KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİ BAĞINTISININ GENELLEŞTİRİLMESİ ve ONUN BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Matematikçi Çiğdem ARAS

Ana bilim Dalı : Matematik

Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

EYLÜL 2002

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİ BAĞINTISININ GENELLEŞTİRİLMESİ ve ONUN BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Matematikçi Çiğdem ARAS

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 6.09.2002
Tezin Savunulduğu Tarih: 18.10.2002

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Doç.Dr.Sadi BAYRAMOV	Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI	Prof.Dr.Nazım SADIK

Üye	Üye
Doç. Dr. Halis AYGÜN	Doç. Dr. Elşen VELİ

EYLÜL 2002

HOMOTOPİ BAĞINTISININ GENELLEŞTİRİLMESİ ve ONUN BAZI UYGULAMALARI

Çiğdem ARAS

Anahtar Kelimeler: Spektral Homotopya, Topolojik Uzayların Ters ve Düz Spektrleri, Homotopik Teori, Homoloji Teori, Homotopik Kümelerin Tam Dizisi, Kotam Dizisi.

Özet: Topolojik uzayların ters ve düz spektrler kategorisinde yeni bir denklik bağıntısı olan "$\overset{s}{\sim}$" spektral homotopya bağıntısı tanımlanmış ve bundan yararlanarak topolojik uzaylar kategorisinde verilen homotopik teorinin genelleştirilmesi olan $Inv(Top_0^2)$ kategorisinde bir homotopik teori kurulmuştur.

1.Bölümde homotopik teori ile ilgili incelenen makaleler tanıtılmıştır.
2.Bölümde ileride kullanılacak olan temel bilgiler verilmiştir.
3.Bölümde topolojik uzaylar kategorisinde tanımlanan bazı işlemler topolojik uzayların ters spektrler kategorisine genişletilmiştir.
4.Bölümde tezin temel kavramı olan spektral homotopya bağıntısı tanımlanmış ve onun temel özellikleri araştırılmıştır.
5.Bölümde $Inv(Top_0^2)$ kategorisinde homotopik teori kurulmuştur.
6.Bölümde $Inv(Top_0)$ kategorisinde $[S\underline{X},\underline{Y}]$ ile $[\underline{X},\Omega\underline{Y}]$ funktorları arasında doğal denkliğin varolduğu ispatlanmıştır.
7.Bölümde topolojik uzayların ters spektrlerinin morfizması için tam ve kotam dizi tanımlanmıştır.
8.Bölümde ters spektrlerin spektral homotopya bağıntısı ile bu spektrlerin limit uzaylarının homotopya bağıntısı arasındaki ilişki incelenmiştir.

THE GENERALIZATION of HOMOTOPY RELATION and ITS SOME APPLICATIONS

Çiğdem ARAS

Keywords: Spectral Homotopy, Inverse and Direct Spectra of Topological Spaces, Homotopic Theory, Homology Theory, Exact and Coexact Sequence of Homotopic Sets.

Abstract: The new homotopy relation, which is called spectral homotopy, is introduced on the category of direct and inverse spectra of topological spaces. This relation is equivalence one. By using the introduced spectral homotopy relation, the homotopic theory is build on the category $Inv(Top_0^2)$, which in its turn is a generalization of homotopic theory of topological spaces.
In the Chapter 1, the articles related to the homotopic theory are reviewed.
In the Chapter 2, the basic information on concepts, which will be used further, is given.
In the Chapter3, some operations defined on the category of topological spaces are extended to the category of inverse spectra of topological spaces.
In the Chapter 4, the thesis' basic concept of spectral homotopy relation is defined , and its basic features are investigated.
In the Chapter 5, the homotopic theory is created on the category $Inv(Top_0^2)$.
In the Chapter 6, the natural equivalence of the functors $[S\underline{X},\underline{Y}]$ and $[\underline{X},\Omega\underline{Y}]$ on the category $Inv(Top_0)$ is proved.
In the Chapter 7, the exact and coexact sequences for the morphism of inverse spectra of topological spaces is defined.
In the Chapter 8, the relationship within homotopics of inverse spectra and limit spaces of the spectra is established.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana büyük yardımlarından dolayı danışman hocam sayın Doç.Dr. Sadi BAYRAMOV'a teşekkür eder, saygılar sunarım.
Bu tezi oluşturma sürecini benimle sabırla paylaşan, ihtiyacım olan zamanı ve esnekliği tanıyan ve desteklerini eksik etmeyen sevgili annem ve babama sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Cebirsel topolojinin temel amaçlarından biri, verilen topolojik nesnenin cebirsel invariantlarını bulmak ve bunlardan yararlanarak topolojik nesne hakkında bilgi elde etmektir. [26],[65],[66]. Cebirsel invariantlar olarak genelde gruplar, halkalar ve diğer cebirsel yapıya sahip olan nesneler ele alınmaktadır ve sağlanması gereken koşullar yedi aksiyom şeklinde verilmektedir.

Bu koşulları sağlayan cebirsel invariantlara homoloji ve kohomoloji teoriler denir. [66] Bu teoriler içinde homotopik teorinin ve homotopya bağıntısının kendisinin özel bir yeri vardır. Bunun nedeni ise,

1) Topolojik uzayın homotopik grubu homoloji grubundan daha ince invarianttır. Örneğin, S^n n boyutlu spheranın homoloji grupları $H_q(S^n)=\begin{cases} Z, & q=n \\ 0, & q\neq n \end{cases}$, homotopik grupları ise $\pi_q(S^n)\neq 0,\, q\geq n$ şeklindedir.

2) Homoloji grup homotopik grup ile ifade edilir.
s elemanı $H_n(S^n)=Z$ grubunun üreteci olsun. $\forall[\varphi]\in\pi_n(X,x_0)$ için

$$h:\pi_n(X,x_0)\rightarrow H_n(X)$$

homomorfizması, $h[\varphi]=\varphi_*(s)$ şeklinde tanımlansın .Bu şekilde tanımlanan h homomorfizmasına Hurewic homomorfizması denir.[26],[21].

Teorem (Hurewic): Bir bağlantılı topolojik uzayın ilk sıfırdan farklı homoloji ve homotopik grupları izomorftur. [21]

Teorem (Poinkare): $h:\pi_1(X)\to H_1(X)$ homomorfizması epimorfizmadır ve $\ker h=[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ komutantına eşittir. Dolayısı ile

$$H_1(X)\approx \pi_1(X)\big/[\pi_1(X),\pi_1(X)]$$ dır. [26]

3) Brown Gösterim Teoremi: Her H^* kohomoloji teori için,

$$\forall X\in CW\,,\, H^*(X)=[X,B]$$

şartını sağlayacak şekilde bir $H-$ uzayı vardır, yani keyfi X, CW-kompleksinin kohomoloji grubu homotopik küme ile ifade edilir.[46],[19],[67],[32]
Örneğin, topolojik $K-$ teoride. Eğer $B_F=\varinjlim G_K\left(F^{2K}\right)$ ise her X poliyedri için $K^*(X)$ ile $[X,B_F\times Z]$ grupları doğal izomorftur. [4]

4) Homoloji ve kohomoloji teorilerin tanımlanması için homotopya bağıntısı önemli yer tutar. Çünkü, bu teorilerde en önemli aksiyom homotopya aksiyomudur. Genel olarak verilen homoloji ve kohomoloji teoriler tüm topolojik uzaylar kategorisinde tanımlı değildir. Örneğin, simplisial homoloji teori sadece poliyedirler kategorisinde tanımlıdır.[57]

Topolojik $K-$ teori ise sonlu $CW-$ kompleksler kategorisinde tanımlıdır. [4]
O halde topolojik uzaylar kategorisinin bir alt kategorisinde tanımlı homotopik invariant funktorun (homotopya aksiyomunu sağlayan funktor) homotopik invariantlığını koruyarak tüm topolojik uzaylar kategorisine genişletilme problemi ele alınabilir.

5) Homotopya bağıntısı matematiğin diğer problemlerinin çözümünde iyi bir araç olarak kullanılabilir. Genişletilme problemi örnek olarak verilebilir. Yani (X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay $A\subset X$ alt uzay ve $f:A\to Y$ giden sürekli bir dönüşüm

olsun. $g|_A = f$ olacak şekilde f'ninde özelliğini sağlayan $g: X \to Y$ dönüşümü var mı sorusu genişletilme problemidir.

Günümüze kadar genişletilme probleminin tam çözümü bulunamamıştır. Yalnız özel durumlarda bu problem çözülmüştür. Örnek olarak Tietze Uryson Teoremi verilebilir.[20]

Genişletilme problemi retrakt problemi ile denktir. Eğer $A \subset X$ alt uzayı X uzayının retraktı ise o zaman $f: A \to Y$ fonksiyonunun X uzayına kadar genişletilmesi vardır. Retrakt probleminin çözümü kolay olmadığından dolayı genişletilme problemi homotopik sınıflarda araştırılır. Görüldüğü gibi genişletilme problemi ancak homotopik sınıfa bağlıdır, yani eğer (X, A) çifti homotopyanın genişletilme özelliğine sahip çifti ise homotopik sınıfta genişletilmesi olan bir dönüşümle homotop olan diğer dönüşümünde genişletilmesi vardır. [65]

S^n $n-$ boyutlu spheranın yüksek boyutlu homotopik gruplarının bulunması çok zor olduğundan günümüze kadar bu problem çözülememiştir. Bu nedenle son zamanlarda, yeni bir homotopik teori olan Stable homotopik teori tanımlanmıştır.

Eğer $E = (\{E_n\}_{n \in N}, \{\varepsilon_n : SE_n \to E_{n+1}\})$ $CW-$ komplekslerin düz ailesi ve ε_n gömme dönüşümü ise E ye spektr denir.

$$\pi_r(E) = \lim_{n \to \infty} \pi_{n+r}(E_n)$$

grubuna bu E spektrinin stable homotopik grubu denir. [1]

Bu alanda yapılan araştırmalar günümüze kadar devam etmektedir.

Schwede Stefan [63] : Stable homotopik teoride evrensel diyagramlar yöntemini kullanarak bazı özel spektrlerin stable homotopik gruplarını bulmuştur.

Hovey Mark, Palmieri [25] : Spektrler kategorisinde, E,F spektrleri için bu spektrler arasında

$E \geq F \Leftrightarrow \forall Z$ spektri için $F \wedge Z = 0$ ise $E \wedge Z = 0$

şeklinde bir bağıntı tanımlamışlar ve bu bağıntıdan yararlanarak iki spektrin denk olmasını

E ve F spektrleri denktir $\Leftrightarrow E \geq F$ ve $F \geq E$ dir

biçiminde vermişlerdir. Bu denklik sınıflarının stable homotopik grubu sınıfa bağlı değildir.

Kleyn John R. [29], [30] : G topolojik grubundan yararlanarak D_G spektrini tanımlamıştır. Bundan yararlanarak,

"G grubunun gösterim uzayı B_G Poinkare ikiliğini sağlar $\Leftrightarrow$ D_G spektrinin stable homotopik grupları sonludur."

teoremini ispatlamıştır.

Tai Jin-Yen [68] : $CW-$ komplekslerin homotopik tipler kategorisinde her f dönüşümü için L_f funktorunu tanımlamış, bundan yararlanarak;

"$f : X \to X, X$ uzayının bağlantılı bileşenlerinde bijektif değilse her X için $L_f(X)$ daralma dönüşümüdür"

teoremini ispatlamıştır.

Miyata Takahisa. [51] : Stable homotopik gruplar için Brown gösterim teoremini ispatlamıştır.

Görüldüğü gibi homoloji teoriler arasında homotopik teorinin ne kadar önemli bir yeri olduğu açıktır. Diğer yandan bazı homoloji ve kohomoloji teorilerin kurulmasında, funktorların genişletilmesinde topolojik uzayların ters ve düz spektrleri kullanılmaktadır.

Topolojik uzaylarda ters spektr kavramını aşağıdaki problemle de bağlantılı olarak ilk defa 1929. cı yılda P.S.Alexandroff vermiştir.[2] Bu problem topolojik uzaya polyedirlerle yaklaşım problemidir. Daha sonra, her metrik kompakt uzayın sonlu polyedirlerin ters dizisinin limitine homeomorf olduğu ispatlanmıştır.1931' ci yılda S.Lefschetz topolojik uzayların ters spektrinin morfizmasını tanımlayarak ters spektrlerin kategorisini oluşturmuştur.[39] Daha sonra topolojik uzayların ters spektrler kategorisini fakh bir biçimde 1942.ci yılda yine S.Lefschetz tanımlamıştır.[40]

Ters spektrlerin her yönlü araştırılması 1952.ci yılda N.Steenrood ve S.Eilenberg tarafından verilmiştir.[66] Bu çalışmadan sonra ters ve düz spektrler sadece topoloji de değil matematiğin başka alanlarında da kullanılmaya başlanmıştır. Çünkü ters, düz spektrler ve onların limitleri çarpım ve toplam işlemi tanımlanan her kategoride verilebilir. Ters ve düz spektrlerin matematiğin bazı alanlarında kullanılması ile ilgili birkaç örnek verelim:

Genel Topoloji:

Topolojik uzaylara polyedirlerin ters spektri ile yaklaşım problemi ele alınmıştır. Bu problemle ilgili en kapsamlı çalışmalar Alexandroff ve onun öğrencileri Zaytsev ve Ponomaryov v.s tarafından yürütülmüştür. [74],[56] Bu çalışmalarda yapılmak istenen şudur: (X,τ) topolojik uzayının kanonik açık örtümlerinden yararlanıp polyedirlerin ters spektri oluşturulmuştur. Bu ters spektrin limiti olan X^* kompakt uzaydır. O zaman X ve X^* uzayları arasında nasıl bir ilişki kurulabilir sorusu akla gelmiştir. Topolojik uzaylar sınıfını daraltarak kompakt X^* uzayı X uzayının hangi çeşit kompaklaştırılması olabilir sorusunu çözmeye çalışmışlardır. Zaytsev $T_\lambda -$ uzaylar sınıfi için bu problemi araştırmıştır. (X,τ) bir T_1- uzayı ve bunun τ

topolojisinin tabanı kanonik açık kümelerdir. Eğer $\forall x \in X$ ve $x \in O_x$ komşuluğu için $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \subset O_x$ sağlanacak şekilde sonlu tane kanonik kapalı $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ) uzayına $T_\lambda -$ uzayı denir. $T_\lambda -$ uzayları için X^* uzayı X uzayının Wallman kompaklaştırılması ve Quazinormal uzaylar için ise X^* uzayı X uzayının Stone-$\check{C}ech$ kompaklaştırılması olduğunu göstermişlerdir.

Cebirsel Topoloji:

a) Cebirsel topolojide tanımlanan homoloji ve kohomoloji teorilerin çoğunluğu sonlu $CW -$ kompleksler kategorisinde verilir. Örneğin $K -$ teori.[4] Doğal olarak verilen teorinin özelliklerini koruyarak bu teoriyi daha büyük kategoriye genişletme problemi ortaya çıkmıştır. Bu problemin çözümünde kullanılan yöntemlerden biride ters ve düz spektrler yöntemidir.[4],[5],[7],[10],[11] Buradaki en büyük zorluk genişletilen funktorun homotopik invariantlığının korunmasıdır.

$K -$ funktor yerel sonlu $CW -$ kompleksler kategorisine iki şekilde genişletilir:

1) Eğer X yerel sonlu $CW -$ kompleks ise $X = \lim\limits_{n \to \infty} X^n$ sonlu $CW -$ komplekslerin düz limitidir. O halde $K(X) = \lim\limits_{\leftarrow} K(X^n)$ şeklinde tanımlanır.

2) $B_F = \lim\limits_{\overrightarrow{K}} G_K\left(F^{2K}\right)$ ise $K(X) = [X, B_F]$ dır. Fakat birinci genişletilen funktor için tamlık aksiyomu sağlanmaz, ikinci için ise $K -$ teorinin hesaplama yöntemleri geçersizdir. Bu nedenle funktorların bazı koşullar altında denk olduğu ispatlanmıştır. [4], [10]

Topolojik uzayların açık örtümlerinden yararlanarak $K -$ funktoru tüm topolojik uzaylar kategorisine genişletilmiştir. Burada genişletilen funktorun homotopik invariantlığını korumak için yeni bir homotopya bağıntısı verilmiştir. [11],[12]

b) Ters spektrlerden yararlanarak spektral homoloji ve kohomoloji teoriler adı verilen yeni teoriler tanımlanır. Bu teori simplicial ve singüler teorilerin en iyi yönlerini yapısında taşıdığı için önemli bir teoridir. [66]

Homotopik invariant funktorun iki şekilde genişletilmesi söz konusudur. [19], [38], [22], [15] , [16] Bunlardan biri $\check{C}ech$ genişletilmesi diğeri ise Kan genişletilmesidir. $\check{C}ech$ genişletilmesi özel ters spektrlerden yararlanarak yapılır.

c) Topolojik uzayların $\underline{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \underline{Y} = \{Y_\beta\}_{\beta\in B}$ ters spektrleri ve $X = \lim\limits_{\leftarrow}\underline{X}, Y = \lim\limits_{\leftarrow}\underline{Y}$ uzayları ile ilgili aşağıdaki homotopik kümeler ele alınabilir.

$$[X,Y],\ \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha}}[X_\alpha, \lim_{\leftarrow}\underline{Y}],\ \lim_{\substack{\leftarrow \\ \beta}}[\lim_{\leftarrow}\underline{X}, Y_\beta],\ \lim_{\substack{\leftarrow \\ \beta}}\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha}}[X_\alpha, Y_\beta]$$

Bu kümeler arasında nasıl bir bağıntı olduğu araştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) J.Milnor [49] : Eğer $\underline{X} = \left(\{X_n\}_{n\in N}, \{p_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n\}_{n\in N}\right)$, $\underline{Y} = Y$ ve her $n \in N$ için p_n^{n+1} – kotabakalanma ise

$$* \to \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}}{}^{(1)}[SX_n, Y] \to [\lim_{\leftarrow}\underline{X}, Y] \to \lim_{\substack{\rightarrow \\ n}}[X_n, Y] \to *$$

dizisi tamdır.

2) R.M.Vogt [69]: Eğer $\underline{X} = X$, $\underline{Y} = \left(\{Y_n\}_{n\in N}, \{q_n^{n+1} : Y_{n+1} \to Y_n\}_{n\in N}\right)$ ve her $n \in N$ için q_n^{n+1} – tabakalanma ise

$$* \to \lim_{\substack{\leftarrow \\ j}}{}^{(1)}[X, \Omega Y_j] \to [X, \lim_{\leftarrow}\underline{Y}] \to \lim_{\substack{\leftarrow \\ j}}[X, Y_j] \to *$$

dizisi tamdır.

3) K.Morita [52]: Eğer $\underline{X} = \left(\{X_n\}_{n\in N}, \{p_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n\}_{n\in N}\right)$ $CW-$ komplekslerin ters dizisi ve $\underline{Y} = Y$ ise $\left[\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X}, Y\right]$ ve $\lim\limits_{\underset{i}{\rightarrow}}[X_i, Y]$ kümeleri arasında birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

4) Z.R.Miminoshvili, F.Bauer [50],[6]: Eğer $\underline{X} = \left(\{X_n\}_{n\in N}, \{p_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n\}_{n\in N}\right)$ $\underline{Y} = \left(\{Y_n\}_{n\in N}, \{q_n^{n+1} : Y_{n+1} \to Y_n\}_{n\in N}\right)$ $CW-$ komplekslerin ters dizisi ve her $n \in N$ için $q_n^{n+1}-$ tabakalanma ise

$$* \to \lim_{\underset{j}{\leftarrow}}{}^{(1)} \lim_{\underset{i}{\rightarrow}} \left[X_i, \Omega Y_j\right] \to \left[\lim_{\leftarrow} \underline{X}, \lim_{\leftarrow} \underline{Y}\right] \to \lim_{\underset{j}{\leftarrow}} \lim_{\underset{i}{\rightarrow}} \left[X_i, Y_j\right] \to *$$

dizisi tamdır.

Bu sonuçların topolojik uzayların ters dizileri için bazı koşullar altında genelleştirilmesi daha sonra verilmiştir. [43],[44],[53],[48]

5) Lee Dae-Woong [34]: $\{X_\alpha\}_{\alpha\in D}$ ters spektrini $D \to Top$ giden funktor şeklinde ele almıştır.
$\underline{\alpha} = \{\alpha_0 \le \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_m\}$ için $X_{\underline{\alpha}} = X_{\alpha_0}$ olsun. Eğer R komutatif birimli halka ise

$$\bigoplus_{m\ge o} \prod_{|\underline{\alpha}|} Hom\left(C_m\left(X_{\underline{\alpha}}\right), R\right)$$

graudire olmuş halkadır ve küp çarpımına izomorftur.

Lee Dae-Woong [35]: Eğer $\underline{X} = \{X_\alpha\}$ $CW-$ komplekslerin ters spektri ise

$$H_p\left(\underline{X}; G\right) \approx H_p^{(1)}\left(\underline{X}; G\right)$$

izomorftur.

6) Lee, Kim, Han, Lee, Lee [37]: Eğer $\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}\right)$ ters spektrinde $p_\alpha^{\alpha'}$ zayıf tabakalanma ise

$$\pi_k\left(\varprojlim X_\alpha\right) \approx H_k\left(\varprojlim \underline{X}, Z\right)$$

izomorftur.

7) Lee Hong-Jac [36]: Genel anlamda her ters spektr için bu ters spektrin limiti düz ailenin limitine homeomorf olacak şekilde bir özel düz aile tanımlanabilir.

d) Topolojik uzayların ters spektrlerinden yararlanarak Shape adı verilen kategori tanımlanmıştır. Bu kategorinin nesneleri topolojik uzayların ters spektrinin limitine homotopik denk uzaylar, morfizmaları ise uygun ters spektrlerin morfizmasının limitine homotopik denk olan dönüşümlerdir. Bu kategoriyi kullanarak yeni homoloji ve homotopik teoriler tanımlanabilir. [7], [43], [45]

Daha sonra güçlü Shape teorisi verilmiştir. Burada ters spektrlerin morfizması tanımında izoton dönüşüm kullanılmamaktadır. Bu nedenle tanımlanan homotopya bağıntısı her zaman ters spektrlerin morfizması olur. Bu ise homoloji teorinin kurulmasında kolaylık sağlar. Fakat tanımlanan homotopya üzerinde çok fazla koşul verilmiştir.Güçlü Shape teorisi hakkında tüm bilgiler [44], [45], de yer almaktadır.

Lisica Ju.T. [41]: c) şıkkında verilen tam dizilerde $\varprojlim$ funktorunun $\varprojlim^{(1)}$ türev funktoru kullanılmaktadır. Bu çalışmada $\varinjlim$, düz limit funktorunun kompakt gruplar kategorisinde türev funktoru tanımlanarak c) deki tam dizilerden daha farklı tam diziler kurulmuştur.

Cebir:

Grupların ters ve düz spektrlerinden yararlanarak yeni gruplar tanımlanabilir.

a) Sonlu grupların ters spektrinin limitine prosonlu grup denir. Böyle gruplar cebirde, cebirsel geometride çok büyük önem taşır. [64]

b) Sonlu grupların düz dizisinin limitine yerel sonlu grup denir. Bu grupların özelliklerinin araştırılması sonlu grupların ve düz spektrlerin özelliklerine dayanarak yapılır. [33]

Yukarıda anlatılanları göz önüne alarak, ters ve düz spektrlerin matematiğin farklı alanlarında bir araç olarak kullanıldığı sonucuna varabiliriz. Bu nedenle topolojik uzayların ters ve düz spektrler kategorisine yeni bir açıdan yani homotopik açıdan bakılmasının gerekli olduğu görüldü.

Bu tez çalışmasının amacı, topolojik uzayların ters ve düz spektrler kategorisinde yeni bir denklik bağıntısı olan "$\overset{s}{\sim}$" spektral homotopya bağıntısı tanımlamak ve bu bağıntıdan yararlanarak $Inv(Top_0^2)$ kategorisinde yeni bir homotopik teori kurmak ve daha sonra $\forall \underline{X}, \underline{Y}$ ters spektrleri için $[\underline{X}, \underline{Y}]$ homotopik kümesi ile c) şıkkında verilen homotopik kümeler arasındaki bağıntıyı araştırmaktır.
Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere sekiz bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde genel bilgiler verilmektedir.

Üçüncü bölümde topolojik uzaylar kategorisinde tanımlanan $C, S, \Omega, P, C_f, P_f$ işlemleri topolojik uzayların ters spektrler kategorisine genişletilmiştir.

Dördüncü bölümde $Inv(Top)$ ve $Dir(Top)$ kategorilerinde tezin temel kavramı olan spektral homotopya bağıntısı verilmiş ve bu bağıntının temel özellikleri araştırılmıştır. Spektral homotopya bağıntısından yararlanarak homotopoik invariant kontravaryant funktorun $\check{C}ech$ genişletilmesinin homotopik invariantlığı ispatlanmıştır. Aynı zamanda spektral homoloji teorinin homotopya aksiyomunun yeni ispatı daha kolay biçimde verilmiştir.

Beşinci bölümde topolojik uzaylar kategorisinin genişletilmesi olan $Inv(Top_0^2)$ kategorisinde spektral homotopik gruplar tanımlanmış ve bu gruplar için homotopik teorinin Steenrood-Eilenberg aksiyomlarının sağlandığı ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde $Inv(Top_0)$ kategorisinde $[S\underline{X},\underline{Y}]$ ile $[\underline{X},\Omega\underline{Y}]$ funktorları arasında doğal denkliğin varolduğu ispatlanmıştır.

Yedinci bölümde topolojik uzayların ters spektrlerinin $\forall \underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için

$$\underline{X} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{Y} \xrightarrow{\underline{i}} C_{\underline{f}} \xrightarrow{\underline{k}'} S\underline{X} \xrightarrow{S\underline{f}} S\underline{Y} \to \ldots \to S^n \underline{X} \xrightarrow{S^n \underline{f}} S^n \underline{Y} \xrightarrow{S^n \underline{i}} \left(S^n\left(C_{\underline{f}}\right)\right) \to \ldots$$

dizisinin kotam olduğu ve

$$\cdots \to \Omega\underline{X} \xrightarrow{\Omega\underline{f}} \Omega\underline{Y} \xrightarrow{\underline{p}' \circ \underline{v}} P_{\underline{f}} \xrightarrow{\underline{m}} \underline{X} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{Y}$$

dizisinin tam olduğu ispatlanmıştır.

Sekizinci bölümde ters spektrlerin spektral homotopya bağıntısı ile bu spektrlerin limit uzaylarının homotopya bağıntısı arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarakta ters spektrlerin spektral homotopik grubu ile limit uzayının homotopik grubunun birbirine izomorf olduğu ispatlanmıştır.

BÖLÜM 2

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar verilmektedir.

Tanım 2.1: A yönlendirilmiş küme, $\forall \alpha \in A$ elemanı için X_α topolojik uzay ve $\forall \alpha, \alpha' \in A, \alpha \prec \alpha'$ için $p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ topolojik uzayların dönüşümü verilsin. Eğer

1) $\forall \alpha \in A$ için $p_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$
2) $\forall \alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $p_\alpha^{\alpha''} = p_\alpha^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}$

koşulları sağlanırsa,

$$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

ailesine ters spektr denir.

Tanım 2.2: A yönlendirilmiş küme, $\forall \alpha \in A$ elemanı için X^α topolojik uzay ve $\forall \alpha, \alpha' \in A, \alpha \prec \alpha'$ için $p_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ topolojik uzayların dönüşümü verilsin. Eğer

1) $\forall \alpha \in A$ için $p_\alpha^\alpha = 1_{X^\alpha} : X^\alpha \to X^\alpha$
2) $\forall \alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $p_\alpha^{\alpha''} = p_{\alpha'}^{\alpha''} \circ p_\alpha^{\alpha'}$

koşulları sağlanırsa,

$$\overline{X} = \left(\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \{p_{\alpha}^{\alpha'} : X^{\alpha} \to X^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

ailesine düz spektr denir.

Tanım 2.3: $\underline{X} = \left(\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}\right)$, $\underline{Y} = \left(\{Y_{\beta}\}_{\beta \in B}\right)$ iki ters spektr, $\pi : B \to A$ yönlendirilmiş kümelerin izoton dönüşümü ve $\forall \beta \in B$ elemanı için $f_{\beta} : X_{\pi(\beta)} \to Y_{\beta}$ olsun. Eğer $\forall \beta' \succ \beta \in B$ elemanı için

$$\begin{tikzcd}
X_{\pi(\beta')} \arrow[r, "p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}"] \arrow[d, "f_{\beta'}"'] & X_{\pi(\beta)} \arrow[d, "f_{\beta}"] \\
Y_{\beta'} \arrow[r, "q_{\beta}^{\beta'}"'] & Y_{\beta}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise

$$\underline{f} = \left(\pi : B \to A, \{f_{\beta} : X_{\pi(\beta)} \to Y_{\beta}\}_{\beta \in B}\right)$$

ailesine ters spektrlerin morfizması denir.Burada π izoton dönüşümü örtendir. [20]

Tanım 2.4: $\overline{X} = \left(\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in A}\right), \overline{Y} = \left(\{Y^{\beta}\}_{\beta \in B}\right)$ iki düz spektr, $\pi : A \to B$ yönlendirilmiş kümelerin izoton dönüşümü ve $\forall \alpha \in A$ elemanı için $f^{\alpha} : X^{\alpha} \to Y^{\pi(\alpha)}$ olsun. Eğer $\forall \alpha' \succ \alpha \in A$ elemanı için

$$\begin{tikzcd}
X^{\alpha} \arrow[r, "p_{\alpha}^{\alpha'}"] \arrow[d, "f^{\alpha}"'] & X^{\alpha'} \arrow[d, "f^{\alpha'}"] \\
Y^{\pi(\alpha)} \arrow[r, "q_{\pi(\alpha)}^{\pi(\alpha')}"'] & Y^{\pi(\alpha')}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise

$$\overline{f}=\left(\pi : A \to B, \left\{f^{\alpha} : X^{\alpha} \to Y^{\pi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}\right)$$

ailesine düz spektrlerin morfizması denir.

Topolojik uzayların ters spektrleri ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur. Bu kategori $Inv(Top)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.5: Topolojik uzayların $\underline{X}=\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$ ters spektri için

$$\lim_{\leftarrow}\underline{X}=\left\{\{x_\alpha\}_\alpha : \forall \alpha \prec \alpha' \text{ } için \text{ } p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})=x_\alpha\right\}\subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

alt uzayına $\underline{X}$ ters spektrinin limiti denir.

Tanım 2.6: $\overline{X}=\left(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$ topolojik uzayların düz spektri ve $\sum X^\alpha$ topolojik toplam olsun. $\forall x^\alpha \in X^\alpha$ ve $x^{\alpha'}\in X^{\alpha'}$ elemanları için

$$x^\alpha \sim x^{\alpha'} \Leftrightarrow \exists \alpha'' \succ \alpha,\alpha' \text{ için } p_\alpha^{\alpha''}\left(x^\alpha\right)=p_{\alpha'}^{\alpha''}\left(x^{\alpha'}\right)$$

şeklinde tanımlanan "~" denklik bağıntısına göre $\sum X^\alpha/\sim$ bölüm uzayına $\overline{X}$ düz spektrinin limiti denir ve $\lim\limits_{\overrightarrow{\alpha}} X^\alpha = \sum X^\alpha/\sim$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7: $\underline{X}=\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$ ve $\underline{Y}=\left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$ topolojik uzayların ters spektrleri ve

$$\underline{f}=\left(\pi : B\to A, \left\{f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : \underline{X}\to\underline{Y}$$

ters spektrlerin morfizması olsun. $\forall\left\{x_{\pi(\beta)}\right\}\in \lim\limits_{\leftarrow}\underline{X}$ elemanı için

$$\lim_{\leftarrow} \underline{f}\left(\left\{x_{\pi(\beta)}\right\}\right)=\left\{f_{\beta}\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right\}$$

olacak şekilde tanımlanan $\lim\limits_{\leftarrow} \underline{f} : \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \to \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y}$ dönüşümüne $\underline{f}$ morfizmasının limiti denir.

Tanım 2.8: $\overline{X}=\left(\left\{X^{\alpha}\right\}_{\alpha\in A}\right), \overline{Y}=\left(\left\{Y^{\beta}\right\}_{\beta\in B}\right)$ topolojik uzayların düz spektrleri ve

$$\overline{f}=\left(\pi : A \to B, \left\{f^{\alpha} : X^{\alpha} \to Y^{\pi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}\right) : \overline{X} \to \overline{Y}$$

düz spektrlerin morfizması olsun. $\sum f^{\alpha} : \sum X^{\alpha} \to \sum Y^{\pi(\alpha)}$ dönüşümünden üretilen bölüm uzaylarının

$$\lim_{\rightarrow} \overline{f} : \sum X^{\alpha}/_{\sim} \to \sum Y^{\pi(\alpha)}/_{\sim}$$

dönüşümüne $\overline{f}$ morfizmasının limiti denir.

Tanım 2.9: (X,x_0) ve (Y,y_0) belirli noktalı topolojik uzaylar olsun.

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$$

alt uzayına X ve Y uzayının destesi (wedge sum) denir.

Tanım 2.10: (X,x_0) ve (Y,y_0) belirli noktalı topolojik uzaylar olsun.

$$X \wedge Y = X \times Y/_{X \vee Y}$$

uzayına parçalı çarpım (smash product) denir.

Tanım 2.11: $\forall(X,x_0)$ belirli noktalı topolojik uzayı için

$$SX = S \wedge X$$

uzayına X uzayının üst kurumu (suspension) denir.

Tanım 2.12: $\forall(X, x_0)$ belirli noktalı topolojik uzayı için

$$CX = I \wedge X$$

uzayına X uzayının konisi denir.

Tanım 2.13: $f:(X, x_0) \to (Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların dönüşümü için $Y \vee CX$ uzayının $[1, x] \sim f(x)$ denklik bağıntısına göre bölüm uzayına f dönüşümünün konisi denir ve

$$C_f = Y \cup_f CX$$

ile gösterilir.

Tanım 2.14: $\forall(Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayı için

$$PY = (Y, y_0)^{(I,0)}$$

uzayına başlangıcı y_0 olan Y deki yolların uzayı denir.

Tanım 2.15: $\forall(Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayı için

$$\Omega Y = \{\omega \in PY : \omega(0) = \omega(1) = y_0\} \subset PY$$

alt uzayına Y uzayının y_0 noktasındaki düğüm uzayı (loop space) denir.

Tanım 2.16: $f:(X, x_0) \to (Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların dönüşümü için

$$\{(x,\omega)\in X\times PY : f(x)=p(\omega)=\omega(1)\}\subset X\times PY$$

şeklinde tanımlanan alt uzaya P_f uzayı denir.

Tanım 2.17: X bir topolojik uzay $CovX$, X in tüm açık örtümlerinden oluşan yönlendirilmiş küme olmak üzere

$$\overset{s}{H}_q(X)=\varprojlim_{\alpha\in CovX} H_q(nerv\alpha)$$

grubuna X uzayının $q-$ boyutlu spektral homoloji grubu denir. [66]

Tanım 2.18: F poliyedirler kategorisinde tanımlı homotopik invariant kontravaryant funktor olsun. $\forall X\in Top$ uzayı için Ω_X, X uzayının normalleştirilebilir açık örtümlerinden oluşan yönlendirilmiş küme olmak üzere

$$\check{F}(X)=\varinjlim_{\alpha\in\Omega_X} F(|nerv\alpha|)$$

şeklinde tanımlanan $\check{F}$ funktoruna $\check{C}ech$ genişletilmesi denir. [19]

Tanım 2.19: $f_0, f_1 : X\to Y$ sürekli iki dönüşüm ve $I=[0,1]$ aralığı olsun. Eğer

$$F(x,0)=f_0(x),\ F(x,1)=f_1(x)$$

sağlanacak şekilde $F: X\times I\to Y$ sürekli dönüşümü varsa F e homotopya , f_0 ve f_1 dönüşümlerine homotop dönüşümler denir. f_0 ve f_1 dönüşümlerinin homotop olması $f_0\sim f_1$ ile gösterilir.

Tanım 2.20: $f_0, f_1 : X\to Y$ sürekli iki dönüşüm ve $X'\subset X$ için $f_0|_{X'}=f_1|_{X'}$ olsun.

Eğer,

$$F(x,0)=f_0(x), F(x,1)=f_1(x) \text{ ve } F(x,t)=f_0(x)=f_1(x), x\in X', \forall t\in I$$

sağlanacak şekilde $F: X\times I\to Y$ dönüşümü varsa f_0 ve f_1 dönüşümlerine X' alt uzayına göre göreli (relative) homotop dönüşümler denir ve $f_0 \sim f_1 \quad relX'$ ile gösterilir.

Tanım 2.21: $\forall X,Y$ topolojik uzayları için

$$[X,Y]= {}^{Hom(X,Y)}\!\big/_{\sim}$$

bölüm kümesine homotopik sınıflar kümesi denir.

Tanım 2.22: (X,A) topolojik uzaylar çifti, Y de bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall g: X\to Y$ ve $x\in A$ için $G(x,0)=g(x)$ koşulunu sağlayan $G: A\times I\to Y$ homotopyası için $F(x,0)=g(x)$ ve $F|_{A\times I}=G$ şartlarını sağlayan

$$F: X\times I\to Y$$

homotopyası varsa (X,A) çiftine Y uzayına göre homotopyanın genişletilme özelliğine sahip çifti denir.

Tanım 2.23: $f: X'\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall Y$ uzayı, $g: X\to Y$ dönüşümü ve $G(x',0)=g(f(x'))$ koşulunu sağlayan $G: X'\times I\to Y$ homotopyası için $F(x,0)=g(x) \quad x\in X$, $G(x',t)=F(f(x'),t) \quad x'\in X'$ şartlarını sağlayan

$$F: X\times I\to Y$$

homotopyası varsa f dönüşümüne kotabakalanma denir.

Tanım 2.24: $\forall f : X \to Y$ sürekli dönüşüm olsun. $X \times I \oplus Y$ uzayının $(x,1) \sim f(x)$ denklik bağıntısına göre

$$X \times I \oplus Y \big/_{\sim} = Z_f$$

bölüm uzayına f dönüşümünün silindiri denir.

Tanım 2.25: $F : Top \to C$ giden funktor olsun. Eğer $f \sim g : X \to Y$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ ise F e homotopik invariant funktor denir.

Tanım 2.26: $\forall (X, x_0) \in Top_0$ belirli noktalı topolojik uzayı için

$$\pi_n(X, x_0) = \lfloor I^n, \partial I^n; X, x_0 \rfloor$$

grubuna (X, x_0) uzayının $n-$ boyutlu mutlak homotopik grubu denir.

Tanım 2.27: $\forall (X, A, x_0) \in Top_0^2$ belirli noktalı topolojik uzaylar çifti için

$$\pi_n(X, A, x_0) = \lfloor I^n, I^{n-1}, J^{n-1}; X, A, x_0 \rfloor$$

grubuna (X, A, x_0) uzayının $n-$ boyutlu göreli homotopik grubu denir.

$\pi_n : Top_0^2 \to Group$ homoloji teorinin aksiyomlarını sağlayan kovaryant funktordur.

Not: $\forall (X, x_0), (Y, y_0) \in Top_0$ belirli noktalı topolojik uzaylar için $[X, x_0; Y, y_0]$ belirli noktalı kümedir.

Tanım 2.28: Belirli noktalı kümelerin $f : (A, a_0) \to (B, b_0)$ dönüşümü için

$$\ker f = \{a \in A : f(a) = b_0\} \subset A$$

alt kümesine f dönüşümünün çekirdeği denir.

Tanım 2.29: Belirli noktalı kümelerin $(A,a_0)\xrightarrow{f}(B,b_0)\xrightarrow{g}(C,c_0)$ dizisi için

$imf = \ker g$

şartı sağlanıyorsa bu diziye tam dizi denir.

Tanım 2.30: Belirli noktalı topolojik uzayların her $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ dönüşümü için

$$
\begin{aligned}
&(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)\xrightarrow{j}(C_f,*)\xrightarrow{k'}(SX,*)\xrightarrow{Sf}(SY,*)\xrightarrow{Sj}\cdots\\
&\to(S^nX,*)\xrightarrow{S^nf}(S^nY,*)\xrightarrow{S^nj}(S^n(C_f),*)\xrightarrow{S^nk'}\cdots
\end{aligned}
$$

dizisi kotamdır, yani $\forall(W,w_0)\in Top_0$ için belirli noktalı kümelerin

$$
\begin{aligned}
&\cdots\to[S^n(C_f),*;W,w_0]\to[S^nY,*;W,w_0]\to[S^nX,*;W,w_0]\to\cdots\to[SY,*;W,w_0]\\
&\to[SX,*;W,w_0]\to[C_f,*;W,w_0]\to[Y,y_0;W,w_0]\to[X,x_0;W,w_0]
\end{aligned}
$$

dizisi tamdır.

Tanım 2.31: Belirli noktalı topolojik uzayların her $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ dönüşümü için

$$
\begin{aligned}
&\cdots\to(\Omega^nP_f,\omega_0)\xrightarrow{\Omega^n\pi}(\Omega^nX,\omega_0)\xrightarrow{\Omega^nf}(\Omega^nY,\omega_0)\to\cdots\to(\Omega X,\omega_0)\xrightarrow{\Omega f}(\Omega Y,\omega_0)\xrightarrow{p'}\\
&(P_f,*)\xrightarrow{\pi}(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)
\end{aligned}
$$

dizisi tamdır yani, $\forall(W,w_0)\in Top_0$ için belirli noktalı kümelerin

$$\cdots \to [W, w_0; \Omega^n P_f, \omega_o] \to [W, w_0; \Omega^n X, \omega_o] \to [W, w_0; \Omega^n Y, \omega_o] \to \cdots \to$$
$$[W, w_0; \Omega X, \omega_o] \to [W, w_0; \Omega Y, \omega_o] \to [W, w_0; P_f, *] \to [W, w_0; X, x_0] \to [W, w_0; Y, y_0]$$

dizisi tamdır.

BÖLÜM 3

3. TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS SPEKTRLER KATEGORİSİNDE BAZI İŞLEMLER

Bu bölümde, topolojik uzaylar kategorisinde tanımlı bazı işlemler topolojik uzayların ters spektrler kategorisinde verilecek ve bu işlemler ilerideki bölümlerde kullanılacaktır.

$$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha'}\right), \tag{3.1}$$

$$\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}, \{q_\beta^{\beta'} : Y_{\beta'} \to Y_\beta\}_{\beta \prec \beta'}\right) \tag{3.2}$$

topolojik uzayların ters spektrleri olsun.

Lemma 3.1: $\underline{X} \times \underline{Y} = \left(\{X_\alpha \times Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}, \{p_\alpha^{\alpha'} \times q_\beta^{\beta'} : X_{\alpha'} \times Y_{\beta'} \to X_\alpha \times Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')}\right)$ ailesi topolojik uzayların çarpım işlemi altında bir ters spektrdir ve $\underleftarrow{\lim}(\underline{X} \times \underline{Y})$, $\underleftarrow{\lim}\underline{X} \times \underleftarrow{\lim}\underline{Y}$ uzayları homeomorfturlar. [20]

Özel durumda eğer $\underline{Y} = \{I\}$ bir $I = [0,1]$ uzayından oluşuyorsa $\underleftarrow{\lim}_{\alpha}(X_\alpha \times I), \left(\underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha\right) \times I$ uzayları homeomorfturlar.

Lemma 3.2: $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right), \underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$ topolojik uzayların ters spektrleri olsun. Eğer $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $X_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$ ise $\{X_\alpha \cup Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ ailesi ters spektrdir ve

$$\underleftarrow{\lim}_{(\alpha,\beta)}(X_\alpha \cup Y_\beta) = \underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha \cup \underleftarrow{\lim}_{\beta} Y_\beta$$

dır.

İspat: (3.1) ve (3.2) ters spektrleri verilsin ve $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $X_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$ olsun.

$\forall \alpha \prec \alpha', \beta \prec \beta'$ için $r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')} : X_{\alpha'} \cup Y_{\beta'} \to X_\alpha \cup Y_\beta$

dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$\forall x \in X_{\alpha'} \cup Y_{\beta'}$ için $X_{\alpha'} \cap Y_{\beta'} = \varnothing$ olduğundan $x \in X_{\alpha'}$ veya $x \in Y_{\beta'}$ olmalıdır.

$$r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')}(x) = \begin{cases} p_\alpha^{\alpha'}(x), & x \in X_{\alpha'} \\ q_\beta^{\beta'}(x), & x \in Y_{\beta'} \end{cases}$$

dir. O zaman

$$\underline{X} \cup \underline{Y} = \left(\{X_\alpha \cup Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}, \{r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')} : X_{\alpha'} \cup Y_{\beta'} \to X_\alpha \cup Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')} \right)$$

ailesi ters spektrdir.Gerçekten,

1) $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için

$$r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} p_\alpha^{\alpha}(x), & x \in X_\alpha \\ q_\beta^{\beta}(x), & x \in Y_\beta \end{cases} = \begin{cases} 1_{X_\alpha}(x), & x \in X_\alpha \\ 1_{Y_\beta}(x), & x \in Y_\beta \end{cases} = 1_{X_\alpha \cup Y_\beta}(x)$$

sağlanır.

