 ve f sürekli olmak üzere $(t_0,\theta_0(t_0))$ noktasının bu komşuluğunda (1.9) – (1.10) probleminin bir çözümünün varlığını da ispatlar. Ayrıca; (1.9) denklemindeki f fonksiyonu ikinci argümenti göre bir Lipschitz koşulunu sağladığı zaman çözümünün tekliği de garanti edilmiş olur.

Örnek 1.3.1: Adımlar yöntemi ile

$$x'(t) = -cx(t-r) \tag{1.17}$$

$$x(t) = \theta_0, \quad t_0 - r \le t \le t_0 \tag{1.18}$$

başlangıç değer problemini $t_0 \le t \le t_0 + 2r$ aralığında çözelim; burada c ve θ_0 pozitif sabitlerdir.

$[t_0, t_0 + r]$ üzerinde (1.17)

$$x'(t) = -c\theta_0, \quad t_0 \le t \tag{1.19}$$

adi diferensiyel denklemine ve (1.18) de

$$x(t_0) = \theta_0 \tag{1.20}$$

başlangıç koşuluna indirgenir.

(1.19) – (1.20) probleminin

$x(t) = \varphi_1(t) = \theta_0[1 - c(t - t_0)]$, çözümünün $t_0 \le t \le t_0 + r$ aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

Meydana gelen yeni gecikmeli başlangıç değer problemi

$$x'(t) = -cx(t-r), \quad t_0 + r \le t$$

$$x(t) = \theta_0[1 - c(t - t_0)], \quad t_0 \le t \le t_0 + r$$

şeklindedir. Buradan da

$$x'(t) = -c\theta_0[1 - c(t - r - t_0)], \quad t_0 + r \le t \tag{1.21}$$

$$x(t_0 + r) = \theta_0[1 - cr] = \theta_0 - cr\theta_0 \tag{1.22}$$

yazılabilir. Bu başlangıç değer probleminin

$$x(t) = \varphi_2(t) = \theta_0\left[\frac{c^2}{2}(t - r - t_0)^2 - c(t - t_0) + 1\right],$$

çözümünün $t_0 + r \le t \le t_0 + 2r$

aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim. Böylece (1.17) – (1.18) probleminin $[t_0, t_0 + 2r]$ aralığındaki tek çözümü

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & , \quad t_0 \le t \le t_0 + r \\ \varphi_2(t) & , \quad t_0 + r \le t \le t_0 + 2r \end{cases}$$ olarak bulunur.

Örnek 1.3.2: $0 \le t \le r$ aralığında

$$\begin{cases} x'(t) = a_1\left(1 - \dfrac{x(t)}{P}\right)x(t) - b_1 y(t)x(t) \\ y'(t) = -a_2 y(t) + b_2 x(t-r)y(t-r) \end{cases} \tag{1.23}$$

lineer olmayan sistemini ve

$$\begin{cases} x(t) = \theta_1(t), & -r \le t \le 0 \\ y(t) = \theta_2(t), & -r \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

başlangıç fonksiyonlarını ele alalım; burada a_1, a_2, b_1, b_2, P ve r pozitif sabit sayılar olup θ_1 ve θ_2 verilen sürekli fonksiyonlardır.

(1.23) – (1.24) başlangıç değer problemi de adımlar yöntemi yardımıyla çözülebilir. Gerçekten $[0, r]$ üzerinde (1.23) deki ikinci denklemden

$$y'(t) = -a_2 y(t) + b_2\theta_1(t-r)\theta_2(t-r), \quad 0 \le t \tag{1.25}$$

adi lineer diferensiyel denklemi ve (1.24) den

$$y(0) = \theta_2(0) \tag{1.26}$$

başlangıç koşulu bulunur.

(1.25) – (1.26) başlangıç değer probleminin

$$y(t) = \psi(t), \text{ çözümünün } \ 0 \le t \le r \tag{1.27}$$

aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

Bunu verilen sistemin ilk denkleminde yerine koyarsak

$$x'(t) = a_1\left(1 - \frac{x(t)}{P}\right)x(t) - b_1\psi(t)x(t) \tag{1.28}$$

Bernoulli denklemi ve (1.24) den

$$x(0) = \theta_1(0) \tag{1.29}$$

koşulu elde edilir.

(1.28) – (1.29) başlangıç değer probleminin

$$x(t) = \varphi(t), \text{ çözümünün } 0 \le t \le r \tag{1.30}$$

aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim.

(1.27) – (1.30) den verilen problemin $0 \le t \le r$ üzerindeki tek çözümü

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), & 0 \le t \le r \\ y(t) = \psi(t), & 0 \le t \le r \end{cases} \tag{1.31}$$

biçiminde hesaplanmış olur.

Benzer işlemlere $[r,2r]$, $[2r,3r]$,... aralıklarında devam edilirse, problemin çözümü istenilen yere kadar hesaplanmış olur.

Şimdi aşağıdaki problem göz önüne alınabilir.

Örnek 1.3.3: (Karışım Problemi) B birim tuzlu su karışım içeren bir tankere üstteki bir musluktan dakikada q birim hızla taze su akıyor. Tuzlu su sürekli olarak karıştırılıyor ve karışım yine dakikada q birim hızla alttaki bir musluktan dışarı boşalıyor. Bu durumda t anında tankeri terk eden tuz miktarını bulalım.

x(t), t anında tankerdeki tuz miktarı olsun. Karıştırmanın tanker boyunca mükemmel yapıldığı kabul edilirse, tankeri terk eden tuzlu suda galon başına $\frac{x(t)}{B}$ birim kadar tuz bulunur ve buradan

$$\frac{dx(t)}{dt} = -q\frac{x(t)}{B}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir.

Ancak daha geçerli bir yaklaşımla karıştırım işleminin tanker boyunca gerçekleştiremediği kabul edilmelidir. Buradan t anında tankeri terk eden tuzlu suyun konsantrasyonu biraz daha önceki t-r anındaki ortalama konstrasyona eşit olacaktır. Buna göre x in diferensiyel denklemi

$$x'(t) = -q\frac{x(t-r)}{B}$$

yada

$$c = q/B$$

olmak üzere

$$x'(t) = -cx(t-r) \tag{1.32}$$

şeklinde bir gecikmeli diferensiyel denklemdir, burada r pozitif bir sabit olup gecikmeyi ifade etmektedir.

Şimdi $[t_0 - r, t_0]$ şeklinde r uzunluklu aralıkta bir başlangıç fonksiyonu belirlenirse, (1.32) denklemi t_0 anından itibaren incelenebilir. Başlangıç fonksiyonu

$$x(t) = \theta_0, \quad t_0 - r \le t \le t_0 \tag{1.33}$$

olsun, burada θ_0 pozitif bir sabittir .

Buna göre t_0 dan önce B birim tuzlu sudaki θ_0 tuz miktarının bilindiği kabul edilmektedir.

(1.32) – (1.33) başlangıç değer probleminin $[t_0, t_0 + 2r]$ aralığındaki çözümü Örnek 1.3.1 de hesaplanmıştır.

1. 4 Bazı Temel Sonuçlar

Lemma 1.4.1: (Gronwal-Reid Lemması) c verilen bir keyfi sabit, k negatif olmayan J aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $t_0 \in J$ olsun.

Eğer $v : J \to [0, \infty)$ fonksiyonu sürekli, J üzerindeki her t için

$$v(t) \le c + \left| \int_{t_0}^{t} k(s)v(s)ds \right|$$

ise

$$v(t) \le c e^{\left| \int_{t_0}^{t} k(s)ds \right|}$$

bulunur. (Driver, 1977)

Tanım 1.4.2: R^n de ξ ve η noktalarını birleştiren doğru parçası, $0 \le s \le 1$ olmak üzere $\zeta(s) = (1 - s)\xi + s\eta$ noktalarının kümesidir. Bir $A \subset R^n$ alt kümesindeki her ξ ve η noktalarını birleştiren doğru parçası tamamen A içinde kalıyorsa, bu durumda A ya konvekstir denir.

Teorem 1.4.3: (n değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi)

A, R^n nin konveks bir alt kümesi, $f : A \to R$ sürekli bir fonksiyon ve f fonksiyonu birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip olsun.

Eğer $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ve $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, A içinde herhangi iki nokta ise bu durumda;

$$f(\eta) - f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\theta_1, ..., \theta_n)(\eta_j - \xi_j)$$

olacak şekilde ξ ve η noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde bir $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ noktası vardır. Burada $D_j f$ operatörü f in j.inci bileşene göre kısmi türevini göstermektedir. (Wade, 2000)

Teorem 1.4.4: (Varlık ve Teklik Teoremi)

f, (n+1) boyutlu Euclid uzayının bir B bölgesinde tanımlanmış n bileşenli bir vektör fonksiyon olsun. f ve $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, (k=1,...,n) vektörleri B bölgesinde sürekli ise

$x' = f(t,x)$

sisteminin B de verilen her (t_0,k) noktası için $x(t_0) = k$ başlangıç koşulunu sağlayan bir tek x=x(t) çözümü vardır. Bu çözüm t_0 noktasını kapsayan bir I aralığı üzerinde tanımlıdır. Her $t \in I$ için $(t,x(t)) \in B$ dir ve x=x(t), (t,t_0,k) nın sürekli fonksiyonudur. (Dernek, 2001)

Teorem 1.4.5: (Bolzano Weierstrass Teoremi)

R^n de her sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir. (Wade, 2000)

Teorem 1.4.6: (Heine –Borel Teoremi)

R^n nin her kapalı ve sınırlı alt kümesi kompakttır. (Wade, 2000)

Teorem 1.4.7: (R^n de bir kapalı ve sınırlı küme üzerinde sürekli fonksiyon)

A, R^n nin kapalı ve sınırlı alt kümesi, $f : A \to R$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu A üzerinde sınırlı ve düzgün süreklidir. (Wade, 2000)

Teorem 1.4.8: (Picard Teoremi) w=f(z) analitik fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir ayrık esas singülerliğe sahip ise, z_0 ın keyfi şekilde küçük seçilen her komşuluğunda en fazla bir değer hariç her değeri sonsuz defa alır. (Osborne, 1999)

Teorem 1.4.9: x, bir sınırlı (a,b) aralığını R^n içine resmeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve B pozitif bir sabit olmak üzere;

$\|x'(t)\| \leq B, \quad t \in (a,b)$

olsun. Bu durumda;

$\lim_{t \to a^+} x(t)$ ve $\lim_{t \to a^-} x(t)$ limitleri mevcuttur. (Driver, 1977)

BÖLÜM II

2. LİPSCHİTZ KOŞULU ve TEKLİK TEOREMLERİ

2.1 Giriş

Bu bölümde adi diferensiyel denklemler için bilinen teklik teoremlerinin oldukça genel olan gecikmeli diferensiyel denklemlere genişletilmesi üzerinde durulacaktır.

x ve f n-vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere gecikmeli diferensiyel denklemlerin

$$x'(t) = f(t, x(g_1(t)), \dots, x(g_m(t))) \tag{2.1}$$

sistemini ele alalım; burada her bir $g_j(t)$ bir gecikme argümentidir, yani j=1,...,m için $g_j(t) \le t$ dir. Çoğunlukla $g_1(t) = t$ dir.

Bazen $g_j(t)$ yerine $t - r_j(t)$ yazılabilir. Böyle bir durumda negatif olmayan $r_j(t)$ fonksiyonları gecikmeleri temsil eder.

Ayrıca her bir j=1,...,m için

$\gamma \le g_j(t) \le t, \;\; t_0 \le t \langle \beta$

olacak şekilde bir $0 \langle \gamma \le t_0$ sayısının varlığı kabul edilmektedir.

J,R de bir aralık ve D, R^n de bir açık küme olsun. Genellikle $J = [t_0, \beta)$ olarak bazen de $\alpha \le t_0 \le \beta$ olmak üzere $J = (\alpha, \beta)$ olarak alınır.

$f : J \times D^m \to R^n$

şeklinde bir dönüşüm olsun. (2.1) denklemi $t_0 \le t \langle \beta$ üzerinde

$$x(t) = \theta(t), \;\; \gamma \le t \le t_0 \tag{2.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınacaktır. Burada θ ;

$\theta : [\gamma, t] \to D$

şeklinde verilen sürekli bir başlangıç fonksiyonudur. Şimdi (2.1) denklemi yerine kolaylık olması açısından daha kısa bir notasyon oluşturalım.

Verilen $t \in [t_0, \beta)$ ve verilen herhangi bir

$\chi : [\gamma, t] \to D$ fonksiyonu için

$F(t, \chi_t) = f(t, \chi(g_1(t)), \ldots, \chi(g_m(t)))$

olsun. Bu notasyon yardımıyla (2.1) denklemi

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{2.3}$$

kompakt formunu alır.

Tanım 2.1.1: (2.1) – (2.2) probleminin bir çözümü aşağıdaki koşulları sağlayan bir sürekli

$x : [\gamma, \beta_1) \to D,\ \beta_1 \in (t_0, \beta]$

fonksiyonudur.

(i) $x(t) = \theta(t)$, $\gamma \le t \le t_0$

(ii) $x'(t) = F(t, x_t)$, $t_0 \le t \le \beta_1$

($x'(t_0)$, sağdan türev anlamındadır.)

Tanım 2.1.2: (2.1) – (2.2) probleminin aynı aralıkta tanımlı olan herhangi iki çözümü birbirinin aynı ise, çözüme tektir denir.

f ve $g_1, \ldots, g_m$ fonksiyonları sürekli olsun. x, bir $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ için

$x : [\gamma, \beta_1) \to D$

şeklinde sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda

$F(t, x_t) = f(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t)))$ fonksiyonu t ye göre süreklidir.

Buradan x in (2.1) – (2.2) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$x(t)=\begin{cases}\theta(t), \ \gamma\le t\le t_0\\ \theta(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}F(s,x_s)d_s, \ t_0\le t\le\beta_1\end{cases} \tag{2.4}$$

integral denkleminin çözümü olmasıdır. Bu nedenle, genellikle (2.1) – (2.2) denklemleri yerine (2.4) denklemi ile çalışmak daha uygundur.

Tekliğin inşası için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1.3: $G\subset J\times D^m$ olmak üzere her $(t,\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)})$ ve $(t,\tilde{\xi}_{(1)},\ldots,\tilde{\xi}_{(m)})\in G$ için

$$\left\|f(t,\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)})-f(t,\tilde{\xi}_{(1)},\ldots,\tilde{\xi}_{(m)})\right\|\le K\max_{j=1,\ldots,m}\left\|\xi_{(j)}-\tilde{\xi}_{(j)}\right\| \tag{2.5}$$

ise, bu durumda f ye G üzerinde K Lipschitz sabitli bir Lipschitz koşulunu sağlıyor yada kısaca Lipschitzian denir.

R^n de bir $\xi=col(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ vektörünün normu

$$\|\xi\|=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$$

şeklinde tanımlıdır.

Buna göre f, G üzerinde (2.5) Lipschitz koşulunu sağlamak üzere $t\in[t_0,\beta]$ ve $\chi,\tilde{\chi}:[\gamma,t]\to D$ için

$$\big(t,\chi(g_1(t)),\ldots,\chi(g_m(t))\big),\ \big(t,\tilde{\chi}(g_1(t)),\ldots,\tilde{\chi}(g_m(t))\big)\in G$$

ise , bu durumda

$$\left\|F(t,\chi_t)-F(t,\tilde{\chi}_t)\right\|\le K\max_{j=1,\ldots,m}\left\|\chi(g_j(t))-\tilde{\chi}(g_j(t))\right\|\le K\sup_{\gamma\le s\le t}\left\|\chi(s)-\tilde{\chi}(s)\right\| \tag{2.6}$$

dir.

f, $J\times D^m$ nin tamamında Lipschitzian ise, (2.1) – (2.2) probleminin en fazla bir çözüme sahip olduğu kolayca ispatlanır. Ancak böyle bir genel Lipschitz koşulu lineer olmayan denklemler için nadiren sağlanır. Bu yüzden daha zayıf bir varsayım olarak lokal Lipschitz koşulu gözönüne alınır.

Tanım 2.1 4: Her bir $(t,\eta_{(1)},...,\eta_{(m)}) \in J \times D^m$ noktası için

$$A_j \equiv \{\xi \in R^n : \|\xi - \eta_{(j)}\| \le b\}, j=1,...,m \tag{2.7}$$

D nin bir alt kümesi olmak üzere f fonksiyonu

$([t_1 - a, t_1 + a] \cap J) \times A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$

kümesi üzerinde Lipschitzian olacak şekilde $a \rangle 0$ ve $b \rangle 0$ sabitleri var ise , bu durumda

$f : J \times D^m \to R^n$

fonksiyonuna bir Lokal Lipschitz koşulunu sağlıyor yada Lokal Lipschitzian dır denir.

Teorem 2.1.5: Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) f fonksiyonu $[t_0,\beta) \times D^m$ üzerinde sürekli ve lokal Lipschitziandır ;

(ii) Her bir g_j gecikme argümenti $[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli ve $\gamma \le g_j(t) \le t$ dir;

(iii) θ başlangıç fonksiyonu $[\gamma, t_0] \to D$ üzerinde süreklidir.

Bu durumda (2.1) – (2.2) problemi bir $[\gamma, \beta_1)$ aralığında en çok bir çözüme sahiptir, burada $t_0 \langle \beta_1 \le \beta$ dır.

