T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ULUSLARARASI TİCARET VE LOJİSTİK ANABİLİMDALI

BELİRSİZLİK ALTINDAKİ LOJİSTİK PROBLEMLERİN BULANIK MANTIK KULLANILARAK MODELLENMESİ VE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET PEKMEZCİ

GAZİANTEP
MART 2015

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ULUSLARARASI TİCARET VE LOJİSTİK ANA BİLİM DALI

BELİRSİZLİK ALTINDAKİ LOJİSTİK PROBLEMLERİN BULANIK MANTIK KULLANILARAK MODELLENMESİ VE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET PEKMEZCİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat GÜLBAY

GAZİANTEP
MART 2015

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ULUSLARARASI TİCARET VE LOJİSTİK ANABİLİMDALI

BELİRSİZLİK ALTINDAKİ LOJİSTİK PROBLEMLERİN BULANIK MANTIK KULLANILARAK MODELLENMESİ VE ÇÖZÜMÜ

MEHMET PEKMEZCİ

Tez Savunma Tarihi: (25.03.2015)

Sosyal Bilimler Enstitüsü Onayı

(Prof. Dr. Hilmi BAYRAKTAR)
SBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

(Yrd. Doç. Dr. Hanifi Murat MUTLU)
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Yrd. Doç. Dr. Murat GÜLBAY)
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası:
Yrd. Doç. Dr. Hasan AKSOY(Jüri Başkanı)	
Yrd. Doç. Dr. İbrahim AKBEN	
Yrd. Doç. Dr. Murat GÜLBAY	

ÖZET

BELİRSİZİLİK ALTINDAKİ LOJİSTİK PROBLEMLERİNİN BULANIK MANTIK KULLANILARAK MODELLENMESİ VE ÇÖZÜMÜ

PEKMEZCİ, Mehmet
Yüksek Lisans Tezi, Uluslararası Ticaret ve Lojistik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat GÜLBAY
Mart 2015, 141 sayfa

Lojistik maliyetler, işletmelerin önemli gider kalemleri arasındadır. İşletmeler, bu maliyetleri en düşük seviyede tutmanın yollarını arar. Bu amaç doğrultusunda üretmiş oldukları ya da sundukları hizmetlerin kalitesinde bir azalma olmadan maliyeti düşürmek ve de gelirlerini arttırma hedefindedir. İşletmeler bu hedefleri sağlamaya çalışırken birçok problemle karşı karşıya kalırlar. Bu problemin çözümü problem parametrelerinin tam olarak kesin olduğu varsayımı üzerine geliştirilmiştir; fakat gerçek hayatta belirsizlik söz konusudur. Belirsizlik altındaki problemlerin modellenmesin de bulanık mantık yaklaşımı son yıllarda başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Bu çalışmada belirsizlik altındaki ulaştırma problemleri, tek kaynaklı fabrika yerleşimi problemleri, yerçekimi yerleşimi problemleri, ağ optimizasyonu problemleri, tek kaynaklı fabrika yerleşimi problemi, atama ve aktarma problemleri bulanık mantık kullanılarak, değişik bulanık doğrusal programlama yöntemleri ile modellenerek LİNGO paket programı yardımı ile çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Lojistik Problemler, Bulanık Mantık, Bulanık Doğrusal Programlama, Lojistik Modelleme.

ABSTRACT

MODELING AND SOLVING LOGISTIC PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY USING FUZZY LOGIC

PEKMEZCİ, Mehmet
M.A. Thesis, Depertmant of International Trade and
Logistics: Assist. Prof. Dr. Murat GULBAY
March 2015, 141 pages

Logistic costs, constitute one of the most important expense items of corporations which seek methods of keeping these costs as low as possible. By doing this, corporations target to lower the costs and to increase the revenues without compromising the quality of their offerings regardless of whether they are providing goods or services. Corporations face a significant number of challenges while trying to match these targets. These problems can be solved with the assumption that all the parameters of any such problem are given as certain, however in real life, uncertainty prevails the domain of problem solution. In recent years, fuzzy logic is increasingly applied with success for modelling of the problems under uncertainty. In this work; transportation problems, single source factory localization problems, gravity localization problems, network optimization problems, assignment and transportation problems are solved with the aid of LINGO package program by modeling with a variety of fuzzy linear programming methods using principles of fuzzy logic.

Keywords: Fuzzy Logistics Problems, Fuzzy Logic, Fuzzy Linear Programming, Logistics Modeling.

ÖNSÖZ

Çalışmamın her aşamasında bana göstermiş olduğu ilgi ve alakadan ötürü sevgili annem Demet PEKMEZCİ ve babam Mehmet Çetin PEKMEZCİ' ye teşekkür ederim.

Bu tezin oluşumunda bana her konuda yardımcı olan tez danışmanın Yrd. Doç. Dr. Murat GÜLBAY'a ve Gaziantep Üniversitesi Uluslararası Ticaret ve Lojistik Ana Bilim Dalı bölümündeki tüm hocalarıma, tezimin yazımında bana yardımcı olan sevgili ablam Pelin GEREÇCİ'ye ve eşi Bahattin GEREÇCİ'ye bana verdikleri destekten dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet PEKMEZCİ

Gaziantep, Mart 2015

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

BDP	: Bulanık doğrusal programlama
KDP	: Klasik doğrusal programlama
Ed./by	: Editör/ Yayına hazırlayan
Vd.	: Çok yazarlı eserlerle ilk yazardan sonrakiler
Pp./ss.	: Sayfa/ Sayfalar

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

1.1 GİRİŞ

Ülkemizde lojistik sektörü son yıllarda gelişme gösteren bir sektördür. Son yıllarda büyüyen bir pazar olarak lojistik sektörü, birçok yerli ve yabancı firmanın yatırım ve dış kaynak kullanımı açısından ilgisini çekmektedir. Hayatımızda yaşadığımız bazı ekonomik ve piyasa koşullarındaki belirsizlikler nedeniyle lojistik problemlerinin mevcut klasik yöntemler ile modellenmesi ve çözümünde belirsizlikler dikkate alınmadan yapılan modellemeler çoğu zaman gerçeği yansıtmamaktadır. Ekonomik faaliyette bulunan organizasyonların karar alma süreçlerinde var olan bu belirsizlik durumlarını göz ardı ederek, klasik mantık yöntemi ile çözülmek istendiğinde sonuçlar objektiflikten uzaklaşmaktadır. Birim maliyet, talep ve kapasite gibi verilerin gerçek hayatta karşılaşılan belirsizlik durumları da dikkate alınarak bulanık mantık ile modellenmesi ve risk analizlerinin buna göre yapılması gerekmektedir. 1965 yılında bulanık mantığın temellerini atarak literatüre kazandıran Lotfi A. Zadeh, bu belirsizliklerin ve bilgi eksiklerinin yol açtığı karmaşıklığa çözüm getirmeye çalışmıştır. Bu duruma bağlı olarak oluşan problemin amaç ve kısıt fonksiyonlardaki bir takım ihlaller taşıyabilecek bulanık doğrusal programla modelini geliştirerek daha objektif sonuçlar elde etmiş ve en doğru kararın verilmesine olanak sağlamıştır.

Bu tezde, lojistik problemlerin modellenmesinde kararları önemli derecede etkileyecek olan belirsizlikler dikkate alınarak lojistik problemlerine bulanık yaklaşım geliştirilmiştir. Belirsizlik altındaki lojistik problemlerin modellenmesi, çözümü ve belirsizlikten kaynaklanan risk faktörlerinin değerlendirilmesinde bulanık mantık yaklaşımı ile daha gerçekçi bir model oluşturulmuş ve bulanık doğrusal programlama ile çözülmüştür.

Klasik modeller, bulanık modellerin aksine hızlı, kolay, pratik olmasının yanında sürekli kendini yenileyen ve değişen teknolojiye, hayatın belirsiz bazı durumlarının anlatılmasına cevap vermekte yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada gerçeğe daha yakın sonuçlar almak adına bulanık mantık kuramından faydalanarak klasik modelleri, bulanık modeller haline dönüşümü yapılarak karar verici için alternatif seçenekler sunulmaya çalışılmıştır.

1.2 AMAÇ, KAPSAM VE KISITLAR

Son yıllarda önemli bir gelişme kayıt eden lojistik sektörü, birçok problemi de beraberinde getirmiştir. Bu problemlerin çözümü için literatürde birçok klasik çözüm yaklaşımı bulunmaktadır. Günlük hayatımızın bazı belirsiz yanları klasik modelin çözüm sonuçlarını gerçeklikten uzaklaştırmaktadır. Bu çalışmada bu belirsizliklerin bulanık mantık kuramı ışığında modele dahil edilmesi gerektiği ve çözümlerin gerçekleri daha iyi yansıtacağı savunulmuştur.

Lojistik problemler arasından ulaştırma, aktarmalı ulaştırma, atama, yer çekimi yerleşimi, ağ optimizasyonu ve kapasite atama problemleri bu çalışmada ele alınmıştır.

Klasik modellerin aksine bulanık modellerde belirsizlik içeren amaç ve kısıtlar modelin kısıt sayısını arttırmaktadır. Bu neden ile en iyi çözümün elde edilme süresi artmaktadır ancak elde edilen çözüm sonuçları gerçeğe daha yakın olmakta ve karar verici için alternatif seçenekler sunmaktadır.

1.3 METODOLOJİ

Bu çalışmada, aşağıdaki metodoloji uygulanmıştır.

- Literatür taraması,
- Doğrusal programlama metotlarının araştırılması ve lojistik problemlerine uygulanabilirliği,
- Doğrusal programlama paket programlarının incelenmesi ve çalışmada kullanılabilirliği,
- Lojistik problemlerinde oluşabilecek bulanıklık ve belirsizliklerin incelenmesi,
- Bulanık mantık ve uygulama yaklaşımlarının araştırılması,
- Bulanık doğrusal programlama modellerinin incelenmesi ve lojistik problemlerine uygulanabilirliğin araştırılması,
- Çeşitli lojistik problemleri için bulanık doğrusal programlama modellerinin oluşturulması, çözülmesi ve lojistik açısından yorumlanması,

- Sonuç ve öneriler.

Birinci bölümde, literatürde bulunan lojistik problemler arasından ulaştırma, aktarmalı ulaştırma, tesis yeri ve kapasite atama, yerçekimi yerleşimi, ağ optimizasyonu, tek kaynaklı fabrika yerleştirme, atama problemleri konuları ile ilgili bulanık modelleme çalışmaları incelenmiştir.

İkinci bölümde, temel klasik kümeler ile bulanık küme işlemleri üzerinde durulmuş ve klasik küme ile bulanık küme arasındaki farklar anlatılmıştır. Bulanık sayılardan üçgen ve yamuk bulanık sayıların üyelik değerleri, aralık analizi ve α-kesimi konularına değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmada ele alınan lojistik problemlerin klasik olarak nasıl modellenmesi gerektiği ve klasik doğrusal programlama yöntemi ile nasıl çözülebileceği anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, belirsizlik altında oluşan problemlerin bulanık olarak modellenmesi ve bu modellerin çözümünde literatürde en yaygın kullanılan yaklaşımlar hakkında bilgiler sunulmuştur. Karar vericinin belirsiz piyasa koşulları altında en uygun kararı nasıl alması gerektiği yine bu bölümde anlatılmıştır.

Beşinci bölümde, klasik lojistik problemlerin, bazı belirsizlik durumları altında bulanık modele dönüşümü yapılarak literatürde en yaygın kullanılan yaklaşımların metotlarına göre çözümler elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada kapasite ve talep kısıtında meydana gelen belirsizliklerin birbirinden farklı nedenler ile meydana geldiği görüşünden hareketle farklı parametreler ile sembolize edilmesi gerektiği savunulmuştur.

1.4 LİTERATÜR TARAMASI

Ulaştırma problemleri, üzerinde uzun zamandır çalışılan ve iyi bilinen bir konudur. Bir standart doğrusal programlama problemi olarak, ulaştırma problemleri örnek alınabilir. Bir ulaştırma probleminde amaç kar maksimizasyonu sağlamak, maliyetleri düşürmek ile birlikte toplam talep miktarını üretim kapasitesi ile karşılayabilecek en uygun yöntemin seçilmesidir. Klasik bir ulaştırma problemi ilk olarak 1941'de Hitchcock tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra Charnes and Cooper atlama taşı yöntemini geliştirmiştir (Charnes and Cooper, 1954: 49-69). Etkin algoritmalar, maliyet katsayıları, arz ve talep miktarları tam olarak bilindiğini varsaydığı için klasik bir ulaştırma problemini çözmektedir (Bazaraa, jarvis and Sherali, 1990; Hitchcock, 1994).

Atama problemleri, ulaştırma problemlerinin özel bir şekli olup ilk olarak 1952 yılında Votaw ve Orden tarafından yapılan çalışma ile literatüre kazandırılmıştır. Atama problemleri, her bir iş için tek bir makinenin veya işçinin atanması problemidir. Khun 1955 yılında klasik bir atama probleminin çözümü için Macar metodunu geliştirmiştir.

Aktarmalı ulaştırma problemleri, stokları arttırmadan maliyetleri azaltmak ve zorunlu ürün hizmetlerini geliştirmek için aktarma noktalarının kullanıldığı ulaştırma probleminin özel bir çeşididir. Literatürde aktarmalı ulaştırma problemleri için iki temel yaklaşım bulunmaktadır. Birinci yaklaşım iki perakendecinin olduğu aktarma problemidir. Tagaras (1989), Tagaras ve Cohen (1992), Robinson (1990), Herer ve Rashit (1999) bu konuyla ilgili çalışmalar yapmıştır. İkinci yaklaşım ise birden çok perakendecinin olduğu problemlerdir. Krishnan ve Rao (1965), Jönsson ve Silver (1987), ve Robinson (1990) bu konuda çalışmalarıyla literatüre katkıda bulunmuşlardır.

Tesis yerleşim problemleri, yeni kurulacak olan depo veya fabrikaların konumu bir çok araştırmaya konu olmuştur. Talluri ve Baker (2002), Jang, Jeng ve Chang (2002), Yang ve Edwin Cheng (2003) yaptıkları çalışmalarda optimizasyon yöntemlerini kullanarak en uygun çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Tsiakis vd. belirsiz talep altında üretim tesisleri, depolar, dağıtım merkezleri ve talep noktalarını içeren tedarik zinciri ağını matematiksel model olarak tasarlamıştır. Öznesil ve Demirel (2011), toplam maliyeti en aza indirmek için yaklaşık bir çözümden yararlanmıştır.

Ağ optimizasyonu modelleri, ile tesis yeri seçimi ve tedarik zinciri akışını en uygun bir şekilde sağlamak için etkili bir yöntemdir. Geoffrrion ve Graves (1974), Arntzen, Brown ve Harrison (1995), Camm ve Chorman (1997) çok ürünlü ağ tasarımı ve ağ analizi ile tedarik zincirini için en uygun çözüm yöntemleri geliştirmişlerdir.

Günlük hayatın belirsizlikler ile dolu oluşu birim taşıma maliyetlerini, talep, arz ve zaman gibi faktörler tam olarak bilinememesine neden olmaktadır. Bu durumda en uygun ve gerçeğe daha yakın çözümlere ulaşılmak için bulanık küme teorisinden faydalanarak lojistik problemlerin modellenmesi gerekmektedir.

Bulanık küme teorisi kavramı 1965 yılında “Fuzzy Sets” adlı makalesinde Lotfi A. Zadeh tarafından literatüre kazandırılmıştır. 1980 sonrası bulanık teori dünyada yayılmaya başlamış ve batı ülkelerindeki bazı bilim adamları bu teoriye karşı çıkmasına rağmen uzak doğu ülkelerindeki bilim adamları, arştırma kurumları ve akademisyenler arasında yoğun bir şekilde kullanılmıştır. Belman ve Zadeh “Decision-Making In a Fuzzy Environment” (1970) adlı çalışmasında optimum problem çözümünde bulanık küme teorisini uygulayarak çözmeyi düşünmüştür. H. J. Zimmermann ilk kez 1974 yılında klasik doğrusal programlama (KDP) problemlerine bulanık küme teorisini eklemiştir. Zimmerman (1985, 1978) doğrusal programlama yöntemine bulanık küme teorisini ekleyerek çok amaçlı karar verme problemlerinin ve bu problemlere ait bulanık modellerini, bulanık doğrusal programlama (BDP) haline dönüştürmüştür. Bulanık doğrusal programlama modelleri ile ilgili temel olarak sağ taraf sabit değerlerde, amaç fonksiyonunda ve teknoloji katsayılarında veya tüm parametrelerde bulanıklık söz konusu olabilir. Bu durumlar ile ilgili literatürde bir çok çalışma bulunmaktadır. Tanaka vd. (1974-1976), Zimmermann (1976-1978), Negoita (1981), Negoita Ralescu (1977), Negoita ve Sularia (1976), Orlovsky (1977), Yager (1979) ve Freeling (1980) çalışmalar yapmışlardır (Cheng, 2011:486). Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj (1984) bulanık arz ve talep değerli ulaştırma probleminin çözümü için bulanık doğrusal programlama modelini sunmuştur. Carlsson, Korhonen ve Chanas bulanık parametreler ile başa çıkmak için parametrik programlama yöntemini geliştirmiştir (Chanas vd., 1984: 211-221). Inuiguchi ve arkadaşları (1990), kısmi doğrusal üyelik fonksiyonları ile bulanık doğrusal programlama çözümü üzerinde çalışmıştır. Li-Hsing Shih (1998), ulaştırma planlama sorununu bulanık doğrusal programlama yöntemlerini kullanarak çözmüştür. Tanaka ve arkadaşları 2000 yılının son döneminde, Jamison ve Lodwick (2001), Chiang, Liu (2001), Bector ve Chandra (2002), Paksoy (2002) metodolojiye yeni çalışmalar sunmuştur (Tuş ve Ertuğrul, 2007: 37).

Chanas ve Kuchta (1996) bulanık katsayılı ulaştırma sorunu türünü ele alarak optimal çözümü için yeni bir yöntem geliştirmiştir. Liu ve Kao, maliyet, talep ve arz değerleri bulanık sayı olan ulaşım sorununun bulanık objektif değerini elde etmek için yeni bir yöntem geliştirmiştir (Liu ve Kao, 2004: 661-674). Razak ve Gani (2006) arz ve talep değerleri yamuk bulanık sayı olan en az iki aşamalı maliyet minimizasyonu sağlayan ulaştırma problemleri için parametrik bir yaklaşım sunumuştur. Yang ve Liu, sabit ve değişken maliyetlerin, taleplerin, kapasiteleri bulanık olan ulaştırma sorunu üzerinde çalışmıştır (Yang ve Liu, 2007: 879-889). Tien-Fu Liang (2008), bulanık olan arz ve talep değerlerini tahmin ederek ulaştırma, üretim maliyetlerini ve dağıtım sürelerini minimize etmeye çalışmıştır. Pandian ve Natarajan, taşıma maliyetleri, talep ve arz değerlerinin yamuk bulanık sayılar olduğu bulanık doğrusal programlama problemi için optimal çözüm bulmak için bulanık sıfır noktası yöntemini geliştirmiştir (Pandian ve Natarajan, 2010: 79-90). Chakraborty ve Chakraborty (2010), talep, arz ve taşıma maliyetleri bulanık olan ulaştırma sorununda, ulaştırma ve taşıma maliyetlerini minimum yapmayı hedefleyen bir yöntem geliştirmiştir. Nuran Güzel (2010) taşıma maliyet değerlerinin bulanık üçgen sayılar olduğu ve bu sayıların üst kısımlarının sınırlı olduğu bir bulanık ulaştırma problemini araştırmıştır. Kaur ve Kumar (2011), yeni bir yöntem ile taşıma maliyetlerinin bulanık olduğu ve ürün arz ve talep değerlerinin bulanık olmadığı bir ulaştırma sorunun için çözüm sunmuştur. Mohanaselvi (2013) yılında yayınlanan çalışmasında modifiye dağıtım yönteminin bulanık versiyonunu kullanarak, bulanık ulaşım sorununu, klasik bir ulaştırma sorununa dönüştürmeden optimal çözüm elde etmek için yeni bir yöntem sunmuştur. Ebrahimnejad (2014) yılında yayınlanan çalışmasında taşıma maliyet değerlerinin yamuk bulanık sayılar ile temsil edildiğini varsayarak bulanık ulaşım sorununu çözmek için sıralama fonksiyonuna dayalı yeni bir yöntem önermiştir.

İKİNCİ BÖLÜM
BULANIK MANTIK

2.1 GİRİŞ

İnsan hayatında, konuşma dilinde ve iş yaşantısında bazı bilgi eksikliğinden kaynaklı belirsizlikler ile sürekli karşı karşıyadır. Bu belirsizlikler, insanların amaçlarına ulaşmaları için alacakları kararlarda veya karar verme sürecinde zorlanmalarına, etkin kararlar alamamaya sürükler. Bu belirsizlikler günlük hayatının birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle verilen her karar, klasik bir kümede olduğu gibi doğru veya yanlış olmayabilir. Klasik küme mantığına göre karar verilmiş sonuç her zaman objektif bir sonuç olmayabilir. Bilgi eksikliği ve belirsizlikleri de problemin çözüm modeline dahil etmemiz daha sağılıklı sonuçlar çıkarmamızı sağlar. Problemin çözüm modeline bu belirsizlikleri dahil etmemiz için bulanık mantık teorisinden yararlanılır ve bulanık doğrusal programlama tekniği ile daha etkin çözümlere ulaşabiliriz.

Bulanık mantık 1965 yılında Azeri asıllı Lotfi A. Zadeh tarafından Bilgi ve Kontrol (Information and Control) dergisinde yayımlanan “Bulanık Kümeler” (Fuzzy Sets) adlı makalesinde ortaya koymuştur. Matematik ve bilgisayar biliminde Bulanık Mantık teorisinin temelini atmış bir bilim adamıdır.

İnsan mantığının bilimsel çözümlerine uygun olması için matematiksel modellere ihtiyaç duyulur. Bulanık mantık bunun için geliştirilmiş bir modeldir. İnsan kararlarını ve değerlendirme süreçlerini algoritmik bir formda gösterilmesine imkan sağlamaktadır. Bulanık mantığında yapabilecekleri sınırlıdır. İnsan hayal ve yaratıcılığının tüm kapsamı bulanık mantık ile benzer durumlar için tanımlanmış olan kurallar yardımı ile çözümler türetilebilir (Başkaya, 2011: 15).

Klasik mantık ile bulanık mantığı birbirinden ayırt eden en önemli nokta, oluşturulan önermelere atanan doğruluk değerlerinin sayısıdır. Oluşturulan önermelerin klasik mantıkta sadece 1 ve 0 ile eşleşebilen doğruluk değerleri bulanık mantıkta genişletilmiştir. Klasik mantığın oluşturulan bazı önermelerin doğruluk değerlerinin belirlenmesindeki yetersizliği ile "çok, oldukça, hemen hemen" gibi belirsizlik içeren kavramların insan düşünce biçimine yaklaşabilmek için kullanılma gerekliliği bulanık mantığın gelişmesine yol açmıştır (Özkan, 2003: 124).

Belirsizlik içeren verilere, lojistik, iktisat, işletme, psikoloji, yöneylem araştırması, ilaç endüstrisi gibi pek çok alanda rastlamak mümkündür. Söz konusu bu alanlarda ortaya çıkan problemleri çözmek için ihtimaller teorisi, istatistik, parametre tahmini ve hipotez testleri gibi yöntemler kullanılır. Fakat bu tekniklerin doğası gereği belirsizlik içeren problemlerin çözümünde kullanıldığında etkin bir çözüme ulaşmak zorlaşmaktadır. Bu durumda bulanık mantık ve bulanık küme sayesinde problemlerdeki belirsizlikleri modele ilave ederek rastgele çözüm hatalarından veya verilerin değişkenliklerinden kurtularak karar verme sürecinde etkin sonuçlara ulaşabiliriz.

2.2 KLASİK VE BULANIK KÜMELER

Çeşitli nesnelerden oluşmuş topluluğa "küme" denir. Daha genel olarak incelenen bir olayın veya verilen bir problemin sonucuna ulaşılabilmesi mümkün olabilirlikler topluluğu küme olarak tanımlanabilir. Kümeler A, B, C… gibi büyük harflerle ifade edilir (Baykal ve Beyan, 2004: 64).

Kümeler temel matematik ve mantık kavramlarının esaslarını teşkil eder. Aslında insan düşüncesinin en temel öğelerini kümeler meydana getirir, ama insanoğlu onları günlük hayatının her safhasında kullanılmasına rağmen küme kavramını bilmeyebilir. Artık düşünce sisteminde mantık ve matematiğin kullanılması ile küme kavramları da otomatik hale gelmiştir. Bu durum eğitilmiş veya fazlaca eğitilmemiş herkeste vardır. Eğitim sisteminin geçmişteki klasik matematik yerine modern matematik haline dönüştürülmesinde kümeler teorisine önemli yer verilmiştir (Şen, 2004: 38-39).

2.2.1 Klasik Kümeler

Klasik küme teorisi, nesnelerin bir araya gelmesi ve bu nesneler arasındaki kesin ilişkiler ile ilgili matematiksel bir hesaplamadır.

Basit bir küme nesnelerin listelenmesinden ($A = \{a, b, c, d\}\ veya\ B = \{portakal, limon, greyfurt, mandalina\}$) oluşur. Kümeler genellikle üyelik veya üye olmamayı tanımlayan bir kural belirlendiğinde ilgi çekici hale gelirler (Smithson ve Verkuilen, 2006: 4).

x elemanı, E evrensel kümesinin bir elemanı olsun. A kümesi klasik bir küme ise, matematiksel olarak,

$\forall x \in E: \mu_A(x) \in \{0, 1\}$

biçiminde ifade edilir (Tuş, 2006:11).

Klasik kümeler, kapalı olarak A, B, X, U, S, vb büyük harflerle gösterilir. Kümelerin açık olarak da gösterilmesi mümkündür. Bu takdirde büyük harfle küme adı belirtildikten sonra eşit işaretinin sağ tarafına büyük parantezler,{ }, içine kümenin öğeleri konur. Küme öğelerinin sıraları bu gösterilişte önemli değildir. Örneğin para olayı kümesini P harfi ile gösterirsek bunun y (yazı) ve t (tura olmak üzere iki öğesi de açık bir şekilde:

$P = \{y, t\}$

notasyonu ile gösterilir (Şen, 2001: 48).

Öğelerin ayrık değil de süreklilik gösterdiği kümelerde vardır. Bunların değişim aralıkları ne olursa olsun, içerdikleri öğe sayısı sonsuzdur. X sürekli bir değişken olmak üzere, bunlar iki taraftan kapalı:

$A = \{a \leq X \leq b\}$

iki taraftan açık:

$B = \{3 < X < 21\}$

sağdan açık soldan kapalı:

$C = \{-1 \leq X < 10\}$

veya soldan açık, sağdan kapalı:

$D = \{-1 < X \leq 10\}$

olabilirler. Açıklık ve kapalılık alt veya üst sınırların bulunması ile ilgilidir.

Buradan kümenin öğelerinin aslında olabilirlik durumlarını içeren karar değişkenleri olduğu anlaşılır. Olayın incelenmesi sonunda mutlaka küme öğelerinden bir tanesine karar verilecektir. Ancak hangisinin olacağı kesinlikle bilinmemektedir. İşte bu kesinlikle bilinmemenin belirsizlik olduğu ve bu öğe belirsizliğinin, **olasılık (ihtimal)** denilen nesnel (objektif) bir değeri vardır (Şen, 2001: 50).

Bir X evrensel kümesinde tanımlı olan bir A kümesini göstermek için üç temel yöntem vardır:

Listeleme yöntemi, bir kümenin elemanlarının sırası ile listelendiği yöntemdir. Bu yöntem sadece sonlu olan kümeler için kullanılmıştır.

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Kural yöntemi, kümenin üyelerini bir araya getiren ortak özelliğin bir notasyon ile ifadesidir.

$A = \{x \mid P(x)\}$

Karakteristik fonksiyon yöntemi, hangi elemanların kümenin üyesi olduğunu hangilerinin olmadığını belirtir. Örneğin, A kümesinin karakteristik fonksiyonu $X_A(x)$ ile gösterilirse bu fonksiyon A kümesinin elemanlarını, şayet A klasik kümesi ise, $\{0, 1\}$ değer aralığında eşleyen bir fonksiyondur (Klir ve Yuan, 1995:6). Bir A kümesinin karakteristik fonksiyon yardımı ile gösterilişi:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Kümeler üzerinde dört genel işlem yapılabilmektedir. Bunlar birleşim (∪), kesişim (∩), tümleme (değilleme, ¯) ve kapsama (⊆)dır. Bu işlemleri ifade edebilmek için A ve B kümelerinin aynı evrensel kümede tanımlı olduğu kabul edilsin. Bu iki küme üzerinde gösterilme notasyonları $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \subseteq B$ şeklindedir. Klasik kümelerin temel işlemleri aşağıda verilen tablo 2.1.'deki gibi özetlenebilir.

Tablo 2.1. Klasik küme işlemlerinin temel özellikleri (Klir ve Yuan, 1995: 8).

Çift değilleme (Involution)	$\overline{\overline{A}} = A$
Değişme (Commutativity)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Birleşme (Associativity)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Dağılma (Distributivity)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Yansıma (Idempotence)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Yutma (Absorption)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Yutma (Absorption by X and ∅)	$A \cup X = X$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Özdeşlik (Identity)	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$
Çelişme kuralı (Law of contradiction)	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Orta terimin yokluğu kuralı(Law of excluded middle)	$A \cup \bar{A} = X$
De Morgan kuralı (De Morgan's laws)	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2.2.2 Bulanık Küme

Doğadaki bazı olayları açıklayabilmek için kesin yargılara varabilmek imkânsızdır ve olaylar çoğu zaman belirsizlikler ve doğrusal olmayan özellikler arz ederler. Bu nedenle bu olayları daha anlaşılır bir şekilde anlamlandırabilmek için olaylardaki belirsizlikleri ortadan kaldırmak amacı ile bulanık kümelerden yararlanılır.

Bulanık küme teorisini ortaya atan Zadeh bulanık kümeyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Yıldırım, 2010: 17).

$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$

Literatürde üyelik fonksiyonlarını göstermek için en yaygın kullanılan iki farklı gösterim bulunmaktadır. Bunlardan biri, Bir bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu ile gösterimidir.

$\mu_A : X \to [0, 1]$

Diğer bir ifade ile A fonksiyonu:

$A : X \to [0, 1]$

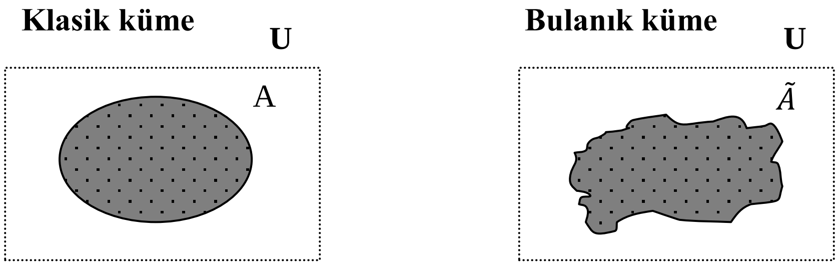
Şeklinde ifade edilir (Klir ve Yuan, 1995: 11).

Bulanık küme, bir aralıkta sürekli üyelik değerleri ile derecelenmiş nesneler sınıfıdır denilebilir. Böyle bir küme elemanları 0 ve 1 arasında ölçeklendirilmiş üyelik dereceleri ile karakterizedir (Gülcan, 2012: 14).

Bulanık veriler, kişiler ile yapılan görüşmeler ve insanların algılarından sağlanan belirsiz verilerden oluşmaktadır. Örneğin, “Mehmet sağlıklıdır” ifadesi yeteri kadar açık değildir çünkü sağlıklı ifadesi kişiden kişiye değişiklik gösterebilir. Bulanık bilgilerin matematiksel forma sokularak modellenmesi bulanık küme teorisi ile mümkün olmaktadır.

Bulanık küme, üyeleri kesin olarak belli olmayan ama aday elemanların bu kümeye ait olma üyelik derecelerinin bilindiği bir kümedir. Bulanık kümelerde üyelik derecesi 0’dan 1’e herhangi bir değeri alabilir ve geleneksel kümelerden bu noktada ayrılır. $A \subseteq X$ kümesinin üyelik derecesi $[0, 1]$ gerçel sayılar aralığı kabul edilir ise $\tilde{A}$ kümesi “Bulanık Küme” olarak adlandırılır ve geleneksel bir A kümesinden farklı olarak üzerine “~” alarak $\tilde{A}$ ile gösterilir. Burada “0” sayısı, ilgili nesnenin kümenin elemanı olmadığını, “1” sayısı ise ilgili nesnenin kümenin elemanı olduğunu gösterir. Bu iki değer (0 ve 1) arasında yer alan değerler ise nesnenin kümeye aitlik derecesini başka bir ifade ile kısmı üyeliğini belirtir. Nitekim bulanık bir kümede, kümenin elemanı olmayan nesnelerden, kümenin elemanı olan nesnelere doğru esnek ve dereceli bir geçişe izin verilir (Özkan, 2003: 6).