2) $\forall(\alpha,\beta) \prec (\alpha',\beta') \prec (\alpha'',\beta'') \in A \times B$ için

$$\left(r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')} \circ r_{(\alpha',\beta')}^{(\alpha'',\beta'')}\right)(x) = r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')}(r_{(\alpha',\beta')}^{(\alpha'',\beta'')}(x)) = r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')} \circ \begin{cases} p_{\alpha'}^{\alpha''}(x), & x \in X_{\alpha''} \\ q_{\beta'}^{\beta''}(x), & x \in Y_{\beta''} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} p_{\alpha}^{\alpha'}\left(\begin{Bmatrix} p_{\alpha'}^{\alpha''}(x) \\ q_{\beta'}^{\beta''}(x) \end{Bmatrix}\right), & x \in X_{\alpha''} \\ q_{\beta}^{\beta'}\left(\begin{Bmatrix} p_{\alpha'}^{\alpha''}(x) \\ q_{\beta'}^{\beta''}(x) \end{Bmatrix}\right), & x \in Y_{\beta''} \end{cases} = \begin{cases} \left(p_{\alpha}^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}\right)(x), & x \in X_{\alpha''} \\ \left(q_{\beta}^{\beta'} \circ q_{\beta'}^{\beta''}\right)(x), & x \in Y_{\beta''} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} p_{\alpha}^{\alpha''}(x), & x \in X_{\alpha''} \\ q_{\beta}^{\beta''}(x), & x \in Y_{\beta''} \end{cases} = r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha'',\beta'')}(x)$$

bulunur. O halde $\underline{X} \cup \underline{Y}$ ters spektrdir.

Şimdi $\varprojlim_{(\alpha,\beta)}(X_\alpha \cup Y_\beta) = \varprojlim_{\alpha} X_\alpha \cup \varprojlim_{\beta} Y_\beta$ olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$h : \varprojlim_{(\alpha,\beta)}(X_\alpha \cup Y_\beta) \to \varprojlim_{\alpha} X_\alpha \cup \varprojlim_{\beta} Y_\beta$$

dönüşümünün birebir ve örten olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$z = \{z_{(\alpha,\beta)}\} \in \varprojlim_{(\alpha,\beta)}(X_\alpha \cup Y_\beta)$ olsun. $\forall (\alpha,\beta) \prec (\alpha',\beta')$ için

$$r_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')}(z_{(\alpha',\beta')}) = \begin{cases} p_{\alpha}^{\alpha'}(z_{(\alpha',\beta')}), & z_{(\alpha',\beta')} \in X_{\alpha'} \\ q_{\beta}^{\beta'}(z_{(\alpha',\beta')}), & z_{(\alpha',\beta')} \in Y_{\beta'} \end{cases}$$

şeklindedir.

Eğer $z_{(\alpha',\beta')} \in X_{\alpha'}$ ise $\{z_{(\alpha,\beta)}\} \in \varprojlim_{\alpha} X_\alpha$, eğer $z_{(\alpha',\beta')} \in Y_{\beta'}$ ise $\{z_{(\alpha,\beta)}\} \in \varprojlim_{\beta} Y_\beta$ dır. O halde

$$h(z) = z$$

dır. Açıktır ki h birebir ve örtendir. O zaman

$$\lim_{\overleftarrow{(\alpha,\beta)}}(X_\alpha \cup Y_\beta) = \lim_{\overleftarrow{\alpha}} X_\alpha \cup \lim_{\overleftarrow{\beta}} Y_\beta$$

bulunur.

Homotopik teori, belirli noktalı topolojik uzaylar kategorisinde kurulduğundan bundan sonraki işlemler Top_0 kategorisinde yapılacaktır. $Inv(Top_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrler kategorisi olsun.

Lemma 3.3: $\forall(\underline{X}, \underline{x_0}) = (\{X_\alpha, x_{0_\alpha}\}_{\alpha\in A}), (\underline{Y}, \underline{y_0}) = (\{Y_\beta, y_{0_\beta}\}_{\beta\in B}) \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri için

$$\underline{X} \vee \underline{Y} = \left(\{X_\alpha \vee Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}, \{p_\alpha^{\alpha'} \vee q_\beta^{\beta'} : X_{\alpha'} \vee Y_{\beta'} \to X_\alpha \vee Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')}\right)$$

ailesi "$\vee$" işlemi altında bir ters spektrdir.

İspat: $X_\alpha \vee Y_\beta = X_\alpha \times y_{0_\beta} \cup x_{0_\alpha} \times Y_\beta$ idi. Burada $X_\alpha \times y_{0_\beta} \cap x_{0_\alpha} \times Y_\beta = (x_{0_\alpha}, y_{0_\beta})$ olduğundan arakesit boştan farklıdır. Fakat $p_\alpha^{\alpha'}$ ve $q_\beta^{\beta'}$ dönüşümleri belirli noktayı belirli noktaya taşıdığı için Lemma 3.2 den $\underline{X} \vee \underline{Y}$ yapısının bir ters spektr olduğu hemen elde edilir.

Teorem 3.4: $\forall \underline{X}, \underline{Y} \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri için $\lim\limits_{\leftarrow}(\underline{X} \vee \underline{Y})$ ve $\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \vee \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y}$ uzayları homeomorfturlar.

İspat: $$\lim_{\leftarrow} \underline{X} \vee \lim_{\leftarrow} \underline{Y} = \left(\left\{\begin{array}{l} (\{x_\alpha\}, \{y_\beta\}) \in \Pi X_\alpha \times \Pi Y_\beta : \forall(\alpha,\beta) \prec (\alpha',\beta')\; için \\ (p_\alpha^{\alpha'} \vee q_\beta^{\beta'})(x_{\alpha'}, y_{\beta'}) = (x_\alpha, y_\beta) \end{array}\right\}\right)$$

dır.

Bu uzay daha açık yazılırsa

$\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \vee \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y} = \{x_{0_\alpha}\} \times \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y} \bigcup \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \times \{y_{0_\beta}\}$

şeklindedir. $z \in \{x_{0_\alpha}\} \times \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y} \bigcup \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \times \{y_{0_\beta}\}$ elemanı için;

$z \in \{x_{0_\alpha}\} \times \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y}$ ise $z = (\{x_{0_\alpha}\}, \{y_\beta\})$ dır ve $\forall \alpha \prec \alpha'$ için $p_\alpha^{\alpha'}(x_{0_{\alpha'}}) = x_{0_\alpha}$, $\forall \beta \prec \beta'$ için $q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'}) = y_\beta$ koşulu sağlanır.

$z \in \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \times \{y_{0_\beta}\}$ ise $z = (\{x_\alpha\}, \{y_{0_\beta}\})$ dır ve $\forall \alpha \prec \alpha'$ için $p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_\alpha$, $\forall \beta \prec \beta'$ için $q_\beta^{\beta'}(y_{0_{\beta'}}) = y_{0_\beta}$ koşulu sağlanır.

$$\lim_{\leftarrow}(\underline{X} \vee \underline{Y}) = \begin{cases} \{(x_{0_\alpha}, y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \in \Pi(X_\alpha \vee Y_\beta): & p_\alpha^{\alpha'}(x_{0_{\alpha'}}) = x_{0_\alpha}, q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'}) = y_\beta \\ \{(x_\alpha, y_{0_\beta})\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \in \Pi(X_\alpha \vee Y_\beta): & p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_\alpha, q_\beta^{\beta'}(y_{0_{\beta'}}) = y_{0_\beta} \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\Phi : \lim_{\leftarrow} \underline{X} \vee \lim_{\leftarrow} \underline{Y} \to \lim_{\leftarrow}(\underline{X} \vee \underline{Y})$$

dönüşümü her $z \in \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \vee \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y}$ elemanı için

$$z = (\{x_{0_\alpha}\}, \{y_\beta\}) \text{ ise } \Phi(z) = \{(x_{0_\alpha}, y_\beta)\}$$
$$z = (\{x_\alpha\}, \{y_{0_\beta}\}) \text{ ise } \Phi(z) = \{(x_\alpha, y_{0_\beta})\}$$

formülü ile tanımlansın. Φ dönüşümünün homeomorfizma olduğu açıktır.

Lemma 3.5: a) Eğer $B \subset (X, \tau)$ kümesi kapalı ise $p : X \to X/B$ kanonik dönüşümü kapalıdır.

b) Eğer $B \subset (X, \tau)$ kümesi açık ise $p : X \to X/B$ kanonik dönüşümü açıktır.

İspat: a) X/B bölüm uzayının denklik sınıfları ;

$x \in B$ ise $[x] = B$

$x \notin B$ ise $[x] = x$

şeklindedir. p dönüşümünün kapalı olduğunu göstermek için

$\forall A \subset X$ ve $A \in \tau$ için $\bigcup_{[x]\subset A} [x] \in \tau$

ifadesinin gösterilmesi yeterlidir. [8] O halde $[x] \subset A$ koşulunu sağlayan denklik sınıflarının araştırılması gerekir.

i) $B \subset A$ ise $A = B \bigcup (A/B)$ dir.

$[x] \subset A$ olsun. $[x] = B$ veya $[x] = x$ olduğundan $x \in X/A$ noktaları için $[x] \not\subset A$ olur. O halde

$$\bigcup_{[x]\subset A} [x] = [x]_{x\in B} \bigcup \bigcup_{y\in A/B} [y] = B \bigcup (A/B) = A \in \tau$$

bulunur.

ii) $B \not\subset A$ ise bu durum üç aşamada incelenecektir:

1) $A \subset B \subset X$ olsun. $x \in B$ iken $[x] = B$ olduğundan $[x] \not\subset A$ ve $y \in X/B$ için $[y] = y \notin A$ dır. Buradan, $\bigcup_{[x]\subset A} [x] = \varnothing \in \tau$ dur.

2) $A, B \subset X$ ve $A \bigcap B = \varnothing$ olsun. $x \in B$ ise $[x] = B$ idi. O halde $[x] \not\subset A$ dır. $y \in A$ ise $[y] = y \in A$ dır.

$$\bigcup_{[y]\subset A} [y] = A \in \tau$$

elde edilir.

3) $A,B \subset X$ ve $A \cap B \neq \varnothing$ olsun. $B \not\subset A$ olduğundan $x \in B$ için $[x] \not\subset A$ ve $y \in A/B$ ise $[y] = y \in A/B$ dır. $\bigcup\limits_{[y]\subset A} [y] = A/B$ olur. B kapalı olduğundan $A/B \in \tau$ bulunur. O zaman $B \subset (X,\tau)$ kapalı küme ise $p : X \to X/B$ dönüşümünün kapalı olduğu elde edilir.

b) Bu kısmın ispatı da teoremin a) kısmına benzer şekilde yapılır.

$\underline{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzayların ters spektri, β, $[0,1]$ aralığında bir denklik bağıntısı ve $\forall \alpha \in A$ için γ_α , X_α uzayında bir denklik bağıntısı ise

$$\left(\{X_\alpha \times I\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} \times 1_I : X_{\alpha'} \times I \to X_\alpha \times I\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

ters spektrinden

$$\left(\left\{(X_\alpha \times I)\big/\gamma_\alpha \times \beta\right\}, \left\{\bar{p}_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

bölüm uzaylarının ters spektri elde edilir.

Teorem 3.6: Eğer $\beta \equiv 1$ birim denklik bağıntısı ise $\lim\limits_{\overleftarrow{\alpha}} \left\{(X_\alpha \times I)\big/\gamma_\alpha \times \beta\right\}$ ve $\lim\limits_{\overleftarrow{\alpha}} \left\{\left(X_\alpha\big/\gamma_\alpha\right)\right\} \times I\big/\beta$ uzayları homeomorfturlar.

İspat: $\beta \equiv 1$ olması durumunda

$$\lim_{\overleftarrow{\alpha}} \left\{(X_\alpha \times I)\big/\gamma_\alpha \times 1\right\} \cong \lim_{\overleftarrow{\alpha}} \left\{X_\alpha\big/\gamma_\alpha\right\} \times I$$

uzaylarının homeomorf olduğu gösterilecektir.

$$X_\alpha \times I = \{(x,t) \mid x \in X_\alpha, t \in I\}$$

$$X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1 = \{[x,t] \mid (x,t)\gamma_\alpha \times 1 (y,t')\} = \{[x,t] \mid (x\gamma_\alpha y, t1t')\} = \{[x,t] \mid (x\gamma_\alpha y, t = t')\}$$

I yerel kompakt ve β birim denklik bağıntısı olduğundan bu uzaylar arasında bir

$$F_\alpha : X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1 \to X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I \quad , F_\alpha([x_\alpha, t]) = ([x_\alpha], t) \tag{3.3}$$

homeomorfizması vardır.[67]

Şimdi $\forall \alpha \in A$ için tanımlanan (3.3) deki dönüşümlerden yararlanarak $\left\{X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1\right\}$ ters spektrinden $\left\{X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I\right\}$ ters spektrine giden

$$\underline{F} = \left(1_A : A \to A, \left\{F_\alpha : X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1 \to X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I\right\}_{\alpha \in A}\right)$$

morfizması tanımlanabilir. $\underline{F}$ nin ters spektrlerin morfizması olması için $\forall \alpha \prec \alpha'$ için

$$\begin{tikzcd}
X_{\alpha'} \times I \big/ \gamma_{\alpha'} \times 1 \arrow[r, "F_{\alpha'}"] \arrow[d, "\bar{p}_\alpha^{\alpha'}"'] & X_{\alpha'} \big/ \gamma_{\alpha'} \times I \arrow[d, "q_\alpha^{\alpha'}"] \\
X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1 \arrow[r, "F_\alpha"'] & X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I
\end{tikzcd}$$

diyagramının komutatif olması gerekir. Gerçekten,

$$\left(F_\alpha \circ \overline{p}_\alpha^{\alpha'}\right)\left(\left[x_{\alpha'},t\right]\right) = F_\alpha\left(\left[p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}),t\right]\right) = \left(\left[p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right],t\right)$$
$$\left(q_\alpha^{\alpha'} \circ F_{\alpha'}\right)\left(\left[x_{\alpha'},t\right]\right) = q_\alpha^{\alpha'}\left(\left[x_{\alpha'}\right],t\right) = \left(\left[p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right],t\right)$$

dir. O halde $\underline{F}$ bir ters spektrden diğer ters spektre giden morfizmadır.

$\forall \alpha \in A$ için F_α homeomorfizma olduğundan

$$\lim_{\leftarrow} \underline{F} : \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1\right\} \to \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I\right\}$$

dönüşümü de bir homeomorfizmadır.

$\lim\limits_{\leftarrow}(X_\alpha \times I)$ uzayı $\left(\lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha\right) \times I$ uzayına homeomorf olduğundan dolayı

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{\leftarrow} \underline{F}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \big/ \gamma_\alpha \times I\right\} \xrightarrow{h'} \left(\lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \big/ \gamma_\alpha\right\}\right) \times I$$

yazılabilir. İki homeomorf dönüşümün bileşkesi homeomorf olduğundan

$$h' \circ \lim_{\leftarrow} \underline{F} : \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \times I \big/ \gamma_\alpha \times 1\right\} \to \left(\lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha}}\left\{X_\alpha \big/ \gamma_\alpha\right\}\right) \times I$$

homeomorfizması bulunur.

Lemma 3.7: $\forall \underline{X}, \underline{Y} \in Inv(Top_0)$ için

$$\underline{X} \wedge \underline{Y} = \left(\left\{X_\alpha \wedge Y_\beta\right\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}, \left\{p_\alpha^{\alpha'} \wedge q_\beta^{\beta'} : X_{\alpha'} \wedge Y_{\beta'} \to X_\alpha \wedge Y_\beta\right\}_{(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')}\right)$$

yapısı "$\wedge$" işlemi altında bir ters spektrdir.

İspat: 1) $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $p_\alpha^\alpha \wedge q_\beta^\beta = 1_{X_\alpha} \wedge 1_{Y_\beta} : X_\alpha \wedge Y_\beta \to X_\alpha \wedge Y_\beta$ dır.

2) $\forall(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')\prec(\alpha'',\beta'')\in A\times B$ için

$$\left(p_\alpha^{\alpha'}\wedge q_\beta^{\beta'}\right)\circ\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}\wedge q_{\beta'}^{\beta''}\right)=\left(p_\alpha^{\alpha'}\circ p_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\wedge\left(q_\beta^{\beta'}\circ q_{\beta'}^{\beta''}\right)=p_\alpha^{\alpha''}\wedge q_\beta^{\beta''}$$

bulunur. O halde $\underline{X}\wedge\underline{Y}$ bir ters spektrdir.

$\underline{X}=\{S\}$ bir S çemberinden oluşan ters spektr olsun.

Tanım 3.8: $\underline{X}\wedge\underline{Y}=\{S\}\wedge\underline{Y}$ ters spektrine $\underline{Y}$ ters spektrinin üst kurumu denir ve $S\underline{Y}$ ile gösterilir.

Şimdi $\varprojlim(\underline{X}\wedge\underline{Y})$ uzayı ile $\varprojlim\underline{X}\wedge\varprojlim\underline{Y}$ uzayı arasındaki bağıntı, yani

$$\varprojlim(\underline{X}\wedge\underline{Y})=\varprojlim\left(\underline{X}\times\underline{Y}\big/\underline{X}\vee\underline{Y}\right) \tag{3.4}$$

$$\varprojlim\underline{X}\wedge\varprojlim\underline{Y}=\varprojlim\underline{X}\times\varprojlim\underline{Y}\Big/\varprojlim\underline{X}\vee\varprojlim\underline{Y}=\varprojlim(\underline{X}\times\underline{Y})\Big/\varprojlim(\underline{X}\vee\underline{Y}) \tag{3.5}$$

(3.4) ve (3.5) uzayları arasındaki bağıntı araştırılacaktır.

Teorem 3.9: Eğer $\underline{X},\underline{Y}$ topolojik uzayların ters spektrleri ise $\varprojlim(X_\alpha\times Y_\beta)\Big/\varprojlim(X_\alpha\vee Y_\beta)$ uzayından $\varprojlim\left(X_\alpha\times Y_\beta\big/X_\alpha\vee Y_\beta\right)$ uzayına giden sürekli bir φ dönüşümü vardır.

Eğer $\underline{X}=\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A},\{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'}\right),\underline{Y}=\left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B},\{q_\beta^{\beta'}\}_{\beta\prec\beta'}\right)$ ters spektrlerinde $p_\alpha^{\alpha'}$ ve $q_\beta^{\beta'}$ dönüşümleri bire-bir ve örten ise φ dönüşümüde bire-bir ve örtendir.

İspat: $\forall\alpha\in A$ ve $\forall\beta\in B$ için

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \times Y_\beta\right) \arrow[r, "\prod p_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & \prod\limits_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \times Y_\beta \big/ X_\alpha \vee Y_\beta\right) \\
\prod\limits_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \times Y_\beta\right) \Big/ \prod\limits_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \vee Y_\beta\right) \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

diyagramında Φ bire-bir, örten ve süreklidir. [67]

Eğer X_α, Y_β uzayları Hausdorff uzayı ise $X_\alpha \vee Y_\beta$ uzayı $X_\alpha \times Y_\beta$ uzayında kapalıdır. Lemma 3.5'den $p_{\alpha,\beta}$ dönüşümü kapalıdır. Kapalı dönüşümlerin çarpımı genelde kapalı olmadığından dolayı $\prod p_{\alpha,\beta}$ kapalı değildir. [8], [20] Bu nedenle Φ homeomorfizma değildir. $\overline{p}$ kanonik dönüşümü örten ve süreklidir. (3.6) diyagramının komutatifliğinden

$$\prod p_{\alpha,\beta} = \Phi \circ \overline{p}$$

yazılır.

$i : \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}}\left(X_\alpha \times Y_\beta\right) \rightarrow \prod\limits_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \times Y_\beta\right)$ gömme dönüşümü için

$$i\left(\lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}}\left(X_\alpha \vee Y_\beta\right)\right) \subset \prod_{\alpha,\beta}\left(X_\alpha \vee Y_\beta\right)$$

kapsaması sağlandığından dolayı bölüm uzaylarının

$$\bar{i} : \left. \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \middle/ \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \vee Y_\beta \right) \right. \to \left. \prod_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \middle/ \prod_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \vee Y_\beta \right) \right.$$

dönüşümü tanımlanabilir. (3.6) daki diyagram

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \arrow[r, "\prod p_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & \prod\limits_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \times Y_\beta \middle/ X_\alpha \vee Y_\beta \right) \\
\prod\limits_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \middle/ \prod\limits_{\alpha,\beta} \left(X_\alpha \vee Y_\beta \right) \arrow[ur, "\Phi"] & \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \times Y_\beta \middle/ X_\alpha \vee Y_\beta \right) \arrow[u, "j"'] \\
\lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \middle/ \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \vee Y_\beta \right) \arrow[u, "\bar{i}"] \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

diyagramına kadar genişletilebilir. $\forall \left[\{ x_\alpha, y_\beta \} \right] \in \left. \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \times Y_\beta \right) \middle/ \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \vee Y_\beta \right) \right.$ için

$$\left(\Phi \circ \bar{i} \right) \left(\left[\{ x_\alpha, y_\beta \} \right] \right) = \Phi \left(\left[i_{\alpha,\beta} \left(\{ x_\alpha, y_\beta \} \right) \right] \right) = \Phi \left(\left[\left(\{ x_\alpha, y_\beta \} \right) \right] \right) = \left\{ \left[x_\alpha, y_\beta \right] \right\}$$

bulunur. O halde

$$\left\{ \left[x_\alpha, y_\beta \right] \right\} \in \lim_{\substack{\leftarrow \\ \alpha,\beta}} \left(X_\alpha \times Y_\beta \middle/ X_\alpha \vee Y_\beta \right)$$

dır. Gerçekten, $\forall (\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta')$ için

$$\left(\overline{p}_{\alpha}^{\alpha'},\overline{q}_{\beta}^{\beta'}\right)\left(\left[x_{\alpha'},y_{\beta'}\right]\right)=\left[p_{\alpha}^{\alpha'}(x_{\alpha'}),q_{\beta}^{\beta'}(y_{\beta'})\right]=\left[x_{\alpha},y_{\beta}\right]$$

dır. O zaman (3.7) diyagramından φ dönüşümü

$$\Phi\circ\bar{i}=\varphi$$

şeklinde tanımlanır ve bu

$$\varphi:\ \lim_{\substack{\leftarrow\\ \alpha,\beta}}\left(X_{\alpha}\times Y_{\beta}\right)\Big/\lim_{\substack{\leftarrow\\ \alpha,\beta}}\left(X_{\alpha}\vee Y_{\beta}\right)\rightarrow\lim_{\substack{\leftarrow\\ \alpha,\beta}}\left(X_{\alpha}\times Y_{\beta}\Big/X_{\alpha}\vee Y_{\beta}\right)$$

dönüşümü süreklidir.

Şimdi teoremin ikinci kısmı gösterilecektir.

$\underline{X},\underline{Y}$ ters spektrlerinde $p_{\alpha}^{\alpha'},q_{\beta}^{\beta'}$ dönüşümleri bire-bir ve örten olsun. Bu durumda

$$\lim_{\leftarrow}\underline{X}=\prod_{\alpha\in A}X_{\alpha}\quad,\quad\lim_{\leftarrow}\underline{Y}=\prod_{\beta\in B}Y_{\beta}\ \text{[20]}$$

dır. O halde;

$$\lim_{\leftarrow}\left(\underline{X}\times\underline{Y}\right)=\lim_{\leftarrow}\underline{X}\times\lim_{\leftarrow}\underline{Y}=\prod_{\alpha\in A}X_{\alpha}\times\prod_{\beta\in B}Y_{\beta}=\prod_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(X_{\alpha}\times Y_{\beta}\right)$$

$$\lim_{\leftarrow}\left(\underline{X}\vee\underline{Y}\right)=\prod_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(X_{\alpha}\vee Y_{\beta}\right)$$

yazılır. Buradan $\lim\limits_{\leftarrow}\left(X_{\alpha}\times Y_{\beta}\right)\Big/\lim\limits_{\leftarrow}\left(X_{\alpha}\vee Y_{\beta}\right)$ uzayı ile $\prod\limits_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(X_{\alpha}\times Y_{\beta}\right)\Big/\prod\limits_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(X_{\alpha}\vee Y_{\beta}\right)$ uzayının homeomorf olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\varprojlim \left(X_\alpha \times Y_\beta \big/ X_\alpha \vee Y_\beta \right)$ uzayı ile $\prod \left(X_\alpha \times Y_\beta \big/ X_\alpha \vee Y_\beta \right)$ uzayı da homeomorftur. O zaman;

$$j : \varprojlim \left(X_\alpha \times Y_\beta \big/ X_\alpha \vee Y_\beta \right) \to \prod_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \left(X_\alpha \times Y_\beta \big/ X_\alpha \vee Y_\beta \right)$$

dönüşümü de dikkate alınırsa,

$$\varphi = j^{-1} \circ \Phi \circ \bar{i}$$

dönüşümü bire-bir ve örtendir.

Homotopik kümelerin dizilerinde en önemli yapı taşı olan C, S, Ω işlemleri Top_0 kategorisinde kovaryant funktor tanımlarlar. Bu işlemlerin funktor özelliği kullanılarak aynı işlemler $Inv(Top_0)$ kategorisinde de yapılabilir.

$\forall \underline{X}$ ters spektri için

$$\underline{X} \mapsto C\underline{X} = \left(\{CX_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{Cp_\alpha^{\alpha'} : CX_{\alpha'} \to CX_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'} \right)$$
$$\underline{X} \mapsto \Omega\underline{X} = \left(\{\Omega X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{\Omega p_\alpha^{\alpha'} : \Omega X_{\alpha'} \to \Omega X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'} \right)$$

ters spektrleri elde edilir.

Açıktır ki, $(\underline{X}, \underline{x_0})$ ters spektri $C\underline{X}$ ters spektrine gömme edilebilir. Burada

$$\underline{i} : \underline{X} \to C\underline{X}$$

gömmesi

$$\underline{i} = \left(1_A : A \to A, \{i_\alpha : X_\alpha \to CX_\alpha\}_{\alpha\in A} \right) \qquad (X_\alpha \subset CX_\alpha)$$

şeklinde verilir.

Topolojik uzaylar kategorisinde her $f: X' \to X$ dönüşümü için C_f bu dönüşümün konisi olsun. Şimdi $Inv(Top_0)$ kategorisinde topolojik uzayların ters spektrinin her $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için $C_{\underline{f}}$ konisi tanımlanacaktır.

$f: X' \to X, g: Y' \to Y, \varphi: X' \to Y', \psi: X \to Y$ dönüşümleri için

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

diyagramı komutatif olsun. Burada f ve g dönüşümlerinin konileri, sırasıyla $C_f = CX' \vee X \big/ [1, x'] \sim f(x')$ ve $C_g = CY' \vee Y \big/ [1, y'] \sim g(y')$ şeklindedir. O zaman (φ, ψ) çiftinden yararlanarak C_f konisinden C_g konisine giden dönüşüm tanımlanabilir. Önce φ ve ψ dönüşümleri kullanılarak

$$C\varphi \vee \psi : CX' \vee X \to CY' \vee Y$$

dönüşümü elde edilir. Burada

$$C\varphi : CX' \to CY' \qquad [t, x'] \mapsto C\varphi([t, x']) = [t, \varphi(x')]$$

dür. Şimdi $C\varphi \vee \psi$ dönüşümünün denkliği koruduğu gösterilecektir. C_f konisindeki denklik

$$[1, x'] \sim x \Leftrightarrow f(x') = x \tag{3.9}$$

şeklinde idi. O zaman,

$$(C\varphi \vee \psi)([1,x']) = C\varphi([1,x']) = [1,\varphi(x')]$$
$$(C\varphi \vee \psi)(x) = \psi(x)$$

ifadelerinden

$$[1,\varphi(x')] \sim \psi(x) \Rightarrow g(\varphi(x')) = \psi(x) \tag{3.10}$$

eşitliği bulunur. (3.10) eşitliği (3.9) eşitliği ve (3.8) diyagramının komutatifliğinden elde edilir. Böylece $C\varphi \vee \psi$ dönüşümünün denkliği koruduğu gösterilmiş olur. $C\varphi \vee \psi$ dönüşümünden yararlanarak elde edilen bölüm uzaylarının dönüşümü

$$(C\varphi,\psi): C_f \to C_g$$

şeklinde gösterilir.

Ters spektrlerin $\underline{f} = \left(\pi : B \to A, \{f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$ morfizmasından yararlanarak $C_{\underline{f}}$ ters spektri tanımlanabilir. $\forall \beta \in B$ için

$$C_{f_\beta} = \frac{CX_{\pi(\beta)} \vee Y_\beta}{[1, x_{\pi(\beta)}] \sim f_\beta(x_{\pi(\beta)})}$$

$f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta$ dönüşümünün konisi olsun. O zaman $\beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
X_{\pi(\beta')} \arrow[r, "p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)}"] \arrow[d, "f_{\beta'}"'] & X_{\pi(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"] \\
Y_{\beta'} \arrow[r, "q^{\beta'}_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}$$

diyagramının komutatifliğinden yararlanarak

$$\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_{\beta}^{\beta'}\right): C_{f_{\beta'}} \to C_{f_{\beta}}$$

dönüşümü tanımlanabilir.

Lemma 3.10: Topolojik uzayların ters spektrlerinin her $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizması için

$$C_{\underline{f}} = \left(\left\{C_{f_\beta} = {CX_{\pi(\beta)} \vee Y_\beta}\big/_{\sim}\right\}_{\beta\in B}, \left\{\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_{\beta}^{\beta'}\right)\right\}_{\beta\prec\beta'}\right)$$

yapısı bir ters spektrdir.

İspat: 1) $\forall\beta\in B$ için $\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta)}, q_{\beta}^{\beta}\right) = \left(1_{CX_{\pi(\beta)}}, 1_{Y_\beta}\right) = 1_{C_{f_\beta}}$ dır.

2) $\forall\beta\prec\beta'\prec\beta''\in B$ için

$$\begin{aligned}\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_{\beta}^{\beta'}\right)\circ\left(Cp_{\pi(\beta')}^{\pi(\beta'')}, q_{\beta'}^{\beta''}\right) &= \left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ Cp_{\pi(\beta')}^{\pi(\beta'')}, q_{\beta}^{\beta'}\circ q_{\beta'}^{\beta''}\right)\\ &= \left(C\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ p_{\pi(\beta')}^{\pi(\beta'')}\right), q_{\beta}^{\beta''}\right)\\ &= \left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta'')}, q_{\beta}^{\beta''}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\underline{Y}$ ters spektri $C_{\underline{f}}$ ters spektrine gömme edilebilir. Bu gömme dönüşümü

$$\underline{i} = \left(1_B : B\to B, \left\{i_\beta : Y_\beta \to C_{f_\beta}\right\}_{\beta\in B}\right)$$

şeklinde gösterilecektir. Böylece herhangi $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizması için

$$\underline{X} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{Y} \xrightarrow{\underline{i}} C_{\underline{f}}$$

şeklinde topolojik uzayların ters spektrlerinin dizisi elde edilmiş olur.

Şimdi P kovaryant funktoru kullanılarak yeni bir yapı tanımlanacaktır. $\forall \underline{Y}$ ters spektrine P funktoru uygulandığında

$$P\underline{Y} = (\underline{Y})^I = \left(\{Y_\beta{}^I\}, \{(q_\beta^{\beta'})_* : Y_{\beta'}{}^I \to Y_\beta{}^I\}_{\beta \prec \beta'}\right) \tag{3.11}$$

yapısı elde edilir. Burada $(q_\beta^{\beta'})_*(f) = q_\beta^{\beta'} \circ f$ biçiminde tanımlanır.

Lemma 3.11: Her $\underline{Y}$ ters spektri için $P\underline{Y}$ yapısı bir ters spektr oluşturur.

İspat: 1) $\forall \beta \in B$ için $(q_\beta^\beta)_* = 1_{PY_\beta}$ dır.

2) $\forall \beta \prec \beta' \prec \beta'' \in B$ için

$$\left((q_\beta^{\beta'})_* \circ (q_{\beta'}^{\beta''})_*\right)(f) = (q_\beta^{\beta'})_*(q_{\beta'}^{\beta''} \circ f) = (q_\beta^{\beta'} \circ q_{\beta'}^{\beta''} \circ f) = (q_\beta^{\beta''} \circ f) = (q_\beta^{\beta''})_*(f)$$

elde edilir.

Özel durumda Ω kovaryant funktoru kullanılarak $P\underline{Y}$ ters spektrinin

$$\Omega\underline{Y} = \left(\{\Omega Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{(q_\beta^{\beta'})_* : \Omega Y_{\beta'} \to \Omega Y_\beta\}_{\beta \prec \beta'}\right)$$

alt spektri tanımlanabilir.

Top_0 kategorisinde her $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ dönüşümü için

$$P_f = \{(x, w) \in X \times PY : f(x) = p(w) = w(1)\} \subset X \times PY$$

şeklinde tanımlı idi. Burada, $p: PY = Y^I \to Y$, $w: I \to Y$ giden dönüşümlerdir.

Şimdi $Inv(Top_0)$ kategorisinde topolojik uzayların ters spektrlerinin her $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için $P_{\underline{f}}$ yapısı tanımlanacaktır.

$f: X \to Y$, $g: X' \to Y'$ dönüşümleri için

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde bu (φ, ψ) dönüşümleri varolsun. O halde (φ, ψ) çiftinden yararlanarak P_f den P_g ye giden dönüşüm tanımlanabilir. Önce φ ve ψ dönüşümleri kullanılarak

$$\varphi \times P\psi : X \times PY \to X' \times PY'$$

dönüşümü elde edilir. Burada $P\psi : PY \to PY'$ $w \in PY$ için $(P\psi)(w) = \psi \circ w$ şeklindedir. Şimdi $(\varphi \times P\psi)(P_f) \subset P_g$ kapsamasının sağlandığı gösterilecektir.

$$P_f \subset X \times PY, \;\; P_g \subset X' \times PY'$$

için

$$(\varphi \times P\psi)\big|_{P_f} : P_f \to P_g$$

dir. (3.12) diyagramının komutatifliği kullanılarak

$$(g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) = (\psi \circ f)(x) = \psi(f(x)) = \psi(w(1)) \tag{3.13}$$

eşitliği bulunur. (3.13) eşitliğinden $(\varphi(x), \psi \circ w) \in P_g$ yazılır. Böylece kapsama sağlanmış olur. $\varphi \times P\psi$ dönüşümünden yararlanarak elde edilen dönüşüm

$$(\varphi, P\psi): P_f \to P_g$$

şeklinde gösterilecektir.

Ters spektrlerin $\underline{f}$ morfizmasından yararlanarak $P_{\underline{f}}$ ters spektri tanımlanabilir. $\forall \beta \in B$ için f_β dönüşümünden yararlanarak P_{f_β} tanımlanır. O zaman $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, Pq_\beta^{\beta'}\right): P_{f_{\beta'}} \to P_{f_\beta}$$

dönüşümü tanımlanabilir.

Lemma 3.12: $P_{\underline{f}} = \left(\left\{P_{f_\beta} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta\right\}_{\beta \in B}, \left\{\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, Pq_\beta^{\beta'}\right): P_{f_{\beta'}} \to P_{f_\beta}\right\}_{\beta \prec \beta'}\right) \subset \underline{X} \times P\underline{Y}$ yapısı bir ters spektrdir.

İspat: 1) $\forall \beta \in B$ için $\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta)}, Pq_\beta^\beta\right) = \left(1_{X_{\pi(\beta)}}, 1_{PY_\beta}\right) = 1_{P_{f_\beta}}$

2) $\forall \beta \prec \beta' \prec \beta'' \in B$ için

$$\begin{aligned}\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, Pq_\beta^{\beta'}\right) \circ \left(p_{\pi(\beta')}^{\pi(\beta'')}, Pq_{\beta'}^{\beta''}\right) &= \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')} \circ p_{\pi(\beta')}^{\pi(\beta'')}, Pq_\beta^{\beta'} \circ Pq_{\beta'}^{\beta''}\right) \\ &= \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta'')}, P\left(q_\beta^{\beta'} \circ q_{\beta'}^{\beta''}\right)\right) \\ &= \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta'')}, Pq_\beta^{\beta''}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

4. TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS ve DÜZ SPEKTRLER KATEGORİSİNDE SPEKTRAL HOMOTOPYA BAĞINTISI

Bu bölümde tezin temel kavramı olan spektral homotopya bağıntısı verilecek ve onun bazı özellikleri araştırılacaktır. Bölümün sonunda ise spektral homotopyanın bazı uygulamaları verilecektir.

$Inv(Top)$ topolojik uzayların ters spektrler kategorisi olsun.

$$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha'}\right),$$
$$\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{q_\beta^{\beta'} : Y_{\beta'} \to Y_\beta\}_{\beta \prec \beta'}\right)$$

ters spektrlerinin

$$\underline{f} = \left(\pi : B \to A, \{f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right),$$
$$\underline{g} = \left(\rho : B \to A, \{g_\beta : X_{\rho(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

morfizmaları için aşağıdaki tanım verilsin.

Tanım 4.1: Eğer $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi(\beta), \alpha \succ \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

diyagramı homotopik komutatif ise, yani $f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri homotop ise

$$\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$$

morfizmalarına spektral homotop morfizmalar denir. Eğer (4.1) diyagramı komutatif ise yani $f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} = g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri eşit ise o zaman $\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmalarına kanonik homotop morfizmalar denir. $\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmalarının spektral homotop olması $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ şeklinde gösterilir.

$$\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p^{\alpha'}_\alpha : X^\alpha \to X^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$
$$\overline{Y} = \left(\{Y^\beta\}_{\beta \in B}, \{q^{\beta'}_\beta : Y^\beta \to Y^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta'}\right)$$

düz spektrlerinin

$$\overline{f} = \left(\pi : A \to B, \{f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\pi(\alpha)}\}_{\alpha \in A}\right)$$
$$\overline{g} = \left(\rho : A \to B, \{g^\alpha : X^\alpha \to Y^{\rho(\alpha)}\}_{\alpha \in A}\right)$$

morfizmaları arasındaki homotopya tanımıda benzer şekilde verilir.

Tanım 4.2: Eğer $\forall \alpha \in A$ elemanı için $\beta \succ \pi(\alpha), \rho(\alpha)$ sağlanacak şekilde $\beta \in B$ elemanı vardır ve

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & Y^{\pi(\alpha)} \arrow[dr, "q^{\beta}_{\pi(\alpha)}"] & \\
X^{\alpha} \arrow[ur, "f^{\alpha}"] \arrow[dr, "g^{\alpha}"'] & & Y^{\beta} \\
 & Y^{\rho(\alpha)} \arrow[ur, "q^{\beta}_{\rho(\alpha)}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

diyagramı homotopik komutatif ise, yani $q^{\beta}_{\pi(\alpha)} \circ f^{\alpha} \sim q^{\beta}_{\rho(\alpha)} \circ g^{\alpha}$ dönüşümleri homotop ise,

$\overline{f}, \overline{g} : \overline{X} \to \overline{Y}$

morfizmalarına spektral homotop morfizmalar denir. Eğer (4.2) diyagramı komutatif ise yani $q^{\beta}_{\pi(\alpha)} \circ f^{\alpha} = q^{\beta}_{\rho(\alpha)} \circ g^{\alpha}$ dönüşümleri eşit ise o zaman $\overline{f}, \overline{g}$ morfizmalarına kanonik homotop morfizmalar denir. $\overline{f}$ ve $\overline{g}$ morfizmalarının spektral homotop olması $\overline{f} \overset{s}{\sim} \overline{g}$ şeklinde gösterilir.

Eğer ters ve düz spektrler bir uzaydan oluşursa o zaman spektrlerin morfizması topolojik uzayların sürekli dönüşümünü verir. Spektral homotopya adi homotopyaya dönüşür. Böylece spektral homotopya adi homotopyanın bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.3: $Inv(Top)$; topolojik uzayların ters spektrler kategorisinde spektral homotopya bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Bu bağıntının yansıma ve simetri özelliği açıktır. Gerçekten, ters spektrlerin $\underline{f}$ morfizması ve $\forall \beta \in B$ elemanı için

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_{\beta}"] & \\
X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "1_{X_{\pi(\beta)}}"] \arrow[dr, "1_{X_{\pi(\beta)}}"'] & & Y_{\beta} \\
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "f_{\beta}"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı homotopik komutatif olduğundan $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f}$ morfizmaları spektral homotoptur.

$\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizmaları spektral homotop ise topolojik uzaylar kategorisinde homotopya bağıntısının simetrik olmasından $\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{f}$ morfizmalarının spektral homotop olması elde edilir.

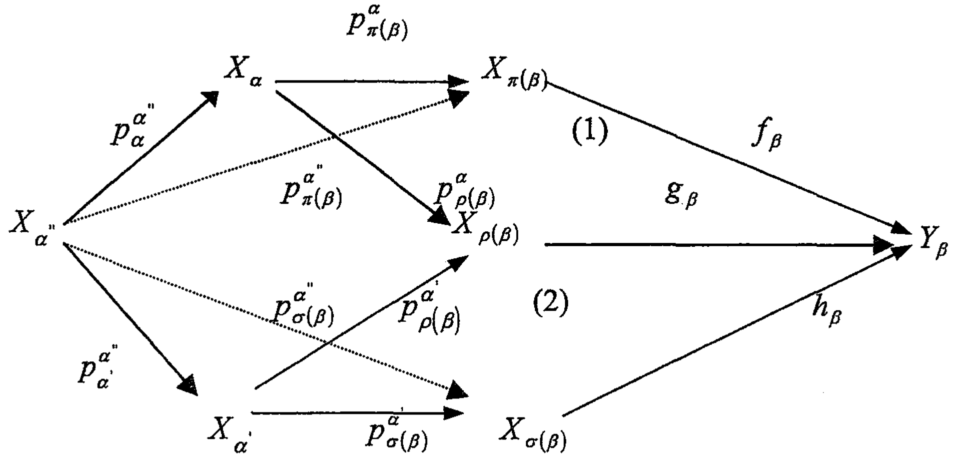
$\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ ve $\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{h}$ morfizmaları spektral homotop olsun. $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi(\beta), \alpha \succ \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve (4.1) diyagramı homotopik komutatiftir.

$\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{h}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha' \succ \rho(\beta), \alpha' \succ \sigma(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha' \in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd} & X_{\rho(\beta)} \arrow[dr, "g_\beta"] & \\ X_{\alpha'} \arrow[ur, "p^{\alpha'}_{\rho(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\alpha'}_{\gamma(\beta)}"'] & & Y_\beta \\ & X_{\gamma(\beta)} \arrow[ur, "h_\beta"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

diyagramı homotopik komutatiftir.

A yönlendirilmiş küme olduğundan α ve α' elemanları için $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ olacak şekilde $\alpha'' \in A$ elemanı vardır. (4.1) ve (4.3) diyagramları kullanılarak



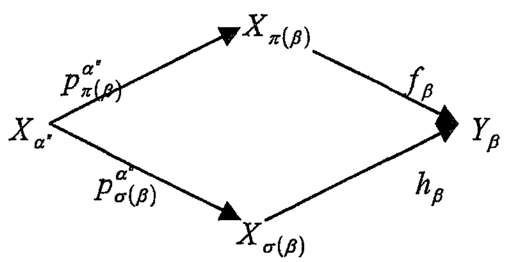
diyagramı elde edilir. (4.1) ve (4.3) diyagramlarının homotopik komutatifliğinden ve

$$p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha} = p^{\alpha''}_{\pi(\beta)}, \quad p^{\alpha'}_{\sigma(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha'} = p^{\alpha''}_{\sigma(\beta)}, \quad p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha} = p^{\alpha'}_{\rho(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha'}$$

eşitliklerinden

$$f_{\beta} \circ p^{\alpha''}_{\pi(\beta)} = f_{\beta} \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha} \sim g_{\beta} \circ p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha} = g_{\beta} \circ p^{\alpha'}_{\rho(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha'} \sim h_{\beta} \circ p^{\alpha'}_{\sigma(\beta)} \circ p^{\alpha''}_{\alpha'} =$$
$$= h_{\beta} \circ p^{\alpha''}_{\sigma(\beta)}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha'' \succ \pi(\beta), \alpha'' \succ \sigma(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha'' \in A$ elemanı vardır ve



diyagramı homotopik komutatiftir, yani $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{h}$ morfizmaları spektral homotoptur. O halde spektral homotopya bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.4: $Dir(Top)$; topolojik uzayların düz spektrler kategorisinde spektral homotopya bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $Dir(Top)$ kategorisinde spektral homotopyanın denklik bağıntısı olduğu $Inv(Top)$ kategorisindekine benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.5: $Inv(Top)$ ve $Dir(Top)$ kategorilerinde bileşke işlemi spektral homotopya bağıntısına göre invarianttır, yani $\underline{f_0} \overset{s}{\sim} \underline{f_1} : \underline{X} \to \underline{Y}$, $\underline{g_0} \overset{s}{\sim} \underline{g_1} : \underline{Y} \to \underline{Z}$ ise $\underline{g_0} \circ \underline{f_0} \overset{s}{\sim} \underline{g_1} \circ \underline{f_1} : \underline{X} \to \underline{Z}$ dir.