Kanıt: Çelişki için $[\gamma,\beta_1) \to D$ üzerinde tanımlı olan x ve $\tilde{x}$, $x \ne \tilde{x}$, gibi iki çözümün var olduğunu kabul edelim

$x(t) = \tilde{x}(t)$, $[\gamma, t_0]$ üzerinde

olduğundan en az bir $t \in (t_0,\beta_1)$ için

$x(t) \ne \tilde{x}(t)$

dır.

$t_1 = \inf\{t \in (t_0,\beta_1) : x(t) \ne \tilde{x}(t)\}$

olsun. Buradan $t_0 \langle t_1 \langle \beta_1$ olup x ve $\tilde{x}$ sürekliliğinden

$x(t) = \tilde{x}(t), \gamma \le t \le t_1$

dir. $t_0 \langle t_1 \langle \beta_1$ ve her bir $x(g_j(t_1)) \in D$

olduğundan $a \rangle 0$ ve $b \rangle 0$ sabitleri seçilebilir öyle ki

$[t_1-a,t_1+a]\subset(t_0,\beta_1)$ ve (2.7) deki gibi tanımlanan her bir $A_j\subset D$ için f fonksiyonu

$[t_1-a,t_1+a]\times A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$ üzerinde Lipschitzian'dır. Lipschitz sabiti K olsun.

Şimdi, bir $\beta_2\in(t_1,t_1+a)$ için $t_1\le t\langle\beta_2$ aralığına karşılık gelen $x(g_j(t))$ ve $\tilde{x}(g_j(t))$ noktaları A_j içinde kalırlar. $t_1\le t\langle\beta_2$ için x ve $\tilde{x}$ nin ikisi de (2.4) denklemini sağladıklarından ;

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\|=\left\|\int_{t_1}^{t}[F(s,x_s)-F(s,\tilde{x}_s]ds\right\|$$

$$\le K\int_{t_1}^{t}\sup_{\gamma\le\sigma\le s}\|x(\sigma)-\tilde{x}(\sigma)\|ds$$

bulunur. Şimdi

$$v(t)=\sup_{\gamma\le s\le t}\|x(s)-\tilde{x}(s)\|$$

olsun. Buradan

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\|\le K\int_{t_1}^{t}v(s)ds,\ t_1\le t\langle\beta_2$$

yada $\gamma\le s\le t_1$ için $x(t)=\tilde{x}(t)$ olduğundan

$$v(t)\le K\int_{t_1}^{t}v(s)ds,\ t_1\le t\langle\beta_2$$

elde edilir.

Lemma 1.4.1 den v(t)=0 olur ve buradan her $t\in[\gamma,\beta_2)$ için $x(t)=\tilde{x}(t)$ bulunur. Bu ise t_1 in tanımıyla çelişir.

Örnek 2.1.6: $x'(t)=x(\frac{t}{2})$ denklemini ve $x(0)=x_0$ koşulunu ele alalım.

Bu problemin $[0,\beta)$, $\beta\rangle 0$, aralığında en çok bir çözümü vardır. Bu sonuç Teorem 2.1.5 den hemen çıkar. Çünkü burada f ve g fonksiyonları sürekli olup f global Lipschitz koşulunu sağlar.

f in lokal Lipschitzian olması fonksiyonun Lipschitzian olmasından daha zayıftır. Şimdi lokal Lipschitz koşulu hakkında basit bir yeter koşuldan söz edelim.

Lemma 2.1.7: $f:[t_0,\beta)\times D^m \to R^n$ fonksiyonu ilk argümenti hariç diğer bütün argümentlerine göre birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip ise, bu durumda f lokal Lipschitzian'dır.

Kanıt: $(t_1,\eta_{(1)},\ldots,\eta_{(m)})$, $J\times D^m=[t_0,\beta)\times D^m$ de herhangi bir nokta olsun.

$a\rangle 0$, $t_1+a\langle\beta$ olacak şekilde seçilen yeterince küçük bir sayı, ve $b\rangle 0$ sayısı da bir j=1,...,ya da m için $\|\xi-\eta_{(j)}\|\le b$ olduğu zaman $\xi\in D$ olacak şekilde seçilen yeterince küçük olsun. b nin bu seçimi daima mümkündür. Çünkü, D açık bir kümedir.

Buna göre;

$J_1\equiv[t_1-a,t_1+a]\cap J$

arakesiti J nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir, ve her bir

$A_j\equiv\{\xi\in R^n:\|\xi-\eta_{(j)}\|\le b\}\subset D$ kapalı ve sınırlıdır. Buradan

$J_1\times A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$

kümesi $J\times D^m$ nin bir kapalı ve sınırlı alt kümesidir.

Teorem 1.4 .7 den dolayı, bu küme üzerinde f in sürekli kısmi türevleri sınırlıdır.

B, her i=1,...,n ve p=1,...,m için $|D_{1+p}f_i|$ nin bir ortak sınırı olsun.

Öte yandan $A_1\times\ldots\times A_m$ kümesi konvekstir.

Gerçekten, $(\xi_{(1)},\ldots\xi_{(m)})$ ve $(\tilde{\xi}_{(1)},\ldots,\tilde{\xi}_{(m)})$ noktaları $A_1\times\ldots\times A_m$ içinde herhangi iki nokta, $0\le s\le 1$ ve

$\zeta_{(j)}(s)\equiv(1-s)\xi_{(j)}+s\tilde{\xi}_{(j)}, j=1,\ldots,m$;

ise, bu durumda;

$$\begin{aligned}\|\zeta_{(j)}(s)-\eta_{(j)}\| &= \|(1-s)(\xi_{(j)}-\eta_{(j)})+s(\tilde{\xi}_{(j)}-\eta_{(j)})\| \\ &\le (1-s)b+sb=b\end{aligned}$$

Böylece Teorem 1.4.4 den

$(t,\xi_{(1)},\dots,\xi_{(m)})$ ve $(t,\tilde{\xi}_{(1)},\dots,\tilde{\xi}_{(m)}) \in J_1 \times A_1 \times \dots \times A_m$

ise , bu durumda her bir i=1,...,n için

$$\left|f_i(t,\xi_{(1)},\dots,\xi_{(m)}) - f_i(t,\tilde{\xi}_{(1)},\dots\tilde{\xi}_{(m)})\right| \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} B\left|\xi_{(j)k} - \tilde{\xi}_{(j)k}\right| \le mB \max_{j=1,\dots,m}\left\|\xi_{(j)} - \tilde{\xi}_{(j)}\right\|$$

bulunur. i=1,...,n için toplama yapılır ve K=nmB alınırsa,

$$\left\|f(t,\xi_{(1)},\dots,\xi_{(m)}) - f(t,\tilde{\xi}_{(1)},\dots\tilde{\xi}_{(m)})\right\| \le K \max_{j=1,\dots,m}\left\|\xi_{(j)} - \tilde{\xi}_{(j)}\right\|$$

elde edilir.

Örnek 2.1.8:

$$x'(t) = \frac{1 + tx(t)x(t-1)}{x(t/2)}, \quad t \rangle 0$$

$$x(t) = \theta(t) = \text{cost}, \quad -1 \le t \le 0$$

problemi herhangi bir $[-1,\beta_1)$ aralığında en çok bir çözüme sahiptir. Gerçekten,

$f(t,\xi_{(1)},\xi_{(2)},\xi_{(3)}) = \dfrac{1 + t\xi_{(1)}\xi_{(2)}}{\xi_{(3)}}$ fonksiyonu ve bunun birinci basamaktan kısmi

$\dfrac{\partial f}{\partial \xi_{(1)}}, \dfrac{\partial f}{\partial \xi_{(2)}}, \dfrac{\partial f}{\partial \xi_{(3)}}$ türevleri $R \times D^3$, $D = (0,\infty)$, üzerinde sürekli olduklarından Lemma 2.1.7 den dolayı bu fonksiyon $R \times D^3$ üzerinde lokal Lipschitzian dır. Ayrıca, $\theta : [-1,0] \to D$ başlangıç fonksiyonu süreklidir. Buradan Teorem 2.1.5 uygulanır.

Uyarı 2.1.9: Burada verilen tanımlar ve Teorem 2.1.5 bir özel durum olarak adi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Zira, $m=1, g_1(t) = t$ ve $\gamma = t_0$ için (2.1) denklemi bir adi diferensiyel denklemdir.

Öte yandan, Teorem 2.1.5, çözümü tek olduğu zaten bilinen bazı gecikmeli diferensiyel denklemlere uygulanmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) = [x(t-1)]^{2/3}, \quad t \ge 0$$

$$x(t) = \theta(t), \quad -1 \le t \le 0$$

problemi tek çözüme sahip olduğu bilinmesine rağmen Teorem 2.1.5 in koşulları sağlanmamaktadır.

Uyarı 2.1.10: İkinci ve daha yüksek basamaktan gecikmeli denklemler adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi birinci basamaktan sistemlere indirgenerek incelenebilirler.

n yinci basamaktan gecikmeli skaler

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(g_1(t)), x'(g_1(t)), \ldots, x^{(n)}(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t)), x'(g_m(t)), \ldots, x^{(n-1)}(g_m(t)),$$

$$t_0 \leq t \langle \beta \qquad (2.8)$$

diferensiyel denklemini ve

$$x^{(j)}(t) = \varphi^{(j)}(t),\ \gamma \leq t \leq t_0,\ j = 0,1,2,\ldots \qquad (2.9)$$

başlangıç fonksiyonunu ele alalım; burada φ ve onun türevleri ilk n-1 yinci basamaktan türevleri sürekli ve her $t \in [\gamma, t_0)$ için $(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ dir.

Eğer $y_1(t) = x,\quad y_2(t) = x', \ldots, y_n(t) = x^{(n-1)}$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{(n-1)}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = f(t, y(g_1(t)), \ldots, y(g_m(t))) \end{cases}$$

sistemi

$$\begin{cases} y_1(t) = \varphi \\ y_2(t) = \varphi' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) = \varphi^{(n-1)} \end{cases}$$

başlangıç koşulu ile elde edilir. O halde $[\gamma, t_0]$

$$y(t) = col(y_1, y_2, ..., y_n)$$
$$\theta(t) = col(\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)})$$

tanımlıdır. Böylece n yinci basamaktan gecikmeli diferensiyel denklem sistemi

$$y'(t) = f(t, y_t)$$
$$y(t) = \theta(t)$$

şeklinde birinci basamaktan gecikmeli diferensiyel denklem sistemine indirgenmiş olur. Dolayısıyla Teorem 2.1.5 ve Lemma 2.1.7 bu durumda da kullanılabilir.

Bu bölümde son olarak bir elemanter sürekli bağımlılık sonucundan söz edilecektir. Yani θ başlangıç fonksiyonundaki bir değişiklik karşısında gecikmeli diferensiyel denklemler sisteminin çözümünde meydana gelen değişiklik hakkında bir kestirim bulunmaktadır.

Teorem 2.1.11: $f : [t_0, \beta) \times D^m \to R^n$ fonksiyonu sürekli ve K Lipschitz sabitli Lipschitzian, her bir g_j gecikme argümenti $[t_0, \beta)$ üzerinde $\gamma \le g_j(t) \le t$ olmak üzere sürekli olsun. Ayrıca ;

$$\theta : [\gamma, t_0] \to D$$
$$\tilde{\theta} : [\gamma, t_0] \to D$$

sürekli olsun. x ve $\tilde{x}$ (2.1) denkleminin, sırasıyla, θ ve $\tilde{\theta}$ başlangıç fonksiyonlu (2.2) denklemini sağlayan ve $[\gamma, \beta_1)$ üzerinde tanımlı olan çözümleri olsun.

Bu durumda , $t_0 \le t \langle \beta_1$ için

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \le \sup_{\gamma \le s \le t_0} \|\theta(s) - \tilde{\theta}(s)\| \, e^{K(t-t_0)} \tag{2.10}$$

dır.

Kanıt: x ve $\tilde{x}$ sırasıyla, (2.4) ve $(2.\tilde{4})$ denklemlerini sağlayan iki çözümü olsun; burada (2.4) ve $(2.\tilde{4})$ denkleminde θ yerine $\tilde{\theta}$ alınmış halidir. $t_0 \le t \langle \beta$ için çıkarma yapılırsa ,

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\| = \left\|\theta(t_0)-\tilde{\theta}(t_0)+\int_{t_0}^{t}[F(s,x_s)-F(s,\tilde{x}_s)]ds\right\|$$

$$\leq \|\theta(t_0)-\tilde{\theta}(t_0)\| + K\int_{t_0}^{t}\sup_{\gamma\leq\sigma\leq s}\|x(\sigma)-\tilde{x}(\sigma)\|ds$$

bulunur.

$$v(t) = \sup_{\gamma\leq s\leq t}\|x(s)-\tilde{x}(s)\|$$

olsun. Bu durumda

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\| \leq \|\theta(t)-\tilde{\theta}(t)\| + K\int_{t_0}^{t}v(s)ds,\ t_0 \leq t\langle\beta_1,$$

ya da

$$\|\theta(t)-\tilde{\theta}(t)\| \leq v(t_0),\ \gamma\leq t\leq t_0\ ,$$

olduğundan

$$v(t) \leq v(t_0) + K\int_{t_0}^{t}v(s)ds,\ t_0 \leq t\langle\beta_1$$

elde edilir.

Lemma 1.4.1 den

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\| \leq v(t_0)\ e^{K(t-t_0)},\ \ t_0 \leq t\langle\beta_1,$$

bulunur. Bu ise (2.10) nun ifadesidir.

BÖLÜM III

3. SINIRLI GECİKMELİ SİSTEMLER

3.1 Giriş

Çok sayıda pratik değeri olan problemlerin sabit gecikmelere ya da sabit değilse bile en azından sınırlı gecikmelere sahip diferensiyel denklemlere neden oldukları bilinmektedir. Bu yüzden bu bölümde sınırlı gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri tanıtılacak ve bu tür sistemleri içeren başlangıç değer probleminin teklik ve varlık teoremleri ispatlanacaktır.

Şimdi bir $r \geq 0$ sabiti için

$t-r \leq g_j(t) \leq t,\ \ t \geq t_0,\ j=1,\dots,m$ olmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(g_1(t)),\dots, x(g_m(t))) \tag{3.1}$$

sistemini ve buradan

$$x(t) = \theta(t),\ \ t_0 - r \leq t \leq t_0\ , \tag{3.2}$$

başlangıç fonksiyonunu ele alalım.

$r = 0$ için (3.1) sistemi bir adi diferensiyel denklem sistemine dönüşür. $\beta \rangle t_0$ bir sayı ve $D \subset R^n$ bir açık küme olmak üzere f,

$[t_0, \beta) \times D^m \to R^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

(3.1) denklemini daha iyi ifade etmek için

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{3.3}$$

şeklinde bir notasyon kullanılmıştı. Anımsanacağı üzere orada ne F ne de x_t için bir tanım yapılmadı, o kadar ki $F(t, x_t)$ kombinasyonu sadece (3.1) in sağ tarafını temsil etmişti. Şimdi sınırlı gecikmeli özel durumu için Shimanov [1960] tarafından F ve

x_t hakkında verilen ve gecikmeli diferensiyel denklemler literatüründe yoğun bir şekilde kullanılan tanımı ifade edelim.

Tanım 3.1.1: Bir $\chi:[t-r,t]\to R^n$

fonksiyonu için

$\chi_t(\sigma)=\chi(t+\sigma),\ -r\le\sigma\le 0$

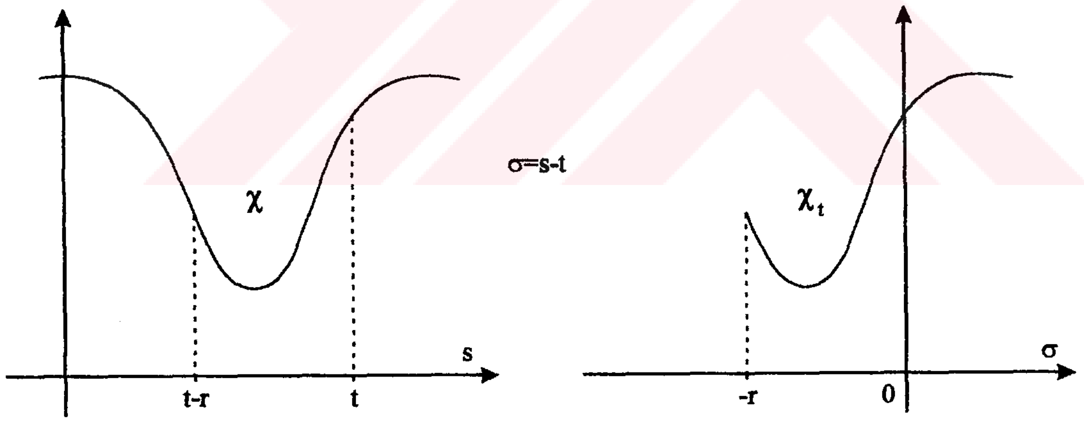
olmak üzere

$\chi_t:[-r,0]\to R^n$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlanabilir.

Bu tanıma göre, (3.3) denklemi sadece daha kısa bir gösterimi değil, aynı zamanda potansiyel olarak (3.1) denkleminden daha genel bir yapıyı temsil eder.