Bulanık bir küme ile geleneksel bir küme arasındaki fark aşağıdaki şekil 2.1. de görülebilir:



Şekil 2.1. Klasik küme ile bulanık kümelerin venn şeması ile gösterimi

Şekilden de görüldüğü gibi klasik küme ile bulanık kümeyi birbirinden ayıran en önemli fark: klasik kümeler kesin sınırlara sahip iken bulanık kümelerde sınırlar belirsizdir. Klasik kümelerin üyelik derecesi ya 0 ya da 1'dir. Bulanık kümelerde ise $[0, 1]$ aralığında çeşitli değerler alabilir.

2.3 BULANIK KÜMELER İÇİN TEMEL KÜME İŞLEMLERİ

Bulanık kümeler üzerinde birleşim, kesişim ve tümleme (değilleme) işlemlerinin birkaç temel özelliği vardır. Bu özellikler tablo 2.2.'deki gibi ifade edilebilir.

Tablo 2.2. Bulanık küme işlemlerinin temel özellikleri (Özkan, 2003: 20).

Çift değilleme (Involution)	$\mu_{\overline{\overline{\tilde{A}}}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
Değişme (Commutativity)	$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}\cup\tilde{A}}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}\cap\tilde{A}}(x)$
Birleşme (Associativity)	$\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)$ $\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)$
Dağılma (Distributivity)	$\mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x) = \mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x) = \mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})}(x)$
Yansıma (Idempotence)	$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
Yutma (absorption)	$\mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
Yutma (X ve Ø tarafından)	$\mu_{\tilde{A}\cup X}(x) = \mu_{X}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cap\emptyset}(x) = \mu_{\emptyset}(x)$
Özdeşlik (Identity)	$\mu_{\tilde{A}\cap X}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$ $\mu_{\tilde{A}\cup\emptyset}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$
De Morgan Kuralı (De Morgan's Law)	$\mu_{\overline{\tilde{A}\cap\tilde{B}}}(x) = \mu_{\bar{\tilde{A}}\cup\bar{\tilde{B}}}(x)$ $\mu_{\overline{\tilde{A}\cup\tilde{B}}}(x) = \mu_{\bar{\tilde{A}}\cap\bar{\tilde{B}}}(x)$

Yukarıdaki tablo 2.2. incelendiğinde klasik küme işlemlerinden orta terimin yokluğu kuralının ve çelişme kuralının bulanık kümelerde geçerli olmadığı görülmektedir. Klasik kümelerde bir kümeye ait olan bir eleman diğer kümeye ait değilken, bulanık kümelerde bir kümeye kısmi olarak üye olan bir eleman diğer kümeye de kısmi üye olabilmektedir. Şayet evrensel kümeyi her elemanın 1 üyelik derecesi ile üye olduğu ve boş kümeyi de elemanların üyelik derecesinin 0 olduğunu kabul edersek söz konusu kurallar şu şekilde ifade edilebilmektedir (Özkan, 2003: 20-21).

$\mu_{\tilde{A}\cap\bar{\tilde{A}}}(x) \neq \mu_{\emptyset}(x)$

$\mu_{\tilde{A}\cup\bar{\tilde{A}}}(x) \neq \mu_{X}(x)$

2.4 ÜYELİK FONKSİYONU

Üyelik fonksiyonu bulanık bir A kümesinin elemanlarının kümeye aitlik derecelerini gösterir $[0, 1]$ kapalı aralığında değerler alır ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde ifade edilir. Klasik bir kümede üyelik fonksiyonu ya 0 ya da 1 değerini alır iken bulanık bir kümede ise 0 ile 1 arasında sonsuz sayıda değer alabilir. Bu durum klasik küme ile bulanık kümeleri birbirinden ayırt eden en önemli farklılıktır.

Bir bulanık alt kümede üyelik derecesi 1'e eşit olan elemanlara öz, bir alt kümenin tüm elemanlarını içeren aralığa dayanak ve üyelik dereceleri 1 veya 0'a eşit olmayanların oluşturduğu kısımlara ise üyelik fonksiyonunun sınırları veya geçiş bölgeleri denir. Genel olarak üyelik fonksiyonlarında biri sağda ve biri solda olmak üzere iki geçiş bölgesi bulunmaktadır (Baykal ve Beyan, 2004: 84).

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \rightarrow \text{Ö}z$

$\mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \rightarrow Dayanak$

$0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 \rightarrow Sınırlar$

Ayrıca bulanık bir kümenin üyelik fonksiyonlarının sahip olması gereken iki özellik daha vardır bunlar: Bulanık kümenin normal ve dış bükey olmasıdır. Bulanık kümenin normal olması, kümenin üyelik derecelerinden en az bir tanesinin 1'e eşit olmasıdır. Dış bükey olma durumu ise bulanık kümenin üyelik fonksiyonlarının sürekli artan veya sürekli azalan bir seyir izlemesidir.

2.5 BULANIK SAYILAR

Bulanık sayılar dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonu olan ve gerçel sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir (Baykal ve Beyan, 2004: 223).

Bulanık bir sayı, bütün gerçel sayıların kümesi olan R' de tanımlıdır ve gerçel sayılar kümesinin bulanık bir alt kümesidir. Bulanık bir sayı, aşağıdaki koşulları sağlamalıdır (Bodjanova, 2003: 65).

- $\tilde{A}$ bulanık kümesi normal bir bulanık küme olmalıdır.
- $\tilde{A}$ bulanık kümesinin $\tilde{A}\alpha \quad \alpha -$ kümesi; $(0, 1]$ aralığındaki gerçel sayılar kümesinde tanımlı olmalıdır.
- $\tilde{A}$ bulanık kümesinin destek kümesi; $DESTEK\ (\tilde{A}) = \{x \in R \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ olmalıdır. Yani destek kümesi sınırlandırılmış olmalıdır.
- $\tilde{A}$ bulanık kümesi, dışbükey bir bulanık küme olmalıdır.

Bu koşullardan da anlaşıldığı gibi; bulanık kümeler ile bulanık sayılar birbiriyle yakından ilişkili unsurlardır. Her bulanık sayı bulanık bir küme olabilir ama her bulanık küme, bulanık bir sayı olamaz (Özkan, 2003: 59).

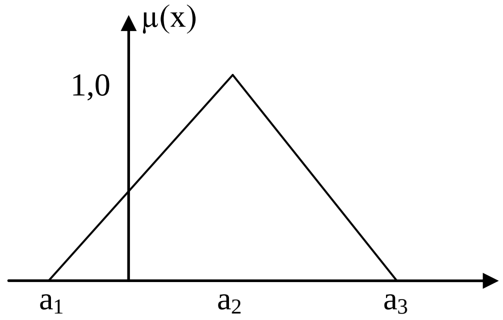
Ele alınan konuya göre değişik bulanık sayılar kullanmak mümkündür. Genel olarak pratik uygulamalarda kullanılan üçgen (triangular) ve yamuk (tranpezoidal) olmak üzere iki tane bulanık sayı söz konusudur.

2.5.1 Üçgen Bulanık Sayı

a_1 ve a_3; bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri ve a_2; tam üyelikli tek sayı olmak üzere üçgen bulanık sayı tanımı;

$$\mu_A(x) = \mu_A\,(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 \; ise \; (x - a1)/(a_2 - a_1) \\ a_2 \leq x \leq a_3 \; ise \; (a_3 - x)/(a_3 - a_2) \\ \quad x > a_3 \; veya \; x < a_1 \; ise \; 0 \end{cases}$$

olarak yapılabilir. $\mu_A\,(a_2) = 1$ olmak üzere a_2'ye üçgen bulanık sayının tepesi denir. a_2'nin a_1 ve a_3'in orta noktası olma zorunluluğu yoktur.



Şekil 2.2. A = [a_1, a_2, a_3] Üçgen bulanık sayısı.

Bir üçgen bulanık sayı α kesmeleri (güven aralığı) ile ifade edilebilir. $\forall_\alpha \in [0,1]$ ve $a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} \in R$ için;

$\alpha = (a_1^{\alpha} - a_1) / (a_2 - a_1) \rightarrow a_1^{\alpha} = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$

$\alpha = (a_3 - a_3^{\alpha}) / (a_3 - a_2) \rightarrow a_3^{\alpha} = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$

$A_\alpha = [a_1^{\alpha}, a_3^{\alpha}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 - (a_3 - a_2)\alpha + a_3]$

elde edilmiş olur.

Üçgen bulanık sayılarda aritmetik işlemler α kesmeleri kullanılarak veya aralık sayı işlemleri kullanılarak yapılabilir.

Üçgen bulanık sayı, merkezi a_2 olmak üzere;

"x a' ya yaklaşık olarak eşittir." gibi bir bulanık nicelik görülebilir.

Örnek olarak üçgen bulanık sayı $A = (-5, -1, 1)$, üyelik fonksiyonu;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} -5 \leq x \leq -1 \; ise; \; (x+5)/4 \\ -1 \leq x \leq 1 \; ise; \; (1-x)/2 \\ x > 1 \; veya \; x < -5 \; ise; 0 \end{cases}$$

bu bulanık sayıdan α kesim düzey aralığı;

$(x+5)/4 = \alpha \rightarrow x = 4\alpha - 5$

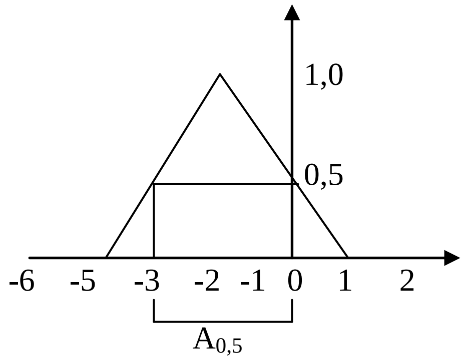
$(1-x)/2 = \alpha \rightarrow x = -2\alpha + 1$

$A_\alpha = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}] = [4\alpha - 5, -2\alpha + 1]$

$\alpha = 0{,}5$ olarak $A_{0,5}$ hesaplanırsa;

$A_{0,5} = [A_1^{(0,5)}, A_3^{(0,5)}] = [-3, 0]$

olarak elde eldir.



Şekil 2.3. Üçgen bulanık sayı (Baykal ve Beyan, 2004: 234).

Üçgen Bulanık Sayı İşlemleri; Üçgen bulanık sayı işlemlerinde bazı özellikler bulunmaktadır. Üçgen bulanık sayılar arasındaki toplama ve çıkarma sonuçları üçgen bulanık sayı olur. Fakat çarpma ve bölme işlemlerinin sonucu üçgen bulanık sayı olmak zorunda değildir. En büyük ve en küçük işlemleri üçgen bulanık sayı vermez. Fakat sıklıkla çarpma ve bölmenin işlem sonuçları da yaklaşık değer kullanılarak üçgen bulanık sayı olarak kabul edilir.

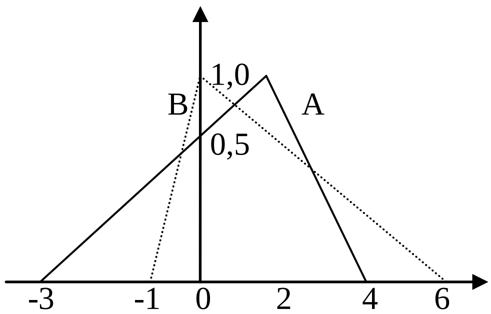
Toplama ve çıkarma işlemlerinde üyelik fonksiyonu kullanımına gerek yoktur. Bu işlemler α kesimi işlemleri kullanılarak da yapılabilir. Üyelik fonksiyonları ile de aynı sonuçlar elde edilebilir.

Toplama İşlemi:

$$A\,(+)\,B\ =\ (a1, a2, a3)\,(+)\,(b1, b2, b3)\ =\ (a1 + b1, a2 + b2, a3 + b3)$$

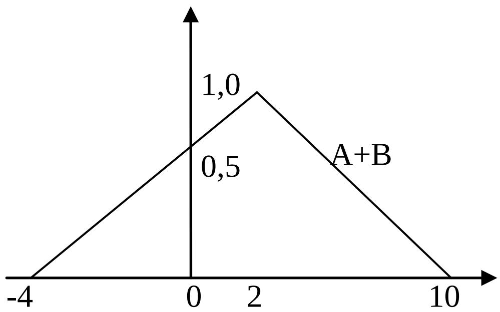
Örnek:

$A\ =\ (-3, 2, 4)$, $B\ =\ (-1, 0, 6)$ olmak üzere A ve B bulanık sayıları verilsin.



Şekil 2.4. Üçgen bulanık sayılarda toplama işlemi

Üçgen bulanık sayı için formülden; $A\,(+)\,B\ = (-3 + (-1), 2 + 0, 4 + 6)\ =\ (-4, 2, 10)$ olur.



Şekil 2.5. Üçgen bulanık sayılarda toplama işlemi

$A = (-3, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 6)$ için; α kesim aralıklarını kullanarak da aynı sonuçlar elde edilebilir. İşleminden α düzey aralıkları;

$A_\alpha = [a_1{}^{(\alpha)}, a_3{}^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3]$

$= [5\alpha - 3, -2\alpha + 4]$

$B_\alpha = [b_1{}^{(\alpha)}, b_3{}^{(\alpha)}] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\alpha + b_3]$

$= [\alpha - 1, -6\alpha + 6]$

olsun. İki α kesim aralığı A_α ve B_α alfa toplamı;

$A_\alpha \,(+)\, B_{\ \alpha} = [6\alpha - 4, -8\alpha + 10]$

olacaktır. Özellikle $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için;

$A_0 \,(+)\, B_0 = [-4, 10]$

$A_1 \,(+) B_1 = [2, 2]$

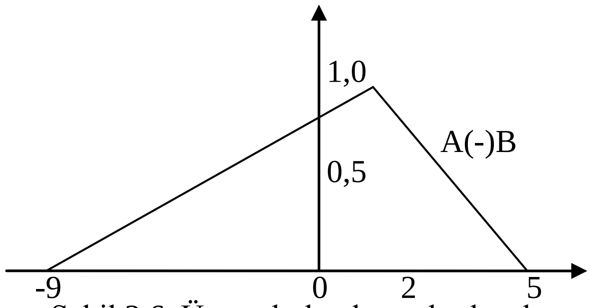
elde edilir. Bu işlemden elde edilen üç nokta önceki örnekte verilen $A\,(+)\,B$ sonucu olarak elde edilen $(-4, 2, 10)$ sonucu ile uyum içindedir.

Çıkarma İşlemi:

$$A\,(-)B = (a_1, a_2, a_3)\,(-)\,(b_1, b_2, b_3) = [(a_1 - b_3), (a_2 - b_2), (\,a_3 - b_1)]$$

Örnek:

$A = (-3, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 6)$ için $A\,(-)\,B = [(-3 - 6),\ (2 - 0), (4 - (-1))] = (-9, 2, 5)$ olur.



Şekil 2.6. Üçgen bulanık sayılarda çıkarma işlemi

$A_\alpha(-)\ B_\alpha$ işlemini çözdükten sonra $\alpha\ =\ 0$ ve $\alpha\ =\ 1$ durumlarını ele alalım.

$A_0\ (-)\ B_0 =\ \ [11\alpha - 9, -3\alpha + 5]$

Eşitlikte α = 0 ve α = 1 değerlerini yerine koyarsak

$A_0\ (-)\ B_0\ =\ [-9, 5]$

$A_0\ (-)\ B_0\ =\ [2, 2]\ =\ 2$

Bu sonuç $A\ (-)\ B\ =\ [-9, 2, 5]$ üç noktası ile eşittir.

Çarpma İşlemi:

Üçgen bulanık sayıların çarpma işlemi yaklaştırma kullanılarak yapılır. Bunun için önce ilgili sayıların α kesimleri alınıp çarpılır. Ardından ($\alpha\ =\ 0$) ve ($\alpha\ =\ 1$) değerleri için sonuçlar elde edilir.

Örnek:

$A\ =\ (1, 2, 4)$ ve $B\ =\ (2, 4, 6)$ olsun. Çarpmada yaklaşık değer elde etmek için önce, bu iki bulanık sayının α kesimleri ile ilgilenirsek;

$A_\alpha\ =\ [(2-1)\alpha + 1, -(4-2)\alpha + 4]$

$$\begin{aligned} B_\alpha\ &=\ [(4-2)\alpha + 2, -(6-4)\alpha + 6] \\ &=\ [2\alpha + 2, -2\alpha + 6] \end{aligned}$$

Tüm $\alpha \in\ [0, 1]$ için, iki kesim aralık olan A_α ile B_α yi çarpalım. $\alpha \in$ $[0, 1]$'de, her aralığın elemanlarının pozitif sayılar olduğu görülmektedir. Böylece iki aralığın çarpma işlemi kolay olacaktır;

$A\ (*)\ B\ =\ [(\alpha + 1), (-2\alpha + 4)]\ (*)\ [(2\alpha + 2), (-2\alpha + 6)]$

$A\ (*)\ B\ =\ [(\alpha + 1)\ (2\alpha + 2), (-2\alpha + 4)\ (-2\alpha + 6)]$

$A\ (*)\ B\ =\ [(2\alpha 2 + 4\alpha + 2), (4\alpha 2 - 20\alpha + 24)]$

$\alpha\ =\ 0\ için\ A_0\ (*)\ B_0\ =\ [2, 24]$

$\alpha\ =\ 1\ için\ A_1\ (*)\ B_1\ =\ [8, 8]\ =\ 8$

$A\ (*)\ B$' in yaklaşıklaştırılması ile üçgen bulanık sayı elde ederiz.

$A\,(*)\,B\ \cong\ (2, 8, 24)$

Bölme İşlemi:

Çarpmada yapılan benzer bir yolla, bir üçgen bulanık sayıda $A\,(/)\,B$' in yaklaşık değeri ifade edilir. Önce A_α aralığını B_α ile bölünür ve $(\alpha = 0)$ ve $(\alpha = 1)$ değerleri için sonuçlar elde edilir.

$A = (1, 2, 4)$ ve $B = (2, 4, 6)$, $\alpha \in [0,1]$ için, her aralığın elemanı pozitif sayı olacağından $A_\alpha\,(/)\,B_\alpha$' yı şu şekilde elde ederiz;

$$\left(\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\right) = \left[\frac{(\alpha+1)}{(-2\alpha+6)}, \frac{(-2\alpha+6)}{(2\alpha+2)}\right]$$

$$\alpha = 0\ için;\ \left(\frac{A_0}{B_0}\right) = \left[\frac{1}{6}, \frac{4}{2}\right] = [0.17, 2]$$

$$\alpha = 1\ için;\ \left(\frac{A_1}{B_1}\right) = \left[1 + \frac{1}{-2} + 6, \frac{(-2+4)}{(2+2)}\right] = \left[\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right] = 0.5$$

Yaklaştırılmış $A\,(/)\,B$' in değeri;

$$\left(\frac{A}{B}\right) \cong (0.17, 0.5, 2)$$

2.5.2 Yamuk Bulanık Sayılar

Yamuk bulanık sayı en sık kullanılan bulanık sayı çeşitlerinden biridir. Yamuk bulanık sayıların daha sık kullanılma nedeni üçgen bulanık sayıların yamuk bulanık sayıların özel bir şekil olması ve sözel değişkenlerle kolay kavranabilir olmasıdır.

Yamuk bulanık sayı üyelik derecesi en büyük olan $(\alpha = 1)$ birden çok nokta olması anlamına gelir.

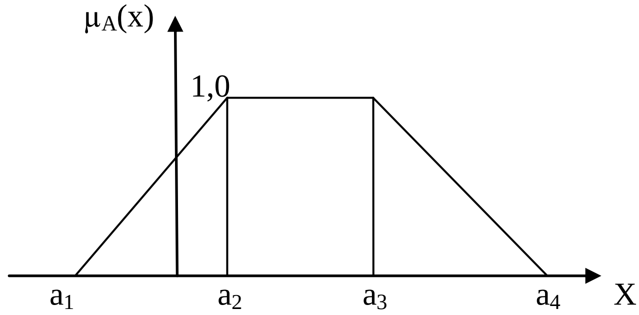
Yamuk bulanık sayı dört parametre ile tanımlanır. a_1 ve a_4; bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri a_2 ve a_3; tam üyelikli sayıların kümesinin sınırlarını göstermek üzere;

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2\ ise; \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} \\ a_2 \leq x \leq a_3\ ise; 1 \\ a_3 \leq x \leq a_4\ ise\ (a_4 - x)/(a_4 - a_3) \\ x > a_4\ veya\ x < a_1\ ise; 0 \end{cases}$$

(Başkaya, 2011: 114).

Yamuk bulanık sayının aritmetik işlemleri için α kesim (güven) aralığı yönetimi kullanılır. $\forall\ \alpha\ \in\ [0, 1]$ için;

$A_\alpha = [\,a_1{}^\alpha, a_4{}^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 - (a_4 - a_3)\alpha + a_4]$



Şekil 2.7. Yamuk bulanık sayı

Yamuk bir bulanık sayı, "x $[\,a2, a3]$ aralığına yaklaşık olarak eşittir" gibi bir bulanık nicelik olarak görülebilir (Baykal ve Beyan, 2004: 235).

Yamuk Bulanık Sayı İşlemleri; Yamuk bulanık sayılarla yapılan işlemlerde toplama ve çıkarma sonucu yamuk bulanık sayıdır. Çarpma ve bölme ile tersine çevirme sonuçları yamuk olmak zorunda değildir. Bulanık sayıların en büyük ve en küçük işlemleri her zaman yamuk bulanık sayı değildir. Fakat yine pek çok çarpma ve işlemi sonucunda yaklaşık yamuk biçimi kullanılır. Üçgen bulanık sayılarda olduğu gibi toplama, çıkarma basitçe tanımlanır ve çarpma ve bölme işlemleri üyelik fonksiyonları kullanılarak yapılmalıdır.

Toplama İşlemi:

$\mathrm{A}\,(+)\,\mathrm{B} = (\mathrm{a1} + \mathrm{b4}, \mathrm{a2} + \mathrm{b2}, \mathrm{a3} + \mathrm{b3}, \mathrm{a4} + \mathrm{b1})$

Çıkarma İşlemi:

$\mathrm{A}\,(-)\,\mathrm{B} = (\mathrm{a1} - \mathrm{b4}, \mathrm{a2} - \mathrm{b2}, \mathrm{a3} - \mathrm{b3}, \mathrm{a4} - \mathrm{b1})$

Çarpma İşlemi:

$\mathrm{A}(*)\mathrm{B} = (\mathrm{a1} * \mathrm{b1}, \mathrm{a2} * \mathrm{b2}, \mathrm{a3} * \mathrm{b3}, \mathrm{a4} * \mathrm{b4})$

Bölme İşlemi:

$\mathrm{A}(/)\mathrm{B} = (\mathrm{a1}/\mathrm{b4}, \mathrm{a2}/\mathrm{b3}, \mathrm{a3}/\mathrm{b2}, \mathrm{a4}/\mathrm{b1})$ (Baskaya ve Öztürk, 2011:84).

Yamuk bulanık sayıların çarpma işlemi de yaklaşıklaştırma kullanılarak yapılır. Bunun için üçgen bulanık sayıdaki gibi önce ilgili sayıların α kesimleri alınıp çarpılır. Ardından ($\alpha = 0$) ve ($\alpha = 1$) değerleri için sonuçlar elde edilir.

Örnek:

$A = (1, 5, 6, 9)$ ve $B = (2, 3, 5, 8)$ şeklindeki iki bulanık sayının çarpma işlemini yaparsak; işlemin tam değeri için üyelik fonksiyonu kullanılmalıdır. Yaklaşık işlem için α kesim aralığı kullanılmıştır.

$A_\alpha = [4\alpha + 1, -3\alpha + 9]$

$B_\alpha = [\alpha + 2, -3\alpha + 8]$

Tüm $\alpha \in [0, 1]$ için, her aralığın her elemanı pozitif olduğundan dolayı, α kesim aralıkları ile çarpma şu şekilde olacaktır;

$A_\alpha\ (*)\ B_\alpha = [(4\alpha + 1)\ (\alpha + 2), (-3\alpha + 9)\ (-3\alpha + 8)]$

$A_\alpha\ (*)\ B_\alpha = [(4\alpha^2 + 9\alpha + 2), (9\alpha^2 - 51\alpha + 72)]$

$\alpha = 0\ için\ A_\alpha\ (*) B_\alpha = [2, 72]$

$\alpha = 1\ için\ A_\alpha\ (*) B_\alpha = [4 + 9 + 2, 9 - 51 + 72] = [15, 30]$

$\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ de dört nokta kullanılarak, yamuk bulanık sayı olarak yaklaşık değeri elde edebiliriz;

$A\ (*)\ B \cong (2, 15, 30, 72)$

Bölme İşlemi:

Yamuk bulanık sayının toplama ve çıkarma işlemleri yine yamuk bulanık sayı verir. Ancak iki yamuk bulanık sayının çarpımı ya da bölümü yine bir yamuk bulanık sayı vermez. Çünkü çarpım sonucunda ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu da çarpım sonucunun eğrisel bir şekli olduğu anlamına gelir. Bu maksatla eğrisel olan çarpım sonucu grafiği α kesmeleri ile doğrusal olan yamuk bulanık grafiğe yaklaştırılır. Bu nedenle çarpım işlemleri yaklaşık bir değerdir (Baykal ve Beyan, 2004: 241).

2.6 BULANIK SAYILARDA ARALIK ANALİZİ VE α-KESİM YÖNTEMİ

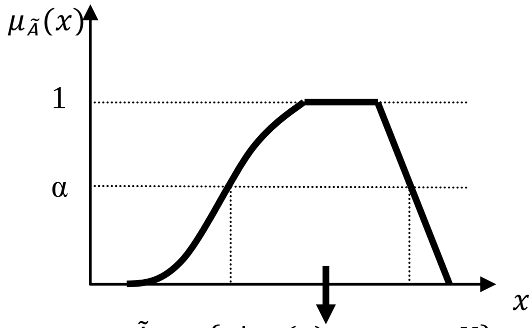
Bulanık sayı, reel sayılar kümesinde bir bulanık küme tarafından tanımlanan bulanık bir aralık ile ifade edilebilir. Söz konusu aralık aynı zamanda bir bulanık kümeyi göstermektedir. Genel olarak bir bulanık iki sınır noktası, $a_1\ ve\ a_3$ ve bir doruk noktası, a_2 ile tanımlanmaktadır (Başkaya, 2011: 123).

Bulanık sayıların gerçek sayı doğrusu üzerindeki bulanık olmayan aralıkları α −kesim yöntemi ile belirlenir. Bir bulanık A sayısının α −kesim aralığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, \quad x \in U \; ve \; \alpha \in (0,1]\}$

Bir alt ve üst sınır ile belirlenen ve kesin ve kapalı bir aralığı gösteren bir $\tilde{A}$ bulanık sayının α −kesim aralığı aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Gülcan, 2012: 48).

$\tilde{A}_\alpha = [{a_1}^\alpha, {a_2}^\alpha]$



$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, x \in U\}$

Şekil 2.8. α-Kesim kümesinin gösterimi

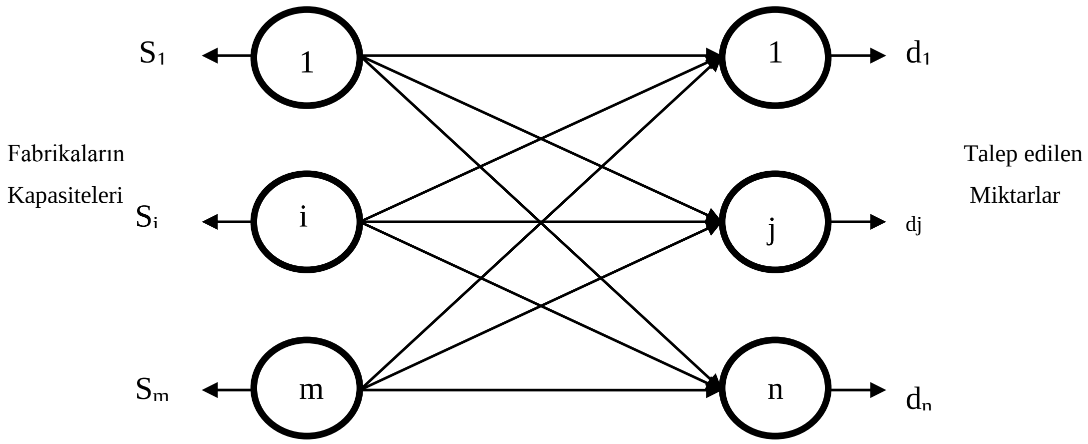
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
LOJİSTİK PROBLEMLER

3.1 GİRİŞ

İşletmelerin kuruluş amaçlarından bir tanesi kar elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda işletmeler, üretim faktörlerini kullanarak üretim faaliyetinde bulunurlar. Hedef, üretimin kalitesini düşürmeden gelirleri arttırmak ve maliyetleri azaltmaktır. Bu amaç doğrultusunda her geçen gün artan insan ihtiyaçlarını karşılamak oldukça zor bir iştir ve bu ihtiyaçları karşılamak için üretilen nihai ürünlerin üretimi sonrası tüketiciye ulaşımı işletmeler için çok önemli bir yere sahiptir. Çünkü: üretimin dağıtımı, ulaşımı ve stok bulundurma maliyeti işletmelerin önemli maliyet kalemlerindendir. Ayrıca ürünlerin tüketiciye zamanında ulaşması tüketici memnuniyeti açısından önem arz eder. Bu bölümde doğrusal programlama modelinin özel bir türü olan ulaştırma modellerinden bahsedilecektir. Bu model belirli sayıda hedef için belirli sayıda kaynaktan bir malı en düşük maliyet ile ulaştırılmasını mevzu alır.

Ürünlerin, üretim noktalarından, tüketim noktalarına dağıtımı ile ilgili problemler ulaştırma ve atama problemleri olarak ifade edilir. Ulaştırma modellerinin uygulama alanları sadece ürünlerin belirli bir noktadan diğer bir başka noktaya taşınması ile sınırlı değildir. Stok kontrolü, işgücü planlaması, kuruluş yeri seçimi, işlerin makinelere dağıtımı gibi alanlarda da ulaştırma modelleri kullanılabilmektedir.

Ulaştırma probleminin genel hali aşağıdaki şekilde görülmektedir. Her biri bir düğüm olarak gösterilen S_i kapasitesine sahip m adet kaynak noktası ve her biri D_j talebine sahip n adet hedef noktası vardır. Düğümleri birleştiren oklar kaynaklar ile hedefler arasında mümkün olan taşıma rotalarını göstermektedir. (i, j) bağlantısı i. kaynaktan j. hedefe ürün gönderebildiği anlamına gelmekte, taşıma maliyeti ve taşıma miktarı olmak üzere iki tür bilgi içermektedir. Amaç mevcut kaynakları kullanarak tüm talebi karşılayacak bir biçimde en küçük maliyetli dağıtım planının bulunmasıdır.



Şekil 3.1. Ulaştırma probleminin genel gösterimi

Atama modelinde amaç, bir faaliyeti en iyi bir biçimde yapmak için kaynak kullanımının birebir dağıtımını sağlamaktır. Ulaştırma probleminin özel bir hali olan atama problemleri ile genellikle işlerin makinelere dağıtımı, kişilerin beceri ve tecrübelerine göre işlere tayini, çalışanların satış noktalarına dağıtımına benzer durumlarda karşılaşılmaktadır (Sağır vd., 2013: 171).

Üreticiler yani arz edenler ile tüketiciler yani talep edenler arasındaki mal ve hizmet akışı ile ilgili olan ulaştırma problemlerin de, birden çok talep noktasına dağıtım işlemini gerçekleştirmek mümkündür. Atama probleminde ise, bir üretici noktasından sadece bir tüketici noktasına atama yapabilmekte ve bir tüketiciye sadece bir üretici noktası atanabilmektedir. Şekil 3.1'deki gibi arz ve talep noktası sayısı eşit olarak kabul edilip, kaynak kapasiteleri ve hedef talepleri "1" olarak alınırsa ulaştırma problemleri atama problemine dönüşmüş olur.

3.2 ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Bir tür doğrusal programlama modeli olması nedeniyle doğrusal programlama modeli için benimsenen kuralların tümü ulaştırma modeli için de geçerlidir. Bu varsayımlar şunlardır:

1. Bütün doğrusal programlama modellerinde, modelde bulunan bütün fonksiyonların doğrusal olması gerekir. Bu modeldeki tüm değişkenlerin birinci dereceden olmasıdır.
2. Doğrusal programlama modelini oluşturan değişkenler arasında toplanabilme özelliği vardır.