İspat: $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$, $\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{q_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta'}\right)$, $\underline{Z} = \left(\{Z_\gamma\}_{\gamma \in C}, \{r_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \prec \gamma'}\right)$ ters spektrlerinin

$$\underline{f_0} = \left(\pi_0 : B \to A, \{f_{0\beta}\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}\ ,\ \underline{f_1} = \left(\pi_1 : B \to A, \{f_{1\beta}\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$$
$$\underline{g_0} = \left(\rho_0 : C \to B, \{g_{0\gamma}\}_{\gamma \in C}\right) : \underline{Y} \to \underline{Z}\ ,\ \underline{g_1} = \left(\rho_1 : C \to B, \{g_{1\gamma}\}_{\gamma \in C}\right) : \underline{Y} \to \underline{Z}$$

morfizmaları verilsin.

$\underline{f_0} \overset{s}{\sim} \underline{f_1}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi_0(\beta), \alpha \succ \pi_1(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve $f_{0\beta} \circ p_{\pi_0(\beta)}^{\alpha} \sim f_{1\beta} \circ p_{\pi_1(\beta)}^{\alpha}$ dönüşümleri homotopturlar.

$\underline{g_0} \overset{s}{\sim} \underline{g_1}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \gamma \in C$ elemanı için $\beta \succ \rho_0(\gamma), \beta \succ \rho_1(\gamma)$ sağlanacak şekilde $\beta \in B$ elemanı vardır ve $g_{0\gamma} \circ q_{\rho_0(\gamma)}^{\beta} \sim g_{1\gamma} \circ q_{\rho_1(\gamma)}^{\beta}$ dönüşümleri homotopturlar.

Hipotezden yararlanarak,

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi_0(\rho_0(\gamma))} \arrow[drrr, "f_{0\rho_0(\gamma)}"] & & & & \\
 & X_{\pi_0(\beta)} \arrow[u, "p^{\pi_0(\beta)}_{\pi_0(\rho_0(\gamma))}"'] \arrow[drr, "f_{o\beta}"] \arrow[dd, phantom, "(1)"] \arrow[u, phantom, bend left=60, "(5)"] & & & Y_{\rho_0(\gamma)} \arrow[dr, "g_{0\gamma}"] & \\
X_\alpha \arrow[uur, "p^{\alpha}_{\pi_0(\rho_0(\gamma))}"] \arrow[ur, "p^{\alpha}_{\pi_0(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\alpha}_{\pi_1(\beta)}"'] \arrow[ddr, "p^{\alpha}_{\pi_1(\rho_1(\gamma))}"'] \arrow[ur, phantom, bend left=40, "(3)"] \arrow[dr, phantom, bend right=40, "(4)"'] & & & Y_\beta \arrow[ur, "q^{\beta}_{\rho_0(\gamma)}"] \arrow[dr, "q^{\beta}_{\rho_1(\gamma)}"'] \arrow[rr, phantom, "(2)"] & & Z_\gamma \\
 & X_{\pi_1(\beta)} \arrow[d, "p^{\pi_1(\beta)}_{\pi_1(\rho_1(\gamma))}"] \arrow[urr, "f_{1\beta}"'] \arrow[d, phantom, bend right=60, "(6)"'] & & & Y_{\rho_1(\gamma)} \arrow[ur, "g_{1\gamma}"'] & \\
 & X_{\pi_1(\rho_1(\gamma))} \arrow[urrr, "f_{1\rho_1(\gamma)}"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı elde edilir. Bu diyagramda (1) ve (2) diyagramları $\underline{f_0}\overset{s}{\sim}\underline{f_1}$ ve $\underline{g_0}\overset{s}{\sim}\underline{g_1}$ morfizmalarının spektral homotop olmasından dolayı homotopik komutatif, (3) ve (4) diyagramları ters spektrin tanımından dolayı komutatif, (5) ve (6) diyagramları ise ters spektrlerin morfizması tanımından komutatiftir. Bunlardan yararlanarak,

$$g_{0\gamma}\circ f_{0\rho_0(\gamma)}\circ p^{\alpha}_{\pi_0(\rho_0(\gamma))} = g_{0_\gamma}\circ f_{0_{\rho_0(\gamma)}}\circ p^{\pi_0(\beta)}_{\pi_0(\rho_0(\gamma))}\circ p^{\alpha}_{\pi_0(\beta)} = g_{0_\gamma}\circ q^{\beta}_{\rho_0(\gamma)}\circ f_{0_\beta}\circ p^{\alpha}_{\pi_0(\beta)} \sim$$
$$\sim g_{0_\gamma}\circ q^{\beta}_{\rho_0(\gamma)}\circ f_{1_\beta}\circ p^{\alpha}_{\pi_1(\beta)} \sim g_{1\gamma}\circ q^{\beta}_{\rho_1(\gamma)}\circ f_{1_\beta}\circ p^{\alpha}_{\pi_1(\beta)} = g_{1_\gamma}\circ f_{1_{\rho_1(\gamma)}}\circ p^{\pi_1(\beta)}_{\pi_1(\rho_1(\gamma))}\circ p^{\alpha}_{\pi_1(\beta)} =$$
$$= g_{1_\gamma}\circ f_{1\rho_1(\gamma)}\circ p^{\alpha}_{\pi_1\rho_1(\gamma)}$$

elde edilir. Böylece, $\forall\gamma\in C$ elemanı için $\alpha\succ\pi_0(\rho_0(\gamma)),\alpha\succ\pi_1(\rho_1(\gamma))$ sağlanacak şekilde $\alpha\in A$ elemanı vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi_0(\rho_0(\gamma))} \arrow[dr, "g_{0_\gamma}\circ f_{0_{\rho_0(\gamma)}}"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^{\alpha}_{\pi_0(\rho_0(\gamma))}"] \arrow[dr, "p^{\alpha}_{\pi_1(\rho_1(\gamma))}"'] & & Z_\gamma \\
 & X_{\pi_1(\rho_1(\gamma))} \arrow[ur, "g_{1_\gamma}\circ f_{1_{\rho_1(\gamma)}}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir, yani $\underline{g}_0 \circ \underline{f}_0 \overset{s}{\sim} \underline{g}_1 \circ \underline{f}_1$ morfizmaları spektral homotopturlar.

$Dir(Top)$ kategorisinde bileşke işleminin spektral homotopya bağıntısına göre invariant olduğu benzer şekilde gösterilir.

$Inv(C)$ ve $Dir(C)$ kategorileri ve bu kategorilerde ters ve düz spektrin limit tanımı verilebilecek şekilde bir C kategorisi ele alınsın. Örneğin, topolojik uzaylar kategorisi, gruplar kategorisi v.s. Herhangi $Inv(C)$ ve $Dir(C)$ kategorisinde kanonik homotopya bağıntısı tanımlanabilir.

$F\colon Top \to C$ herhangi kovaryant (kontravaryant) funktor olsun. F funktoru $Inv(Top)$ ve $Dir(Top)$ kategorilerinde kovaryant (kontravaryant)

$$F_* : Inv(Top) \to Inv(C) \quad (F^* : Inv(Top) \to Dir(C))$$
$$F_* : Dir(Top) \to Dir(C) \quad (F^* : Dir(Top) \to Inv(C))$$

funktorlarını verir.

Eğer $F\colon Top \to C$ funktoru homotopik invariant ise o zaman $F_*(F^*)$ funktorları homotopik komutatif olan (4.1) ve (4.2) diyagramlarını komutatif diyagramlara dönüştürür, yani spektral homotop morfizmaların görüntüleri kanonik homotopturlar. Buradan aşağıdaki önerme ispat edilmiş olur.

Önerme 4.6: $F\colon Top \to C$ homotopik invariant funktor olsun. $F_*(F^*)$ funktoru altında spektral homotop morfizmaların görüntüleri kanonik homotop morfizmalara dönüşür.

$Inv(C)$ ($Dir(C)$) kategorisinde $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ ($\overline{f}, \overline{g} : \overline{X} \to \overline{Y}$) morfizmalarının limit morfizmaları ,

$\lim\limits_{\leftarrow} \underline{f}, \lim\limits_{\leftarrow} \underline{g} : \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \to \lim\limits_{\leftarrow} \underline{Y}$ $\quad (\lim\limits_{\rightarrow} \overline{f}, \lim\limits_{\rightarrow} \overline{g} : \lim\limits_{\rightarrow} \overline{X} \to \lim\limits_{\rightarrow} \overline{Y})$

olsun.

Önerme 4.7: $Inv(C)$ kategorisinde $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizmaları kanonik homotop ise onların limit morfizmaları eşittir, yani $\lim\limits_{\leftarrow} \underline{f} = \lim\limits_{\leftarrow} \underline{g}$ dir.

İspat: $\{x_{\pi(\beta)}\} \in \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X}$ nin herhangi bir elemanı olsun. O halde;

$$\lim\limits_{\leftarrow} \underline{f}(\{x_{\pi(\beta)}\}) = \{f_\beta(x_{\pi(\beta)})\}, \quad \lim\limits_{\leftarrow} \underline{g}(\{x_{\rho(\beta)}\}) = \{g_\beta(x_{\rho(\beta)})\}$$

dır. $\underline{f}, \underline{g}$ morfizmalarının kanonik homotop olmasından dolayı $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi(\beta), \alpha \succ \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve

$$f_\beta\left(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x_\alpha)\right) = g_\beta\left(p^\alpha_{\rho(\beta)}(x_\alpha)\right)$$

sağlanır. Böylece

$$f_\beta(x_{\pi(\beta)}) = f_\beta(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x_\alpha)) = g_\beta(p^\alpha_{\rho(\beta)}(x_\alpha)) = g_\beta(x_{\rho(\beta)})$$

bulunur yani $\lim\limits_{\leftarrow} \underline{f} = \lim\limits_{\leftarrow} \underline{g}$ dir.

Önerme 4.9: $Dir(C)$ kategorisinde $\overline{f}, \overline{g} : \overline{X} \to \overline{Y}$ morfizmaları kanonik homotop ise onların limit morfizmaları eşittir, yani $\lim\limits_{\rightarrow} \overline{f} = \lim\limits_{\rightarrow} \overline{g} : \lim\limits_{\rightarrow} \overline{X} \to \lim\limits_{\rightarrow} \overline{Y}$ dir.

İspat: $[x^\alpha] \in \lim\limits_{\rightarrow} \overline{X}$ ve $x^\alpha \in X^\alpha$ olsun. Limit morfizmalarının eşit olduğunu göstermek için

$$\lfloor f^{\alpha}(x^{\alpha})\rfloor = \lfloor g^{\alpha}(x^{\alpha})\rfloor$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\overline{f}$ ve $\overline{g}$ morfizmalarının kanonik homotop olmasından dolayı $\forall \alpha \in A$ elemanı için $\beta \succ \pi(\alpha), \beta \succ \rho(\alpha)$ sağlanacak şekilde $\beta \in B$ elemanı vardır ve $q^{\beta}_{\pi(\alpha)} \circ f^{\alpha} = q^{\beta}_{\rho(\alpha)} \circ g^{\alpha}$ dönüşümleri eşittir, yani $x^{\alpha} \in X^{\alpha}$ elemanı için $q^{\beta}_{\pi(\alpha)}(f^{\alpha}(x^{\alpha})) = q^{\beta}_{\rho(\alpha)}(g^{\alpha}(x^{\alpha}))$ dır. Buradan $f^{\alpha}(x^{\alpha})$ ve $g^{\alpha}(x^{\alpha})$ elemanlarının denk olması elde edilir. Böylece

$$\lfloor f^{\alpha}(x^{\alpha})\rfloor = \lfloor g^{\alpha}(x^{\alpha})\rfloor$$

bulunur.

Teorem 4.9: $F: Top \to C$ homotopik invariant funktor olsun. $F_*(F^*)$ funktoru ile $\varprojlim$ veya $\varinjlim$ funktorlarının bileşkesi spektral homotopik invariant funktordur.

İspat: Önerme 4.6, Önerme 4.7 ve Önerme 4.8 den teoremin ispatı hemen elde edilir. Böylece homotopik invariant funktorun invariantlığı değişmeden daha geniş kategoriye genişletilebilir. Genel topolojinin en önemli problemlerinden biri topolojik uzaya iyi uzayların ters spektrinin limiti ile yaklaşma problemidir. Burada iyi uzaydan kastedilen CW- komplekslerdir. [73] Bu bölümde verilen spektral homotopya bağıntısı iyi uzaylarla keyfi topolojik uzaylar arasında bir köprü oluşturur.

Şimdi tanımlanan spektral homotopya bağıntısının bazı uygulamaları verilecektir. Cebirsel topolojinin güncel problemlerinden birisi topolojik uzaylar kategorisinde tanımlanan kovaryant (kontravaryant) funktorun homotopik invariant olduğunun gösterilmesidir. Örneğin,

1) Poliyedirler kategorisinde tanımlı homotopik invariant funktorun tüm topolojik uzaylar kategorisine $\check{C}ech$ genişletilmesinin homotopik invariantlığının ispatı kolay değildir.

2) Spektral homoloji teoride spektral homoloji funktorun homotopik invariantlığının ispatı da çok zordur.
Burada amaç, spektral homotopya bağıntısından yararlanarak 1) ve 2) problemlerini daha kolay biçimde çözmektir.

Teorem 4.10: Eğer $F : Pol \to C$ homotopik invariant kontravaryant (kovaryant) funktor ise F funktorunun

$$\check{F} : Top \to C$$

şeklindeki $\check{C}ech$ genişletilmesi homotopik invariant kontravaryant (kovaryant) funktordur.

İspat: $A, B \in Top$, $f, g : A \to B$ homotop dönüşümler ve bu dönüşümler arasındaki homotopya, $G : A \times I \to B \quad G(a,0) = f(a) \quad ,G(a,1) = g(a) \quad \forall a \in A$ şeklinde olsun.

$$j_t : A \to A \times I \qquad j_t(a) = (a,t) \qquad a \in A, t \in I$$

dönüşümü ele alınsın. O zaman

$$f = G \circ j_0 \, , \, g = G \circ j_1 \tag{4.4}$$

eşitlikleri sağlanır. $\check{F}$ funktorunun homotopik invariant olduğunu göstermek için

$$\check{F}(f) = \check{F}(g)$$

eşitliğini göstermek gerekir. (4.4) eşitliğinden ve $\check{F}$ nın kontravaryant funktor olmasından yararlanarak,

$$\check{F}(f)=\check{F}(G\circ j_0)=\check{F}(j_0)\circ\check{F}(G)$$
$$\check{F}(g)=\check{F}(G\circ j_1)=\check{F}(j_1)\circ\check{F}(G)$$

yazılır. Eğer

$$\check{F}(j_0)=\check{F}(j_1) \tag{4.5}$$

olduğu gösterilirse $\check{F}$ funktorunun homotopik invariant olduğu $\check{F}(f)=\check{F}(g)$ ispatlanmış olur. Bu yüzden sadece (4.5) eşitliği gösterilecektir. Topolojik uzayların her $f : A \to B$ sürekli dönüşümü simplicial komplekslerin ters spektrlerinin

$$nervf : nervA \to nervB$$

morfizmasını tanımlar. Burada Ω_A, Ω_B normalleştirilebilir örtümler ailesi olmak üzere,

$$nervA=\left(\{nervU\}_{U\in\Omega_A},\{\pi_V^U : nervU \to nervV\}_{U\geq V}\right)$$
$$nervB=\left(\{nervU'\}_{U'\in\Omega_B},\{\pi_{V'}^{U'} : nervU' \to nervV'\}_{U'\geq V'}\right)$$

şeklindeki ters spektrlerdir. Morfizma ise,

$$nervf=\left(f^* : \Omega_B \to \Omega_A, \{i_{f,U'} : nervf^*(U') \to nervU'\}\right) : nervA \to nervB$$

formülü ile verilir. Burada, $f^* : \Omega_B \to \Omega_A$ izoton dönüşümü

$$U' \in \Omega_B \text{ için } \left(U'=\{U'\}_{U'\in U'}\right) \quad f^*(U')=\{f^{-1}(U')\}_{U'\in U'}$$

şeklinde tanımlanır ve $f^*(U') \in \Omega_A$ dır. Eğer $j_0, j_1 : A \to A\times I$ dönüşümleri için

$$nervj_0 \overset{s}{\sim} nervj_1$$

morfizmalarının spektral homotop olduğu gösterilirse o zaman Teorem 4.9 dan (4.5) eşitliği elde edilecektir.

$$nervj_0 = \left(j_o^{\ *} : \Omega_{A\times I} \to \Omega_A, \left\{i_{j_0,U\times\rho} : nervj_0^{\ *}(U\times\rho) \to nerv(U\times\rho)\right\}\right) : nervA \to nerv(A\times I)$$
$$nervj_1 = \left(j_1^{\ *} : \Omega_{A\times I} \to \Omega_A, \left\{i_{j_1,U\times\rho} : nervj_1^{\ *}(U\times\rho) \to nerv(U\times\rho)\right\}\right) : nervA \to nerv(A\times I)$$

dır. $\forall(U\times\rho)$ için

$$i_{j_0,U\times\rho} \sim i_{j_1,U\times\rho} : nervU \to nerv(U\times\rho)$$

dır. [19] O zaman $\forall U\times\rho$ için

$$\begin{tikzcd}
 & nervU \arrow[dr, "i_{j_0,U\times\rho}"] & \\
nervU \arrow[ur, "1_{nervU}"] \arrow[dr, "1_{nervU}"'] & & nerv(U\times\rho) \\
 & nervU \arrow[ur, "i_{j_1,U\times\rho}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatif olduğundan dolayı $nervj_0 \overset{s}{\sim} nervj_1$ morfizmaları spektral homotoptur. Böylece $\check{C}ech$ genişletilmesinin homotopik invariantlığı ispatlanmış olur.

Not: Teoremin ispatı kontravaryant funktor için yapıldı. Kovaryant funktor içinde benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi spektral homoloji (kohomoloji) funktorun homotopik invariantlığının yeni ispatı verilecektir.

Teorem 4.11: $\overset{s}{H}_q : Top \to Group$ $\left(\overset{s}{H}{}^q : Top \to Group\right)$ spektral homoloji (kohomoloji) funktoru homotopik invarianttır.

İspat: $\check{C}ech$ genişletilmesinin ispatında olduğu gibi $\overset{s}{H}_q$ funktorunun homotopik invaryantlığını ispat etmek için $j_0, j_1 : A \to A \times I$ $\quad j_t(a) = (a,t)$ $\quad a \in A, \quad t \in I$ dönüşümleri için

$$\overset{s}{H}_q(j_0) = \overset{s}{H}_q(j_1) \qquad \left(\overset{s}{H}{}^q(j_0) = \overset{s}{H}{}^q(j_1)\right)$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Burada, $\overset{s}{H}_q(A) = \varprojlim_{\alpha \in Cov(A \times I)} H_q(nerv\alpha)$ dır. $A \times I$ uzayının spektral homoloji grubunu tanımlamak için kalıplı örtümleri [66] ele almak yeterlidir. Çünkü, kalıplı örtümler $A \times I$ nın tüm açık örtümler kümesinin konfinal altkümesidir. O halde, $\overset{s}{H}_q(A \times I) = \varprojlim_{\gamma \in Cov(A \times I)} H_q(nerv\gamma), \gamma = \{\gamma_{j,i} = \alpha(j) \times \beta_j^i\}_{(j,i) \in W}$ dır.

$$\overset{s}{H}_q(j_0) = \varprojlim H_q(nervj_0) \qquad \overset{s}{H}_q(j_1) = \varprojlim H_q(nervj_1)$$

dönüşümlerinin eşit olduğunu göstermek için Teorem 4.9 dan $nervj_0$ ve $nervj_1$ morfizmalarının spektral homotop olduğunu göstermek yeterlidir.

$$nervj_0 = \left(j_0^* : Cov(A \times I) \to Cov(A), \{i_{j_0,\gamma} : nervj_0^*\gamma \to nerv\gamma\}\right) : nervA \to nerv(A \times I)$$
$$nervj_1 = \left(j_1^* : Cov(A \times I) \to Cov(A), \{i_{j_1,\gamma} : nervj_1^*\gamma \to nerv\gamma\}\right) : nervA \to nerv(A \times I)$$

dır. Burada, $j_0^*\gamma = \alpha$ ve $j_1^*\gamma = \alpha$ olduğundan dolayı $i_{j_0,\gamma}, i_{j_1,\gamma} : nerv\alpha \to nerv\gamma$ dır. O zaman; $\forall \gamma \in Cov(A \times I)$ için

$$i_{j_0,\gamma} \sim i_{j_1,\gamma} : nerv\alpha \to nerv\gamma$$

dönüşümlerinin homotop olduğu gösterilirse $nervj_0$ morfizmasının $nervj_1$ morfizması ile spektral homotop olduğu gösterilmiş olur. $\gamma = \{\gamma_{j,i} = \alpha(j) \times \beta_j^i\}_{(j,i)\in W}$ kalıplı örtümünde

$$W = \{(j,i) \mid j \in J, i \in N^j\} \; N^j = (0,1,...,n^j)$$

şeklindeki çiftler kümesidir. $\forall j$ için $\{\beta_j^i\}_i$ $I = [0,1]$ aralığının regüler örtümüdür. $l_0 < l_1 < ... < l_{n_j}$, $r_0 < r_1 < ... r_{n_j}$ $(l_i, r_i) \cap (l_{i+1}, r_{i+1}) \neq \phi$, $(l_i, r_i) \cap (l_{i+p}, r_{i+p}) = \phi$ $p > 1$ şartını sağlayacak şekilde $\beta_j^i = (l_i, r_i)$ açık aralıklar ailesidir. $I = [0,1]$ aralığı içindeki s_i noktaları, $s_0 = l_0$, $l_i < s_i < r_{i-1}$ $1 \leq i \leq n_j$, $s_{n_j} = r_{n_j}$ şeklinde seçilsin. Bu noktalardan yararlanarak

$$F_0 = [s_0, s_1] \quad , \quad F_1 = [s_1, s_2] \quad ,..., F_{n_j} = [s_{n_j - 1}, s_{n_j}]$$

kapalı aralıkları ele alınsın. Açıktır ki; $\bigcup_{i=0}^{n_j} F_i = I$ ve $\forall i$ için $F_i \subset (l_i, r_i)$ dir. $\forall F_i \subset (l_i, r_i)$ için Uryshon Lemmasına göre

$$g_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_i \\ 0, & x \in I/(l_i, r_i) \end{cases}$$

koşulunu sağlayacak şekilde sürekli $g_i : I \to [0,1]$ dönüşümü vardır. g_i sürekli dönüşümlerinden yararlanarak $g(x) = \sum_{i=0}^{n_j} g_i(x)$ sürekli dönüşümü tanımlanabilir.

$I=\bigcup_{i=0}^{n_j} F_i$ olduğundan her $x\in[0,1]$ noktası en azından bir F_i ye ait olacaktır. Dolayısıyla $g_i(x)=1$ den $g(x)\neq 0$ elde edilir. O zaman, $f_i(x)=\dfrac{g_i(x)}{g(x)}$ sürekli bir fonksiyondur ve $\sum_{i=0}^{n_j} f_i(x)=1$ bulunur. $\{f_i : I\to[0,1]\}$ ailesi $\{\beta_j^i\}$ regüler örtümüne bağlı birimin parçalanmasıdır [20] yani; $f_i^{-1}((0,1])\subset(l_i,r_i)$ sağlanır.

Bundan sonra f_i dönüşümünün $\{\beta_j^i\}$ örtümüne bağlı olduğunu göz önüne alarak $f_{\beta_j^i}$ şeklinde gösterilecektir. $\forall t\in I$ için $\sum_{i=0}^{n_j} f_{\beta_{n_j}^i}(t)=1$ olduğundan $\left(f_{\beta_j^0}(t),\ldots,f_{\beta_j^{n_j}}(t)\right)$ $nerv\{\beta_j^{(i)}\}$ simplicial kompleksinin herhangi bir noktasının baricentrik koordinatları olarak ele alınabilir. O halde

$G : nerv\alpha\times I\to nerv\gamma$

homotopyası, $\forall x=\{x_{\alpha(j)}\}\in nerv\alpha$, $t\in I$ için $G(x,t)=\{z_{\alpha(j)\times\beta_j^{(i)}}=x_{\alpha(j)}\cdot f_{\beta_j^{(i)}}(t)\}$ şeklinde tanımlansın.

$t=0$ için, $G(x,0)=\{z_{\alpha(j)\times\beta_j^{(i)}}=x_{\alpha(j)}\cdot f_{\beta_j^{(i)}}(0)\}=\{z_{\alpha(j)\times\beta_j^{(0)}}=x_{\alpha(j)}\}=\{(x_{\alpha(j)},0)\}=i_{j_0,\gamma}$

$t=1$ için, $G(x,1)=\{z_{\alpha(j)\times\beta_j^{(i)}}=x_{\alpha(j)}\cdot f_{\beta_j^{(i)}}(1)\}=\{z_{\alpha(j)\times\beta_j^{(n_j)}}=x_{\alpha(j)}\}=\{(x_{\alpha(j)},n_j)\}=i_{j_1,\gamma}$

dır. O halde $\forall\gamma\in Cov(A\times I)$ için $i_{j_0,\gamma}\sim i_{j_1,\gamma}$ dönüşümleri homotoptur. Böylece teorem ispatlanır.

BÖLÜM 5

5. TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS SPEKTRLER KATEGORİSİNDE HOMOTOPİK TEORİ

Bu bölümde ters spektrler kategorisinde tanımlanan spektral homotopya bağıntısından yararlanarak, ters spektrler kategorisinde homoloji teorinin aksiyomlarını sağlayan homotopik teorinin kurulması amaçlanmıştır.

Bundan sonraki bölümlerde belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrler kategorisi olan $Inv(Top_0)$ kategorisi ele alınacaktır. $Inv(Top_0)$ kategorisinde de spektral homotopya bağıntısı aynı şekilde verilmektedir. Buradaki homotopya göreli (relative) homotopyadır.

Top_0 kategorisinde $\forall (X,x_0),(Y,y_0)$ uzayları için $[X,x_0;Y,y_0]$ kümesi belirli noktalı kümedir. Burada belirli nokta olarak, $c: X \to Y \quad \forall x \in X \; için \quad c(x) = y_0$ sabit dönüşümün sınıfı ele alınır. $c: X \to Y$ sabit dönüşümü tektir. $Inv(Top_0)$ kategorisinde ise sabit morfizma tek değildir.

$$(\underline{X},\underline{x_0}) = \left(\{X_\alpha, x_{0_\alpha}\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : (X_{\alpha'}, x_{0_{\alpha'}}) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha})\}_{\alpha\prec\alpha'}\right)$$
$$(\underline{Y},\underline{y_0}) = \left(\{Y_\beta, y_{0_\beta}\}_{\beta\in B}, \{q_\beta^{\beta'} : (Y_{\beta'}, y_{0_{\beta'}}) \to (Y_\beta, y_{0_\beta})\}_{\beta\prec\beta'}\right)$$

belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrleri olsun.

Lemma 5.1: $\underline{c},\underline{c}' : (\underline{X},\underline{x_0}) \to (\underline{Y},\underline{y_0})$ ters spektrlerin herhangi sabit iki morfizması ise $\underline{c},\underline{c}'$ morfizmaları kanonik spektral homotoptur.

İspat: $\underline{c} = \left(\pi : B \to A, \left\{c_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta, \quad c_\beta(x) = y_{0_\beta}\right\}_{\beta \in B}\right)$

$\underline{c}' = \left(\rho : B \to A, \left\{c'_\beta : X_{\rho(\beta)} \to Y_\beta, \quad c'_\beta(x) = y_{0_\beta}\right\}_{\beta \in B}\right)$

olsun. $\forall \beta \in B$ için $\pi(\beta), \rho(\beta) \in A$ dır. A yönlendirilmiş küme olduğu için $\alpha \succ \pi(\beta)$ ve $\alpha \succ \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ vardır. O halde

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "c_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "c'_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramında $\forall x \in X_\alpha$ için

$$\left(c_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}\right)(x) = c_\beta\left(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x)\right) = y_{0_\beta}$$
$$\left(c'_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}\right)(x) = c'_\beta\left(p^\alpha_{\rho(\beta)}(x)\right) = y_{0_\beta}$$

dir, yani diyagram komutatiftir. O zaman tanım gereği $\underline{c}$ ve $\underline{c}'$ morfizmaları kanonik spektral homotoptur.

Lemmadan yararlanarak $\forall (\underline{X}, \underline{x_0}), (\underline{Y}, \underline{y_0}) \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri için $\lfloor \underline{X}, \underline{x_0}; \underline{Y}, \underline{y_0} \rfloor$ kümesi belirli noktalı küme olarak ele alınabilir. Burada belirli nokta herhangi $\underline{c} : \underline{X} \to \underline{Y}$ sabit morfizmasının homotopik sınıfıdır.

Lemma 5.2: $\underline{X} = X = (\{X\}, \{1_X : X \to X\})$ bir uzaydan oluşan ters spektr ve

$$\underline{f} = \left(c : A \to \{*\}, \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : X \to \underline{Y}$$
$$\underline{g} = \left(c : A \to \{*\}, \{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : X \to \underline{Y}$$

iki morfizma olsun. O halde

$\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmaları spektral homotoptur $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A$ için $f_\alpha \sim g_\alpha$ dır.

İspat: "$\Rightarrow$" $\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmaları spektral homotop olsun. O zaman $\forall \alpha \in A$ için

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & & Y_\alpha \\
 & X \arrow[ur, "g_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir. Buradan $f_\alpha \circ 1_X \sim g_\alpha \circ 1_X \Rightarrow f_\alpha \sim g_\alpha$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $\forall \alpha \in A$ için $f_\alpha \sim g_\alpha$ dönüşümleri homotop olsun. O halde X ters spektrinden $\underline{Y}$ ters spektrine giden morfizmaların tanımından yararlanarak

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\
X \arrow[ur, dotted, "1_X"] \arrow[dr, dotted, "1_X"'] & & Y_\alpha \\
 & X \arrow[ur, "g_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopik komutatif diyagramı elde edilir. Bu ise $\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmalarının spektral homotop olması demektir.

Şimdi S^1 birim çemberi, $s_0 \in S^1$ belirli nokta, $\varphi : I \to S^1, \varphi(0) = \varphi(1) = s_0$ koşulunu sağlayan kanonik örten dönüşüm olsun. $\underline{S^1} = \left(\{S^1, s_0\}, \{1_{S^1} : (S^1, s_0) \to (S^1, s_0)\}\right)$ ve $\forall (\underline{X}, \underline{x_0}) \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri için $\left\lfloor \underline{S^1}, \underline{s_0}; \underline{X}, \underline{x_0} \right\rfloor$ kümesinde cebirsel bir işlem tanımlanacak ve bu kümenin tanımlanan işlemle birlikte bir grup olduğu gösterilecektir.

$\underline{S}^1 = \{S^1\}, \underline{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ters spektrlerinin morfizmalarının çarpım işlemi;

$\underline{f} = \left(c: A \to \{*\}, \{f_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$, $\underline{g} = \left(c: A \to \{*\}, \{g_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$ için

$\underline{f} * \underline{g} = \left(c: A \to \{*\}, \{f_\alpha * g_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right): S^1 \to \underline{X}$

$$(f_\alpha * g_\alpha)(t) = \begin{cases} f_\alpha(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ g_\alpha(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad t \in S^1 \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır. Ters spektrlerin morfizmalarının çarpımı yine de ters spektrlerin morfizmasıdır.

Not: $\underline{f}: S^1 \to \underline{X}$, $\underline{g}: S^1 \to \underline{X}$ morfizmalarından yararlanarak tanımlanan $\underline{f} * \underline{g}$ işlemi hiçbir cebirsel yapı oluşturmaz. Bu nedenle S^1 ters spektrinden $\underline{X}$ ters spektrine giden morfizmaların homotopik sınıflarına, yani $\left[(S^1, s_0), (\underline{X}, \underline{x_0})\right] = \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ yapısına bakılacaktır.

Teorem 5.3: $\pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ yapısı, $\lfloor \underline{f} \rfloor * \lfloor \underline{g} \rfloor = \lfloor \underline{f} * \underline{g} \rfloor$ ters spektrlerin morfizmalarının çarpım işlemine göre bir grup oluşturur.

İspat: Bu çarpım işlemi iyi tanımlıdır. Gerçekten, $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f'}$ ve $\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{g'}$ olsun. Burada,

$$\underline{f'} = \left(c: A \to \{*\}, \{f'_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$$
$$\underline{g'} = \left(c: A \to \{*\}, \{g'_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$$

şeklindedir. Lemma 5.2 den $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f'} \Rightarrow \forall\alpha \in A$ için $f_\alpha \sim f'_\alpha$, $\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{g'} \Rightarrow \forall\alpha \in A$ için $g_\alpha \sim g'_\alpha$ sağlanır.

$$f_\alpha \sim f'_\alpha \text{ ve } g_\alpha \sim g'_\alpha \Rightarrow f_\alpha * g_\alpha \sim f'_\alpha * g'_\alpha \Rightarrow \underline{f} * \underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{f'} * \underline{g'}$$

elde edilir. O halde $\lfloor \underline{f} * \underline{g} \rfloor = \lfloor \underline{f}' * \underline{g}' \rfloor$ eşit olduğundan işlem iyi tanımlıdır.

Şimdi işlemin birleşme özelliğini sağladığı gösterilecektir, yani $\underline{f}, \underline{g}, \underline{h} : S^1 \to \underline{X}$ morfizmaları için

$$\lfloor \underline{f} \rfloor * (\lfloor \underline{g} \rfloor * \lfloor \underline{h} \rfloor) = (\lfloor \underline{f} \rfloor * \lfloor \underline{g} \rfloor) * \lfloor \underline{h} \rfloor \Rightarrow \lfloor \underline{f} * (\underline{g} * \underline{h}) \rfloor = \lfloor (\underline{f} * \underline{g}) * \underline{h} \rfloor$$

eşitliğinin sağlandığının gösterilmesi gerekir. Bunun için ise $\underline{f} * (\underline{g} * \underline{h}) \overset{s}{\sim} (\underline{f} * \underline{g}) * \underline{h}$ morfizmalarının spektral homotop olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\underline{g} * \underline{h} = \left(c : A \to \{*\}, \{g_\alpha * h_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$$

$$(g_\alpha * h_\alpha)(t) = \begin{cases} g_\alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ h_\alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad t \in S^1$$

çarpım işleminin tanımından

$$\underline{f} * (\underline{g} * \underline{h}) = \left(c : A \to \{*\}, \{f_\alpha * (g_\alpha * h_\alpha) : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$$

elde edilir.Benzer şekilde;

$$(\underline{f} * \underline{g}) * \underline{h} = \left(c : A \to \{*\}, \{(f_\alpha * g_\alpha) * h_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$$

yazılabilir. $\forall \alpha \in A$ için $f_\alpha * (g_\alpha * h_\alpha)$ dönüşümü ile $(f_\alpha * g_\alpha) * h_\alpha$ dönüşümü arasındaki homotopya,

$$F(t,s)=\begin{cases} f_\alpha\left(\dfrac{4t}{1+s}\right), & 0\le t\le \dfrac{s+1}{4} \\ g_\alpha(4t-1-s), & \dfrac{s+1}{4}\le t\le \dfrac{s+2}{4} \\ h_\alpha\left(1-\dfrac{4(1-t)}{2-s}\right), & \dfrac{s+2}{4}\le t\le 1 \end{cases} \qquad t\in S^1, s\in I$$

formülü ile verilir. Buradan $\underline{f}*(\underline{g}*\underline{h})\overset{s}{\sim}(\underline{f}*\underline{g})*\underline{h}$ morfizmaları spektral homotoptur. O halde "*" işlemi birleşme özelliğini sağlar.

İkinci özellik olarak sabit morfizmanın homotopik sınıfının birim eleman olduğu, yani, $\underline{c}=\left(c:A\to\{*\},\{c_\alpha:S^1\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right):S^1\to\underline{X}$ $\forall t\in S^1$ için $c_\alpha(t)=x_{0_\alpha}$ sabit morfizması için

$$[\underline{f}]*[\underline{c}]=[\underline{f}] \quad ,[\underline{c}]*[\underline{f}]=[\underline{f}] \tag{5.2}$$

olduğunu göstermek gerekir. (5.2) eşitliğinin sağlandığını göstermek için ise $\underline{f}*\underline{c}\overset{s}{\sim}\underline{f}$, $\underline{c}*\underline{f}\overset{s}{\sim}\underline{f}$ morfizmalarının spektral homotop olduğunu göstermek yeterlidir. Burada

$$\underline{f}*\underline{c}=\left(c:A\to\{*\},\{f_\alpha*c_\alpha:S^1\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$$

$$(f_\alpha*c_\alpha)(t)=\begin{cases} f_\alpha(2t), & 0\le t\le \dfrac{1}{2} \\ c_\alpha(2t-1), & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases} \qquad t\in S^1$$

dır. $\forall\alpha\in A$ için $f_\alpha*c_\alpha$ dönüşümü ile f_α dönüşümü arasındaki homotopya

$$F(t,s)=\begin{cases} x_{0_\alpha}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}s \\ f_\alpha\left(\dfrac{2t-s}{2-s}\right), & \dfrac{1}{2}s\le t\le 1 \end{cases} \qquad t\in S^1, s\in I$$

formülü ile verilir. O halde $\underline{f} * \underline{c} \overset{s}{\sim} \underline{f}$ morfizmaları spektral homotoptur. Diğer kısımda benzer şekilde yapılır. Böylece $\pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ kümesi "*" işlemine göre $[\underline{c}]$ birim elemanına sahiptir.

Şimdi $[\underline{f}]$ elemanının tersinin

$$\underline{f}^{-1} = \left(c : A \to \{*\}, \{f_\alpha^{-1} : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) \; t \in S^1 \qquad \text{için } f_\alpha^{-1}(t) = f_\alpha(1-t)$$

morfizmasının homotopik sınıfı olduğu, yani

$$[\underline{f}] * [\underline{f}^{-1}] = [\underline{c}] \quad , [\underline{f}^{-1}] * [\underline{f}] = [\underline{c}] \tag{5.3}$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilecektir. (5.3) ifadesinin sağlandığını göstermek için ise $\underline{f} * \underline{f}^{-1} \overset{s}{\sim} \underline{c}$, $\underline{f}^{-1} * \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmalarının spektral homotop olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\forall \alpha \in A$ için $f_\alpha * f_\alpha^{-1}$ dönüşümü ile c_α dönüşümü arasındaki homotopya ,

$$F(t,s) = \begin{cases} f_\alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}s \\ f_\alpha(s), & \frac{1}{2}s \le t \le 1 - \frac{1}{2}s \\ f_\alpha(2-2t), & 1 - \frac{1}{2}s \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\underline{f} * \underline{f}^{-1} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmaları spektral homotoptur. Diğer kısımda benzer şekilde yapılır. O halde $\pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ kümesinde her elemanın tersi vardır.

Tanım 5.4: $\pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ grubuna $\underline{X}$ ters spektrinin $\underline{x_0}$ noktasındaki spektral fundamentel (Poinkare) grubu denir.

Şimdi spektral Poinkare grubunun bazı özellikleri araştırılacaktır. Ters spektrlerin her $\underline{\varphi} = \left(\pi : B \to A, \{\varphi_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması ve $\lfloor \underline{f} \rfloor \in \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ elemanı için

$$\pi_1^s(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}_* : \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \to \pi_1^s(\underline{Y}, \underline{y_0})$$

dönüşümü

$$\pi_1^s(\underline{\varphi})(\lfloor \underline{f} \rfloor) = \lfloor \underline{\varphi} \circ \underline{f} \rfloor = \underline{\varphi}_*(\lfloor \underline{f} \rfloor)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\underline{\varphi} \circ \underline{f} = \left(c : B \to \{*\}, \{\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)} : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$ dır.

Teorem 5.5: $(\underline{X}, \underline{x_0}) \mapsto \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$

$$\underline{\varphi} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0}) \mapsto \pi_1^s(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}_* : \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \to \pi_1^s(\underline{Y}, \underline{y_0})$$

karşı gelmeleri ile belirtilen, π_1^s, $Inv(Top_0)$ kategorisinden *Group* kategorisine giden bir kovaryant funktordur.

İspat: $\pi_1^s(\underline{\varphi})$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu açıktır.

$\pi_1^s(\underline{\varphi})$ homomorfizmadır. Gerçekten, her $\lfloor \underline{f} \rfloor, \lfloor \underline{g} \rfloor \in \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ için

$$\pi_1^s(\underline{\varphi})(\lfloor \underline{f} \rfloor * \lfloor \underline{g} \rfloor) = \pi_1^s(\underline{\varphi})(\lfloor \underline{f} * \underline{g} \rfloor) = \lfloor \underline{\varphi} \circ (\underline{f} * \underline{g}) \rfloor$$
$$\pi_1^s(\underline{\varphi})(\lfloor \underline{f} \rfloor) * \pi_1^s(\underline{\varphi})(\lfloor \underline{g} \rfloor) = \lfloor \underline{\varphi} \circ \underline{f} \rfloor * \lfloor \underline{\varphi} \circ \underline{g} \rfloor$$

dır. O halde $\underline{\varphi} \circ (\underline{f} * \underline{g}) \overset{s}{\sim} (\underline{\varphi} \circ \underline{f}) * (\underline{\varphi} \circ \underline{g})$ morfizmalarının spektral homotop olduğunu göstermek yeterlidir. (5.1) deki ifadeyi kullanarak,

$$\underline{\varphi} \circ (\underline{f} * \underline{g}) = \left(c : B \to \{*\},\ \{\varphi_\beta \circ (f_{\pi(\beta)} * g_{\pi(\beta)}) : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\left(\varphi_\beta \circ (f_{\pi(\beta)} * g_{\pi(\beta)})\right)(t) = \begin{cases} (\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)})(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ (\varphi_\beta \circ g_{\pi(\beta)})(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

elde edilir.

$$\underline{\varphi} \circ \underline{f} = \left(c : B \to \{*\}, \{\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)} : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\underline{\varphi} \circ \underline{g} = \left(c : B \to \{*\}, \{\varphi_\beta \circ g_{\pi(\beta)} : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

morfizmaları için

$$(\underline{\varphi} \circ \underline{f}) * (\underline{\varphi} \circ \underline{g}) = \left(c : B \to \{*\}, \{(\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)}) * (\varphi_\beta \circ g_{\pi(\beta)}) : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

yazılır. Burada

$$\left((\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)}) * (\varphi_\beta \circ g_{\pi(\beta)})\right)(t) = \begin{cases} (\varphi_\beta \circ f_{\pi(\beta)})(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ (\varphi_\beta \circ g_{\pi(\beta)})(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

dır. (5.4) ve (5.5) ifadeleri $\forall \beta \in B$ için aynı olduğundan $\pi_1^s(\underline{\varphi})$ homomorfizmadır. $\pi_1^s(\underline{\varphi})$ kovaryant funktordur. Gerçekten $\underline{Z} = (\{Z_\gamma\}_{\gamma \in C})$ olmak üzere,

$$\underline{\varphi_0} = \left(\pi : B \to A, \{\varphi_{0_\beta} : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$$

$$\underline{\varphi_1} = \left(\rho : C \to B, \{\varphi_{1_\gamma} : Y_{\rho(\gamma)} \to Z_\gamma\}_{\gamma \in C}\right) : \underline{Y} \to \underline{Z}$$

morfizmalarının bileşkesi

$$\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_o} = \left(\pi \circ \rho : C \to A, \left\{\varphi_{1_\gamma} \circ \varphi_{0_{\rho(\gamma)}} : X_{\pi(\rho(\gamma))} \to Z_\gamma\right\}_{\gamma \in C}\right) : \underline{X} \to \underline{Z}$$

şeklindedir. $\forall \lfloor \underline{f} \rfloor \in \pi_1^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)$ için

$$\pi_1^s\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right)\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \left\lfloor\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right) \circ \underline{f}\right\rfloor \tag{5.6}$$

ve

$$\left(\pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right) \circ \pi_1^s\left(\underline{\varphi_0}\right)\right)\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right)\left(\pi_1^s\left(\underline{\varphi_0}\right)\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right)\right) = \pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right)\left(\lfloor \underline{\varphi_0} \circ \underline{f} \rfloor\right) = \left\lfloor \underline{\varphi_1} \circ \left(\underline{\varphi_0} \circ \underline{f}\right)\right\rfloor \tag{5.7}$$

dir. (5.6) ve (5.7) eşitliklerinden

$$\pi_1^s\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right) = \pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right) \circ \pi_1^s\left(\underline{\varphi_0}\right) \tag{5.8}$$

elde edilir.

$$\pi_1^s\left(1_{\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)}\right) = 1_{\pi_1^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)} \tag{5.9}$$

eşitliği de kolayca gösterilir. (5.8) ve (5.9) ifadeleri π_1^s in kovaryant funktor olduğunu göstermektedir.

Teorem 5.6: $\pi_1^s : Inv(Top_0) \to Group$ funktoru homotopik invarianttır, yani $\underline{\varphi_0}, \underline{\varphi_1} : \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \left(\underline{Y}, \underline{y_0}\right)$ morfizmaları spektral homotop ise

$\underline{\varphi_0}_* = \underline{\varphi_1}_* : \pi_1^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \pi_1^s\left(\underline{Y}, \underline{y_0}\right)$ dir.