χ_t nin grafiği, $\chi(s)$ nin sadece $t-r\le s\le t$ için bulunan grafik parçanın [-r,0] aralığına taşınmasından ibarettir. (Şekil 3.1), χ bir sürekli fonksiyon ise bu durumda χ_t de [-r,0] üzerinde süreklidir.



Şekil 3.1: [t-r, t] aralığındaki $\chi(s)$ için bulunan grafik parçasının [-r, 0] aralığına taşınmış grafiği.

$[-r,0]\to R^n$ üzerinde tanımlı olan bütün sürekli fonksiyonların $C([-r,0],R^n)$ sınıfı C ile gösterilecektir. A, R^n de herhangi bir küme ise,

$C_A=C([-r,0],A)$ dır.

O halde $\chi:[t-r,t]\to A$ bir sürekli fonksiyon ise, bu durumda $\chi_t\in C_A$ dır.

(3.1) ya da (3.3) denklemi bazen bir $[t_0, \beta)$ yarı açık aralığında bazen de bir (α, β) açık aralığında ele alınabilir. Dolayısıyla, J aralığı gereksinime göre $[t_0, \beta)$ ya da (α, β) olacaktır.

(3.3) denklemi, f fonksiyonu $J \times D^m$ üzerinde tanımlı olmak üzere, (3.1) denklemini temsil ediyorsa, bu durumda $t \in J$ ve $\chi_t \in C_D$ olduğu sürece $F(t, \chi_t)$ anlamlı olur; yani

$F : J \times C_D \to R^n$ olmalıdır. Başka bir ifadeyle her bir $(t, \psi) \in J \times C_D$ için $F(t, \psi)$, R^n de iyi tanımlı bir nokta olmalıdır.

F gibi bir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir dönüşüme genellikle fonksiyon yerine fonksiyonel denir. Buradan (3.3) denklemine çoğunlukla bir fonksiyonel diferensiyel denklem denir. Bununla beraber, x in şimdiki ve geçmiş değerlerinin, $x'(t)$ nin üzerindeki etkileri göz önüne alındığında (3.1) ya da (3.3) denklemine daha çok bir gecikmeli diferensiyel denklem denir.

Örnek 3.1.2: (3.3) denkleminin (3.1) denklemine eşdeğer olması isteniyorsa, $F(t, \psi) = f(t, \psi(g_1(t) - t), \ldots, \psi(g_m(t) - t))$ şeklinde tanımlanmalıdır.

Gerçekten ;

$x_t(g_j(t) - t) = x(t + g_j(t) - t) = x(g_j(t))$ve

$F(t, x_t) = f(t, x_t(g_1(t) - t), \ldots, x_t(g_m(t) - t)) = f(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t))$

dır. Bu ise (3.1) ikinci yanıdır.

Daha önce söylendiği gibi (3.3) denklemi potansiyel olarak (3.1) denkleminden daha geneldir. Çünkü F fonksiyoneli $J \times C_D$ üzerinde tanımlı olduğundan $F(t, \chi_t)$ ifadesi $-r \le \sigma \le 0$ için $x_t(\sigma) = x(t + \sigma)$ değerlerinin bir kaçına ya da tümüne bağlı olabilir.

Örnek 3.1.3: $F(t, \psi) = \int_{-r}^{0} \psi(\sigma) d\sigma$ için (3.3) denklemi

$x'(t)=\int_{-r}^{0}x_t(\sigma)d\sigma=\int_{t-r}^{t}x(s)ds$ şeklinde bir sistem olur.

(3.3) denklemindeki notasyona daha aşina olmak için aşağıdaki örnekleri göz önüne alalım.

Örnek 3.1.4: $r=1, J=R, D=R$ olmak üzere

$F: R\times C\to R$

fonksiyonu

$F(t,\psi)=-c\psi(-1)[1+\psi(0)]$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda (3.3) denklemi

$x'(t)=-cx(t-1)[1+x(t)]$

denklemine dönüşür.

Örnek 3.1.5: $D=R^2$ olmak üzere

$F: R\times C\to R^2$

fonksiyonu

$$F(t,\psi)=\begin{pmatrix} a_1\left[1-\dfrac{\psi_1(0)}{p}\right]\psi_1(0)-b_1\psi_2(0)\psi_1(0) \\ -a_2\psi_2(0)+b_2\psi_1(-r)\psi_2(-r) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda (3.3) denklemi

$$x'(t)=a_1\left[1-\frac{x(t)}{p}\right]x(t)-b_1y(t)x(t)$$

$$y'(t)=-a_2y(t)+b_2x(t-r)y(t-r)$$

sistemini verir.

(3.3) denklemindeki notasyona uygun olsun diye (3.2) başlangıç koşulu da yeniden yazılmalıdır. (3.2) denklemi doğrudan

$x(t_0+\sigma)=\theta(t_0+\sigma),\ -r\le\sigma\le 0$,

denklemine eş değerdir. Bu ise kısaca

$x_{t_0}=\theta_{t_0}$

demektir. Bu eşitlik, $\phi=\theta_{t_0}$ alınırsa,

$$x_{t_0} = \phi \tag{3.4}$$

biçimini alır, burada $\phi \in C_D$ dır. (3.4) denkleminin $x(t_0 + \sigma) = \phi(\sigma)$ anlamında ya da $t = t_0 + \sigma$ alınırsa,

$$x(t) = \phi(t - t_0), \ \ t_0 - r \le t \le t_0 \tag{3.5}$$

şeklinde olduğunu belirtelim. Özel olarak;

$$x(t_0) = \phi(0)$$

dır.

Genellikle bir integral denkleme dönüştürüldükten sonra, bir başlangıç değer probleminin varlık ve tekliği daha kolay incelenmektedir. Benzer inceleme, ikinci yanı sürekli olan (3.3) denklemi için de yapılabilir. Dolayısıyla, öncelikle (3.1) denklemindeki f ve her bir g_j nin sürekli olması hipotezlerinin , (3.3) denklemindeki F fonksiyoneli için aşağıdaki süreklilik koşuluna dönüştüklerini belirtelim.

Tanım 3.1.6: (Süreklilik Koşulu) $F(t, \chi_t)$ verilen her sürekli

$$\chi : [t_0 - r, \beta) \to D$$

fonksiyonu için $[t_0, \beta)$ aralığında t ye göre sürekli ise, bu durumda süreklilik koşulu sağlanıyor denir.

Bu koşulun önemi şudur : Eğer ,

$$F : [t_0, \beta) \times C \to R^n$$

fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlıyorsa, bu durumda bir sürekli

$$x : [t_0 - r, \beta_1) \to D, \ \beta_1 \in (t_0, \beta],$$

fonksiyonunun (3.3) – (3.4) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul x(t) nin

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), t_0 - r \le t \le t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) ds, t_0 \le t \langle \beta_1 \end{cases} \tag{3.6}$$

çözümü olmasıdır.

Örnek 3.1.7: $F(t,\psi) = \int_{-r}^{0} \psi(\sigma)d\sigma$

fonksiyoneli süreklilik koşulu sağlamaktadır. Gerçekten, her sürekli $\chi : R \to R$ fonksiyonu için

$$F(t,\chi_t) = \int_{-r}^{0} \chi_t(\sigma)d\sigma = \int_{t-r}^{t} \chi(s)ds$$

fonksiyoneli t ye göre süreklidir. Hatta sürekli türevlenebilirdir.

Örnek 3.1.8: F, örnek 3.1.2 de olduğu gibi,

$$F(t,\psi) = f(t,\psi(g_1(t)-t),\ldots,\psi(g_m(t)-t))$$

şeklinde tanımlansın. f ve $g_1,\ldots,g_m$ lerin tümü sürekli ise , bu durumda herhangi bir sürekli $\chi : [t_0 - r, \beta) \to D$ fonksiyonu için $F(t,\chi_t)$ sürekli fonksiyonların bir bileşkesidir ve dolayısıyla $t_0 \le t\langle\beta$ aralığında süreklidir. Böylece , bu F fonksiyoneli de süreklilik koşulunu sağlar.

Örnek 3.1.9: Örnek 3.1.4 ve örnek 3.1.5 deki F fonksiyonelleri örnek 3.1.2 nin özel durumları olduğundan, bu fonksiyoneller de süreklilik koşulunu sağlar.

Süreklilik koşuluna ek olarak F fonksiyonelinin bir Lipschitz koşulunu sağlamasına ihtiyaç vardır. Dolayısıyla, C_D nin elemanlarının büyüklüğünü ölçmede kullanılacak uygun bir ölçü, bir $\psi \in C_D$ fonksiyonu için

$$\|\psi\|_r = \sup_{-r\le\sigma\le 0} \|\psi(\sigma)\| \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\|.\|_r$ ifadesi r- normu olarak bilinir.

Lemma 3.1.10: $D = R^n$ özel durumunda $C_D = C$ bir lineer uzay olup $\|\cdot\|_r$ de C uzayında bir normdur. Yani $\|\cdot\|_r$ aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $\|\psi\|_r \geq 0$, her $\psi \in C$,

(ii) $\|\psi\|_r = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$,

(iii) $\|c\psi\|_r = |c|\|\psi\|_r$, her $\psi \in C$ ve her $c \in R$,

(iv) $\|\psi + \tilde{\psi}\|_r \leq \|\psi\|_r + \|\tilde{\psi}\|_r$, her $\psi, \tilde{\psi} \in C$ (üçgen eşitsizliği)

Kanıt: C nin bir lineer uzay olması ile (i), (ii) ve (iii) özelliklerinin ispatları bırakılarak burada sadece (iv) özelliği kanıtlanacaktır.

Her bir $\sigma \in [-r,0]$ için

$\|\psi(\sigma) + \tilde{\psi}(\sigma)\| \leq \|\psi(\sigma)\| + \|\tilde{\psi}(\sigma)\| \leq \|\psi\|_r + \|\tilde{\psi}\|_r$ elde edilir.

Buradan σ nın $[-r,0]$ aralığı boyunca değiştiği göz önüne alınırsa;

$$\sup_{-r\leq\sigma\leq 0} \|\psi(\sigma) + \tilde{\psi}(\sigma)\| \leq \|\psi\|_r + \|\tilde{\psi}\|_r$$

yazılabilir. Bu ise (iv) özelliğidir.

Tanım 3.1.11: $F : J \times C_D \to R^n$ ve $\Omega \subset J \times C_D$ olsun.

(t, ψ) ve $(t, \tilde{\psi}) \in \Omega$ olduğu zaman bir $K \geq 0$ sayısı için

$$\|F(t,\psi) - F(t,\tilde{\psi})\| \leq K\|\psi - \tilde{\psi}\|_r \tag{3.8}$$

ise, bu durumda F fonksiyoneline Ω üzerinde K Lipschitz sabitli bir Lipschitz koşulunu sağlıyor ya da F Lipschitzian dır denir.

Örnek 3.1.12: F, örnek 3.1.3 deki gibi (n=1) ,

$$F(t,\psi) \equiv \int_{-r}^{0} \psi(\sigma)d\sigma$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda F fonksiyoneli $R \times C$ üzerinde Lipschitzian'dır. Gerçekten, verilen herhangi bir $t \in R$ ve herhangi bir $\psi, \tilde{\psi} \in C$ için

$$\|F(t,\psi)-F(t,\tilde{\psi})\| = \left|\int_{-r}^{0}[\psi(\sigma)-\tilde{\psi}(\sigma)]d\sigma\right| \le r\|\psi-\tilde{\psi}\|_r$$

dir.

Uyarı 3.1.13: f fonksiyonu $J\times D^m$ üzerinde (2.5) Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu durumda Örnek 3.1.2. deki

$F(t,\psi)=f(t,\psi(g_1(t)-t),\ldots,\psi(g_m(t)-t))$

fonksiyoneli $J\times C_D$ üzerinde (3.8) eşitsizliğini sağlar, yani Lipschitzian'dır. Bununla birlikte, F fonksiyoneli için verilen (3.8) Lipschitz koşulu tanımı f fonksiyonuna ilişkin (2.5) Lipschitz koşulunu ifade etmeyebilir.

Uyarı 3.1.14: Genel olarak, $J\times C_D$ kümesinin tamamı üzerinde bir global Lipschitz koşulunun sağlandığını görmek oldukça zordur. Bu koşul örnek 3.1.4 ve örnek 3.1.5 için bile sağlanmaz. Bu nedenle, varlık ve teklik teoremlerinde global lipschitz koşulu yerine aşağıda tanımı verilen daha zayıf lokal Lipschitz koşulu çoğunlukla kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.15: $F: J\times C_D \to R^n$ fonksiyoneli verilsin. Her bir $(\bar{t},\bar{\psi})\in J\times C_D$ için

$\Omega_0 = ([\bar{t}-a,\bar{t}+a]\cap J)\times\{\psi\in C : \|\psi-\bar{\psi}\|_r \le b\}$

kümesi $J\times C$ nin bir alt kümesi ve F bu Ω_0 üzerinde Lipschitzian olacak şekilde $a>0$ ve $b>0$ sabitleri varsa, bu durumda F fonksiyoneline lokal Lipschitzian denir. Başka bir ifadeyle, bir K sayısı için (t,ψ) ve $(t,\tilde{\psi})\in\Omega_0$ olduğu sürece

$\|F(t,\psi)-F(t,\tilde{\psi})\| \le K\|\psi-\tilde{\psi}\|_r$

dir ; burada K genellikle Ω_0 kümesine bağlı olan bir Lipschitz sabitidir.

Örnek 3.1.8 de tanımlanan F fonksiyonelinin, $f, g_1,\ldots,g_m$ lerin hepsi sürekli olması durumunda, süreklilik koşulunu sağladığı belirtildi. Şimdi, Tanım 2.1.4 e göre f in lokal Lipschitz olduğunu kabul edelim. Bu durumda, yukarıdaki tanıma göre F in lokal Lipschitzian olduğu gösterilebilir. Bununla ilgili olarak bir örnek vermeden önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.1.16: $\overline{\psi} \in C_D$ verilsin. Bu durumda

$\{\xi \in R^n : \|\xi - \overline{\psi}(\sigma)\| \le \delta,$ bir $\sigma \in [-r,0]$ için$\}$ kümesi D nin bir alt kümesi olacak şekilde bir $\delta \rangle 0$ sayısı vardır ve buradan özel olarak

$\{\psi \in C : \|\psi - \overline{\psi}\|_r \le \delta\} \subset C$.

Kanıt: Çelişki için böyle bir $\delta \rangle 0$ sayısının mevcut olmadığını kabul edelim. Bu durumda her bir p=1,2,... için bir $\sigma_p \in [-r,0]$ ve bir $\xi_p \in R^n - D$ mevcut olmalıdır öyle ki

$$\|\xi_p - \overline{\psi}(\sigma_p)\| \le \frac{1}{p}$$

dir. Teorem 1.4.5 (Bolzano – Weierstrass Teoremi) gereğince $\{\sigma_{p_k}\}$ dizisinin yakınsak bir $\{\sigma_{p_k}\}$ alt dizisi vardır. $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{p_k} = \sigma_0$ dır. Buradan $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{p_k} = \overline{\psi}(\sigma_0)$ bulunur. $\overline{\psi}(\sigma_0)$ noktası D açık kümesi içinde olmak zorundadır. Dolayısıyla, yeterince büyük k lar için ξ_{p_k} noktaları da D ye ait olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.

Örnek 3.1.17: $f : J \times D^m \to R^n$ fonksiyonu Tanım 2.1.4 göre lokal Lipschitzian olsun. Bu durumda örnek 3.1.2 de tanımlanan

$F : [t_0, \beta) \times C_D \to R^n$

fonksiyoneli Lokal Lipschitzian dır.

Bunu göstermek için herhangi bir $(\bar{t}, \overline{\psi}) \in J \times C_D$ verilsin. Bu durumda Lemma 3.1.16 dan

$\{\xi \in R^n : \|\xi - \overline{\psi}(\sigma)\| \le \delta,$ bir $\sigma \in [-r,0]$ için$\}$

kümesi D içinde kapsanacak şekilde bir $\delta \rangle 0$ sayısı vardır. Şimdi $a \rangle 0$ ve $b \in (0,\delta]$ sayılarını, f fonksiyonu

$([\bar{t} - a, \bar{t} + a] \cap J) \times A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ üzerinde K Lipschitz sabitli Lipschitzian olacak şekilde yeterince küçük seçelim, burada

$A_j \equiv \{\xi \in R^n : \|\xi - \overline{\psi}(g_j(\bar{t}) - \bar{t})\| \le b\}\ j = 1,\ldots,m$

dır. Bu durumda

$$\Omega_0 = \left([\bar{t}-a, \bar{t}+a] \cap J\right) \times \left\{\psi \in C : \|\psi - \bar{\psi}\|_r \le b\right\}$$

kümesi $J \times C_D$ nin bir alt kümesi olup (t,ψ) ve $(t,\tilde{\psi}) \in \Omega_0$ için

$$\begin{aligned}\|F(t,\psi) - F(t,\tilde{\psi})\| &= \|f(t,\ldots,\psi(g_j(t)-t),\ldots) - f(t,\ldots,\tilde{\psi}(g_j(t)-t),\ldots)\| \\ &\le K \max_{j=1,\ldots,m} \|\psi(g_j(t)-t) - \tilde{\psi}(g_j(t)-t)\| \\ &\le K\|\psi - \tilde{\psi}\|_r\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 3.1.18: Örnek 3.1.17 ile Lemma 2.1.7 nin birleştirilmesiyle örnek 3.1.2 deki F fonksiyonelinin Lokal Lipschitzian olması için f in sürekli türevlenebilir olmasının yeterli olacağı görülecektir.