3. Doğrusal programlama modelini oluşturan katsayı ve parametrelerin bilindiği ve öngörülen dönem içinde değişmediği kabul edilir.
4. Doğrusal programlama modelinde bulunana değişkenlerin değeri sıfır ya da pozitiftir.
5. Probleme konu olan mal ve hizmetlerin aynı birimler ile ifade edebilmeli gerekir.
6. Belirli sayıdaki üretim merkezinde üretilen ürün miktarları ile belirli sayıdaki tüketim merkezlerinin talep miktarları kesin olarak bilinmeli ve bunların toplamlarının birbirlerine eşit olması gerekir. Eğer eşit değilse eşitliğin kuramsal olarak sağlanması gerekir.
7. Üretim merkezleri ile tüketim merkezleri arasında aktarma yapılması söz konusu değildir.
8. Herhangi bir üretim merkezinden herhangi bir tüketim merkezine gönderilen ürünün birim taşıma maliyetinin sabit olması gerekir (Doğan, 1995: 76).

Genel bir ulaştırma problemi, herhangi üretim merkezinden başka bir deyişle kaynak merkezinden herhangi bir tüketici merkezine bir başka deyişle hedef merkezine doğru ürünlerin ulaşımı sürecinde oluşan toplam maliyetleri minimize etme problemidir (Hillier ve Lieberman, 1986: 187).

Ulaştırma problemlerin de cevap arana soru, hangi üretim merkezinden, hangi tüketim merkezine ne kadar ürün taşınacağıdır. Bu soru aynı zamanda karar değişkenlerini tanımlamakta olup, sorunun cevabı ürün dağıtım planını verecektir.

Ulaştırma problemlerinde iki temel kısıt vardır:

1. Bir üretim merkezinden tüm tüketim merkezlerine gönderilen toplam ürün miktarı, üretim merkezinin kapasitesini aşamaz.
2. Bir tüketim merkezine bütün üretim merkezlerinden gönderilen toplam ürün miktarı, tüketim merkezinin talebini karşılamalıdır.

Birinci tipteki temel kısıtların sayısı üretim merkezi sayısına eşittir. Bu kısıtlar, bir kaynaktan birden fazla hedefe ürün dağıtılmasına izin verir. Tüketim merkezi sayısına eşit olan ikinci tip temel kısıtlarla ise, bir hedef noktasının talebinin birden fazla kaynaktan karşılanması sağlanır. Amaç, bir yandan tüketim noktalarının talep gereksinimleri ile üretim merkezlerinin sunum miktarlarında denge sağlar iken, aynı zamanda toplam taşıma maliyetini de en küçüklemektedir. Bazı durumlarda elde edilecek bir kazancın en büyüklenmesi amacı da benimsenebilmektedir (Sağır vd., 2013: 172).

Genel bir ulaştırma modeli aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Hillier ve Lieberman, 1986: 187).

$$Minimize\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

x_{ij}: i. kaynak merkezinden j. hedef merkezine yollanan ürün miktarını,

c_{ij}: i. kaynak merkezinden j. hedef merkezine gönderilen 1 birim ürünün ulaştırma maliyetini,

s_i: i. kaynak merkezinin üretim kapasitesini,

d_j: j. hedef merkezinin talep miktarını göstermektedir.

Örnek 1;

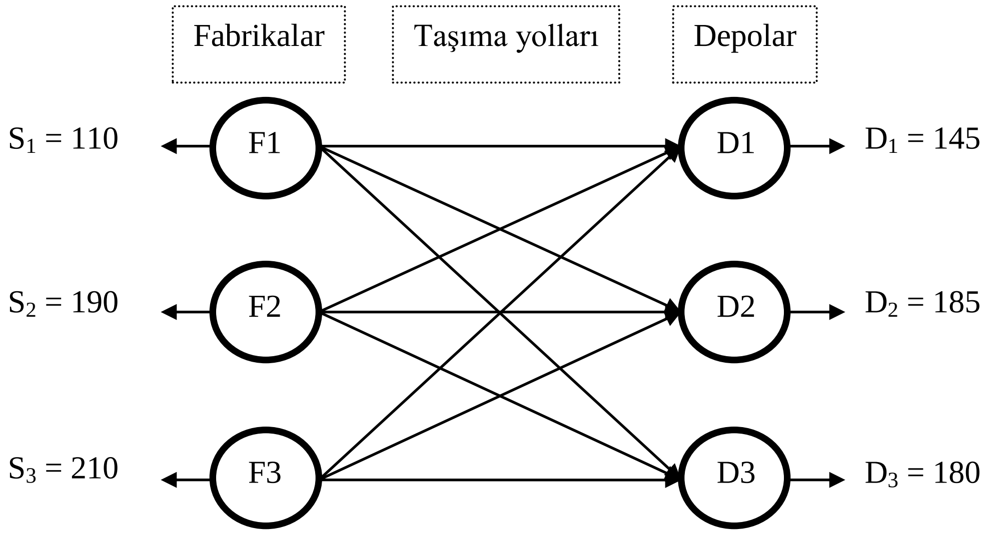
Bir çimento şirketine ait üç ayrı fabrikada üretimi yapılan bir ürünün, üç ayrı bölge deposuna dağıtım istenmektedir. Fabrikaların gönderilecek ürün ile ilgili kapasiteleri sırasıyla haftada 110, 190 ve 210 kolidir. Depoların ihtiyaç duyduğu haftalık miktarlar ise sırasıyla 145, 185 ve 180 koli olarak bildirilmiştir. Tablo 3.1.'de fabrikalardan depolara olan birim taşıma maliyetleri görülmektedir. Bu durumda oluşacak en düşük maliyetle dağıtımın yapılması hedeflenmektedir ve buna göre oluşan doğrusal ulaştırma modeli ve çözüm yolları ele alınmıştır.

Tablo 3.1. Birim taşıma maliyet tablosu (TL/koli)

	DEPOLAR		
FABRİKALAR	**1**	**2**	**3**
1	7	8	5
2	6	4	7
3	9	6	8

Toplam taşıma maliyetinin minimize edilmesi istendiği problemin karar değişkenleri, x_{ij} i. fabrikadan j. depoya taşınacak ya da gönderilecek ürün miktarı

$(i, j = 1, 2, 3)$ (koli/hafta) olarak tanımlanırsa, modele esas olan gösterim şekilde görüldüğü gibi gösterilebilir.



Şekil 3.2. Üç fabrika ve üç depolu ulaştırma probleminin gösterimi

Örnek problemde üretici sayısı $m = 3$ ve tüketici sayısı $n = 3$ olduğundan, karar modelinde 9 karar değişkeni $(= m * n = 3 * 3)$ ve 6 temel kısıt $(= m + n = 3 + 3)$ yer alacaktır. Amaç, toplam taşıma maliyetinin minimizasyonu olarak tanımlanmış olan modelin, matematiksel fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \text{En küçük } Z \ = \ & 7X_{11} + 8X_{12} + 5X_{13} + 6X_{21} + 4X_{22} + 7X_{23} \\ & + 9X_{31} + 6X_{32} + 8X_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} &\leq 110 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} &\leq 190 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} &\leq 210 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 145 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 185 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 180 \end{aligned}$$

Problemin iki temel kısıdı, fabrikaların kapasiteleri ve depoların taleplerine yöneliktir. Fabrikalardan, depolara gönderilen ürünlerin toplamı fabrikaların üretim kapasiteleri toplamını aşamaz. Bir başka deyişle kapasite kısıdı da denir. Bu durum ile ilgili kısıtlar aşağıda görülmektedir.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 110$ (1. Fabrikandan gönderilen toplam miktar 110 koli sınırını geçemez.)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 190$ (2. Fabrikadan gönderilen toplam miktar 190 koli sınırını geçemez

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 210$ (3. Fabrikadan gönderilen toplam miktar 210 koli sınırını geçemez.)

İkinci tip kısıtlar ise, depo taleplerinin karşılanması ile ilgilidir. Talep kısıtları ise aşağıdaki gibidir.

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 145$ (1. Depoya gönderilen toplam miktar 145 koliye eşit olmalıdır.)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 185$ (2. Depoya gönderilen toplam miktar 185 koliye eşit olmalıdır.)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 180$ (3. Depoya gönderilen toplam miktar 180 koliye eşit olmalıdır.)

Son olarak karar değişkenlerinin negatif değer alamayacağını gösteren işaret kısıtları modele eklenir.

$X_{ij} \geq 0 \quad i,j = 1,2,3$

Model son hali ile aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} En\ küçük\ Z\ &= 7X_{11} + 8X_{12} + 5X_{13} + 6X_{21} + 4X_{22} + 7X_{23} \\ &+ 9X_{31} + 632 + 8X_{33} \end{aligned}$$

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 110$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 190$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 210$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 145$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 185$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 180$

$X_{ij} \geq 0 \quad i,j = 1,2,3$

3.2.1 Ulaştırma Tablosu

Ulaştırma tablosu, üretim merkezleri satırlarda, tüketim merkezleri sütunlarda olmak üzere m*n sayıda hücresi olan bir tablodur. Üretim ve tüketim merkezlerinin kesiştiği her bir hücre, bir karar değişkenine karşı gelir. Her bir hücresinin sağ veya sol üst köşesine birim taşıma maliyetleri yazılır. Üretim merkezlerinin kapasiteleri, satırların en sağında; tüketim merkezlerinin talepleri de sütunların altında yer alır (Sağır vd., 2013: 174).

Tablo 3.2. Ulaştırma tablosu (Hillier ve Lieberman, 1986: 188).

		HEDEF MERKEZLERİ				**ARZ**
		1	**2**	**…**	**N**	
KAYNAK MERKEZLERİ	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_1
	. . .	. . .	. . .	$\cdots$	. . .	. . .
	m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	c_{mn}	s_m
TALEP		$\boldsymbol{d_1}$	$\boldsymbol{d_2}$	**…**	$\boldsymbol{d_n}$	

Örnek 1' deki çimento şirketi probleminin ulaştırma tablosu aşağıdaki tablo 3.3.' de görülmektedir. Üretim merkezleri olan fabrikalar satırlarda, tüketim merkezleri olan depolar ise sütunlarda gösterilmiştir. Hücrelerin içerisinde yer alan x_{ij}' ler karar değişkenleridir.

Tablo 3.3. Gıda şirketi ile ilgili örneğin ulaştırma tablosu

Depolar / Fabrikalar	**1**	**2**	**3**	**Fabrika Kapasiteleri**
1	X_{11} 7	X_{12} 8	X_{13} 5	**110**
2	X_{21} 6	X_{22} 4	X_{23} 7	**190**
3	X_{31} 9	X_{32} 6	X_{33} 8	**210**
Depo Gereksinimleri	**145**	**185**	**180**	**510**

3.2.2 Dengelenmiş Ulaştırma Problemi

Eğer bir ulaştırma modelinde toplam kapasite ile toplam talep eşit ise "dengelenmiş ulaştırma modeli" denilir. Eğer eşit değilse "dengelenmemiş ulaştırma modeli" olarak adlandırılır (Tulunay, 1991: 341).

S_i, i. üretim merkezinin sunum miktarı, d_j, j. tüketim merkezinin talep miktarı iken, dengelenmiş modelde,

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

eşitliği sağlanır. Dengelenmemiş modelde ise,

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

olarak gerçekleşir.

Ulaştırma tablosu üzerinden çözüm yapabilmek için, modelin dengelenmiş olması gerekmektedir. Bir ulaştırma modeli dengelenmemiş ise, yapay kaynak ya da yapay hedef noktası eklentisiyle, model dengelenmiş hale dönüştürülebilir. Bu durumda eklenen yapay noktanın sunum ya da talep miktarı, toplam sunum ile toplam talep arasındaki fark kadar olur. Yapay noktalara karşı gelen birim taşıma maliyetleri ise aksi bir durum olmadıkça sıfır olarak alınır. Bazen yapay kaynak noktasına ait taşıma maliyetlerine sıfır yerine, belirlenen ceza maliyetleri de verilebilmektedir.

Eğer toplam sunum toplam istemden çok ise problemi dengelemek yani fazla miktarı;

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

tüketilmesi için kukla bir depo (tüketim merkezi) yaratılır. Kukla depolara hiç mal gönderilmeyeceği için, üretim merkezlerinden kukla depolara birim taşıma maliyeti sıfırdır. Ulaştırma tablosunda kukla depo ek sütun olarak yer alır. Ayrıca herhangi bir mal fabrikadan kukla depoya gönderildiğinde bu durum fabrikada atıl kapasitede olduğunu gösterir.

Eğer toplam sunum toplam istemden az ise problem uygun olmadığı gibi problemi dengelemek için;

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \geq \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Kapasite miktarındaki sunum eksikliğinin kukla üretim merkezi tarafından karşılanması istenir. Böylece ulaştırma tablosuna ek satır olarak kukla fabrika eklenir. Herhangi bir tüketim merkezi kukla fabrikadan o miktarda mal almaz (Öztürk, 2005:).

Örnek 2;

Örnek 1’ deki çimento şirketi örneğinde birinci fabrikanın kapasitesi 115 birime çıkarılmak istensin. Problemdeki diğer tüm parametreler aynı kalmak koşuluyla dengelenmiş ulaştırma tablosunu oluşturmak istersek;

$$Toplam\ kapasite\ miktarı = 115 + 190 + 210 = 515$$

$Toplam\ talep\ miktar\text{ı} = 145 + 185 + 180 = 510$

Toplam kapasite miktarı toplam talep seviyesini aştığından, dengeyi sağlamak için kukla bir depo, ek sütun olarak modele eklenir ve kukla deponun talep miktarı 5 birim $(= 515 - 510)$ olur. Böyle bir deponun gerçekte yer almadığından, bu noktaya olan taşıma maliyetleri sıfır alınır. Bu durum, atıl kapasite varlığına işaret etmektedir. Tablo 3.4’ da dengelenmiş ulaştırma tablosu görülmektedir.

Tablo 3.4. Toplam sunum miktarının toplam talep miktarından daha fazla olduğu ulaştırma tablosu

Depolar / Fabrikalar	**1**		**2**		**3**		**Yapay Depo**		**Fabrika Kapasiteleri**
1	X_{11}	7	X_{12}	8	X_{13}	5	X_{14}	0	**115**
2	X_{21}	6	X_{22}	4	X_{23}	7	X_{24}	0	**190**
3	X_{31}	9	X_{32}	6	X_{33}	8	X_{34}	0	**210**
Depo Gereksinimleri	**145**		**185**		**180**		**5**		**515**

Örnek 3;

Çimento şirketi örneğinde, ikinci deponun talep miktarı 200 birime yükselmiştir. Zamanında karşılanmayan talep için ceza maliyetinin dikkate alınması istenmektedir. Ceza maliyeti, talep dışı kalmanın bir bedeli olarak ortaya çıkacağı öngörülen maliyet olup, birinci depo için 10 TL, ikinci depo için 12 TL ve üçüncü depo için 15 TL olacağı tahmin edilmektedir. Problemdeki diğer tüm parametreler aynı kalmak koşuluyla dengelenmiş ulaştırma tablosu aşağıdaki gibi oluşur.

$Toplam\ sunum\ miktar\text{ı} = 110 + 190 + 210 = 510$

$Toplam\ talep\ miktar\text{ı} = 145 + 200 + 180 = 525$

Toplam talep toplam sunumu aştığından, dengeyi sağlamak için yapay bir fabrika modele eklenir ve kapasitesi 15 birim $(= 525 - 510)$ olur. Tablo 3.5.’de bu örneğin ulaştırma tablosu görülmektedir.

Tablo 3.5. Toplam talep miktarının toplam sunum miktarından fazla olduğu ulaştırma modeli

Depolar / Fabrikalar	1		2		3		Fabrika Kapasiteleri
1	X_{11}	7	X_{12}	8	X_{13}	5	**110**
2	X_{21}	6	X_{22}	4	X_{23}	7	**190**
3	X_{31}	9	X_{32}	6	X_{33}	8	**210**
Yapay Fabrika	X_{41}	10	X_{42}	12	X_{43}	15	**15**
Depo Gereksinimleri	**145**		**200**		**180**		**525**

Dengelenmiş ulaştırma modelinin taşıdığı üç önemli özellik vardır:

1. Üretim merkezi sayısı “m” ve talep merkez sayısı “n” iken, dengelenmiş ulaştırma modelinin bir temel uygun çözümünde en fazla $(m + n - 1)$ adet değişken temelde yer alabilir.
2. Her dengelenmiş ulaştırma modelinin en az bir uygun çözümü olup, en iyi çözümü de vardır.
3. Ulaştırma modelinde, sunum ve talep miktarlarına karşı gelen değerler tamsayı ise, karar değişkenleri her temel uygun çözümde, dolayısıyla en iyi çözümde tamsayı değer alır.

Ulaştırma problemleri, doğrusal karar modelini oluşturup simpleks algoritmasını kullanarak çözülebilir. Bu durumda problemi dengelemeye gerek yoktur. Fakat dengelenmiş model üzerinde yapılan araştırmalarla, ulaştırma modelinin simpleks algoritmasına göre çok daha kolay çözülebileceği anlaşılmıştır. Ulaştırma problemlerine özgü çözüm algoritmasında, öncelikle probleme ait dengelenmiş ulaştırma tablosu oluşturulmakta ve işlemler tablo üzerinde gerçekleştirilmektedir.

Ulaştırma problemleri için geliştirilen çözüm algoritmasının başlıca üç adımı bulunmaktadır:

1. Başlangıçta temel uygun çözümün bulunması

2. Bulunan çözümün optimal olup olmadığına bakılır. Bu adım aynı zamanda temel olmayan değişkenler arasında temel değişken olarak girecek değişkeni belirler.
3. Çözüm optimal değilse geliştirilir, yani halihazır temel değişkenler arasında çözümü bırakacak değişkenler arasında temel değişkenler belirlenerek yani temel çözüm bulunur.
4. İki ve üçüncü adımlar optimal çözüm elde edilinceye kadar yinelenir.

Ulaştırma probleminde $\sum_{i=1}^{m} Si \ = \sum_{j=1}^{n} dj$ olduğunda, ulaştırma tablosunda m satır sayısını, n de sütün sayısını gösterir. Ayrıca m+n sayıdaki kısıtlayıcılardan birisi keyfidir. Problem m+n sayıdaki değişkenli ve çözümdeki dağıtım işlemi $m + n - 1$ sayıdaki hücreye yapıldı ise çözüm temel olduğu gibi $m + n - 1$ sayıda değişkeni de vardır.

3.3 AKTARMALI ULAŞTIRMA PROBLEMİ

Ulaştırma problemi sadece arz noktasından talep noktasına ürünlerin doğrudan taşınmasına olanak sağlar. Çoğu durumlarda taşımalar arz noktaları veya talep noktaları arasında olabilir. Bazen de sunum noktasından istem noktasına mal gönderirken arada aktarma noktaları da kullanılır. İşte arz noktasından gönderilen malın talep noktasına ulaşımında aktarma noktaları kullanılırsa böyle probleme aktarma problemi denir.

Arz noktası diğer noktaya mal gönderebilen ve kendisi diğer noktalardan mal almayan noktadır. Benzer şekilde, talep noktası diğer noktadan mal alabilen fakat kendisi diğer bir noktaya mal gönderemeyen noktadır. Aktarma noktası diğer noktalardan hem mal alabilen hem de mal gönderebilen noktadır. Aktarma probleminin optimal çözümüne ulaştırma probleminde kullanılan çözüm teknikleri ile ulaşılır (Öztürk, 2005: 537).

Taşıma problemlerinde amaç, üretim merkezlerinden üretilen ürünlerin tüketim merkezlerine doğrudan ve en ucuz maliyetle gönderilmesini sağlamaktır. Bu hesaplamalar yapılırken, ürünlerin taşıma merkezlerine aktarmasız olarak veya doğrudan gönderilmesi göz önünde bulundurulmaktadır. Ancak bazı durumlarda ürünlerin tüketim merkezlerine gönderilmesi daha uygun olacaktır. Bu tip aktarma noktalarının kullanıldığı problemler, aktarma problemleri olarak adlandırılmaktadır (Tabuk, 2006: 52).

Sunum noktası, sadece ürün sunar; istem noktası da sadece ürün talep edilebilir. Aktarma noktası diğer noktalardan hem ürün alabilen, hem de ürün gönderebilen noktadır. Aktarma probleminin optimum çözümüne ulaştırma probleminde kullanılan çözüm teknikleri ile ulaşılır (Kabak, 2000: 64).

Aktarma problemi verildiğinde önce aşağıdaki işlemler izlenerek dengeli ulaştırma problemi elde edilir.

Adım 1, problemi dengelemek için gerekli olan kukla istem noktası eklenir. Kukla noktaya ve kukladan diğer noktalara gönderim maliyeti sıfırdır. Aynı zamanda s = toplam elverişli sunum miktarını gösterir.

Adım 2, bir ulaştırma tablosu düzenlenir: her sunum noktası ile aktarma noktaları tablonun satırında, her istem noktası ile aktarma noktaları da tablonun sütununda yer alır. Tablodaki her istem ve sunum noktalarının istem ve sunum değerleri kendilerinin özgün miktarına eşit olur. Sonra her aktarma noktasının istem ve sunum miktarı s' e yani toplam sunum miktarına eşit olur.

Aktarma problemlerinde şu noktaların hatırlanmasında yarar vardır.

1. Aktarma probleminin toplam taşıma maliyeti ulaştırma probleminin toplam taşıma maliyetinden büyük olmamalıdır.
2. Özgün ulaştırma tablosu aktarma tablosunun sağ üst köşesine yerleştirilmelidir.
3. Aktarma tablosunun asıl köşegenlerdeki elemanların (x_{ii} $veya$ x_{jj}) maliyeti sıfırdır ve onların fiziki değeri olmadığı için göz önüne alınmazlar.
4. Aktarma tablosu düzenlendikten sonra optimal çözüme ulaştırma çözüm yöntemleri ile ulaşılır (Öztürk, 2005: 541).

G = (N, B) şebekesinde yer alan N düğümler kümesi içerisinde, birbirinden bağımsız üç alt küme tanımlansın. Bunlar kaynak noktalarından oluşan N1 düğümler kümesi, hedef noktalarından oluşan N2 düğümler kümesi ve aktarma noktalarından oluşan N3 düğümler kümesi olsun. Aktarma probleminde, taşıma maliyetlerini minimize etmeyi amaçlayan doğrusal programlama modeli aşağıdaki şekilde tanımlanabilmektedir (Tokgöz, 2008:41).

Amaç:

$$Z_{min} = \sum_{(i,j)\in B} \sum C_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i, \quad (i,j) \in B, \quad \forall i \in N_1, N_2$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, \quad (i,j) \in B, \quad \forall j \in N_3$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in B$$

Aktarma problemleri için ulaştırma problemlerinde kullandığımız algoritmaları kullanabilmek, bu problemi iki aşamada dengeli ulaştırma problemine dönüştürmek ile mümkündür.

3.4 TESİS YERİ VE KAPASİTE ATAMA MODELLERİ

Genel olarak tesis yeri seçim problemleri n adet tesisin m adet konuma (n<m) taşıma maliyetlerinin minimize edilecek şekilde yerleştirilmesi konusu ile ilgilenmektedir (Tavakkoli ve Shayan, 1998: 527).

Ağ tasarımı modellerinin kullanılmasının iki sebebi vardır. Birincisi kurulacak fabrikaların nerede kurulacağı ve kapasitelerinin belirlenmesi, ikinci ise talep merkezlerinin ihtiyaçlarının hangi üretim merkezlerinden karşılanacağı ve hangi ürün gruplarının taşınacağıdır. Her iki durumda da amaç, müşteri ihtiyaçlarını zamanında karşılayarak, maliyetleri minimize edip, karı maksimize etmektir. İşletmeler karar alırken aşağıdaki bilgiler elde olmalıdır.

- Talep ve tedarik merkezlerinin yeri
- Potansiyel tesislerin yeri
- Tüm Pazar merkezleri için talep tahminleri
- Her yer için tesis, işgücü ve malzeme maliyetleri
- Fabrika yerleri için stok maliyetleri
- Aynı ürünün diğer bölgelerdeki satış fiyatları
- İkame malların satış fiyatları
- Ürünün vergisi ve uluslararası taşımalarda gümrük vergisi
- İstenen yanıt süresi ve diğer faktörler

Model girdileri, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını gösteriyor ise klasik bir kapasite atama modeli:

$$Z = Min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = 0, 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

3.5 YERÇEKİMİ YERLEŞİMİ MODELLERİ

Yer çekimi yerleşimi modelleri, fabrika kurulması düşünülen bölgelerde fabrikanın en uygun yere kurulmasına karar vermek için kullanılan modellerdir. Yerçekimi yerleşim modellerinde amaç üretim merkezlerinin tedarikçilerden hammadde temin ve ürün talep merkezlerine nihai ürünleri sevk etme ulaşım maliyetlerini minimize edilmesidir.

Yerçekimi yerleşim modelleri talep merkezlerinin ve tedarik kanallarının düzlem üzerinde bir nokta olduğunu varsayar ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları geometrik mesafe olarak hesaplar. Modelde, gönderilen ürün miktarı ile ulaşım maliyetleri arasında doğrusal bir ilişki olduğunu varsayar. Optimal kuruluş yeri toplam maliyetleri minimize eden noktadır. Tedarikçilerden hammadde alan ve talep merkezlerine nihai ürün sunan bir fabrika için yerçekimi modelinin girdileri aşağıdaki gibi olsun:

x_n, y_n: n. talep merkezinin veya tedarik merkezinin koordinatları.

F_n: n. talep merkezi veya tedarik merkezinin kilometre başına düşen ulaştırma maliyeti.

D_n: Tesis ile n. talep merkezi ya da tedarik merkezi arasındaki sevkiyat miktarı.

Seçilecek bir merkezin koordinatları (x, y) olsun. (x, y)' deki tesis ile n. talep merkezi veya tedarik merkezi arasındaki geometrik uzaklık:

$$d_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$$

Toplam ulaşım maliyeti ise;

$TM = \sum_{n=1}^{k} d_n D_n F_n$ dir.

3.6 AĞ OPTİMİZASYON MODELLERİ

Bu modelde her bir üretim merkezinin yeri ve üreteceği kapasiteleri kararlaştırılır. Tesis yerlerinin belirlenmesinin yanı sıra talep merkezlerinin hangi tesise atanacağı bu aşamada karar verilen diğer bir noktadır. Bu modelde atama işleminde müşteri yanıt süreleri kısıt olarak modele dahil edilmemiştir.

Modelin girdileri, n: Fabrika yerlerinin sayısını, m: Talep noktalarının sayısını, D_j: j. tesisin pazardaki yıllık talebi S_i : i. fabrikanın kapasitesini, c_{ij}: Bir birim ürünün i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyetini, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarını gösterir.

Amaç ulaştırma maliyetlerini minimize ederken farklı talep merkezlerinin isteklerini çeşitli fabrikalara atamaktır.

Problemin DP modeli aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$$Z = Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m \quad (Talep\ Kısıtı)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \dots, n \quad (Kapasite\ Kısıtı)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (Negatif\ Olmama\ Kısıtı)$$

Tedarik zincirinde ağ tasarım kararları, üretim, stoklama ve dağıtım ile ilgili tesislerin yerlerinin belirlenmesi ve her bir tesisin ne miktarda üretim gerçekleştireceği ve pazardaki rolünün belirlenmesini içerir.

3.7 TEK KAYNAKLI FABRİKA YERLEŞTİRME MODELİ

Bazı durumlarda işletmeler talep merkezlerinin ürün ihtiyaçlarını tek bir kaynak merkezinden gerçekleştirirler. Bu kısıtlamanın amacı koordinasyon zorluğu çekmemek ve fabrikadaki esneklik ihtiyacının azaltılmak istenmesidir. Daha önce incelediğimiz kapasiteli fabrika yerleşimi modelini yeni bir kısıt ekleyerek tek kaynaklı hale getirebiliriz.

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli girdileri, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını gösteriyor ise

$$y_i = \begin{cases} Eğer\ bir\ fabrika, i.yerde\ kurulmuş\ ise & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} Eğer\ market\ j, i.fabrika\ tarafından\ tedarik\ ediliyorsa & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$Min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, m \qquad [3.1]$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j b_{ij} \le S_i y_i \quad i = 1, \dots, n \qquad [3.2]$$

$$b_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Denklem [3.1] ve [3.2] numaralı kısıtlar, her bir talebe yalnızca bir fabrika tarafından ürün gönderilmesini zorlayan kısıtlardır.

3.8 ATAMA MODELİ

Verilen n adet işin, n adet işlem noktasına dağıtımına yönelik problemler için geliştirilen atama modelleri, ulaştırma modelleri gibi kendisine özel çözüm algoritmasına sahip doğrusal programlama modellerindendir (Sağır vd., 2013: 194).

Atama modeli veya problemleri genel doğrusal programlama problemlerinin özel bir durumudur. Atama modeli türlü kaynakların değişik görevlere en uygun şekilde dağıtımını sağlamayı amaçlar. Söz konusu modele en çok işçilerin işlere veya işlerin makinelere programlanmasında başvurulur. Programlama bir işe veya makineye bir işçi ayrılacak şekilde yapılır. Atama modelinde amaç, etkinliği maksimum kılmak için kaynak kullanımının bire bir dağıtımını sağlamaktır (Öztürk, 2005: 519).

Lineer programlamanın atama modeli aşağıdaki gibi tanımlanabilir. (n) ihtiyacı karşılamak için (n) vasıta mevcuttur. (i) vasıtanın (j) ihtiyaçla yüklenmesine bağlılığı x_{ij}, e_{ij} gibi belirli bir fayda faktörü iledir. (i) vasıta (j) ihtiyacı karşılamak için kullanılırsa $x_{ij} = 1$ olması ve (i) vasıta (j) ihtiyacı karşılamak için kullanılmazsa $x_{ij} = 0$ olması gerektiği açıktır. Bir vasıta bir ihtiyaca bağlandığından, atama problemi etkinlik fonksiyonunun optimizasyonu olarak matematik bir ifadeyle tanımlanabilir (Hallaç, 1995: 438).

Etkinlik fonksiyonu:

$$E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_{ij}$$

Sınırlayıcı koşullar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2 \dots n$$

$$e_{ij}, \qquad x_{ij} = 0 \; veya \; e_{ij}, \qquad x_{ij} = 1$$

Optimizasyon verilen etkinlik ölçüsüne bağlı olarak ya maksimizasyonu ya da minimizasyonu gerektirecektir. Karar verici (yönetici) x_{ij} atama matrisinin kontrolüne sahiptir. Kontrolü altında olmayan e_{ij} etkinlik faktörünün matrisidir.

Atama problemlerinin çözüm işlemlerini daha etkin kılmak için maliyet matrisi kullanılır.

Tablo 3.6. Genel atama problemi için maliyet matrisi

		1	**2**	**3…**	**.**	**.**	**N**
İşçiler	**1**	C11	C12	C13	.	.	C1n
	2	C21	C22	C23	.	.	C2n
	3	C31	C32	C33	.	.	C3n
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	m	Cm1	Cm2	Cm3	.	.	Cmn

Herhangi bir atama problemini çözmek için Macar yöntemi veya indirgenen matris yöntemi olarak bilinen dört adımlı bir işleme başvurulur. Bunlar;

Adım 1, maliyet matrisinin her sırasında yer alan en küçük değerli eleman belirlenir, sonra yeni bir maliyet matrisi oluşturmak için aynı sıradaki tüm elemanlardan çıkarılır.

Adım 2, adım 1 de elde edilen maliyet matrisinin her sütunundaki en küçük değerli eleman bulunur, sonra bu elemanlar ilgili olduğu sütundaki tüm elemanlardan çıkarılır.

Adım 3, elde edilen yeni matristeki sıfır değerli elemanlara kaynaklar veya işçiler atanır. Bir işçinin sadece bir işe atanması yapılmış ise bu durum uygun atamanın olduğunu gösterir.

Hangi işçinin hangi işe atandığını belirlemek için sıfır değerli elemanlar daire içine alınır. Eğer uygun atama yoksa adım 4'e geçilir. En uygun atamalar daire içine alınan sıfırlara karşılıktır.

Adım 4, matriste yer alan tüm sıfır değerli elemanlardan geçen, en az sayıda çizgiler çizilir. Çizilen çizgilerin sayısı sıra veya sütun sayısından az olmalıdır. Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük eleman seçilir sonra bu eleman, üzerinden çizgi geçmeyen tüm elemanlardan çıkarılır ve iki çizginin kesiştiği yerdeki elemanlara eklenir. Üzerinden çizgi geçen öteki elemanlar değişmeden kalır. Bütün bu işlemlerden sonra adım 3'deki işlemlere başvurulur. Atama probleminin çözüm Macar çözüm yönteminin dışında değişik birçok yolla da elde edilebilir (Öner ve Ülengin, 2003: 73-79). Bunlar:

- Klasik çözüm yöntemi
- Özel çözüm yöntemleri
- Geliştirilen çözüm yöntemi

Klasik çözüm yöntemleri; klasik çözüm yöntemlerinde kısıtlara uyan tüm alternatifler belirlenerek aralarında en küçük maliyete sahip olan seçilirse çözüm elde edilmiş olur. Ancak atama problemlerinde (M) uygun geçerli çözüm bulunmaktadır. Problemin büyüklüğü (M) arttıkça, uygun geçerli çözüm sayısı çok büyük bir hızla artacaktır (Öner ve Ülengin, 2003: 73-79).