İspat: $\underline{\varphi_0} : \underline{X} \to \underline{Y} \mapsto \pi_1^s\left(\underline{\varphi_0}\right) = \underline{\varphi_0}_* : \pi_1^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \pi_1^s\left(\underline{Y}, \underline{y_0}\right)$

$\underline{\varphi_1} : \underline{X} \to \underline{Y} \mapsto \pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right) = \underline{\varphi_1}_* : \pi_1^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \pi_1^s\left(\underline{Y}, \underline{y_0}\right)$

ve $\lfloor \underline{f} \rfloor \in \pi_1^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ için $\underline{f} = \left(c : A \to \{*\}, \{f_\alpha : S^1 \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : S^1 \to \underline{X}$ olsun.

$$\underline{\varphi_0}_*\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \pi_1^s\left(\underline{\varphi_0}\right)\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \lfloor \underline{\varphi_0} \circ \underline{f} \rfloor \tag{5.10}$$

$$\underline{\varphi_1}_*\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \pi_1^s\left(\underline{\varphi_1}\right)\left(\lfloor \underline{f} \rfloor\right) = \lfloor \underline{\varphi_1} \circ \underline{f} \rfloor \tag{5.11}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\underline{\varphi_0} \circ \underline{f} = \left(c : B \to \{*\}, \{\varphi_{0_\beta} \circ f_{\pi(\beta)} : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\underline{\varphi_1} \circ \underline{f} = \left(c : B \to \{*\}, \{\varphi_{1_\beta} \circ f_{\rho(\beta)} : S^1 \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

dir. Eğer (5.10) ve (5.11) ifadelerinin eşit olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\underline{\varphi_0} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi_1}$ spektral homotop ise $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "\varphi_{0_\beta}"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "\varphi_{1_\beta}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.12}$$

diyagramı homotopik komutatiftir, yani $\varphi_{0_\beta} \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \sim \varphi_{1_\beta} \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri homotoptur. Teoremi ispatlamak için $\underline{\varphi} \circ \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi_1} \circ \underline{f}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu, yani $\forall \beta \in B$ elemanı için

$$\begin{tikzcd}
 & S^1 \arrow[dr, "\varphi_{0_\beta} \circ f_{\pi(\beta)}"] & \\
S^1 \arrow[ur, "1_{S^1}"] \arrow[dr, "1_{S^1}"'] & & Y_\beta \\
 & S^1 \arrow[ur, "\varphi_{1_\beta} \circ f_{\rho(\beta)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.13}$$

diyagramının homotopik komutatif olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (5.12) deki diyagram göz önüne alınırsa

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "\varphi_{0_\beta}"] & \\
S^1 \arrow[urr, "f_{\pi(\beta)}"] \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[drr, "f_{\rho(\beta)}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "(2)"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "(3)"] & X_\alpha \arrow[ur, "p^{\alpha}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\alpha}_{\rho(\beta)}"'] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & Y_\beta \\
 & & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "\varphi_{1_\beta}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.14}$$

diyagramı elde edilir. (5.14) de (2) ve (3) diyagramları ters spektrlerin morfizması tanımından komutatif olduğundan

$$p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ f_\alpha = f_{\pi(\beta)} \text{ ve } p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ f_\alpha = f_{\rho(\beta)} \tag{5.15}$$

yazılır. O halde (5.14) diyagramında (1) diyagramının homotopik komutatifliğinden ve (5.15) den

$$\varphi_{0_\beta} \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ f_\alpha \sim \varphi_{1_\beta} \circ p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ f_\alpha \quad \Rightarrow \varphi_{0_\beta} \circ f_{\pi(\beta)} \sim \varphi_{1_\beta} \circ f_{\rho(\beta)}$$

elde edilir. Böylece (5.13) diyagramının homotopik komutatif olduğu bulunur. Buradan (5.10) ve (5.11) ifadelerinin eşit olduğu gösterilmiş olur.

$\pi_1^s : Inv(Top_0) \to Group$ funktoru tanımlandı ve π_1^s funktorunun homotopik invariant olduğu gösterildi.

Şimdi homotopik teoriyi oluşturmak için $\forall n \in N$ için

$$\pi_n^s : Inv(Top_0) \to Group \ , \ \pi_n^s : Inv\left(Top_0{}^2\right) \to Group$$

funktorlarının tanımlanması ve bu π_n^s funktorları için homoloji teorinin aksiyomlarının sağlanması gerekir. Bunun için gerekli olan bazı yapılar aşağıda oluşturulmaktadır.

$\forall n \in N$ için I^n $n-$boyutlu küp ve $\partial I^n = \{(t_1, t_2, ..., t_n) \in I^n, \quad t_i = 0,1, \quad 1 \le i \le n\}$ kübün sınırı olsun. $\forall(\underline{X}, \underline{x_0}) \in Inv(Top_0)$ için

$$\lfloor I^n, \partial I^n; \underline{X}, \underline{x_0} \rfloor \tag{5.16}$$

homotopik sınıfları ele alınsın. Burada $\forall \lfloor \underline{\varphi} \rfloor \in \lfloor I^n, \partial I^n; \underline{X}, \underline{x_0} \rfloor$ için $\underline{\varphi} = (c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha : I^n \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}) : I^n \to \underline{X}$, $\underline{\varphi}(\partial I^n) = \underline{x_0}$,yani $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha(\partial I^n) = x_{0_\alpha}$ şeklindedir. Lemma 5.2 den dolayı $\underline{\varphi_0}, \underline{\varphi_1} : I^n \to \underline{X}, \underline{\varphi_0}(\partial I^n) = \underline{x_0}, \underline{\varphi_1}(\partial I^n) = \underline{x_0}$ morfizmaları için $\underline{\varphi_0} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi_1} \Leftrightarrow \forall \alpha \in A$ için $\varphi_{0_\alpha} \sim \varphi_{1_\alpha}$ sağlanır. φ_{0_α} ve φ_{1_α} dönüşümleri göreli homotoptur. Bu iki dönüşüm arasındaki göreli homotopya ise

$$H : I^n \times I \to X_\alpha$$
$$H(t_i, 0) = \varphi_{0_\alpha}(t_i) \quad , \quad H(t_i, 1) = \varphi_{1_\alpha}(t_i) \quad , \quad t_i \in I^n$$
$$t_i \in \partial I^n, t \in I \text{ için } H(t_i, t) = \varphi_{0_\alpha}(t_i) = \varphi_{1_\alpha}(t_i) = x_{0_\alpha}$$

şeklindedir.

Şimdi (5.16) da gösterilen homotopik sınıflar kümesinde bir cebirsel işlem tanımlanacaktır. $\forall \lfloor \underline{f} \rfloor, \lfloor \underline{g} \rfloor \in \lfloor I^n, \partial I^n; \underline{X}, \underline{x_0} \rfloor$ için $\lfloor \underline{f} \rfloor * \lfloor \underline{g} \rfloor = \lfloor \underline{f} * \underline{g} \rfloor = \lfloor \underline{h} \rfloor$

$$h_\alpha(t_1, t_2, ..., t_n) = (f_\alpha * g_\alpha)(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{cases} f_\alpha(2t_1, t_2, ..., t_n), & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g_\alpha(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases} \tag{5.17}$$

şeklinde tanımlanır, yani h_α, t_1 e göre yolların çarpımıdır.

Fundamentel gruplarda olduğu gibi bu işleminde iyi tanımlı olduğu ispatlanabilir. (5.17) de tanımlanan işleme göre $\lfloor I^n, \partial I^n; \underline{X}, \underline{x_0} \rfloor$ yapısı bir grup oluşturur. Bu grup $\pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.7: $\pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ grubuna $\underline{X}$ ters spektrinin $\underline{x_0}$ noktasındaki $n-$boyutlu spektral mutlak homotopik grubu denir.

Şimdi $n-$boyutlu spektral mutlak homotopik grubun bazı özellikleri araştırılacaktır. $(\underline{X}, \underline{x_0})$ belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrine karşı $\pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ $n-$boyutlu spektral mutlak homotopik grubu karşı gelir. $\underline{f} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ ters spektrlerin morfizması için $\pi_n^s(\underline{f}) = \underline{f}_{*_n} : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \to \pi_n^s(\underline{Y}, \underline{y_0})$ dönüşümü

$$\forall \underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}), \ \underline{\varphi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X}, \underline{x_0}) \qquad \lfloor \underline{\varphi} \rfloor = \underline{\zeta} \text{ için } \underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta}) = \underline{f}_{*_n}(\lfloor \underline{\varphi} \rfloor) = \lfloor \underline{f} \circ \underline{\varphi} \rfloor$$

şeklinde tanımlanır. $\underline{f}_{*_n}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu Teorem 5.5'e benzer biçimde gösterilir.

Teorem 5.8: a) $\underline{f}_{*_n} : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \to \pi_n^s(\underline{Y}, \underline{y_0})$ dönüşümü grupların homomorfizmasıdır.

b) $(\underline{X}, \underline{x_0}) \mapsto \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$, $\underline{f} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0}) \mapsto \underline{f}_{*_n} : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \to \pi_n^s(\underline{Y}, \underline{y_0})$

karşı gelmesi kovaryant funktordur.

İspat: a) $\forall \underline{\zeta}, \underline{\eta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$ için $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$, $\underline{\psi} \in \underline{\eta}$ olsun. $\underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta} * \underline{\eta}) = \underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta}) * \underline{f}_{*_n}(\underline{\eta})$ eşitliğinin gösterilmesi gerekir.

$$\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \Rightarrow \underline{\varphi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta}$$

$$\underline{\eta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \Rightarrow \underline{\psi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X}, \underline{x_0}) \in \underline{\eta}$$

$$\underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta} * \underline{\eta}) = \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi}] * [\underline{\psi}]) = \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi} * \underline{\psi}]) = [\underline{f} \circ (\underline{\varphi} * \underline{\psi})]$$

yazılır.

$$[\underline{\varphi}] * [\underline{\psi}] = [\underline{\varphi} * \underline{\psi}]$$

$$\underline{\varphi} * \underline{\psi} = \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha * \psi_\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha})\}_{\alpha \in A}\right)$$

$$\underline{f} \circ (\underline{\varphi} * \underline{\psi}) = \left(c : B \to \{*\}, \{f_\beta \circ (\varphi_{\pi(\beta)} * \psi_{\pi(\beta)}) : (I^n, \partial I^n) \to (Y_\beta, y_{0_\beta})\}_{\beta \in B}\right)$$

ifadesinde $\forall \beta \in B$ için

$$\begin{aligned}
(f_\beta \circ (\varphi_{\pi(\beta)} * \psi_{\pi(\beta)}))(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= f_\beta \circ \begin{cases} \varphi_{\pi(\beta)}(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2} \\ \psi_{\pi(\beta)}(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (f_\beta \circ \varphi_{\pi(\beta)})(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2} \\ (f_\beta \circ \psi_{\pi(\beta)})(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases} \\
&= (f_\beta \circ \varphi_{\pi(\beta)} * f_\beta \circ \psi_{\pi(\beta)})(t_1, t_2, \ldots, t_n)
\end{aligned}$$

sağlanır. O halde $\underline{f} \circ (\underline{\varphi} * \underline{\psi}) = (\underline{f} \circ \underline{\varphi}) * (\underline{f} \circ \underline{\psi})$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta} * \underline{\eta}) &= \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi}] * [\underline{\psi}]) = \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi} * \underline{\psi}]) = [\underline{f} \circ (\underline{\varphi} * \underline{\psi})] = [(\underline{f} \circ \underline{\varphi}) * (\underline{f} \circ \underline{\psi})] = \\
&= [\underline{f} \circ \underline{\varphi}] * [\underline{f} \circ \underline{\psi}] = \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi}]) * \underline{f}_{*_n}([\underline{\psi}]) = \underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta}) * \underline{f}_{*_n}(\underline{\eta})
\end{aligned}$$

elde edilir. $\underline{f}_{*_n}$ dönüşümü homomorfizmadır.

b) $\underline{\varphi_0} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ ve $\underline{\varphi_1} : (\underline{Y}, \underline{y_0}) \to (\underline{Z}, \underline{z_0})$ için

$$\pi_n^s\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right) = \pi_n^s\left(\underline{\varphi_1}\right) \circ \pi_n^s\left(\underline{\varphi_0}\right) \tag{5.18}$$

eşitliğinin gösterilmesi gerekir.

$$\underline{\varphi_0} = \left(\pi : B \to A, \left\{\varphi_{0_\beta} : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$$
$$\underline{\varphi_1} = \left(\rho : C \to B, \left\{\varphi_{1_\gamma} : Y_{\rho(\gamma)} \to Z_\gamma\right\}_{\gamma \in C}\right) : \underline{Y} \to \underline{Z}$$

morfizmaları için

$$\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0} = \left(\pi \circ \rho : C \to A, \left\{\varphi_{1_\gamma} \circ \varphi_{0_{\rho(\gamma)}} : X_{\pi\rho(\gamma)} \to Z_\gamma\right\}_{\gamma \in C}\right)$$

dir. $\forall\left[\underline{f}\right] \in \pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)$ için

$$\pi_n^s\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right)\left(\left[\underline{f}\right]\right) = \left[\left(\underline{\varphi_1} \circ \underline{\varphi_0}\right) \circ \underline{f}\right] \tag{5.19}$$

dir.

$$\left(\pi_n^s\left(\underline{\varphi_1}\right) \circ \pi_n^s\left(\underline{\varphi_0}\right)\right)\left(\left[\underline{f}\right]\right) = \pi_n^s\left(\underline{\varphi_1}\right)\left(\pi_n^s\left(\underline{\varphi_0}\right)\left(\left[\underline{f}\right]\right)\right) = \pi_n^s\left(\underline{\varphi_1}\right)\left(\left[\underline{\varphi_0} \circ \underline{f}\right]\right) = \left[\underline{\varphi_1} \circ \left(\underline{\varphi_0} \circ \underline{f}\right)\right] \tag{5.20}$$

bulunur. (5.19) ve (5.20) den (5.18) elde edilir.

$$1_{\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)} : \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)$$

morfizması için

$$\pi_n^s\left(1_{\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)}\right) = 1_{\pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)} \tag{5.21}$$

eşitliği kolayca bulunur. (5.18) ve (5.21) ifadeleri π_n^s in bir kovaryant funktor olduğunu gösterir.

Teorem 5.9: $\pi_n^s : Inv(Top_0) \to Group$ funktoru homotopik invarianttır, yani $\underline{f}, \underline{g} : (\underline{X}, x_0) \to (\underline{Y}, y_0)$ morfizmaları spektral homotop ise $\underline{f}_{*_n} = \underline{g}_{*_n} : \pi_n^s(\underline{X}, x_0) \to \pi_n^s(\underline{Y}, y_0)$ dir.

İspat: $\forall \underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, x_0)$ için $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ olsun. Burada $\underline{\varphi} = \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha})\}_{\alpha \in A}\right) : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X}, x_0)$ dır. O zaman

$$\underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta}) = \underline{g}_{*_n}(\underline{\zeta}) \Rightarrow \underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi}]) = \underline{g}_{*_n}([\underline{\varphi}]) \Rightarrow [\underline{f} \circ \underline{\varphi}] = [\underline{g} \circ \underline{\varphi}] \tag{5.22}$$

eşitliğinin gösterilmesi gerekir.

$\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ morfizmaları spektral homotop ise $\forall \beta \in B$ elemanı için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.23}$$

diyagramı homotopik komutatiftir, yani $f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri homotoptur. (5.23) diyagramından yararlanarak

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
I^n \arrow[urr, "\varphi_{\pi(\beta)}"] \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[drr, "\varphi_{\rho(\beta)}"'] & X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] \arrow[u, phantom, "(2)"] \arrow[d, phantom, "(3)"] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & Y_\beta \\
 & & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı elde edilir. Burada (2) ve (3) diyagramları ters spektrlerin morfizması tanımından komutatif olduğundan

$$p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\pi(\beta)} \text{ ve } p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\rho(\beta)} \tag{5.24}$$

eşitlikleri yazılır. (1) diyagramı homotopik komutatif olduğundan ve (5.24) den

$$\begin{aligned} & f_{\beta} \circ \varphi_{\pi(\beta)} = f_{\beta} \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \circ \varphi_{\alpha} \sim g_{\beta} \circ p^{\alpha}_{\rho(\beta)} \circ \varphi_{\alpha} = g_{\beta} \circ \varphi_{\rho(\beta)} \\ & \Rightarrow f_{\beta} \circ \varphi_{\pi(\beta)} \sim g_{\beta} \circ \varphi_{\rho(\beta)} \end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. $\forall \beta \in B$ için (5.25) sağlandığından

$$\underline{f} \circ \underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{g} \circ \underline{\varphi} \Rightarrow [\underline{f} \circ \underline{\varphi}] = [\underline{g} \circ \underline{\varphi}]$$

bulunur. Böylece (5.22) ifadesi elde edilir.

Şimdi homoloji teorinin tanımlanması için $Inv(Top_0{}^2)$ kategorisinin ele alınması gerekir. Bu kategorinin nesneleri

$$(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) = \left(\{X_{\alpha}, X'_{\alpha}, x_{0_{\alpha}}\}, \{p^{\alpha'}_{\alpha} : (X_{\alpha'}, X'_{\alpha'}, x_{0_{\alpha'}}) \to (X_{\alpha}, X'_{\alpha}, x_{0_{\alpha}})\}_{\alpha \prec \alpha'}\right) x_{0_{\alpha}} \in X'_{\alpha} \subset X_{\alpha}$$

morfizmaları ise $\underline{f}(\underline{X'}) \subset \underline{Y'}, \underline{f}(\underline{x_0}) = \underline{y_0}$ koşulunu sağlayacak şekilde ters spektrlerin $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizmasıdır. Nesneleri ve morfizmaları yukarıda tanımlanan kategoriye topolojik uzayların ters spektrlerinin çiftler kategorisi denir.

I^n $n-$boyutlu küp için $I^{n-1} = \{(t_1, t_2, ..., t_n) \in I^n, t_n = 0\} \subset \partial I^n \subset I^n$, $J^{n-1} = \partial I^n / I^{n-1}$ olsun. O zaman $J^{n-1} \cup I^{n-1} \cong \partial I^n$, $J^{n-1} \cap I^{n-1} \cong \partial I^{n-1}$ homeomorfizmaları vardır.

$$C(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}; \underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \tag{5.26}$$

morfizmalar kümesi,

$$\underline{\varphi} : I^n \to \underline{X}, \quad , \quad \underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}} : I^{n-1} \to \underline{X'} \quad , \quad \underline{\varphi}\left(J^{n-1}\right) = \underline{x_0} \quad \left(\underline{\varphi}\big|_{J^{n-1}} : J^{n-1} \to \underline{x_0}\right)$$

şeklinde tanımlanır. $C\left(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}; \underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right)$ morfizmalar kümesinin spektral homotopik sınıflar kümesi,

$$\pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right) = \left[I^n, I^{n-1}, J^{n-1}; \underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right]$$

şeklinde gösterilsin. $n-$boyutlu spektral mutlak homotopik gruptakine benzer şekilde bu kümenin de bir grup olduğu gösterilebilir.

Tanım 5.10: $\pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right)$ grubuna $\left(\underline{X}, \underline{X'}\right)$ çiftinin $\underline{x_0}$ deki $n-$boyutlu spektral göreli homotopik grubu denir.

Teorem 5.11: $\left(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right) \mapsto \pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right)$ karşı gelmesi $Inv\left(Top_0{}^2\right)$ kategorisinden $Group$ kategorisine giden spektral homotopik invariant kovaryant funktordur.

İspat: Teoremin ispatı $n-$boyutlu spektral mutlak homotopik gruptakine benzer şekilde yapılır.

Homoloji teorinin aksiyomlarından kovaryant funktor olma ve homotopya aksiyomu Teorem 5.11 den elde edilmiş olur. Şimdi diğer aksiyomlar incelenecektir.

Teorem 5.12: (Boyut Aksiyomu) $\underline{P}$ tek noktalı uzaylardan oluşan bir ters spektr, yani $\underline{P} = \{*\} = \left(\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{\pi_\alpha^{\alpha'} : P_{\alpha'} \to P_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$ ise $\pi_n^s(\underline{P}, *)$ grubu trivyaldir.

İspat: $\pi_n^s(\underline{P}, *) = \pi_n^s(\underline{P}, \underline{P}) = \left[I^n, \partial I^n; \underline{P}, \underline{P}\right]$ şeklindedir. $\underline{P}$ tek noktalı uzaylardan oluştuğundan dolayı her

$$\underline{\varphi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{P}, \underline{P}) \tag{5.27}$$

morfizması sabittir. Lemma 5.1 den keyfi sabit iki morfizma homotop olduğundan $\pi_n^s(\underline{P}, *)$ grubu trivyaldir.

Homoloji teorinin diğer bir aksiyomu olan sınır aksiyomu verilmeden önce bununla ilgili aşağıdaki tanım verilecektir.

$\partial_n : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \to \pi_{n-1}^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ dönüşümü $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$ ve $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$

$$\underline{\varphi} = \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X_\alpha, X'_\alpha, x_{0_\alpha})\}_{\alpha \in A}\right) : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$$

için

$$\partial_n(\underline{\zeta}) = \partial_n([\underline{\varphi}]) = \left[\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right] \tag{5.28}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.13: $\partial_n : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \to \pi_{n-1}^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ dönüşümüne sınır operatörü denir. $\partial_n(\underline{\zeta}) \in \pi_{n-1}^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ ın elemanıdır. Gerçekten,

$$\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}} = \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha|_{I^{n-1}} : I^{n-1} \to X'_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : I^{n-1} \to \underline{X'} \text{ ve } \underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}(\partial I^{n-1}) = \underline{x_0}$$

olduğundan $\partial_n(\underline{\zeta}) \in \pi_{n-1}^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ elde edilir.

Lemma 5.14: $\partial_n : \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \to \pi_{n-1}^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ sınır operatörü grupların bir homomorfizmasıdır.

İspat: ∂_n iyi tanımlıdır. Gerçekten, $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$ olsun. $\underline{\varphi}, \underline{\varphi'} \in \underline{\zeta}$ için (5.28) den $\partial_n(\underline{\zeta}) = \partial_n([\underline{\varphi}]) = [\underline{\varphi}|_{I^{n-1}}]$ ve $\partial_n(\underline{\zeta}) = \partial_n([\underline{\varphi}']) = [\underline{\varphi}'|_{I^{n-1}}]$ yazılır.

$$\underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi}' \Rightarrow \forall \alpha \in A \text{ için } \varphi_\alpha \sim \varphi'_\alpha \text{ dır}$$

$$\Rightarrow \varphi_\alpha|_{I^{n-1}} \sim \varphi'_\alpha|_{I^{n-1}} \Rightarrow [\varphi_\alpha|_{I^{n-1}}] = [\varphi'_\alpha|_{I^{n-1}}] \Rightarrow \partial_n([\underline{\varphi}]) = \partial_n([\underline{\varphi}'])$$

elde edilir.

∂_n homomorfizmadır. Gerçekten $\underline{\zeta}$ ve $\underline{\eta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0})$ olsun. $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ $, \underline{\psi} \in \underline{\eta}$ için

$$\partial_n(\underline{\zeta} * \underline{\eta}) = \partial_n([\underline{\varphi}] * [\underline{\psi}]) = \partial_n([\underline{\varphi} * \underline{\psi}]) = [(\underline{\varphi} * \underline{\psi})|_{I^{n-1}}] = [\underline{\varphi}|_{I^{n-1}} * \underline{\psi}|_{I^{n-1}}] =$$
$$= [\underline{\varphi}|_{I^{n-1}}] * [\underline{\psi}|_{I^{n-1}}] = \partial_n(\underline{\zeta}) * \partial_n(\underline{\eta})$$

elde edilir.

Teorem 5.15: (Sınır Aksiyomu) $\forall \underline{f} : (\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{Y}', \underline{y_0})$ morfizması için

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^s(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}) \arrow[r, "\underline{f}_{*_n}"] \arrow[d, "(\partial_{\underline{X}})_n"'] & \pi_n^s(\underline{Y}, \underline{Y}', \underline{y_0}) \arrow[d, "(\partial_{\underline{Y}})_n"] \\
\pi_{n-1}^s(\underline{X}', \underline{x_0}) \arrow[r, "(\underline{f}|_{\underline{X}'})_{*_{n-1}}"] & \pi_{n-1}^s(\underline{Y}', \underline{y_0})
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir.

İspat: $\forall \underline{f} = (\pi : B \to A, \{f_\beta : (X_{\pi(\beta)}, X'_{\pi(\beta)}, x_{0_{\pi(\beta)}}) \to (Y_\beta, Y'_\beta, y_{0_\beta})\}_{\beta \in B})$

ters spektrlerin morfizması ve $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ için

$$\left(\left(\partial_{\underline{Y}}\right)_n \circ \underline{f}_{*_n}\right)(\underline{\zeta}) = \left(\partial_{\underline{Y}}\right)_n\left(\underline{f}_{*_n}(\underline{\zeta})\right) = \left(\partial_{\underline{Y}}\right)_n\left(\underline{f}_{*_n}([\underline{\varphi}])\right) = \left(\partial_{\underline{Y}}\right)_n\left([\underline{f} \circ \underline{\varphi}]\right) =$$
$$= \left[\left(\underline{f} \circ \underline{\varphi}\right)\big|_{I^{n-1}}\right] = \left[\underline{f} \circ \left(\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right)\right]$$

$$\left(\left(\underline{f}\big|_{\underline{X}'}\right)_{*_{n-1}} \circ \left(\partial_{\underline{X}}\right)_n\right)(\underline{\zeta}) = \left(\underline{f}\big|_{\underline{X}'}\right)_{*_{n-1}}\left(\left(\partial_{\underline{X}}\right)_n(\underline{\zeta})\right) = \left(\underline{f}\big|_{\underline{X}'}\right)_{*_{n-1}}\left(\left(\partial_{\underline{X}}\right)_n([\underline{\varphi}])\right) =$$
$$= \left(\underline{f}\big|_{\underline{X}'}\right)_{*_{n-1}}\left(\left[\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right]\right) = \left[\underline{f}\big|_{\underline{X}'} \circ \underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right] = \left[\underline{f} \circ \left(\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right)\right]$$

Böylece, $\left(\left(\partial_{\underline{Y}}\right)_n \circ \underline{f}_{*_n}\right)(\underline{\zeta}) = \left(\left(\underline{f}\big|_{\underline{X}'}\right)_{*_{n-1}} \circ \left(\partial_{\underline{X}}\right)_n\right)(\underline{\zeta})$ eşitliği bulunur. Bu ise diyagramın komutatif olduğunu ifade eder.

Lemma 5.16: $\underline{\zeta} \in \pi_n^s\left(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}\right)$, $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ için $\underline{\varphi}(I^n) \subset \underline{X}'$ ise $\underline{\zeta} = 0$ dır.

İspat: $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ için $\underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu, yani $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha \sim c_\alpha$ dönüşümlerinin homotop olduğunu göstermek yeterlidir.

$$G_{\alpha_t}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \varphi_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t + t_n - t \cdot t_n)$$

şeklinde tanımlanan sürekli dönüşüm için

$t = 0$ ise, $G_{\alpha_0}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \varphi_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$

$t = 1$ ise, $G_{\alpha_1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \varphi_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 1) = x_{0_\alpha} = c_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

elde edilir. G_{α_t} dönüşümü φ_α ile c_α dönüşümleri arasındaki homotopyadır, yani $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha \sim c_\alpha$ homotoptur. O halde $\underline{\zeta} = 0$ dır.

$\forall\left(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}\right) \in Inv\left(Top_0{}^2\right)$ nesnesi için gömme morfizmaları

$$\underline{i} = \left(1_A : A \to A, \left\{i_\alpha : \left(X'_\alpha, x_{0_\alpha}\right) \to \left(X_\alpha, x_{0_\alpha}\right)\right\}_{\alpha \in A}\right) : \left(\underline{X}', \underline{x_0}\right) \to \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)$$

$$\underline{j}=\left(1_A : A \to A, \left\{j_\alpha : \left(X_\alpha , x_{0_\alpha}\right) \to \left(X_\alpha , X'_\alpha , x_{0_\alpha}\right)\right\}_{\alpha\in A}\right) : \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \left(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Tamlık aksiyomu ispatlanmadan önce spektral homotopya kavramı ile ilgili bazı incelemeler yapılacaktır.

Lemma 5.17: Topolojik uzayların ters spektrler kategorisindeki spektral homotopya homotopik sınıflarda ters spektrlerin morfizmasına dönüştürülebilir.

İspat: $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right) \to \underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$ spektral homotop morfizmalar olsun. Yönlendirilmiş A kümesindeki "$\succ$" bağıntısına göre A iyi sıralı küme olsun. [20] $\underline{f}, \underline{g}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır ve $f_\beta \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^{\alpha}_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri homotoptur. $\forall \alpha' \succ \alpha$ için $f_\beta \circ p^{\alpha'}_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^{\alpha'}_{\rho(\beta)}$ dönüşümleri de homotoptur. A_1 kümesi,

$$A_1 = \left\{\alpha \in A : \alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta) \quad , \quad f_\beta \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^{\alpha}_{\rho(\beta)}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Açıktır ki $A_1 \subset A$ dır. A iyi sıralı küme olduğundan A_1 kümesinin en küçük elemanı vardır. Bu eleman $\chi(\beta)$ şeklinde gösterilsin. Böylece $\forall \beta \in B$ elemanına karşı $\chi(\beta) \in A$ elemanı karşı gelir. Bu karşı gelme bir izoton dönüşümdür. Gerçekten $\beta' \succ \beta \in B$ olsun. O zaman $\beta \in B$ elemanına karşı $\chi(\beta) \in A$ karşı gelir ve A_1 kümesinin tanımından $\chi(\beta) \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ dir ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta)}_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir.

Benzer şekilde $\beta' \in B$ elemanına karşı $\chi(\beta') \in A$ karşı gelir ve A_1 kümesinin tanımından $\chi(\beta') \succ \pi(\beta'), \rho(\beta')$ dir ve

$$\begin{tikzcd}
& X_{\pi(\beta')} \arrow[dr, "f_{\beta'}"] & \\
X_{\chi(\beta')} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta')}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta')}"'] & & Y_{\beta'} \\
& X_{\rho(\beta')} \arrow[ur, "g_{\beta'}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir.

Eğer $\chi(\beta') \in A_1$ olduğu gösterilirse $\chi(\beta') \succ \chi(\beta)$ elde edilir ve bu χ dönüşümünün izoton dönüşüm olduğunu ifade eder. Bunu göstermek için ise $\chi(\beta') \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ bağıntısının sağlandığını ve

$$\begin{tikzcd}
& X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_{\beta}"] & \\
X_{\chi(\beta')} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta)}"'] & & Y_{\beta} \\
& X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_{\beta}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.29}$$

diyagramının homotopik komutatif olduğunu göstermek gerekir.

π ve ρ izoton dönüşümler olduğundan dolayı $\beta' \succ \beta$ için $\pi(\beta') \succ \pi(\beta)$ ve $\rho(\beta') \succ \rho(\beta)$ sağlanır. $\chi(\beta') \succ \pi(\beta') \succ \pi(\beta)$ ve $\chi(\beta') \succ \rho(\beta') \succ \rho(\beta)$ olduğundan $\chi(\beta') \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanır. Şimdi (5.29) diyagramın homotopik komutatif olduğunu göstermek için

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta')} \arrow[rr, "p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "f_{\beta'}"] & & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \\
X_{\chi(\beta')} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta')}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta')}"'] \arrow[r, phantom, "(3)"] & & Y_{\beta'} \arrow[rr, "q^{\beta'}_\beta"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta')} \arrow[ur, "g_{\beta'}"] \arrow[rr, "p^{\rho(\beta')}_{\rho(\beta)}"'] & & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] \arrow[u, phantom, "(2)"] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı ele alınsın. Bu diyagramda (1) ve (2) diyagramlarının komutatif (3) diyagramının ise homotopik komutatif olması kullanılarak sırasıyla,

$$
f_\beta \circ p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} = q^{\beta'}_\beta \circ f_{\beta'}, g_\beta \circ p^{\rho(\beta')}_{\rho(\beta)} = q^{\beta'}_\beta \circ g_{\beta'}, f_{\beta'} \circ p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta')} \sim g_{\beta'} \circ p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta')}
$$

ifadeleri yazılır. Bu ifadelerden yararlanarak

$$
\begin{aligned}
& f_\beta \circ p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta)} = f_\beta \circ p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \circ p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta')} = q^{\beta'}_\beta \circ f_{\beta'} \circ p^{\chi(\beta')}_{\pi(\beta')} \sim q^{\beta'}_\beta \circ g_{\beta'} \circ p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta')} = \\
& = g_\beta \circ p^{\rho(\beta')}_{\rho(\beta)} \circ p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta')} = g_\beta \circ p^{\chi(\beta')}_{\rho(\beta)}
\end{aligned}
$$

elde edilir, yani (5.29) diyagramı homotopik komutatiftir. O halde $\chi(\beta') \in A_1$ dir ve $\chi(\beta) \in A_1$ en küçük eleman olduğundan $\chi(\beta') \succ \chi(\beta)$ sağlanır. $\chi : B \to A$ izoton dönüşümdür. Böylece $\forall \beta \in B$ için $H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta$ homotopyası ele alınabilir.

$$
\left(\chi : B \to A, \{H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)
$$

ailesi ters spektrlerin genelde morfizması değildir. Çünkü $\beta' \succ \beta \in B$ elemanı için

$$
\begin{tikzcd}
X_{\chi(\beta')} \arrow[r, "H_{\beta',t}"] \arrow[d, "p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}"] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q^{\beta'}_\beta"] \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[r, "H_{\beta,t}"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

diyagramı genelde komutatif değildir.

$\forall \beta \in B$ elemanı için $H_{\beta,t}$ homotopyası ile homotop olan ve

$$\begin{tikzcd} X_{\chi(\beta')} \arrow[r, "G_{\beta',t}"] \arrow[d, "p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}"] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q^{\beta'}_{\beta}"] \\ X_{\chi(\beta)} \arrow[r, "G_{\beta,t}"'] & Y_{\beta} \end{tikzcd}$$

diyagramını komutatif yapan $G_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta$ homotopyası ele alınsın. Bu durumda

$$\left(\chi : B \to A, \{G_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır.

Teorem 5.18: (Tamlık Aksiyomu) Lemma 5.17 nin koşulu altında
her $\left(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}\right) \in Inv\left(Top_0{}^2\right)$ nesnesi için grupların

$$\ldots \leftarrow \pi^s_{n-1}\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \xleftarrow{\underline{i}_{*_{n-1}}} \pi^s_{n-1}\left(\underline{X}', \underline{x_0}\right) \xleftarrow{\partial_n} \pi^s_n\left(\underline{X}, \underline{X}', \underline{x_0}\right) \xleftarrow{\underline{j}_{*_n}} \pi^s_n\left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \xleftarrow{\underline{i}_{*_n}} \pi^s_n\left(\underline{X}', \underline{x_0}\right) \leftarrow \ldots$$

ters dizisi tamdır.

İspat: Dizinin tam olduğunun gösterilmesi için

$$\operatorname{Im} \underline{i}_{*_n} = Ker\, \underline{j}_{*_n} \tag{5.30}$$

$$\operatorname{Im} \underline{j}_{*_n} = Ker \partial_n \tag{5.31}$$

$$\operatorname{Im}\partial_n = Ker\underline{i}_{*_{n-1}} \tag{5.32}$$

eşitliklerinin gösterilmesi gerekir. Önce

$$\operatorname{Im}\underline{i}_{*_n} \subset Ker\underline{j}_{*_n} \tag{5.33}$$

kapsaması gösterilecektir. Bunun için ise $\underline{j}_{*n} \circ \underline{i}_{*n} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X'}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta}$ için

$$(\underline{j}_{*n} \circ \underline{i}_{*n})(\underline{\zeta}) = \underline{j}_{*n}(\underline{i}_{*n}(\underline{\zeta})) = \underline{j}_{*n}(\underline{i}_{*n}([\underline{\varphi}])) = \underline{j}_{*n}([\underline{i} \circ \underline{\varphi}]) = [\underline{j} \circ \underline{i} \circ \underline{\varphi}]$$

dir. Burada

$$\underline{j} \circ \underline{i} \circ \underline{\varphi} = \left(c : A \to \{*\}, \{j_\alpha \circ i_\alpha \circ \varphi_\alpha : I^n \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$$

$$t \in I^n \text{ için } (j_\alpha \circ i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(t) = (j_\alpha \circ i_\alpha \circ (\varphi_\alpha(t))) = j_\alpha \circ i_\alpha(x'_\alpha) = x'_\alpha \in X'_\alpha$$

dır. $\forall \alpha \in A$ için $(j_\alpha \circ i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(I^n) \subset X'_\alpha$ olduğundan Lemma 5.16 dan $[\underline{j} \circ \underline{i} \circ \underline{\varphi}] = 0$ elde edilir. O halde, $\operatorname{Im}\underline{i}_{*_n} \subset Ker\underline{j}_{*_n}$ kapsaması sağlanır.

Şimdi

$$Ker\underline{j}_{*n} \subset \operatorname{Im}\underline{i}_{*n} \tag{5.34}$$

kapsaması gösterilecektir. $\forall \underline{\zeta} \in Ker\underline{j}_{*n} \subset \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} \in \underline{\zeta}$ için

$$\underline{j}_{*n}(\underline{\zeta}) = \underline{j}_{*n}([\underline{\varphi}]) = [\underline{j} \circ \underline{\varphi}] = 0 \Rightarrow \underline{j} \circ \underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{c}$$

morfizmaları spektral homotoptur.

$$\underline{j} \circ \underline{\varphi} = \left(c : A \to \{*\}, \left\{j_\alpha \circ \varphi_\alpha : \left(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}\right) \to \left(X_\alpha, X'_\alpha, x_{0\alpha}\right)\right\}_{\alpha \in A}\right)$$

morfizmasında $\forall \alpha \in A$ için $j_\alpha \circ \varphi_\alpha \sim c_\alpha$ dönüşümleri homotoptur. Bu dönüşümler arasındaki homotopya

$$\varphi_{\alpha,t} : \left(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}\right) \to \left(X_\alpha, X'_\alpha, x_{0\alpha}\right)$$

$\forall x \in I^n$ için $\varphi_{\alpha,0}(x) = (j_\alpha \circ \varphi_\alpha)(x) = \varphi_\alpha(x)$, $\varphi_{\alpha,1}(x) = c_\alpha(x) = x_{0\alpha}$

koşullarını sağlar. O zaman $\varphi_{\alpha,t}$ homotopyasından yararlanarak

$$g_{\alpha,t}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n) = \begin{cases} \varphi_{\alpha,2t_n}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0), & 0 \le 2t_n \le t \\ \varphi_{\alpha,t}\left(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \dfrac{2t_n - t}{2 - t}\right), & t \le 2t_n \le 2 \end{cases} \tag{5.35}$$

formülü ile $g_{\alpha,t} : I^n \to X_\alpha$ homotopyası tanımlanır. $g_{\alpha,t}$ iyi tanımlıdır. (5.35) de

$t = 0$ için $g_{\alpha,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \varphi_{\alpha,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \varphi_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

$t = 1$ için $g_{\alpha,1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n) = \begin{cases} \varphi_{\alpha,2t_n}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0), & 0 \le 2t_n \le 1 \\ \varphi_{\alpha,1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1), & 1 \le 2t_n \le 2 \end{cases}$

olduğundan $[\varphi_\alpha] = [g_{\alpha,0}] = [g_{\alpha,1}]$ dir ve $g_{\alpha,1}(I^n) \subset X'_\alpha$, $g_{\alpha,t}(\partial I^n) = x_{0\alpha}$ elde edilir. O zaman $g_{\alpha,1} : (I^n, \partial I^n) \to (X'_\alpha, x_{0_\alpha})$ şeklindedir ve

$$[\underline{g_1}] = \left(c : A \to \{*\}, \left\{[g_{\alpha,1}] : \left(I^n, \partial I^n\right) \to \left(X'_\alpha, x_{0\alpha}\right)\right\}_{\alpha \in A}\right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. Bunun içinde $\forall \alpha' \succ \alpha$ için

$$\begin{tikzcd}
 & & (X'_\alpha, x_{0\alpha}) \\
(I^n, \partial I^n) \arrow[urr, "\lfloor g_{\alpha,1} \rfloor"] \arrow[drr, "\lfloor g_{\alpha',1} \rfloor"'] & & \\
 & & (X'_{\alpha'}, x_{0\alpha'}) \arrow[uu, "{\left[p_\alpha^{\alpha'}\big|_{X'_{\alpha'}} \right]}"']
\end{tikzcd} \tag{5.36}$$

diyagramının homotopik komutatif olduğunu göstermek yeterlidir.
$\lfloor g_{\alpha,1} \rfloor = [\varphi_\alpha]$ ve $\lfloor g_{\alpha',1} \rfloor = [\varphi_{\alpha'}]$ olduğundan dolayı (5.36) diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & & (X'_\alpha, x_{0\alpha}) \\
(I^n, \partial I^n) \arrow[urr, "{[\varphi_\alpha]}"] \arrow[drr, "{[\varphi_{\alpha'}]}"'] & & \\
 & & (X'_{\alpha'}, x_{0\alpha'}) \arrow[uu, "{\left[p_\alpha^{\alpha'}\big|_{X'_{\alpha'}} \right]}"']
\end{tikzcd} \tag{5.37}$$

diyagramına dönüşür. O halde $\{\varphi_\alpha\}$ ailesi ters spektrlerin morfizması olduğundan

$$\left[p_\alpha^{\alpha'}\big|_{X'_{\alpha'}} \right] \circ [\varphi_{\alpha'}] = \left[p_\alpha^{\alpha'}\big|_{X'_{\alpha'}} \circ \varphi_{\alpha'} \right] = [\varphi_\alpha]$$

yazılır, yani (5.37) diyagramı komutatiftir. Buradan ise (5.36) diyagramının komutatifliği elde edilir. O halde $\lfloor \underline{g_1} \rfloor = \underline{\eta} \in \pi_n^s(\underline{X'}, \underline{x_0})$ dır.

$$\underline{i}_{*n}(\underline{\eta}) = \underline{i}_{*n}(\lfloor \underline{g_1} \rfloor) = \lfloor \underline{i} \circ \underline{g_1} \rfloor = \lfloor \underline{g_1} \rfloor = \lfloor \underline{g_0} \rfloor = \lfloor \underline{\varphi} \rfloor = \underline{\zeta} \Rightarrow \underline{\zeta} \in \operatorname{Im} \underline{i}_{*n} \Rightarrow Ker\, \underline{j}_{*n} \subset \dot{I}m\, \underline{i}_{*n}$$

bulunur. (5.33) ve (5.34) ifadelerinden (5.30) eşitliği elde edilir.

Şimdi (5.31) eşitliğini göstermek için önce

$$\operatorname{Im} \underline{j}_{*n} \subset Ker \partial_n \tag{5.38}$$

kapsaması gösterilecektir. Bunun için ise $\partial_n \circ \underline{j}_{*n} = 0$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Her $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} : (I^n, \partial I^n) \to (\underline{X}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta}$ için

$$\left(\partial_n \circ \underline{j}_{*n}\right)(\underline{\zeta}) = \partial_n\left(\underline{j}_{*n}(\underline{\zeta})\right) = \partial_n\left(\underline{j}_{*n}([\underline{\varphi}])\right) = \partial_n\left([\underline{j} \circ \underline{\varphi}]\right) = \left[\underline{j} \circ \underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right] = [\underline{x_0}] = 0$$

dır, çünkü $\underline{\varphi}(\partial I^n) = (\underline{x_0})$, $I^{n-1} \subset \partial I^n$, $\underline{\varphi}(I^{n-1}) = \underline{x_0}$ ve $\underline{j}(\underline{x_0}) = \underline{x_0}$ dir.

Buradan $\operatorname{Im} \underline{j}_{*n} \subset Ker\partial_n$ bulunur.

Şimdi de

$$Ker\partial_n \subset \dot{I}m\underline{j}_{*n} \tag{5.39}$$

kapsaması gösterilecektir.