3.2 Teklik ve Sürekli Bağımlılık Sonuçları

Bu kesimde sınırlı gecikmeli başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin tekliği ve çözümlerin başlangıç fonksiyonuna sürekli bağımlı oluşları incelenmektedir. Önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1: $\chi : [t_0 - r, \beta) \to R^n$ sürekli olsun. Bu durumda verilen herhangi bir $\bar{t} \in [t_0, \beta)$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$t \in [t_0, \beta)$ ve $|t - \bar{t}| < \delta$ olduğu sürece $\|\chi_t - \chi_{\bar{t}}\|_r < \varepsilon$

dır.

Kanıt: $\bar{t} \in [t_0, \beta)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\bar{t} + \delta_1 < \beta$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısını seçelim. χ kapalı ve sınırlı $[t_0 - r, \bar{t} + \delta_1]$ aralığında düzgün sürekli olduğundan Teorem 1.4.10 dan bir $\delta \in (0, \delta_1]$ sayısı vardır öyle ki s ve $\tilde{s} \in [t_0 - r, \bar{t} + \delta_1]$ için

$|s - \tilde{s}| < \delta$ olduğu sürece $\|\chi(s) - \chi(\tilde{s})\| < \frac{\varepsilon}{2}$

dir. Buradan

$t \in [t_0, \beta)$ ve $|t - \bar{t}| < \delta$ olduğu zaman

$$\|\chi_t - \chi_{\bar{t}}\|_r = \sup_{-r\le\sigma\le0} \|\chi(t+\sigma) - \chi(\bar{t}+\sigma)\| \le \frac{\varepsilon}{2} \langle \varepsilon$$

bulunur.

Teorem 3.2.2: (Teklik Teoremi) $F : [t_0, \beta) \times C_D \to R^n$

foksiyoneli süreklilik koşulunu sağlasın ve lokal Lipschitzian olsun. Bu durumda verilen herhangi bir $\phi \in C_D$ için (3.3) – (3.4) probleminin $[t_0 - r, \beta_1)$, bir $\beta_1 \in (t_0, \beta]$, üzerinde en fazla bir çözümü vardır.

Kanıt: Çelişki maksadıyla bir $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ için

$x, \tilde{x} : [t_0 - r, \beta_1) \to D,\ x \ne \tilde{x},$ şeklinde iki çözümün mevcut olduğunu kabul edelim.

$t_1 = \inf\{t \in [t_0, \beta) : x(t) \ne \tilde{x}(t)\}$

olsun. Bu durumda $t_0 \le t_1 \langle \beta_1$ olup

$x(t) = \tilde{x}(t),\ \ t_0 - r \le t \le t_1,$

dır.

$(t_1, x_{t_1}) \in [t_0, \beta_1) \times C_D$ olduğundan, $a \rangle 0$ ve $b \rangle 0$ sayıları vardır öyle ki

$\Omega_{01} = [t_1, t_1 + a] \times \{\psi \in C : \|\psi - x_{t_1}\|_r \le b\}$ kümesi $[t_0, \beta) \times C_D$ tarafından kapsanır ve F bu Ω_{01} üzerinde K Lipschitz sabitli Lipschitzian olur.

Lemma 3.2.1 den $t_1 \le t \le t_1 + \delta$ için $(t, x_t) \in \Omega_{01}$ ve $(t, \tilde{x}_t) \in \Omega_{01}$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, a]$ sayısı vardır.

Ayrıca, x ve $\tilde{x}$ nın ikisi de $t_0 - r \le t \le t_1 + \delta$ için (3.6) denklemini sağlar.

Buradan $t_1 \le t \le t_1 + \delta$ için

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| = \left\| \int_{t_1}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \tilde{x}_s)] ds \right\| \le \int_{t_1}^{t} K \|x_s - \tilde{x}_s\|_r ds\ .$$

Şimdi, sağ taraf t nin bir artan fonksiyonu ve de $t_1 - r \le t \le t_1$ için $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$ olduğundan,

$$\|x_t - \widetilde{x}_t\|_r \le \int_{t_1}^{t} K\|x_s - \widetilde{x}_s\|_r ds,\ t_1 \le t \le t_1 + \delta,$$

yazılabilir. Buradan ve Lemma 1.4.1 den $[t_1, t_1 + \delta)$ üzerinde $x(t) = \widetilde{x}(t)$ olur. Bu ise t_1 in tanımıyla çelişir.

Teorem 3.2.2 , sınırlı gecikmeli durumunda Teorem 2.1.5 in yerine geçer. Bu kesimde son olarak bir global Lipschitz koşulu varsayımı altında (3.3) denkleminin çözümlerinin başlangıç fonksiyonuna sürekli bağlı oldukları aşağıdaki teoremde ifade edilecektir. Bu teorem, Teorem 2.1.13 genelleştirmektedir.

Teorem 3.2.3: (Sürekli Bağımlılık) $F : [t_0, \beta) \times C_D \to R^n$
fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlasın ve K Lipschitz sabitli global Lipschitzian olsun. ϕ ve $\widetilde{\phi} \in C_D$ verilmek üzere x ve $\widetilde{x}$, (3.3) denkleminin, sırasıyla
$x_{t_0} = \phi$ ve $\widetilde{x}_{t_0} = \widetilde{\phi}$ koşullarını sağlayan tek çözümleri olsun.
x ve $\widetilde{x}$, çözümleri $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde tanımlı ise, bu durumda

$$\|x(t) - \widetilde{x}(t)\| \le \|\phi - \widetilde{\phi}\|_r e^{K(t-t_0)},\ t_0 \le t \le \beta_1 \tag{3.9}$$

bulunur.

Kanıt: $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde x çözümü (3.6) denklemini sağlar ve $\widetilde{x}$ çözümü de ϕ yerine $\widetilde{\phi}$ alınmak üzere aynı denklemi sağlar. $t_0 \le t \langle \beta_1$ için

$$\|x(t) - \widetilde{x}(t)\| = \left\| \phi(0) - \widetilde{\phi}(0) + \int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \widetilde{x}_s)] ds \right\|$$
$$\le \|\phi - \widetilde{\phi}\|_r + K \int_{t_0}^{t} \|x_s - \widetilde{x}_s\|_r ds$$

bulunur ve buradan

$$\|x_t - \widetilde{x}_t\|_r \le \|\phi - \widetilde{\phi}\|_r + \int_{t_0}^{t} K\|x_s - \widetilde{x}_s\|_r ds,\ t_0 \le t \langle \beta_1$$

bulunur. Böylece Lemma 1.4.1 den (3.9) eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.2.4: Süreklilik koşulunun gecikmeli diferensiyel denklemler literatüründe sıkça rastlanan bir koşul olmadığını belirtelim. Bunun yerine genellikle F in $J \times C_D$ üzerinde sürekli olması kabul edilir. Yani, her $(\bar{t}, \bar{\psi}) \in J \times C_D$ ve her $\varepsilon \rangle 0$ için bir $\delta \rangle 0$ sayısı vardır öyle ki

$|t - \bar{t}| \langle \delta$ ve $\|\psi - \bar{\psi}\|_r \langle \delta$

şeklinde seçilen her $(t, \psi) \in J \times C_D$ için

$\|F(t, \psi) - F(\bar{t}, \bar{\psi})\| \langle \varepsilon$.

Zira, $J \times C_D$ üzerinde sürekli olan F fonksiyoneli , gerçekten süreklilik koşulunu sağlar. Bununla birlikte F in adi sürekliliği yerine burada kullanılan süreklilik koşulunun biraz daha kolayca hesaplandığı söylenebilir.

3.3 Varlık Teoremleri

Bu kesimde sınırlı gecikmelere sahip olan gecikmeli diferensiyel sistemler için varlık teoremleri üzerinde durulacaktır.

$r \geq 0$ ve t_0 reel sayıları verilmek üzere $t_0 \langle \beta \leq \infty$ olsun. D, R^n de bir açık küme, ve F fonksiyoneli $[t_0, \beta) \times C_D \to R^n$ üzerinde tanımlı olmak üzere gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{3.10}$$

sistemini ele alalım.

Verilen herhangi bir $\phi \in C_D$ başlangıç fonksiyonuna karşılık bir $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ sayısı için $[t_0, \beta_1)$ üzerinde (3.10) denklemini sağlayacak ve

$$x_{t_0} = \phi \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir sürekli

$x : [t_0 - r, \beta_1) \to D$

fonksiyonu aranacaktır.

F fonksiyonelinin süreklilik koşulunu sağladığı kabul edilsin. Bu durumda sürekli bir

$x:[t_0 - r, \beta_1) \to D$

fonksiyonun (3.10) – (3.11) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul x(t) nin

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), t_0 - r \le t \le t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) ds, t_0 \le t \langle \beta_1 \end{cases} \tag{3.12}$$

çözümü olmasıdır.

(3.10) – (3.11) problemi hakkında en basit varlık teoremi , F fonksiyonelinin $J \times C_D$, $J = [t_0, \beta)$, kümesinin tümünde bir Lipschitz koşulunu sağladığı kabul edilerek bulunur. Ancak, aşağıdaki teoremde görüldüğü üzere bir lokal Lipschitz koşulunun sağlanıyor olması daha uygun ve yeterli bir varsayımdır.

Teorem 3.3.1: (Lokal Varlık) $F:[t_0, \beta) \times C_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlamak üzere lokal Lipschitzian olsun. Bu durumda her bir $\phi \in C_D$ için (3.10) - (3.11) problemi bir $\Delta \rangle 0$ sayısı için $[t_0 - r, t_0 + \Delta)$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir.

Kanıt: $a \rangle 0$ ve $b \rangle 0$ sabitleri yeterince küçük seçilsin öyle ki

$\Omega_{02} \equiv [t_0, t_0 + a] \times \{\psi \in C : \|\psi - \phi\|_r \langle b\}$

kümesi $[t_0, \beta) \times C_D$ nin bir alt kümesidir ve F

fonksiyoneli Ω_{02} üzerinde K Lipschitz sabitli Lipschitzian dır. Bir sürekli

$\overline{X}:[t_0 - r, t_0 + \Delta] \to R^n$

fonksiyonu

$$\overline{X}(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t_0 - r \le t \le t_0 \\ \phi(0), & t_0 \le t \le t_0 + a \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(t, X_t)$ fonksiyoneli t ye göre sürekli olacağından bir B_1 sabiti için

$\|F(t,\overline{X}_t)\| \le B_1,\ t_0 \le t \le t_0 + a$

şeklinde yazılabilir.

$B = Kb + B_1$ olsun. Şimdi bir $a_1 \in (0,a]$ sayısı

$\|\overline{X}_t - \phi\|_r = \|\overline{X}_t - X_{t_0}\|_r \le b,\ t_0 \le t \le t_0 + a_1$

olacak şekilde seçilsin. Hemen belirtelim ki böyle bir $a_1 > 0$ sayısı

$\Delta > 0$ sayısı

$\Delta \le \min\left\{a_1, \frac{b}{B}\right\}$ ve $\Delta < \frac{1}{K}$

biçiminde seçilmiş olsun. Son kısıtlamaya gerek olmadığı halde sadece ispatı biraz daha basitleştirmeye yaradığı için kullanılmıştır.

S bütün sürekli $X : [t_0 - r, t_0 + \Delta] \to R^n$ fonksiyonlarının kümesi olsun öyle ki

$X(t) = \phi(t - t_0),\ t_0 - r \le t \le t_0$

$\|X(t) - \phi(0)\| \le b,\ t_0 \le t \le t_0 + \Delta$

$X \in S$ ve $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ ise, bu durumda

$\|X_t - \overline{X}_t\|_r \le b$

olduğunu belirtelim. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\|F(t,X_t)\| &\le \|F(t,X_t) - F(t,\overline{X}_t)\| + \|F(t,\overline{X}_t)\| \\ &\le K\|X_t - \overline{X}_t\| + B_1 \le B\end{aligned}$$

dır.

Her bir $X \in S$ için bir TX fonksiyonu $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$ üzerinde

$$TX(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0),\ t_0 - r \le t \le t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,X_s)d_s,\ t_0 \le t \le t_0 + \Delta \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$\|F(s,X_s)\| \le B$ olduğundan,

$\|TX(t)-\phi(0)\| \le B\Delta \le b,\ t_0 \le t \le t_0+\Delta$.

Ayrıca TX süreklidir. Buradan $TX \in S$ ve dolayısıyla $T: S \to S$ dır; yani S kümesini yine S ye dönüştürmektedir. Şimdi bir $x_{(0)} \in S$ seçip buna dayanarak

$x_{(1)} = Tx_{(0)}, x_{(2)} = Tx_{(1)}, \ldots$

ardışık yaklaşıklarını oluşturalım. Her bir x_k için

$x_{(k)}(t) = \phi(t-t_0),\ [t_0 - r, t_0]$ üzerinde,

olduğuna dikkat ederek $x_{(k)}$

dizisinin yakınsadığını görelim.

Her k=0,1,2,... için $t_0 \le t \le t_0+\Delta$

olduğu zaman

$$\|x_{(k+2)}(t) - x_{(k+1)}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left[F(s, x_{(k+1)s}) - F(s, x_{(k)s}\right] ds \right\|$$

$$\le K\Delta \sup_{t_0 \le t \le t_0+\Delta} \|x_{(k+1)} - x_{(k)s}\|_r$$

dır. Buradan $\|x_{(1)}(t) - x_{(0)}(t)\| \le 2b$

eşitsizliğinden, $t_0 \le t \le t_0+\Delta$ için

$\|x_{(2)}(t) - x_{(1)}(t)\| \le 2bK\Delta$

$\|x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t)\| \le 2b(K\Delta)^2$

tüme varımdan

$\|x_{(k+1)}(t) - x_{(k)}(t)\| \le 2b(K\Delta)^k,\ k = 0,1,2,\ldots$

elde edilir. $K\Delta < 1$ olduğundan,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|x_{(p+1)}(t) - x_{(p)}(t)\| \le \sum_{p=0}^{\infty} 2b(K\Delta)^p$$

serisi yakınsaktır. Buradan karşılaştırma kriteri $[t_0, t_0+\Delta]$ üzerinde

$$x_{(k)}(t) = x_{(0)}(t) + \sum_{p=0}^{k-1} \left[x_{(p+1)}(t) - x_{(p)}(t)\right]$$

ifadesinin her bir bileşenine uygulanırsa , $\{x_{(k)}\}$ dizisinin yakınsak olduğu ortaya çıkar. Zira, her bir m=1,...,n için $\{x_{(k)m}\}$ fonksiyonlar dizisi $[t_0, t_0+\Delta]$ üzerinde yakınsak hatta düzgün yakınsaktır. O halde

$$x(t)=\lim_{k\to\infty} x_{(k)}(t), \quad t_0 \le t \le t_0+\Delta$$

yazılabilir. Geriye bu x(t) fonksiyonunun (3.12) denklemini ve dolayısıyla (3.10) – (3.11) problemini sağladığını göstermek kaldı. Bunun için önce,

$$\left\|x(t)-x_{(k)}(t)\right\| \le 2b\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!}, \quad t_0 \le t \le t_0+\Delta \tag{3.14}$$

olduğunu belirtelim.

$[t_0, t_0+\Delta]$ ve herhangi bir k=0,1,2,... için

$$\left\|x(t)-\phi(0)-\int_{t_0}^{t}F(s,x_s)ds\right\|$$

$$=\left\|x(t)-x_{(k+1)}(t)+\int_{t_0}^{t}\left[F(s,x_{(k)s})-F(s,x_s)\right]ds\right\|$$

$$\le \left\|x(t)-x_{(k+1)}(t)\right\|+\left|\int_{t_0}^{t}\left\|F(s,x_{(k)s})-F(s,x_s)\right\|ds\right|$$

bulunur.

(3.13) den k=0,1,2,... için

$$\left\|x(t)-\phi(0)-\int_{t_0}^{t}F(s,x_s)ds\right\| \le 2b\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!}+K\Delta\sup_{t_0\le t\le t_0+\Delta}\left\|x_{(k)s}-x_s\right\|$$

$$\le 2b\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!}+2bK\Delta\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!} \tag{3.15}$$

elde edilir.

(3.15) ifadesinin ikinci yanı $k\to\infty$ halinde sıfıra gittiğinde sol yanı sıfır olmak zorundadır. Böylece x fonksiyonu $[t_0, t_0+\Delta]$ üzerinde (3.12) denklemini sağlar; bu ise x in aynı aralıkta (3.10) – (3.11) problemi için bir çözüm olması demektir. Çözümün tekliği de Teorem 3.2.2 den çıkar.

Teorem 3.3.1, (3.10) – (3.11) probleminin çözümünün nereye kadar sürdürülebileceği hakkında bir şey söylememektedir. Şimdi bununla ilgili olarak aşağıdaki tanım ve sonuçları göz önüne alalım.

Tanım 3.3.2: x ve y , (3.10) – (3.11) sırasıyla, $[t_0 - r, \beta_1)$ ve $[t_0 - r, \beta_2)$ aralıklarında tanımlı olan çözümleri olsun. $\beta_2 \rangle \beta_1$ ise , bu durumda y ye x in bir sürmesi, ya da x e $[t_0 - r, \beta_2)$ aralığına sürdürülebilir denir. (3.10) – (3.11) probleminin bir x çözümü hiçbir sürmeye sahip değilse, o zaman x e sürdürülemezdir denir.