Özel çözüm yöntemleri; klasik çözüm yöntemlerinden farklı, ancak onların özelliklerini kullanan yöntemlerdir.

Geliştirilen çözüm yöntemi; Macar yönteminin ruhuna da uygun olacak şekilde, maliyet matrisinin üzerinden ayrılmadan işlemleri daha sade ve kolay anlaşılabilir bir yöntem üzerinde çalışılmıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Bu bölümde doğrusal programlamanın özel bir türü olan lojistik problemlerle ilgili işletmelerin karar verme süreci, belirsiz bilgilerin bulunduğu, sözel ve dilsel belirsizlikler içeren etmenlerin sıklıkla kullanıldığı ortamlarda zor bir süreç olabilir. Bu durumlarda oluşan problemin çözümü, bulanık doğrusal programlama yöntemi yardımı ile çözülerek daha etkin kararların varlığı tespit edilmeye çalışılmıştır.

4.1 BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Bulanık matematiksel programlama, yapısında bulanık ifadeler barındıran problemleri modellemede kullanılır. Model, gerçek hayata ait olguların veya sistemlerin bir takım sembollerle temsil edilmesidir. Başka bir ifade ile bir sistemin değişken koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında tahminlerde bulunmak amacı ile elemanları arasındaki ilişkileri bir takım kelimeler veya matematiksel terimler ile belirleyen ifadeler topluluğuna model denir (Tulunay, 1991: 3).

Günlük hayatımızdaki bazı belirsizlikler model oluşumunda ve çözümünde bazı aksamalara ve yanlışlıklara sebep olmaktadır. Çünkü analiz edilen verilerin net olmayışı çözüm sonuçlarını gerçeklikten uzaklaştırmaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için bulanık küme teorisi bize, belirsizlik ile baş etmek için teorik bir alt yapı oluşturur. Örneğin: “ Bu yılki maliyetimiz yaklaşık 1 milyon Türk lirası olmalıdır veya işçi çalışma saatleri günlük 8 saat civarında olmalıdır” Burada amaç ve kısıtlayıcı fonksiyonu tam net bir ifade sunmamaktadır. Böyle durumlarda en etkin çözüme ulaşmak, işletmeler için oldukça önem taşımaktadır.

Doğrusal fonksiyonları kullanarak; belirsiz parametreler arasındaki ilişkileri hesaplayabilmek çok zor olmaktadır (Inuiguchi ve Tanino: 358). Doğrusal programlama yöntemi ile çözülebilen problemlerin karar alma süreçlerinde ortaya çıkan belirsizlikler modele dahil edildiğinde etkin çözüme bulanık doğrusal programlama yöntemi ile ulaşılır. Bulanık doğrusal programlama, doğrusal programlama ve bulanık küme teorisinin bir birleşimi olarak da ifade edilebilir.

4.2 BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN MODELLENMESİ

Bulanık doğrusal programlama, doğrusal programlama yöntemi kullanılarak çözümlenebilen problemlere karar süreçlerinde görülen belirsizlik dâhil edildiğinde kullanılan bir yöntemdir (Yıldırım ve Çevik, 2010: 18).

Matematiksel bir model kurma ve karar alma süreci aşağıdaki aşamalardan oluşmaktadır:

1. Gözlem
2. Problemin tanımlanması
3. Matematiksel modelin oluşturulması
4. Matematiksel modelin çözümü
5. Çözüm sonuçlarının değerlendirilmesi
6. Karar verme

Sayısal bir karar modelinin temel bileşenleri şunlardır:

Karar değişkenleri: amaca ulaşmak için modelde kontrol edilebilen değişkenlerdir. Örneğin: üretim miktarları.

Parametreler: Karar vericinin tarafından kontrol edilemeyen sayısal değerlerdir. Örneğin: ürün üretimi için gerekli işgücü saati.

Amaç fonksiyonu: ulaşılmak istenen hedefin karar değişkelerini kullanarak oluşturulan fonksiyonun matematiksel gösterimidir. Örneğin: kar maksimizasyonu veya maliyet minimizasyonu gibi.

Kısıtlayıcılar: karar değişkenlerinin alabileceği değerlere sınırlar koyan matematiksel fonksiyonlardır**.** Örneğin: üretim için ayrılan bütçe, üretim için kullanılan işgücü.

Modelin girdileri, c_i: bir birim üründen elde edilen kar, x_i: sevk edilen ürün miktarı, A: kısıtlayıcılarda bulunan değişkenlerin parametre değerleri, x_{ij}: i. fabrikadan j. talep merkezine gönderilen ürün miktarı, b_i: sağ taraf sabiti, n: fabrika sayısı, m: talep merkezi sayısı ise bulanık doğrusal modelinin en genel hali şöyle formüle edilebilir:

$$Z_{max}=\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_i \, \tilde{x}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij} x_{ij} \; (\leq, =, \geq) \tilde{b}_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Doğrusal programlama modelinden farklı olarak, bulanık doğrusal programlama modelinde bulanıklık simgesi ($\sim$) konulur (Yalçın-Seçme, 2005: 27).

Burada $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_j$ bulanık sayılardır ve x_j değerleri bulanık sayıların ($i \in Nm, j \in Nn$) halleridir (Yıldırım, 2009: 52).

4.3 BULANIK ORTAMDA KARAR VERME

Bulanıklık, günlük hayatın bazı belirsizlikler içermesinden kaynaklanır. Bu belirsizlikler işletmelerin üretim, dağıtım, lojistik vs. süreçte doğru ve etkin karar almalını engeller bu nedenle bulanık bir ortamda işletmeler için karar süreci oldukça önem arz eder.

Bulanık karar vermenin ana çalışma alanı belirsizlik altında karar vermedir. Çünkü elimizde kriterlere, alternatiflere ve sonuçlara ilişkin sayısal değerler değil sözle ifade edilen dilsel değerler mevcuttur ve bu belirsizlik oluşturur (Ballı ve Karasulu, 2013: 62).

Karar verme süreci, bazı faktörlerin sınırlayıcı etkileri altında en uygun amaçlara ulaşmak için karşılaşılan problemleri çözme sürecidir. Bu süreç uygun seçenekler içerisinden birisini seçme ile tanımlanır ve sürecin çıktısı olan karar, bir aksiyon ile sonuçlanmalıdır. Bu karar faaliyetleri; ekonomi alanında, yönetim biliminde, lojistikte, yöneylem araştırmalarında, mühendislikte ve üretimde, sosyal ve siyasi alanlarda, biyoloji ve tıpta, askeri stratejilerde ve bunun gibi birçok alanda önemli role sahiptir. Ancak karar ortamları, büyük oranda karışık, eksik ve kesin olmayan, öznel ve dilsel olana bilgilere dayalı olduğu için karar verme faaliyeti zorlaşmaktadır. Karar ortamlarının bu özellikleri nedeniyle karar süreci bulanık bir ortamda oluşmaktadır. Yani karar ortamlarının çoğu amaç ve kısıt fonksiyonlarının bazı katsayılarının tam olarak belirlenemediği, belirsiz olduğu bir ortamda yer alır. Bu koşullarda bulanık küme teorisi, bulanık hedef ve kısıtları modellemeye uygun bir durum oluşturmaktadır (Stanciulescu, 2003: 655).

Bulanık karar, bulanık hedefin ve bulanık kısıtlayıcıların birlikte sağlandığı durumu ifade etmektedir (Bellman and zadeh, 1970: 164).

Bulanık karar kümesi “$\tilde{G}$ hedefine ulaşmak ve $\tilde{C}$ kısıtlayıcısını doyurmak” şeklinde ifade edilen bir kurala göre belirlenir. Buna göre bulanık karar kümesi matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

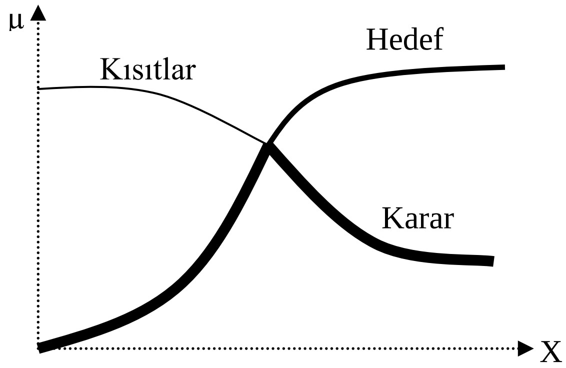
$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$

İle gösterilmektedir (Özkan, 2003: 157).

Bulanık hedef kümesi $\tilde{G}$ bulanık kısıtlayıcı kümesi $\tilde{C}$ nin üyelik fonksiyonları ise sırası ile $\mu_{\tilde{G}}(x)\ ve\ \mu_{\tilde{C}}(x)$ ile gösterilmektedir. $\mu_{\tilde{G}}(x)\ ve\ \mu_{\tilde{C}}(x)$ üyelik fonksiyonları $[0, 1]$ kapalı aralığında tanımlanmaktadır (Jairaj ve Vedula, 2000: 461).

Amaç $\breve{G}$ Kısıtlayıcı $\tilde{C}$ Alternatifler X	→	Kesişim $\tilde{G} \cap \tilde{C}$	=	Bulanık Karar $\tilde{D}$	→	Kararın Maksimizasyonu $\tilde{D}(X^*)$

Şekil 4.1. Bulanık karar verme süreci (Bojadziev and Bojadziev, 2007:93).



Şekil 4.2. Bulanık kısıt, hedef ve karar

Daha genel bir ifade ile $(G1, G2, \ldots, Gn)$ n adet bulanık hedef ve $(C1, C2, \ldots, Cm)$ m adet bulanık kısıt olmak üzere;

$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \ldots \tilde{C}_m$

ve üyelik fonksiyonları ile

$\mu_{\tilde{D}}(X) = \min\left[\mu\tilde{G}_1(X), \mu\tilde{G}_2(X), \ldots, \mu\tilde{G}_n(X), \mu\tilde{C}_1, \mu\tilde{C}_2, \ldots, \mu\tilde{C}_m(X)\right]$

şeklinde gösterilebilmektedir (Türe, 2006: 52).

Bulanık doğrusal programlama probleminde optimum kararın verilebilmesi için bulanık karar kümesi içinde en yüksek üyelik dereceli elemanın belirlenmesi gerekmektedir. Bu ise:

$$\mu_{\tilde{D}}(X^{M}) = max\ \mu_{\tilde{D}}(X) \qquad [4.1]$$

şeklinde olacaktır (Terano vd., 1992: 268).

Denklem [4.1]'deki eşitlik max-min işlemcisi olarak da bilinmektedir. Max-min işlemcisi en kötü durumlar arasından en iyi çözümü seçen güvenilir bir yöntemdir. Max-min işlemcisi açık olarak:

$$max\mu_{\tilde{D}}(X) = max(min(\mu_{\tilde{G}}(X), \mu_{\tilde{C}}(X)))$$

şeklinde yazılabilir.

Max-min işlemcisi, hedef ve kısıtların eşanlı olarak doyurulması esnasında verilecek kararda her iki bulanık kümeyi sağlayacak alternatif üyelik dereceli elemanlardan en yüksek elemanın seçiminin sağlanmasıdır (Yalçın ve Seçme, 2005: 117).

4.4 BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELLERİ VE ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde belirsizlik altında oluşturulan doğrusal programlama modelinin hedef kısmında, kısıtlayıcılarında, sağ taraf sabitlerinde, teknoloji katsayılarında meydana gelen bulanıklığın çeşitli yöntemler ile modele aktarımı ve çözüm yaklaşımları incelenmiştir.

4.4.1 Zimmermann Yöntemi

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılı, doğrusal programlama problemlerinde, amaç fonksiyonu katsayılarında ve kısıtlayıcılarda bulunan teknoloji katsayılarında herhangi bir bulanıklık olmadığı varsayılmaktadır. Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar için ulaşılmak istenen seviyelerin ve bu seviyeler için katlanılabilecek en yüksek ihlal sınırlarının belirlenmesi gerekmektedir (Başkaya, 2011: 167).

Zimmermann, bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılı doğrusal programlama modellerinin çözümünü yaparken; bulanık amaç fonksiyonunun bir kısıtlayıcı olabileceğini belirtmiştir. Bu durumda bulanık amaç fonksiyonu da bulanık bir kısıtlayıcı haline dönüşmektedir. Artık bulanık amaç fonksiyonu karar vericinin karşılanması gereken bir kısıtlayıcıdır.

Bu durumda;

MODEL 1

$\widetilde{Max}(Z) = \mathrm{C^T X}$

Kısıtlayıcılar

$AX \leq \tilde{b}_i$

$X \geq 0$

MODEL 2

Kısıtlayıcılar

$C^T X \,\widetilde{\geq}\, b_0$

$AX \,\widetilde{\leq}\, b_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$

$X \geq 0$

Model 1, model 2 haline dönüşücektir (Zimmermann, 1983: 292).

Bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcıların parçalı doğrusal üyelik fonksiyonları sırasıyla aşağıda verildiği gibidir (Özkan, 2003: 168-169).

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0 & ;\, eğer\ C^T X \leq b_0 - p_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - C^T X}{p_0} & ;\, eğer\ b_0 - p_0 \leq C^T X \leq b_0 \\ 1 & ;\, eğer\quad C^T X \geq\ \ b_0 \end{cases}$$

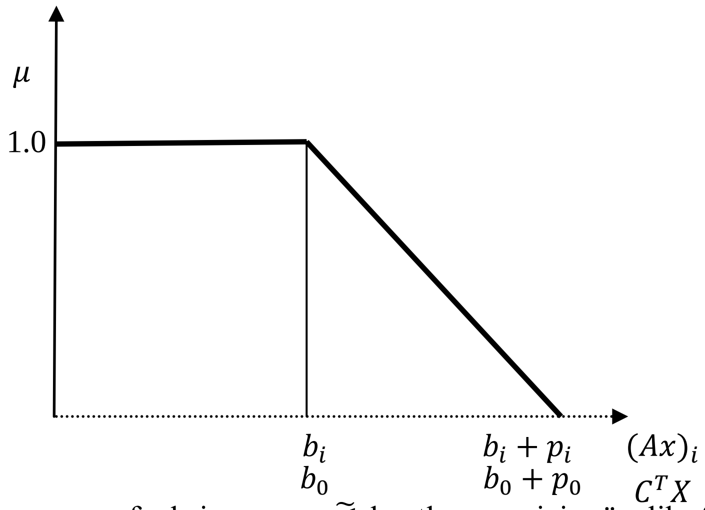
b_0: amaç fonksiyonunun erişim düzeyine (amaç fonksiyonunda ulaşılmak istenen seviye ya da amaç fonksiyonunu da bir kısıtlayıcı olarak düşünürsek; amaç fonksiyonunun sağ taraf sabiti)

p_0: amaç fonksiyonundaki tolerans değeri

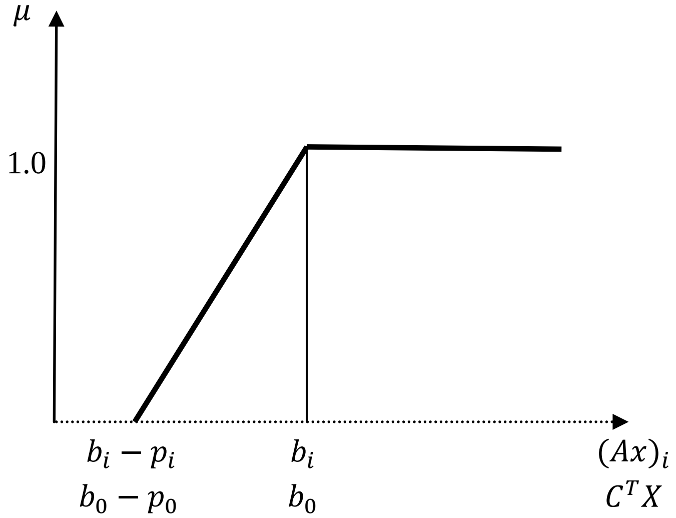
b_0-p_0: amaç fonksiyonunun taban değeri yani kabul edilebilir en düşük değeridir.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ;\, eğer\ A(x)_i \leq b_i + p_i \\ 1 - \dfrac{A(x)_{i-}b_i}{p_i} & ;\, eğer\ b_i \leq A(x)_i \leq b_i + p_i \\ 1 & ;\, eğer\ A(x)_i \leq b_i \end{cases}$$

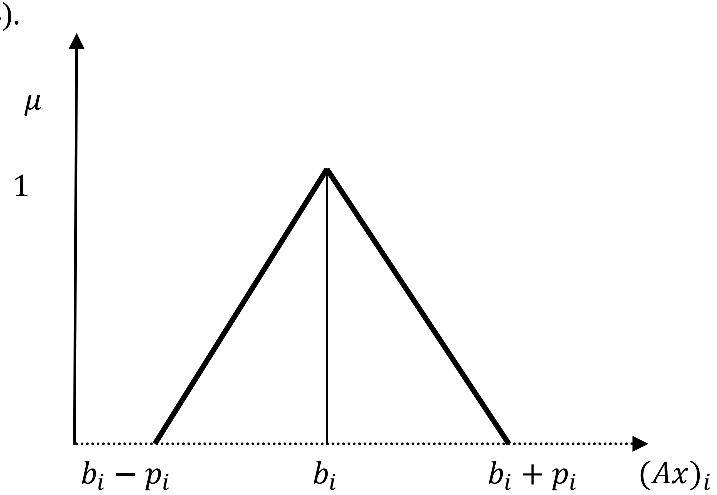
Bulanık amaç ve kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları grafiksel olarak şekil 4.3., 4.4. ve 4.5.'te gösterilmiştir. Bu şekillerde, bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcılara ilişkin üyelik fonksiyonlarının sırasıyla tek düze olarak artan veya tek düze azalan fonksiyonlar olduğu görülmektedir (Seçme, 2005: 34-37).



Şekil 4.3. Minimum amaç fonksiyonu ve $\tilde{\leqq}$ kısıtlayıcısı için üyelik fonksiyonu (Dyson, 1980: 265).



Şekil 4.4. Maksimum amaç fonksiyonu ve $\tilde{\geqq}$ kısıtlayıcısı için üyelik fonksiyonu (Dyson, 1980: 264).



Şekil 4.5.$\cong$ Kısıtlayıcısı için üyelik fonksiyonu (Wiedey and Zimmermann, 1978: 1078).

Zimmermann yaklaşımına göre bulanık doğrusal programlama problemleri ek bir değişken olan λ 'nın kullanılması halinde bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonlarının modelde yerine konulmasıyla son olarak aşağıdaki hali alır.

$Z_{max} = \lambda$

$C^T X - \lambda p_0 \geq b_0 - p_0$

$(AX)_i + \lambda p_i \leq b_i + p_i$

$x_{ij} \ \geq 0$

$\lambda \in [0, 1]$

Örnek 1;

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \tilde{\leqq} 9$

$-2x_1 + x_2 \tilde{\leqq} 2$

$2x_1 + 2x_2 \tilde{\leqq} 11$

$x_{ij} \ \geq 0$

Karar verici tarafından amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar için maksimum tolerans değerleri aşağıda belirtildiği gibidir.

Amaç fonksiyonunun istem seviyesi $b_0 = 8$ ve verilebilecek maksimum tolerans miktarı $p_0 = 3$ olarak belirlenmiştir. Kısıtların maksimum tolerans değerleri ise sırası ile $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 3$ olarak belirlenmiştir. Bu durumda oluşan bulanık model aşağıdaki gibidir.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \tilde{\leqq} 9$

$x_1 - 2x_2 \tilde{\leqq} 2$

$x_1 + 2x_2 \tilde{\leqq} 11$

$x_{ij} \ \geq 0$

Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılara ait üyelik fonksiyonları şunlardır:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & x_1 + x_2 \geq 8 \\ 1 - \dfrac{8 - (x_1 + x_2)}{3}, & 5 \leq x_1 + x_2 < 8 \\ 0, & x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases} \quad [4.2]$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ 1 - \dfrac{(2x_1 + x_2) - 9}{2}, & 7 \leq 2x_1 + x_2 < 9 \\ 0, & 2x_1 + x_2 \geq 9 \end{cases} \quad [4.3]$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 1 - \dfrac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3}, & 2 \leq x_1 - 2x_2 < 5 \\ 0, & x_1 - 2x_2 \geq 5 \end{cases} \quad [4.4]$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1, & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1 - \dfrac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3}, & 11 \leq x_1 + 2x_2 < 14 \\ 0, & x_1 + 2x_2 \geq 14 \end{cases} \quad [4.5]$$

Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların bulanık kısımlarını hesaplamak için λ değişkeni modele ilave edilir. Bu durumda oluşan yeni model aşağıdaki gibidir.

$Z = \lambda \rightarrow maksimum$

$\mu_0(x) \geq \lambda$

$\mu_1(x) \geq \lambda$

$\mu_2(x) \geq \lambda$

$\mu_3(x) \geq \lambda$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\lambda \in [0, 1]$

Denklem [4.2] olduğu durum için üyelik fonksiyonu;

$$1 - \frac{8 - (x_1 + x_2)}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{8 - (x_1 + x_2)}{3}$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 - 3(1 - \lambda)$$

Denklem [4. 3] olduğu durum için üyelik fonksiyonu;

$$1 — \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2(1 - \lambda)$$

Denklem [4. 4] olduğu durum için üyelik fonksiyonu;

$$1 - \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3 + 2(1 - \lambda)$$

Denklem [4. 5] olduğu durum için üyelik fonksiyonu;

$$1 - \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3(1 - \lambda)$$

Üyelik fonksiyonu yardımı ile bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılı bir model, klasik bir doğrusal model şekline dönüşmüştür. Bu model aşağıdaki gibi son şeklini alır.

$$Z_{max} = \lambda$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 - 3(1 - \lambda)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2(1 - \lambda)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 + 3(1 - \lambda)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3(1 - \lambda)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$\lambda \in [0, 1]$

Yukarıdaki model Lingo 14.0 paket bilgisayar programında çözülmüştür ve sonuçlar aşağıdaki gibidir.

$\lambda = 0{,}7142$

$x_1 = 2{,}4285$

$x_2 = 4{,}7182$

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılı bu modelde sonuçlar, modelin tam olarak doyurulmuş bir çözümün olmadığını göstermektedir. $\lambda = 0{,}7142$ bu model için maksimum üyelik derecesini göstermektedir. Bu üyelik derecesinde $x_1 = 2{,}4285$ ve $x_2 = 4{,}7182$ değerleri elde edilmiş maksimum $Z = 7{,}1467$ bulunmuştur.

4.4.2 Verdegay Yaklaşımı

Verdegay yaklaşımında, simetrik olmayan bir model ele alınmıştır. Bu modelde amaç fonksiyonu ile kısıtlayıcılar arasında farklılık olduğu fikrinden yola çıkararak bulanık doğrusal programlama problemlerinin parametrik doğrusal programlama problemine dönüştürülerek çözümler elde edilmiştir.

Verdegay yaklaşımında, betimleme teoremi ve parametrik programlamadan yararlanarak; bulanık kısıtlayıcılı doğrusal programlama modellerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. Verdegay, bulanık kısıtlayıcılı bir doğrusal programlama modelinin bulanık çözümünün bulunması için, bulanık kısıtlayıcıların α-kesim kümelerine ayrılması gerektiğini belirtmiştir (Ural, 2006: 85).

Verdegay yaklaşımında parametrik programlama yardımıyla hesaplanan çözümlerden hangisinin bulanık doğrusal programlama probleminin çözümü kabul edileceği, tamamen karar vericiye aittir.

Verdegay, sağ taraf değerleri bulanık olan doğrusal programlama problemlerinin kesin parametrik programlama problemine eşdeğer olduğunu ilk olarak kanıtlayan kişidir (Gülcan, 2012: 72).

Verdegay'a göre bulanık sınırlayıcıların üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\mu(Ax)_i = \begin{cases} 1 & ; \ (Ax)_i < b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & ; \ b_i \leq (AX)_i \\ 0 & ; (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$

$Z_{max} = C^T X$

$(Ax)_i \leq b_i + (1-\lambda)p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$\lambda \in [0, 1]$

$x_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

Yukarıda verilen bulanık doğrusal programlama modeli, Verdegay tarafından $\theta = (1-\lambda)$ olarak belirlenerek parametrik doğrusal programlama problemine dönüştürülmüştür. Bu durumda klasik amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcılara sahip bir bulanık doğrusal programlama problemi, parametrik bir doğrusal programlama problemi gibi çözülecektir. Verdegay'ın klasik amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcılara sahip doğrusal programlama problemlerinin çözümü için önerdiği parametrik programlama modeli aşağıda verilmektedir.

$Z_{max} = C^T X$

$(AX)_i \leq b_i + \theta p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$\lambda \in [0, 1]$

$x_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

θ parametresi kısıtlayıcılarda yapılacak olan ihlalin derecesini göstermektedir (Başkaya, 2011: 188-189).

Örnek 2;

Örnek 1'i Verdegay yöntemi ile çözelim.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \lesssim 9$

$x_1 - 2x_2 \lesssim 2$

$x_1 + 2x_2 \lesssim 11$

$x_{ij} \geq 0$

Bu yöntem amaç fonksiyonunda herhangi bir bulanıklık söz konusu olmadığından üyelik fonksiyonuna gerek yoktur. Kısıtların üyelik fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$\mu_1(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2(1 - \lambda)$$

$\mu_2(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3 + 2(1 - \lambda)$$

$\mu_3(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3(1 - \lambda)$$

Bu doğrultuda oluşan model:

$$Z_{max} = x_1 + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2(1 - \lambda)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 + 3(1 - \lambda)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3(1 - \lambda)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\lambda \in [0, 1]$$

Üyelik fonksiyonları oluşturulduktan sonra $(1 - \lambda) = \theta$ dönüşümü yapılır. Bulanık doğrusal programlama modeli, parametrik doğrusal programlamaya dönüşür.

$$Z_{max} = x_1 + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2\theta$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2\theta$$

$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3\theta$

$x_{ij} \geq 0$

$\lambda \in [0, 1]$

Bu modelin Lingo bilgisayar programı çözümünde herhangi bir tolerans değeri hesaba katılmaz ise yani $\theta = 0$ olduğunda $x_1 = 2{,}3333,\ x_2 = 4{,}3333$ maksimum $Z = 6{,}6666$ bulunmuştur. Verdegay yönteminde model parametrik doğrusal programlama yöntemine dönüştürüldükten sonra θ değerine göre oluşan optimum çözümler tablo 4.1.'deki gibidir.

Tablo 4.1. Farklı θ değerleri için bulunan optimum çözümler

θ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Z	6,66	6,83	7,0	7,16	7,33	7,5	7,66	7,83	8,0	8,16	8,33
x_1	2,33	2,36	2,4	2,43	2,46	2,5	2.53	2,56	2,6	2,63	2,66
x_2	4,33	4,46	4,6	4,73	4,86	5,0	5.13	5,26	5,4	5,53	5,66

4.4.3 Werners Yaklaşımı

Werners yaklaşımında kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları karar verici tarafından belirlenebilmesine rağmen, kısıtlayıcıların bulanık olmasından ötürü, bulanık olarak algılanan amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu, karar verici tarafından önceden belirlenemez. Werners amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonunu belirleyebilmek için Orlovski'nin önerdiği bulanık karar kümesini baz almıştır. Orlovski bulanık kısıtlayıcıların oluşturduğu tanım kümesinin her bir α-kesim kümesi için, amaç fonksiyonunun optimal değerlerini belirlemeyi ve bu optimal değerlerle eşit üyelik dereceli olan çözüm uzayının α-kesim kümesini bulanık karar kümesi olarak ele almayı önermiştir (Werners, 1987: 135).

Werners, sağ yan değerleri bulanık olduğu için amaç fonksiyonunun da bulanık olması gerektiği görüşündedir. Fakat hedef fonksiyonu için çözüme başlamadan önce belirlenen erişim seviyesi ve toleransların model ile tutarsız olabilme ihtimaline karşın Brigitte Werners amaç fonksiyonu için önceden belirlenen tolerans ve erişim seviyelerinin belirlenmesi için farklı bir yöntem geliştirmiştir.

Werners'in önerdiği yaklaşım sadece amaç fonksiyonu için belirlenecek olan üyelik fonksiyonunda değişikliğe yol açmaktadır. Söz konusu yaklaşımda bulanık amaç fonksiyonunun değeri için öncelikle olası bir aralık $[Z^0, Z^1]$ değerleri belirlenmektedir. Daha sonra ise Z değerleri üyelik fonksiyonuna yerleştirilmektedir. Kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonlarında herhangi bir değişiklik olmamaktadır.

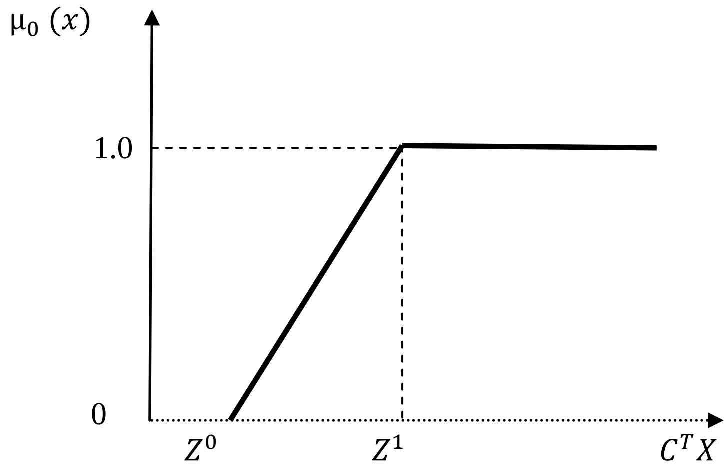
Werners'in çözüm yönteminde de maks-min işlemcisi kullanılarak karar kümesinin maksimum üyelik değerine sahip olan eleman, belirlenmektedir (Başkaya, 2011: 180).

Werners yöntemine göre bulanık kısıtlayıcı değerleri ve hedef fonksiyonu için üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & C^T X \geq Z_1 \\ 1 - \dfrac{Z_1 - C^T X}{Z_1 - Z_0}, & Z_0 \leq C^T X \leq Z_1 \\ 0, & C^T X \geq Z_0 \end{cases}$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & (Ax)_i < b_i \\ \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i}, & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0, & (Ax)_i \geq b_i + p_i \end{cases}$$

Amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonun şekil 4. 6'te gösterilmiştir.



Şekil 4.6. Amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu

Werners modelini klasik doğrusal programlama modeline dönüştürmek için λ değişkeni kullanılır. Bulanık kararın en uygun çözümünün maksimum olduğu kararın seçilmesi halinde eşitlik aşağıdaki halini alır.

$Max\lambda$

$\mu_0 \geq \lambda$

$\mu_i \geq \lambda$

$\lambda, \mu_0, \mu_i \in [0,1] \qquad i = (1, 2, \ldots, m)$

$x_{ij} \ \geq 0$

Yine $\lambda = 1 - \theta$ olması halin de problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$Min\theta$

$C^T X \geq Z^1 - \theta(Z^1 - Z^0)$

$(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i, \quad i = (1, 2, \dots, m)$

$\theta \in [0, 1]$

$x_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

şeklinde ifade edilir (Yıldırım, 2009: 86).

Örnek 3;

Örnek 1'deki modeli Werners yöntem ile çözelim.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \lesseqqgtr 9$

$x_1 - 2x_2 \lesseqqgtr 2$

$x_1 + 2x_2 \lesseqqgtr 11$

$x_{ij} \geq 0$

Bulanık modelinde amaç ve kısıtlayıcıların maksimum toleransı sırası ile $p_0 = 3,\ p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 3$ olarak belirlenmiştir. Werners yönteminde öncelikle klasik doğrusal problem yöntemini kullanarak aşağıdaki model çözülür ve $Z_0\ ve\ Z_1$ değerleri bulunur.

Z_0 değerini bulalım:

$Z_0 = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1 + 2x_2 \leq 11$

$x_{ij} \geq 0$

Z_1 değerini bulalım:

$Z_1 = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 - 2x_2 \leq 5$

$x_1 + 2x_2 \leq 14$

$x_{ij} \geq 0$

Lingo bilgisayar programı ile bu modeller çözümlendiğinde Z_0=6,66667 ve $Z_1 = 8{,}33333$ değerlerine ulaşılmaktadır. Bulanık amaç ve kısıtlayıcılar için üyelik fonksiyonları aşağıdaki şekilde oluşur.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & x_1 + x_2 > 8{,}33333 \\ 1 - \dfrac{8{,}33333 - (x_1 + x_2)}{1{,}66666}, & 6{,}66667 \leq x_1 + x_2 \leq 8{,}33333 \\ 0, & x_1 + x_2 < 6{,}66667 \end{cases}$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ 1 - \dfrac{(2x_1 + x_2) - 9}{2}, & 7 \leq 2x_1 + x_2 < 9 \\ 0, & 2x_1 + x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 1 - \dfrac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3}, & 2 \leq x_1 - 2x_2 < 5 \\ 0, & x_1 - 2x_2 \geq 5 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1, & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1 - \dfrac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3}, & 11 \leq x_1 + 2x_2 < 14 \\ 0, & x_1 + 2x_2 \geq 14 \end{cases}$$

Bulanık kısıtlar ve bulanık amaç fonksiyonu için oluşan üyelik fonksiyonları yukarıdaki gibi oluşmaktadır. Werners yaklaşımı ile bu üyelik fonksiyonları sayesinde ulaştığımız yeni doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi oluşacaktır.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 \geq 6{,}66667 + 1{,}66666(\lambda)$

$2x_1 + x_2 + 2(\lambda) \leq 11$

$x_1 - 2x_2 + 3(\lambda) \leq 5$

$x_1 + 2x_2 + 3(\lambda) \leq 14$

$x_{ij} \geq 0$

$\lambda \in [0, 1]$

Lingo paket programı ile çözüle bu model sonucunda $\lambda = 0{,}5$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 5.0$, $Z = 7.5$ bulunmuştur.