$\forall \underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta}$ için

$$\partial_n(\underline{\zeta}) = \partial_n([\underline{\varphi}]) = \left[\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}}\right] = 0$$

dır. Burada, $\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}} : (I^{n-1}, J^{n-1}) \to (\underline{X'}, \underline{x_0})$ şeklindedir. O zaman $\underline{\varphi}\big|_{I^{n-1}} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmaları spektral homotoptur , yani $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha\big|_{I^{n-1}} \sim c_\alpha$ dönüşümleri homotoptur. Bu dönüşümler arasındaki $g_{\alpha,t} : I^{n-1} \to X'_\alpha$ homotopyası için

$$g_{\alpha,0}(x) = \left(\varphi_\alpha\big|_{I^{n-1}}\right)(x),\ g_{\alpha,1}(x) = c_\alpha(x) = x_{0_\alpha} \quad \forall x \in I^{n-1}$$

$$g_{\alpha,t}(\partial I^{n-1}) = x_{0_\alpha} \quad \forall t \in I$$

koşulları sağlanır. $g_{\alpha,t}$ homotopyasından yararlanarak ∂I^n de

$$h_{\alpha,t}(s)=\begin{cases} g_{\alpha,t}(s), & s\in I^{n-1}, t\in I \\ x_{0_\alpha}, & s\in J^{n-1}, t\in I \end{cases} \tag{5.40}$$

formülü ile $h_{\alpha,t}:\partial I^n \to X'_\alpha$ homotopyası tanımlanır. $\partial I^n = I^{n-1}\bigcup J^{n-1}$ olduğundan $h_{\alpha,t}: I^{n-1}\bigcup J^{n-1} \to X'_\alpha$ şeklindedir. $h_{\alpha,t}$ dönüşümü iyi tanımlıdır. (5.40) da

$$t=0 \text{ için } \left(h_{\alpha,0}\big|_{I^{n-1}}\right)(s)=g_{\alpha,0}(s)=\left(\varphi_\alpha\big|_{I^{n-1}}\right)(s) \tag{5.41}$$

$$\left(h_{\alpha,0}\big|_{J^{n-1}}\right)(s)=x_{0_\alpha}=c_\alpha(s)=\left(\varphi_\alpha\big|_{J^{n-1}}\right)(s) \tag{5.42}$$

elde edilir. (5.41) ve (5.42) den $h_{\alpha,0}(s)=\left(\varphi_\alpha\big|_{\partial I^n}\right)(s)\Rightarrow h_{\alpha,0}=\varphi_\alpha\big|_{\partial I^n}$ bulunur.

$$t=1 \text{ için } \left(h_{\alpha,1}\big|_{I^{n-1}}\right)(s)=g_{\alpha,1}(s)=c_\alpha(s)=x_{0_\alpha} \tag{5.43}$$

$$\left(h_{\alpha,1}\big|_{J^{n-1}}\right)(s)=x_{0_\alpha} \tag{5.44}$$

elde edilir. (5.43) ve (5.44) den $h_{\alpha,1}(s)=h_{\alpha,1}(\partial I^n)=x_{0_\alpha}$ bulunur. Şimdi,

$$\begin{tikzcd}
\partial I^n\times\{0\} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_\alpha|_{\partial I^n}"'] & & I^n\times\{0\} \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \\
\cap & X_\alpha \quad (1) & \cap \\
\partial I^n\times I \arrow[rr] \arrow[ur, "h_{\alpha,t}"] & (2) & I^n\times I \arrow[ul, dotted, "\varphi_{\alpha,t}"']
\end{tikzcd}$$

diyagramında $(I^n,\partial I^n)$ çifti homotopyanın genişletilme özelliğine sahip olduğundan (1) ve (2) üçgenlerini komutatif yapan $\varphi_{\alpha,t}: I^n \to X_\alpha$ homotopyası vardır, yani

$$\varphi_{\alpha,0}=\varphi_\alpha \text{ ve } \varphi_{\alpha,t}\big|_{(\partial I^n\times I)}=h_{\alpha,t}$$

sağlanır. $\varphi_{\alpha,1}(\partial I^n) = h_{\alpha,1}(\partial I^n) = x_{0_\alpha}$ olduğundan

$$\varphi_{\alpha,1} : (I^n, \partial I^n) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha})$$

olur. Burada $[\varphi_\alpha] = \lfloor \varphi_{\alpha,0} \rfloor = \lfloor \varphi_{\alpha,1} \rfloor$ dir. O zaman

$$\lfloor \underline{\varphi_1} \rfloor = \left(c : A \to \{*\}, \left\{ [\varphi_{\alpha,1}] : (I^n, \partial I^n) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha}) \right\}_{\in A} \right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. Bunun içinde $\forall \alpha' \succ \alpha$ için

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & (X_\alpha, x_{0\alpha}) \\
(I^n, \partial I^n) \arrow[ur, "\lfloor \varphi_{\alpha,1} \rfloor"] \arrow[dr, "\lfloor \varphi_{\alpha',1} \rfloor"'] & \\
 & (X_{\alpha'}, x_{0\alpha'}) \arrow[uu, "{[p_\alpha^{\alpha'}]}"']
\end{tikzcd} \tag{5.45}$$

diyagramının komutatif olduğunu göstermek yeterlidir.

$[\varphi_\alpha] = \lfloor \varphi_{\alpha,1} \rfloor$ ve $[\varphi_{\alpha'}] = \lfloor \varphi_{\alpha',1} \rfloor$

olduğundan (5.45) diyagramı

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & (X_\alpha, x_{0\alpha}) \\
(I^n, \partial I^n) \arrow[ur, "{[\varphi_\alpha]}"] \arrow[dr, "{[\varphi_{\alpha'}]}"'] & \\
 & (X_{\alpha'}, x_{0\alpha'}) \arrow[uu, "{[p_\alpha^{\alpha'}]}"']
\end{tikzcd}$$

diyagramına dönüşür. $\{\varphi_\alpha\}$ ailesi ters spektrlerin morfizması olduğundan (5.45) diyagramı komutatiftir. O halde $\lfloor \underline{\varphi_1} \rfloor = \underline{\eta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$ dir. Buradan

$$\underline{j}_{*n}(\underline{\eta}) = \underline{j}_{*n}(\lfloor \underline{\varphi_1} \rfloor) = \lfloor \underline{j} \circ \underline{\varphi_1} \rfloor = \lfloor \underline{\varphi_1} \rfloor = \lfloor \underline{\varphi} \rfloor = \underline{\zeta} \Rightarrow \underline{\zeta} \in \operatorname{Im} \underline{j}_{*n} \Rightarrow Ker\partial_n \subset \operatorname{Im} \underline{j}_{*n}$$

bulunur. O halde (5.38) ve (5.39) ifadelerinden (5.31) eşitliği elde edilmiş olur.

Son olarak (5.32) eşitliğini göstermek için önce

$$\operatorname{Im} \partial_n \subset Ker \underline{i}_{*n-1} \tag{5.46}$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için ise $\underline{i}_{*n-1} \circ \partial_n = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Her $\underline{\zeta} \in \pi_n^s(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0})$, $\underline{\varphi} : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (\underline{X}, \underline{X'}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta}$ için

$$(\underline{i}_{*n-1} \circ \partial_n)(\underline{\zeta}) = \underline{i}_{*n-1}(\partial_n(\underline{\zeta})) = \underline{i}_{*n-1}(\partial_n(\lfloor \underline{\varphi} \rfloor)) = \underline{i}_{*n-1}(\lfloor \underline{\varphi}|_{I^{n-1}} \rfloor) = \lfloor \underline{i} \circ \underline{\varphi}|_{I^{n-1}} \rfloor$$

dir. Burada

$$\underline{i} \circ \underline{\varphi}|_{I^{n-1}} = \underline{g}$$
$$\underline{g} = \left(c : A \to \{*\}, \{g_\alpha : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (X_\alpha, x_{0_\alpha})\}_{\alpha \in A}\right) : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (\underline{X}, \underline{x_0})$$

olsun. $\lfloor \underline{i} \circ \underline{\varphi}|_{I^{n-1}} \rfloor = \lfloor \underline{g} \rfloor = 0$ olduğunu göstermek için $\underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmalarının spektral homotop olduğunu, yani $\forall \alpha \in A$ için $g_\alpha \sim c_\alpha$ dönüşümlerinin homotop olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$G_{\alpha,t} : I^{n-1} \to X_\alpha$$
$$G_{\alpha,t}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \varphi_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t)$$

$$G_{\alpha,0}(t_1,t_2,...,t_{n-1}) = \varphi_\alpha(t_1,t_2,...,t_{n-1},0) = (\varphi_\alpha|_{I^{n-1}})(t_1,t_2,...,t_{n-1}) = (i_\alpha \circ \varphi_\alpha|_{I^{n-1}})(t_1,t_2,...,t_{n-1})$$
$$G_{\alpha,1}(t_1,t_2,...,t_{n-1}) = \varphi_\alpha(t_1,t_2,...,t_{n-1},1) = \varphi_\alpha(J^{n-1}) = x_{0\alpha} = c_\alpha(x_{0_\alpha})$$

dır. O halde $G_{\alpha,t}$, g_α ile c_α dönüşümleri arasındaki homotopyadır. Buradan $\left[\underline{i} \circ \underline{\varphi}|_{I^{n-1}}\right] = 0$ olduğu elde edilir. O halde

$$\operatorname{Im}\partial_n \subset Ker\underline{i}_{*n-1}$$

bulunur.

Şimdi;

$$Ker\underline{i}_{*n-1} \subset \operatorname{Im}\partial_n \tag{5.47}$$

olduğu gösterilecektir. $\forall \underline{\zeta} \in Ker\underline{i}_{*n-1} \subset \pi^s_{n-1}(\underline{X'}, \underline{x_0})$,

$$\underline{\varphi} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (\underline{X'}, \underline{x_0}) \in \underline{\zeta} \quad için\ \underline{i}_{*n-1}(\underline{\zeta}) = \underline{i}_{*n-1}([\underline{\varphi}]) = [\underline{i} \circ \underline{\varphi}] = [\underline{\varphi}] = 0 \Rightarrow \underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{c}$$

morfizmaları spektral homotoptur. O halde $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha \sim c_\alpha$ dönüşümleri homotoptur. Bu dönüşümler arasındaki homotopya

$$\varphi_{\alpha,0}(x) = \varphi_\alpha(x),\ \varphi_{\alpha,1}(x) = c_\alpha(x) = x_{0_\alpha},\ \varphi_{\alpha,t}(\partial I^{n-1}) = x_{0_\alpha} \quad (x \in I^{n-1})$$

koşullarını sağlayan

$$\varphi_{\alpha,t} : I^{n-1} \to X'_\alpha \subset X_\alpha$$

şeklindeki göreli homotopyadır. $\{\varphi_{\alpha,t}\}_{\alpha\in A}$ homotopyası genelde ters spektrlerin morfizması değildir. Teoremin koşuluna göre $\{[\varphi_{\alpha,t}]\}_{\alpha\in A}$ ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. O zaman $\varphi_{\alpha,t}$ homotopyasından yararlanarak

$$g_\alpha(t_1,t_2,\dots,t_n)=\varphi_{\alpha,t_n}(t_1,t_2,\dots,t_{n-1})$$

formülü ile $g_\alpha : I^n \to X_\alpha$ dönüşümü tanımlanır. Açıktır ki

$$g_\alpha : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X_\alpha, X'_\alpha, x_{0_\alpha})$$

biçimindedir. O zaman

$$\lfloor \underline{g} \rfloor = \{[g_\alpha]\}_{\alpha\in A} : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to \{(X_\alpha, X'_\alpha, x_{0\alpha})\}_{\alpha\in A}$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. Buradan

$$\partial_n([\underline{g}]) = \left[\underline{g}|_{I^{n-1}}\right] = \left[\{\varphi_{\alpha,0}(t_1,t_2,\dots,t_{n-1})\}\right] = [\underline{\varphi}] = \underline{\zeta} \Rightarrow \underline{\zeta} \in \operatorname{Im}\partial_n \Rightarrow Ker\underline{i}_{*n-1} \subset \operatorname{Im}\partial_n$$

elde edilir. O halde (5.46) ve (5.47) ifadelerinden (5.32) eşitliği elde edilir. Böylece dizinin tamlığı ispatlanmış olur.

BÖLÜM 6

6. TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS SPEKTRLER KATEGORİSİNDE HOMOTOPİK KÜMELER

Bölüm 4 de topolojik uzayların ters spektrler kategorisinde spektral homotopya bağıntısının denklik bağıntısı olduğu ispatlandı. Bu nedenle her $\underline{X},\underline{Y} \in Inv(Top)$ ters spektrleri için

$$[\underline{X},\underline{Y}] = {Mor(\underline{X},\underline{Y})}\big/\overset{s}{\sim}$$

ters spektrlerin morfizmalar kümesinin bu denklik bağıntısına göre bölüm kümesi ele alınabilir. Açıktır ki, $(\underline{X},\underline{Y}) \mapsto [\underline{X},\underline{Y}]$ karşı gelmesi $Inv(Top) \times Inv(Top)$ kategorisinden Ens kümeler kategorisine giden iki değişkenli funktordur. Bu funktor birinci değişkene göre kontravaryant, ikinci değişkene göre ise kovaryant funktordur. Bu bölümde $Inv(Top_0)$ belirli noktalı topolojik uzaylar kategorisinde tanımlı C, S, Ω funktorlarının homotopik özellikleri araştırılır.

Lemma 6.1: $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların dönüşümleri olsun. Eğer $f \sim g$ dönüşümleri homotop ise

$$Cf, Cg : CX \to CY$$

dönüşümleri de homotoptur.

İspat: $f, g : X \to Y$ homotop dönüşümler ise

$$F(x,0)=f(x),\quad F(x,1)=g(x),\quad F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)=y_0$$

koşullarını sağlayan $F: X\times I \to Y$ homotopyası vardır. Cf, Cg dönüşümleri

$$\begin{array}{ll} Cf: CX \to CY & Cf([x,t])=[f(x),t] \\ Cg: CX \to CY & Cg([x,t])=[g(x),t] \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. (CX, X) çifti homotopyanın genişletilme özelliğine sahip olduğu için

$$\begin{tikzcd}
X\times\{0\} \arrow[rr, "i\times 1_{\{0\}}"] \arrow[dd] & & CX\times\{0\} \arrow[dl, "Cf"'] \arrow[dd] \\
& CY \arrow[r, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & \\
X\times I \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "i\times 1_I"'] & & CX\times I \arrow[ul, "G"']
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

diyagramını komutatif yapan $G: CX\times I \to CY$ homotopyası vardır. (1) diyagramının komutatifliğinden

$$G([x,t],0)=Cf([x,t])$$

(2) diyagramının komutatifliğinden,

$$F(x,t)=(G\circ(i\times 1_I))(x,t)=G(i(x),t)=G([x,0],t)$$

yazılır. (CX, X) çifti homotopyanın genişletilme özelliğine sahip olduğundan X uzayında tanımlı her dönüşümün CX uzayına genişletilmesi yalnız bu dönüşümün homotopik sınıfına bağlıdır.

G homotopyasında $t=1$ için $G(-,1): CX\times\{1\} \to CY$ şeklindeki $G(-,1)$ dönüşümü

$g:X\to Y$ dönüşümünün bir genişletilmesidir. $Cg:CX\to CY$ dönüşümünün kendiside g dönüşümünün bir genişletilmesi olduğundan $G(-,1)\sim Cg$ homotoptur. O halde $G([x,t],0)=Cf([x,t])$ eşitliğinden G; Cf ile Cg arasında bir homotopyadır.

Lemma 6.2: $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların dönüşümleri olsun. Eğer $f\sim g$ dönüşümleri homotop ise

$$Sf,Sg:SX\to SY$$

dönüşümleri de homotoptur.

İspat: X topolojik uzayı üzerinde SX üst kurumu aynı X tabanlı iki koninin birleşimi olarak yazılabilir. Bu koniler C_1X ve C_2X ile gösterilsin. Lemma 4.1 den $f\sim g:X\to Y$ ise $C_1f,C_1g:C_1X\to C_1Y$ dönüşümleri homotoptur. Benzer şekilde, $C_2f,C_2g:C_2X\to C_2Y$ dönüşümleri de homotoptur. O halde

$$Sf,Sg:SX=C_1X\cup C_2X\to SY=C_1Y\cup C_2Y$$

dönüşümleri için

$$Sf|_{C_1X}=C_1f\,,\ Sf|_{C_2X}=C_2f\,,\ Sg|_{C_1X}=C_1g\,,\ Sg|_{C_2X}=C_2g\,,\ Sf|_X=f\,,\ Sg|_X=g$$

sağlanır. C_if ve C_ig dönüşümleri arasındaki homotopya $G_i:C_iX\times I\to C_iY$ $(i=1,2)$ olsun. Açıktır ki $G_1|_X=G_2|_X$ dır, çünkü G_1 ve G_2 dönüşümlerinin X uzayına daralması olan $G_1|_X,G_2|_X$ dönüşümleri f ile g arasında homotopyadır. O halde $G:SX\times I\to SY$ homotopyası

$$G([x,t],t')=\begin{cases}G_1([x,t],t'), & [x,t]\in C_1X\\ G_2([x,t],t'), & [x,t]\in C_2X\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$G([x,t],0)=\begin{cases} G_1([x,t],0), & [x,t]\in C_1X \\ G_2([x,t],0), & [x,t]\in C_2X \end{cases}=\begin{cases} C_1f([x,t]), & [x,t]\in C_1X \\ C_2f([x,t]), & [x,t]\in C_2X \end{cases}=Sf([x,t])$$

bulunur. Benzer şekilde

$$G([x,t],1)=\begin{cases} G_1([x,t],1), & [x,t]\in C_1X \\ G_2([x,t],1), & [x,t]\in C_2X \end{cases}=Sg([x,t])$$

bulunur. O halde G; Sf ile Sg arasındaki homotopyadır.

Lemma 6.3: $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ belirli noktalı topolojik uzayların dönüşümleri olsun. Eğer $f\sim g$ dönüşümleri homotop ise

$$\Omega f\sim\Omega g:\Omega X\to\Omega Y$$

dönüşümleri de homotoptur.

İspat: $f,g:X\to Y$ homotop dönüşümler ise

$$F(x,0)=f(x),F(x,1)=g(x) \text{ ve } F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)=y_0$$

sağlanacak şekilde $F:X\times I\to Y$ homotopyası vardır.

$$G:\Omega X\times I\to\Omega Y$$

dönüşümü, $\forall\varphi\in\Omega X$, $t,t'\in I$ için $G(\varphi,t)(t')=F(\varphi(t'),t)$ şeklinde tanımlansın. O zaman G için

$$\begin{aligned} G(\varphi,0)(t') &= F(\varphi(t'),0)=(f\circ\varphi)(t')=(\Omega f)(\varphi)(t') \\ G(\varphi,1)(t') &= F(\varphi(t'),1)=(g\circ\varphi)(t')=(\Omega g)(\varphi)(t') \end{aligned}$$

sağlanır, yani

$$G(\varphi,0)=(\Omega f)(\varphi),\ G(\varphi,1)=(\Omega g)(\varphi)$$

dir. Diğer yandan $c: I \to X \quad c(t)=x_0 \quad \forall t \in I$ sabit dönüşümü ΩX in belirli noktası olduğundan

$$G(c,t)(t')=F(c(t'),t)=F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)=y_0=(\Omega f)(c)=(\Omega g)(c)$$

sağlanır. O halde G; Ωf ile Ωg arasındaki göreli homotopyadır, yani $\Omega f \sim \Omega g \; rel\{c\}$ dir.

Teorem 6.4: $\underline{f}, \underline{g} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin morfizmaları spektral homotop ise

$$\begin{aligned}
&C\underline{f}, C\underline{g} : C\underline{X} \to C\underline{Y}\\
&S\underline{f}, S\underline{g} : S\underline{X} \to S\underline{Y}\\
&\Omega\underline{f}, \Omega\underline{g} : \Omega\underline{X} \to \Omega\underline{Y}
\end{aligned}$$

morfizmaları da spektral homotoptur.

İspat: $\underline{f}=\left(\pi : B \to A, \{f_\beta\}_{\beta\in B}\right) \overset{s}{\sim} \underline{g}=\left(\rho : B \to A, \{g_\beta\}_{\beta\in B}\right)$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

diyagramı homotopik komutatiftir. Eğer

$$
\begin{tikzcd}
 & CX_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "Cf_\beta"] & \\
CX_\alpha \arrow[ur, "Cp^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "Cp^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & CY_\beta \\
 & CX_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "Cg_\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramının homotopik komutatif olduğu gösterilirse $C\underline{f}\overset{s}{\sim}C\underline{g}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu elde edilir. Şimdi (6.2) diyagramından

$$f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)} \quad rel\{x_{0_\alpha}\}$$

dır. Lemma 6.1 den

$$C(f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}) \sim C(g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)})$$

dönüşümleri homotoptur. C, kovaryant funktor olduğundan

$$Cf_\beta \circ Cp^\alpha_{\pi(\beta)} \sim Cg_\beta \circ Cp^\alpha_{\rho(\beta)}$$

bulunur. Son ifade diyagramın homotopik komutatif olduğunu gösterir. O halde $C\underline{f}\overset{s}{\sim}C\underline{g}$ morfizmaları spektral homotoptur.

Benzer şekilde; S ve Ω funktorlarının kovaryant funktor olmasından ve Lemma 6.2 ile Lemma 6.3 den yararlanarak

$$S\underline{f}\overset{s}{\sim}S\underline{g} \quad ,\Omega\underline{f}\overset{s}{\sim}\Omega\underline{g}$$

morfizmalarının spektral homotop olduğu gösterilir.

Top_0 kategorisinde

$$[S-,-],[-,\Omega-]:Top_0\times Top_0\to Ens$$

funktorları doğal denktirler.

Teorem 6.5: $Inv(Top_0)$ kategorisinde spektral homotopya bağıntısı altında

$$[S-,-],[-,\Omega-]:Inv(Top_0)\times Inv(Top_0)\to Ens$$

funktorları doğal denktirler.

İspat: Teoremi ispatlamak için önce $\forall(\underline{X},\underline{x_0}),(\underline{Y},\underline{y_0})\in Inv(Top_0)$ için $[S\underline{X},\underline{Y}]$ ve $[\underline{X},\Omega\underline{Y}]$ kümeleri arasında birebir ve örten dönüşüm tanımlamak gerekir.

$$\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}:[S\underline{X},\underline{Y}]\to[\underline{X},\Omega\underline{Y}]$$

dönüşümü; $\forall[\underline{f}]\in[S\underline{X},\underline{Y}]$, $\underline{f}=\left(\pi:B\to A,\{f_\beta:SX_{\pi(\beta)}\to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$ için

$$\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}([\underline{f}])=\left[\hat{\underline{f}}\right]:\underline{X}\to\Omega\underline{Y}$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$\hat{\underline{f}}=\left(\pi:B\to A,\left\{\hat{f}_\beta:X_{\pi(\beta)}\to\Omega Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right)\quad \hat{f}_\beta(x)(t)=f_\beta([x,t]),\ \ \forall x\in X_{\pi(\beta)},t\in I$$

dır. $\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}$ iyi tanımlıdır. Gerçekten,

$$\underline{f_1}\in[\underline{f}]\quad,\quad\underline{f_1}=\left(\rho:B\to A,\{f_{1\beta}:SX_{\rho(\beta)}\to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$$

için $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f_1}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ olacak şekilde $\alpha \in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & SX_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
SX_\alpha \arrow[ur, "Sp^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "Sp^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & SX_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "f_{1\beta}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

diyagramı homotopik komutatiftir.

$\underline{f}$ ve $\underline{f_1}$ morfizmalarına karşı gelen $\hat{\underline{f}}, \hat{\underline{f_1}}$ morfizmaları için

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "\hat{f}_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & \Omega Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "\hat{f}_{1\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{f}_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}\right)(x)(t) = \hat{f}_\beta\left(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x)\right)(t) = f_\beta\left(\left[p^\alpha_{\pi(\beta)}(x), t\right]\right) = \\
&= f_\beta\left(p^\alpha_{\pi(\beta)} \wedge 1_I\right)[x,t] = f_\beta \circ Sp^\alpha_{\pi(\beta)}[x,t]
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{f}_{1\beta} \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}\right)(x)(t) = \hat{f}_{1\beta}\left(p^\alpha_{\rho(\beta)}(x)\right)(t) = f_{1\beta}\left(\left[p^\alpha_{\rho(\beta)}(x), t\right]\right) = \\
&= f_{1\beta}\left(p^\alpha_{\rho(\beta)} \wedge 1_I\right)[x,t] = f_{1\beta} \circ Sp^\alpha_{\rho(\beta)}[x,t]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

dir. (6.3) diyagramı homotopik komutatif ve (6.4) ve (6.5) eşitliklerinde sağ taraftaki dönüşümlerin homotopik sınıfları eşit olduğu için sol taraftaki dönüşümlerin homotopik sınıfları eşit olur. O halde

$$\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}([f]) = [\hat{f}] = [\hat{f}_1] = \varphi_{\underline{X},\underline{Y}}([f_1])$$

dır, yani $\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

$$\psi_{\underline{X},\underline{Y}} : [\underline{X}, \Omega\underline{Y}] \to [S\underline{X}, \underline{Y}]$$

dönüşümü; $\forall [\underline{g}] \in [\underline{X}, \Omega\underline{Y}]$, $\underline{g} = \left(\pi : B \to A, \{g_\beta : X_{\pi(\beta)} \to \Omega Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$ için

$$\psi_{\underline{X},\underline{Y}}([\underline{g}]) = \left[\check{\underline{g}}\right] : S\underline{X} \to \underline{Y}$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$\check{\underline{g}} = \left(\pi : B \to A, \left\{\check{g}_\beta : SX_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) \quad \check{g}_\beta([x,t]) = g_\beta(x)(t), \; \forall [x,t] \in SX_{\pi(\beta)}$$

dır. $\psi_{\underline{X},\underline{Y}}$ iyi tanımlıdır. Gerçekten;

$$\underline{g_1} \in [\underline{g}], \underline{g_1} = \left(\rho : B \to A, \{g_{1\beta} : X_{\rho(\beta)} \to \Omega Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

için $\underline{g_1} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan $\forall \beta \in B$ için $\alpha \succ \pi(\beta), \rho(\beta)$ sağlanacak şekilde $\alpha \in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "g_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & \Omega Y_\beta \\
 & X_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "g_{1\beta}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.6}$$

diyagramı homotopik komutatiftir.

O halde $\underline{g}$ ve $\underline{g_1}$ morfizmalarına karşı gelen $\underline{\check{g}}, \underline{\check{g}_1}$ morfizmaları için

$$\begin{tikzcd}
 & SX_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "\check{g}_\beta"] & \\
SX_\alpha \arrow[ur, "Sp^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "Sp^\alpha_{\rho(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & SX_{\rho(\beta)} \arrow[ur, "\check{g}_{1\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı homotopik komutatiftir. Gerçekten,

$$\left(\check{g}_\beta \circ Sp^\alpha_{\pi(\beta)}\right)([x,t]) = \check{g}_\beta\left(Sp^\alpha_{\pi(\beta)}[x,t]\right) = \check{g}_\beta\left(\left[p^\alpha_{\pi(\beta)}(x),t\right]\right) = \left(g_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}\right)(x)(t) \qquad (6.7)$$

$$\left(\check{g}_{1\beta} \circ Sp^\alpha_{\rho(\beta)}\right)([x,t]) = \check{g}_{1\beta}\left(Sp^\alpha_{\rho(\beta)}[x,t]\right) = \check{g}_{1\beta}\left(\left[p^\alpha_{\rho(\beta)}(x),t\right]\right) = \left(g_{1\beta} \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}\right)(x)(t) \qquad (6.8)$$

dir. (6.6) diyagramı homotopik komutatif ve (6.5) ve (6.6) eşitliklerinde sağ taraftaki dönüşümlerin homotopik sınıfları eşit olduğu için sol taraftaki dönüşümlerin homotopik sınıfları da eşit olur. O halde $\underline{\check{g}} \overset{s}{\sim} \underline{\check{g}_1}$ morfizmaları spektral homotoptur. Bu ise $\psi_{\underline{X},\underline{Y}}$ dönüşümünün iyi tanımlı olması demektir. Aynı zamanda $\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}$ dönüşümü $\psi_{\underline{X},\underline{Y}}$ dönüşümünün tersidir. Gerçekten, $\forall[\underline{f}] \in [S\underline{X},\underline{Y}]$ için

$$\left(\psi_{\underline{X},\underline{Y}} \circ \varphi_{\underline{X},\underline{Y}}\right)([\underline{f}]) = \psi_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}([\underline{f}])\right) = \psi_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\left[\underline{\hat{f}}\right]\right) = \left[\underline{\check{\hat{f}}}\right] : S\underline{X} \to \underline{Y}$$

dir. Burada,

$$\underline{\hat{f}} = \left(\pi : B \to A, \left\{\hat{f}_\beta : X_{\pi(\beta)} \to \Omega Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) \quad , \hat{f}_\beta(x)(t) = f_\beta([x,t]) \text{ ve}$$

$$\hat{\underline{f}}^{\vee} = \left(\pi : B \to A, \left\{ \hat{f}^{\vee}_{\beta} : SX_{\pi(\beta)} \to Y_{\beta} \right\}_{\beta \in B} \right) \quad , \hat{f}^{\vee}_{\beta}([x,t]) = \hat{f}_{\beta}(x)(t) = f_{\beta}([x,t])$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise $\hat{\underline{f}}^{\vee} = \underline{f}$ demektir.O halde $\psi_{\underline{X},\underline{Y}} \circ \varphi_{\underline{X},\underline{Y}} = 1_{[S\underline{X},\underline{Y}]}$ dir. Benzer şekilde $\varphi_{\underline{X},\underline{Y}} \circ \psi_{\underline{X},\underline{Y}} = 1_{[\underline{X},\Omega\underline{Y}]}$ bulunur. Böylece $\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Şimdi $\{\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}\}_{\underline{X},\underline{Y}}$ ailesinin funktorların morfizması olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\forall \underline{f} : \underline{X}' \to \underline{X}$, $\underline{g} : \underline{Y} \to \underline{Y}'$ morfizmaları için

$$\begin{tikzcd}
{[S\underline{X},\underline{Y}]} \arrow[r, "\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}"] \arrow[d] & {[\underline{X},\Omega\underline{Y}]} \arrow[d] \\
{[S\underline{X}',\underline{Y}']} \arrow[r, "\varphi_{\underline{X}',\underline{Y}'}"'] & {[\underline{X}',\Omega\underline{Y}']}
\end{tikzcd} \tag{6.9}$$

diyagramının komutatif olduğunu göstermek gerekir. Bu diyagramın komutatifliği ise aşağıdaki diyagramların komutatifliğinden elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
{[S\underline{X},\underline{Y}]} \arrow[r, "(S\underline{f})^{*}"] \arrow[d, "\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & {[S\underline{X}',\underline{Y}]} \arrow[r, "(\underline{g})_{*}"] \arrow[d, "\varphi_{\underline{X}',\underline{Y}}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & {[S\underline{X}',\underline{Y}']} \arrow[d, "\varphi_{\underline{X}',\underline{Y}'}"] \\
{[\underline{X},\Omega\underline{Y}]} \arrow[r, "(\underline{f})^{*}"'] & {[\underline{X}',\Omega\underline{Y}]} \arrow[r, "(\Omega\underline{g})_{*}"'] & {[\underline{X}',\Omega\underline{Y}']}
\end{tikzcd}$$

(1) diyagramı komutatiftir: $\forall [\underline{h}] \in [S\underline{X},\underline{Y}]$ için

$$\left(\varphi_{\underline{X}',\underline{Y}} \circ \left(S\underline{f}\right)^{*}\right)\left(\left[\underline{h}\right]\right) = \varphi_{\underline{X}',\underline{Y}}\left(\left(S\underline{f}\right)^{*}\left(\left[\underline{h}\right]\right)\right) = \varphi_{\underline{X}',\underline{Y}}\left(\left[\underline{h} \circ S\underline{f}\right]\right) = \left[\underline{h} \,\hat{\circ}\, S\underline{f}\right]$$

bulunur. Burada; $\underline{h}, \underline{f}$ ve $S\underline{f}$ morfizmaları

$$\underline{h} = \left(\pi : B \to A, \left\{h_\beta : SX_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : S\underline{X} \to \underline{Y}$$

$$\underline{f} = \left(\rho : A \to C, \left\{f_\alpha : X'_{\rho(\alpha)} \to X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}\right) : \underline{X'} \to \underline{X}$$

$$S\underline{f} = \left(\rho : A \to C, \left\{Sf_\alpha : SX'_{\rho(\alpha)} \to SX_\alpha\right\}_{\alpha\in A}\right) : S\underline{X'} \to S\underline{X}$$

şeklindedir. $\underline{h}$ morfizması ile $S\underline{f}$ morfizmasının bileşkesi

$$\underline{h} \circ S\underline{f} = \left(\rho \circ \pi : B \to C, \left\{h_\beta \circ Sf_{\pi(\beta)} : SX'_{\rho(\pi(\beta))} \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : S\underline{X'} \to \underline{Y}$$

dır. O zaman

$$\underline{h} \,\hat{\circ}\, S\underline{f} = \left(\rho \circ \pi : B \to C, \left\{h_\beta \,\hat{\circ}\, Sf_{\pi(\beta)} : X'_{\rho(\pi(\beta))} \to \Omega Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : \underline{X'} \to \Omega\underline{Y}$$

biçiminde tanımlanır ve $x \in X'_{\rho(\pi(\beta))}, t \in I$ için

$$\left(h_\beta \,\hat{\circ}\, Sf_{\pi(\beta)}\right)(x)(t) = \left(h_\beta \circ Sf_{\pi(\beta)}\right)([x,t]) = h_\beta\left(\left[f_{\pi(\beta)}(x), t\right]\right) \tag{6.10}$$

dır.

$$\left(\left(\underline{f}\right)^{*} \circ \varphi_{\underline{X},\underline{Y}}\right)\left(\left[\underline{h}\right]\right) = \left(\underline{f}\right)^{*}\left(\varphi_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\left[\underline{h}\right]\right)\right) = \left(\underline{f}\right)^{*}\left(\left[\hat{\underline{h}}\right]\right) = \left[\hat{\underline{h}} \circ \underline{f}\right]$$

bulunur. Burada $\hat{\underline{h}}$ morfizması ile $\hat{\underline{h}} \circ \underline{f}$ morfizması

$$\underline{\hat{h}} = \left(\pi : B \to A, \left\{ \hat{h}_\beta : X_{\pi(\beta)} \to \Omega Y_\beta \right\}_{\beta \in B} \right) \quad \hat{h}_\beta(x)(t) = h_\beta([x,t]) \quad x \in X_{\pi(\beta)}, t \in I$$

$$\underline{h} \circ \underline{f} = \left(\rho \circ \pi : B \to C, \left\{ \hat{h}_\beta \circ f_{\pi(\beta)} : X'_{\rho(\pi(\beta))} \to \Omega Y_\beta \right\}_{\beta \in B} \right) : \underline{X'} \to \Omega \underline{Y}$$

şeklindedir ve $x \in X'_{\rho(\pi(\beta))}, t \in I$ için

$$\left(\hat{h}_\beta \circ f_{\pi(\beta)} \right)(x)(t) = \hat{h}_\beta \left(f_{\pi(\beta)}(x) \right)(t) = h_\beta \left(\left[f_{\pi(\beta)}(x), t \right] \right) \tag{6.11}$$

dır. O halde (6.10) ve (6.11) ifadeleri eşit olduğundan dolayı (1) diyagramı komutatiftir. Benzer şekilde (2) diyagramının da komutatif olduğu gösterilebilir. (1) ve (2) diyagramlarının komutatifliği (6.9) diyagramının komutatifliğini ifade eder.

BÖLÜM 7

7. SPEKTRAL HOMOTOPİK KÜMELERİN TAM DİZİLERİ

Bu bölümde spektral homotopik grupların tam dizilerinin genelleştirilmesi olan homotopik kümelerin ters ve düz dizileri verilecek ve bu dizilerin tamlığı ispatlanacaktır. Burada, ispatlanan genel teoremlerden yararlanarak spektral homotopik grupların dizisinin tamlığı kolayca ispatlanabilir.

Lemma 7.1: $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizmasının $\underline{c}:\underline{X}\to\underline{Y}$ sabit morfizması ile spektral homotop olması için gerek ve yeter koşul homotopik sınıflarda $\underline{F}\big|_{\underline{X}\times\{1\}}=\underline{f}$ sağlanacak şekilde $\underline{F}:C\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizmasının varolmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" $\underline{f}\overset{s}{\sim}\underline{c}$ morfizmaları spektral homotop olsun. Ters spektrlerin herhangi iki sabit morfizması spektral homotop olduğundan dolayı Lemma 5.1' e göre $\underline{c}$ sabit morfizması

$$\underline{c}=\left(\pi:B\to A,\left\{c_\beta:X_{\pi(\beta)}\to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right):\underline{X}\to\underline{Y}$$

şeklinde alınabilir. O zaman $\underline{f}\overset{s}{\sim}\underline{c}$ morfizmaları spektral homotop olduğu için tanım gereği, $\forall\beta\in B$ için $\alpha\succ\pi(\beta)$ olacak şekilde $\alpha\in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "c_\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

diyagramı homotopik komutatiftir, yani $f_\beta \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)} \sim c_\beta \circ p^{\alpha}_{\pi(\beta)}$ dönüşümleri homotoptur. Bu dönüşümler arasındaki homotopya $H_{\alpha,t} : X_\alpha \to Y_\beta$ olsun. $H_{\alpha,t}$ homotopyalarının yerine Lemma 5.17 den $H_{\beta,t}$ homotopyaları ele alınabilir. Homotopik sınıflarda,

$$\left(\chi : B \to A, \left\{H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. O zaman (7.1) diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"] \arrow[rr, dotted, "H_{\beta,t}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "c_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopik komutatif diyagramına dönüşür.

$$\underline{f}' = \left(\chi : B \to A, \left\{f'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y} \ , \ f'_\beta = f_\beta \circ p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}$$

ters spektrlerin morfizmasıdır. Ters spektrlerin $\underline{c}'$ sabit morfizması ise

$$\underline{c}' = \left(\chi : B \to A, \left\{c'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y} \ , \ c'_\beta = c_\beta \circ p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}$$

şeklinde olsun. $H_{\beta,t}$ homotopyası f'_β ile c'_β dönüşümleri arasında bir homotopyadır, yani $\forall x \in X_{\chi(\beta)}$ için

$$H_\beta(x,0) = c'_\beta(x) = y_{0\beta}$$
$$H_\beta(x,1) = f'_\beta(x)$$
$$H_\beta(x_0,t) = y_{0\beta} = c'_\beta(x_0) = f'_\beta(x_0)$$

koşullarını sağlayan $H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta$ şeklindeki homotopyadır.

O zaman $\forall \beta \in B$ için $f'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta$ dönüşümünün

$$F_\beta : CX_{\chi(\beta)} \to Y_\beta \quad , F_\beta([x,t]) = H_\beta(x,t) \tag{7.2}$$

olacak şekilde genişletilmesi vardır. $\forall \beta \in B$ için tanımlanan bu F_β dönüşümlerinden oluşan

$$\underline{F} = \left(\chi : B \to A, \{F_\beta : CX_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : C\underline{X} \to \underline{Y}$$

ailesi ters spektrlerin bir morfizmasıdır ve $\underline{F}\big|_{\underline{X}\times\{1\}} = \underline{f'}$ dir. Gerçekten, $\underline{X} \approx \underline{X} \times \{\underline{1}\}$ "homeomorf" olduğundan $\underline{X}$ ters spektri ile $\underline{X} \times \{\underline{1}\}$ ters spektri aynı kabul edilebilir ve bu nedenle $\underline{X} \times \{\underline{1}\} \subset C\underline{X}$ yazılabilir. $\forall \beta \in B$ için $F_\beta\big|_{X_{\chi(\beta)}\times\{1_\beta\}} = f'_\beta$ olduğundan dolayı $\underline{F}\big|_{\underline{X}\times\{\underline{1}\}} = \underline{f'}$ sağlanır. Aynı zamanda $\underline{f}$ morfizması $\underline{f'}$ morfizması ile spektral homotoptur. Gerçekten,

$$\underline{f} = \left(\pi : B \to A, \{f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\underline{f'} = \left(\chi : B \to A, \{f'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right)$$

morfizmaları ve $\forall \beta \in B$ için $\chi(\beta) \succ \pi(\beta)$ olduğundan

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "1_{X_{\chi(\beta)}}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\chi(\beta)} \arrow[ur, "f'_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir, yani $f_\beta \circ p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)} = f'_\beta = f'_\beta \circ 1_{X_{\chi(\beta)}}$ dır.

"$\Leftarrow$" Şimdi homotopik sınıflarda $\underline{f}$ morfizması ile spektral homotop olan $\underline{f}'$ morfizmasının $\underline{F}\big|_{\underline{X}\times\{1\}} = \underline{f}'$ koşulunu sağlayacak şekilde $\underline{F} : C\underline{X} \to \underline{Y}$ genişletilmesi varolsun. (7.2) de verilen F_β dönüşümü f'_β dönüşümünün genişletilmesidir. O halde $f'_\beta \sim c'_\beta$ dönüşümleri homotoptur. Bu dönüşümler arasındaki homotopya H_β olsun. Eğer

$$\underline{H} = \left(\chi : B \to A, \left\{H_\beta : X_{\chi(\beta)} \times I \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) \quad H_\beta(x,t) = F_\beta([x,t])\; x \in X_{\chi(\beta)}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$H_\beta(x,0) = c'_\beta(x)$$
$$H_\beta(x,1) = f'_\beta(x)$$

dir. $\forall \beta \in B$ için $f'_\beta \sim c'_\beta$ dönüşümleri homotop olduğundan $\Rightarrow \underline{f}' \overset{s}{\sim} \underline{c}'$ morfizmalarının spektral homotop olduğu elde edilir. Buradan,

$\Rightarrow \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f}'$, $\underline{f}' \overset{s}{\sim} \underline{c}'$ ve $\underline{c}' \overset{s}{\sim} \underline{c}$ olduğundan

$$\Rightarrow \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{c}$$

morfizmaları spektral homotoptur.

Teorem 7.2: Topolojik uzayların ters spektrlerinin herhangi $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için ters spektrlerin

$$\underline{X} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{Y} \xrightarrow{\underline{i}} C_{\underline{f}}$$

dizisi kotamdır, yani $\forall \underline{Z}$ ters spektri için

$$[\underline{X}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{f}^*} [\underline{Y}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{i}^*} [C_{\underline{f}}, \underline{Z}]$$

belirli noktalı kümelerin ters dizisi tamdır.

İspat: Önce

$$im\underline{i}^{*} \subset Ker\underline{f}^{*} \tag{7.3}$$

olduğu gösterilecektir.

$$\underline{i} = \left(1_B : B \to B, \{i_\beta : Y_\beta \to C_{f_\beta}\}_{\beta\in B}\right) : \underline{Y} \to C_{\underline{f}}$$

gömme morfizması için

$$\underline{i} \circ \underline{f} = \left(\pi : B \to A, \{i_\beta \circ f_\beta : X_{\pi(\beta)} \to C_{f_\beta}\}_{\beta\in B}\right) : \underline{X} \to C_{\underline{f}} \tag{7.4}$$

dir. $\underline{i} \circ \underline{f}$ morfizması

$$\underline{X} \xrightarrow{\underline{j}} C\underline{X} \xrightarrow{\underline{m}} C\underline{X} \vee \underline{Y} \xrightarrow{\underline{k}} C_{\underline{f}} = {C\underline{X} \vee \underline{Y}}/{\sim}$$

morfizmalarının bileşkesine eşittir. Burada

$$\underline{j} = \left(1_A : A \to A, \{j_\alpha : X_\alpha \to CX_\alpha\}_{\alpha\in A}\right), \; j_\alpha(x_\alpha) = [1, x_\alpha]$$
$$\underline{m} = \left(1_A : A \to A, \{m_\alpha : CX_\alpha \to CX_\alpha \vee Y_\beta\}_{\alpha\in A, \pi(\beta)=\alpha}\right) \quad m_\alpha([x_\alpha, t]) = ([x_\alpha, t], y_{0\beta})$$
$$\underline{k} = \left(\pi : B \to A, \{k_\beta : CX_{\pi(\beta)} \vee Y_\beta \to C_{f_\beta}\}_{\beta\in B}\right)$$

dır. Gerçekten,

$$\underline{k} \circ (\underline{m} \circ \underline{j}) = \underline{k} \circ \left(1_A : A \to A, \{m_\alpha \circ j_\alpha : X_\alpha \to CX_\alpha \vee Y_\beta\}_{\alpha\in A, \pi(\beta)=\alpha}\right)$$
$$= \left(\pi : B \to A, \{k_\beta \circ m_\alpha \circ j_\alpha : X_{\pi(\beta)=\alpha} \to C_{f_\beta}\}_{\beta\in B}\right)$$

dır. O zaman $\forall \beta \in B$ için $k_\beta \circ m_\alpha \circ j_\alpha = i_\beta \circ f_\beta$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\forall x_{\pi(\beta)} \in X_{\pi(\beta)}$ için

$$k_\beta \circ m_\alpha \circ j_\alpha\left(x_{\pi(\beta)}\right) = k_\beta \circ \left(m_\alpha\left(\left[1, x_{\pi(\beta)}\right]\right)\right) = k_\beta\left(\left[1, x_{\pi(\beta)}\right], y_{0\beta}\right) = \left[\left[1, x_{\pi(\beta)}\right]\right]$$

$$i_\beta \circ f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right) = i_\beta\left(f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right) = \left\lfloor f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right\rfloor$$

dır. C_{f_β} bölüm uzayında $\left\lfloor 1, x_{\pi(\beta)}\right\rfloor$ ve $f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)$ elemanları denk olduğundan $\left[\left[1, x_{\pi(\beta)}\right]\right] = \left\lfloor f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right\rfloor$ elde edilir, yani (7.4) deki morfizma için

$$\underline{i} \circ \underline{f} = \underline{k} \circ \underline{m} \circ \underline{j} \tag{7.5}$$

eşitliği sağlanır. $C\underline{X}$ ters spektrinin idantik morfizması $\underline{X} \subset C\underline{X}$ gömme morfizmasının bir genişletilmesidir, yani $1_{C\underline{X}}\big|_{\underline{X}\times 1} = \underline{j}$ olduğundan Lemma 7.1' e göre $\underline{j} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmaları spektral homotoptur. Buradan

$$\underline{j} \overset{s}{\sim} \underline{c},\ \underline{m} \overset{s}{\sim} \underline{m} \text{ ve } \underline{k} \overset{s}{\sim} \underline{k}$$

morfizmaları spektral homotop olduğundan

$$\underline{k} \circ \underline{m} \circ \underline{j} \overset{s}{\sim} \underline{k} \circ \underline{m} \circ \underline{c} = \underline{c} \Rightarrow \underline{k} \circ \underline{m} \circ \underline{j} \overset{s}{\sim} \underline{c}$$

elde edilir. (7.5) den $\underline{i} \circ \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{c}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu bulunur. Böylece $\forall \lfloor g \rfloor \in \lfloor C_{\underline{f}}, \underline{Z} \rfloor$ için

$$\underline{f}^* \circ \underline{i}^*\left(\lfloor g \rfloor\right) = \left(\underline{i} \circ \underline{f}\right)^*\left(\lfloor g \rfloor\right) = \left[g \circ \underline{i} \circ \underline{f}\right] = \left[g \circ \underline{c}\right] = \left[\underline{c}\right] \Rightarrow \underline{f}^* \circ \underline{i}^* = \left[\underline{c}\right] \Rightarrow im\underline{i}^* \subset Ker\underline{f}^*$$

elde edilir.