Tanım 3.3.3: $F : [t_0, \beta) \times C_D \to R^n$

fonksiyoneli $[t_0, \beta_1] \times C_A$ biçimindeki her küme üzerinde sınırlı ise, bu durumda F ye yarı sınırlıdır denir; burada $t_0 \langle \beta_1 \langle \beta$ ve A kümesi D nin bir kapalı sınırlı alt kümesidir.

Örnek 3.1.2 de f sürekli olmak üzere F fonksiyoneli ve örnek 3.1.3 – 3.1.4 – 3.1.5 deki bütün F fonksiyonelleri yarı sınırlıdır.

Lemma 3.3.4: $\phi \in C = C([-r,0], R^n)$ olsun.

$A_\phi = \{\phi(\sigma) : -r \le \sigma \le 0\}$

kümesi R^n de kapalı ve sınırlı bir kümedir.

Kanıt: $\{\xi_{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ bir $\xi \in R^n$ noktasına yakınsayan A_ϕ kümesindeki noktaların (ya da vektörlerin) bir dizisi olsun. $\xi \in A_\phi$ olduğunu göstermeliyiz. i=1,2,... için

$\xi_{(i)} = \phi(\sigma_i)$

olacak şekilde [-r,0] aralığında $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sayıları mevcuttur. Ama, [-r,0] aralığı R de kapalı ve sınırlı bir küme olduğundan, Teorem 1.4.5 Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince bir yakınsak $\{\sigma_{i_k}\}$ alt dizisi vardır. O halde

$\lim_{k \to \infty} \sigma_{i_k} = \sigma_0 \in [-r, 0]$

yazılabilir. Buradan

$\xi = \lim\limits_{i\to\infty} \phi(\sigma_i) = \lim\limits_{k\to\infty} \phi(\sigma_{i_k})) = \phi(\sigma_0) \in A_\phi$ bulunur.

Teorem 3.3.5: (Genişletilmiş Varlık) $F : [t_0, \beta) \times C_D \to R^n$
fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlamak üzere lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olsun. Bu durumda her $\phi \in C_D$ için (3.10) – (3.11) problemi $[t_0 - r, \beta_1]$ üzerinde tek ve sürdürülemez bir x çözümüne sahiptir; ve $\beta_1 \langle \beta$ ise bu durumda her kapalı sınırlı $A \subset D$ üzerinde bir $t \in (t_0, \beta_1)$ için $x(t) \notin A$ dır.

Kanıt: $[t_0 - r, \beta_1]$ formunda herhangi bir aralıkta çözümün tekliği Teorem 3.2.2 den derhal bulunur.

$\beta_1 = \sup\{s \in R : [t_0 - r, s) \text{ üzerinde bir çözüm mevcut}\}$

olsun. Bu durumda $\beta_1 \rangle t_0$ ve her $s \in (t_0, \beta_1)$ için $[t_0 - r, s)$ üzerinde bir tek $y_{(s)}$ çözümü mevcuttur. Şimdi bir

$X : [t_0 - r, \beta_1] \to D$

fonksiyonunu;

her bir $t \in [t_0 - r, \beta_1)$ için $x(t) = y_{(s)}(t)$, bir $s \in (t_0, \beta_1)$ biçiminde tanımlayalım. Buna göre x, (3.10) – (3.11) probleminin $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde bir çözümüdür, ve dolayısıyla β_1 in ötesine sürdürülemez.

Çelişki amacıyla kabul edelim ki $\beta_1 \langle \beta$ ve şimdilik, bir kapalı sınırlı $A \subset D$ kümesi için $x(t) \in A$, $t_0 \le t \le \beta_1$

dır.

$-r \le \sigma \le 0$ için $\phi(\sigma) \in A$ kabul edilemez olduğundan, A nın yerine $A \cup A_\phi$ kümesi ele alınmış olsun.

Lemma 3.3.4 den, A_ϕ kapalıdır. Buradan $A \cup A_\phi$ kümesi kapalı ve sınırlıdır.

O halde

$$x(t) \in A \cup A_{\phi}, \quad t_0 - r \le t \langle \beta_1$$

ve F yarı sınırlı olduğundan,

$$\|F(t,\psi)\| \le B, \quad \forall (t,\psi) \in [t_0, \beta_1] \times C_{A \cup A_{\phi}}$$

olacak şekilde bir $B \rangle 0$ sabiti vardır.

$$\|x'(t)\| = \|F(t, x_t)\| \le B, \quad t_0 \le t \langle \beta_1$$

ve Teorem 1.4.9 dan

$$\lim_{t \to \beta_1} x(t) = \xi \in A \subset D$$

varlığı garanti edilir. Şimdi x in tanımı, $x(\beta_1) = \xi$ alınarak $[t_0 - r, \beta_1] \to D$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyona genişletilebilir. Süreklilik koşulundan $F(t, x_t)$ nin $t_0 \le t \le \beta_1$ için sürekli olduğu anlaşılır. Buradan (3.12) denklemi $t = \beta_1$ içerecek şekilde genişletilebilir; yani

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t_0 - r \le t \le t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) d_s, & t_0 \le t \langle \beta_1 \end{cases}$$

dır.

Teorem 3.3.1 i

$$z'(t) = F(t, z_t), \quad t \ge \beta_1$$
$$z_{\beta_1} = x_{\beta_1}$$

problemine uygularsak, bu yeni problemin bir $\Delta \rangle 0$ sayısı için $[\beta_1 - r, \beta_1 + \Delta]$ üzerinde tanımlı olan bir z çözümüne sahip olduğu sonucu çıkar. O halde

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & \beta_1 - r \le t \le \beta_1 \\ \phi(0) + \int_{\beta_1}^{t} F(s, z_s) ds, & \beta_1 \le t \langle \beta_1 + \Delta \end{cases}$$

dır.

Ayrıca z(t)=x(t), $[t_0 - r, \beta_1 - r]$ alınırsa,

$$z(t)=\begin{cases}\phi(t-t_0), & t_0-r\le t\le t_0\\ \phi(0)+\int_{t_0}^{t}F(s,z_s)\,ds, & t_0\le t\langle\beta_1\\ \phi(0)+\int_{t_0}^{\beta_1}F(s,z_s)\,ds+\int_{\beta_1}^{t}F(s,z_s)\,ds, & \beta_1\le t\langle\beta_1+\Delta\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\phi(t-t_0), & t_0-r\le t\le t_0\\ \phi(0)+\int_{t_0}^{t}F(s,z_s)\,ds, & t_0\le t\langle\beta_1+\Delta\end{cases}$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle z fonksiyonu (3.12) denklemini ve dolayısıyla (3.10) – (3.11) problemini sağlar. Bu çözümün varlığı, yani x in $\beta_1\langle\beta$ ya kadar sürmüş olması β_1 in tanımıyla çelişir.

Şimdi (3.10) – (3.11) probleminin $[t_0-r,\beta)$ aralığının tümünde tanımlı olan bir çözümünün varlığından söz edilebilir.

Sonuç 3.3.6: (Global Varlık) $D=R^n$ olsun. $F:[t_0,\beta)\times C_D\to R^n$ fonksiyoneli süreklilik (C) koşulunu sağlasın ve lokal Lipschitzian olsun. Ayrıca M ve N, $[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli pozitif fonksiyonlar olmak üzere

$$\|F(t,\psi\|\le M(t)+N(t)\|\psi\|_r,\ [t_0,\beta)\times C \tag{3.16}$$

olsun.

Bu durumda (3.10) – (3.11) probleminin tek ve sürdürülemez çözümü $[t_0-r,\beta_1)$ aralığının tamamında mevcuttur.

Kanıt: (3.16) koşulu F in yarı sınırlı olduğunu ifade eder. x , $[t_0-r,\beta_1)$ üzerinde (3.10) – (3.11) probleminin tek sürdürülemez çözümü olsun. Çelişki amacıyla kabul edelim ki $\beta_1\langle\beta$ dir.

Bu durumda

$[t_0,\beta_1)$ üzerinde $M(t) \le M_1$ ve $N(t) \le N_1$

dir. Dolayısıyla (3.12) den,

$$\|x(t)\| \le \|\phi\|_r + \int_{t_0}^{t} M_1 ds + \int_{t_0}^{t} N_1 \|x_s\|_r ds, \ t_0 \le t \langle \beta_1$$

bulunur. Buradan da

$$\|x(t)\| \le \|\phi\|_r + M_1(\beta_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} N_1 \|x_s\|_r ds, \ t_0 \le t \langle \beta_1$$

elde edilir.

Böylece, $[t_0,\beta_1)$ üzerinde

$$\|x(t)\| \le \|x_t\|_r \le \left[\|\phi\|_r + M_1(\beta_1 - t_0)e^{N_1(\beta_1 - t_0)}\right]$$

yazılabilir. Buna göre x(t) nin bir kapalı sınırlı küme içinde kaldığı ortaya çıkar. Bu ise Teorem 3.3.5 den dolayı $\beta_1 \langle \beta$ varsayımıyla çelişir. O halde $\beta_1 = \beta$ dir.

Örnek 3.3.7: Lineer gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(g_j(t)) + h(t), \ [t_0,\beta) \text{ de}, \tag{3.17}$$

sistemini ele alalım; burada A_j bir sürekli $n \times n$ matris değerli fonksiyon, h bir sürekli n-vektör değerli fonksiyon ve her bir g_j, $t - r \le g_j(t) \le t$, bir sürekli reel değerli fonksiyondur. Bu durumda, her bir $\phi \in C$ için (3.17) – (3.11) problemi $[t_0 - r,\beta)$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir.

Örnek 3.3.8: $D = R^n$ olsun. $F : [t_0,\beta) \times C_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu ve global Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, bu durumda her bir $\phi \in C$ için (3.10) – (3.11) problemi $[t_0 - r,\beta]$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir. Bu durum Sonuç 3.3.6 nın bir sonucudur. Çünkü K Lipschitz sabitli global Lipschitz koşulundan

$$\|F(t,\psi)\| \le \|F(t,0\| + \|F(t,\psi) - F(t,0)\| \le \|F(t,0)\| + K\|\psi\|_r$$

yazılabilir ki bu (3.16) koşulunu ifade eder.

BÖLÜM IV

4 LİNEER GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde adi lineer diferensiyel sistemleri için bilinen bazı özelliklerin lineer gecikmeli diferensiyel denklem

$x'(t)=\sum_{j=1}^{m}A_j(t)x(t-r_j)+h(t),\ t_0\leq t\langle\beta$ sistemi için de geçerli olup olmadıkları incelenecektir. Burada her bir A_j sürekli matris değerli fonksiyon, h bir sürekli vektör- değerli fonksiyondur.

4.1 Toplanabilirlik Prensibi (Superposition)

$r_1,r_2,\dots,r_m$ (her bir j için $0\leq r_j\leq r$) sabit gecikmelerine sahip olan diferensiyel denklem

$$x'(t)=\sum_{j=1}^{m}A_j(t)x(t-r_j)+h(t),\ t_0\leq t\langle\beta \tag{4.1}$$

sistemini ele alalım. Burada A_j ,$[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli $n\times n$ türünde bir matris-değerli fonksiyon; h, $[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli bir n vektör değerli fonksiyondur.

(4.1) denklemi kısaca

$$x'(t)=L(t,x_t)+h(t) \tag{4.2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir; burada

$$L(t,\psi)\equiv\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\psi(-r_j)$$

olup $t\in[t_0,\beta)$ ve $\psi\in C=C([-r,0],R^n)$

olarak alınır.

Belirtelim ki $L(t,\psi)$ fonksiyoneli lineerdir. Gerçekten;

$t \in [t_0, \beta)$, $\psi, \tilde{\psi} \in C$ ve $c_1, c_2 \in R$ için

$L(t, c_1 \ \psi + c_2 \ \tilde{\psi}) = c_1 L(t,\psi) + c_2 \ L(t,\tilde{\psi})$

eşitliği sağlanmaktadır. Önceki bölümde olduğu gibi (4.1) denklemi

$$x_{t_0} = \phi \tag{4.3}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmaktadır, burada $\phi \in C$ verilen bir fonksiyondur.

Örnek 3.3.7 den (4.1) – (4.3) denklemlerinin $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde bir tek çözümünün var olduğu görülebilir.

(4.1) sistemine ilişkin homogen sistem

$$y'(t) = L(t, y_t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t) y_t(-r_j) \tag{4.4}$$

şeklindedir.

Bazen başlangıç fonksiyonuna değinmeden (4.1) ya da (4.4) sisteminin $[t_0 - r, \beta)$ üzerindeki bir çözümü hakkında konuşulabilir. Bu durumda $[t_0 - r, \beta) \to R^n$ üzerinde tanımlı olan herhangi bir sürekli fonksiyonun $[t_0, \beta)$ aralığında, (4.1) ya da (4.4) sistemini sağlamış olacağı kastedilmiş olur.

Teorem 4.1.1: (Toplanabilirlik Prensibi)

$h(t) = k_1 h_{(1)}(t) + \ldots + k_p h_{(p)}(t)$

olsun; burada $k_1, \ldots, k_p$ sabitler olup $h_{(1)}, \ldots, h_{(p)}$ ler $[t_0, \beta)$ üzerinde verilen vektör değerli fonksiyonlardır. $x_{(q)}$, $q = 1,2,\ldots,p$, $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde

$x'(t) = L(t, x_t) + h_{(q)}(t)$

denkleminin herhangi bir özel çözümü ve $y_{(1)}, \ldots, y_{(l)}$ ler $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde (4.4) ün çözümleri olsun. Bu durumda

$$x = k_1 x_{(1)} + \ldots + k_p x_{(p)} + c_1 y_{(1)} + \ldots + c_l y_{(l)} \tag{4.5}$$

ifadesi, $c_1, \ldots, c_l$ sabitlerinin her keyfi seçimi için (4.1) denkleminin bir çözümüdür.

Kanıt: (4.5) ifadesi

$$x(t)=\sum_{q=1}^{p}k_q x_{(q)}(t)+\sum_{s=1}^{l}c_s y_{(s)}(t)$$

şeklinde yazılabilir.

$$x'(t)=\sum_{q=1}^{p}k_q x'_{(q)}(t)+\sum_{s=1}^{l}c_s y'_{(s)}(t)$$

$$=\sum_{q=1}^{p}k_q\left[L(t,x_{(q)t})+h_{(q)}(t)\right]+\sum_{s=1}^{l}c_s L(t,y_{(s)t})$$

$$=\sum_{q=1}^{p}k_q L(t,x_{(q)t})+\sum_{q=1}^{p}k_q h_{(q)}(t)+\sum_{s=1}^{l}c_s L(t,y_{(s)t})$$

$$=\sum_{q=1}^{p}k_q L(t,x_{(q)t})+\sum_{s=1}^{l}c_s L(t,y_{(s)t})+h(t)$$

L fonksiyonelinin lineerlik özelliği

$$x'(t)=L(t,\sum_{q=1}^{p}k_q x_{(q)t}+\sum_{s=1}^{l}c_s y_{(s)t})+h(t)$$

$$=L(t,x_t)+h(t)$$

bulunur.

Örnek 4.1.2:

$$x'(t)=-2x(t)+x(t-\frac{\pi}{2})+\sin t,\ t\geq o, \tag{4.6}$$

skaler denklemini

$$x(t)=\phi(t),\ \ \frac{-\pi}{2}\leq t\leq 0 \tag{4.7}$$

ile birlikte ele alalım, burada ϕ verilen bir sürekli fonksiyondur.

Sabit katsayılı lineer adi diferensiyel denklemlerdeki düşünceyi izleyerek (4.6) denkleminin

$\tilde{x}(t)=A\cos t+B\sin t$

formunda bir özel çözümü aranabilir. Bu ifadeyi (4.6) da yerine koyarsak

-Asint+Bcost$\equiv$-2Acost-2Bsint+Asint-Bcost+sint

buradan;

-2A+2B=1 ve 2A+2B=0 ya da $A = \frac{-1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ olup (4.6) nın bir çözümü

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t$$

şeklinde belirlenmiş olur.

x, (4.6) – (4.7) probleminin $\left[-\frac{\pi}{2},\infty\right]$ üzerindeki tek çözümü olsun.

$y = x - \tilde{x}$ farkını ele alırsak y nin

$$y'(t) = -2y(t) + y(t - \frac{\pi}{2}), \ t \geq 0,$$

homogen denklemini ve

$$y(t) = \phi(t) + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t, \ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0,$$

başlangıç fonksiyonunu sağladığını görülür. Buradan (4.6) ve (4.7) probleminin tek x çözümü

$$x(t) = \tilde{x}(t) + y(t), \ t \geq -\frac{\pi}{2},$$

şeklinde verilebilir.

Uyarı 4.1.3: n yinci basamaktan lineer skaler gecikmeli diferensiyel denklemi ele alalım;

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}(t)x^{(i)}(t - r_j) = h(t) \tag{4.8}$$

burada h ve her bir a_{ij}, $[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli reel-değerli fonksiyonlardır. (4.8) denklemi ile beraber

$$x(t) = \phi(t - t_0), [t_0 - r, t_0] \tag{4.9}$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım, burada $\phi \in C^{n-1}([-r,0], R)$.