Nitekim bu sonuca aşağıdaki formülden de ulaşılabilir:

$1 - \frac{8{,}33333 - C^T X}{1{,}66666} = \lambda$ ise;

$$1 - \frac{8{,}33333 - C^T X}{1{,}66666} = 0{,}5$$

$$C^T X = 7{,}5$$

olarak bulunur.

4.4.4 Chanas Yaklaşımı

Chanas, bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılı doğrusal programlama modellerine parametrik programlamaya dayalı yeni bir yaklaşım önermiştir. Bu öneriye göre Vedegay gibi Chanas da hedef ve kısıtlar için karar verici tarafından önceden bir çıkarımda bulunmanın gerçekçi olmadığını savunur.

Chanas'ın önerdiği yaklaşımda, karar vericiye b_0 ve p_0 değerlerinin belirlenmesinde yardımcı olması için öncelikle aşağıda verilen modelin parametrik programlamaya dayalı olarak çözülmesi gerekmektedir (Bector ve Chandra, 2005: 70).

$$Z_{\,max} = C^T X$$

$$A(x)_i \leq \tilde{b}_i \qquad i: 1, 2 \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Modelin parametrik programlamaya dayalı çözümü ise. Verdegay'ın önerdiği parametrik programlama dönüşümü ile yapılacaktır.

$$Z_{\,max} = C^T X$$

$$A(x)_i \leq \tilde{b}_i + \theta p_i \qquad i: 1, 2 \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\theta \in [0, 1]$$

θ parametresi kısıtlayıcılar için ihlal derecesini göstermektedir. Parametrik programlama problemlerinin kabul edilebilir çözümlerini gösteren θ_x değerinin, θ parametresinin her bir değeri için $\mu_i[Ax_i^*(\theta)] \geq \lambda = 1 - \theta$ koşulunu sağlaması gerekmektedir. Ayrıca en az bir kısıtlayıcı için $\mu_i[A{x_i}^*(\theta)] = \lambda = 1 - \theta$ olamalıdır. Çünkü yukarıda verilen modelin çözümünde en az bir kısıtlayıcının uygun çözüm alanında bulunan en uygun çözüm olan $x^*(\theta)$ değeri tarafından sağlanması gerekmektedir. Parametrik programlama probleminin çözümü ile amaç fonksiyonunu maksimize eden θ parametresine bağlı bir çözüm kümesi elde edilmektedir. Amacı mümkün olan en yüksek derece olan $\lambda = 1 - \theta$ ile doyuran en az bir kısıtlayıcı bulunmaktadır (Başkaya, 2011: 193).

Parametrik en uygun çözüm değerleri $p_0\ ve\ b_0$ değerlerinin belirlenmesi için karar belirleyiciye sunulur. Karar vericiden sağlanan $p_0\ ve\ b_0$ değerlerine göre bulanık amacın üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

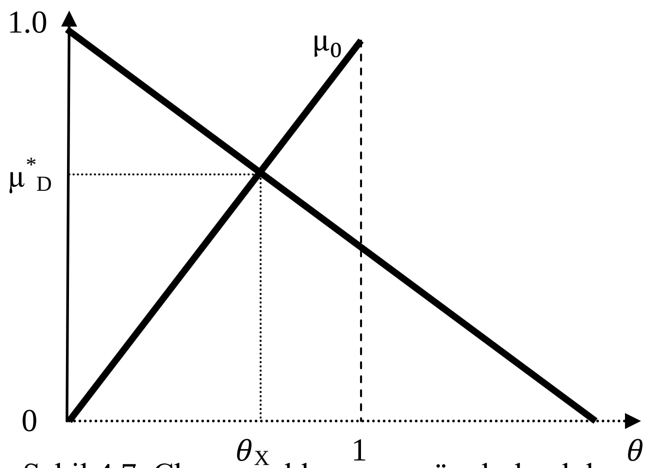
$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0 & ;eğer\ C^T X \leq b_0 - p_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - C^T X}{p_0} & ;eğer\ b_0 - p_0 \leq C^T X \leq b_0 \\ 1 & ;eğer\ \ C^T X \geq\ b_0 \end{cases}$$

Optimal parametrik çözüm olan $x^*(\theta)$'da aşağıda verildiği gibi tanımlanır:

$$\mu_0[x^*(\theta)] \begin{cases} 0 & ;eğer\ C^T x^*(\theta) \leq b_0 - p_0 \\ 1 - \dfrac{b_0 - C^T x^*(\theta)}{p_0} & ;eğer\ b_0 - p_0 \leq C^T x^*(\theta) \leq b_0 \\ 1 & ;eğer\ \ C^T x^*(\theta) \geq\ b_0 \end{cases}$$

Amaç fonksiyonunun parametrik üyelik fonksiyonu θ parametresine göre parçalı doğrusal, sürekli iç bükey bir fonksiyondur. Bulanık karar kümesi de $\mu_{\tilde{D}}(x^*)$, θ'nın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Yıldırım, 2009: 83).

$$\mu_{\tilde{D}}(\theta) = min\{\mu_0[x^*(\theta)], \mu_{\tilde{C}}(\theta_x)\}$$



Şekil 4.7. Chanas yaklaşımına göre bulanık karar

Bulanık karara ilişkin üyelik fonksiyonu, $\mu_D = \mu_0 \; \mu_c$ olarak belirlenir (Chanas, 1983: 243-251).

Örnek 4;

Örnek 1'deki modeli Chanas yöntemi ile çözelim.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \lessapprox 9$

$x_1 - 2x_2 \lessapprox 2$

$x_1 + 2x_2 \lessapprox 11$

$x_{ij} \geq 0$

Bu yöntem amaç fonksiyonunda herhangi bir bulanıklık söz konusu olmadığından üyelik fonksiyonuna gerek yoktur. Kısıtların üyelik fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$\mu_1(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(2x_1 + x_2) - 9}{2}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 + 2(1 - \lambda)$$

$\mu_2(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 - 2x_2) - 2}{3}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3 + 2(1 - \lambda)$$

$\mu_3(x) \geq \lambda$ olduğu durum için;

$$1 - \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3} \geq \lambda$$

$$1 - \lambda \geq \frac{(x_1 + 2x_2) - 11}{3}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11 + 3(1 - \lambda)$$

Bu doğrultuda oluşan model:

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \lesseqqgtr 9 + 2(1-\lambda)$

$x_1 - 2x_2 \lesseqqgtr 2 + 3(1-\lambda)$

$x_1 + 2x_2 \lesseqqgtr 11 + 3(1-\lambda)$

$x_{ij} \geq 0$

$\lambda \in [0, 1]$

Üyelik fonksiyonları oluşturulduktan sonra $(1-\lambda) = \theta$ dönüşümü yapılır. Bulanık doğrusal programlama modeli, parametrik doğrusal programlamaya dönüşür.

$Z_{max} = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \lesseqqgtr 9 + 2\theta$

$x_1 - 2x_2 \lesseqqgtr 2 + 3\theta$

$x_1 + 2x_2 \lesseqqgtr 11 + 3\theta$

$x_{ij} \geq 0$

$\theta \in [0, 1]$

Bu modelin Lingo bilgisayar programı çözümünde herhangi bir tolerans değeri hesaba katılmaz ise yani $\theta = 0$ olduğunda $x_1 = 2{,}3333,\ x_2 = 4{,}3333$ maksimum $Z = 6{,}6666$ bulunmuştur. Verdegay yönteminde model parametrik doğrusal programlama yöntemine dönüştürüldükten sonra θ değerine göre oluşan optimum çözümler tablo 4.2.'deki gibidir.

Tablo 4.2. Farklı $\boldsymbol{\theta}$ değerleri için bulunan optimum çözümler

θ	**0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
Z	6,66	6,83	7,0	7,16	7,33	7,5	7,66	7,83	8,0	8,16	8,33
$\mathbf{x_1}$	2,33	2,36	2,4	2,43	2,46	2,5	2.53	2,56	2,6	2,63	2,66
$\mathbf{x_2}$	4,33	4,46	4,6	4,73	4,86	5,0	5.13	5,26	5,4	5,53	5,66

Buraya kadar oluşturulan modelin parametrik programlamaya dönüşümü Verdegay yöntemi ile yapılır. Chanas yöntemine göre oluşan bu parametrik programlama modelinde, θ parametresine bağlı olarak $C^T X^*$ belirlenir. Bu örnekte $C^T X^* = 11 + 3\theta$ olarak belirlenmiştir ve dolayısıyla üyelik fonksiyonunda $C^T X^*$ yerine $11 + 3\theta$ yazılır. $C^T X^*$ için istek seviyesi ve maksimum toleransı bu örnekte $b_0 = 14,\ p_0 = 3$ olarak belirlenmiştir. Oluşan üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_0(11+3\theta)=\begin{cases}1, & 11+3\theta \geq 14\\ 1-\dfrac{14-(11+3\theta)}{3}, & 11 \leq 11+3\theta < 14\\ 0, & 11+3\theta \leq 11\end{cases}$$

İşlemler yapıldığında $\mu_0(C^T X^*) = \theta$ bulunur. Amaç fonksiyonun değeri en az $1-\theta$ olduğu için $\mu_0(C^T X^*) = 1-\theta$ eşitliğini yazabiliriz.

$\theta = 1-\theta$ eşitliğinden $\theta = 0{,}5$ bulunur. Karar vericinin katlandığı bu istek seviyesi ve maksimum tolerans miktarında en uygun çözüm $Z = 7{,}5$ bulunur. Değişik istek ve tolerans değerleri için Z değerleri değişmektedir.

4.4.5 Carlsson ve Korhonen Yaklaşımı

Doğrusal programlama problemindeki tüm katsayılar bazen belirsiz olabilir. Bu problem şöyle formüle edilebilir.

$Z_{max} = C^T$X

$(\tilde{A}x)_i \leq \tilde{b}_i, \ \forall_i$

$x_{ij} \geq 0$

Eşitlik için Carlsson ve Korhonen, Chanas'ın yaklaşımının kısıt ihlal dereceleri arasındaki ödünleşmeyi göz önüne almadığını eleştirmiş ve bir tam ödünleşme yaklaşımını önermişlerdir (Paksoy, 2002: 14).

Carlsson ve Korhonen'in yukarıda verilen problemin çözümü için önerdiği yaklaşımda, çözüm değeri $z^* = z^*(c, -A, b) c, -A\ ve\ b$ parametre değerlerinin artan bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, üyelik fonksiyonları da parametre değerlerinin monoton olarak azalan fonksiyonlarıdır. Parametrelerde meydana gelecek artışlar $\Delta c, \Delta A\ ve\ \Delta b$ ile gösterildiğinde, söz konusu artışlar sonucu oluşacak doğrusal programlama modeli şöyledir (Carlsson ve Korhonen, 1986: 24).

$Z_{max} = (c + \Delta c)x$

$-(A + \Delta A)x \leq b + \Delta b$

$x_{ij} \geq 0$

Yukarıda verilen modelin çözümü $z^* = (c + \Delta c, -(A + \Delta A), b + \Delta b)$ ise, parametrelerdeki artış miktarları pozitif olduğu için $(\Delta c, \Delta A, \Delta b \geq 0)$ klasik doğrusal programlama modeli ile parametrik doğrusal programlama modeli arasındaki ilişki aşağıda gösterildiği gibi kabul edilmektedir (Başkaya, 2011: 212).

$z^*(c+\Delta c, -(A+\Delta A), b+\Delta b) \geq z^*(c, -A, b)$

Bu model bir bulanık doğrusal programlama modelinin çözümü için tüm katsayılar ve sağ taraf sabitlerinin bulanık olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Söz konusu bulanık sayılar aralıklar şeklinde ifade edilebilir.

Parametrelerde sürekli artan bir ilişkinin olduğunu ileri sürmüşlerdir. "$c, A\ ve\ b$" parametreleri için mümkün aralık değerleri $[c^0, c^1]$ $[A^0, A^1]$ ve $[b^0, b^1]$ olarak tanımlıdır. Bu aralıklarda alt sınırlar çözümün uygulanabilir olduğu risksiz bölgeleri gösterirken, üst sınırlar ise gerçek üstü ve mümkün olmayan parametre değerlerini temsil etmektedir. Çözümün güvenilirliği üst sınırlara gidildikçe azalır (Lai ve Hwang, 1992: 122).

Modelin çözümünde sadece en uygun değil, aynı zamanda uygulanabilir de olması gerekmektedir. Bu nedenle modelin uygulanabilirliğinin artması için bulanık katsayılar ve sağ taraf sabitleri için verilen aralıklarda üyelik fonksiyonlarının yazılması gerekmektedir.

Üyelik fonksiyonları μ ile gösterilmiş ve hangi parametreye ait olduğu indis ile (μ_c, μ_A, μ_b) belirtilmiştir. "p" modeldeki bir parametreyi göstermek üzere, üyelik fonksiyonları şöyle ölçeklendirilirsin;

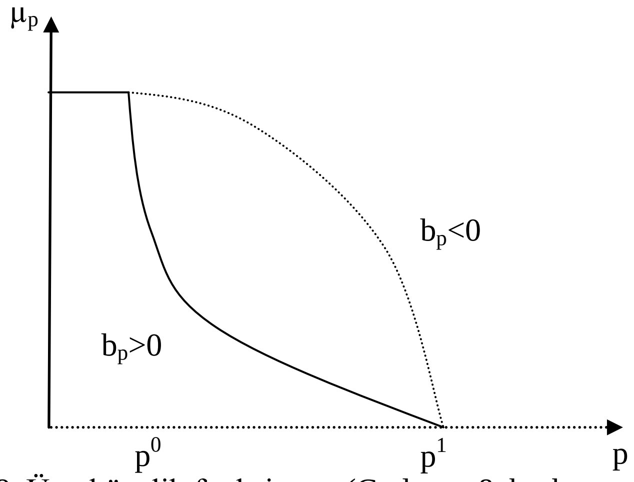
$\mu_p = 1\ eğer\ p \leq p^0\ ise, ve\ \mu_p = 0\ eğer\ p \geq p^1$

Üyelik fonksiyonları için üssel fonksiyon aşağıdaki gibidir:

$$\mu_p = \frac{[\,1 - exp(-b_p(p-p1)/(p0-p1)\,]}{1-\exp(-b_p)}$$

b_p; karar verici tarafından belirlenen bir sabittir ve üyelik fonksiyonun geometrisini belirler. $b_p < 0$ ise üssel üyelik fonksiyonu içbükey $b_p > 0$ ise üssel üyelik fonksiyonu dışbükeydir.

b_p parametresinin karar verici tarafından belirlenmesi gerekmektedir. Karar vericiye p parametresinin hangi değeri %50 olasılıkla gerçekçidir? Sorusu yöneltilir ve söz konusu p değeri aşağıda verilen eşitlikte yerine konup çözülerek b_p parametresinin değeri belirlenir.



Şekil 4.8. Üssel üyelik fonksiyonu (Carlsson & korhonen 1986: 25).

4.4.6 Negoita ve Sularia Yaklaşımı

Negoita ve Sularia yaklaşımına göre oluşturulan modelde sağ taraf sabitleri (b_i) ve teknoloji katsayılarını bulanık olarak ele almıştır ve bulanık sayıların üçgensel bir yapı gösterdiğini varsaymıştır. Herhangi bir üçgen bulanık sayı, üç nokta ile tanımlanmaktadır. $\tilde{A} = (a, b, c)$ a ve c üyelik fonksiyonunun uç noktalarını, b ise üçgen bulanık sayının tepe noktasını gösterir (Zhang ve Liu, 2006: 8).

Bu yaklaşıma göre bulanık doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z_{max} = C^T \mathrm{X}$$

$$\tilde{A}x \ \leq \tilde{b}$$

$$x_{ij} \ \geq 0$$

Sağ taraf sabitleri ve teknoloji katsayıları bulanık olan bir doğrusal programlama problemi üçgen bulanık sayılar kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Klir&Yuan, 1995:414).

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to maksimum$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) x_{ij} \leq (d_i, e_i, f_i) \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

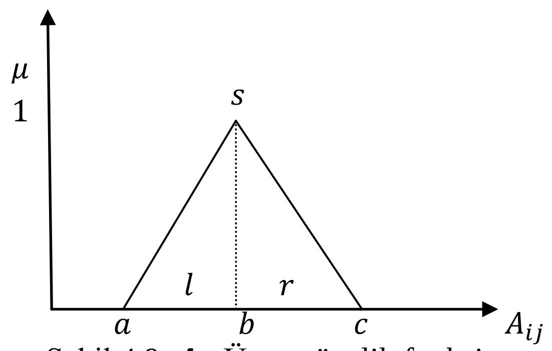
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$A_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ teknoloji katsayılarını ve $b_i = (d_i, e_i, f_i)$ sağ taraf sabitlerini gösteren üçgen bulanık sayılardır. Bu yaklaşıma göre üyelik derecesi 1 olan değer ile üçgen bulanık sayı sınırları arasında pozitif ve negatif yönde oluşan farkların hesaplanması gerekmektedir.

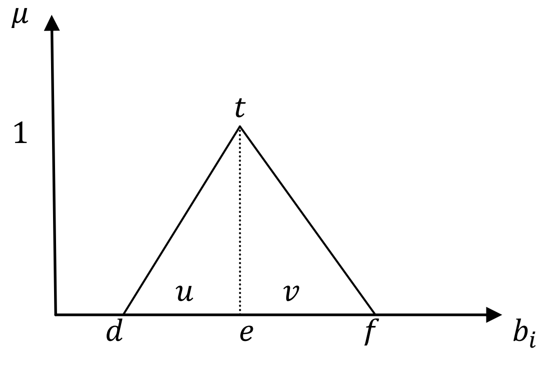
Bir $A_{ij} = (a, b, c)$ üçgen bulanık sayısı için negatif yönde oluşacak fark lf ve pozitif yönde oluşacak fark rf ile, bir $b_i = (d, e, f)$ üçgen bulanık sayısı için ise negatif yönde oluşan fark uf ve pozitif yönde oluşan fark vf ile gösterildiğinde aşağıda verilen dönüşümlerin yapılarak her bulanık sayı için $(s, l, r)\ ve\ (t, u, v)$ değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir (Başkaya, 2011: 205).

$b - a = l$
$c - b = r$
$b = s$
$e - d = u$
$f - e = v$
$e = t$

Bu durum sonrası oluşan modelin üyelik fonksiyonu şekil 4.9 ve 4.10’daki gibidir.



Şekil 4.9. $\boldsymbol{A_{ij}}$ Üçgen üyelik fonksiyonu



Şekil 4.10. $\boldsymbol{b_i}$ Üçgen üyelik fonksiyonu

Bulanık sayılar üzerindeki işlemler göz önüne alınarak model ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow maksimum$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \leq t_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij}-l_{ij}) x_i \leq t_i - u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij}+r_{ij}) x_j \leq t_i + v_i$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i, j \in N)$$

Örnek 5;

Bir süt ürünleri üreten bir fabrikada, peynir ve yoğurt olmak üzere iki adet ürün üretilmektedir. Üretici firma en uygun ortam ve şartlarda çalışmak üzere üretim programını belirlemek istemektedir. Üretilen ürünlerden birim başına karları sırası ile 5TL, 4TL olarak belirlenmiştir. Ürünlerin üretiminde 3 kişi çalışmaktadır. Kullanılan işgücü, çeşitli aksamalar nedeniyle birim üretim için gerekli işgücü saatlerinde ve üretim kapasitesinde bulanıklar söz konusu olmaktadır. Bu bulanıklıklar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.3. Birim üretim için gerekli işgücü saatlerinde ve üretim kapasitesindeki bulanıklık

	PEYNİR	**YOĞURT**	**KAPASİTE**
1.İŞGÜCÜ	(1.5, 2, 2.5)	(0.3, 1, 1,8)	(20, 25, 30)
2.İŞGÜCÜ	(1.2, 2, 2.6)		(15, 20, 24)
3.İŞGÜCÜ	(1.3, 2, 2.7)	(0.8, 2, 2.6)	(10, 30, 35)

Peynir üretim miktarı gün/kg modelde x_1, yoğurt üretim miktarı gün/kg ise x_2 ile gösterilir ise oluşan model aşağıdaki gibidir.

$$Z_{max} = 5x_1 + 4x_2$$

$$\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \widetilde{25}$$

$$\tilde{2}x_1 \leq \widetilde{20}$$

$$\tilde{2}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \widetilde{30}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

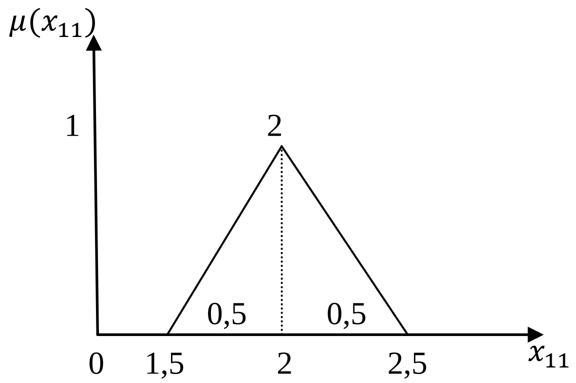
$Z_{max} = 5x_1 + 4x_2$

$(1.5, 2, 2.5)\mathrm{x}_1 + (0.3, 1, 1.8)\mathrm{x}_2 \leq (20, 25, 30)$

$(1.2, 2, 2.6)\mathrm{x}_1 \leq (15, 20, 24)$

$(1.3, 2, 2.7)\mathrm{x}_1 + (0.8, 2, 2.6)\mathrm{x}_2 \leq (10, 30, 35)$

Bulanık katsayılar için (s, l, r) değerleri hesaplanır ve sağ taraf sabitleri için ise (t, u, v) değerleri üçgen bulanık sayılar yardımı ile hesaplanır. Şekil 4.11.' de x_{11} hücresi için üçgen üyelik fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 4.11. $\boldsymbol{x_{11}}$ Üçgen üyelik fonksiyonu

Aynı işlem diğer hücrelere uygulandıktan sonra oluşan (s, l, r) ve (t, u, v) tablosu, tablo 4.4.'de verilmiştir.

Tablo 4.4. Birim üretim için gerekli işgücü saati ve kapasite

	PEYNİR(s,l,r)	**YOĞURT(s,l, r)**	**KAPASİTE(t,u,v)**
1.İŞGÜCÜ	(2, 0.5, 0.5)	(1, 0.7, 0.8)	(25, 5, 10)
2.İŞGÜCÜ	(2, 0.8, 0.6)		(20, 5, 4)
3.İŞGÜCÜ	(2, 0.7, 0.7)	(2, 1.2, 0.6)	(30, 20, 5)

Bu veriler doğrultusunda oluşan DP modeli aşağıdaki gibidir.

$Z_{max} = 5x_1 + 4x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 25$

$2x_1 \leq 20$

$2x_1 + 2x_2 \leq 30$

$0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 \leq 20$

$0{,}8x_1 \leq 15$

$0,7x_1 + 1,2x_2 \leq 10$

$0,5x_1 + 0,8x_2 \leq 35$

$0,6x_1 \leq 24$

$0,7x_1 + 0,6x_2 \leq 35$

$x_{ij} \geq 0$

Klasik doğrusal programlama modeli Lingo 14.0 paket programı ile çözüldüğünde X_1 = 10, X_2 = 5 ve Z = 70 olarak bulunmuştur. Teknoloji katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde ifade edilen katsayılar kullanılarak çözülen optimal çözüm ise X_1 = 10, X_2 = 2,5 ve Z = 60 olarak hesaplanmıştır.

Sağ taraf sabitlerinde ve teknoloji katsayılarında var olan bulanıklık nedeni ile çözümde daralma meydana gelmiştir. Negatif yönde oluşan farklar ile pozitif yönde oluşan farklar modele dahil edildiğinde en uygun çözüm alanı daralmış ve en uygun çözüm miktarının daha düşük bir miktarda gerçekleşmesine neden olmuştur.

BEŞİNCİ BÖLÜM
BULANIK MODELLER

Bulanık doğrusal programlama modelleri parametrelerinin, kısıtlayıcılarının bulanık oldukları durumlara göre farklı kategorilere ayrılırlar. Bu nedenle de çözüm yöntemleri de farklılık göstermektedir. Bu durumlar:

1. Bulanıklık sadece kısıtlayıcıların sınırlarında olabilir.
2. Bulanıklık amaç fonksiyonunda olabilir.
3. Bulanıklık hem amaç hem de kısıtlayıcılarda olabilir.
4. Bulanık kısıtlayıcılarda bulunan değişkenlerin parametre değerlerinde olabilir.
5. Bulanıklık Amaç fonksiyonundaki değişkenlerin katsayısında olabilir.
6. Bulanıklık hem amaç hem kısıtlayıcıların katsayılarında hem de sağ taraf sabitlerinde bulanıklık olabilir.

Bulanık doğrusal programlama modellerinin temel amacı, tam bilginin bulunmadığı şartlar altında karar seçenekleri arasından en iyi çözümün seçilmesidir.

5.1 BULANIK ULAŞTIRMA MODELİ

Klasik bir ulaştırma modeline ait amaç fonksiyonunda, kısıtlayıcılarında ve bu fonksiyonların katsayılarda belirsizlik olduğunu ifade eden modellerdir. Bulanık modeller, belirsizliklerin oluştuğu yerlere göre ele alınmıştır.

5.1.1 Kısıtları ve Amaç Fonksiyonları Bulanık Olan Ulaştırma Problemi Modeli

Bu modelde n adet tedarik merkezi, m adet talep merkezinden oluşur ve S_i üreticinin kapasitesini, D_j talep edilen ürün miktarını, c_{ij} ise i. üretim merkezinden j. talep merkezine doğru gönderilen bir birim ürün için oluşan taşıma maliyetlerini, x_{ij}, i. fabrikadan j. talep merkezine gönderilen ürün miktarını gösterir.

Sağ taraf sabitleri ve amaç fonksiyonu bulanık olan ulaştırma probleminin modeli aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{Z} = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \,\widetilde{\leqq}\, S_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cong D_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Bu problemlerde, amaç fonksiyonu ve sağ taraf sabitleri bazı nedenlerden dolayı bulanıklık içerdiği varsayılmıştır. Bu varsayım altında oluşturulmuş olan BDP problemleri ile ilgili olarak H. J. Zimmermann ve S. Chanas tarafından ortaya atılmış iki farklı yaklaşım literatürde bulunmaktadır. Chanas geliştirdiği yöntemde Zimmermann'dan farklı olarak amaç fonksiyonunun hesaplanmasında modeli önce parametrik doğrusal programlama problemine dönüştürerek sonra çözüm üretmiştir.

Aşağıda bir ulaştırma probleminin KDP ile çözümü ele alınmış ve daha sonra aynı örnekte bazı parametrelerin bulanık olduğu varsayımı altında modelin Zimmermann ve Chanas yaklaşımları ile çözümü ele alınmıştır.

Örnek 1;

Nihai üretimi tamamlanmış bir ürünü üreten 4 fabrika ve bu ürünlere ihtiyaç duyan 4 talep merkezi bulunmaktadır. A fabrikasının üretim kapasitesi 400 adet, B fabrikası 350, C fabrikası 500, D fabrikası 350 adettir. Bu ürünlere olan talepler ise: X talep merkezi için 300, Y talep merkezinin 450, Z talep merkezinin 500, W talep merkezinin 350 adettir. Birim başı taşıma maliyetleri (TL/adet) ulaştırma tablosunda verilmiştir. Amaç, talep merkezlerinin ihtiyaçlarını minimum maliyet ile tam olarak karşılamaktır.

Tablo 5.1. Klasik bir ulaştırma probleminin ulaştırma tablosu

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	3	4	2	5	**400**
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	
B	4	3	4	3	**350**
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X24	
C	5	5	3	4	**500**
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
D	4	4	3	5	**350**
	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	
TALEP	**300**	**450**	**500**	**350**	**1600**
					1600

Amaç fonksiyonu:

$$Z_{min} = 3\mathrm{X}_{11} + 4\mathrm{X}_{12} + 2\mathrm{X}_{13} + 5\mathrm{X}_{14} + 4\mathrm{X}_{21} + 3\mathrm{X}_{22} + 4\mathrm{X}_{23} + 3\mathrm{X}_{24} + 5\mathrm{X}_{31} + 5\mathrm{X}_{32} + 3\mathrm{X}_{33} + 4\mathrm{X}_{34} + 4\mathrm{X}_{41} + 4\mathrm{X}_{42} + 3\mathrm{X}_{43} + 5\mathrm{X}_{44}$$

Kapasite kısıtları:

$$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{12} + \mathrm{X}_{13} + \mathrm{X}_{14} \leq 400$$

$$\mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{22} + \mathrm{X}_{23} + \mathrm{X}_{24} \leq 350$$

$$\mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{32} + \mathrm{X}_{33} + \mathrm{X}_{34} \leq 500$$

$$\mathrm{X}_{41} + \mathrm{X}_{42} + \mathrm{X}_{43} + \mathrm{X}_{44} \leq 350$$

Talep kısıtları:

$$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} = 300$$

$$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} = 450$$

$$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} = 500$$

$$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} = 350$$

Negatif olmama kısıtı:

$$\mathrm{X}_{ij} \geq 0$$

Problem Lingo 14.0 ile çözümünden elde edilen sonuçlar aşağıdaki tablo 5.2. de verilmiştir.

Tablo 5.2. Klasik ulaştırma probleminin çözüm sonuçları

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	$X_{11} = 50$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 350$	$X_{14} = 0$	**400**
B	$X_{21} = 0$	$X_{22} = 350$	$X_{23} = 0$	X24 = 0	**350**
C	$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 150$	$X_{34} = 350$	**500**
D	$X_{41} = 250$	$X_{42} = 100$	$X_{43} = 0$	$X_{44} = 0$	**350**
TALEP	**300**	**450**	**500**	**350**	**1600** **1600**

Amaç fonksiyonu, Lingo 14.0 programı ile çözülmüştür ve bu duruma göre 5150 TL olarak hesaplanmıştır. Klasik modellerde her zaman kapasiteler ve talepler kesin olarak ifade edilebilir fakat gerçek hayatta bu durum neredeyse imkânsızdır. Gerçek hayatın bazı koşulları modelin kısıtlayıcılarını belirsiz duruma getirmektedir. Bu nedenle model klasik değil bulanık hale dönüşmüş olacaktır. Aynı modeli bazı belirsizlikler altında çözmek istersek bulanık mantık metodundan faydalanmamız gerekir.

Örnek 2;

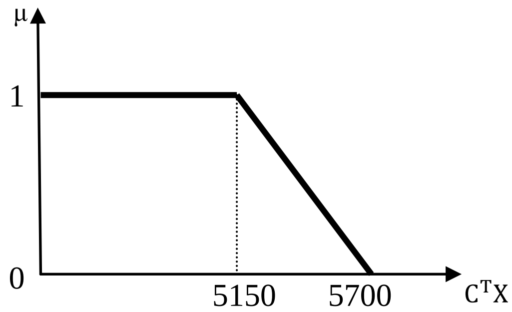
Aynı örneğin bulanık durumu ele alınmıştır. Bu probleme ait amaç fonksiyonun, kapasitelerin ve aynı ürüne olan taleplerin değişebileceği varsayımı altında bazı değerler verilmiştir. Bu duruma göre firma amaç fonksiyonunun istek seviyesinin 550 TL tolere edebileceğini A fabrikası kapasitesinin 100 birim, B fabrikası kapasitesini 50 birim, C fabrikası kapasitesini 50 birim, D fabrikası Kapasitesini 150 birim arttırabilecek durumdadır. X, Y, Z, X talep merkezleri istek seviyesini 100 birim arttırabileceği varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında oluşan bulanık ulaştırma tablosu aşağıda verilmiştir.