Şimdi de

$$\mathrm{Ker}\,\underline{f}^* \subset \dot{I}m\underline{i}^* \tag{7.6}$$

kapsamasının sağlandığı gösterilecektir. $\forall[\underline{g}] \in \mathrm{Ker}\,\underline{f}^* \subset [\underline{Y},\underline{Z}]$ için $\underline{f}^*([\underline{g}]) = [\underline{g}\circ\underline{f}] = [\underline{c}]$ dir, yani $\underline{g}\circ\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Z}$ morfizması sabit morfizma ile spektral homotoptur. O zaman Lemma 7.1 den $\underline{g}\circ\underline{f}$ morfizmasının

$$\underline{G} : C\underline{X} \to \underline{Z}$$

genişletilmesi vardır.

$\underline{G} : C\underline{X} \to \underline{Z}$ ve $\underline{g} : \underline{Y} \to \underline{Z}$

morfizmalarından yararlanarak

$$\underline{G} \vee \underline{g} : C\underline{X} \vee \underline{Y} \to \underline{Z}$$

morfizması $\underline{G}\vee\underline{g}\big|_{C\underline{X}} = \underline{G}, \underline{G}\vee\underline{g}\big|_{\underline{Y}} = \underline{g}$ şeklinde tanımlanabilir. Eğer

$$\underline{i}^*([\underline{h}]) = [\underline{g}] \tag{7.7}$$

koşulunu sağlayan $\underline{h} \in [C_{\underline{f}}, \underline{Z}]$ morfizması bulunursa (7.6) kapsaması elde edilmiş olur. $C_{\underline{f}}$ ters spektrindeki denklik bağıntısı

$[1,\underline{x}]$ ile $\underline{f}(\underline{x})$ denktir $\Leftrightarrow$ $\forall\beta\in B$ için $[1, x_{\pi(\beta)}]$ ile $f_\beta(x_{\pi(\beta)})$ denktir.

biçimindedir. $[1,\underline{x}] \in C\underline{X}$ için

$$(\underline{G}\vee \underline{g})([\underline{1},\underline{x}]) = \underline{G}([\underline{1},\underline{x}]) = [\underline{g}\circ \underline{f}(\underline{x})] = [\underline{c}] \tag{7.8}$$

$\underline{f}(\underline{x}) \in \underline{Y}$ için

$$(\underline{G}\vee \underline{g})(\underline{f}(\underline{x})) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) = (\underline{g}\circ \underline{f})(\underline{x}) = [\underline{c}] \tag{7.9}$$

bulunur. (5.8) ve (5.9) eşitliklerinden görüldüğü gibi $\underline{G}\vee \underline{g}$ morfizması $C\underline{X}\vee \underline{Y}$ ters spektrinin sınıfını $\underline{Z}$ ters spektrinin belirli noktasına taşır. O zaman $\underline{G}\vee \underline{g}$ morfizmasından yararlanarak $\underline{h}: C_{\underline{f}} \to \underline{Z}$ morfizması tanımlanır ve

$$\begin{tikzcd}
C\underline{X}\vee \underline{Y} \arrow[r, "\underline{G}\vee \underline{g}"] \arrow[d, "\underline{k}"'] & \underline{Z} \\
C\underline{X}\vee \underline{Y}/_{\sim} = C_{\underline{f}} \arrow[ur, "\underline{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramının komutatifliğinden $\underline{G}\vee \underline{g} = \underline{h}\circ \underline{k}$ elde edilir. Buradan $\underline{h}|_{\underline{Y}} = \underline{g}$ dir.

$\underline{i}: \underline{Y} \to C_{\underline{f}}$, $\underline{h}: C_{\underline{f}} \to \underline{Z}$

morfizmaları için

$\underline{h}\circ \underline{i}: \underline{Y} \to \underline{Z}$ ve $\underline{h}\circ \underline{i} = \underline{h}|_{\underline{Y}} = \underline{g} \Rightarrow \underline{h}\circ \underline{i} = \underline{g} \Rightarrow [\underline{h}\circ \underline{i}] = [\underline{g}] \Rightarrow \underline{i}^*([\underline{h}]) = [\underline{g}]$

dir. Buradan da (7.7) eşitliğinin sağlandığı ispatlanır. Dolayısıyla (7.6) kapsaması elde edilmiş olur ve teorem ispatlanır.

Teorem 7.3: $\forall \underline{X},\underline{Y},\underline{Z} \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri ve $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için

$$[\underline{X},\underline{Z}]\xleftarrow{\underline{f}^*}[\underline{Y},\underline{Z}]\xleftarrow{\underline{i}^*}[C_{\underline{f}},\underline{Z}]\xleftarrow{\underline{j}^*}[C_{\underline{i}},\underline{Z}]\xleftarrow{\underline{l}^*}[C_{\underline{j}},\underline{Z}] \tag{7.10}$$

belirli noktalı kümelerin ters dizisi tamdır. Burada $\underline{i}:\underline{Y}\to C_{\underline{f}}$, $\underline{j}:C_{\underline{f}}\to C_{\underline{i}}$, $\underline{l}:C_{\underline{i}}\to C_{\underline{j}}$ gömme morfizmalarıdır.

İspat: Ters spektrlerin $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizması için

$$C_{\underline{f}}=\left(\left\{C_{f_\beta}={}^{CX_{\pi(\beta)}\vee Y_\beta}\!\big/\!\sim\right\}_{\beta\in B},\left\{\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')},q_\beta^{\beta'}\right)\right\}_{\beta\prec\beta'}\right)$$

$\underline{i}=\left(1_B:B\to B,\left\{i_\beta:Y_\beta\to C_{f\beta}\right\}_{\beta\in B}\right)$ morfizması için,

$$C_{\underline{i}}=\left(\left\{C_{i_\beta}={}^{CY_\beta\vee C_{f_\beta}}\!\big/\!\sim\right\}_{\beta\in B},\left\{\left(Cq_\beta^{\beta'},\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')},q_\beta^{\beta'}\right)\right)\right\}_{\beta\prec\beta'}\right)$$

$\underline{j}=\left(1_B:B\to B,\left\{j_\beta:{}^{CX_{\pi(\beta)}\vee Y_\beta}\!\big/\!\sim\;\to{}^{CY_\beta\vee C_{f\beta}}\!\big/\!\sim\right\}_{\beta\in B}\right)$ morfizması için,

$$C_{\underline{j}}=\left(\left\{C_{j_\beta}={}^{C\left(C_{f_\beta}\right)\vee C_{i_\beta}}\!\big/\!\sim\right\}_{\beta\in B},\left\{\left(C\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')},q_\beta^{\beta'}\right),\left(Cq_\beta^{\beta'},\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')},q_\beta^{\beta'}\right)\right)\right)\right\}_{\beta\prec\beta'}\right)$$

şeklindedir. Teorem 7.2 de (7.10) dizisinin $[\underline{Y},\underline{Z}]$ kümesinde tamlığı gösterildi. Benzer şekilde $[C_{\underline{f}},\underline{Z}]$ kümesindeki tamlık $(\underline{i}^*,\underline{j}^*)$ çiftinden yararlanarak, $[C_{\underline{i}},\underline{Z}]$ kümesindeki tamlık ise $(\underline{j}^*,\underline{l}^*)$ yararlanarak gösterilebilir. Burada $\underline{l}$ morfizması ise $\underline{l}=\left(1_B:B\to B,\left\{l_\beta:C_{i\beta}\to C_{j\beta}\right\}_{\beta\in B}\right)$ şeklindedir.

Lemma 7.4: Ters spektrlerin $\forall\underline{f}:(\underline{X},\underline{x_0})\to(\underline{Y},\underline{y_0})$ morfizması için

$$\underline{q} : \left(\underline{Y} \cup_{\underline{f}} C\underline{X}\right) \cup_{\underline{i}} C\underline{Y} \to \left(\underline{Y} \cup_{\underline{f}} C\underline{X}\right) \cup_{\underline{i}} C\underline{Y} \Big/ C\underline{Y}$$

kanonik morfizması homotopik denkliktir.

İspat: Teorem 7.3 de tanımlanan $C_{\underline{i}}$ ters spektri $C_{\underline{i}} = \left(\underline{Y} \cup_{\underline{f}} C\underline{X}\right) \cup_{\underline{i}} C\underline{Y}$ şeklinde de gösterilebilir. O halde C_{i_β} uzayı $CX_{\pi(\beta)} \vee CY_\beta$ uzayındaki

$$\left[1, x_{\pi(\beta)}\right] \in CX_{\pi(\beta)} \text{ ve } \left[1, f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right] \in CY_\beta \tag{7.11}$$

elemanlarının yapıştırılması ile elde edilir.

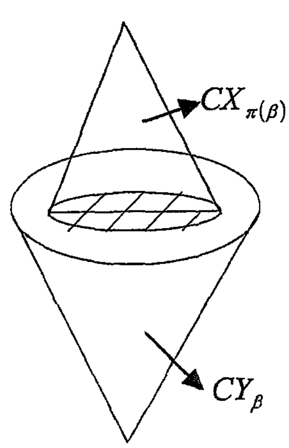
$$\underline{H} = \left(1_B : B \to B, \left\{H_\beta : C_{i_\beta} \times I \to C_{i_\beta}\right\}_{\beta \in B}\right) : C_{\underline{i}} \times I \to C_{\underline{i}}$$

homotopyası

$$s,t \in I, y_\beta \in Y_\beta \text{ için } H_\beta\left(\left[s, y_\beta\right], t\right) = \left[(1-t)s, y_\beta\right]$$

$$t \in I, x_{\pi(\beta)} \in X_{\pi(\beta)} \text{ için } H_\beta\left(\left[s, x_{\pi(\beta)}\right], t\right) = \begin{cases} \left[(1+t)s, x_{\pi(\beta)}\right] & , 0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ \left[2-(1+t)s, f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right] & , \dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu homotopya $\forall \beta \in B$ için



şeklinin alt ve üst konisinde ayrı ayrı tanımlanır. H_β dönüşümünün iyi tanımlı olması için şeklin taralı alanında H_β dönüşümünün aynı olması gerekir. Bu taralı alanda (7.11) deki $[1, x_{\pi(\beta)}] \in CX_{\pi(\beta)}$ ile $[1, f_\beta(x_{\pi(\beta)})] \in CY_\beta$ noktaları birbirine yapıştırılmıştır. Burada $s = 1$ olduğu için

$$H_\beta([1, y_\beta], t) = [(1-t), y_\beta] \quad s, t \in I \text{ , } y_\beta \in Y_\beta \text{ ise}$$

$$H_\beta([1, x_{\pi(\beta)}], t) = \begin{cases} [1, x_{\pi(\beta)}] & , t = 0 \\ [1-t, y_\beta] & , t \geq 0 \end{cases}$$

dır, yani H_β dönüşümü iyi tanımlıdır.

$\underline{H} : C_{\underline{i}} \times I \to C_{\underline{i}}$ ters spektrlerin morfizmasıdır. Gerçekten, $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd} C_{i_{\beta'}} \times I \arrow[r, "H_{\beta'}"] \arrow[d, "T \times 1_I"'] & C_{i_{\beta'}} \arrow[d, "T"] \\ C_{i_\beta} \times I \arrow[r, "H_\beta"'] & C_{i_\beta} \end{tikzcd} \tag{7.12}$$

diyagramı komutatiftir. Burada $T = \left(Cq_\beta^{\beta'}, \left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_\beta^{\beta'}\right)\right)$ dır. C_{i_β} uzayının noktaları iki türlü olduğundan diyagramın komutatifliği her biri için ayrıca ispatlanacaktır.

$([s, y_{\beta'}], t) \in CY_{\beta'} \times I$ için,

$$T \circ H_{\beta'}([s, y_{\beta'}], t) = T([(1-t)s, y_{\beta'}]) = Cq_\beta^{\beta'}([1-t]s, y_{\beta'}) = [(1-t)s, q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'})]$$

$$\begin{aligned}(H_\beta \circ (T \times 1_I))([s, y_{\beta'}], t) &= H_\beta(T([s, y_{\beta'}]), t) = H_\beta(Cq_\beta^{\beta'}([s, y_{\beta'}]), t) = \\ &= H_\beta([s, q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'})], t) = [(1-t)s, q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'})]\end{aligned}$$

dır. O halde $\left(\lfloor s, y_{\beta'} \rfloor, t\right) \in C_{i_{\beta'}} \times I$ için (7.12) diyagramı komutatiftir.

Şimdi $\left(\lfloor s, x_{\pi(\beta')} \rfloor, t\right) \in CX_{\pi(\beta')} \times I$ için,

$$T \circ H_{\beta'}\left(\lfloor s, x_{\pi(\beta')} \rfloor, t\right) = T \circ \begin{cases} \left[(1+t)s, x_{\pi(\beta')}\right] & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \quad t \in I, x_{\pi(\beta')} \in X_{\pi(\beta')} \\ \left[2-(1+t)s, f_{\beta'}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right] & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T \circ \left[(1+t)s, x_{\pi(\beta')}\right] & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ T \circ \left[2-(1+t)s, f_{\beta'}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right] & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_{\beta}^{\beta'}\right)\left(\left[(1+t)s, x_{\pi(\beta')}\right]\right) & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ \left(Cq_{\beta}^{\beta'}\right)\left(\left[2-(1+t)s, f_{\beta'}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right]\right) & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[(1+t)s, p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right] & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ \left[2-(1+t)s, q_{\beta}^{\beta'}\left(f_{\beta'}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right)\right] & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(H_{\beta} \circ (T \times 1_I)\right)\left(\lfloor s, x_{\pi(\beta')} \rfloor, t\right) &= H_{\beta}\left(T\lfloor s, x_{\pi(\beta')} \rfloor, t\right) \\ &= H_{\beta}\left(\left(Cp_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, q_{\beta}^{\beta'}\right)\lfloor s, x_{\pi(\beta')} \rfloor, t\right) \\ &= H_{\beta}\left(\left\lfloor s, p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right\rfloor, t\right) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left[(1+t)s, p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right] & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ \left[2-(1+t)s, f_{\beta}\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right)\right] & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[(1+t)s, p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right] & ,0 \le s \le \dfrac{1}{t+1} \\ \left[2-(1+t)s, q_{\beta}^{\beta'}\left(f_{\beta'}\left(x_{\pi(\beta')}\right)\right)\right] & ,\dfrac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

bulunur. $\left(\left[s, x_{\pi(\beta')}\right], t\right) \in CX_{\pi(\beta')} \times I$ için de (7.12) diyagramı komutatiftir. O zaman $\underline{H}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

$\forall \beta \in B$ için

$$H_\beta\left(\left[s, y_\beta\right], 0\right) = \left[s, y_\beta\right] = 1_{CY_\beta} = H_\beta\big|_{CY_\beta \times \{0\}}$$

$$H_\beta\left(\left[s, x_{\pi(\beta)}\right], 0\right) = \begin{cases} \left[s, x_{\pi(\beta)}\right] & ,0 \le s \le 1 \\ \left[1, f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right] & ,s = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[s, x_{\pi(\beta)}\right] & ,0 \le s \le 1 \\ \left[1, x_{\pi(\beta)}\right] & ,s = 1 \end{cases}$$

$$= \left[1, x_{\pi(\beta)}\right]$$

$$H_\beta\big|_{CX_{\pi(\beta)} \times \{0\}} = 1_{CX\,\pi(\beta)}$$

dır. Böylece, $H_\beta\big|_{C_{i_\beta} \times \{0\}} = 1_{C_{i_\beta}}$ yani; $H_{\beta,0} = 1_{C_{i_\beta}}$ dır.

$H_\beta\left(\left[s, y_\beta\right], 1\right) = \left[0, y_\beta\right] = *$ $\quad , H_\beta\big|_{CY_\beta \times \{1\}} = *$ sabittir.

O zaman

$$H_{\beta,1} = H_\beta\big|_{C_{i_\beta} \times \{1\}} =: C_{i_\beta} \times \{1\} \tilde{=} C_{i_\beta} \to C_{i_\beta}$$

dönüşümü $CY_\beta \subset C_{i_\beta}$ alt uzayını bir noktaya taşır. O halde $H_{\beta,1}$ dönüşümünden yararlanarak

$$H_{\beta,1} = r_\beta \circ q_\beta$$

sağlanacak şekilde

$$r_\beta : {C_{i_\beta}}/{CY_\beta} \to C_{i_\beta}$$

bölüm uzayının dönüşümü tanımlanabilir.

$$\underline{r} = \left(1_B : B \to B, \left\{ r_\beta : {C_{i_\beta}}/{CY_\beta} \to C_{i_\beta} \right\}_{\beta \in B} \right) : {C_{\underline{i}}}/{C\underline{Y}} \to C_{\underline{i}}$$

morfizmasında $\forall \beta \in B$ için $H_{\beta,1} = r_\beta \circ q_\beta$ eşitliği sağlandığından

$$\underline{H} = \underline{r} \circ \underline{q}$$

elde edilir. H_β homotopyasının başlangıcı ve sonu

$$H_{\beta,0} = 1_{C_{i_\beta}} \,,\; H_{\beta,1} = r_\beta \circ q_\beta$$

olduğundan

$$1_{C_{i_\beta}} \sim r_\beta \circ q_\beta \quad rel\{*\} \tag{7.13}$$

dönüşümleri homotoptur. $\forall \beta \in B$ için (7.13) sağlandığından

$$1_{C_{\underline{i}}} \overset{s}{\sim} \underline{r} \circ \underline{q} \quad rel\{*\} \tag{7.14}$$

morfizmaları da spektral homotoptur.

$\forall t \in I$ için $H_\beta([s, y_\beta], t) = [(1-t)s, y_\beta] \in CY_\beta$ dır, yani $H_\beta|_{CY_\beta} : CY_\beta \to CY_\beta$ dır. O halde $\forall t \in I$ için $H_\beta(-,t) = H_{\beta,t}$ şeklinde gösterilsin. O zaman

$$(q_\beta \circ H_{\beta,t})(CY_\beta) = q_\beta(CY_\beta) = *$$

bulunur.

$$H_\beta : C_{i_\beta} \times I \to C_{i_\beta} \quad (H_\beta(CY_\beta) \subset CY_\beta)$$

dönüşümünden yararlanarak

$$\tilde{H}_\beta : {C_{i_\beta}}/{CY_\beta} \times I \to {C_{i_\beta}}/{CY_\beta}$$

homotopyası

$$\tilde{H}_\beta \circ (q_\beta \times 1_I) = q_\beta \circ H_\beta$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada $[z_\beta] \in {C_{i_\beta}}/{CY_\beta}, t \in I$ için

$$\tilde{H}_\beta([z_\beta], t) = \tilde{H}_\beta(q_\beta(z_\beta), t) = \tilde{H}_\beta \circ (q_\beta \times 1_I)(z_\beta, t) = (q_\beta \circ H_\beta)(z_\beta, t)$$

dir. O zaman

$$\underline{\tilde{H}} = \left(1_B : B \to B, \left\{\tilde{H}_\beta : {C_{i_\beta}}/{CY_\beta} \times I \to {C_{i_\beta}}/{CY_\beta}\right\}_{\beta \in B}\right) : {C_{\underline{i}}}/{C\underline{Y}} \times I \to {C_{\underline{i}}}/{C\underline{Y}}$$

ters spektrlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$
\begin{tikzcd}
{}^{C_{i_{\beta'}}}\!/_{CY_{\beta'}} \times I \arrow[r, "\tilde{H}_{\beta'}"] \arrow[d, "\tilde{T}\times 1_I"'] & {}^{C_{i_{\beta'}}}\!/_{CY_{\beta'}} \arrow[d, "\tilde{T}"] \\
{}^{C_{i_{\beta}}}\!/_{CY_{\beta}} \times I \arrow[r, "\tilde{H}_{\beta}"'] & {}^{C_{i_{\beta}}}\!/_{CY_{\beta}}
\end{tikzcd}
$$

diyagramı komutatiftir. Gerçekten, $([z_{\beta'}],t)\in {}^{C_{i_{\beta'}}}\!/_{CY_{\beta'}} \times I$ için

$$
\left(\tilde{T}\circ\tilde{H}_{\beta'}\right)([z_{\beta'}],t)=\tilde{T}\left(\tilde{H}_{\beta'}([z_{\beta'}],t)\right)=\tilde{T}\circ(q_{\beta'}\circ H_{\beta'})(z_{\beta'},t)=\tilde{T}\circ q_{\beta'}\circ(H_{\beta'}(z_{\beta'},t))=
$$
$$
=\tilde{T}([H_{\beta'}(z_{\beta'},t)])=[T\circ H_{\beta'}(z_{\beta'},t)]
$$

$$
\left(\tilde{H}_{\beta}\circ\left(\tilde{T}\times 1_I\right)\right)([z_{\beta'}],t)=\tilde{H}_{\beta}\circ\left(\tilde{T}[z_{\beta'}],t\right)=\tilde{H}_{\beta}([T(z_{\beta'})],t)=(q_{\beta}\circ H_{\beta})(T(z_{\beta'}),t)=
$$
$$
=[H_{\beta}\circ(T(z_{\beta'}),t)]=[H_{\beta}\circ(T\times 1_I)(z_{\beta'},t)]=[T\circ H_{\beta'}(z_{\beta'},t)]
$$

elde edilir, yani diyagram komutatiftir. O halde $\underline{\tilde{H}}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

$$
\tilde{H}_{\beta}([z_{\beta}],0)=(q_{\beta}\circ H_{\beta})(z_{\beta},0)=q_{\beta}\circ 1_{C_{i_\beta}}(z_{\beta})=q_{\beta}(z_{\beta})=[z_{\beta}]=1_{{}^{C_{i_\beta}}\!/_{CY_\beta}}([z_{\beta}])
$$

$$
\tilde{H}_{\beta}([z_{\beta}],1)=(q_{\beta}\circ H_{\beta})(z_{\beta},1)=(q_{\beta}\circ r_{\beta}\circ q_{\beta})(z_{\beta})=(q_{\beta}\circ r_{\beta})([z_{\beta}])
$$

$$
\tilde{H}_{\beta}\Big|_{{}^{C_{i_\beta}}\!/_{CY_\beta}\times 1_I}=q_{\beta}\circ r_{\beta}
$$

yani

$$1_{C_{i_\beta}/CY_\beta} \sim q_\beta \circ r_\beta \tag{7.15}$$

dönüşümleri homotoptur. $\forall \beta \in B$ için (7.15) sağlandığından

$$1_{C_{\underline{i}}/C\underline{Y}} \overset{s}{\sim} \underline{q} \circ \underline{r} \tag{7.16}$$

morfizmaları spektral homotoptur. (7.14) ve (7.16) ifadeleri göz önüne alınırsa homotopik sınıflarda $\underline{r}$ morfizması $\underline{q}$ morfizmasının tersidir. O halde $\underline{q}$ morfizması homotopik denkliktir. Böylece Lemma 7.4 ispatlanmış olur.

Lemma 7.5: $\forall \underline{X}, \underline{Y} \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri ve $\forall \underline{f} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ morfizması için

$$\underline{q}' : \left(\left(C\underline{X} \cup_{\underline{f}} \underline{Y}\right) \cup_{\underline{i}} C\underline{Y}\right) \cup_{\underline{j}} C\left(C\underline{X} \cup_{\underline{f}} \underline{Y}\right) \to {\left(\left(C\underline{X} \cup_{\underline{f}} \underline{Y}\right) \cup_{\underline{i}} C\underline{Y}\right) \cup_{\underline{j}} C\left(C\underline{X} \cup_{\underline{f}} \underline{Y}\right)} \Big/ {C\left(C\underline{X} \cup_{\underline{f}} \underline{Y}\right)}$$

morfizması homotopik denkliktir.

İspat: Lemma 7.4 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 7.6: Eğer $\underline{M}$ ters spektri $\underline{X}$ ters spektrinin alt spektri ve $\underline{i} : \underline{M} \to \underline{X}$ gömme morfizması ise o zaman ${\underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M}} \big/ {C\underline{M}}$ ile ${\underline{X}}/{\underline{M}}$ ters spektrleri "homeomorftur".

İspat: $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$ ters spektr, $\underline{M} = \left(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}, \left\{p_\alpha^{\alpha'}\big|_{M_{\alpha'}}\right\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$ $\underline{X}$ ters spektrinin alt spektri ve $\underline{i} : \underline{M} \to \underline{X}$ gömme morfizması olsun. Burada

$$\underline{i} = \left(1_A : A \to A, \{i_\alpha : M_\alpha \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$$

$$C_{\underline{i}} = \left(\left\{ C_{i_\alpha} = {CM_\alpha \vee X_\alpha}\big/\sim \right\}, \left\{ \left(C\left(p_\alpha^{\alpha'}\big|_{M_{\alpha'}} \right), p_\alpha^{\alpha'} \right) \right\}_{\alpha \prec \alpha'} \right)$$

$$C\underline{M} = \left(\{CM_\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{ C\left(p_\alpha^{\alpha'}\big|_{M_{\alpha'}} \right) \right\}_{\alpha \prec \alpha'} \right)$$

şeklindedir. $\forall \alpha \in A$ için

$$q_\alpha : X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \to {X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha}\big/{CM_\alpha}$$

kanonik dönüşüm,

$$j_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha$$

gömme dönüşümü olsun. O zaman

$$\underline{q} = \left(1_A : A \to A, \left\{ q_\alpha : X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \to {X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha}\big/{CM_\alpha} \right\}_{\alpha\in A} \right) : C_{\underline{i}} \to {C_{\underline{i}}}\big/{C\underline{M}}$$

$$\underline{j} = \left(1_A : A \to A, \{ j_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \}_{\alpha\in A} \right) : \underline{X} \to C_{\underline{i}}$$

aileleri ters spektrlerin morfizmalarıdır.

${C_{i_\alpha}}\big/{CM_\alpha}$ bölüm uzayında tüm CM_α konisi bir noktaya büzüldüğünden $M_\alpha \subset CM_\alpha$ da bir noktaya büzülür. Bu nedenle

$$X_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \xrightarrow{q_\alpha} {X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha}\big/{CM_\alpha}, \quad (q_\alpha \circ j_\alpha)(M_\alpha) = *$$

dır. Böylece

$$q_\alpha \circ j_\alpha : X_\alpha \to {X_\alpha \cup_{i\alpha} CM_\alpha}\big/{CM_\alpha}$$

dönüşümü M_α alt uzayını bir noktaya taşır. O zaman

$$\varphi_\alpha : X_\alpha / M_\alpha \to X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha / CM_\alpha$$

dönüşümü $x_\alpha \in X_\alpha$ için

$$\varphi_\alpha([x_\alpha]) = \varphi_\alpha(p_\alpha(x_\alpha)) = (q_\alpha \circ j_\alpha)(x_\alpha)$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\underline{q} \circ \underline{j} = \left(1_A : A \to A, \left\{ q_\alpha \circ j_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha / CM_\alpha \right\}_{\alpha \in A}\right) : \underline{X} \to C_{\underline{i}} / C\underline{M}$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. Buradan

$$\underline{\varphi} = \left(1_A : A \to A, \left\{ \varphi_\alpha : X_\alpha / M_\alpha \to X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha / CM_\alpha \right\}_{\alpha \in A}\right)$$

şeklinde tanımlanan $\underline{\varphi}$ morfizması için

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "j_\alpha"] \arrow[d, "p_\alpha"'] & X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \arrow[d, "q_\alpha"] \\ X_\alpha / M_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha / CM_\alpha \end{tikzcd} \qquad (7.17)$$

diyagramının komutatif olduğu açıktır. O halde $\forall \alpha \in A$ için

$$\underline{\varphi} \circ \underline{p} = \left(1_A : A \to A, \left\{\varphi_\alpha \circ p_\alpha : X_\alpha \to {C_{i_\alpha}}\big/{CM_\alpha}\right\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

$$\underline{q} \circ \underline{j} = \left(1_A : A \to A, \left\{q_\alpha \circ j_\alpha : X_\alpha \to {C_{i_\alpha}}\big/{CM_\alpha}\right\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

morfizmalarından ve (7.17) diyagramından yararlanarak

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\underline{j}"] \arrow[d, "\underline{p}"'] & C_{\underline{i}} \arrow[d, "\underline{q}"] \\ \underline{X}\big/\underline{M} \arrow[r, "\underline{\varphi}"'] & C_{\underline{i}}\big/C\underline{M} \end{tikzcd} \tag{7.18}$$

diyagramı elde edilir. (7.18) diyagramının komutatifliği ise (7.17) diyagramının komutatifliğinden gözükür. Şimdi $\forall \alpha \in A$ için

$$k_\alpha : X_\alpha \vee CM_\alpha \to {X_\alpha}\big/{M_\alpha} \tag{7.19}$$

dönüşümü

$$k_\alpha\big|_{X_\alpha} = p_\alpha : X_\alpha \to {X_\alpha}\big/{M_\alpha}, \; k_\alpha\big|_{CM_\alpha} = * \text{ (sabit)}$$

şeklinde tanımlansın. k_α dönüşümünün iyi tanımlı olduğu açıktır. $\underline{X} \vee C\underline{M} = \left(\{X_\alpha \vee CM_{\alpha'}\}_{(\alpha,\alpha') \in A\times A}\right)$ ailesi de bir ters spektrdir. Bu spektrin alt spektri ise indisler kümesinin elemanları $A \times A$ nın $\Delta(A)$ köşegenin elemanlarından oluşan $\underline{X} \vee C\underline{M} = \left(\{X_\alpha \vee CM_\alpha\}_{(\alpha,\alpha) \in A\times A}\right)$ şeklinde ters spektr olsun. O halde

$$\underline{k} = \left(1_A : A \to A, \left\{k_\alpha : X_\alpha \vee CM_\alpha \to {X_\alpha}\big/{M_\alpha}\right\}_{\alpha \in A}\right) : \underline{X} \vee C\underline{M} \to \underline{X}\big/\underline{M}$$

morfizması tanımlanabilir. $\forall \alpha \in A$ için (7.19) da tanımlanan k_α dönüşümü CM_α alt uzayını bir noktaya taşıdığından

$$\psi_\alpha : X_\alpha \vee CM_\alpha \big/ CM_\alpha \to X_\alpha \big/ M_\alpha \qquad \psi_\alpha([z_\alpha]) = k_\alpha(z_\alpha)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Burada

$$X_\alpha \vee CM_\alpha \big/ CM_\alpha = X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha \big/ CM_\alpha$$

dır. O zaman

$$\underline{\psi} = \left(1_A : A \to A, \left\{\psi_\alpha : X_\alpha \vee CM_\alpha \big/ CM_\alpha \to X_\alpha \big/ M_\alpha \right\}_{\alpha \in A}\right)$$

ters spektrlerin morfizmasıdır. Böylece,

$$\underline{\psi} : \underline{X} \vee C\underline{M} \big/ C\underline{M} = \underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M} \big/ C\underline{M} \to \underline{X} \big/ \underline{M}$$

$$\underline{\varphi} : \underline{X} \big/ \underline{M} \to \underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M} \big/ C\underline{M}$$

morfizmaları elde edilir. $\underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M} \big/ C\underline{M}$ ters spektri ile $\underline{X} \big/ \underline{M}$ ters spektrinin birbirine "homeomorf" olduğunu göstermek için

$$\underline{\psi} \circ \underline{\varphi} = 1_{\underline{X}/\underline{M}} \tag{7.20}$$

$$\underline{\varphi} \circ \underline{\psi} = 1_{\underline{X} \vee C\underline{M}/C\underline{M}} \tag{7.21}$$

eşitliklerinin sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

a) $\forall\alpha\in A$ için $[x_\alpha]\in X_\alpha/M_\alpha$ ve $x_\alpha\notin M_\alpha$ ise

$$(\psi_\alpha\circ\varphi_\alpha)([x_\alpha])=\psi_\alpha\circ(q_\alpha\circ j_\alpha(x_\alpha))=\psi_\alpha\circ(q_\alpha(x_\alpha))=\psi_\alpha([x_\alpha])=k_\alpha|_{X_\alpha}(x_\alpha)=$$
$$=p_\alpha(x_\alpha)=[x_\alpha]$$

b) $\forall\alpha\in A$ için $[x_\alpha]\in X_\alpha/M_\alpha$ ve $x_\alpha\in M_\alpha$ ise $[x_\alpha]=M_\alpha$ dır, yani $[x_\alpha]$ belirli noktadır.

$$(\psi_\alpha\circ\varphi_\alpha)([x_\alpha])=\psi_\alpha\circ(q_\alpha\circ j_\alpha(x_\alpha))=\psi_\alpha\circ(q_\alpha(x_\alpha))=\psi_\alpha([x_\alpha])=\psi_\alpha(M_\alpha)\overset{M_\alpha\subset CM_\alpha}{=}*$$

dır, yani $\psi_\alpha\circ\varphi_\alpha=1_{X_\alpha/M_\alpha}$ bulunur.

a) ve b) şıkları $\forall\alpha\in A$ için sağlandığından

$$\underline{\psi}\circ\underline{\varphi}=1_{\underline{X}/\underline{M}}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$\underline{\varphi}\circ\underline{\psi}=\left(1_A:A\to A,\left\{\varphi_\alpha\circ\psi_\alpha:X_\alpha\vee CM_\alpha/CM_\alpha\to X_\alpha\vee CM_\alpha/CM_\alpha\right\}_{\alpha\in A}\right)$$

dır. $\forall[y_\alpha]\in X_\alpha\vee CM_\alpha/CM_\alpha$ için

$$\varphi_\alpha\circ\psi_\alpha([y_\alpha])=\varphi_\alpha(\psi_\alpha(p_\alpha(y_\alpha)))=\varphi_\alpha\circ k_\alpha(y_\alpha)$$

dır.

1) $y_\alpha \in X_\alpha$ ise,

$$(\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha)([y_\alpha]) = (\varphi_\alpha \circ k_\alpha)(y_\alpha) = \varphi_\alpha(p_\alpha(y_\alpha)) = q_\alpha \circ j_\alpha(y_\alpha) = q_\alpha(y_\alpha) = [y_\alpha]$$

2) $y_\alpha \in CM_\alpha$ ise,

$$(\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha)([y_\alpha]) = \varphi(\psi_\alpha([y_\alpha])) = \varphi_\alpha(k_\alpha(y_\alpha)) = \varphi_\alpha(*) = *$$

dır. O halde $\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha = 1_{X_\alpha \vee CM_\alpha / CM_\alpha} = 1_{X_\alpha \cup_{i_\alpha} CM_\alpha / CM_\alpha}$ elde edilir.

1) ve 2) eşitlikleri $\forall \alpha \in A$ için sağlandığından

$$\underline{\varphi} \circ \underline{\psi} = 1_{\underline{X} \vee C\underline{M} / C\underline{M}} = 1_{\underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M} / C\underline{M}}$$

elde edilir. Buradan (7.20) ve (7.21) ifadelerinin doğru olduğu ispatlanır. Böylece $\underline{X} \cup_{\underline{i}} C\underline{M} / C\underline{M}$ ile $\underline{X} / \underline{M}$ ters spektrleri "homeomorftur".

Teorem 7.7: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin herhangi $\underline{f} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ morfizması için

$$(\underline{X}, \underline{x_0}) \xrightarrow{\underline{f}} (\underline{Y}, \underline{y_0}) \xrightarrow{\underline{i}} (C_{\underline{f}}, *) \xrightarrow{\underline{k'}} (S\underline{X}, *) \xrightarrow{S\underline{f}} (S\underline{Y}, *)$$

dizisi kotamdır.

İspat: $\forall \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \in Inv(Top_0)$ ters spektrleri ve $\forall \underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizması için Teorem 7.3 den

$$[\underline{X}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{f}^*} [\underline{Y}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{i}^*} [C_{\underline{f}}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{j}^*} [C_{\underline{i}}, \underline{Z}] \xleftarrow{\underline{l}^*} [C_{\underline{j}}, \underline{Z}]$$

dizisi tamdır.

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "\underline{f}"] & \underline{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & C_{\underline{f}} \arrow[r, "\underline{j}"] \arrow[dr, "\underline{k}'"'] & C_{\underline{i}} \arrow[r, "\underline{l}"] \arrow[d, "\underline{q}"] & C_{\underline{j}} \arrow[d, "\underline{q}'"] \\
 & & & S\underline{X} \arrow[r, "S\underline{f}"'] & S\underline{Y}
\end{tikzcd}$$

diyagramında Lemma 7.4, 7.5 ve 7.6 dan $\underline{q}$ ve $\underline{q}'$ morfizmaları homotopik denkliktir. Bundan yararlanarak

$$(\underline{X}, \underline{x_0}) \xrightarrow{\underline{f}} (\underline{Y}, \underline{y_0}) \xrightarrow{\underline{i}} (C_{\underline{f}}, *) \xrightarrow{\underline{k}'} (S\underline{X}, *) \xrightarrow{S\underline{f}} (S\underline{Y}, *)$$

dizisinin kotam olduğu elde edilir.

Teorem 7.7 deki tam dizi sağ yönde sonsuz devam ettirilebilir.

Teorem 7.8: Belirli noktalı topolojik uzayların herhangi $\underline{f} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (\underline{Y}, \underline{y_0})$ morfizması için

$$(\underline{X}, \underline{x_0}) \xrightarrow{\underline{f}} (\underline{Y}, \underline{y_0}) \xrightarrow{\underline{i}} (C_{\underline{f}}, *) \xrightarrow{\underline{k}'} (S\underline{X}, *) \xrightarrow{S\underline{f}} (S\underline{Y}, *) \to \ldots \to (S^n \underline{X}, *) \xrightarrow{S^n \underline{f}} (S^n \underline{Y}, *) \xrightarrow{S^n \underline{i}} (S^n (C_{\underline{f}}), *) \to \ldots$$

dizisi kotamdır.

İspat: İspat açıktır.

Böylece belirli noktalı topolojik uzayların dizilerinin kotam olduğu ispatlandı. Şimdi ise $Inv(Top_0)$ kategorisinde kotam diziye dualite olarak tam diziler tanımlanacaktır.

Lemma 7.9: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrinin $\underline{f}:(\underline{X},\underline{x_0})\to(\underline{Y},\underline{y_0})$ morfizması sabit morfizma ile homotoptur $\Leftrightarrow$ Homotopik sınıflarda $\underline{f}$ morfizmasının $\underline{p}\circ\underline{g}=\underline{f}$ olacak şekilde $\underline{g}:(\underline{X},\underline{x_0})\to(P\underline{Y},\underline{w_0})$ kaldırılması vardır.

Burada, $\underline{p}=\left(1_B : B\to B,\{p_\beta : Y_\beta{}^I \to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right): P\underline{Y}\to\underline{Y}$ $\quad\forall w_\beta\in Y_\beta^I$ için $p_\beta(w_\beta)=w_\beta(1)$ şeklinde tanımlanan morfizmadır.

İspat: "$\Rightarrow$" $\underline{f}:(\underline{X},\underline{x_0})\to(\underline{Y},\underline{y_0})$ ters spektrlerin morfizması $\underline{c}$ sabit morfizması ile spektral homotop olsun. Burada

$$\underline{c}=\left(\pi : B\to A,\{c_\beta : X_{\pi(\beta)}\to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)\quad \forall\beta\in B, x\in X_{\pi(\beta)} \text{ için } c_\beta(x)=y_{0\beta} \text{ dır.}$$

O zaman $\underline{f}\overset{s}{\sim}\underline{c}$ morfizmaları spektral homotop olduğu için tanım gereği,

$\forall\beta\in B$ için $\alpha\succ\pi(\beta)$ olacak şekilde $\alpha\in A$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^\alpha_{\pi(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "c_\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.22}$$

diyagramı homotopik komutatiftir, yani

$$f_\beta\circ p^\alpha_{\pi(\beta)}\sim c_\beta\circ p^\alpha_{\pi(\beta)}$$

dönüşümleri homotoptur. Lemma 7.1 de olduğu şekilde bu dönüşümler arasında $H_{\beta,t}$ homotopyaları ele alınabilir. Homotopik sınıflarda

$$\left(\chi : B\to A,\{H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)}\to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. O zaman (7.22) diyagramı

$$\begin{tikzcd}
& X_{\pi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[ur, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}"'] \arrow[rr, dotted, "H_{\beta,t}"] & & Y_\beta \\
& X_{\pi(\beta)} \arrow[ur, "c_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopik komutatif diyagramına dönüşür.

$$\underline{f'} = \left(\chi : B \to A, \left\{f'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y},\ f'_\beta = f_\beta \circ p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}$$

ters spektrlerin morfizmasıdır. Ters spektrlerin $\underline{c'}$ sabit morfizması ise

$$\underline{c'} = \left(\chi : B \to A, \left\{c'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y},\ c'_\beta = c_\beta \circ p^{\chi(\beta)}_{\pi(\beta)}$$

şeklinde olsun. $H_{\beta,t}$ homotopyası $f_\beta{}'$ ile $c_\beta{}'$ arasında homotopyadır, yani $\forall x \in X_{\chi(\beta)}$ için

$$H_\beta(x,0) = c'_\beta(x) = y_{0\beta}$$
$$H_\beta(x,1) = f'_\beta(x)$$
$$H_\beta(x_0,t) = y_{0\beta} = c'_\beta(x_0) = f'_\beta(x_0)$$

koşullarını sağlayan

$$H_{\beta,t} : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta$$

şeklindeki homotopyadır. Şimdi

$$H_\beta : X_{\chi(\beta)} \times I \to Y_\beta, \qquad H_\beta \in (Y_\beta)^{X_{\chi(\beta)}\times I}$$

$$E_\beta : Y_\beta^{X_{\chi(\beta)}\times I} \to \left(Y_\beta^{\,I}\right)^{X_{\chi(\beta)}}$$

dönüşümlerinden yararlanarak, $\forall \beta \in B$ için g_β dönüşümü

$$g_\beta(x)(t) = E_\beta(H_\beta)(x)(t) = H_\beta(x,t)$$

şeklinde tanımlanır. O halde $\forall \beta \in B$ için tanımlanan bu g_β dönüşümlerinden oluşan

$$\underline{g} = \left(\chi : B \to A, \left\{g_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta^{\,I}\right\}_{\beta\in B}\right) : \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \left(P\underline{Y}, \underline{w_0}\right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
X_{\chi(\beta')} \arrow[r, "g_{\beta'}"] \arrow[d, "p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}"'] & Y^I_{\beta'} \arrow[d, "(q^{\beta'}_\beta)_*"] \\
X_{\chi(\beta)} \arrow[r, "g_\beta"'] & Y^I_\beta
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir. Gerçekten, $\forall x \in X_{\chi(\beta')}$, $t \in I$ için

$$\left(\left(q^{\beta'}_\beta\right)_* \circ g_{\beta'}\right)(x)(t) = \left(q^{\beta'}_\beta\right)_*\left(H_{\beta'}(x,t)\right) = \left(q^{\beta'}_\beta \circ H_{\beta'}\right)(x,t) \tag{7.23}$$

$$\left(g_\beta \circ p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}\right)(x)(t) = g_\beta\left(p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}(x)\right)(t) = H_\beta\left(p^{\chi(\beta')}_{\chi(\beta)}(x), t\right) \tag{7.24}$$

elde edilir. (7.23) ve (7.24) ifadelerinin eşitliği ise

$$
\begin{tikzcd}
X_{\chi(\beta')} \times I \arrow[r, "H_{\beta'}"] \arrow[d, "p_{\chi(\beta)}^{\chi(\beta')} \times 1_I"'] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q_{\beta}^{\beta'}"] \\
X_{\chi(\beta)} \times I \arrow[r, "H_{\beta}"'] & Y_{\beta}
\end{tikzcd}
$$

diyagramının komutatifliğinden bulunur.

Son olarak, $\underline{p} \circ \underline{g} = \underline{f}'$ olduğu gösterilecektir. Burada

$$\underline{p} \circ \underline{g} = \left(\chi : B \to A, \{p_\beta \circ g_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$$

$$\underline{f}' = \left(\chi : B \to A, \{f'_\beta : X_{\chi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : \underline{X} \to \underline{Y}$$

dir. O zaman $\forall \beta \in B$ için $p_\beta \circ g_\beta = f'_\beta$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall x \in X_{\chi(\beta)}$, $t \in I$ için

$$(p_\beta \circ g_\beta)(x)(t) = p_\beta(H_\beta(x,t)) = H_\beta(x,1) = f'_\beta(x)$$

bulunur. Aynı zamanda Lemma 7.1 den dolayı $\underline{f}$ morfizması $\underline{f}'$ morfizması ile spektral homotoptur. Buradan teorem ispatlanır.