(4.8) denklemine ilişkin homogen denklem

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}(t)y^{(i)}(t - r_j) = 0. \tag{4.10}$$

(4.8) ve (4.10) denklemleri eşdeğer birinci basamaktan sistemlere indirgenebildiklerinden dolayı (4.1) ve (4.4) ün özel durumları gibi incelenebilirler.

Örnek 4.1.4:

$$x''(t) + x'(t) + x'(t-1) + \pi^2 x(t) = \cos \pi t \qquad (4.11)$$

denkleminin bir özel çözümünü arayalım. Bunun için

$$\tilde{x}(t) = A\cos \pi t + B\sin \pi t$$

ifadesinin bir çözüm olup olmadığı denenebilir. Ama bu ifade (4.11) e ilişkin homogen denklemi sağladığından, (4.11) in kendisini sağlamaz. Dolayısıyla, adi diferensiyel denklemlerde çözüm oluşturma yönteminde olduğu gibi

$$\tilde{x}(t) = At\cos \pi t + Bt\sin \pi t$$

çözüm olabilir. Bu ifade, gerçekten, A=0 ve $B = \dfrac{1}{3\pi}$ için bir çözümdür.

4.2 Sabit Katsayılı Denklemler

Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, x(t - r_j) + h(t), \; t_0 \le t \langle \beta \qquad (4.12)$$

sistemini ele alalım; burada her bir j=1,... m için A_j bir nxn sabit matris ve $0 \le r_j \le r$ olup , h $[t_0, \beta)$ üzerinde bir sürekli vektör- değerli fonksiyondur. (4.12) denklemi $[t_0, \beta)$ üzerinde

$$x_{t_0} = \phi \qquad (4.13)$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmaktadır. Burada $\phi \in C$ verilen bir fonksiyondur.

Bu kesimde daha çok (4.12) denklemine ilişkin homogen

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, y_t(-r_j) \qquad (4.14)$$

denklemi üzerinde durulacaktır.

n boyutlu bir sabit katsayılı lineer homogen adi diferensiyel denklem sistemi için n tane lineer bağımsız çözümün var olduğu, ve genel çözümün bu n tane çözümün bir keyfi lineer kombinasyonu şeklinde ifade edildiğini hatırlatalım. Ancak bu durum (4.14) denklemi için daha karmaşıktır. (4.14) denklemi, genellikle, hepsi R üzerinde tanımlı olan sonsuz sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir.

(4.14) denklemine sabit katsayılı lineer homogen adi diferensiyel sistem gibi bakarsak kompleks-değerli çözümleri mevcut olabilir.

Şimdi (4.14) denkleminin, ξ bir sabit vektör olmak üzere

$$y(t) = e^{\lambda t}\xi$$

formunda bir üstel çözümü aranırsa;

$$(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\lambda r_j})\xi = 0 \tag{4.15}$$

denklemi bulunur.

(4.15) denkleminin $\xi \neq 0$ şeklinde çözümlere sahip olması için gerek ve yeter koşul λ nın

$$\det(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j}) = 0 \tag{4.16}$$

karakteristik denklemini sağlamasıdır.

$\lambda = \mu + i\omega$ (burada μ ve ω reel sayılardır) sayısı (4.16) için bir çözüm olsun. λ nın bu değerine karşılık (4.15) den elde edilen kompleks

$$\xi = \xi_{(1)} + i\xi_{(2)}$$

vektörü (4.15) in bir çözümüdür; burada $\xi_{(1)}$ ve $\xi_{(2)}$ reel değerli n li vektörlerdir. Böylece bulunan

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\mu t}(\xi_{(1)}\cos\omega t - \xi_{(2)}\sin\omega t) \\ y(t) &= e^{\mu t}(\xi_{(2)}\cos\omega t + \xi_{(1)}\sin\omega t) \end{aligned} \tag{4.17}$$

ifadelerinin ikisi de (4.14) ün reel n li vektör değerli çözümleridir.

Şüphesiz, superpozisyondan dolayı üstel çözümlerin lineer kombinasyonları da (4.14) denkleminin çözümleridir. Ancak buradaki güçlük (4.16) karakteristik denkleminin, genellikle, sonsuz sayıda (kompleks) λ çözümlerine sahip olmasıdır. Bunu açıklamak üzere aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.2.1: r pozitif bir sabit olmak üzere skaler

$$y'(t) = y(t-r) \tag{4.18}$$

denklemini ele alıp $ce^{\lambda t}$ formundaki çözümleri arayalım. Bu durumda (4.18) in karekteristik denklemi

$$\lambda = e^{-\lambda r}. \tag{4.19}$$

(4.19) denkleminin bir tek reel köke sahip olduğu grafik yardımıyla kolaylıkla görülür.Öteki olası kökleri bulmak için $z = \frac{1}{\lambda}$ alalım; buradan (4.19)

$$w(z) = 0,\ w(z) \equiv 1 - ze^{\frac{-r}{z}}$$

denklemine eşdeğer olur.

w, z=0 da bir esas ayrık singülerliğe sahiptir. O halde, Teorem 1.4.8 den z=0 ın her komşuluğunda w(z) bir tanesi hariç her değeri sonsuz kez alır. Her $z \neq 0$ için $w(z) \neq 1$ olduğundan, sözü edilen istisnai değer 1 dir. Buradan, sonsuz kez w(z)=0 olduğu söylenebilir; ve dolayısıyla (4.19) denklemi sonsuz sayıda kompleks köklere sahiptir.

μ ve ω gerçel sayılar olmak üzere $\lambda = \mu + i\omega$ (4.19) denkleminin bir kökü ise , bu durumda gerçel değerli

$$e^{\mu t}\cos\omega t \text{ ve } e^{\mu t}\sin\omega t \tag{4.20}$$

fonksiyonları her t için (4.18) denkleminin çözümleridir. Böylece, (4.18) nin sonsuz sayıda çözümlere sahip olduğu gerçeği ortaya çıkar.

Uyarı 4.2.2: Superpozisyon kuralı (4.14) denkleminin sonsuz sayıda $y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots$ çözümlerini kapsayacak şekilde genişletilebilir. Özel olarak, bu durumda

$$y = c_1 y_{(1)} + c_2 y_{(2)} + \ldots$$

sonsuz serisi de, yakınsak ve terim-terime türevlenebilir olmak koşuluyla, yine (4.14) ün bir çözümüdür.

Aşağıdaki Sonuç 3.2.5 karakteristik denkleminin (kompleks) kökleri hakkında bir temel özelliktir.

Teorem 4.2.3: (4.16) denkleminin, verilen herhangi bir reel ρ sayısı için $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ olacak şekilde, sadece sonlu sayıda kökleri olabilir.

İspat: (4.16) karakteristik denklemi

$$\lambda^n + P_{n-1}(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m})\lambda^{n-1} + \ldots + P_0(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m}) = 0 \qquad (4.21)$$

şeklinde ifade edilebilir; burada $P_{n-1}, \ldots, P_0$ ın her biri $e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m}$ argümentlerine bağlı bir polinomdur.

ρ verilen bir reel sayı ve $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ olsun. Bu durumda

$$\left|e^{-\lambda r_j}\right| = e^{-\mathrm{Re}\,\lambda r_j} \leq e^{-\rho r_j},$$

ve dolayısıyla k=0,...,n-1 için

$$\left|P_k(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m})\right| \leq B_k$$

eşitsizliğini sağlayan bir B_k sabiti (ρ ya bağlı) vardır. Şimdi bir R pozitif sayısı,

$$\frac{B_{n-1}}{R} + \ldots + \frac{B_0}{R^n} \langle 1$$

olacak şekilde yeterince büyük seçilsin.

(4.21) denklemi $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ ve $|\lambda| \geq R$ eşitsizliklerini sağlayan köklere sahip olamaz, çünkü o zaman (4.21) ile çelişen

$$|\lambda|^n \rangle B_{n-1}|\lambda|^{n-1} + \ldots + B_0$$

ifadesi bulunmuş olurdu. O halde $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ eşitsizliğini sağlayan bütün kökler için $|\lambda| \langle R$ olmalıdır. Öte yandan, özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun kompleks düzlemin her sınırlı cümlesinde en fazla sonlu sayıda sıfırlara sahip olabileceği bilinmektedir. Buradan (4.21) denklemi $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda köklere sahip olamaz.

Şimdi (4.14) denklemine ilişkin olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.4: Eğer (4.16) karakteristik denkleminin her kökü için $\mathrm{Re}\lambda \geq \rho$ ise bu durumda bir $M \rangle 0$ sabiti vardır öyle ki başlangıç koşulu altında (4.14) denkleminin

$y_{t_0} = \phi$, her $\phi \in \tau$

koşulu ile birlikte

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \leq M\|\phi\|_r e^{\rho(t-t_0)}, \ \forall t \geq t_0 \tag{4.22}$$

eşitsizliğini sağlar.

Bu teoremin kanıtı fonksiyonel analiz kullanılarak
(Hale 1971) ve esas olarak (Krasovskii 1959) çalışmalarında bulunabilir.

Örnek 4.2.5: $\lambda = \mu + i\omega$

$\lambda = e^{-\lambda r}$ denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$\mu = e^{-\mu r}\cos\omega r \leq e^{-\mu r}$

elde edilir.

μ ve $e^{-\mu r}$ nin grafikleri çizilirse, $\mathrm{Re}\lambda = \mu \leq \mu_0$ yazılabileceği kolayca görülür; burada $\mu_0, \mu_0 = e^{-\mu_0 r}$ olacak şekilde tek pozitif sayıdır. Böylece, (4.18) denkleminin çözümleri her $\varepsilon \rangle 0$ için $t \to \infty$ halinde $e^{(\mu_0+\varepsilon)t}$ den daha yavaş büyür.

Sonuç 4.2.6: (4.16) karakteristik denkleminin her kökü için $\mathrm{Re}\,\lambda\langle 0$ ise, bu durumda

$$\|y(t)\| \leq M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)},\ t \geq t_0$$

olacak şekilde pozitif M ve γ sabitleri vardır; burada y, (4.14) ün $y_{t_0} = \phi \in C$ koşulunu sağlayan çözümüdür.

Birinci basamaktan lineer denklem sistemi yerine n yinci basamaktan skaler

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} x^{(i)}(t - r_j) = h(t)$$

denklemi ya da buna ilişkin homogen

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} y^{(i)}(t - r_j) = 0 \tag{4.23}$$

denklemi ile karşılaşılabilir; burada her bir $r_j \in [0, r]$ ve her bir a_{ij} bir sabittir.

Teorem 4.2.7: (4.23) denklemi n boyutlu birinci basamaktan bir denklem sistemine standart yolla indirgenirken bulunan eşdeğer sisteme ilişkin karakteristik denklem ile (4.23) den doğrudan $e^{\lambda t}$ üstel çözümleri aranırken elde edilen

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} \lambda^i e^{-\lambda r_j} = 0 \tag{4.24}$$

denklemine eş değerdir.

Buradan (4.24) ün her kökü negatif reel kısımlı ise, bu durumda (4.23) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra yaklaşır.

Kanıt: Genelliği bozmadan $r_1 = 0$ kabul edilebilir. Buradan sıfır olmayan herhangi $c_1, \dots, c_n$ sabitleri için

$$y_1 = c_1 y,\ y_2 = c_2 y', \dots, y_n = c_n y^{(n-1)}$$

dönüşümü uygulanırsa, (4.23) denklemi

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{c_1}{c_2} y_2(t) \\ y_2'(t) = \frac{c_2}{c_3} y_3(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n'(t) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k-1,j} \frac{c_n}{c_k} y_k(t-r_j) \end{cases}$$

sistemine indirgenir.

Buna (4.14) sistemi olarak bakılırsa, A_j matrisleri ve dolayısıyla (4.16) denkleminde görülen

$$\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j}$$

matrisi belirlenmiş olur. Kolaylık için

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e^{-\lambda r_j} \quad (i = 0,\ldots,n-1)$$

olsun.

Bu durumda $\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j}$ ifadesi

$$\begin{bmatrix} \lambda & \frac{-c_1}{c_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \frac{-c_{n-1}}{c_n} \\ a_0 \frac{c_n}{c_1} & a_1 \frac{c_n}{c_2} & \cdots & a_{n-1} \frac{c_n}{c_{n-1}} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Bu matrisin determinantı sıfıra eşitlenirse, (4.24) denklemi bulunur.

Örnek 4.2 8: Basitlik için m=1 alarak

$$y''(t) + by'(t) + qy'(t-r) + ky(t) = 0 \tag{4.25}$$

denklemini göz önüne alalım; burada b,q,k ve r negatif olmayan sayılar olup

$$b \rangle q . \tag{4.26}$$

Bu durumda

$$\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r} + k = 0 \tag{4.27}$$

karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısımlıdır. Bunu göstermek için tersini farz edelim. Yani, (4.27) denkleminin bir kökünün

$\lambda = \mu + i\omega, \mu \geq 0$,

şeklinde olduğunu kabul edelim. $\omega = 0$ alınamaz, çünkü o zaman (4.27) nin sol yanı pozitif olur. O halde $\omega \neq 0$ olup

$$\mathrm{Im}(\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r} + k)\big/\omega$$

$$= 2\mu + b + qe^{-\mu r}(\cos\omega r - \mu r\frac{\sin\omega r}{\omega r})$$

$$\rangle b - qe^{-\mu r}(1 + \mu r) \rangle b - q \rangle 0$$

yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde her λ negatif reel kısımlıdır. Buradan (4.25) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde eksponensiyel olarak sıfıra gider.

$b \rangle q$ koşulu (4.25) denkleminin çözümlerinin sıfıra gitmesi için bir yeter koşul olup kesinlikle gerekli değildir. Diğer bir yeter koşul r nin küçüklüğüne bağlı olup aşağıdaki örnekte verilmektedir.

Örnek 4.2.9: (4.25) denklemini tekrar ele alalım; burada b,q,k ve r negatif olmayan sayılar olup

$$b + q \rangle 0 \text{ ve } (b + q + k^{1/2})r \langle \frac{\pi}{2} . \tag{4.28}$$

Çelişki bulmak için (4.27) nin bir kökü

$\lambda = \mu + i\omega, \mu \geq 0$,

şeklinde olsun. Bu durumda

$$0 = |\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r} + k|$$

$$\geq |\lambda|^2 - (b + q)|\lambda| - k$$

yazılabilir ki bu da

$$|\lambda| \le \frac{b+q+\left[(b+q)^2+4k\right]^{1/2}}{2} \le b+q+k^{1/2}$$

eşitsizliğini ifade eder. Buradan $|\lambda r| \langle \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Öte yandan (4.27) denkleminin bir reel $\lambda \ge 0$ sayısı tarafından sağlanmayacağı açıktır. Buradan $0\langle|\omega r|\langle \frac{\pi}{2}$ elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}(\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r} + k)\big/\omega \\ &\qquad = 2\mu + b + qe^{-\mu r}(\cos\omega r - \frac{\mu}{\omega}\sin\omega r)\rangle 2\mu - qe^{-\mu r}\mu r\frac{\sin\omega r}{\omega r} \\ &\qquad \ge 2\mu - q\mu r\rangle 0 \end{aligned}$$

hesaplanır. Bu çelişkiden (4.27) denkleminin her kökünü negatif reel kısımlı olduğu anlaşılır.

Şimdi (4.14) sistemi için geçerli olan bir sonuçtan söz edelim.

Tanım 4.2.10: Bir diferensiyel denklem ya da sistem (gecikmeli ya da gecikmesiz, lineer ya da değil)

$$x'(t) = F(x_t) \tag{4.29}$$

formunda yazılabiliyorsa otonom adını alır; burada F, $F: C_D \to R^n$ şeklinde bir dönüşümdür.

Lemma 4.2.11: x, $[t_0 - r, \beta)$ aralığında tanımlı olmak üzere (4.29) denklemini $[t_0, \beta)$ üzerinde sağlasın. Herhangi bir a reel sayısı için

$z(t) = x(t-a),\ t_0 + a - r \le t \langle \beta + a,$

olsun. Bu durumda z fonksiyonu (4.29) denklemini $[t_0 + a, \beta + a)$üzerinde sağlar. Yani, (4.29) otonom denkleminin bir çözümünün herhangi bir zaman dönüşümü de bir çözümdür.

Kanıt:

$t_0 + a \le t \langle \beta + a$ için

$z'(t) = x'(t-a) = F(x_{t-a}) = F(z_t)$

bulunur.

Bir otonom sistem incelenirken, Lemma 4.2.11 den dolayı genelliği bozmayacağı için $t_0 = 0$ alınabilir.

4.3 Parametrelerin Değişimi

Lineer adi diferensiyel denklemler teorisinde en önemli araçlardan biri parametrelerin değişimi yöntemidir. Şimdi bu teoremi lineer gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = L(t, x_t) + h(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(t-r_j) + h(t) \qquad (4.30)$$

sistemine genişletelim. Burada $h, J = [t_0, \beta)$ üzerinde sürekli bir n-vektör değerli fonksiyon A_j lerin her biri yine J üzerinde sürekli bir nxn - matris değerli fonksiyon ve her $r_j \in [0, r]$ sabittir.

Buradan verilen herhangi bir $\phi \in C$ için $[t_0, \beta)$ aralığında (4.30) denklemini sağlayacak ve

$$x_{t_0} = \phi \qquad (4.31)$$

olacak şekilde bir tek $x : [t_0 - r, \beta) \to R^n$ fonksiyonu vardır. x in t_0 ve ϕ ye bağlı oluşunu vurgulamak için x(t) yerine bazen $x(t; t_0, \phi)$ notasyonu kullanılabilir.