Tablo 5.3. Bulanık ulaştırma tablosu

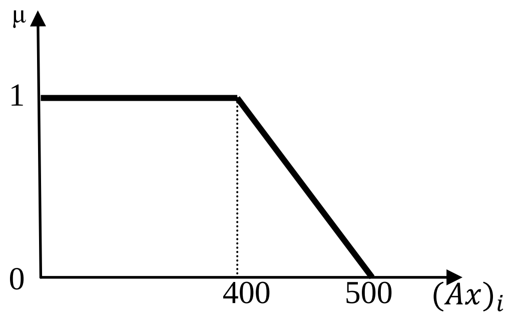
Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	3	4	2	5	**400 ~ 500**
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	
B	4	3	4	3	**350 ~ 400**
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X24	
C	5	5	3	4	**500 ~ 550**
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
D	4	4	3	5	**350 ~ 500**
	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	
TALEP	**300 ~ 400**	**450 ~ 550**	**500 ~ 600**	**350 ~ 450**	**1600 ~ 1950**
					1600 ~ 2000

Zimmermann yaklaşımına göre bu problemin çözümü için öncelikle amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların istek seviye değerleri ve alabileceği maksimum tolerans değerleri karar verici tarafından önceden belirlenir. Bu örnekte amaç fonksiyonunun istek seviyesi 5150 TL ve maksimum tolerans değeri ise 550 TL olarak belirlenmiştir. Ayrıca kısıtlayıcılar için maksimum toleranslar ise sırası ile $p_1 = 100$, $p_2 = 50$, $p_3 = 50$, $p_4 = 150$, $p_5 = 100$, $p_6 = 100$, $p_7 = 100$, $p_8 = 100$ olarak modele dahil edilmiştir.

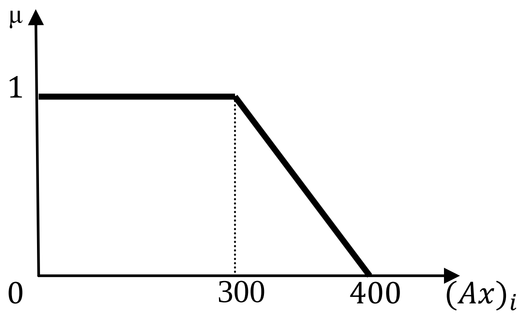
(a) Amaç fonksiyonun üyelik fonksiyonu grafiği



(b) Kapasite fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği



(c) Talep fonksiyonunun üyelik fonksiyonu grafiği



Şekil 5.1. Amaç (a), kapasite (b), talep (c) fonksiyonlarına ait üyelik fonksiyonları

Diğer talep ve kapasite fonksiyonları için aynı işlemler uygulanmıştır. Bu durumda oluşan amaç fonksiyonunun ve kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\mu_0 = \begin{cases} 1, & C^TX < 5150 \\ 1 - \dfrac{C^TX - 5150}{550}, & 5150 \leq C^TX \leq 5700 \\ 0, & C^TX > 5700 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) < 400 \\ 1 - \dfrac{(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) - 400}{100} & , \; 400 \leq (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) \leq 500 \\ 0, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 1, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) - 350}{50} & , \; 350 \leq (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) \leq 400 \\ 0, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) > 400 \end{cases}$$

$$\mu_3 = \begin{cases} 1, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) < 500 \\ 1 - \dfrac{(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) - 500}{50} & , \; 500 \leq (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) \leq 550 \\ 0, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) > 550 \end{cases}$$

$$\mu_4 = \begin{cases} 1, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) - 400}{150} & , \; 350 \leq (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) \leq 500 \\ 0, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_5 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) > 400 \\ 1 - \dfrac{400 - (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41})}{100} & , \; 300 \leq (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) \leq 400 \\ 0, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) < 300 \end{cases}$$

$$\mu_6 = \begin{cases} 1, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) > 550 \\ 1 - \dfrac{550 - (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42})}{100} & , \; 450 \leq (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) \leq 550 \\ 0, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) < 450 \end{cases}$$

$$\mu_7 = \begin{cases} 1, & (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) > 600 \\ 1 - \dfrac{600 - (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43})}{100} & , \; 500 \leq (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) \leq 600 \\ 0, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) < 500 \end{cases}$$

$$\mu_8 = \begin{cases} 1, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) > 450 \\ 1 - \dfrac{450 - (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44})}{100} & , \; 350 \leq (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) \leq 450 \\ 0, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) < 350 \end{cases}$$

Zimmermann yaklaşımına göre BDP modeli aşağıdaki gibidir.

$Z = \lambda \rightarrow Minimum$

$$3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44} \leq 5700$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400 + 100(1 - \lambda)$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 350 + 50(1 - \lambda)$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 500 + 50(1 - \lambda)$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 350 + 150(1 - \lambda)$$

Talep Kısıtı:
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} <= 300 + 100(1 - \lambda)$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} <= 450 + 100(1 - \lambda)$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} <= 500 + 100(1 - \lambda)$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} <= 350 + 100(1 - \lambda)$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

$0 \leq \lambda \leq 1$

Model Lingo 14.0 ile çözülmüş ve sonuçları tablo 5.4.'de verilmiştir.

Tablo 5.4. Bulanık ulaştırma modelinin çözüm sonuçları

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	$X_{11} = 50$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 396$	$X_{14} = 0$	**446**
B	$X_{21} = 0$	$X_{22} = 373$	$X_{23} = 0$	X24 = 0	**373**
C	$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 150$	$X_{34} = 373$	**523**
D	$X_{41} = 296$	$X_{42} = 123$	$X_{43} = 0$	$X_{44} = 0$	**419**
TALEP	**346**	**496**	**546**	**373**	**1761** **1761**

Kapasitedeki, talepteki ve amaçtaki belirsizlikler modele dahil edildikten sonra Lingo 14.0 programı yardımıyla çözülmüştür. Bulunan amaç fonksiyonu 5679TL olarak hesaplanmıştır. Bu değer için hesaplanan üyelik fonksiyonun değeri ise $\mu = 0.54$ olarak bulunmuştur. Bu değer bize talepteki ve kapasitedeki $(1 - 0{,}54) = 0{,}46$ 'lık bir bulanıklığın maliyeti $5679 - 5150 = 529$ TL arttırdığı görülmüştür.

Aynı modeli Chanas yaklaşımı ile çözmek istersek, modeli öncelikle parametrik doğrusal programlama modeline dönüştürmemiz gerekir ve bu dönüşümü sağladıktan sonra sonuçlara bakan karar verici amaç fonksiyonu için istem ve tolerans değerlerini belirler daha sonra ise aşağıda belirtilen parçalı doğrusal üyelik fonksiyonu kullanarak amaç fonksiyonu için üyelik fonksiyonu oluşturulur.

Bu üyelik fonksiyonu θ parametresine bağlı olarak bulunan amaç fonksiyonu değeri $C^T X^*(\theta)$ şeklinde ifade edilmiştir.

$$\mu_0(C^TX^*(\theta)) = \begin{cases} 1, & C^TX^*(\theta) \leq b_0 \\ 1 - \frac{C^TX^*(\theta)-b_0}{p_0}, & b_0 \leq C^TX^*(\theta) < b_0+p_0 \\ 0, & C^TX^*(\theta) \geq b_0 + p_0 \end{cases}$$

Aynı örneğin Chanas yaklaşımı ile çözümü:

Örnek 3:

$$Z_{min} = 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400 + 100(\theta)$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 350 + 50(\theta)$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 500 + 50(\theta)$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 350 + 150(\theta)$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} <= 300 + 100(\theta)$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} <= 450 + 100(\theta)$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} <= 500 + 100(\theta)$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} <= 350 + 100(\theta)$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama Kısıtı

$0 \leq \theta \leq 1$

Tablo 5.5. Chanas yaklaşımı için bulunan çözüm sonuçları

θ	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Z	5150.000	5265.000	5380.000	5495.000	5610.000	5725.000	5840.000	5955.000	6070.000	6185.000	6300.000
X11	300.0000	310.0000	320.0000	330.0000	340.0000	350.0000	360.0000	370.0000	380.0000	390.0000	400.0000
X12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X13	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
X14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X22	100.0000	355.0000	360.0000	365.0000	370.0000	375.0000	380.0000	385.0000	390.0000	395.0000	400.0000
X23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X24	250.0000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X32	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X33	400.0000	145.0000	140.0000	135.0000	130.0000	125.0000	120.0000	115.0000	110.0000	105.0000	100.0000
X34	100.0000	360.0000	370.0000	380.0000	390.0000	400.0000	410.0000	420.0000	430.0000	440.0000	450.0000
X41	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X42	350.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
X43	0.000000	265.0000	280.0000	295.0000	310.0000	325.0000	340.0000	355.0000	370.0000	385.0000	400.0000
X44	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Böylece model parametrik programlama modeline dönüşmüştür. Parametrik doğrusal programlama modelinin θ parametresine bağlı olarak bulunan en uygun çözümü $Z^*(\theta) = C^T X^*(\theta) = 500 + 100\theta$ olarak belirlenmiştir. Bu nedenle $C^T X^*(\theta)$ yerine $500 + 100\theta$ yazılarak parçalı, doğrusal üyelik fonksiyonu ile bu fonksiyona ait üyelik fonksiyonu değeri bulunacaktır. Karar verici $500 + 100\theta$ fonksiyonu için istek seviyesi 550 ve maksimum tolerans seviyesini ise 20 birim olarak belirlemiş olsun. Bu durumda bu fonksiyona ait parçalı doğrusal üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_0(500 + 50\theta) = \begin{cases} 1, & 500 + 50\theta \geq 550 \\ 1 - \dfrac{550 - (500 + 100\theta)}{20}, & 530 \leq 500 + 100\theta < 550 \\ 0, & C^T X^*(\theta) \leq 530 \end{cases}$$

Gerekli işlemler yapıldığında $\mu_0(C^T X^*(\theta)) = 5\theta - 1{,}5$ olur. Amaç fonksiyonunun değeri en az $1 - \theta$ değerine eşit olduğu için üyelik fonksiyonun değeri $1 - \theta$'ya eşit olacaktır.

$5\theta - 1{,}5 = 1 - \theta$ eşitliğinden θ = 0.42 olarak belirlenmektedir. Kısıtlayıcılar için ortalama 0.42 tolerans kullanarak en ideal çözüme ulaşılmaktadır. Hesaplanan θ değeri modelde yerine konduğunda oluşan optimum çözüm tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 5.6. Chanas yaklaşımı için optimum çözüm sonuçları

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	$X_{11} = 342$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 100$	$X_{14} = 0$	**442**
B	$X_{21} = 0$	$X_{22} = 371$	$X_{23} = 0$	X24 = 0	**371**
C	$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 129$	$X_{34} = 392$	**521**
D	$X_{41} = 0$	$X_{42} = 100$	$X_{43} = 313$	$X_{44} = 0$	**413**
TALEP	**342**	**471**	**542**	**392**	**1747** **1747**

Amaç fonksiyonunun minimum değeri ise Z_{min}= 5633 TL bulunur. Karar verici tarafından belirlenen istek sevileri değişiklik gösterdiği zaman farklı sonuçlar ile karşı karşıya kalınmaktadır.

5.1.2 Kısıtları Bulanık Olan Ulaştırma Problemi Modeli

Bir ulaştırma modeli n adet tedarik merkezi, m adet talep merkezinden oluşur ve S_i üreticinin kapasitesini, D_j talep edilen ürün miktarını, c_{ij} ise i. üretim merkezinden j. talep merkezine doğru gönderilen bir birim ürün için oluşan taşıma maliyetlerini, x_{ij}, i. fabrikadan j. talep merkezine gönderilen ürün miktarını gösterir.

Kısıtları bulanık olan ulaştırma probleminin modeli aşağıdaki gibidir:

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \tilde{S}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Sağ taraf sabitlerinin bulanık olduğu lojistik problemlerin modelinin çözümüne ait iki farklı yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar: Verdegay'ın asimetrik ve Werners'in simetrik çözüm yötemleridir.

Örnek 4;

Örnek 1'deki ulaştırma problemini Werners yaklaşımı ile çözersek, Bu probleme ait ulaştırma tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 5.7. Verdegay yaklaşımı için ulaştırma tablosu

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	3	4	2	5	**400 ~ 500**
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	
B	4	3	4	3	**350 ~ 400**
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X24	
C	5	5	3	4	**500 ~ 550**
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
D	4	4	3	5	**350 ~ 500**
	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	
TALEP	**300 ~ 400**	**450 ~ 550**	**500 ~ 600**	**350 ~ 450**	**1600 ~ 1950**
					1600 ~ 2000

Kapasitelerin ve taleplerin minimum olduğu durumda, kapasiteler talepleri tamamı ile karşılamaktadır. Fakat kapasiteler ve talepler minimum düzeyden farklı bir değer aldığında talepler, kapasiteleri aşmaktadır bu nedenle modelin çözümü için eşitlikler değişecektir.

$$\begin{aligned} Z_{min} = {} & 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} \\ & + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} \\ & + 5X_{44} \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:
$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 400 + 100(\theta)$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 350 + 50(\theta)$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 500 + 50(\theta)$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 350 + 150(\theta)$

Talep Kısıtı:
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 300 + 100(\theta)$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 450 + 100(\theta)$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 500 + 100(\theta)$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 350 + 100(\theta)$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

$\theta \in [0,1]$

Yukarıdaki model toplam kapasitenin, toplam talepten büyük veya eşit olduğu durumlar için geçerlidir. Ancak θ' nın 0 ile 1 arasındaki her değeri için bu durum geçerli olmayacaktır. Toplam kapasitenin, toplam talebe eşit olduğu θ değeri toplam kapasitenin toplam talebe eşitlenmesi ile aşağıdaki şekilde hesaplanmalıdır.
$Toplam\ Kapasite\ =\ Toplam\ Talep$

$1600\ + 350\,\theta\ =\ 1600\ +\ 400\,\theta$

$50\,\theta = 0$

$\theta = 0$

$\theta = 0$, olduğu durumda toplam kapasite, toplam talebe eşittir. $\theta > 0$ olduğu durumlarda toplam talebin, toplam kapasiteden büyük olacaktır. Bu durumda kapasite kısıtlarındaki ≤ işaretleri =, talep kısıtlarındaki = işaretleri ≤ şekline dönüşecektir. Model $0 < \theta \leq 1$ aralığında aşağıdaki şeklini alacaktır.

Verdegay yaklaşımında da değinildiği gibi bu tür bir doğrusal programlama modelinin çözümünde bulanık kısıtlayıcılar için uygun üyelik fonksiyonlarının yazılması gerekir. Bu yaklaşıma göre amaç fonksiyonunda herhangi bir bulanıklık söz konusu olmadığı için üyelik fonksiyonunun yazılmasına gerek yoktur.

Kısıtlayıcılar için üyelik fonksiyonu belirlendikten sonra kısıtlayıcıların λ kesimlerinin bulunması gerekmektedir.

Bu örnekte karar verici kısıtlayıcılar için belirlediği toleranslar değerleri sırası ile 100, 50, 50, 150, 100, 100, 100, 100 birim olarak belirlemiştir. Bu duruma göre oluşan üyelik fonksiyonları şöyledir:

$$\mu_1 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) < 400 \\ 1 - \frac{(X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14})-400}{100}, & 400 \leq (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) \leq 500 \\ 0, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 1, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) - 350}{50}, & 350 \leq (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) \leq 400 \\ 0, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) > 400 \end{cases}$$

$$\mu_3 = \begin{cases} 1, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) < 500 \\ 1 - \dfrac{(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) - 500}{50}, & 500 \leq (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) \leq 550 \\ 0, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) > 550 \end{cases}$$

$$\mu_4 = \begin{cases} 1, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) - 400}{150}, & 350 \leq (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) \leq 500 \\ 0, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_5 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) > 400 \\ 1 - \dfrac{400 - (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41})}{100}, & 300 \leq (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) \leq 400 \\ 0, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) < 300 \end{cases}$$

$$\mu_6 = \begin{cases} 1, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) > 550 \\ 1 - \dfrac{550 - (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42})}{100}, & 450 \leq (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) \leq 550 \\ 0, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) < 450 \end{cases}$$

$$\mu_7 = \begin{cases} 1, & (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) > 600 \\ 1 - \dfrac{600 - (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43})}{100}, & 500 \leq (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) \leq 600 \\ 0, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) < 500 \end{cases}$$

$$\mu_8 = \begin{cases} 1, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) > 450 \\ 1 - \dfrac{450 - (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44})}{100}, & 350 \leq (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) \leq 450 \\ 0, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) < 350 \end{cases}$$

Üyelik fonksiyonları oluşturulduktan sonra kısıtlayıcılara ait λ kesimleri bulunarak model, bulanık doğrusal programlamadan parametrik doğrusal programlama dönüşmüş olacaktır.

$$Z_{\min} = 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44}$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400 + 100(\theta)$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 350 + 50(\theta)$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 500 + 50(\theta)$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 350 + 150(\theta)$$

Talep Kısıtı:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 300 + 100(\theta)$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 450 + 100(\theta)$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 500 + 100(\theta)$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} \leq 350 + 100(\theta)$$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama Kısıtı

$0 \leq \theta \leq 1$

Model, Verdegay yaklaşımına göre θ parametresine bağlı olarak parametrik doğrusal programlama problemine dönüşmüştür. Her θ değeri için model çözülerek sonuçlar tablo 5.8.'de verilmiştir.

Tablo 5.8. Verdegay yaklaşımı için çözüm sonuçları

θ	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Z	5150.000	5265.000	5380.000	5495.000	5610.000	5725.000	5840.000	5955.000	6070.000	6185.000	6300.000
X11	300.0000	310.0000	320.0000	330.0000	340.0000	350.0000	360.0000	370.0000	380.0000	390.0000	400.0000
X12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X13	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
X14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X22	100.0000	355.0000	360.0000	365.0000	370.0000	375.0000	380.0000	385.0000	390.0000	395.0000	400.0000
X23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X24	250.0000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X32	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X33	400.0000	145.0000	140.0000	135.0000	130.0000	125.0000	120.0000	115.0000	110.0000	105.0000	100.0000
X34	100.0000	360.0000	370.0000	380.0000	390.0000	400.0000	410.0000	420.0000	430.0000	440.0000	450.0000
X41	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X42	350.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
X43	0.000000	265.0000	280.0000	295.0000	310.0000	325.0000	340.0000	355.0000	370.0000	385.0000	400.0000
X44	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Karar verici, gösterebileceği toleransları, göz önüne alarak çözümler arasından kendine en uygun olan alternatifi seçecektir.

Bu çözümde belirsizlik θ parametresi ile modellenmiştir. Kapasite kısıtları için minimum kapasiteler normal üretim kapasitesi olarak düşünüldüğünde θ fazla çalışmalar ile üretilebilecek fazla üretim kapasitesi olarak düşünülebilir. Talep kısıtları için minimum talepler normal talep miktarları olarak düşünüldüğünde θ, talep artışına neden olabilecek etkenleri temsil eden bir parametre olarak modelde yerini alır. Başka bir deyişle bu modelde talep ve kapasitedeki belirsizlikler tek bir parametre ile temsil edilmiştir. Bu durum gerçeği tam olarak yansıtmamaktadır. Talep belirsizliği ile kapasite belirsizliği ayrı ayrı parametreler kullanılarak modellenmelidir.

Talepteki belirsizlik β olarak modele eklendiğinde aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} Z_{min} = \; & 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} \\ & + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} \\ & + 5X_{44} \end{aligned}$$

Kapasite Kısıdı:
$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 400 + 100(\theta)$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 350 + 50(\theta)$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 500 + 50(\theta)$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 350 + 150(\theta)$

Talep Kısıdı:
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 300 + 100(\beta)$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 450 + 100(\beta)$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 500 + 100(\beta)$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 350 + 100(\beta)$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama Kısıdı

$0 \leq \theta \leq 1$

$0 \leq \beta \leq 1$

Tablo 5.9. Kapasite ve talepteki bulanıkları farklı parametrelerle ifade eden bulanık ulaştırma modelinin Verdegay yaklaşımı ile çözüm sonuçları

β	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**7/8**	**0.9**	**1**
θ	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
Z	5000.000	5150.000	5300.000	5450.000	5600.000	5750.000	5900.000	6050.000	6200.000	5063.000	5060.000	5050.000
X11	300.0000	310.0000	320.0000	330.0000	340.0000	350.0000	360.0000	370.0000	380.0000	387.0000	390.0000	400.0000
X12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X13	200.0000	190.0000	180.0000	170.0000	160.0000	150.0000	140.0000	130.0000	120.0000	13.00000	10.00000	0.000000
X14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X22	300.0000	270.0000	240.0000	210.0000	180.0000	150.0000	120.0000	90.00000	60.00000	350.0000	350.0000	350.0000
X23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X24	100.0000	130.0000	160.0000	190.0000	220.0000	250.0000	280.0000	310.0000	340.0000	0.000000	0.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X32	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X33	300.0000	320.0000	340.0000	360.0000	380.0000	400.0000	420.0000	440.0000	460.0000	224.0000	230.0000	250.0000
X34	250.0000	230.0000	210.0000	190.0000	170.0000	150.0000	130.0000	110.0000	90.00000	276.0000	270.0000	250.0000
X41	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X42	150.0000	190.0000	230.0000	270.0000	310.0000	350.0000	390.0000	430.0000	470.0000	0.000000	0.000000	0.000000
X43	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	350.0000	350.0000	350.0000
X44	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabloda da görüldüğü gibi, talep fonksiyonuna ait üyelik derecesi (β), $[0,1]$ aralığında değişik değerler alabilmektedir. Üyelik derecesi 0 ile $^7/_8 = 0{,}875$ değeri arasında herhangi bir değer aldığında toplam talep toplam kapasiteden daha küçüktür. Bu neden ile kapasite kısıtlarındaki eşitsizlik ($\leq$), talep kısıtlarındaki ise ($=$) olacaktır. Talep fonksiyonuna ait üyelik derecesi (β), $^7/_8 = 0{,}875$ ile 1 arasında bir değer aldığında ise toplam talep, toplam kapasiteden büyük olduğundan talep kısıtındaki eşitsizlik ($\leq$), kapasite kısıtları ise ($=$) olacaktır. Bunun sonucunda talep kısıtına ait üyelik derecesi (β), $^7/_8 = 0{,}875$ ile 1 arasında değer alırsa üretim merkezleri, talebi tam olarak karşılayamadığı ve kapasitelerini daha da arttıramadığı için maliyetler düşmüştür.

Örnek 5;

Wernes yaklaşımına göre, amaç fonksiyonunun ve bu fonksiyonlara ait belirsizlik değerlerinin karar verici tarafından önceden belirlemesine karşı çıkmıştır. Çünkü karar vericinin bu değerler için vereceği yüksek veya düşük değerler modelin çözümünün gerçeklikten uzaklaştıracağını savunur. Werners amaç fonksiyonunu değerini modele ait kısıtlayıcıların en alt ve en üst limit seviyelerin baz alındığı klasik doğrusal programlama modellerinin çözümüne göre belirler ve bu değerleri üyelik fonksiyonları yardımı ile bulanık doğrusal programlama modeline aktarır. Bu duruma göre aynı problemin Werners yaklaşımı ile çözümü aşağıdaki gibidir.

Öncelikle $Z_0\ ve\ Z_1$ değerleri klasik doğrusal programlama modeli ile çözülür.

$$\begin{aligned} Min\ Z_0 = {} & 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} \\ & + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} \\ & + 5X_{44} \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 400$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 350$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 500$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 350$$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 300$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 450$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 500$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 350$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama Kısıtı

$0 \leq \theta \leq 1$

Lingo 14.0 programı ile model çözülmüş Z_0= 5150 TL bulunmuştur.

$$Min\, Z_1 = 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 350$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 500$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 350$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 300$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 450$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 500$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} \leq 350$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama Kısıtı

$0 \leq \theta \leq 1$

Lingo 14.0 programı ile model çözülmüş Z_1=6300TL bulunmuştur.

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılar için belirlenen üyelik fonksiyonları aşağıda verilmektedir.

$$\mu_0 = \begin{cases} 1, & C^T X < 5150 \\ 1 - \dfrac{C^T X - 5150}{1150}, & 5150 \leq C^T X \leq 6300 \\ 0, & C^T X > 6300 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) < 400 \\ 1 - \dfrac{(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) - 400}{100} & , \ 400 \le (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) \le 500 \\ 0, & (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 1, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) - 350}{50} & , \ 350 \le (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) \le 400 \\ 0, & (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) > 400 \end{cases}$$

$$\mu_3 = \begin{cases} 1, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) < 500 \\ 1 - \dfrac{(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) - 500}{50} & , \ 500 \le (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) \le 550 \\ 0, & (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) > 550 \end{cases}$$

$$\mu_4 = \begin{cases} 1, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) < 350 \\ 1 - \dfrac{(X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) - 400}{150} & , \ 350 \le (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) \le 500 \\ 0, & (X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) > 500 \end{cases}$$

$$\mu_5 = \begin{cases} 1, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) > 400 \\ 1 - \dfrac{400 - (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41})}{100} & , \ 300 \le (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) \le 400 \\ 0, & (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) < 300 \end{cases}$$

$$\mu_6 = \begin{cases} 1, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) > 550 \\ 1 - \dfrac{550 - (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42})}{100} & , \ 450 \le (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) \le 550 \\ 0, & (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) < 450 \end{cases}$$

$$\mu_7 = \begin{cases} 1, & (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) > 600 \\ 1 - \dfrac{600 - (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43})}{100} & , \ 500 \le (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) \le 600 \\ 0, & (X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}) < 500 \end{cases}$$

$$\mu_8 = \begin{cases} 1, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) > 450 \\ 1 - \dfrac{450 - (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44})}{100} & , \ 350 \le (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) \le 450 \\ 0, & (X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44}) > 350 \end{cases}$$

Bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılar için üyelik fonksiyonları düzenlendikten sonra Werners'in yaklaşımına göre çözülecek model aşağıdaki şeklini alır.

$$Z = \lambda \rightarrow \text{Minimum}$$

$$\begin{aligned} 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} \\ + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44} \\ - 1150\lambda \le 5150 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 500 - 100\lambda$$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 400 - 50\lambda$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 550 - 50\lambda$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 500 - 150\lambda$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} <= 400 - 100\lambda$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} <= 550 - 100\lambda$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} <= 600 - 100\lambda$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} <= 450 - 100\lambda$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

Lingo 14.0 programı ile modelin çözüm sonuçları tablo 5.10.'da verilmiştir.

Tablo 5.10. Werners yaklaşımına göre modelin çözüm sonuçları

Fabrika/TALEP	**X**	**Y**	**Z**	**W**	**KAPASİTE**
A	$X_{11} = 350$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 100$	$X_{14} = 0$	**450**
B	$X_{21} = 0$	$X_{22} = 375$	$X_{23} = 0$	X24 = 0	**375**
C	$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 150$	$X_{34} = 375$	**525**
D	$X_{41} = 0$	$X_{42} = 125$	$X_{43} = 300$	$X_{44} = 0$	**425**
TALEP	**350**	**500**	**550**	**375**	**1775** **1775**

Bu durumda kısıtlayıcılara ait olan üyelik fonksiyonu değeri $\lambda = 0{,}5$ amaç fonksiyonunun minimum değeri $Minimum\ Z = 5725\ TL$ olarak belirlemiştir.

5.1.3 Amaç Fonksiyonu Parametreleri Bulanık Olan Ulaştırma Problemi Modeli

Bir ulaştırma modeli n adet tedarik merkezi, m adet talep merkezinden oluşur ve S_i üreticinin kapasitesini, D_j talep edilen ürün miktarını, c_{ij} ise i. üretim merkezinden j. talep merkezine doğru gönderilen bir birim ürün için oluşan taşıma maliyetlerini, x_{ij}, i. fabrikadan j. talep merkezine gönderilen ürün miktarını gösterir.

Amaç fonksiyonu olan ulaştırma probleminin modeli aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{Z} = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$x_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

Verdegay amaç fonksiyonun bulanık olan doğrusal programlama modellerinin çözümü için yöntem sunmuştur.

Örnek 6;

Bu bölümde ele alınan örneği bu yaklaşım için çözmek için X_{22}, yani 2. Fabrikadan 2. Talep merkezine bir birim ürün gönderme maliyeti $[3, 5]$TL kapalı aralığında değiştiği varsayımı altında çözülmüştür. Bu duruma göre oluşan BDP problemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} Z_{min} = {} & 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + \tilde{3}X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} \\ & + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} \\ & + 5X_{44} \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 350$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 500$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 350$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 300$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 450$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 500$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} \leq 350$

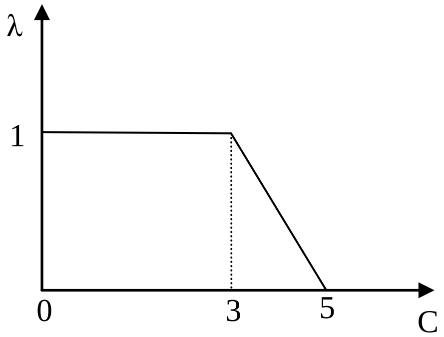
$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

$1 - \frac{C-3}{2} \leq 1 - \lambda$ Kat sayı Kısıtı

Kısıtlar;

Modelde C katsayısı bulanık olduğu için bu katsayının BDP modeline dahil olabilmesi için üyelik fonksiyon değerlerinin belirlenmesi gerekir.

$$\mu(C) = \begin{cases} 1, & C < 3 \\ 1 - \dfrac{C-3}{2}, & 3 \leq C < 5 \\ 0, & C \geq 5 \end{cases}$$



Şekil 5.2. “C” Birim maliyeti için üyelik fonksiyonu

C katsayısı için yapılan üyelik fonksiyonu dönüşümü yapıldıktan sonra bulanık doğrusal programlama modeli aşağıdaki şeklini alır.

$$Z_{min} = 3X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 5X_{14} + 4X_{21} + 3 + 2(1-\lambda)X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 5X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 4X_{41} + 4X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 500$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 400$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 550$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 500$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} <= 300$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} <= 450$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} <= 500$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} <= 350$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

$0 \leq \lambda \leq 1$

C katsayısına ait üyelik derecesine $[0, 1]$ kapalı aralığında çeşitli değerler verilmiştir. Bu aşamadan sonra karar verici uygun olan tolerans değerini belirleyerek kendisi için doğru olan tercihi yapacaktır.

Tablo 5.11. Amaç fonksiyonu bulanık olan ulaştırma modelinin Verdegay yaklaşımı ile çözüm sonuçları

λ	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Z	5250.000	5250.000	5250.000	5250.000	5250.000	5250.000	5230.000	5210.000	5190.000	5170.000	5150.000
X11	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000
X12	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
X14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X22	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	350.0000
X23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X24	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	250.0000	250.0000	250.0000	250.0000	0.000000
X31	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X32	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X33	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	150.0000
X34	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	350.0000
X41	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X42	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	350.0000	100.0000
X43	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	250.0000
X44	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabloda da görüldüğü üzere X_{22} yani 2. Fabrikadan 2. talep merkezine doğru yapılacak ürün sevkiyatının birim maliyeti $[4-5TL]$kapalı aralığında modele herhangi bir etkisi bulunmaktadır ancak birim taşıma maliyeti $[3-4TL)$ aralığında iken 2. merkezden 2. talep noktasına ürün gönderimi yapıldığı görülmektedir. Bu durum, maliyetlerde azalmaya neden olmuştur.

5.1.4 Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Ulaştırma Problemi Modeli

Bir ulaştırma modeli n adet tedarik merkezi, m adet talep merkezinden oluşur ve S_i üreticinin kapasitesini, D_j talep edilen ürün miktarını, c_{ij} ise i. üretim merkezinden j. talep merkezine doğru gönderilen bir birim ürün için oluşan taşıma maliyetlerini, x_{ij}, i. fabrikadan j. talep merkezine gönderilen ürün miktarını, A, kısıtlayıcılarda bulunan değişkenlerin parametre değerlerini gösterir.

Kısıtlayıcıları ve teknoloji katsayıları bulanık olan ulaştırma probleminin modeli aşağıdaki gibidir:

$$Z = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{A} x_{ij} \leq \tilde{S}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Pozitif Olma Kısıtı}$$

Örnek 6'daki modelin talep ve kapasite kısıtı bulanıklaştırıldıktan sonra aynı bu yöntem ile çözülebilir.

5.2 BULANIK TESİS YERİ VE KAPASİTE ATAMA MODELİ

Klasik bir kapasite atama modelinde, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını gösteriyor ise kapasite atama modeli:

$$\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m \qquad \text{Talep Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq S_i y_i \quad i = 1, \dots, n \qquad \text{Kapasite Kısıtı}$$

Fabrikalara kapasite atama kısıtı:

$$\begin{cases} y_i = 1 \text{ ise i. fabrikada üretim yapılmaktadır} \\ y_i = 0 \text{ ise i. fabrikada üretim gerçekleştirilmez} \end{cases}$$

Örnek 7:

Bir firmanın tedarik yönetimden sorumlu personel veya personelleri, Türkiye'deki talebini dört bölgeye ayırmıştır. 1. Bölge, 2. Bölge, 3. Bölge, 4. Bölge ve toplanan veriler Tablo 5.12.'de verilmiştir.