"$\Leftarrow$" Şimdi homotopik sınıflarda $\underline{f}$ morfizması ile spektral homotop olan $\underline{f}'$ morfizmasının $\underline{p} \circ \underline{g} = \underline{f}'$ olacak şekilde $\underline{g} : (\underline{X}, \underline{x_0}) \to (P\underline{Y}, \underline{w_0})$ şeklinde kaldırılması varolsun.

$$E_\beta : Y_\beta^{X_{\chi(\beta)} \times I} \to \left(Y_\beta^{\,I}\right)^{X_{\chi(\beta)}}$$

$$E_\beta^{-1} : \left(Y_\beta^{\,I}\right)^{X_{\chi(\beta)}} \to Y_\beta^{X_{\chi(\beta)} \times I}$$

dır. $\underline{g} \in \left(\underline{Y}^I\right)^{\underline{X}}$ olduğundan $\forall \beta \in B$ için $g_\beta \in \left(Y_\beta{}^I\right)^{X_{\chi(\beta)}}$ dır. O halde

$$H_\beta = E_\beta{}^{-1}\left(g_\beta\right): X_{\chi(\beta)} \times I \to Y_\beta$$

dönüşümü $H_\beta(x,t) = E_\beta{}^{-1}\left(g_\beta\right)(x,t) = g_\beta(x)(t)$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan

$$H_\beta : X_{\chi(\beta)} \times I \to Y_\beta$$

beklenilen homotopyadır. Gerçekten,

$$H_\beta(x,0) = g_\beta(x)(0) = y_{0\beta} = c'_\beta(x)$$
$$H_\beta(x,1) = g_\beta(x)(1) = p_\beta\left(g_\beta(x)\right) = f'_\beta(x)$$
$$H_\beta(x_0,t) = g_\beta(x_0)(t) = w_{0\beta}(t) = y_{0\beta} \qquad (w_{0\beta},\ \text{sabit dönüşümdür.})$$

dır. $\forall \beta \in B$ için $f'_\beta \sim c'_\beta$ dönüşümleri homotop olduğundan $\underline{f'} \overset{s}{\sim} \underline{c'}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu elde edilir. Buradan

$$\Rightarrow \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{f'},\ \underline{f'} \overset{s}{\sim} \underline{c'} \text{ ve } \underline{c'} \overset{s}{\sim} \underline{c} \Rightarrow \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{c}$$

morfizmaları spektral homotoptur.

Lemma 7.10: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin herhangi $\underline{g} : \left(\underline{Z}, \underline{z_0}\right) \to \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right)$ morfizması için $\underline{f} \circ \underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{c}_{y_0}$ morfizmaları spektral homotoptur $\Leftrightarrow$ Homotopik sınıflarda $\underline{g}$ morfizmasının $\underline{m} \circ \underline{h} = \underline{g}$ olacak şekilde $\underline{h} : \left(\underline{Z}, \underline{z_0}\right) \to \left(P_{\underline{f}}, *\right)$ kaldırılması vardır. Burada,

$$\underline{m} = \left(\rho : A = \pi(B) \to B, \left\{ m_{\pi(\beta)} : P_{f\beta} \to X_{\pi(\beta)} \right\}_{\beta \in B} \right), m_{\pi(\beta)}(x, w) = x, x \in X_{\pi(\beta)}, w \in PY_{\beta}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: “$\Rightarrow$” $\underline{Z} = \left(\{Z_d\}_{d \in D}, \{r_d^{d'} : Z_{d'} \to Z_d\}_{d' \succ d} \right)$

$$\underline{g} = \left(k : A \to D, \{ g_\alpha : Z_{k(\alpha)} \to X_\alpha \}_{\alpha \in A} \right) \tag{7.25}$$

$$\underline{f} \circ \underline{g} = \left(k \circ \pi : B \to D, \{ f_\beta \circ g_{\pi(\beta)} : Z_{k(\pi(\beta))} \to Y_\beta \}_{\beta \in B} \right)$$

$$\underline{c_{y_0}} = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{ c_{y_{0\beta}} : Z_{k(\pi(\beta))} \to Y_\beta \right\}_{\beta \in B} \right) \quad \forall z \in Z_{k(\pi(\beta))} \text{ için } c_{y_{0_\beta}}(z) = y_{0\beta}$$

$$P_{\underline{f}} = \left(\left\{ P_{f\beta} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \right\}_{\beta \in B}, \left\{ \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}, pq_\beta^{\beta'} \right) : P_{f\beta'} \to P_{f\beta} \right\}_{\beta \prec \beta'} \right) \subset \underline{X} \times P\underline{Y}$$

dır. $\underline{f} \circ \underline{g} \overset{s}{\sim} \underline{c_{y_0}}$ morfizmaları spektral homotop olduğundan tanım gereği, $\forall \beta \in B$ için $d \succ (k \circ \pi)(\beta)$ sağlanacak şekilde $d \in D$ vardır ve

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta \circ g_{\pi(\beta)}"] & \\
Z_d \arrow[ur, "r^d_{(k\circ\pi)(\beta)}"] \arrow[dr, "r^d_{(k\circ\pi)(\beta)}"'] & & Y_\beta \\
 & Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \arrow[ur, "c_{y_{0\beta}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.26}$$

diyagramı homotopik komutatifir, yani $f_\beta \circ g_{\pi(\beta)} \circ r^d_{(k\pi)(\beta)} \sim c_{y_{0\beta}} \circ r^d_{(k\pi)(\beta)}$ dönüşümleri homotoptur. Lemma 7.1 de olduğu şekilde bu dönüşümler arasında $H_{\beta,t}$ homotopyaları ele alınabilir. Homotopik sınıflarda,

$$\left(k \circ \pi : B \to D, \{ H_{\beta,t} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to Y_\beta \}_{\beta \in B} \right)$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. O zaman (7.26) diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta \circ g_{\pi(\beta)}"] & \\
Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \arrow[ur, "1^{(k\circ\pi)(\beta)}_{(k\circ\pi)(\beta)}"] \arrow[dr, "1^{(k\circ\pi)(\beta)}_{(k\circ\pi)(\beta)}"'] \arrow[rr, dotted, "H_{\beta,t}"] & & Y_\beta \\
 & Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \arrow[ur, "c_{y_{0\beta}}"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopik komutatif diyagramına dönüşür.

$$\underline{f'} = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{f'_{(k\circ\pi)(\beta)} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : \underline{Z} \to \underline{Y}$$

$$f'_{(k\circ\pi)(\beta)} = f_\beta \circ g_{\pi(\beta)} \circ 1^{(k\circ\pi)(\beta)}_{(k\circ\pi)(\beta)} = f_\beta \circ g_{\pi(\beta)}$$

ters spektrlerin morfizmasıdır. Ters spektrlerin $\underline{c'}$ sabit morfizması ise

$$\underline{c'} = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{c'_{(k\circ\pi)(\beta)} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right) : \underline{Z} \to \underline{Y}$$

$$c'_{(k\circ\pi)(\beta)} = c_{y_{0\beta}} \circ 1^{(k\circ\pi)(\beta)}_{(k\circ\pi)(\beta)} = c_{y_{0\beta}}$$

şeklinde olsun. $H_{\beta,t}$ homotopyası, $f'_{(k\circ\pi)(\beta)}$ ile $c'_{(k\circ\pi)(\beta)}$ dönüşümleri arasında bir homotopyadır, yani $\forall z \in Z_{(k\circ\pi)(\beta)}$ için

$$H_\beta(z,0) = c'_{y_{0\beta}}(z),\ H_\beta(z,1) = f'_{(k\circ\pi)(\beta)}(z),\ H_\beta(z_0,t) = c'_{y_{0\beta}}(z_0) = y_{0\beta} = f'_{(k\circ\pi)(\beta)}(z_0)$$

koşullarını sağlayan $H_{\beta,t} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to Y_\beta$ şeklindeki homotopyadır. Lemma 7.9'a göre $f'_{(k\circ\pi)(\beta)}$ dönüşümünün $p_\beta \circ h'_\beta = f'_{(k\circ\pi)(\beta)} = f_\beta \circ g_{\pi(\beta)}$ sağlanacak şekilde $h'_\beta : Z_{k\pi(\beta)} \to PY_\beta$ kaldırılması vardır. Bu durum $\forall\beta \in B$ için sağlandığından

$$\underline{p} \circ \underline{h'} = \underline{f} \circ \underline{g}$$

koşulu sağlanacak şekilde

$$\underline{h'} = \left(k \circ \pi : B \to D, \{h'_\beta : Z_{(k \circ \pi)(\beta)} \to PY_\beta\}_{\beta \in B}\right) : \underline{Z} \to P\underline{Y}$$

morfizması vardır. Şimdi $\underline{g} : \underline{Z} \to \underline{X}$, $\underline{h'} : \underline{Z} \to P\underline{Y}$ morfizmalarından yararlanarak

$$(\underline{g}, \underline{h'}) : \underline{Z} \to \underline{X} \times P\underline{Y}$$

morfizması tanımlanabilir. Burada

$$\underline{X} \times P\underline{Y} = \left(\{X_\alpha \times PY_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}, \{p_\alpha^{\alpha'} \times (q_\beta^{\beta'})_* : X_{\alpha'} \times PY_{\beta'} \to X_\alpha \times PY_\beta\}_{(\alpha,\beta) \prec (\alpha',\beta')}\right)$$

ters spektri için $\underline{X} \times P\underline{Y} = \left(\{X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta\}_{\beta \in B}\right)$ alt ters spektri alınsın. O zaman

$$(\underline{g}, \underline{h'}) = \left(k \circ \pi : B \to D, \{(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta) : Z_{(k \circ \pi)(\beta)} \to X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta\}_{\beta \in B}\right) \tag{7.27}$$

dir. Eğer $(\underline{g}, \underline{h'})(\underline{Z}) \subset P_{\underline{f}}$ olduğu gösterilirse

$$\underline{h} : \underline{Z} \to P_{\underline{f}}$$

morfizması tanımlanmış olur. Bunun için ise $\forall \beta \in B$ için $(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta)(Z_{(k \circ \pi)(\beta)}) \subset P_{f_\beta}$ kapsamasının gösterilmesi yeterlidir yani $z \in Z_{(k \circ \pi)(\beta)}$ için

$$(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta)(z) = (g_{\pi(\beta)}(z), h'_\beta(z)) \in P_{f_\beta} \Rightarrow f_\beta(g_{\pi(\beta)}(z)) = h'_\beta(z)(1)$$

koşulunun sağlanması gerekir. h'_β dönüşümünün tanımından

$$(f_\beta \circ g_{\pi(\beta)})(z) = (p_\beta \circ h'_\beta)(z)$$

dir. Bu $\forall \beta \in B$ için sağlandığından $(\underline{g}, \underline{h'})(\underline{Z}) \subset P_{\underline{f}}$ elde edilir. Böylece

$\underline{h} : \underline{Z} \to P_{\underline{f}}$

morfizması bulunur. Şimdi bulunan $\underline{h} : \underline{Z} \to P_{\underline{f}}$ morfizmasının

$$\underline{m} \circ \underline{h} = \underline{g} \tag{7.28}$$

koşulunu sağladığı gösterilecektir. Tanımlanan $\underline{m}$ ve $(\underline{g}, \underline{h'})$ morfizmaları için bileşke

$$\underline{m} \circ (\underline{g}, \underline{h'}) = \left(k \circ \pi \circ \rho : A = \pi(B) \to D, \left\{m_{\pi(\beta)} \circ \left(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta\right) : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to X_{\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right)$$

şeklindedir. π örten dönüşüm olduğu için (7.25) de tanımlanan $\underline{g}$ morfizması

$$\underline{g} = \left(k : \pi(B) \to D, \left\{g_{\pi(\beta)} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to X_{\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right)$$

veya

$$\underline{g} = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{g_{\pi(\beta)} : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to X_{\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right)$$

biçiminde yazılabilir. (7.28) koşulunun sağlandığını göstermek için $\forall \beta \in B$ için $m_{\pi(\beta)} \circ \left(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta\right) = g_{\pi(\beta)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $\forall z \in Z_{(k\circ\pi)(\beta)}$ için

$$\left(m_{\pi(\beta)} \circ \left(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta\right)\right)(z) = m_{\pi(\beta)}\left(g_{\pi(\beta)}(z), h'_\beta(z)\right) = g_{\pi(\beta)}(z)$$

bulunur.

"$\Leftarrow$" Homotopik sınıflarda $\underline{g}$ morfizmasının $\underline{m} \circ \underline{h} = \underline{g}$ olacak şekilde $\underline{h} : (\underline{Z}, \underline{z_0}) \to (P_{\underline{f}}, *)$ kaldırılması olsun. Burada,

$$\underline{h} = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{h_\beta : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to P_{f_\beta}\right\}_{\beta\in B}\right) : (\underline{Z}, \underline{z_0}) \to (P_{\underline{f}}, *)$$

biçimindedir.

$$\begin{tikzcd}
\underline{Z} \arrow[r, "\underline{h}"] \arrow[dr, "\underline{m}\circ\underline{h}=\underline{g}"'] & P_{\underline{f}} \subset \underline{X} \times P\underline{Y} \arrow[d, "\underline{m}"] \\
 & \underline{X}
\end{tikzcd}$$

diyagramından yararlanarak

$$\underline{Z} \xrightarrow{\underline{h}} \underline{X} \times P\underline{Y} \xrightarrow{\underline{p_{r_2}}} P\underline{Y} = \underline{Y}^I, \ \underline{h}' = \underline{p_{r_2}} \circ \underline{h}$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$\underline{p_{r_2}} = \left(1_B : B \to B, \left\{p_{r_{2_\beta}} : X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \to PY_\beta\right\}_{\beta\in B}\right)$$

$$\underline{p_{r_2}} \circ \underline{h} = \underline{p_{r_2}} \circ (\underline{g}, \underline{h}') = \left(k \circ \pi : B \to D, \left\{p_{r_{2_\beta}} \circ \left(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta\right) : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \to PY_\beta\right\}_{\beta\in B}\right)$$

dır. $T_\beta = p_{r_{2_\beta}} \circ \left(g_{\pi(\beta)}, h'_\beta\right)$ şeklinde gösterilirse $T_\beta \in \left(Y_\beta^I\right)^{Z_{(k\circ\pi)(\beta)}}$ elemanıdır. O zaman $E_\beta^{-1} : \left(Y_\beta^I\right)^{Z_{(k\circ\pi)(\beta)}} \to Y_\beta^{Z_{(k\circ\pi)(\beta)}\times I}$ homeomorfizması ve T_β dönüşümünden yararlanarak

$$H_\beta = E_\beta^{-1}(T_\beta) : Z_{(k\circ\pi)(\beta)} \times I \to Y_\beta$$

dönüşümü

$$H_\beta(z,t) = \left(E_\beta^{-1}(T_\beta)\right)(z,t) = T_\beta(z)(t)$$

biçiminde tanımlansın. O halde H_β dönüşümünden yararlanarak elde edilen

$$\underline{H}=\left(k\circ\pi:B\to D,\left\{H_\beta:Z_{(k\circ\pi)(\beta)}\times I\to Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right):\underline{Z}\times I\to\underline{Y}$$

ailesi ters spektrlerin morfizmasıdır. Şimdi $\forall z\in Z_{(k\circ\pi)(\beta)}$ için

$$H_\beta(z,0)=T_\beta(z)(0)=\left(p_{r_{2\beta}}\circ\left(g_{\pi(\beta)},h'_\beta\right)\right)(z)(0)=h'_\beta(z)(0)=y_{0_\beta}=c_{y_{0_\beta}}(z)$$

$$H_\beta(z,1)=T_\beta(z)(1)=\left(p_{r_{2\beta}}\circ\left(g_{\pi(\beta)},h'_\beta\right)\right)(z)(1)=h'_\beta(z)(1)=\left(f_\beta\circ g_{\pi(\beta)}\right)(z)$$

$$\begin{aligned}H_\beta(z_0,t)&=T_\beta(z_0)(t)=\left(p_{r_{2\beta}}\circ\left(g_{\pi(\beta)},h'_\beta\right)\right)(z_0)(t)=h'_\beta(z_0)(t)=y_{0_\beta}(t)=y_{0_\beta}=\\&=c_{y_{0_\beta}}(z_0)=\left(f_\beta\circ g_{\pi(\beta)}\right)(z_0)\end{aligned}$$

elde edilir. H_β dönüşümü $c_{y_{0_\beta}}$ ile $f_\beta\circ g_{\pi(\beta)}$ dönüşümleri arasındaki homotopyadır, yani $f_\beta\circ g_{\pi(\beta)}\sim c_{y_{0_\beta}}\ rel\{*\}$ dönüşümleri homotoptur. Bu durum $\forall\beta\in B$ için sağlandığından

$$\underline{f}\circ\underline{g}\overset{s}{\sim}\underline{c_{y_0}}$$

morfizmalarının spektral homotop olması elde edilir. Böylece lemma ispatlanır.

Teorem 7.11: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin $\forall\underline{f}:\left(\underline{X},\underline{x_0}\right)\to\left(\underline{Y},\underline{y_0}\right)$ morfizması için

$$\left(\underline{Y},\underline{y_0}\right)\xleftarrow{\underline{f}}\left(\underline{X},\underline{x_0}\right)\xleftarrow{\underline{m}}\left(P_{\underline{f}},*\right)$$

dizisi tamdır.

İspat: $\forall \underline{W} \in Inv(Top_0)$ için,

$$[\underline{W}, \underline{Y}] \xleftarrow{\underline{f}_*} [\underline{W}, \underline{X}] \xleftarrow{\underline{m}_*} [\underline{W}, P_{\underline{f}}]$$

homotopik kümeler dizisinin tam olduğunu göstermek gerekir. $\lfloor \underline{\varphi} \rfloor \in \lfloor \underline{W}, P_{\underline{f}} \rfloor$ için

$$\underline{Y} \xleftarrow{\underline{f}} \underline{X} \xleftarrow{\underline{m}} P_{\underline{f}} \xleftarrow{\underline{\varphi}} \underline{W}$$

$$\underline{f}_* \circ \underline{m}_*(\lfloor \underline{\varphi} \rfloor) = \underline{f}_*(\lfloor \underline{m} \circ \underline{\varphi} \rfloor) = \lfloor \underline{f} \circ \underline{m} \circ \underline{\varphi} \rfloor \tag{7.29}$$

dir. Eğer $\underline{h} = 1_{P_{\underline{f}}}$ olarak alınırsa $\underline{h}$ morfizması, $\underline{m}$ morfizmasının $\underline{m} \circ \underline{h} = \underline{m}$ şartını sağlayan kaldırılması olduğundan Lemma 7.10 'a göre $\underline{f} \circ \underline{m} \overset{s}{\sim} \underline{c}_{y_0}$ morfizmaları spektral homotoptur. Bu (7.29) da yerine yazılırsa

$$\underline{f}_* \circ \underline{m}_*(\lfloor \underline{\varphi} \rfloor) = \lfloor \underline{f} \circ \underline{m} \circ \underline{\varphi} \rfloor = \lfloor \underline{c}_{y_0} \circ \underline{\varphi} \rfloor = \lfloor \underline{c}_{y_0} \rfloor \tag{7.30}$$

bulunur. O halde

$$\operatorname{Im} \underline{m}_* \subset Ker \underline{f}_* \tag{7.31}$$

kapsaması elde edilir. Eğer

$$Ker \underline{f}_* \subset \operatorname{Im} \underline{m}_*$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\forall \lfloor \underline{\psi} \rfloor \in Ker \underline{f}_*$ olsun.

$$\underline{f}_*(\lfloor \underline{\psi} \rfloor) = \lfloor \underline{f} \circ \underline{\psi} \rfloor = [\underline{*}] \Rightarrow \underline{f} \circ \underline{\psi} \overset{s}{\sim} \underline{*}$$

morfizmaları spektral homotoptur. Lemma 7.10 dan $\underline{\psi}:\underline{W}\to\underline{X}$ morfizmasının homotopik sınıfta

$$\begin{tikzcd} \underline{W} \arrow[r, "\underline{\psi}"] \arrow[d, "\underline{r}"'] & \underline{X} \\ P_{\underline{f}} \arrow[ur, "\underline{m}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını komutatif yapacak şekilde $\underline{m}\circ\underline{r}=\underline{\psi}$ şartını sağlayan

$\underline{r}:\underline{W}\to P_{\underline{f}}$

kaldırılması vardır. Burada $[\underline{r}]\in[\underline{W},P_{\underline{f}}]$ dir. O halde

$$\underline{m}_*([\underline{r}])=[\underline{m}\circ\underline{r}]=[\underline{\psi}]\Rightarrow[\underline{\psi}]\in\operatorname{Im}\underline{m}_*\Rightarrow Ker\underline{f}_*\subset\operatorname{Im}\underline{m}_* \tag{7.32}$$

elde edilir. (7.31) ve (7.32) den

$Ker\underline{f}_*=\operatorname{Im}\underline{m}_*$

bulunur.

Teorem 7.12: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin herhangi $\forall\underline{f}:(\underline{X},\underline{x}_0)\to(\underline{Y},\underline{y}_0)\in Inv(Top_0)$ için

$$(\underline{Y},\underline{y}_0)\xleftarrow{\underline{f}}(\underline{X},\underline{x}_0)\xleftarrow{\underline{m}}(P_{\underline{f}},*)\xleftarrow{\underline{\rho}}(P_{\underline{m}},*)\xleftarrow{\underline{\sigma}}(P_{\underline{\rho}},*) \tag{7.33}$$

dizisi tamdır. Burada $\underline{m},\underline{\rho},\underline{\sigma}$ projeksiyon dönüşümlerinden oluşan morfizmalardır.

İspat: $\underline{m} : P_{\underline{f}} \to \underline{X}$ morfizması için

$$P_{\underline{m}} = \left(\left\{P_{m\pi(\beta)} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right) \subset P_{\underline{f}} \times P\underline{X} \subset \underline{X} \times P\underline{Y} \times P\underline{X}$$ şeklinde

$\underline{\rho} : P_{\underline{m}} \to P_{\underline{f}}$ morfizması için

$$P_{\underline{\rho}} = \left(\left\{P_{\rho\beta} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)} \times P\left(X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta\right)\right\}_{\beta \in B}\right)$$

biçiminde yazılır. (7.33) deki dizinin tamlığı $\underline{f}$ ve $\underline{m}$ morfizmaları için Teorem 7.11 de gösterilmişti. Benzer şekilde; $\underline{\rho}$ ve $\underline{\sigma}$ morfizmaları içinde dizinin tamlığı aynı şekilde gösterilir.

Lemma 7.13: Belirli noktalı topolojik uzayların ters spektrlerinin herhangi $\forall \underline{f} : \left(\underline{X}, \underline{x_0}\right) \to \left(\underline{Y}, \underline{y_0}\right) \in Inv(Top_0)$ morfizması için

$$\underline{q} : \Omega\underline{Y} \to P_{\underline{m}}$$

morfizması homotopik denkliktir.

İspat: $\Omega\underline{Y} = \left(\underline{Y}\right)^I = \left(\left\{Y_\beta{}^I\right\}_{\beta \in B}, \left\{\forall t \in I \text{ için } w_\beta(1) = y_{0\beta} = w_\beta(0)\right\}\right)$ ters spektri ve

$\underline{q} = \left(1_B : B \to B, \left\{q_\beta : Y_\beta{}^I \to P_{m\pi(\beta)} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right)$. $\forall \beta \in B$ için $q_\beta\left(w_\beta\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta, w_{0x\pi(\beta)}\right)$ morfizması bu şekilde tanımlanır. Burada $\forall t \in I$ için $w_{0x\pi(\beta)}(t) = x_{0\pi(\beta)}$ dır.

$$P_{\underline{m}} = \left\{\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x_{\pi(\beta)}}\right) \in X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)} : f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right) = w_\beta(1), x_{\pi(\beta)} = w_{x_{\pi(\beta)}}(1)\right\}$$

dir. Gerçekten,

$$P_{\underline{m}} = \left\{\left(z_\beta, w_{x_{\pi(\beta)}}\right) \in P_{f\beta} \times PX_{\pi(\beta)} : m_{\pi(\beta)}\left(z_\beta\right) = w_{x_{\pi(\beta)}}(1)\right\}$$

$$P_{\underline{m}} = \left\{ \begin{array}{l} \left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x_{\pi(\beta)}}\right) \in X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)} : f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right) = \\ = p_\beta\left(w_\beta\right), m_{\pi(\beta)}\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta\right) = x_{\pi(\beta)} \end{array} \right\}$$

$$P_{\underline{m}} = \left\{\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x_{\pi(\beta)}}\right) \in X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)} : f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right) = w_\beta(1), x_{\pi(\beta)} = w_{x_{\pi(\beta)}}(1)\right\}$$

elde edilir.

$\forall w_\beta \in \Omega Y_\beta$ için $q_\beta\left(w_\beta\right) \in P_{m\pi(\beta)}$ dir. Gerçekten, $q_\beta\left(w_\beta\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta, w_{0x\pi(\beta)}\right)$ idi. O halde, $f_\beta\left(x_{0\pi(\beta)}\right) = y_{0\beta} \Rightarrow y_{0\beta} = w_\beta(1) \Rightarrow f_\beta\left(x_{0\pi(\beta)}\right) = w_\beta(1)$ dir. $w_{0\pi(\beta)}$ sabit yol olduğundan $\forall t \in I$ için $w_{0x\pi(\beta)}(1) = x_{0\pi(\beta)}$ bulunur. O zaman $f_\beta\left(x_{0\pi(\beta)}\right) = w_\beta(1)$ ve $w_{0x\pi(\beta)}(1) = x_{0\pi(\beta)}$ sağlandığı için $q_\beta\left(w_\beta\right) \in P_{m\pi(\beta)}$ dır. $\forall \beta \in B$ için sağlandığından $\underline{q}\left(\Omega \underline{Y}\right) \subset P_{\underline{m}}$ elde edilir.

$\underline{q} : \Omega \underline{Y} \to P_{\underline{m}}$ ters spektlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
Y^I_{\beta'} \arrow[r, "\left(q^{\beta'}_\beta\right)_*"] \arrow[d, "q_{\beta'}"'] & Y^I_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \\
P_{m_{\pi(\beta')}} \arrow[r, "A|_{P_{m_{\pi(\beta')}}}"'] & P_{m_{\pi(\beta)}}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olmalıdır. Burada

$$P_{m\pi(\beta')} \subset X_{\pi(\beta')} \times Y_{\beta'}{}^I \times X_{\pi(\beta')}{}^I \quad , \quad P_{m\pi(\beta)} \subset X_{\pi(\beta)} \times Y_\beta{}^I \times X_{\pi(\beta)}{}^I$$

$$A = p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \times \left(q^{\beta'}_\beta\right)_* \times \left(p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)}\right)_* : X_{\pi(\beta')} \times Y_{\beta'}{}^I \times X_{\pi(\beta')}{}^I \to X_{\pi(\beta)} \times Y_\beta{}^I \times X_{\pi(\beta)}{}^I$$

için $A|_{P_{\pi(\beta')}} : P_{m\pi(\beta')} \to P_{m\pi(\beta)}$ şeklindedir. $\forall w_{\beta'} \in Y_{\beta'}{}^I$ için

$$\left(q_\beta \circ \left(q_\beta^{\beta'}\right)_*\right)\left(w_{\beta'}\right) = q_\beta\left(q_\beta^{\beta'} \circ w_{\beta'}\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, q_\beta^{\beta'} \circ w_{\beta'}, w_{0x(\beta)}\right) \tag{7.34}$$

$$\begin{aligned}\left(A\big|_{P_{m\pi(\beta')}} \circ q_{\beta'}\right)\left(w_{\beta'}\right) &= A\big|_{P_{m\pi(\beta')}}\left(x_{0\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{0x\pi(\beta')}\right) \\ &= \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{o\pi(\beta')}\right), \left(q_\beta^{\beta'}\right)_*\left(w_{\beta'}\right), \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\right)_*\left(w_{0x\pi(\beta')}\right)\right) \\ &= \left(x_{0\pi(\beta)}, q_\beta^{\beta'} \circ w_{\beta'}, w_{0x\pi(\beta)}\right)\end{aligned} \tag{7.35}$$

dir. (7.34) ve (7.35) ifadelerinden diyagramın komutatif olduğu bulunur. O halde $\underline{q}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

Şimdi $\underline{q}$ morfizmasının homotopik denklik olduğunu göstermek için gerekli olan bazı morfizmalar tanımlanacaktır.

$$\underline{r} = \left(1_B : B \to B, \left\{r_\beta : P_{m\pi(\beta)} \to \Omega Y_\beta\right\}_{\beta \in B}\right) : P_{\underline{m}} \to \Omega \underline{Y} \tag{7.36}$$

$$r_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}\right) = w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)^{-1}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)(0) = f_\beta\left(w_{x\pi(\beta)}(0)\right) = f_\beta\left(x_{0\pi(\beta)}\right) = y_{0\beta} = w_\beta(1)$$

$$\left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)(1) = f_\beta\left(w_{x\pi(\beta)}(1)\right) = f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right) = w_\beta(1)$$

sağlandığından 7.36 daki $r_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}\right) \in \Omega Y_\beta$ dır. $\forall \beta \in B$ için doğru olduğundan $\underline{r}\left(P_{\underline{m}}\right) \subset \Omega \underline{Y}$ bulunur.

r_β iyi tanımlıdır. $\forall \beta \in B$ için r_β iyi tanımlı olduğundan $\underline{r}$ morfizmasıda iyi tanımlıdır.

$\underline{r} : P_{\underline{m}} \to \Omega \underline{Y}$ ters spektrlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
P_{m_{\pi(\beta')}} \arrow[r, "r_{\beta'}"] \arrow[d, "A|_{P_{m_{\pi(\beta')}}}"'] & Y^I_{\beta'} \arrow[d, "(q^{\beta'}_{\beta})_*"] \\
P_{m_{\pi(\beta)}} \arrow[r, "r_{\beta}"'] & Y^I_{\beta}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olmalıdır. Gerçekten, $\forall\left(x_{\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{x_{\pi(\beta')}}\right) \in P_{m_{\pi(\beta')}}$ için

$$\begin{aligned}
\left(\left(q^{\beta'}_{\beta}\right)_* \circ r_{\beta'}\right)\left(x_{\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}\right) &= \left(q^{\beta'}_{\beta}\right)_* \circ \left(w_{\beta'} * \left(f_{\beta'} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1}\right) \\
&= q^{\beta'}_{\beta} \circ \left(w_{\beta'} * \left(f_{\beta'} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1}\right) \\
&= \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ w_{\beta'}\right) * \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ \left(f_{\beta'} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1}\right) \\
&= \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ w_{\beta'}\right) * \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ f_{\beta'} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1} \\
&= \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ w_{\beta'}\right) * \left(f_{\beta} \circ p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1} \qquad (7.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(r_{\beta} \circ A|_{P_{m\pi(\beta')}}\right)\left(x_{\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}\right) &= r_{\beta}\left(p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)}\left(x_{\pi(\beta')}\right), \left(q^{\beta'}_{\beta}\right)_*\left(w_{\beta'}\right), \left(p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)}\right)_*\left(w_{x\pi(\beta')}\right)\right) \\
&= r_{\beta}\left(x_{\pi(\beta)}, \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ w_{\beta'}\right), \left(p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)\right) \\
&= \left(q^{\beta'}_{\beta} \circ w_{\beta'}\right) * \left(f_{\beta} \circ p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)^{-1} \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

dir. (7.37) ve (7.38) ifadelerinden diyagramın komutatif olduğu bulunur. O halde $\underline{r}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

$$\underline{H} = \left(1_B : B \to B, \left\{H_{\beta} : \Omega Y_{\beta} \times I \to \Omega Y_{\beta}\right\}_{\beta \in B}\right) : \Omega\underline{Y} \times I \to \Omega\underline{Y}$$

$$H_{\beta}\left(w_{\beta}, t\right)(s) = \begin{cases} w_{\beta}\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & , 0 \le s \le \dfrac{t+1}{2} \\ y_{0\beta} & , \dfrac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $\underline{H}$ iyi tanımlıdır.

$H_{\beta}(w_{\beta},t) \in \Omega Y_{\beta}$ dır. Gerçekten,

$$H_{\beta}(w_{\beta},t)(0) = w_{\beta}(0) = y_{0\beta}$$
$$H_{\beta}(w_{\beta},t)(1) = y_{0\beta}$$

dır, yani yolun başlangıcı ve sonu $y_{0\beta}$ olduğu için $H_{\beta}(w_{\beta},t) \in \Omega Y_{\beta}$ dır. $\forall \beta \in B$ için sağlandığından $\underline{H}(\Omega \underline{Y} \times I) \subset \Omega \underline{Y}$ elde edilir.

$\underline{H} : \Omega \underline{Y} \times I \to \Omega \underline{Y}$ ters spektrlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
Y_{\beta'}^{I} \times I \arrow[r, "H_{\beta'}"] \arrow[d, "(q_{\beta}^{\beta'})_{*} \times 1_{I}"'] & Y_{\beta'}^{I} \arrow[d, "(q_{\beta}^{\beta'})_{*}"] \\
Y_{\beta}^{I} \times I \arrow[r, "H_{\beta}"'] & Y_{\beta}^{I}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olmalıdır. Gerçekten, $\forall (w_{\beta'},t) \in Y_{\beta'}{}^{I} \times I$ için

$$\left((q_{\beta}^{\beta'})_{*} \circ H_{\beta'}\right)(w_{\beta'},t)(s) = (q_{\beta}^{\beta'})_{*} \circ \begin{cases} w_{\beta'}\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & ,0 \le s \le \dfrac{t+1}{2} \\ y_{0\beta'} & ,\dfrac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} q_{\beta}^{\beta'} \circ w_{\beta'}\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & ,0 \le s \le \dfrac{t+1}{2} \\ q_{\beta}^{\beta'}(y_{0\beta'}) = y_{0\beta} & ,\dfrac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{7.39}$$

$$\left(H_\beta \circ \left(\left(q_\beta^{\beta'}\right)_* \times 1_I\right)\right)\left(w_{\beta'},t\right)(s) = H_\beta \circ \left(\left(q_\beta^{\beta'}\right)_*\left(w_{\beta'}\right),t\right)(s)$$

$$= H_\beta \circ \left(q_\beta^{\beta'} \circ w_{\beta'},t\right)(s)$$

$$= \begin{cases} q_\beta^{\beta'} \circ w_{\beta'}\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & ,0 \le s \le \dfrac{t+1}{2} \\ q_\beta^{\beta'}\left(y_{0\beta'}\right) = y_{0\beta} & ,\dfrac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{7.40}$$

dir. (7.39) ve (7.40) ifadelerinden diyagramın komutatif olduğu bulunur. O halde $\underline{H}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

$$\underline{K} = \left(1_B : B \to B, \left\{K_\beta : P_{m\pi(\beta)} \times I \to P_{m\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right) : P_{\underline{m}} \times I \to P_{\underline{m}}$$

$$K_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right) = \left(w_{x\pi(\beta)}(t), \varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right), w_{x\pi(\beta),t}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$w_{x\pi(\beta),t}(s) = w_{x\pi(\beta)}(st) \quad s,t \in I \quad , \quad w_{x\pi(\beta)} \in PX_{\pi(\beta)}$$

$$\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right)(s) = \begin{cases} w_\beta(s(2-t)) & ,0 \le s \le \dfrac{1}{2-t} \quad t \in I, w_\beta \in PY_\beta \\ f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}(s(t-2)+2) & ,\dfrac{1}{2-t} \le s \le 1 \quad w_{x\pi(\beta)} \in PX_{\pi(\beta)} \end{cases}$$

dır. $K_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right) \in P_{m\pi(\beta)}$ dır. Gerçekten,

1) $w_{x\pi(\beta)} : I \to X_{\pi(\beta)}$ olduğundan $\forall t \in I$ için $w_{x\pi(\beta)}(t) \in X_{\pi(\beta)}$ dır.

2) $\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right)(0) = w_\beta(0) = y_{0\beta}$

$\forall \beta \in B$ için φ_β iyi tanımlıdır,çünkü $s = \dfrac{1}{2-t}$ için

$$\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right)\left(\frac{1}{2-t}\right) = w_\beta(1) = f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)$$

$$\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right)\left(\frac{1}{2-t}\right) = f_\beta\left(w_{x\pi(\beta)}(1)\right) = f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)$$

sağlanır. Aynı zamanda φ_β süreklidir. O halde $\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right) \in PY_\beta$ dır.

3) $w_{x\pi(\beta),t}(s) = w_{x\pi(\beta)}(st) \in PX_{\pi(\beta)}$ dır.

1), 2) ve 3) den $K_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, t\right) \in P_{m\pi(\beta)}$ elde edilir. $\forall \beta \in B$ için 1), 2) ve 3) sağlandığından $\underline{K}\left(P_{\underline{m}} \times I\right) \subset P_{\underline{m}}$ bulunur.

$\underline{K} : P_{\underline{m}} \times I \to P_{\underline{m}} \subset \underline{X} \times P\underline{Y} \times P\underline{X}$ ters spektrlerin morfizmasıdır, yani $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd}
P_{m_{\pi(\beta')}} \times I \arrow[r, "K_{\beta'}"] \arrow[d, "A|_{P_{m_{\pi(\beta')}}} \times 1_I"'] & P_{m_{\pi(\beta')}} \arrow[d, "A|_{P_{m_{\pi(\beta')}}}"] \\
P_{m_{\pi(\beta)}} \times I \arrow[r, "K_\beta"'] & P_{m_{\pi(\beta)}}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olmalıdır. Gerçekten, $\left(x_{\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}, t\right) \in P_{m\pi(\beta')} \times I$ için

$$\left(A|_{P_{m\pi(\beta')}} \circ K_{\beta'}\right)\left(x_{\pi(\beta')}, w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}, t\right) = A|_{P_{m\pi(\beta')}} \circ \left(w_{x\pi(\beta')}(t), \varphi_{\beta'}\left(w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}, t\right), w_{x\pi(\beta'),t}\right)$$
$$= \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(w_{x\pi(\beta')}(t)\right), \left(q_\beta^{\beta'}\right)_* \circ \left(\varphi_{\beta'}\left(w_{\beta'}, w_{x\pi(\beta')}, t\right)\right), \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\right)_*\left(w_{x\pi(\beta'),t}\right)\right)$$
$$= \left[\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')} \circ w_{x\pi(\beta')}\right)(t), \left(q_\beta^{\beta'}\right)_* \circ \left(\begin{cases} w_{\beta'}(s(2-t)) & , 0 \le s \le \dfrac{1}{2-t} \\ f_{\beta'} \circ w_{x\pi(\beta')}(s(t-2)+2) & , \dfrac{1}{2-t} \le s \le 1 \end{cases}\right), \left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')} \circ w_{x\pi(\beta'),t}\right)\right]$$

$$=\left[\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)(t),\left(\begin{cases} q_{\beta}^{\beta'}\circ w_{\beta'}(s(2-t)) & ,0\leq s\leq\frac{1}{2-t}\\ q_{\beta}^{\beta'}\circ f_{\beta'}\circ w_{x\pi(\beta')}(s(t-2)+2) & ,\frac{1}{2-t}\leq s\leq 1\end{cases}\right),\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta'),t}\right)\right] \tag{7.41}$$

$$\left(K_{\beta}\circ\left(A|_{P_{m\pi(\beta')}}\times 1_I\right)\right)\left(x_{\pi(\beta')},w_{\beta'},w_{x\pi(\beta')},t\right)=K_{\beta}\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\left(x_{\pi(\beta')}\right),\left(q_{\beta}^{\beta'}\right)_*\left(w_{\beta'}\right),\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\right)_*\left(w_{x\pi(\beta')}\right),t\right)$$
$$=K_{\beta}\left(x_{\pi(\beta)},q_{\beta}^{\beta'}\circ w_{\beta'},p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')},t\right)$$
$$=\left[\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)(t),\varphi_{\beta}\left(q_{\beta}^{\beta'}\circ w_{\beta'},p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')},t\right),\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)_t\right]$$

$$=\left[\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)(t),\left(\begin{cases} q_{\beta}^{\beta'}\circ w_{\beta'}(s(2-t)) & ,0\leq s\leq\frac{1}{2-t}\\ f_{\beta}\circ p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}(s(t-2)+2) & ,\frac{1}{2-t}\leq s\leq 1\end{cases}\right),\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)_t\right]$$

$f_{\beta}\circ p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}=q_{\beta}^{\beta'}\circ f_{\beta'}$ eşitliğinden

$$=\left[\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)(t),\left(\begin{cases} q_{\beta}^{\beta'}\circ w_{\beta'}(s(2-t)) & ,0\leq s\leq\frac{1}{2-t}\\ q_{\beta}^{\beta'}\circ f_{\beta'}\circ w_{x\pi(\beta')}(s(t-2)+2) & ,\frac{1}{2-t}\leq s\leq 1\end{cases}\right),\left(p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}\circ w_{x\pi(\beta')}\right)_t\right] \tag{7.42}$$

dir. (7.41) ve (7.42) ifadelerinden diyagramın komutatif olduğu elde edilir. O halde $\underline{K}$ ters spektrlerin morfizmasıdır.

O zaman $\underline{H}$ ve $\underline{K}$ morfizmalarından yararlanarak

$$\underline{r}\circ\underline{q}\overset{s}{\sim}1_{\Omega\underline{Y}} \text{ ve } \underline{q}\circ\underline{r}\overset{s}{\sim}1_{P_{\underline{m}}} \tag{7.43}$$

morfizmalarının spektral homotop olduğu gösterilirse $\underline{q}$ morfizmasının homotopik sınıfta tersinin varolduğu gösterilmiş olur. Gerçektende,

$$\underline{r} \circ \underline{q} = \left(1_B : B \to B, \left\{r_\beta \circ q_\beta : Y_\beta{}^I \to Y_\beta{}^I\right\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\left(r_\beta \circ q_\beta\right)\left(w_\beta\right) = r_\beta\left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta, w_{0x\pi(\beta)}\right) = w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{0x\pi(\beta)}\right)^{-1}$$

dir. $\forall \beta \in B$ için $H_\beta : \Omega Y_\beta \times I \to \Omega Y_\beta$ dönüşümünün başlangıcı,

$$H_\beta\left(w_\beta, 0\right)(s) = \begin{cases} w_\beta(2s) & , 0 \le s \le \dfrac{1}{2} \\ y_{0\beta} & , \dfrac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = w_\beta * y_{0\beta} = w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{0x\pi(\beta)}\right)^{-1} = r_\beta \circ q_\beta\left(w_\beta\right)$$

H_β dönüşümünün sonu ise,

$$H_\beta\left(w_\beta, 1\right)(s) = w_\beta(s),\ 0 \le s \le 1$$

$$H_\beta(-, 1) = 1_{\Omega Y_\beta}$$

bulunur. O halde H_β dönüşümü $r_\beta \circ q_\beta$ ile $1_{\Omega Y_\beta}$ dönüşümleri arasındaki homotopyadır, yani $\forall \beta \in B$ için $r_\beta \circ q_\beta \sim 1_{\Omega Y_\beta}$ dönüşümleri homotoptur. Buradan

$$\underline{r} \circ \underline{q} \overset{s}{\sim} 1_{\Omega \underline{Y}}$$

morfizmaları spektral homotoptur. Benzer şekilde,

$$\underline{q} \circ \underline{r} = \left(1_B : B \to B, \left\{q_\beta \circ r_\beta : P_{m\pi(\beta)} \to P_{m\pi(\beta)}\right\}_{\beta \in B}\right)$$

$$\left(q_\beta \circ r_\beta\right)\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}\right) = q_\beta\left(w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)^{-1}\right)$$

$$= \left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)^{-1}, w_{0x\pi(\beta)}\right)$$

dır. $\forall \beta \in B$ için $K_\beta : P_{m\pi(\beta)} \times I \to P_{m\pi(\beta)}$ dönüşümünün başlangıcı,

$$K_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 0\right) = \left(w_{x\pi(\beta)}(0), \varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 0\right), w_{x\pi(\beta),0}\right)$$

$$=\left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)^{-1}, w_{x\pi(\beta),0}\right)$$
$$=\left(q_\beta \circ r_\beta\right)\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}\right)$$

bulunur. Burada

$$\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 0\right)(s)=\begin{cases} w_\beta(2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}(2-2s) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = w_\beta * \left(f_\beta \circ w_{x\pi(\beta)}\right)^{-1}$$

dır. K_β dönüşümünün sonu ise

$$K_\beta\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 1\right)=\left(w_{x\pi(\beta)}(1), \varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 1\right), w_{x\pi(\beta),1}\right)$$
$$=\left(x_{\pi(\beta)}, w_\beta(s), w_{x\pi(\beta),1}\right)$$

yani $K_\beta(-,1)=1_{P_{m\pi(\beta)}}$ bulunur. Burada, $\varphi_\beta\left(w_\beta, w_{x\pi(\beta)}, 1\right)=w_\beta(s) \quad 0 \le s \le 1$ dır.

O halde K_β dönüşümü $q_\beta \circ r_\beta$ ile $1_{P_{m\pi(\beta)}}$ dönüşümleri arasındaki homotopyadır, yani $\forall \beta \in B$ için $q_\beta \circ r_\beta \sim 1_{P_{m\pi(\beta)}}$ dönüşümleri homotoptur. Buradan da

$$\underline{q} \circ \underline{r} \overset{s}{\sim} 1_{\underline{P_m}}$$

morfizmaları spektral homotoptur. Böylece (7.43) ifadesi elde edilir. $\underline{P_m}$ ters spektri ile $\Omega\underline{Y}$ ters spektri homotopik denktir. Teorem ispatlanır.