Parametrelerin değişimi metodu $x(t; t_0, \phi)$ çözümünün

$$y'(t) = L(t, y_t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)y(t-r_j) \qquad (4.32)$$

homogen denkleminin çözümleri cinsinden ifade edilmesidir.

Şimdi (4.32) denklemini

$$y_s = \xi u \qquad (4.33)$$

başlangıç fonksiyonu ile birlikte ele alalım; burada $u:[-r,0]\to R$

$$u(\sigma)=\begin{cases}0, & -r\le\sigma\langle 0\\ 1, & \sigma=0\end{cases}$$

şeklinde birinci basamak fonksiyonudur, $s\in[t_0,\beta)$ ve $\xi\in R^n$ dir.

$y:[s-r,\beta)\to R^n$

fonksiyonu aranacaktır, öyle ki

$y_s=\xi u$

olmak üzere y fonksiyonu $[s,\beta)$ üzerinde süreklidir, ve bir j=1,..ya da m için $t-r_j=s$ eşitliğini sağlayan t noktaları dışında $[s,\beta)$ aralığında (4.32) denklemini sağlamış olsun.

Örnek 4.3.1: Skaler

$y'(t)=ay(t)+by(t-r),\ t\ge 0$,

denkle min i

$$y(t)=\begin{cases}0, & -r\le t\langle 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

başlangıç fonksiyonu ile birlikte ele alalım.

Bu problem adımlar yöntemi yardımıyla çözülebilir. Buradan

$y(t)=e^{at},\ 0\le t\le r$,

bulunur.

Sonra da

$y'(t)=ay(t)+be^{a(t-r)},\ r\le t\le 2r$,

denklemi

$y(r)=e^{ar}$

başlangıç koşulu ile birlikte çözülür.

Teorem 4.3.2: $s\in[t_0,\beta)$ ve $\xi\in R^n$ verilmiş olsun. Bu durumda (4.32) ve (4.33) denklemleri $[s-r,\beta)$ üzerinde bir tek y çözümüne sahiptir. Ayrıca ,

$$\|y(t)\| \le \|\xi\| e^{\int_s^t K(\eta)d\eta}, \quad s \le t \langle \beta \qquad (4.34)$$

dir, burada $K(t) = \sum_{j=1}^{m} \|A_j(t)\|$.

İspat: Genelliği bozmadan

$0 = r_1 \langle r_2 \langle ... \langle r_m = r$

kabul edilebilir.

1. Durum : $\beta \rangle s + r$ olsun. $[s, s + r_2]$ aralığı üzerinde (4.32) ve (4.33) denklemleri, sırasıyla,

$y'(t) = A_1(t)y(t)$

adi diferensiyel denklemine ve

$y(s) = \xi$

başlangıç koşuluna indirgenmiş olur.

Bu problem daha büyük olan $[s, \beta)$ aralığında ele alınarak Örnek 3.3.7 uygulanırsa, $[s, \beta)$ üzerinde ve dolayısıyla, özel olarak , $[s, s + r_2]$ üzerinde bir tek çözümün mevcut olduğu görülmüş olur. Bu fonksiyonu $y_{(2)}$ ile gösterelim.

Sonra $[s + r_2, s + r_3]$ aralığını ele alalım. Burada (4.32) ve (4.33) denklemleri, sırasıyla, maksimum r_2 gecikmesine sahip gecikmeli diferensiyel

$y'(t) = A_1(t)y(t) + A_2(t)y(t - r_2)$

sistemine ve

$y(t) = y_{(2)}(t), \; [s, s + r_2]$

başlangıç koşuluna eş değerdir. Yine Örnek 3.3.7 den $[s, s + r_3]$ üzerinde bir tek çözümün varlığı garanti edilmiş olur, bunu $y_{(3)}$ ile gösterelim. Burada

$y_{(3)}(t) = y_{(2)}(t), \; [s, s + r_2]$

dir.

$[s+r_3, s+r_4]$ üzerinde (4.32) ve (4.33) denklemleri , sırasıyla,

$$y'(t) = A_1(t)y(t) + A_2(t)y(t-r_2) + A_3(t)y(t-r_3),$$
$$y(t) = y_3(t),\ [s, s+r_3]$$

denklemlerine eş değerdir. Bu ise aynı sebepten $[s, s+r_4]$ de bir tek $y_{(4)}$ çözümüne sahiptir.

Bu şekilde devam edilirse, (4.32) ve (4.33) denklemlerinin $[s-r, s+r]$ üzerinde tanımlı olan bir y çözümü bulunmuş olur. y fonksiyonu $[s, s+r]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Örnek 3.3.7 nin tekrar uygulanmasıyla istenilen sürdürme işlemi $[s-r, \beta]$ aralığına kadar gerçeklenmiş olur.

2. durum : $\beta \le s+r$ ise, yol kesinlikle 1. durumda ki gibidir. İnceleme β'ya ulaşıldığında tamamlanmış olur.

Geriye kalan (4.34) eşitsizliğini ispatlamaktır. $t = s+r_1, \ldots, s+r_m$ dışında

$$\|y'(t)\| \le K(t)\|y_t\|_r,\ s \langle t \langle \beta$$

dır. O halde

$$\|y(t)\| \le \|\xi\| + \int_s^t K(\eta)\|y_\eta\|_r d\eta$$

ve buradan

$$\|y_t\|_r \le \|\xi\| + \int_s^t K(\eta)\|y_\eta\|_r d\eta,\ s \le t \langle \beta,$$

yazılabilir. Buradan ve Teorem1.4.1 den
(4.34) eşitsizliği elde edilir.

y, $[s-r, \beta)$ üzerinde (4.32) ve (4.33) denklemlerinin tek çözümünü ifade ediyorsa, bu durumda y(t) yerine $y(t; s, \xi\ u)$ notasyonu tercih edilir.

Teorem 4.3.3: (Parametrelerin Değişimi) $A_1,\ldots,A_m$ katsayılar ve h fonksiyonu $[t_0,\beta)$ üzerinde sürekli olmak üzere j=1,...,m için $0 \le r_j \le r$ olsun. Bu durumda her $\phi \in C$ için (4.30) ve (4.31) denklemlerinin tek çözümü

$$x(t) = y(t;t_0,\phi) + \int_{t_0}^{t} y(t;s,h(s)u)ds \ , \ t_0 - r \le t \langle \beta \tag{4.35}$$

biçimindedir.

İspat: $$z(t) \equiv \int_{t_0}^{t} y(t;s,h(s)u)ds \ , \ t_0 - r \le t \langle \beta \tag{4.36}$$

olsun.

Bu fonksiyon için

$z(t) = 0, \ t_0 - r \le t \le t_0$

dır. Buradan z nin (4.30) denklemini $[t_0,\beta)$ üzerinde sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Çünkü o zaman üst üste bindirme kuralından dolayı (4.35) ifadesi (4.36) denkleminin başka bir çözümünü tanımlamış olup (4.35) den

$x(t) = \phi(t - t_0), \ t_0 - r \le t \le t_0$ sonucu görülmüş olacaktır.

Yani (4.35), (4.30) ve (4.31) denkleminin aranan tek çözümüdür.

Bunun için z nin

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} [L(v,z_v) + h(v)]dv, \ t_0 \le t \langle \beta, \tag{4.37}$$

integral denklemini sağladığı gösterilecektir. Çünkü

$z'(t) = L(t,z_t) + h(t)$

dir.

$s - r \le t \langle s$ için $y(t;s,h(s)u) = 0$ olduğundan, $t_0 \le t\langle \beta$ aralığında

$$z(t - r_j) = \int_{t_0}^{t-r_j} y(t - r_j;s,h(s)u)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} y(t - r_j;s,h(s)u)ds$$

bulunur. Buradan $t_0 \leq t \langle \beta$ için

$$\int_{t_0}^{t} [L(v, z_v) + h(v)] ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} A_j(v) z(v - r_j) ds + \int_{t_0}^{t} h(v) dv$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{v} A_j(v) y(v - r_j; s, h(s)u) dv ds + \int_{t_0}^{t} h(v) dv$$

İntegrasyon sırası değiştirilirse

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} A_j(v) y(v - r_j; s, h(s)u) dv ds + \int_{t_0}^{t} h(v) dv = \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} y'(v; s, h(s)u) dv ds + \int_{t_0}^{t} h(v) dv$$

$$= \int_{t_0}^{t} [y(t; s, h(s)u) - y(s; s, h(s)u)] ds + \int_{t_0}^{t} h(v) dv = z(t)$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Prensip olarak (4.35) ifadesi, (4.32) denkleminin çözümü bilinmek şartıyla, (4.30) sisteminin çözümü için çok genel bir metot sağlamaktadır. Zira, bu metot h nin özel olmasına bağlı değildir.

Bununla birlikte, pratik olarak $y(t; t_0, \phi)$ ve $y(t; s, \xi\, u)$ gibi ifadeleri hesaplamak hiç de kolay değildir. Bu nedenle lineer adi diferensiyel sistemlerin aksine, gecikmeli denklemlerin açık çözümlerini bulmak için parametrelerin değişimi formülü pek kullanılmaz. Ancak, yine de Teorem 4.3.3 den faydalanarak çözümlerini bulmaksızın bir diferensiyel sistemin çözümleri hakkında bazı önemli teorik bilgilere sahip olunabilir.

Sonuç 4.3.4: Her $\phi \in C$ ve her $s \geq t_0$ için

$$\|y(t; s, \phi)\| \leq M \|\phi\|_r e^{-\gamma(t-s)}, \ t \geq s, \tag{4.38}$$

olacak şekilde $M \geq 1$ ve $\gamma \rangle 0$ sabitleri, ve ayrıca

$$\sum_{j=1}^{m}\|A_j(t)\| \le K \text{ ve } \|h(t)\| \le c,\ t \ge t_0\ , \tag{4.39}$$

olacak şekilde K ve c sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (4.30) ve (4.31) denklemlerinin x çözümü $[t_0,\infty)$ üzerinde sınırlıdır.

İspat: İlk olarak , (4.32) denkleminin

$y_s = \xi u$ koşuluna uyan çözümünün sürekli olduğu ve (4.34) den

$\|y(t;s,\xi u)\| \le \|\xi\| e^{Kr},\ s \le t \le s+r$

yazılabildiğine dikkat edelim. Buradan

$\|y(t;s,\xi u)\| \le M\|\xi\| e^{Kr} e^{-\gamma(t-s-r)},\ t \ge s+r,$

bulunur ve bu hem de $s \le t \le s+r$ için doğrudur.

Şimdi yukarıdaki kestirimleri (4.35) ifadesine uygularsak $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned}\|x(t;t_0,\phi)\| &\le M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} Mce^{(K+\gamma)r} e^{-\gamma(t-s)} ds \\ &\le M\|\phi\|_r + Mce^{(K+\gamma)r}/\gamma\end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.3.5: Yukarıdaki sonuç özel olarak şunu ifade ediyor: (4.30) sistemi sabit katsayılı olup karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısımlı ve h sınırlı ise bu durumda (4.30) un her x çözümü sınırlıdır.

Örnek 4.3.6:

$$z''(t) + bz'(t) + qz'(t-r) + kz(t) = h(t),\ t \ge 0\ , \tag{4.41}$$

denklemini ele alalım; burada $b \rangle q$ olmak üzere b,q, k, ve r negatif olmayan sabitlerdir, ve h(t) fonksiyonu $t \ge 0$ için sürekli olup sınırlıdır.

(4.41) denklemi , $x_1(t) \equiv z(t),\ x_2(t) \equiv z'(t)$ dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -kx_1(t) - bx_2(t) - qx_2(t-r) + h(t)\end{aligned} \tag{4.42}$$

sistemine indirgenir.

Buna ilişkin homogen sistem

$$y'(t) = A_1 y(t) + A_2 y(t-r) \tag{4.43}$$

dır; buradan

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} .$$

(4.43) sistemine ilişkin karakteristik denklem daha önce Örnek 4.2.8 de incelendi ve bütün köklerinin negatif reel kısımlı olduğu gösterildi. Böylece, Sonuç 4.2.6 dan dolayı (4.38) eşitsizliği sağlanır. (4.39) de ki eşitsizlikler de sağlanır, çünkü A_1 ve A_2 sabit matrisler olup col (0,h(t)) sınırlıdır. O halde Sonuç 3.3.4 den (4.42) sisteminin ve dolayısıyla (4.41) denkleminin her çözümü sınırlıdır.

BÖLÜM V

5. SINIRLI GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK DURUMU

5.1 Giriş

Bu bölümde sınırlı gecikmeli diferensiyel denklemler için Lyapunov anlamında kararlılık tanımları ve bazı sonuçlardan söz edilecektir.

Sınırlı gecikmeli

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{5.1}$$

diferensiyel sistemini

$$x_{t_0} = \phi \tag{5.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım; burada

$F : (\alpha, \infty)xC_D \to R^n$, $C_D = C([-r,0], D)$ ve D, R^n de bir açık cümle olup

$t_0 \rangle \alpha$ ve $\phi \in C_D$ dır.

Ayrıca her bir $t_0 \rangle \alpha$ için F in $[t_0, \infty) \times C_D$ üzerinde süreklilik koşulunu sağlamakla beraber lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olduğu kabul edilmektedir. Bu hipotezler altında (5.1) – (5.2) problemi bir tek sürdürülemez çözüme sahiptir. (Teorem 3.3.5) Bu çözümü $x(t; t_0, \phi)$ ile gösterelim.

Kararlılık teorisi, $[t_0 - r, \infty)$ üzerinde tanımlı olan belli bir $\overline{x} = x(.; t_0, \overline{\phi})$ çözümünün $\overline{\phi}$ başlangıç fonksiyonunda küçük değişikliklerin yapılması durumunda bulunan yeni çözümlerin yine $[t_0 - r, \infty)$ aralığının tümünde tanımlı olup $\overline{x}$ ye yakın kalıp kalmadıklarını inceler. Dolayısıyla, çözümlerin $[t_0 - r, \infty)$ aralığında tanımlı ve tek olmaları kabul edilmektedir.

$\bar{x}$, (5.1) in karalılığı incelenen bir çözümü ve x de aynı sistemin başka bir çözümü olsun. Bu durumda

$y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$

dönüşümü (5.1) sistemine uygulanırsa;

$$y'(t) = G(t, y_t) \tag{5.3}$$

sistemini elde edilir; burada

$$G(t,\psi) \equiv F(t,\bar{x}_t + \psi) - F(t,\bar{x}_t) \ .$$

Artık $G(t,0) \equiv 0$ olduğundan, y=0 fonksiyonu (5.3) sisteminin bir çözümüdür. Böylece (5.1) in $\bar{x}$ çözümünün kararlılık problemi, (5.3) ün sıfır çözümünün kararlılık problemine indirgenmiş olur.

Bu yüzden, genelliği bozmaksızın (5.1) – (5.2) nin kararlılığı söz konusu olduğunda

$$0 \in D \text{ ve her } t \rangle \alpha \text{ için } F(t,0) = 0 \tag{5.4}$$

kabul edilecektir.

Tanım 5.1.1: Her $\varepsilon \rangle 0$ ve her $t_0 \rangle 0$ sayısına karşılık öyle bir

$\delta = \delta(\varepsilon, t_0) \rangle 0$ sayısı vardır ki

$\|\phi\|_r \langle \delta \ , \ \ t \in [t_0 - r, t_0)$

olduğu zaman

her $t \geq t_0 - r$ için

$\|x(t; t_0, \phi)\| \langle \varepsilon$

oluyorsa bu durumda (5.1) in $\bar{x}(t) \equiv 0$ çözümüne $t_0 \rangle \alpha$ noktasında (Lyapunov) kararlıdır denir.

Aksi durumda, sıfır çözümüne t_0 da kararsızdır denir.

Tanım 5.1.2: (5.1) in sıfır çözümü her bir $t_0 \rangle \alpha$ da kararlı ve δ sayısı t_0 dan bağımsız (yani, $\delta = \delta(\varepsilon)$) ise, bu durumda sıfır çözümüne (α, ∞) üzerinde düzgün kararlıdır denir.

Örnek 5.1.3: (Krasovskii, 1959)

Skaler gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) \tag{5.5}$$

denklemini ele alalım;

burada a,b ve r sabitler olup $a\langle 0$, $|b| \le |a|$, $r \ge 0$, $\alpha = -\infty$ ve $H = +\infty$ olsun.

$(t_0, \phi) \in R \times C$ ve $x : [t_0 - r, \infty) \to R$

(5.5) denkleminin

$$x_{t_0} = \phi$$

koşulunu sağlayan tek sürdürülemez çözümü olsun. Şimdi

$$v(t) \equiv x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s)ds,\ t \ge t_0$$

fonksiyonunu ele alalım.

$t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2x(t)x'(t) + |a|x^2(t) - |a|x^2(t-r) \\ &= -|a|x^2(t) + 2bx(t)x(t-r) - |a|x^2(t-r) \\ &\le (-|a| + |b|)[x^2(t) + x^2(t-r)] \le 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan v(t) artmayan fonksiyondur. Ayrıca

$$|x(t)|^2 \le v(t) \le (1 + |a|r)\|x_t\|_r^{\,2} \tag{5.6}$$

hesaplanabilir.