Tablo 5.12. Tesis yeri ve kapasite atama modeli için ulaştırma tablosu

BÖLGE	**EGE**	**MARMARA**	**KARADENİZ**	**AKDENİZ**	**SABİT MALİYET**	**DÜŞÜK KAPASİTE**	**SABİT MALİYET**	**YÜKSEK KAPASİTE**
EGE	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	**4000**	**500**	**6000**	**1000**
	32	36	41	40				
MARMARA	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	**5000**	**500**	**6250**	**1000**
	28	33	38	44				
KARADENİZ	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	**3900**	**500**	**5800**	**1000**
	27	31	29	34				
AKDENİZ	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	**4200**	**500**	**5000**	**1000**
	23	25	37	48				
TALEP	**500**	**575**	**400**	**600**				

Bu firma iki çeşit fabrika kapasitesi üzerinde durmaktadır. Düşük kapasiteye sahip fabrikalar ayda 500 adet, yüksek kapasiteye sahip fabrikalar ise ayda 1000 adet ürün üretecektir. Tüm sabit maliyetler tek bir aylıktır ve TL cinsinden hesaba dahil olmuştur. Amaç en düşük maliyetli ağın bulunması istenmektedir. Bu nedenle kullanılan model kapasite atama modelidir. Modeldeki A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 katsayıları, değişik bölgelerdeki fabrikaların hangi kapasite çalışması gerektiğini göstermek için y_i kısıtının yerine kullanılmıştır. A katsayısı Ege fabrikasını, B katsayısı Akdeniz fabrikasını, C katsayısı Karadeniz fabrikasını, D katsayısı Marmara fabrikasını temsil etmektedir. A_1, B_1, C_1, D_1 fabrikaların düşük kapasitede çalıştığını ve A_2, B_2, C_2, D_2 ise fabrikaların yüksek kapasitede çalıştığını ifade eder. Bu durumlara göre oluşan klasik model:

$$\begin{aligned} Z_{min} = 32X_{11} &+ 36X_{12} + 41X_{13} + 40X_{14} + 28X_{21} + 33X_{22+}38X_{23} + 44X_{24} \\ &+ 27X_{31} + 31X_{32} + 29X_{33} + 34X_{34} + 23X_{41} + 25X_{42} + 37X_{43} \\ &+ 48X_{44} + 4000A_1 + 6000A_2 + 5000B_1 + 6250B_2 + 3900C_1 \\ &+ 5800C_2 + 4200D_1 + 5000D_2 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \le 500A_1 + 1000A_2$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \le 500B_1 + 1000B_2$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \le 500C_1 + 1000C_2$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \le 500D_1 + 1000D_2$$

Talep Kısıtı:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 500$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 575$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 400$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 600$$

Fabrikaların hangi kapasitede nasıl çalışması gerektiği kısıtı:

$A_1 + A_2 = 1$ ise Ege fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$A_1 + A_2 = 0$ ise Ege fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$B_1 + B_2 = 1$ ise Akdeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$B_1 + B_2 = 0$ ise Akdeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$C_1 + C_2 = 1$ ise Karadeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$C_1 + C_2 = 0$ ise Karadeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$D_1 + D_2 = 1$ ise Marmara fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$D_1 + D_2 = 0$ ise Marmara fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.

Fabrikaların düşük veya yüksek kapasite çalışma kısıtı:

$A_1 + A_2 \leq 1 \rightarrow (A_1, A_2) \in \{0, 1\}$

$B_1 + B_2 \leq 1 \rightarrow (B_1, B_2) \in \{0, 1\}$

$C_1 + C_2 \leq 1 \rightarrow (C_1, C_2) \in \{0, 1\}$

$D_1 + D_2 \leq 1 \rightarrow (D_1, D_2) \in \{0, 1\}$

Klasik modelin Lingo 14.0 programı ile en uygun çözümü denklem $Z_{min} = 73350\,TL$ hesaplanmıştır. Modelin diğer parametreleri tablo 5.13.'de verilmiştir.

Tablo 5.13. Tesis yeri ve kapasite atama modeli için çözüm sonuçları

BÖLGE	EGE	AKDENİZ	KARADENİZ	MARMARA	KAPASİTE
EGE	$X_{11} = 75$	X_{12}	X_{13}	X_{14}	$A_1 = 1$
	32	36	41	40	$A_2 = 0$
AKDENİZ	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	$B_1 = 0$
	28	33	38	44	$B_2 = 0$
KARADENİZ	X_{31}	X_{32}	$X_{33} = 400$	$X_{34} = 600$	$C_1 = 0$
	27	31	29	34	$C_2 = 1$
MARMARA	$X_{41} = 425$	$X_{42} = 575$	X_{43}	X_{44}	$D_1 = 0$
	23	25	37	48	$D_2 = 1$
TALEP	500	575	400	600	

Tablo 5. 13.'de görüldüğü üzere Ege fabrikası için kullanılan A_1 katsayısı 1'e eşit olduğu için düşük kapasitede üretim yapmakta ve sabit maliyetlere katlanmaktadır. B_1 ve B_2 katsayıları 0' a eşit olduğundan Akdeniz fabrikası üretim yapmamaktadır. Sadece sabit maliyetlere katlanmaktadır. C_2 katsayısı 1'e eşit olduğu için Karadeniz fabrikası yüksek kapasitede üretim yapmakta ve sabit maliyetlere katlanmaktadır. D_2 katsayısı 1'e eşit olduğu için Marmara fabrikası yüksek kapasitede üretim yapmakta ve sabit maliyetlere katlanmaktadır.

Günlük yaşamın belirsiz koşulları modeldeki değişkenlerin ve sabitlerin de bulanıklığa yol açabilir. Böyle durumlar söz konusu olduğunda meydana gelen kapasite atama modelleri, aşağıdaki gibi modellenebilir.

5.2.1 Kısıtları Bulanık Olan Kapasite Atama Problemi Modeli

Bu modelde parametreler, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını gösteriyor ise kısıtları bulanık olan BDP kapasite atama modeli:

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \widetilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

Fabrikaların kapasite atama kısıtı:

$$\begin{cases} y_i = 1 \text{ ise i. fabrikada üretim yapılmaktadır} \\ y_i = 0 \text{ ise i. fabrikada üretim gerçekleştirilmez} \end{cases}$$

Aynı örneğin kapasite kısıtında bazı faktörlerin üretim sürecine dahil olması nedeni ile artışların olacağı varsayılmış ve bu artışların düşük kapasitede 50 birim yüksek kapasitede ise 100 birim olarak sınırlanmıştır. Bulanıklaşan modeli Verdegay yaklaşımı ile çözersek model aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$\begin{aligned} Z_{\min} = {} & 32X_{11} + 36X_{12} + 41X_{13} + 40X_{14} + 28X_{21} + 33X_{22} + 38X_{23} + 44X_{24} \\ & + 27X_{31} + 31X_{32} + 29X_{33} + 34X_{34} + 23X_{41} + 25X_{42} + 37X_{43} \\ & + 48X_{44} + 4000A_1 + 6000A_2 + 5000B_1 + 6250B_2 + 3900C_1 \\ & + 5800C_2 + 4200D_1 + 5000D_2 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq (500+50\theta)A_1 + (1000 + 100\theta)A_2$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq (500 + 50\theta)B_1 + (1000 + 100\theta)B_2$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq (500 + 50\theta)C_1 + (1000 + 100\theta)C_2$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq (500 + 50\theta)D_1 + (1000 + 100\theta)D_2$$

Talep Kısıtı:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 500$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 575$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 400$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 600$$

Fabrikaların hangi kapasitede nasıl çalışması gerektiği kısıtı:

$\mathrm{A_1 + A_2 = 1}$	ise Ege fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$\mathrm{A_1 + A_2 = 0}$	ise Ege fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$\mathrm{B_1 + B_2 = 1}$	ise Akdeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$\mathrm{B_1 + B_2 = 0}$	ise Akdeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$\mathrm{C_1 + C_2 = 1}$	ise Karadeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$\mathrm{C_1 + C_2 = 0}$	ise Karadeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$\mathrm{D_1 + D_2 = 1}$	ise Marmara fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$\mathrm{D_1 + D_2 = 0}$	ise Marmara fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.

Fabrikaların düşük veya yüksek kapasite çalışma kısıtı:

$\mathrm{A_1 + A_2 \leq 1 \rightarrow (A_1, A_2) \in \{0, 1\}}$

$B_1 + \mathrm{B_2 \leq 1 \rightarrow (B_1, B_2) \in \{0, 1\}}$

$\mathrm{C_1 + C_2 \leq 1 \rightarrow (C_1, C_2) \in \{0, 1\}}$

$\mathrm{D_1 + D_2 \leq 1 \rightarrow (D_1, D_2) \in \{0, 1\}}$

$\theta \in [0,1]$

Doğrusal programlama modeli kapasite kısıtına verilen toleranslar modele dahil edilmediğinde çözüm, $X_{11} = 75, X_{33} = 400, X_{34} = 600, X_{41} = 425, X_{42} = 575, \mathrm{Z} = 73350\mathrm{TL}$ olarak bulunmaktadır. Modele θ parametresi eklenerek parametrik programlama problemine dönüştürüldüğünde ise tablo da gösterildiği gibi θ'nın $[0, 1]$ kapalı aralığında alacağı değerlere göre oluşan farklı sonuçlar verilmiştir.

Tablo 5.14. Parametrik modele dönüşmüş modelin $\boldsymbol{\theta}$ parametersine göre oluşan sonuçlar

θ	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Z	73350.00	73210.00	73070.00	72930.00	68815.00	68775.00	68735.00	68695.00	68675.00	68675.00	68675.00
$\mathbf{X_{11}}$	75.00000	55.00000	35.00000	15.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{12}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{13}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{14}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{21}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{22}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{23}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{24}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{31}}$	0.000000	10.00000	20.00000	30.00000	35.00000	25.00000	15.00000	5.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{32}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{33}}$	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000
$\mathbf{X_{34}}$	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000
$\mathbf{X_{41}}$	425.0000	435.0000	445.0000	455.0000	465.0000	475.0000	485.0000	495.0000	500.0000	500.0000	500.0000
$\mathbf{X_{42}}$	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000
$\mathbf{X_{43}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{X_{44}}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{A_1}$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{A_2}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{B_1}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{B_2}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{C_1}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{C_2}$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$\mathbf{D_1}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\mathbf{D_2}$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Klasik çözümde Ege fabrikası düşük kapasitede Karadeniz ve Marmara fabrikası ise yüksek kapasitede çalışarak bütün bölgelerin toplam talebini karşılamaktadır. Kapasitedeki belirsizlikler modele dahil edildikten sonra bazı değişimler söz konusu olmuştur. Tabloda görüldüğü üzere θ = 0,4 değerini aldığında Ege fabrikasına ihtiyaç duyulmadan toplam talep karşılandığı için Ege fabrikasının faaliyetleri durdurulmuştur. Bu durum, firma için maliyetleri düşürücü bir etki yaratmıştır.

5.2.2 Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Kapasite Atama Modeli

Bu modelde parametreler, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını gösteriyor ise amaç fonksiyonu bulanık olan BDP kapasite atama problemi:

$$\tilde{Z} = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq S_i y_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

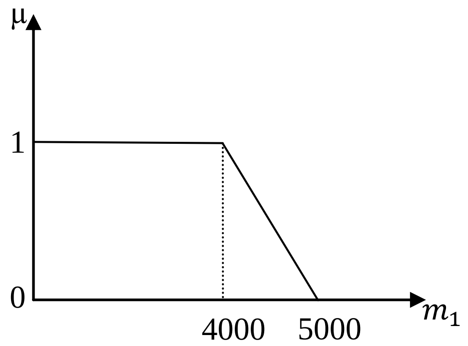
Fabrikalara kapasite atama kısıtı:

$$\begin{cases} y_i = 1 \text{ ise i. fabrikada üretim yapılmaktadır.} \\ y_i = 0 \text{ ise i. fabrikada üretim gerçekleştirilmez.} \end{cases}$$

Aynı örneği bu modele göre uyarlarsak aşağıdaki şeklini alır. Modelde sabit maliyetler, değişen koşullara karşı $(4000 - 5000,\ 6000 - 7000,\ 5000 - 6000,\ 6250 - 7250,\ 3900 - 4900,\ 5800 - 6800,\ 4200 - 5200,\ 5000 - 6000\ TL)$ aralığında değiştiği varsayılmıştır. Bu varsayımlar doğrultusunda aşağıda işletmenin toplam maliyetini minimum yapacak olan BDP problemini Verdegay'ın geliştirdiği amaç fonksiyonu parametreleri bulanık olan doğrusal programlama problemleri için geliştirdiği yaklaşım ile çözümü verilmiştir. Öncelikle maliyetteki bulanıklıklara ait üyelik fonksiyonları verilerek çözüme başlanmıştır.

$$\mu_{(c_1)} = \begin{cases} 1, & m_1 \leq 4000 \\ 1 - \dfrac{m_1 - 4000}{1000}, & 4000 < m_1 < 5000 \\ 0, & m_1 \geq 5000 \end{cases}$$

Diğer maliyetlere ait üyelik fonksiyonları da aynı yöntemle yazılmıştır.



Şekil 5.3. $\boldsymbol{m_1}$ Maliyetine ait üyelik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \text{Z Minimum} = {} & 32X_{11} + 36X_{12} + 41X_{13} + 40X_{14} + 28X_{21} + 33X_{22} + 38X_{23} \\ & + 44X_{24} + 27X_{31} + 31X_{32} + 29X_{33} + 34X_{34} + 23X_{41} + 25X_{42} \\ & + 37X_{43} + 48X_{44} + (4000 + 1000(1-\lambda))A_1 \\ & + (6000 + 1000(1-\lambda))A_2 + (5000 + 1000(1-\lambda))B_1 \\ & + (6250 + 1000(1-\lambda))B_2 + (3900 + 1000(1-\lambda))C_1 \\ & + (5800 + 1000(1-\lambda))C_2 + (4200 + 1000(1-\lambda))D_1 \\ & + (5000 + 1000(1-\lambda))D_2 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 500A_1 + 1000A_2$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 500B_1 + 1000B_2$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 500C_1 + 1000C_2$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 500D_1 + 1000D_2$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 500$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 575$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 400$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 600$

Fabrikaların düşük veya yüksek kapasite çalışma kısıtı:
$A_1 + A_2 \leq 1 \rightarrow (A_1, A_2) \in \{0, 1\}$

$B_1 + B_2 \leq 1 \rightarrow (B_1, B_2) \in \{0, 1\}$

$C_1 + C_2 \leq 1 \rightarrow (C_1, C_2) \in \{0, 1\}$

$D_1 + D_2 \leq 1 \rightarrow (D_1, D_2) \in \{0, 1\}$

Fabrikaların hangi kapasitede nasıl çalışması gerektiği kısıtı:
$A_1 + A_2 = 1$ ise Ege fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$A_1 + A_2 = 0$ ise Ege fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$B_1 + B_2 = 1$ ise Akdeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$B_1 + B_2 = 0$ ise Akdeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$C_1 + C_2 = 1$ ise Karadeniz fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$C_1 + C_2 = 0$ ise Karadeniz fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.
$D_1 + D_2 = 1$ ise Marmara fabrikası açık ve üretim gerçekleştirmektedir.
$D_1 + D_2 = 0$ ise Marmara fabrikası açık ama üretim gerçekleşmemektedir.

$\lambda \in [0, 1]$

Model Lingo 14.0 programı ile çözülmüştür ve elde edilen veriler Tablo 5.15.’de detaylı bir şekilde sunulmuştur.

Tablo 5.15. Parametrik modelin çözüm sonuçları

λ	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Z	76350.00	76050.00	75750.00	75450.00	75150.00	74850.00	74550.00	74250.00	73950.00	73650.00	73350.00
X_{11}	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000
X_{12}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{13}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{14}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{21}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{22}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{23}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{24}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{31}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{32}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{33}	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000
X_{34}	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000	600.0000
X_{41}	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000	425.0000
X_{42}	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000	575.0000
X_{43}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
X_{44}	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
A_1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
A_2	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
B_1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
B_2	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
C_1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
C_2	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
D_1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
D_2	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000

Görüldüğü üzere sabit giderlerdeki belirsizlikler maliyetleri arttırabilmektedir. Karar mekanizması, maliyet analizi yaparken belirsizlikleri dikkate almalı buna göre doğru pozisyonlar alarak firmasına avantaj sağlamalıdır.

5.2.3 Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Kapasite Atama Problemi

Bu modelde parametreler, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını, A: kısıtlara ait değişkenlerin parametre değerini gösteriyor ise sağ taraf sabitleri ve teknoloji katsayıları bulanık olan BDP kapasite atama problemi:

$$Z = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{A} x_{ij} \leq \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

Fabrikalara kapasite atama kısıtı:

$$\begin{cases} y_i = 1 \text{ ise i. fabrikada üretim yapılmaktadır.} \\ y_i = 0 \text{ ise i. fabrikada üretim gerçekleştirilmez.} \end{cases}$$

Kapasite atama problemi için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu yöntem içinde çözülebilir.

5.2.4 Bütün Katsayıları Bulanık Olan Kapasite Atama Problemi

Bu modelde parametreler, n aday fabrika sayısını, bu fabrikaların ürünlerine ait m adet talep noktası, D_j, j pazarı için oluşan yıllık talebi, j pazarının yıllık talebini karşılayan i fabrikasının yıllık kapasitesi S_i, i fabrikasının üretim yapmasa dahi katlanacağı sabit maliyetler f_i, üretilen ürünlerin i fabrikasından j pazarına ulaştırma maliyeti c_{ij}, i fabrikasının üretim yapıp yapmayacağını gösteren parametre ise y_i, i fabrikasından j talep merkezine veya pazarına gönderilen ürün miktarını, A: kısıtlara ait değişkenlerin parametre değerini gösteriyor ise tüm katsayıları bulanık olan BDP kapasite atama problemi:

$$\tilde{Z} = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{A} x_{ij} \leq \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = 0, 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

Kapasite atama problemi için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu yöntem içinde çözülebilir.

5.3 BULANIK YERÇEKİMİ YERLEŞİM MODELİ

Klasik bir yer çekimi yerleşim modeli aşağıdaki gibidir:

x_n, y_n: n. talep merkezinin veya tedarik merkezinin koordinatları, F_n: n. talep merkezi veya tedarik merkezinin kilometre başına düşen ulaştırma maliyeti, D_n: Tesis ile n. talep merkezi ya da tedarik merkezi arasındaki sevkiyat miktarı göstermektedir.

Seçilecek bir merkezin koordinatları (x, y) olsun. (x, y)' deki tesis ile n. talep merkezi veya tedarik merkezi arasındaki geometrik uzaklık:

$$d_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$$

Toplam ulaşım maliyeti ise;

$$TM = \left(\sum_{n=1}^{k} d_n D_n F_n\right)$$

olarak formüle edilebilir.

Yer çekimi yerleştirme modelindeki amaç: tedarik merkezlerinden hammadde temin etmek ve talep merkezlerine nihai ürünleri sevk ederken minimum ulaştırma maliyeti yaratan yeni fabrikanın coğrafi konumunu belirlemektir.

Bir yerçekimi yerleştirme modeli örneği:

İstanbul, İzmir, Adana, Erzurum'da bulunan tedarik merkezlerinden aldığı hammaddeleri Ankara'da bulunan montaj fabrikasında birleştiren ve daha sonra Van, Samsun, Bursa, Antalya pazarlarına satış yapan bir işletme artan talep dolayısıyla yeni bir montaj fabrikası kurmaya karar vermiş ve de bu doğrultuda tedarik zinciri yöneticisinden en uygun yerin bulunması istenmiştir. Aşağıdaki tabloda tedarik merkezleri, pazarlar, ulaşım maliyetlerini, talep miktarlarını ve koordinatları göstermektedir. Koordinatlar, Türkiye haritası 1 santimetrekarelik eş karelere bölünerek bulunmuştur.

Tablo 5.16. Yerçekimi yerleştirme modeli

YERÇEKİMİ YERLEŞTİRME MODELİ						
	Tedarikçiler/ Pazarlar	**YTL/TonKm F_n**	**Miktar D_n**	**Koordinatlar X_n**	**Y_n**	**d_n**
TEDARİKÇİLER	İstanbul	1,4	500	5	9	3,43
	İzmir	1,5	600	2	5	5,36
	Adana	1,3	450	12,5	3	6,29
	Erzurum	1,2	350	20	7,5	12,86
PAZARLAR	Van	1	500	23	5,5	15,84
	Samsun	0,9	650	13	9	6,39
	Bursa	0,95	625	4,5	7,5	2,91
	Antalya	0,85	575	6,5	2,5	3,92

Bu tabloya göre oluşan klasik yerçekimi modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\text{Minimum Z} = {} & 1{,}4 * 500 * \sqrt{(x-5)^2 + (y-9)^2} + 1{,}5 * 600 \\ & * \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} + 1{,}3 * 450 \\ & * \sqrt{(x-12{,}5)^2 + (y-3)^2} + 1{,}2 * 350 \\ & * \sqrt{(x-20)^2 + (y-7{,}5)^2} + 1 * 500 \\ & * \sqrt{(x-23)^2 + (y-5{,}5)^2} + 0{,}9 * 650 \\ & * \sqrt{(x-13)^2 + (y-9)^2} + 0{,}95 * 620 \\ & * \sqrt{(x-4{,}5)^2 + (y-7{,}5)^2} + 0{,}85 * 575 \\ & * \sqrt{(x-6{,}5)^2 + (y-2{,}5)^2}\end{aligned}$$

Klasik model Lingo 14.0 paket programı ile çözülmüş bulunan optimal sonuçlara göre koordinatlar (x, y) = (7.1866, 6,3583) bulunmuştur. Bu nokta Türkiye haritası üzerinde Eskişehir civarına gelmektedir. Konumu belirlenen fabrika için en uygun çözüm yöntemi bu koordinatlar olmasına rağmen bazı dış faktörlerin etkisi yüzünden işletmenin belirlenen koordinata kurulması zor olabilir. Çünkü seçilen koordinatlar Eskişehir'de bir dağın tepesi olabilir, fabrika yapımına elverişli bir boş arazi olmayabilir, ulaşım koşulları uygun olmayan bir nokta olabilir, işgücü ücretleri yüksek olabilir böyle daha birçok etken sayılabilir. Bu gibi sebeplerin varlığından dolayı alternatif merkezlerin belirlemesi ve bu noktaların seçimini karar vericiye bırakmak gerekir. Böylece model sonuçları bize daha mantıklı bilgiler sunacaktır.

Yukarıdaki örnekte oluşan minimum maliyet 31594.5 TL olarak bulunmuştur. İşletme, belirlenen koordinatın fabrika kurulumuna uygun olmaması durumunda ek olarak 3000 TL'lik ek maliyete katlanabileceği varsayımı altında bu bölgeye alternatif noktaların belirlenmesini tedarik zinciri yöneticisinden istemiştir. Bu durumda oluşan alternatif nokta koordinatları ve maliyetleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5.17. Alternatif koordinat noktaları ve maliyetleri

	MALİYET(TL)	**KOORDİNATLAR**	
AFYON	31975.73TL	X = 6,5	Y = 5,5
BİLECİK	32298.51TL	X = 5,5	Y = 7,5
BURSA	33145.46TL	X = 4,5	Y = 7,3
KONYA	31975.36TL	X = 8,5	Y = 5,5
KÜTAHYA	32131.81TL	X = 5,5	Y = 6,5
BOLU	32939.92TL	X = 8,4	Y = 8,1
ISPARTA	33193.65TL	X = 7	Y = 4

Bu örnekteki bulanıklık, çözüm sonucunda en uygun bulunan noktanın çevre şartları, üretim faktörlerine erişimi ve maliyetleri vs. gibi sebeplerden dolayı fabrika kurulmasına uygun olmayabilir. Bu nedenle işletmenin karşılayabileceği belirli bir maliyet aralığında alternatif noktalar belirlenerek bu noktalar arasından en uygun seçimin yapılması daha sağlıklı olacaktır.

5.3.1 Amaç Fonksiyonundaki Değişkenlerin Katsayılarından Ulaştırma Maliyeti Bulanık Olan Yerçekimi Yerleşim Modeli

x_n, y_n: n. talep merkezinin veya tedarik merkezinin koordinatları, F_n: n. talep merkezi veya tedarik merkezinin kilometre başına düşen ulaştırma maliyeti, D_n: Tesis ile n. talep merkezi ya da tedarik merkezi arasındaki sevkiyat miktarı göstermektedir.

Ulaştırma maliyeti günlük yaşamın bazı nedenlerinden dolayı sürekli değişim içindedir bu nedenle işletmelerin bu maliyetleri tahmin etmeleri zorlaşır. Bu nedenle bulanık modeller işletmeler için daha etkin çözümler sunar. Bulanık ulaştırma maliyetli yerçekimi yerleştirme modeli ise;

$$\mathrm{TM} = \sum_{n=1}^{k} d_n D_n \tilde{F}_n$$

şeklinde ifade edilebilir.

Yerçekimi yerleşimi modeli için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu yöntem içinde çözülebilir.

5.3.2 Amaç Fonksiyonundaki Değişkenlerin Katsayılarından Sevkiyat Miktarı Bulanık Olan Yerçekimi Yerleşim Modeli

x_n, y_n: n. talep merkezinin veya tedarik merkezinin koordinatları, F_n: n. talep merkezi veya tedarik merkezinin kilometre başına düşen ulaştırma maliyeti, D_n: Tesis ile n. talep merkezi ya da tedarik merkezi arasındaki sevkiyat miktarı göstermektedir.

Sevkiyat miktarları ani talep değişmelerine karşı sürekli bir değişiklik içerisindedir. Böyle durumlarda doğru karar vermek işletmeleri büyük bir maliyetten kurtaracaktır. Sevkiyat miktarı bulanık olan bir model ise;

$$\mathrm{TM} = \sum_{n=1}^{k} d_n \widetilde{D}_n F_n$$

Şeklinde ifade edilebilir.

Yerçekimi yerleşimi modeli için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu yöntem içinde çözülebilir.

5.3.3 Tüm Değişkenleri Bulanık Olan Yerçekimi Yerleşim Modeli

x_n, y_n: n. talep merkezinin veya tedarik merkezinin koordinatları, F_n: n. talep merkezi veya tedarik merkezinin kilometre başına düşen ulaştırma maliyeti, D_n: Tesis ile n. talep merkezi ya da tedarik merkezi arasındaki sevkiyat miktarı göstermektedir.

Tüm değişkenleri bulanık olan bir yerçekimi yerleşim modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathrm{TM} = \sum_{n=1}^{k} d_n \widetilde{D}_n \widetilde{F}_n$$

Yerçekimi yerleşimi modeli için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu yöntem içinde çözülebilir.

5.4 BULANIK AĞ OPTİMİZASYON MODELLERİ

n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j.

talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarını temsil etmektedir.

Amaç ulaştırma maliyetlerini minimize ederken farklı talep merkezlerinin isteklerini çeşitli fabrikalara atamaktır.

Klasik bir DP ile ağ optimizasyon modeli:

$$Z = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \ldots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Fabrikaların üretim faaliyetinde bulunma kısıtı:

$$\begin{cases} A = 1 \text{ ise fabrika açık ve üretim yapmaktadır.} \\ A = 0 \text{ ise fabrika açık ama üretim yapmamaktadır.} \end{cases}$$

Örnek 7;

Ayakkabı üretimi yapan bir imalatçı işletmenin İstanbul, Atina, Roma, Madrid, Paris de fabrikaları mevcuttur. Moskova, Brüksel, Lizbon, Münih, Bükreş, Amsterdam pazarlarına üretim yapmaktadır. A1, İstanbul fabrikasını, A2, Atina fabrikasını, A3, Roma fabrikasını, A4, Madrid fabrikasını, A5, Paris fabrikasının üretim faaliyetinin gerçekleştiğini veya gerçekleşmediğini göstermek için kullanılmıştır.

Tablo 5.18. Talep noktası (Bin adet başına düşen ulaştırma ve üretim maliyeti (bin $))

TEDARİK	MOSKOVA	BRÜKSEL	LİZBON	MÜNİH	BÜKREŞ	AMSTERDAM	SABİT MALİYET(f_i) Bin $	AYLIK KAPASİTE S_i(Bin adet)
İSTANBUL	1675	400	685	1630	1160	2800	7650	18
ATİNA	1460	1940	970	100	495	1200	3500	24
ROMA	1925	2400	1425	500	950	800	5000	27
MADRİD	380	1355	543	1045	665	2321	4100	22
PARİS	922	1646	700	508	311	1797	2200	31
AYLIK TALEP (Bin adet)	10	8	14	6	7	11		

$$\begin{aligned} Min\ Z = {} & 1675X_{11} + 400X_{12} + 685X_{13} + 1630X_{14} + 1160X_{15} + 2800X_{16} \\ & + 1460X_{21} + 1940X_{22} + 970X_{23} + 100X_{24} + 495X_{25} + 1200X_{26} \\ & + 1925X_{31} + 2400X_{32} + 1425X_{33} + 500X_{34} + 950X_{35} + 800X_{36} \\ & + 380X_{41} + 1355X_{42} + 543X_{43} + 1045X_{44} + 665X_{45} + 2321X_{46} \\ & + 922X_{51} + 1646X_{52} + 700X_{53} + 508X_{54} + 311X_{55} + 1797X_{56} \\ & + 7650A1 + 3500A2 + 5000A3 + 4100A4 + 2200A5 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 18A1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} \leq 24A2$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} \leq 27A3$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} \leq 22A4$

$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} + X_{56} \leq 31A5$

Talep Kısıtı:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 10$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 8$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 14$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 6$

$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 7$

$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} = 11$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

Fabrikaların üretim faaliyetinde bulunma kısıtı:

$$\begin{cases} \text{A} = 1 \text{ ise fabrika açık ve üretim yapmaktadır.} \\ \text{A} = 0 \text{ ise fabrika açık ama üretim yapmamaktadır.} \end{cases}$$

$\forall A_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\ldots,n$

Klasik doğrusal ağ optimizasyon modeli Lingo 14.0 bilgisayar paket programı ile çözülmüştür ve sonuçları Tablo 5. 19.’da verilmiştir.

Tablo 5.19. Ağ optimizasyon modeli çözüm sonuçları

	MOSKOVA		**BRÜKSEL**		**LİZBON**		**MÜNİH**		**BÜKREŞ**		**AMSTERDAM**		**SABİT MALİYET(f_i) Bin $**	**AYLIK KAPASİTE S_i(Bin adet)**
İSTANBUL	1675	0	400	8	685	2	1630	0	1160	0	2800	0	1*7650	18
ATİNA	1460	0	1940	0	970	0	100	6	495	7	1200	11	1*3500	24
ROMA	1925	0	2400	0	1425	0	500	0	950	0	800	0	0*5000	27
MADRİD	380	10	1355	0	543	12	1045	0	665	0	2321	0	1*4100	22
PARİS	922	0	1646	0	700	0	508	0	311		1797	0	0*2200	31
AYLIK TALEP (Bin adet)	10		8		14		6		7		11			

Tablodaki veriler doğrultusunda Moskova talep merkezinin ihtiyacı Madrid fabrikasından, Brüksel talep merkezinin ihtiyacı İstanbul fabrikasından, Lizbon talep merkezinin ihtiyacı İstanbul ve Madrid fabrikasından, Münih talep noktasının ihtiyaçları Atina fabrikasından, Bükreş talep merkezinin ihtiyacı Atina fabrikasından, Amsterdam talep merkezinin ihtiyacı ise yine Atina fabrikasından sağlanması sonucu hesaplanan minimum maliyet 47401 $’dır. A1, A2, A4 fabrikalarına ait katsayılar 1’e eşit olduğundan üretime açık, A3, A5 ise 0’a eşit olduğundan bu fabrikalar açık ama üretim faaliyetinde bulunmayıp sadece sabit maliyetleri üstlendiği görülmektedir.