Lemma 7.14: Belirli noktalı topolojik uzayların $\underline{P_\rho}$, $\Omega\underline{X}$ ters spektrleri için

$$\underline{q}' : \Omega\underline{X} \to \underline{P_\rho}$$

morfizması homotopik denkliktir.

İspat:

$$\underline{q}' = \left(\pi : B \to A, \left\{q'_\beta : X^I_{\pi(\beta)} \to P_{\rho\beta} \subset X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta \times PX_{\pi(\beta)} \times P\left(X_{\pi(\beta)} \times PY_\beta\right)\right\}_{\beta\in B}\right)$$

$$q_\beta{}'\left(w_\beta\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, w_{0\beta}, w_{x\pi(\beta)}, w_{0\beta}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Teoremin ispatı, Lemma 7.13 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 7.15:

$$\begin{tikzcd}
P_{\underline{\rho}} \arrow[r, "\underline{\sigma}"] & P_{\underline{m}} \arrow[r, "\underline{\rho}"] & P_{\underline{f}} \arrow[r, "\underline{m}"] & \underline{X} \arrow[r, "\underline{f}"] & \underline{Y} \\
\Omega\underline{X} \arrow[u, "\underline{q}'"] \arrow[r, "\Omega\underline{f}"'] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & \Omega\underline{Y} \arrow[u, "\underline{q}\circ\underline{\upsilon}"'] \arrow[ur, "\underline{\rho}'\circ\underline{\upsilon}"'] \arrow[u, phantom, shift right=6ex, "(2)"] & & &
\end{tikzcd}$$

diyagramları homotopik komutatiftir. Burada,

$$\underline{\rho}' = \underline{\rho} \circ \underline{q} \quad , \quad \rho_\beta{}'\left(w_\beta\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta\right) \quad , \quad \underline{\upsilon} : \Omega\underline{Y} \to \Omega\underline{Y}$$

şeklindedir.

İspat: Ters spektrlerin $\underline{\rho}, \underline{\sigma}$ ve $\underline{\upsilon}$ morfizmaları

$$\underline{\rho} = \left(1_B : B \to B, \left\{\rho_\beta : P_{m\pi(\beta)} \to P_{f\beta}\right\}_{\beta\in B}\right) : P_{\underline{m}} \to P_{\underline{f}}$$

$$\underline{\sigma} = \left(1_B : B \to B, \left\{\sigma_\beta : P_{\rho\beta} \to P_{m\pi(\beta)}\right\}_{\beta\in B}\right) : P_{\underline{\rho}} \to P_{\underline{m}}$$

$$\underline{\upsilon} = \left(1_B : B \to B, \left\{\upsilon_\beta : Y_\beta{}^I \to Y_\beta{}^I\right\}_{\beta\in B}\right) : \Omega\underline{Y} \to \Omega\underline{Y} \ , \upsilon_\beta\left(w_\beta\right)(t) = w_\beta(1-t) = w_\beta{}^{-1}(t)$$

şeklindedir. Morfizmaların bileşkesi ise

$$\underline{q} \circ \underline{\upsilon} = \left(1_B : B \to B, \left\{q_\beta \circ \upsilon_\beta : Y_\beta{}^I \to P_{m_{\pi(\beta)}}\right\}_{\beta \in B}\right) : \Omega \underline{Y} \to P_{\underline{m}}$$

$$\left(q_\beta \circ \upsilon_\beta\right)\!\left(w_\beta\right)\!(t) = q_\beta\left(w_\beta(1-t)\right) = q_\beta\left(w_\beta{}^{-1}\right) = \left(x_{0\pi(\beta)}, w_\beta{}^{-1}, w_{0x\pi(\beta)}{}^{-1}\right)$$

$$\underline{\rho'} \circ \underline{\upsilon} = \left(1_B : B \to B, \left\{\rho_\beta{}' \circ \upsilon_\beta : Y_\beta{}^I \to P_{f_\beta}\right\}_{\beta \in B}\right) : \Omega \underline{Y} \to P_{\underline{f}}$$

biçimindedir. Şimdi $\lfloor \underline{q} \circ \underline{\upsilon} \circ \Omega \underline{f} \rfloor = \lfloor \underline{\sigma} \circ \underline{q'} \rfloor$ sınıflarının eşit olduğu yani

$$\underline{q} \circ \underline{\upsilon} \circ \Omega \underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{\sigma} \circ \underline{q'}$$

morfizmalarının spektral homotop olduğu gösterilirse (1) diyagramının komutatif olduğu elde edilmiş olur. O zaman,

$$\underline{q} \circ \underline{\upsilon} \circ \Omega \underline{f} = \left(\pi : B \to A, \left\{q_\beta \circ \upsilon_\beta \circ \Omega f_\beta : X_{\pi(\beta)}{}^I \to P_{m_{\pi(\beta)}}\right\}_{\beta \in B}\right) : \Omega \underline{X} \to P_{\underline{m}}$$

$$\underline{\sigma} \circ \underline{q'} = \left(\pi : B \to A, \left\{\sigma_\beta \circ q_\beta{}' : X_{\pi(\beta)}{}^I \to P_{m_{\pi(\beta)}}\right\}_{\beta \in B}\right) : \Omega \underline{X} \to P_{\underline{m}}$$

dir. $\forall \beta \in B$ için

$$\begin{tikzcd}
P_{\rho_\beta} \arrow[r, "\sigma_\beta"] \arrow[dr, phantom, "(1')"] & P_{m_{\pi(\beta)}} \arrow[r, "\rho_\beta"] \arrow[d, phantom, "(2')"] & P_{f_\beta} \arrow[r, "m_{\pi(\beta)}"] & X_{\pi(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"] & Y_\beta \\
X^I_{\pi(\beta)} \arrow[u, "q'_\beta"] \arrow[r, "\Omega f_\beta"'] & Y^I_\beta \arrow[u, "q_\beta \circ \upsilon_\beta"'] \arrow[ur, "\rho'_\beta \circ \upsilon_\beta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(1') ve (2') diyagramları komutatif olduğundan (1) ve (2) diyagramları homotopik komutatiftir. O zaman $P_{\underline{\rho}}$ ters spektrinin yerine $\Omega \underline{X}$ ters spektri, $P_{\underline{m}}$ ters spektrinin yerine $\Omega \underline{Y}$ ters spektri yazılırsa

$$\Omega \underline{X} \xrightarrow{\Omega \underline{f}} \Omega \underline{Y} \xrightarrow{\underline{\rho}' \circ \underline{\upsilon}} P_{\underline{f}} \xrightarrow{\underline{m}} \underline{X} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{Y}$$

dizisi elde edilir. Elde edilen ters spektrlerin bu dizisi tamdır. Bu tam diziye sol yönde sonsuz devam edilebilir.

BÖLÜM 8

8. TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS SPEKTRLERİNİN HOMOTOPİK KÜMELERİ İLE LİMİT UZAYLARININ HOMOTOPİK KÜMELERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde $[\underline{X},\underline{Y}]$ kümesi ile birlikte $\left[\lim\limits_{\leftarrow}\underline{X},\lim\limits_{\leftarrow}\underline{Y}\right]$, $\lim\limits_{\substack{\leftarrow\\ \beta}}\lim\limits_{\substack{\rightarrow\\ \alpha}}[X_\alpha,Y_\beta]$, $\lim\limits_{\substack{\rightarrow\\ \alpha}}\lim\limits_{\substack{\leftarrow\\ \beta}}[X_\alpha,Y_\beta]$, $\left[\lim\limits_{\leftarrow}\underline{X},\underline{Y}\right]$ homotopik kümelerine bakılacaktır. Önce $[\underline{X},\underline{Y}]$ ile $\left[\lim\limits_{\leftarrow}\underline{X},\lim\limits_{\leftarrow}\underline{Y}\right]$ arasında ve $[X,\underline{Y}]$ ile $\lim\limits_{\substack{\leftarrow\\ \beta}}[X,Y_\beta]$ kümeleri arasındaki bağıntı araştırılacaktır.

Ters spektrler kategorisinde morfizmaların yerine homotopik sınıflara geçildiğinde elde edilen yeni kategori $Inv[Top]$ ile gösterilecektir. $Inv[Top]$ kategorisinde homotopya tanımı da benzer şekilde verilir. Burada, $f=\lim\limits_{\leftarrow}\underline{f}, g=\lim\limits_{\leftarrow}\underline{g}, X=\lim\limits_{\leftarrow}\underline{X}, Y=\lim\limits_{\leftarrow}\underline{Y}$ olsun.

Teorem 8.1: $f,g\colon X\to Y$ homotop dönüşümler ve $\forall\alpha\in A$ elemanı için $p_\alpha: X\to X_\alpha$ dönüşümü kotabakalanma ve örten ise ters spektrlerin $\underline{f},\underline{g}:\underline{X}\to\underline{Y}$ morfizmaları spektral homotoptur.

İspat: β, B kümesinin herhangi bir elemanı olsun. $\pi(\beta),\rho(\beta)\in A$ ve A yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha\succ\pi(\beta)$ ve $\alpha\succ\rho(\beta)$ olacak şekilde $\alpha\in A$ elemanı vardır. $f,g\colon X\to Y$ homotop dönüşümler ise

$$F(x,0)=f(x),F(x,1)=g(x)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $F : X \times I \to Y$ homotopyası vardır. O zaman

$$
\begin{tikzcd}
X\times\{0\} \arrow[rr, "p_\alpha \times 1_{\{0\}}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & & X_\alpha\times\{0\} \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
 & Y_\beta & \\
X\times I \arrow[ur, "F_1"] \arrow[rr, "p_\alpha \times 1_I"'] & & X_\alpha\times I \arrow[ul, "F^*"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramına bakıldığında $r_\beta : Y \to Y_\beta$ projeksiyon dönüşümü ise F_1 ve h dönüşümleri

$$F_1 = r_\beta \circ F \ \text{ ve } \ h = f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}$$

şeklinde tanımlanır. $\forall(\{x_{\pi(\beta)}\},0) \in X \times \{0\}$ için

$$F_1(\{x_{\pi(\beta)}\},0) = r_\beta(F(\{x_{\pi(\beta)}\},0)) = r_\beta(f(\{x_{\pi(\beta)}\})) = r_\beta(\{f_\beta(x_{\pi(\beta)})\}) = f_\beta(x_{\pi(\beta)}) \tag{8.1}$$

$$(h \circ p_\alpha)(\{x_{\pi(\beta)}\},0) = f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \circ p_\alpha(\{x_{\pi(\beta)}\},0) = f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)}(x_\alpha) = f_\beta(x_{\pi(\beta)}) \tag{8.2}$$

bulunur. (8.1) ve (8.2) ifadeleri (1) diyagramının komutatif olduğunu gösterir. O halde $p_\alpha : X \to X_\alpha$ dönüşümü için kotabakalanma koşulu sağlandığından

$$F^*(x_\alpha,0) = h(x_\alpha) = f_\beta(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x_\alpha))$$

$$F_1(x,t) = (F^* \circ (p_\alpha \times 1_I))(x,t) = F^*(p_\alpha(x),t) = F^*(x_\alpha,t)$$

$$F^*(x_\alpha,1) = F^*(p_\alpha(x),1) = (F^* \circ (p_\alpha \times 1_I))(x,1) = F_1(x,1) = (r_\beta \circ F)(x,1) = r_\beta(g(x)) =$$
$$r_\beta(g(\{x_{\rho(\beta)}\})) = r_\beta(\{g_\beta(x_{\rho(\beta)})\}) = g_\beta(x_{\rho(\beta)}) = g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}(x_\alpha)$$

koşullarını sağlayan

$F^* : X_\alpha \times I \to Y_\beta$

homotopyası elde edilir. Böylece

$$F^*(x_\alpha,0) = f_\beta\left(p^\alpha_{\pi(\beta)}(x_\alpha)\right),\ F^*(x_\alpha,1) = g_\beta\left(p^\alpha_{\rho(\beta)}(x_\alpha)\right)$$

bulunur. $\forall\beta \in B$ elemanı için $f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p^\alpha_{\rho(\beta)}$ olacak şekilde $\alpha \in A$ elemanı vardır. Bu ise

$$\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$$

morfizmalarının spektral homotop olması demektir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 8.1, $\forall\alpha \in A$ elemanı için $p_\alpha : X \to X_\alpha$ dönüşümünün kotabakalanma koşulu altında ispatlandı. Bu koşul homotopik tipler sınıfına geçildiği zaman ortadan kaldırılabilir.

Teorem 8.2: Homotopik tipler sınıfında $f, g: X \to Y$ dönüşümlerinin homotop olmasından $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ ters spektrlerin morfizmalarının spektral homotop olması elde edilir.

İspat: $Z_{p_\alpha}; p_\alpha$ dönüşümünün silindiri, $i : X \to Z_{p_\alpha}, j : X_\alpha \to Z_{p_\alpha}$ gömme dönüşümleri ve $r : Z_{p_\alpha} \to X_\alpha$ retrakt dönüşümü olsun. $i : X \to Z_{p_\alpha}$ dönüşümü kotabakalanma idi. O zaman,

$$q : X_\alpha \to Y_\beta,\ h : Z_{p_\alpha} \to Y_\beta \text{ ve } G : X \times I \to Y_\beta$$

dönüşümleri

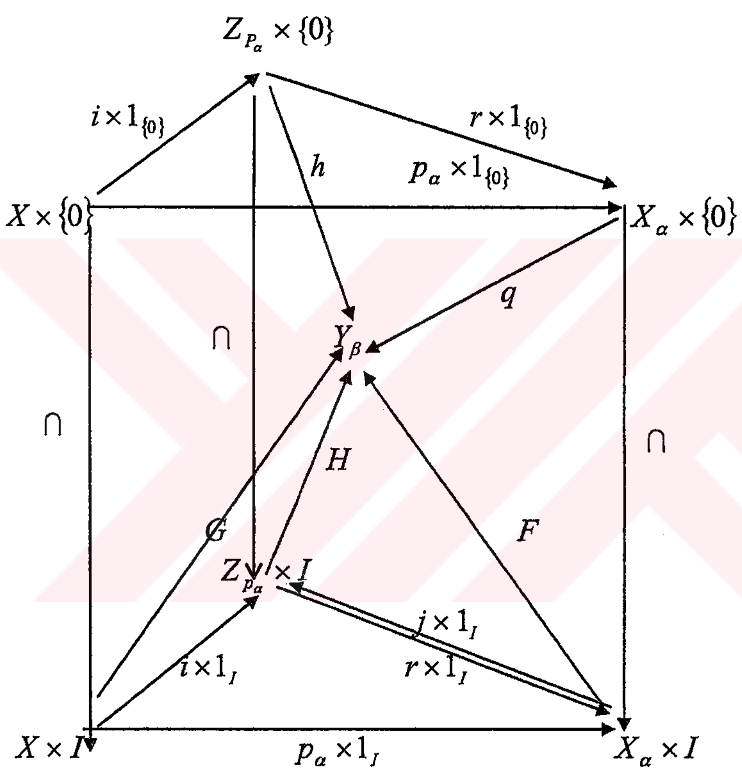
$$q = f_\beta \circ p^\alpha_{\pi(\beta)},\ h = q \circ r \text{ ve } G(x,0) = h(i(x))$$

koşullarını sağlayacak şekilde tanımlanabilir. $i : X \to Z_{p_\alpha}$ dönüşümü kotabakalanma olduğundan

$H(z,0) = h(z) \quad z \in Z_{p_\alpha}$

$G(x,t) = (H \circ (i \times 1_I))(x,t) \quad x \in X, t \in I$

koşulunu sağlayacak şekilde $H : Z_{p_\alpha} \times I \to Y_\beta$ homotopyası vardır. Böylece yukarıdaki dönüşümler kullanılarak



diyagramı yapılabilir. G homotopyası için

$$G(x,0) = h(i(x)) = q \circ r(i(x)) = q \circ p_\alpha(x) \tag{8.3}$$

sağlanır. $F : X_\alpha \times I \to Y_\beta$ homotopyası

$F = H \circ (j \times 1_I)$

formülü ile verilsin ve,

$$
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[rr, "p_\alpha \times 1_{\{0\}}"] \arrow[dd, phantom, "\cap" description] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & & X_\alpha \times \{0\} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, phantom, "\cap" description] \\
& Y_\beta \arrow[dr, phantom, "(2)"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & \\
X \times I \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "p_\alpha \times 1_I"'] & & X_\alpha \times I \arrow[ul, "F"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramı ele alınsın. Şimdi, $p_\alpha : X \to X_\alpha$ dönüşümünün kotabakalanma olması için F homotopyasının gerekli şartları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilecektir.

$$F(x_\alpha,0) = (H \circ (j \times 1_I))(x_\alpha,0) = H(j(x_\alpha),0) = H([x_\alpha],0) = h([x_\alpha]) = q \circ r([x_\alpha]) = q(x_\alpha)$$

ifadesi (2) diyagramının komutatifliğini gösterir. (8.3) ifadesi ise (1) diyagramının komutatifliğini gösterir. Burada sadece (3) diyagramının komutatifliği yani,

$$(F \circ (p_\alpha \times 1_I)) = G$$

koşulu kontrol edilecektir. $j \circ r \sim 1_{Zp_\alpha}$ ve $F = H \circ (j \times 1_I)$ olduğundan

$$F \circ (r \times 1_I) = H \circ (j \times 1_I) \circ (r \times 1_I) = H \circ ((j \circ r) \times 1_I) \sim H \circ (1_{Zp_\alpha} \times 1_I) = H \tag{8.4}$$

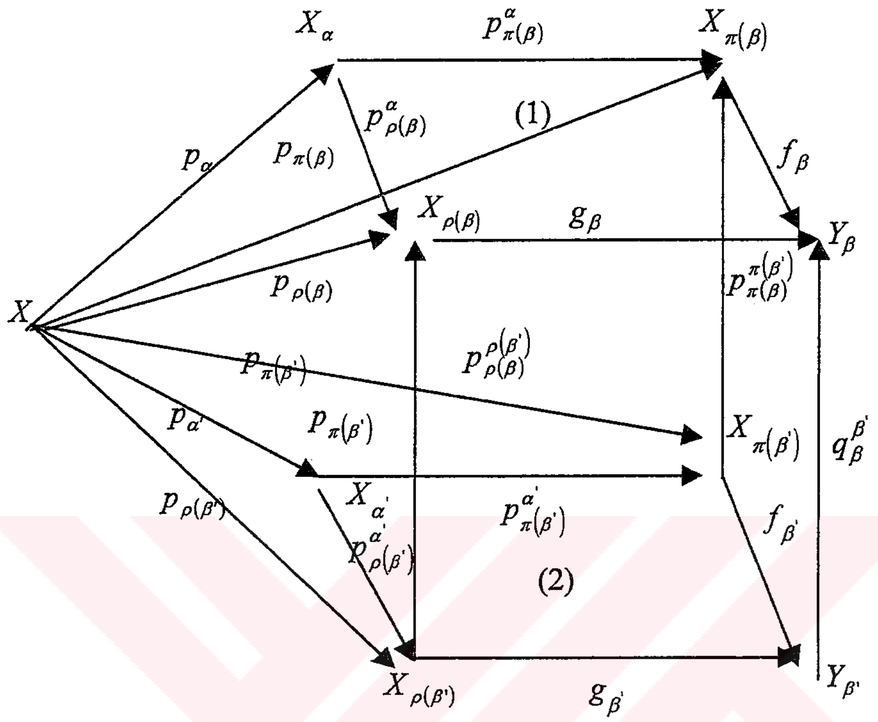
sağlanır. Diğer yandan (8.4) ifadesi de dikkate alınırsa

$$F \circ (p_\alpha \times 1_I) = F \circ ((r \times 1_I) \circ (i \times 1_I)) \sim H \circ (i \times 1_I) = G$$

bulunur. Böylece kotabakalanmanın ikinci koşulu homotopik tipler sınıfında sağlanmış olur.

Teorem 8.3: $Inv[Top]$ kategorisinde spektral homotop morfizmaların limitleri homotoptur.

İspat: $Inv[Top]$ kategorisinde $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizmaları spektral homotop olsun. $\forall \beta' \succ \beta \in B$ elemanı için aşağıdaki diyagrama bakıldığında



(1) ve (2) diyagramları homotopik komutatif, diğer diyagramlar komutatiftir. O zaman

$$q^{\beta'}_{\beta} \circ f_{\beta'} \circ p_{\pi(\beta')} = f_\beta \circ p^{\pi(\beta')}_{\pi(\beta)} \circ p_{\pi(\beta')} = f_\beta \circ p_{\pi(\beta)}$$

$$q^{\beta'}_{\beta} \circ g_{\beta'} \circ p_{\rho(\beta')} = g_\beta \circ p^{\rho(\beta')}_{\rho(\beta)} \circ p_{\rho(\beta')} = g_\beta \circ p_{\rho(\beta)}$$

$$f_\beta \circ p_{\pi(\beta)} \sim g_\beta \circ p_{\rho(\beta)} \;,\; f_{\beta'} \circ p_{\pi(\beta')} \sim g_{\beta'} \circ p_{\rho(\beta')}$$

elde edilir. Homotopik sınıfa geçildiğinde

$$\lfloor f_\beta \circ p_{\pi(\beta)} \rfloor = \lfloor g_\beta \circ p_{\rho(\beta)} \rfloor, \lfloor f_{\beta'} \circ p_{\pi(\beta')} \rfloor = \lfloor g_{\beta'} \circ p_{\rho(\beta')} \rfloor$$

bulunur.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y_\beta \\
X \arrow[ur, "f_\beta \circ p_{\pi(\beta)}"] \arrow[dr, "g_{\beta'} \circ p_{\rho(\beta')}"'] & \\
 & Y_{\beta'} \arrow[uu, "q_\beta^{\beta'}"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramı homotopik sınıflarda komutatiftir. Homotopik sınıflarda

$$\left[\varprojlim\left(f_\beta \circ p_{\pi(\beta)}\right)\right] = \left[\varprojlim\left(g_\beta \circ p_{\pi(\beta)}\right)\right]$$

dir. Teoremin ispatını tamamlamak için

$$\varprojlim f_\beta \circ p_{\pi(\beta)} = \varprojlim f_\beta$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Burada,

$$\left(\varprojlim\left(f_\beta \circ p_{\pi(\beta)}\right)\right)\left(\{x_\alpha\}\right) = \left\{f_\beta\left(p_{\pi(\beta)}\left(\{x_\alpha\}\right)\right)\right\} = \left\{f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right\}$$
$$\left(\varprojlim f_\beta\right)\left(\{x_\alpha\}\right) = \left\{f_\beta\left(x_{\pi(\beta)}\right)\right\}$$

eşitlikleri sağlandığından teorem ispatlanır.

Teorem 8.4: $h : [\underline{X}, \underline{Y}] \to \left[\varprojlim \underline{X}, \varprojlim \underline{Y}\right]$, $h\left(\left[\underline{f}\right]\right) = \left[\varprojlim \underline{f}\right]$ dönüşümü bire-birdir.

İspat: Teorem 8.3 den h iyi tanımlıdır. Çünkü spektral homotop morfizmaların limitleri homotoptur.

h bire-birdir. Gerçekten, $\left[\varprojlim \underline{f}\right] = \left[\varprojlim \underline{g}\right] \Rightarrow \varprojlim \underline{f} \sim \varprojlim \underline{g}$ dönüşümleri homotoptur.

Teorem 8.2 den $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ morfizmalarının spektral homotop olduğu elde edilir.

$$\Rightarrow \lfloor f \rfloor = \lfloor g \rfloor$$

bulunur.

$\underline{X}$ ters spektri bir uzaydan oluşsun.

Teorem 8.5: $h : [X, \underline{Y}] \to \lfloor X, \varprojlim \underline{Y} \rfloor$ dönüşümü bire-bir ve örtendir.

İspat: h dönüşümünün bire-bir olduğu Teorem 8.4 den hemen elde edilir. O zaman h dönüşümünün örten olduğunu göstermek yeterlidir. $[f] \in \lfloor X, \varprojlim \underline{Y} \rfloor$ homotopik sınıfının herhangi bir elemanı olsun. $f : X \to \varprojlim \underline{Y}$ ve $q_\beta : \varprojlim \underline{Y} \to Y_\beta$ projeksiyon dönüşümünden yararlanarak

$$f_\beta = q_\beta \circ f : X \to Y_\beta$$

dönüşümü tanımlanır. B kümesi yönlendirilmiş küme olduğundan $\forall \beta' \succ \beta$ için

$$\begin{tikzcd} & Y_\beta \\ X \arrow[ur, "f_\beta"] \arrow[dr, "f_{\beta'}"'] & \\ & Y_{\beta'} \arrow[uu, "q_\beta^{\beta'}"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir. Gerçekten, $\forall x \in X$ için

$$\left(q_\beta^{\beta'} \circ f_{\beta'}\right)(x) = q_\beta^{\beta'}\left(q_{\beta'} \circ f\right)(x) = \left(q_\beta^{\beta'} \circ q_{\beta'}\right) \circ f(x) = q_\beta \circ f(x) = f_\beta(x)$$

$$\Rightarrow q_\beta^{\beta'} \circ f_{\beta'} = f_\beta$$

eşitliği sağlandığından diyagram komutatiftir. O zaman $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ dönüşümleri X uzayından $\underline{Y} = \{Y_\beta\}_{\beta \in B}$ ters spektrine giden

$$\underline{f} = \left(c : B \to \{*\}, \{f_\beta : X \to Y_\beta\}_{\beta \in B}\right) : X \to \underline{Y}$$

morfizmasını tanımlar. Eğer $h(\lfloor \underline{f} \rfloor) = [f]$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Teorem 8.4 den $h(\lfloor \underline{f} \rfloor) = \lfloor \varprojlim \underline{f} \rfloor$ dir. O zaman $\lfloor \varprojlim \underline{f} \rfloor = [f]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall x \in X$ için

$$\varprojlim \underline{f} : X \to \varprojlim \underline{Y}, \ f : X \to \varprojlim \underline{Y}$$
$$\left(\varprojlim \underline{f}\right)(x) = \{f_\beta(x)\}_{\beta \in B} = \{(q_\beta \circ f)(x)\}_{\beta \in B} = f(x)$$

sağlanır. Burada $f_\beta = q_\beta \circ f$ dır. $\Rightarrow \varprojlim \underline{f} = f$ bulunur.

Teorem 8.6: Homotopik tipler sınıfında ters spektrin spektral homotopik grubu ile bu spektrin limit uzayının homotopik grubu birbirine izomorftur.

İspat: Teoremin ispatını Poinkare grubu için ispatlamak yeterlidir. Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

$(\underline{X}, \underline{x_0}) = \left(\{X_\alpha, x_{0\alpha}\}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha' \succ \alpha}\right)$ topolojik uzayların ters spektrlerinin ve $\varprojlim(\underline{X}, \underline{x_0}) = (X, x_0)$ için onun limit uzayının Poinkare grubu,

$$(\underline{X}, \underline{x_0}) \mapsto \pi^s(\underline{X}, \underline{x_0}), \ (X, x_0) \mapsto \pi(X, x_0)$$

şeklinde olsun.

$$h : \pi(X, x_0) \to \pi^s(\underline{X}, \underline{x_0}); [\varphi] \in \pi(X, x_0) \varphi : I \to X \ \varphi(0) = \varphi(1) = x_0$$

dönüşümü tanımlanacaktır. $\forall \alpha \in A$ için

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & X = \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X} \arrow[d, "p_\alpha"] \\
& X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_\alpha = p_\alpha \circ \varphi$ şeklinde olsun. φ den yararlanarak tanımlanan

$$\underline{\varphi} = \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha : I \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}\right) : I \to \underline{X}$$

ailesi ters spektrlerin bir morfizmasıdır, yani $\alpha' \succ \alpha$ için

$$
\begin{tikzcd}
& X_\alpha \\
I \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_{\alpha'}"'] & \\
& X_{\alpha'} \arrow[uu, "p_\alpha^{\alpha'}"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramı komutatiftir. Gerçekten;

$$p_\alpha^{\alpha'} \circ \varphi_{\alpha'}(t) = p_\alpha^{\alpha'}(p_{\alpha'} \circ \varphi)(t) = (p_\alpha^{\alpha'} \circ p_{\alpha'} \circ \varphi)(t) = (p_\alpha \circ \varphi)(t) = \varphi_\alpha(t)$$

$$\Rightarrow p_\alpha^{\alpha'} \circ \varphi_{\alpha'} = \varphi_\alpha$$

elde edilir. O halde

$$h : \pi(X, x_0) \to \pi^s(\underline{X}, \underline{x_0}) \quad [\varphi] \in \pi(X, x_0) \text{ için } h([\varphi]) = [\underline{\varphi}]$$

şeklinde tanımlanan h bir izomorfizmadır.

h dönüşümü iyi tanımlıdır. Gerçekten, $\varphi' \in [\varphi]$ için $\varphi' \sim \varphi$ dir. O halde $\varphi \mapsto \underline{\varphi}$ ve $\varphi' \mapsto \underline{\varphi}'$ için

$$h([\varphi]) = h([\varphi']) \Rightarrow [\underline{\varphi}] = [\underline{\varphi}'] \Rightarrow \underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi}'$$

morfizmalarının spektral homotop olduğunun gösterilmesi gerekir. $\forall \alpha \in A$ için

$$\varphi_\alpha = p_\alpha \circ \varphi \sim p_\alpha \circ \varphi' = \varphi_\alpha' \Rightarrow \varphi_\alpha \sim \varphi_\alpha' \Rightarrow \underline{\varphi} \overset{s}{\sim} \underline{\varphi}'$$

spektral homotop olduğu bulunur.

h dönüşümü homomorfizmadır. Gerçekten, $\forall [\varphi], [\psi] \in \pi(X, x_0)$ için

$h([\varphi] * [\psi]) = h([\varphi * \psi])$ dir. Buradan,

$$(\varphi * \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & ,0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ \psi(2t-1) & ,\dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_\alpha(2t)\}_{\alpha \in A} \right. & \left. ,0 \le t \le \dfrac{1}{2}\right) \\ \left(c : A \to \{*\}, \{\psi_\alpha(2t-1)\}_{\alpha \in A} \right. & \left. ,\dfrac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

$$= \left(c : A \to \{*\}, \begin{cases} \varphi_\alpha(2t) & ,0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ \psi_\alpha(2t-1) & ,\dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right)$$

$$= (\underline{\varphi} * \underline{\psi})(t)$$

bulunur. O halde

$$h([\varphi] * [\psi]) = h([\varphi * \psi]) = [\underline{\varphi} * \underline{\psi}] = [\underline{\varphi}] * [\underline{\psi}] = h([\varphi]) * h([\psi])$$

elde edilir.

h dönüşümü bire-birdir. Gerçekten, $[\varphi],[\psi]\in\pi(X,x_0)$ olsun.

$\varphi\mapsto\underline{\varphi}$ ve $\psi\mapsto\underline{\psi}$ için $h([\varphi])=\lfloor\underline{\varphi}\rfloor, h([\psi])=\lfloor\underline{\psi}\rfloor$ dir.

Farzedelim ki $\lfloor\underline{\varphi}\rfloor=\lfloor\underline{\psi}\rfloor$, yani $\underline{\varphi}\overset{s}{\sim}\underline{\psi}$ morfizmaları spektral homotoptur. O zaman $[\varphi]=[\psi]$ sınıfının eşit olduğu yani $\varphi\sim\psi$ dönüşümlerinin homotop olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\underline{\varphi},\underline{\psi}=\left(c:A\to\{*\},\{\varphi_\alpha,\psi_\alpha:I\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right):I\to\underline{X}$ morfizmaları için,

$\underline{\varphi}\overset{s}{\sim}\underline{\psi}\Rightarrow\varphi_\alpha\sim\psi_\alpha$ dır. Burada $\varphi_\alpha=p_\alpha\circ\varphi$, $\psi_\alpha=p_\alpha\circ\psi$ dır.

$\varphi:I\to X$ ve $\lim\limits_{\leftarrow}\underline{\varphi}:I\to X$ dönüşümleri karşılaştırıldığında

$$\varphi:I\to X=\lim_{\leftarrow}\underline{X}\subset\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\quad\varphi(t)=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A},\ \forall\alpha\prec\alpha'\ \text{için}\ p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})=x_\alpha$$

$$\lim_{\leftarrow}\underline{\varphi}:I\to X=\lim_{\leftarrow}\underline{X}\quad\left(\lim_{\leftarrow}\underline{\varphi}\right)(t)=\{\varphi_\alpha(t)\}=\{p_\alpha\circ\varphi(t)\}=\{p_\alpha\{x_\alpha\}\}=\{x_\alpha\}$$

eşitlikleri bulunur. $\forall t\in I$ için $\lim\limits_{\leftarrow}\underline{\varphi}$ ile φ dönüşümleri eşittir. O zaman Teorem 8.3 den

$$\underline{\varphi}\overset{s}{\sim}\underline{\psi}\Rightarrow\lim_{\leftarrow}\underline{\varphi}\sim\lim_{\leftarrow}\underline{\psi}\ \Rightarrow\varphi\sim\psi$$

elde edilir. h dönüşümü bire-birdir.

Son olarak h dönüşümünün örten olduğu gösterilecektir. $\lfloor\underline{\varphi}\rfloor\in\pi^s(\underline{X},\underline{x_0})$ olsun. Burada $\underline{\varphi}=\left(c:A\to\{*\},\{\varphi_\alpha:I\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\right):I\to\underline{X}$ dir. O zaman

$\varphi=\lim\limits_{\leftarrow}\underline{\varphi}:I\to\lim\limits_{\leftarrow}\underline{X}=X\quad h([\varphi])=\lfloor\underline{\varphi}\rfloor$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\varphi = \varprojlim \underline{\varphi} \mapsto \left(c : A \to \{*\}, \left\{ \left(\varprojlim \underline{\varphi}\right)_{\alpha} : I \to X_{\alpha} \right\}_{\alpha \in A} \right)$$

dır. Burada $\left(\varprojlim \varphi\right)_{\alpha} := p_{\alpha} \circ \varprojlim \underline{\varphi}$ biçiminde tanımlıdır.

$$h([\varphi]) = h\left(\left[\varprojlim \underline{\varphi}\right]\right) = \left[\left(c : A \to \{*\}, \left\{p_{\alpha} \circ \varprojlim \varphi : I \to X_{\alpha}\right\}_{\alpha \in A}\right)\right]$$

dır. O halde $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_{\alpha} = p_{\alpha} \circ \varprojlim \underline{\varphi}$ dır. Buradan ise

$$h([\varphi]) = \left[\left(c : A \to \{*\}, \{\varphi_{\alpha} : I \to X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}\right)\right] = [\underline{\varphi}]$$

elde edilir. h örtendir.

h dönüşümü $\pi(X, x_0)$ grubu ile $\pi^{s}(\underline{X}, \underline{x_0})$ grubu arasında bir izomorfizmadır.

KAYNAKLAR

1- ADAMS, J.F., 1974. Stable Homotopy and Generalized Homology. The University of Chicago Press, Chicago and London.

2- ALEXANDROFF, P.S., 1929. Gestallt und Lage Abgeschlossener Mengen. Ann Math, 30.

3- ALEXANDROFF, P.S. and FEDORCUK, V.V., 1978. Osnovnıye Momentı v Razvitii Teoretiko-Mnojestvennoy Topologii, UMN, t.33, vıp.3, 3-48.

4- ATIYAH, M.F., 1964. K-Theory. Lecture Notes, Harvard Univ., Cambridge.

5- BAYRAMOV, S.A., 1992. The K_G -functor on the Category of Inverse Spectra of Topological Spaces. Amer. Math. Soc. Transl.(2), Vol 154, 145-152.

6- BAUER, F.W., 1976. A Shape Theory with Singular Homology. Pacific Journal of Math., Vol 62, No 1, 26-65.

7- BORSUK, K., 1971. Theory of Shape. Aarhus.

8- BOURBAKI, N., 1998. Topologie Generale. Springer-Verlag, Berlin.

9-BOUSFIELD, A.K. and KAN, D.H., 1973. Homotopy Limits Completions and Localizations. Lecture Notes in Math, Springer, 304, Berlin- Heidelberg- New York.

10- BUKHSHTABER, V.M. and MISHCHENKO, A.S., 1968. A K-Theory in the Category of Infinite Cell Complexes. Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Math.,32, No 3, 560-604.

11- BUNYATOV, M.R. and BAIRAMOV, S.A., 1992. K-Theory on the Category of Topological Spaces. Amer. Math. Soc. Trans. (2) Vol 154, 159-164.

12- BUNYATOV, M.R. and BAIRAMOV, S.A., 1992b. K-Theory on the Category of Distributive Lattices. Amer. Math. Soc. Trans. (2) Vol 154, 153-158.

13- CITTERIO, M. G., 1998. The Reidemeister Number as a Homotopy Equalizer. Rend. Math. Appl., (7) 18, No 1, 87-101.

14- DELENAU, A. and HILTON, P., 1970. Remark on Cech Extensions of Cohomology Functors. Aarhus Univ. Math. Inst. Series, 13, 1, 44-66.

15- DELENAU, A. and HILTON, P., 1971. On Kan Extensions of Cohomology Theories and Serre Classes of Groups. Fund. Math., 73, 143-165.

16- DELENAU, A. and HILTON, P., 1977. Generalized Shape Theory in General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra. Lecture Notes in Math., Springer, 609, Berlin-Heidelberg-New York, 59-65.

17- DIECK, T., KAMPS, K., PUPPE, D., 1970. Homotopietheorie. Lecture Notes in Math., Springer, 157, Berlin-Heidelberg-New York.

18- DOLD, A., 1966. Halbexacte Homotopiefunktoren. Springer, Berlin.

19- DOLD, A., 1972. Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

20- ENGELKING, R.,1977. General Topology. Panstwowe Wydawaic two Naukowe, Warszawa.

21- FOMENKO, A.T. and FUKS, D.B., 1989. Kurs Gomotopiceskoy Topologii. Nauka, Moskva.

22- FREI, A., 1981. On the Preservation of Homotopy Invariance by Kan Extensions. Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle, Vol. 22, No 3, 329-336.

23- FRITZ, C., 1979. Strong Shape Theory. Ph.D.Thesis, University of Washington.

24- GOERSS, P.G. and JARDINE, J.F., 1999. Simplicial Homotopy Theory. Burkhauser Verlag, Bassel.

25- HOVEY, M. and PALMIERI, J.H., 1999. The Structure of the Bousfield Lattice. Contemp. Math., 239, Amer. Math. Soc. Providence, RI.

26- HU, SZE TSEN, 1959. Homotopy Theory. Academic Press, New York and London.

27- JENSEN, C.V., 1972. Les Functors Derives de $\varprojlim$ et Leurs Applications on Theorie des Modules. Lecture Notes in Mathematics, 254.

28- KASYUKOV, A.S., 1998. Homotopy equivalence of the Complex of Cech Cochains and the Combinatorial Cochains Complexe. Vestnik Moskow. Univ., Ser I Math.-Mech., No 6, 7-10.

29- KLEIN, J.R., 1998. Structure Theorems for Homotopy Pushouts I. Contractible Pushouts. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 123, No 2, 301-324.

30- KLEIN, J.R., 2001. The Dualizing Spectrum of a Topological Group. Math. Ann., 319, No 3, 421-456.

31- KODAMA Y. and KOYAMA, A., 1979. Hurewicz Izomorphism Theorem for Steenrod Homology. Proc. Amer. Math. Soc., 74(2), 363-367.

32- KOLODZIEJCZYK, D., 2001. There Exist a Polyhedron with Infinitely Left Neighbors. Proc. Amer. Math. Soc., 129, No 1, 303-309.

33- KUZUCUOGLU, M., 1997. Lokal Sonlu Basit Gruplarda Elemanların Merkezleyenleri. Sarımsaklıda Matematik Günleri.

34- LEE, D.-W., 1998. Derived Cup Product and (Strictly) Derived Groups. Bull. Korean Math. Soc., 35, No 4, 791-807.

35- LEE, D.-W., 1999. Strong Homology, Derived Limit and Strong Cup Product. Far East J. Math. Sci. (FJMS), Special Volume, Part 3, 319-338.

36- LEE, H.-J., 2000. An Equivalence Relation on Directed Preordered Set. Amer. J. Math., 122, No 1, 77-82.

37- LEE, KIM, HAN, LEE, LEE, 1999. Derived Limits and Groups of Pure Extensions. Honam Math. J., 21, No1, 157-169.

38- LEE, C.N. and RAYMOND, F., 1968. Cech Extensions of Contravariant Functors. Trans. Amer. Math. Soc., 133, 415-434.

39- LEFSCHETZ, S., 1931. Ann. of Math., 32.

40- LEFSCHETZ, S., 1942. Algebraic Topology. New York.

41- LISICA, J:T.,1997. On the Compact $\varinjlim$ Functor in the Category of Compact Groups. Glas. Math. Ser., III, 32(52), No2, 301-314.

42- LISICA, J.T., 1977. Shape Theory. Soviet Math. Dok., 18(5).

43- MARDESIC, S., 1973. Shapes for Topological Spaces. Gener. Topol. Applic., 265-282.

44- MARDESIC, S., 1999. Absolute Neigborhood Retracts and Shape Theory. History of Topology. North-Holland, Amsterdam, 241-269.

45- MARDESIC, S., 2000. Strong Shape and Homology. Springer-Verlag, Berlin.

46- MASSEY, W.S., 1978. Homology and Cohomology Theory. New York-Bassel.

47- MASSEY, W.S., 1967. Algebraic Topology: An Introduction. Harcourt, Brace and World, Inc., New York-Chicago-San Francisco-Atlanta.

48- MDZINARISHVILI, L.D., 1981. Application of the Shape in the Characterization of Exact Homology Theories and the Strong Shape Homotopic Theory. Lecth. Notes Math., 870, 253-262.

49- MILNOR, J.,1962. On Axiomatic Homology Theory. Pac. J. Math., 12, No 1, 337-341.

50- MIMINOSHVILI, Z.R., 1980. On a Strong Homotopy in a Sequence Category of Topological Spaces and its Applications to the Shape Theory. Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR, 98, N0 2, 301-304.

51- MIYATA, T., 1999. Stable Shape and Brown's Representation Theorem. General and Geometric Topology, No 1074, 38-46.

52- MORITA, K., 1975. Cech Cohomology and Covering Dimension for Topological Spaces. Fund. Math., 87, 31-52.

53- MORITA, K., 1975b. On Shapes of Topological Spaces. Fund. Math., 86, 251-259.

54- NEEMAN, A., 1998. Brown Representability for the Dual. Invent Math., 133, No1, 97-105.

55- PAWLIKOWSKI, J., 1998. The Fundamental Group of a Compact Metric Spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 126, N010, 3083-3087.

56- PONOMARYOV, V.I., 1973. Paracompactı, Projektivnıye Spektrı i Neprerıvnıye Otobrajeniya. Mat. Sb., 60:1.

57- PONTRYAGIN, L.S., 1987. Kombinatornaya Topologiya. Mir, M.

58- PORTER, T., 1975. Borsuk Theory of Shape and Cech Homotopy. Math. Scand., 33, 83-89.

59- PUPPE, D., 1958. Homotopiemengen und ihre Induzierten Abbildungen. Math. Z., 69 S, 299-344.

60- QUIGLEY, J., 1973. Fund. Math., 77.

61- QUILLEN, D.G., 1967. Homotopical Algebra. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin.

62- SASAO, and SEIYA, 1997. On the Set of Homotopy Classes $[\sum X, Y]$. Math. J. Toyama Univ., 20, 91-97.

63- SCHWEDE, S., 1999. Stable Homotopical Algebra and Γ – Spaces. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 126, No 2, 329-356.

64- SERR, J.-P., 1968. Galous Cohomology. Paris.

65- SPANIER, H.E., 1966. Algebraic Topology. McGRAW-HILL, New-York.

66- STEENROD, N. and EILENBERG, S., 1952. Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press, NJ, Princeton.

67- SWITZER, R.M., 1975. Algebraic Topology-Homotopy and Homology. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

68- TAI, J.-Y., 1998. Generalized Plus-Constructions and Fundamental Groups. J.Pure Appl. Algebra, 132, No 2, 207-220.

69- VOGT, R.M., 1970. On the Dual of a Lemma of Milnor. Proc. Adv. Study Inst. Alg. Top., Aarhus Universitet, No 3, Denmark.

70- WATANABE, T.., 1977. Bull. Acad. Pol. Sci., 25(10).

71- WELKER, W., ZIEGLER, G.M. and ZIVALJEVIC, R., 1999. Homotopy Colimits-Comparison Lemmas for Combinatorial Applications. J.Reine Angew. Math., 509, 117-149.

72- WHITEHEAD, J.H.C., 1974. Noveisie Dostijeniya v Teorii Gomotopiy. Mir, Moskva.

73- WHITEHEAD, G.W., 1966. Homotopy Theory. M.I.T. Press.

74- ZAYTSEV, V.I., 1972. Projection Spectrums. Trudi Mosk. Math. Ob., 27.

ÖZGEÇMİŞ

Çiğdem ARAS 1972 yılında Gebze'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gebze de tamamladı. 1990 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında matematikçi olarak mezun oldu.
Ekim 1995 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başlayarak, "Topolojik Uzayların CW-Kompleksleriyle Yaklaşım Problemi ve Homotopya Bağıntısı" isimli yüksek lisans tezini 1997 yılında tamamladı. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora programını kazandı.
1994 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.