$x_{t_0} = \phi$ olduğundan, (5.6) dan $t \ge t_0$ için

$$|x(t)| \le [v(t_0)]^{\frac{1}{2}} \le (1 + |a|r)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_r$$

elde edilir.

Sonuç olarak her $\varepsilon \rangle 0$ sayısına karşılık

$$\|\phi\|_r \langle \varepsilon(1 + |a|r)^{\frac{-1}{2}}$$

alınırsa, bu durumda her $t \ge t_0 - r$ için

$|x(t; t_0, \phi)| \langle \varepsilon$ bulunur O halde sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi, gecikmeli diferensiyel denklemlerde de t_0 noktasındaki kararlılık aşağıdaki teoremde verildiği gibi kaçınılmaz olarak düzgün kararlılığı ifade eder.

Teorem 5.1.4: (5.1) denklemi otonom ise, bu durumda sıfır çözümünün bir $t_0 \in R$ noktasında kararlı olması düzgün kararlı olmasını ifade eder.

Kanıt: $\bar{x}(t) \equiv 0$,

$x'(t) = F(x_t)$

otonom sisteminin kararlı bir çözümü olsun.

Bilinmektedir ki x(t), $t \geq t_0 - r$, $x'(t) = F(x_t)$ in bir çözümü ve $c \geq 0$ ise x(t+c) de $t \geq t_0 - r - c$ üzerinde aynı sistemin bir çözümüdür.

$c = t_1 - t_0$ ve

$x(t + t_1 - t_0, t_0, x_{t_1}) \equiv \tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_{t_0})$

olsun. Buna göre $\tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_{t_0})$, $x'(t) = F(x_t)$ denkleminin $\tilde{x}_{t_0} = x_{t_1}$ ve $t \in [2t_0 - t_1, \infty)$ için tanımlı olan bir çözümüdür.

$\bar{x}(t) \equiv 0$ kararlı olduğundan verilen bir $\varepsilon \rangle 0$ ve $t_0 \rangle 0$ sayısına karşılık bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ vardır ve öyle ki $\|\tilde{x}_{t_0}\|_r \leq \delta$

olduğu zaman her $t \geq t_0 - r$ için

$\|\tilde{x}(t; t_0, \tilde{x}_{t_0})\| \langle \varepsilon$.

Bu ise şu anlama gelmektedir:

$t_1 \geq t_0$ ve $\|x_{t_1}\|_r \leq \delta$

olduğu zaman her $t \geq t_1$ için

$\|x(t; t_0, x_{t_1})\| \langle \varepsilon$.

δ sayısı t_1 e bağlı değildir. O halde $x'(t) = F(x_t)$ in sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Uyarı 5.1.5: Kararlılık tanımına göre (5.1) in sıfır çözümünün kararlılığı bir özel $t_0 > \alpha$ noktasında ifade edilmektedir. Yani, bir gecikmeli diferensiyel denklemin sıfır çözümü bir $t_0 > \alpha$ noktasında kararlı iken bir diğerinde kararsız olabilir. Bu durum adi diferensiyel denklemler için geçerli değildir.

Örnek 5.1.6: (Zverkin, 1959)

$\alpha = -\infty$, $D = R$ ve $r = \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$$x'(t) = b(t)x(t - \frac{3\pi}{2}) \tag{5.7}$$

denklemini ele alalım; burada b

$$b(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \le \frac{3\pi}{2} \\ -\cos t & , \ \frac{3\pi}{2} < t \le 3\pi \\ 1 & , \ t > 3\pi \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir sürekli fonksiyondur. Bu durumda,

$t_0 = 0$ ve bir $\phi \in C = C(\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right], R)$ için

$$x(t;0,\phi) = \begin{cases} \phi(0) & , 0 \le t < \frac{3\pi}{2} \\ -\phi(0)\sin t & , t \ge \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$|x(t;0,\phi)| \le |\phi(0)|$, $t \ge 0$,

elde edilir ve dolayısıyla $\|\phi\|_r$ nin küçüklüğü kesinlikle $t \ge -\frac{3\pi}{2}$ için $|x(t;0,\phi)|$ nin küçüklüğünü garanti eder.

Bununla birlikte, t_0, $\tilde{t}_0 \ge 3\pi$ şeklinde seçilseydi ve ϕ

$\phi(s) = \delta e^{\lambda s}$, $s \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$,

biçiminde tanımlansaydı, bu durumda

$x(t;\tilde{t}_0,\phi)=\delta e^{\lambda(t-\tilde{t}_0)}$, her $t\geq \tilde{t}_0-r$,

elde edilirdi; burada λ

$\lambda=e^{-\frac{3\pi\lambda}{2}}$

denkleminin pozitif köküdür.

Buna göre, $\|\phi\|_r=\delta\rangle 0$ keyfice küçük kılınabildiği halde, çözüm sınırsız olmaktadır.

Böylece (5.7) denkleminin sıfır çözümü $t_0=0$ kararlıdır, ama her $\tilde{t}_0\geq 3\pi$ de kararsızdır.

Şüphesiz, bu tür bir şey (5.5) şeklinde bir sabit katsayılı sistem ya da daha genel olarak bir otonom sistem için ortaya çıkmaz (Teorem5.1.4). Örnekteki $\tilde{t}_0\langle t_0$ olduğunda oluşmaz.Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilmektedir. Ama önce bir Lemma ispat edelim.

Lemma 5.1.7: (Sürekli Bağımlılık) $t_0\rangle\alpha$, $T\rangle t_0$ ve $\varepsilon\rangle 0$ verilsin. Bu durumda bir $\delta\rangle 0$ sayısı vardır öyle ki

$\|\phi\|_r\langle\delta$,

olduğu zaman

$x(t;t_0,\phi)$ mevcuttur

ve

$\|x(t;t_0,\phi)\|\langle\varepsilon,\ t_0-r\leq t\leq T$,

sağlanır.

Kanıt: Genelliği bozmaksızın $\varepsilon\langle H$ olsun. Her bir

$t\in[t_0,T]$ için a_t ve $b_t\in(0,H)$ yi, $t-a_t\rangle\alpha$ ve $F,[t-a_t,t+a_t]\times\{\psi\in C:\|\psi\|_r\leq b_t\}$

üzerinde K_t Lipschitz sabitli Lipschitzian olacak şekilde yeterince küçük seçelim. Teorem 1.4.6 gereğince, bir sonlu $\{t_1,...,t_P\}$ noktalar cümlesi vardır öyle ki

$$[t_0,T]\subset\bigcup_{k=1}^{P}(t_k-a_{t_k},t_k+a_{t_k})$$

dır.

$K=\min\{K_{t_1},\dots,K_{t_p}\}$ $b=\min\{b_{t_1},\dots,b_{t_p}\}$ ve $D_p=\{\xi\in R^n:\|\xi\|<b\}$ olsun. Bu durumda

F,

$[t_0,T]\times C_D$ üzerinde K Lipschitz sabitli Lipschitzian dır. Şimdi

$\delta e^{K(T-t_0)}\le\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısını seçelim.

$\|\phi\|_r<\delta$ ve $x(t;t_0,\phi)$, $t_0-r\le t<\beta_1$, (5.1) – (5.2) probleminin sürdürülemez çözümü olsun. Bu durumda, Teorem 3.2.3 den

$\|x(t;t_0,\phi)\|\le\|\phi\|_r e^{K(T-t_0)}<\varepsilon$, $t_0-r\le t<\min\{\beta_1,T\}$ yazılabilir.

Son olarak, Teorem 3.3.5 uygulanarak $\min\{\beta_1,T\}<\beta_1$ sonucuna ulaşılır ve buradan $\min\{\beta_1,T\}=T$ olup

$\|x(t;t_0,\phi)\|\le\|\phi\|_r e^{K(T-t_0)}<\varepsilon$, $t_0-r\le t\le T$,

elde edilir.

Teorem 5.1.8: (5.1) denkleminin sıfır çözümü bir $t_0>\alpha$ da kararlı olsun. Bu durumda aynı çözüm $\tilde{t}_0\in(\alpha,t_0)$ içinde kararlıdır.

Kanıt: Her $\varepsilon>0$ için bir $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ vardır öyle ki

$\|\phi\|_r<\delta$

olduğu zaman

$\|x(t;t_0,\phi)\|<\varepsilon$, her $t\ge t_0$

dır. Verilen herhangi bir $\tilde{t}_0\in(\alpha,t_0)$ için bir $\tilde{\delta}>0$ sayısı seçilebilir öyle ki

$\|\tilde{\phi}\|_r<\tilde{\delta}$

olduğu zaman

$\|x(t;\tilde{t}_0,\tilde{\phi})\|<\delta$, $\tilde{t}_0-r\le t\le t_0$

$\|x(t;\tilde{t}_0,\tilde{\phi})\|<\varepsilon$, her $t\ge\tilde{t}_0-r$,

elde edilir.

Örnek 5.1.3 de (5.1) denklemine benzer olan bir gecikmeli diferensiyel denklemin sıfır çözümünün kararlılık problemi, bir yardımcı v(t) fonksiyonunun $[t_0,\infty)$ aralığındaki davranışı yardımıyla incelendi. Lyapunov yöntemi olarak bilinen bu yöntem ilk kez A. M. Lyapunov tarafından 1892 de adi diferensiyel denklemler için tanımlandı. Daha sonra bu yöntem Krasovskii ve diğerleri tarafından 1959 yılında gecikmeli diferensiyel denklemlere genişletildi.

Şimdi bu yöntemi (5.1) in sıfır çözümü için ifade edelim.

Lyapunov yöntemi

$$V:(\alpha,\beta)\times C_D \to [0,\infty)$$

şeklinde bir Lyapunov fonksiyonelin bulunmasına dayanır.

$$v(t) \equiv V(t,x_t),\ t \geq t_0$$

olsun. Eğer

$$v(t_0) = V(t_0,\phi)$$

yeterince küçük olduğu zaman, $t \geq t_0$ için $v(t) = V(t,x_t)$ ninde küçük kaldığı gösterilebilirse, bu durumda $x(t) \equiv 0$ çözümünün t_0 daki kararlılığı gösterilmiş olur.

$$v(t) = x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s)ds$$

fonksiyonu

$$v(t) = x_t^{\,2}(0) + |a| \int_{-r}^{0} x_t^{\,2}(\sigma)d\sigma$$

şeklinde yazılabilir ve buradan $R \times C$ üzerinde uygun bir V fonksiyoneli

$$V(t,\psi) = \psi^2(0) + |a| \int_{-r}^{0} \psi^2(s)ds$$

biçiminde tanımlanabilir.

$v(t) = V(t,x_t)$ ifadesi bilinmeyen fonksiyonla olan ilişkisinden dolayı genellikle t cinsinden tam olarak hesaplanamaz.

Yine de bu fonksiyonu incelemek, diferensiyel sistemin kendi çözümünü incelemekten daha kolaydır.

Şimdi (5.1) in sıfır çözümünün düzgün kararlılığını garanti eden Lyapunov teoremini ispatlayalım.

Teorem 5.1.9: w ve W, $[0,H)$ üzerinde sürekli azalmayan fonksiyonlar olmak üzere 0 da sıfır ve (0,H) aralığında pozitif olsunlar. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $(\alpha,\beta)\times C_D$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir V fonksiyoneli var ise, bu durumda (5.1) in sıfır çözümü düzgün kararlıdır:

a) $V(t,\psi)\geq w(\|\psi(0)\|)$

b) $V(t,\psi)\leq W(\|\psi\|_r)$

c) (5.1) denkleminin

$(t_0,\phi)\in(\alpha,\beta)\times C_D$ den geçen sürdürülemez $x=x(t;t_0,\phi)$, $[t_0-r,\beta_1)$,

çözümü boyunca $V(t,x_t)$ fonksiyoneli $[t_0,\beta_1)$ aralığında t ye göre artmayandır.

Kanıt: $\varepsilon>0$ verilsin. Genelliği bozmaksızın $0<\varepsilon<H$ olsun. Bu durumda $w(\varepsilon)>0$ olup W nun sürekliliğinden dolayı

$$W(\delta)<w(\varepsilon) \tag{5.8}$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\varepsilon)$ seçilebilir.

Şimdi $\|\phi\|_r<\delta$ olmak üzere herhangi bir $(t_0,\phi)\in(\alpha,\beta)\times C_D$ elemanını göz önüne alırsak, (5.1) denkleminin (t_0,ϕ) den geçen bir tek sürdürülemez

$x=x(t;t_0,\phi)$, bir $\beta_1>t_0$ için $[t_0-r,\beta_1)$ de çözümü vardır.

(a), (b), (c) hipotezleri ile birlikte (5.2) koşulu kullanılırsa, $t_0\leq t<\beta_1$ için

$$w(\|x(t)\|)\leq V(t,x_t)\leq V(t_0,\phi)\leq W(\|\phi\|_r)\leq W(\delta)<w(\varepsilon)$$

elde edilir. w azalmayan bir fonksiyon olduğundan, bu eşitlik sadece

$\|x(t)\|<\varepsilon$, $t_0\leq t<\beta_1$,

olduğu zaman gerçeklenir.

Buradan Teorem 3.3.5 den $\beta_1=\infty$ çıkar ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 5.1.10: V fonksiyoneli (a) koşulunu sağladığı zaman pozitif definit adını alır, (b) koşulunu sağladığı zaman bir infinitesimal üst sınıra sahiptir denir.

Bir sabit ψ fonksiyonu göz önüne alınırsa, her $s \in [0,H)$ için $w(s) \leq W(s)$ dir. Genellikle,

$V(t,x_t)$ nin $t \geq t_0$ için sürekli ve $t \rangle t_0$ için $\frac{d}{d_t} V(t,x_t) \leq 0$

olduğunu göstermekle (c) koşulu gerçeklenmiş olur.

SONUÇLAR

Tezimizde gecikmeli diferensiyel denklemin temel özellikleri incelenmiş ve bu özellikler kullanılarak bazı temel sonuçlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

1. BELMANN, R. and COOKE, K, L., 1963. Differential - Difference Equation Academic Press, New York.

2. DERNEK, A. N., 2001.Diferensiyel Denklemler, İstanbul.

3. DRIVER, R. D. 1977. Ordinary and Delay Diferential Equations. Springer Verlag New York. Heidelberg. Berlin.

4. EL'SGOL'TS, L. E., NORKIN, S.B., 1973. Introduction to the Theory and Application of Diferential Equations with Deviating Arguments, Academic Press, Newyork.

5. HALE, J., 1971. Functional Differential Equations, Springer – Verlag, New York

6. KOLMANOVSKII, V., MYSHKIS, A., 1999. Introduction to the Theory and Applications of Functional Diferential Equations, Kluwer Academic Publishers, London.

7. KRASOVSKII, 1956. On the Application of the Second Method of A. M. Lypunov to Equtions with Time Delays, Prikl. Mat. Meh. 20, 315 - Russian.

8. KRASOVSKII, 1959. Stability of Motion, Stanford Univ. Press, Stanford. (translated from Russian Original)

9. KRASOVSKII, N. N., 1963. Stability of Motion, Stanford University. Press, Stanford.

10. LANDAU, 1934. Diferential and Integral Calculus, Chelsea Publishing Co., New York. (translated from German original, 1934)

11. LYAPUNOV, 1892. Probleme General de la Stabilite du Movement, Princeton Univ. Press, princeton, N. J., 1947. (translated from Russian Original, 1892).Mr 9 – 34, Russian.

12. MARTYNJUK, 1971. Lectures on the Theory of Stability of Solution of Systems with Aftereffect , Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev, Russian.

13. OSBORNE, A. D., 1999. Complex Variables and Their Applications, England.

14. PINNEY, E., 1958. Ordinary Diference – Diferential Equations, University of California Press, Berkeley,

15. PITT, H. R., 1944. On a Class of Integral – Diferential Equations. Proc. Philos. Soc. 40, 199 – 211, Cambridge.

16. PITT, H. R., 1947. On a Class of Integral – Diferential Equations. Proc. Philos. Soc. 43, 153 – 163, Cambridge.

17. SHIMANOV, 1960. On Stability in the Critical of a Zero Root For Systems with time Lag, J. Appl. Math. Mech. 24, 653 – 668 (translated from Russian Original, 1960) Russian.

18. STOKES, A., 1962. A Floquet Theory for Functional Differential Equation, Proc. Nat. Academic. Sci. 48, 1330 – 1334, U.S.A.

19. WADE, W. R., 2000. An Introduction to Analysis, U. S. A.

20. WRIGHT, E. M., 1948. Linear Diferential Equation, Proc. Cambridge Philos. Soc. 44, 179 – 185, Edinburgh.

21. WRIGHT, E. M., 1949. The Linear Diferential Equation with Constant Coefficients, Proc. Roy. Soc. A, 62, 387 – 393, Edinburgh.

22. ZVERKIN, 1959. Dependence of the Stability of the Choice of Diferential Equations with a Delay on the Choice of the Initial Instant, Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him. no. 5, 15 – 20. Russian.

23. ZVERKIN, A. M., KAMENSKII, B. A., NORTIN, S. B., AND EL'SGOL'C, L. E., 1962. Differential Equations with Deviating Argument, Russian Math. Surveys 17, No. 2, 61 – 146,

ÖZGEÇMİŞ

1975 Diyarbakır'da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Kocaeli'de tamamladı. 1993 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1998 yılında Matematikçi olarak mezun oldu.

20.07.1999 tarhinden itibaren Kocaeli Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Ana Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.