Talep belirsizlikleri, işletmeleri belirli bir aralıkta talep belirlemeye itmiştir. Bu örnekte talep aralığı artı ve eksi %10 olarak belirlediği varsayımı altında oluşan bulanık model aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} Z_{min} = 1675\mathrm{X}_{11} + 400\mathrm{X}_{12} + 685\mathrm{X}_{13} + 1630\mathrm{X}_{14} + 1160\mathrm{X}_{15} \\ + 2800\mathrm{X}_{16} + 1460\mathrm{X}_{21} + 1940\mathrm{X}_{22} + 970\mathrm{X}_{23} \\ + 100\mathrm{X}_{24} + 495\mathrm{X}_{25} + 1200\mathrm{X}_{26} + 1925\mathrm{X}_{31} \\ + 2400\mathrm{X}_{32} + 1425\mathrm{X}_{33} + 500\mathrm{X}_{34} + 950\mathrm{X}_{35} \\ + 800\mathrm{X}_{36} + 380\mathrm{X}_{41} + 1355\mathrm{X}_{42} + 543\mathrm{X}_{43} \\ + 1045\mathrm{X}_{44} + 665\mathrm{X}_{45} + 2321\mathrm{X}_{46} + 922\mathrm{X}_{51} \\ + 1646\mathrm{X}_{52} + 700\mathrm{X}_{53} + 508\mathrm{X}_{54} + 311\mathrm{X}_{55} \\ + 1797\mathrm{X}_{56} + 7650A1 + 3500A2 + 5000A3 \\ + 4100A4 + 2200A5 \end{aligned}$$

Kapasite Kısıtı:

$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{12} + \mathrm{X}_{13} + \mathrm{X}_{14} + \mathrm{X}_{15} + \mathrm{X}_{16} \leq 18\mathrm{A1}$

$\mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{22} + \mathrm{X}_{23} + \mathrm{X}_{24} + \mathrm{X}_{25} + \mathrm{X}_{26} \leq 24\mathrm{A2}$

$\mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{32} + \mathrm{X}_{33} + \mathrm{X}_{34} + \mathrm{X}_{35} + \mathrm{X}_{36} \leq 27\mathrm{A3}$

$\mathrm{X}_{41} + \mathrm{X}_{42} + \mathrm{X}_{43} + \mathrm{X}_{44} + \mathrm{X}_{45} + \mathrm{X}_{46} \leq 22\mathrm{A4}$

$\mathrm{X}_{51} + \mathrm{X}_{52} + \mathrm{X}_{53} + \mathrm{X}_{54} + \mathrm{X}_{55} + \mathrm{X}_{56} \leq 31\mathrm{A5}$

Talep Kısıtı:

$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} + \mathrm{X}_{51} \leq 10 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{41} + \mathrm{X}_{51} \geq 10 - 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{12} + \mathrm{X}_{22} + \mathrm{X}_{32} + \mathrm{X}_{42} + \mathrm{X}_{52} \leq 8 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{12} + \mathrm{X}_{22} + \mathrm{X}_{32} + \mathrm{X}_{42} + \mathrm{X}_{52} \geq 8 - 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{13} + \mathrm{X}_{23} + \mathrm{X}_{33} + \mathrm{X}_{43} + \mathrm{X}_{53} \leq 14 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{13} + \mathrm{X}_{23} + \mathrm{X}_{33} + \mathrm{X}_{43} + \mathrm{X}_{53} \geq 14 - 1(1 + \lambda)$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} \leq 6 + 1(1 - \lambda)$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} \geq 6 - 1(1 - \lambda)$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} \leq 7 + 1(1 - \lambda)$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} \geq 7 - 1(1 - \lambda)$$

$$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} \leq 11 + 1(1 - \lambda)$$

$$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} \geq 11 - 1(1 - \lambda)$$

$\lambda \in [0,1]$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama Kısıtı

Fabrikaların üretim faaliyetinde bulunma kısıtı

$$\begin{cases} A = 1 \text{ ise fabrika açık ve üretim yapmaktadır.} \\ A = 0 \text{ ise fabrika açık ama üretim yapmamaktadır.} \end{cases}$$

Talepler için üçgen sayılar yardımıyla yazılan üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 9 \\ 1 - \dfrac{10 - x_i}{1}, & 9 < x_i < 10 \\ 1, & x_i = 10 \\ 1 - \dfrac{x_i - 10}{1}, & 10 < x_i < 11 \\ 0, & x_i \geq 11 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 7 \\ 1 - \dfrac{8 - x_i}{1}, & 7 < x_i < 8 \\ 1, & x_i = 8 \\ 1 - \dfrac{x_i - 8}{1}, & 8 < x_i < 9 \\ 0, & x_i \geq 9 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 13 \\ 1 - \dfrac{14 - x_i}{1}, & 13 < x_i < 14 \\ 1, & x_i = 14 \\ 1 - \dfrac{x_i - 14}{1}, & 14 < x_i < 15 \\ 0, & x_i \geq 15 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 5 \\ 1 - \dfrac{6 - x_i}{1}, & 5 < x_i < 6 \\ 1, & x_i = 6 \\ 1 - \dfrac{x_i - 6}{1}, & 6 < x_i < 7 \\ 0, & x_i \geq 7 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 6 \\ 1 - \dfrac{7 - x_i}{1}, & 6 < x_i < 7 \\ 1, & x_i = 7 \\ 1 - \dfrac{x_i - 7}{1}, & 7 < x_i < 8 \\ 0, & x_i \geq 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 10 \\ 1 - \dfrac{11 - x_i}{1}, & 10 < x_i < 11 \\ 1, & x_i = 11 \\ 1 - \dfrac{x_i - 11}{1}, & 11 < x_i < 12 \\ 0, & x_i \geq 12 \end{cases}$$

Tablo 5.20. Modelin λ parametresine göre aldığı sonuçlar

λ	**1**	**0.90**	**0.80**	**0.70**	**0.60**
Min (Z)	47401	47060,8	46720,6	46380,4	46020,2
Min Z_1-Z_0	0	340,2	680,4	1020,6	1380,8

Tablo 5.20. Modelin λ parametresine göre aldığı sonuçlar (devamı)

λ	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0**
Min (Z)	45700	45359,8	45019,6	44679,6	44339,2	43999
Min Z_1-Z_0	1701	2041,2	2381,4	2721,4	3061,8	3402

Model çözüm sonuçlarına bakıldığında amaç, minimizasyon olduğu için x_i aldığı değerler $(b_i - p_i \leq x_i \leq b_i)$ arasına düştüğü görülmektedir. $\lambda = 0$ değeri için üyelik fonksiyonu değeri $(b_i - p_i)$ değerini alır. Talebin belirlenen λ değeri kadar azalması durumunda maliyetlerin azaldığı görülmektedir. Talepteki %10 'luk bir azalma maliyetleri 3402$ azalttığı görülmektedir. Talepteki belirsizliğin maliyetleri azaltabileceği gibi maliyetleri arttırabileceği de unutulmamalıdır.

5.4.1 Kısıtları ve Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Ağ Optimizasyon Modeli

Ağ optimizasyon modeli n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarıdır.

Sağ taraf sabitleri ve amaç fonksiyonu bulanık olan ağ optimizasyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{Z} = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \lesseqqgtr S_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cong D_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı Kapasite}$$

Ağ optimizasyonu için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.4.2 Kısıtları Bulanık Olan Ağ Optimizasyon Modeli

Ağ optimizasyon modeli, *n*: Fabrika yerlerinin sayısı, *m*: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarıdır.

Sağ taraf sabitleri bulanık olan ağ optimizasyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \tilde{S}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Ağ optimizasyonu için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.4.3 Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Ağ Optimizasyon Modeli

Ağ optimizasyon modeli, *n*: Fabrika yerlerinin sayısı, *m*: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarıdır.

Amaç fonksiyonu bulanık olan ağ optimizasyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{Z} = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Ağ optimizasyonu için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.4.4 Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Ağ Optimizasyon Modeli

Ağ optimizasyon modeli, *n*: Fabrika yerlerinin sayısı, *m*: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, A: kısıtlayıcılarda bulunan değişkenlerin parametre değerleridir.

Sağ taraf sabitleri ve teknoloji katsayıları bulanık olan ağ optimizasyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{A} x_{ij} \leq \tilde{S}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Negatif Olmama Kısıtı}$$

Ağ optimizasyonu için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.4.5 Bütün Katsayıları Bulanık Olan Ağ Optimizasyon Modeli

Ağ optimizasyon modeli n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j'ninci pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, A: kısıtlayıcılarda bulunan değişkenlerin parametre değerleridir.

Bütün katsayıları bulanık olan ağ optimizasyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$Z = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{A} x_{ij} \leq \tilde{S}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Kapasite Kısıtı}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{D}_j \quad j = 1, \dots, m \quad \text{Talep Kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{Pozitif Olma Kısıtı}$$

Ağ optimizasyonu için çözülen örnek aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.5 BULANIK TEK KAYNAKLI FABRİKA YERLEŞTİRME MODELİ

Klasik bir tek kaynaklı fabrika yerleştirme DP modelinde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyetidir. Daha önce incelenen Kapasite atama modeline aşağıdaki kısıtlar eklenerek tek kaynaklı hale dönüştürebiliriz.

$$y_i = \begin{cases} \text{Eğer bir fabrika, i. yerde kurulmuş ise} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{Eğer market j, i. fabrika tarafından tedarik ediliyorsa} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j x_{ij} = S_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

A katsayıları, y_i yerine fabrikaların açık veya kapalı olduğunu göstermek için kullanılmıştır.

B katsayısı, 1. Tedarik merkezinin hangi talep merkezini karşıladığını gösterir.

C katsayısı, 2. Tedarik merkezinin hangi talep merkezini karşıladığını gösterir.

D katsayısı, 3. Tedarik merkezinin hangi talep merkezini karşıladığını gösterir.

E katsayısı, 4. Tedarik merkezinin hangi talep merkezini karşıladığını gösterir.

F katsayısı, 5. Tedarik merkezinin hangi talep merkezini karşıladığını gösterir.

Bazı işletmeler tedarik kaynağını tek bir merkezden sağlarlar. Bunun nedeni koordinasyon zorluğunu ortadan kaldırmak ve her bir fabrikadaki esneklik ihtiyacını azaltmaktır.

Klasik bir tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli örneği aşağıdaki gibidir:

Model, ayakkabı üretimi yapan bir imalatçı işletmenin İstanbul, Atina, Roma, Madrid, Paris de fabrikaları mevcuttur. Moskova, Brüksel, Lizbon, Münih, Bükreş, Amsterdam pazarlarına üretim yapmaktadır.

Tablo 5.21. Talep atama problemi (Bin adet başına düşen ulaştırma ve üretim maliyeti (bin $))

TEDARİK	**MOSKOVA**	**BRÜKSEL**	**LİZBON**	**MÜNİH**	**BÜKREŞ**	**AMSTERDAM**	**SABİT MALİYET(f_i) Bin $**	**AYLIK KAPASİTE S_i(Bin adet)**
İSTANBUL	1675	400	685	1630	1160	2800	7650	18
ATİNA	1460	1940	970	100	495	1200	3500	24
ROMA	1925	2400	1425	500	950	800	5000	27
MADRİD	380	1355	543	1045	665	2321	4100	22
PARİS	922	1646	700	508	311	1797	2200	31
AYLIK TALEP (Bin adet)	10	8	14	6	7	11		

$$Z_{min} = 1675X_{11}B1 + 400X_{12}B2 + 685X_{13}B3 + 1630X_{14}B4 + 1160X_{15}B5 + 2800X_{16}B6 + 1460X_{21}C1 + 1940X_{22}C2 + 970X_{23}C3 + 100X_{24}C4 + 495X_{25}C5 + 1200X_{26}C6 + 1925X_{31}D1 + 2400X_{32}D2 + 1425X_{33}D3 + 500X_{34}D4 + 950X_{35}D5 + 800X_{36}D6 + 380X_{41}E1 + 1355X_{42}E2 + 543X_{43}E3 + 1045X_{44}E4 + 665X_{45}E5 + 2321X_{46}E6 + 922X_{51}F1 + 1646X_{52}F2 + 700X_{53}F3 + 508X_{54}F4 + 311X_{55}F5 + 1797X_{56}F6 + 7650A1 + 3500A2 + 5000A3 + 4100A4 + 2200A5$$

Kapasite kısıtı:

$X_{11}B1 + X_{12}B2 + X_{13}B3 + X_{14}B4 + X_{15}B5 + X_{16}B6 \leq 18A1$

$X_{21}C1 + X_{22}C2 + X_{23}C3 + X_{24}C4 + X_{25}C5 + X_{26}C6 \leq 24A2$

$X_{31}D1 + X_{32}D2 + X_{33}D3 + X_{34}D4 + X_{35}D5 + X_{36}D6 \leq 27A3$

$X_{41}E1 + X_{42}E2 + X_{43}E3 + X_{44}E4 + X_{45}E5 + X_{46}E6 \leq 22A4$

$X_{51}F1 + X_{52}F2 + X_{53}F3 + X_{54}F4 + X_{55}F5 + X_{56}F6 \leq 31A5$

Talep Kısıtı:

$X_{11}B1 + X_{21}C1 + X_{31}D1 + X_{41}E1 + X_{51}F1 = 10$

$X_{12}B2 + X_{22}C2 + X_{32}D2 + X_{42}E2 + X_{52}F2 = 8$

$X_{13}B3 + X_{23}C3 + X_{33}D3 + X_{43}E3 + X_{53}F3 = 14$

$X_{14}B4 + X_{24}C4 + X_{34}D4 + X_{44}E4 + X_{54}F4 = 6$

$X_{15}B5 + X_{25}C5 + X_{35}D5 + X_{45}E5 + X_{55}F5 = 7$

$X_{16}B6 + X_{26}C6 + X_{36}D6 + X_{46}E6 + X_{56}F6 = 11$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif olmama kısıtı

Tek kaynaktan tedarik kısıtı:

B1+C1+D1+E1+F1=1

B2+C2+D2+E2+F1=1

B3+C3+D3+E3+F3=1

B4+C4+D4+E4+F4=1

B5+C5+D5+E5+F5=1

$A, B, C, D, E, F \in \{0, 1\}$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli Lingo 14.0 bilgisayar paket programı ile çözülmüş sonuçlar Tablo 5. 22.'deki gibidir.

Tablo 5.22. Tek kanyaklı fabrika yerleştirme modeli sonuçları

	MOSKOVA		BRÜKSEL		LİZBON		MÜNİH		BÜKREŞ		AMSTERDAM		SABİT MALİYET(f_i) Bin $	AYLIK KAPASİTE S_i(Bin adet)
İSTANBUL	1675	0	400	0	685	0	1630	0	1160	0	2800	0	0*7650	18
ATİNA	1460	0	1940	0	970	0	100	0	495	0	1200	0	0*3500	24
ROMA	1925	0	2400	0	1425	0	500	6	950	0	800	11	1*5000	27
MADRİD	380	10	1355	8	543	0	1045	0	665	0	2321	0	1*4100	22
PARİS	922	0	1646	0	700	14	508	0	311	7	1797	0	1*2200	31
AYLIK TALEP (Bin adet)	10		8		14		6		7		11			

Tablo 5.23. Tek kaynaklı fabrika yerleştirme

	MOSKOVA	**BRÜKSEL**	**LİZBON**	**MÜNİH**	**BÜKREŞ**	**AMSTERDAM**	**SABİT MALİYET(f_i) Bin $**	**AYLIK KAPASİTE S_i(Bin adet)**
İSTANBUL	B1=0	B2=0	B3=0	B4=0	B5=0	B6=0	A1=0	18
ATİNA	C1=0	C2=0	C3=0	C4=0	C5=0	C6=0	A2=0	24
ROMA	D1=0	D2=0	D3=0	D4=1	D5=0	D6=1	A3=1	27
MADRİD	E1=1	E2=1	E3=0	E4=0	E5=0	E6=0	A4=1	22
PARİS	F1=0	F2=0	F3=1	F4=0	F5=1	F6=0	A5=1	31
AYLIK TALEP (Bin adet)	10	8	14	6	7	11		

$\text{Min}\, Z = 6 * 500 + 11 * 800 + 10 * 380 + 8 * 1355 + 14 * 700 + 7 * 311 + 1 * 5000 + 1 * 4100 + 1 * 2200 = 49717\$$ Olarak bulunmuştur.

Talep, günlük yaşamın bazı belirsizlikleri, tercihlerin ve beklentilerin değişmesi, talep edilen mal ve hizmetin fiyatındaki değişmeler, döviz kurundaki değişimler, ikame ve tamamlayıcı malların fiyatındaki değişmeler gibi birçok faktörden etkilenerek sürekli değişmektedir. Bu sebepler talebi belirsiz hale getirmektedir. Bu belirsizleri modele dahil edersek, model aşağıdaki şeklini alır.

$$\begin{aligned} Z_{min} = {} & 1675\mathrm{X}_{11}\mathrm{B1} + 400\mathrm{X}_{12}\mathrm{B2} + 685\mathrm{X}_{13}\mathrm{B3} + 1630\mathrm{X}_{14}\mathrm{B4} \\ & + 1160\mathrm{X}_{15}\mathrm{B5} + 2800\mathrm{X}_{16}\mathrm{B6} + 1460\mathrm{X}_{21}\mathrm{C1} \\ & + 1940\mathrm{X}_{22}\mathrm{C2} + 970\mathrm{X}_{23}\mathrm{C3} + 100\mathrm{X}_{24}\mathrm{C4} + 495\mathrm{X}_{25}\mathrm{C5} \\ & + 1200\mathrm{X}_{26}\mathrm{C6} + 1925\mathrm{X}_{31}\mathrm{D1} + 2400\mathrm{X}_{32}\mathrm{D2} \\ & + 1425\mathrm{X}_{33}\mathrm{D3} + 500\mathrm{X}_{34}\mathrm{D4} + 950\mathrm{X}_{35}\mathrm{D5} + 800\mathrm{X}_{36}\mathrm{D6} \\ & + 380\mathrm{X}_{41}\mathrm{E1} + 1355\mathrm{X}_{42}\mathrm{E2} + 543\mathrm{X}_{43}\mathrm{E3} + 1045\mathrm{X}_{44}\mathrm{E4} \\ & + 665\mathrm{X}_{45}\mathrm{E5} + 2321\mathrm{X}_{46}E6 + 922\mathrm{X}_{51}F1 + 1646\mathrm{X}_{52}\mathrm{F2} \\ & + 700\mathrm{X}_{53}\mathrm{F3} + 508\mathrm{X}_{54}\mathrm{F4} + 311\mathrm{X}_{55}\mathrm{F5} + 1797\mathrm{X}_{56}F6 \\ & + 7650A1 + 3500A2 + 5000A3 + 4100A4 + 2200A5 \end{aligned}$$

Kapasite kısıtı:

$\mathrm{X}_{11}B1 + \mathrm{X}_{12}\mathrm{B2} + \mathrm{X}_{13}\mathrm{B3} + \mathrm{X}_{14}\mathrm{B4} + \mathrm{X}_{15}\mathrm{B5} + \mathrm{X}_{16}\mathrm{B6} \leq 18\mathrm{A1}$

$\mathrm{X}_{21}C1 + \mathrm{X}_{22}\mathrm{C2} + \mathrm{X}_{23}\mathrm{C3} + \mathrm{X}_{24}\mathrm{C4} + \mathrm{X}_{25}\mathrm{C5} + \mathrm{X}_{26}\mathrm{C6} \leq 24\mathrm{A2}$

$\mathrm{X}_{31}D1 + \mathrm{X}_{32}\mathrm{D2} + \mathrm{X}_{33}\mathrm{D3} + \mathrm{X}_{34}\mathrm{D4} + \mathrm{X}_{35}\mathrm{D5} + \mathrm{X}_{36}\mathrm{D6} \leq 27\mathrm{A3}$

$\mathrm{X}_{41}E1 + \mathrm{X}_{42}\mathrm{E2} + \mathrm{X}_{43}\mathrm{E3} + \mathrm{X}_{44}\mathrm{E4} + \mathrm{X}_{45}\mathrm{E5} + \mathrm{X}_{46}\mathrm{E6} \leq 22\mathrm{A4}$

$\mathrm{X}_{51}F1 + \mathrm{X}_{52}\mathrm{F2} + \mathrm{X}_{53}\mathrm{F3} + \mathrm{X}_{54}\mathrm{F4} + \mathrm{X}_{55}\mathrm{F5} + \mathrm{X}_{56}\mathrm{F6} \leq 31\mathrm{A5}$

Talep kısıtı:

$\mathrm{X}_{11}B1 + \mathrm{X}_{21}\mathrm{C1} + \mathrm{X}_{31}\mathrm{D1} + \mathrm{X}_{41}\mathrm{E1} + \mathrm{X}_{51}\mathrm{F1} \leq 10 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{11}B1 + \mathrm{X}_{21}\mathrm{C1} + \mathrm{X}_{31}\mathrm{D1} + \mathrm{X}_{41}\mathrm{E1} + \mathrm{X}_{51}\mathrm{F1} \geq 10 - 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{12}B2 + \mathrm{X}_{22}\mathrm{C2} + \mathrm{X}_{32}\mathrm{D2} + \mathrm{X}_{42}\mathrm{E2} + \mathrm{X}_{52}\mathrm{F2} \leq 8 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{12}B2 + \mathrm{X}_{22}\mathrm{C2} + \mathrm{X}_{32}\mathrm{D2} + \mathrm{X}_{42}\mathrm{E2} + \mathrm{X}_{52}\mathrm{F2} \geq 8 - 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{13}B3 + \mathrm{X}_{23}\mathrm{C3} + \mathrm{X}_{33}\mathrm{D3} + \mathrm{X}_{43}\mathrm{E3} + \mathrm{X}_{53}\mathrm{F3} \leq 14 + 1(1 - \lambda)$

$\mathrm{X}_{13}B3 + \mathrm{X}_{23}\mathrm{C3} + \mathrm{X}_{33}\mathrm{D3} + \mathrm{X}_{43}\mathrm{E3} + \mathrm{X}_{53}\mathrm{F3} \geq 14 - 1(1 + \lambda)$

$\mathrm{X}_{14}B4 + \mathrm{X}_{24}\mathrm{C4} + \mathrm{X}_{34}\mathrm{D4} + \mathrm{X}_{44}\mathrm{E4} + \mathrm{X}_{54}\mathrm{F4} \leq 6 + 1(1 - \lambda)$

$X_{14}B4 + X_{24}C4 + X_{34}D4 + X_{44}E4 + X_{54}F4 \geq 6 - 1(1 - \lambda)$

$X_{15}B5 + X_{25}C5 + X_{35}D5 + X_{45}E5 + X_{55}F5 \leq 7 + 1(1 - \lambda)$

$X_{15}B5 + X_{25}C5 + X_{35}D5 + X_{45}E5 + X_{55}F5 \geq 7 - 1(1 - \lambda)$

$X_{16}B6 + X_{26}C6 + X_{36}D6 + X_{46}E6 + X_{56}F6 \leq 11 + 1(1 - \lambda)$

$X_{16}B6 + X_{26}C6 + X_{36}D6 + X_{46}E6 + X_{56}F6 \geq 11 - 1(1 - \lambda)$

$X_{ij} \geq 0$ Negatif Olmama kısıtı

$\lambda \in [0,1]$

Tek kaynaktan tedarik kısıtı:
B1+C1+D1+E1+F1=1

B2+C2+D2+E2+F1=1

B3+C3+D3+E3+F3=1

B4+C4+D4+E4+F4=1

B5+C5+D5+E5+F5=1

$A, B, C, D, E, F \in \{0, 1\}$

Bu örnekte talep kısıtını bulanık hale getirmek için talep fonksiyonuna üçgen bulanık sayı olarak üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 9 \\ 1 - \dfrac{10 - x_i}{1}, & 9 < x_i < 10 \\ 1, & x_i = 10 \\ 1 - \dfrac{x_i - 10}{1}, & 10 < x_i < 11 \\ 0, & x_i \geq 11 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 7 \\ 1 - \dfrac{8 - x_i}{1}, & 7 < x_i < 8 \\ 1, & x_i = 8 \\ 1 - \dfrac{x_i - 8}{1}, & 8 < x_i < 9 \\ 0, & x_i \geq 9 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 13 \\ 1 - \dfrac{14 - x_i}{1}, & 13 < x_i < 14 \\ 1, & x_i = 14 \\ 1 - \dfrac{x_i - 14}{1}, & 14 < x_i < 15 \\ 0, & x_i \geq 15 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 5 \\ 1 - \dfrac{6 - x_i}{1}, & 5 < x_i < 6 \\ 1, & x_i = 6 \\ 1 - \dfrac{x_i - 6}{1}, & 6 < x_i < 7 \\ 0, & x_i \geq 7 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 6 \\ 1 - \dfrac{7 - x_i}{1}, & 6 < x_i < 7 \\ 1, & x_i = 7 \\ 1 - \dfrac{x_i - 7}{1}, & 7 < x_i < 8 \\ 0, & x_i \geq 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 10 \\ 1 - \dfrac{11 - x_i}{1}, & 10 < x_i < 11 \\ 1, & x_i = 11 \\ 1 - \dfrac{x_i - 11}{1}, & 11 < x_i < 12 \\ 0, & x_i \geq 12 \end{cases}$$

Moskova'nın talep ettiği ürün miktarı 10 bin adet, Brüksel 8 bin adet, Lizbon 14 bin adet, Münih 6 bin adet, Bükreş 7 bin adet, Amsterdam 11 bin adet olarak klasik modele dahil edilmiştir. Günlük hayatın bazı belirsizlikleri nedeniyle olası talep değişmelerinden işletmelerin kendini koruması adına sipariş ettikleri miktarları belirli bir aralıkta belirlemiştir. Bu doğrultuda belirlenen talep aralıkları: Moskova (9-11) bin adet, Brüksel (7-9) bin adet, Lizbon (13-15) bin adet, Münih (5-7) bin adet, Bükreş (6-8) bin adet, Amsterdam (10-12) bin adet olarak bulanık modele dahil edilmiştir.

İşletmeler, %10 fazla veya eksik aralık olarak belirlenen taleplere üyelik fonksiyonu yazılarak bu aralıkta talep değişimlerinde meydana gelen maliyet tablosunu hesaplamış ve aşağıda sunulmuştur.

Tablo 5.24. Talep değişimlerine karşı oluşan maliyet tablosu

λ	**1**	**0.9**	**0.8**	**0.7**	**0.6**
Min Z	49717	49374,6	49032,2	48689,8	48347,4
Min Z_1-Z_0	0	342,4	684,8	1027,2	1369,6

Tablo 5.24. Talep değişimlerine karşı oluşan maliyet tablosu (devamı)

λ	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.2**	**0.1**	**0**
Min Z	48005	47662,6	47320,2	46977,8	46635.4	44989
Min Z_1-Z_0	1712	2054,4	2396,8	2739,2	3081,6	4728

Tablo incelendiğinde görüldüğü gibi amaç minimizasyon olduğu için x_i aldığı değerler $(b_i - p_i \leq x_i \leq b_i)$ aralığına düşmektedir. Bu nedenle talepteki %10'luk belirsizlikten dolayı maliyetlerin azaldığı görülmüştür.

5.5.1 Amaç Fonksiyonu ve Kısıtları Bulanık Olan Tek Kaynaklı Fabrika Yerleştirme Modeli

Modelde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyetidir.

$$y_i = \begin{cases} \text{Eğer bir fabrika, i. yerde kurulmuş ise} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{Eğer market j, i. fabrika tarafından tedarik ediliyorsa} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

Amaç fonksiyonu ve kısıtları bulanık olan tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli:

$$\tilde{Z} = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cong 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j x_{ij} \cong S_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme için çözülen örnek, aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.5.2 Kısıtları Bulanık Olan Tek Kaynaklı Fabrika Yerleştirme Modeli

Kısıtları bulanık olan tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli:

Modelde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyetidir.

$$y_i = \begin{cases} \text{Eğer bir fabrika, i. yerde kurulmuş ise} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{Eğer market j, i. fabrika tarafından tedarik ediliyorsa} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$Z = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \tilde{1} \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j x_{ij} = \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme için çözülen örnek, aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.5.3 Amaç Fonksiyonu Bulanık Olan Tek Kaynaklı Fabrika Yerleştirme Modeli

Amaç fonksiyonu bulanık olan tek kaynaklı fabrika yerleştirme DP modeli

Modelde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyetidir.

$$y_i = \begin{cases} Eğer\ bir\ fabrika, i. yerde\ kurulmuş\ ise & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} Eğer\ market\ j, i. fabrika\ tarafından\ tedarik\ ediliyorsa & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$\tilde{Z} = \text{Min}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j x_{ij} = S_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme için çözülen örnek, aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.5.4 Sağ Taraf Sabitleri ve Teknoloji Katsayıları Bulanık Olan Tek Kaynaklı Fabrika Yerleştirme Modeli

Sağ taraf sabitleri ve teknoloji katsayıları bulanık olan tek kaynaklı fabrika yerleştirme modeli:

Modelde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyeti, A:katsayılara ait değişkenlerin parametre değerleridir.

$$y_i = \begin{cases} Eğer\ bir\ fabrika, i. yerde\ kurulmuş\ ise & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} Eğer\ market\ j, i. fabrika\ tarafından\ tedarik\ ediliyorsa & 1 \\ Aksi\ halde & 0 \end{cases}$$

$$Z = \text{Min}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{1} \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j \tilde{A} x_{ij} = \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = \begin{cases} \text{Eğer bir fabrika, i. yerde kurulmuş ise} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{Eğer market j, i. fabrika tarafından tedarik ediliyorsa} & 1 \\ \text{Aksi halde} & 0 \end{cases}$$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme için çözülen örnek, aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

5.5.5 Bütün Katsayıları Bulanık Olan Tek Kaynaklı Fabrika Yerleştirme DP Modeli

Tüm katsayıları bulanık olan tek kaynaklı fabrika yerleştirme DP modeli:

Modelde, n: Fabrika yerlerinin sayısı, m: Talep noktalarının sayısı, D_j: Tesis j. pazardaki yıllık talep, S_i : i. fabrikanın kapasitesi, c_{ij}: Bir birim ürünü i.fabrikadan j. talep noktası için birim üretim ve ulaşım maliyeti, x_{ij}: i. üretim merkezinden, j. talep noktasına gönderilen ürün miktarı, f_i: Fabrikanın yıllık sabit maliyeti, A:katsayılara ait değişkenlerin parametre değerleridir.

$$\tilde{Z} = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A} x_{ij} = \tilde{1} \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{D}_j \tilde{A} x_{ij} = \tilde{S}_i y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Tek kaynaklı fabrika yerleştirme için çözülen örnek, aynı metotlar kullanılarak bu model içinde çözülebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hayatımızın bazı dönemlerini belirsiz kılan faktörler: politika, ekonomik krizler, savaşlar, döviz kurlarındaki dalgalanmalar vs. karar verici mekanizmasının doğru karar vermesini güçleştirmektedir. Bulanık doğrusal programlama ile modellenen lojistik problemler, klasik doğrusal programlama ile modellenenlerin aksine belirsizlikleri modele dahil ettiği için optimal çözüme daha yakın tahminler yapar.

Karar verici tarafından klasik doğrusal programla yardımı ile yapılan maliyet analizleri, belirsizliklerin yol açtığı sapmaları tespit edemediği için firmaları yanlış yönlendirebilmektedir. Bunun aksine bulanık doğrusal programlama modelleri, hızlı, gerçekçi ve pratik çözümleri bize sunmaktadır.

Bulanık doğrusal programla modellerinin çözümü için literatürde bir çok çözüm yaklaşımı bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar, bulanık modelin amaç fonksiyonunda, kısıtlayıcılarında, değişkenlerin katsayılarında oluşabilecek belirsizlikleri modele dahil ederek en uygun çözümü bize sunmaktadır. Bu çalışmada, Zimmerman, Werners, Chanas, Verdegay, Negoita ve Sularia, Carlsson ve Korhonen yaklaşımları, mevcut lojistik problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Talep, kapasite, amaç ve değişkenlerin katsayılarındaki belirsizlikler üçgen bulanık sayı olarak tanımlanmış ve tüm metotlar ile çözümlere ulaşılmıştır.

Bu çalışmada hayatımızdaki belirsizliğin, arz ve talep mekanizmaları üzerinde yarattığı etkiyi bulanık mantık yardımı ile modele nasıl dahil edildiği ve çözümlerin nasıl yapıldığı anlatılmıştır. Çözüm sonuçlarına bakıldığında farklı üyelik değerlerinin farklı çözüm değerleri sunması, karar alma mekanizmalarının alternatif pozisyonlar almasına olanak sağlamaktadır.

Lojistik problemlerden birisi olan yerçekimi yerleşim modelinde Türkiye haritası 1cm^2'lik eş karelere bölünerek yeni kurulacak olan fabrikanın yerinin klasik model gibi tek bir koordinat noktası olarak belirlenmesinin yerine karar vericinin katlanabileceği maliyet aralığı belirlenerek bu aralık içerisinde yeni yerin kurulabileceği alternatif koordinat merkezlerinin belirlenmesi sayesinde yeni yerin seçimi için karar vericiye daha yardımcı olacağı saptanmıştır.

Lojistik maliyetler hesaplanırken günlük yaşamdaki belirsizlikler göz ardı edilmemelidir. Bu belirsizlikler, maliyet değerlerini negatif veya pozitif yönde etkileyebilmektedir. Bu nedenle karar merci, mevcut piyasa şartlarına göre oluşturduğu modellere belirsizlikleri dahil ettikten sonra kendisi için en uygun çözüm alternatiflerini değerlendirerek maliyetini minimize edecektir.

KAYNAKÇA

Ballı S. ve Karasulu B. (2013). Bulanık Karar Verme Sistemlerinde Paralel Hesaplama.*Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi,* Cilt 19, Sayı 2, ss. 61-67.

Başkaya, Z. (2011). *Bulanık Doğrusal Programlama.* Ekin Yayın Evi, Bursa.

Başkaya, Z ve Öztürk, B. (2011). Bulanık TOPSIS Algoritması ile Yamuk Bulanık Sayıların Satış Elemanı Seçiminde Kullanılması. *Business and Economics Research Journal*, 2(2): 77-100.

Baykal, N ve Beyan, T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri.* Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Bazaara, M. S., Shrali, H. D. ve Jarvis, J. J. (1990). *Linear Programming and Network Flows.*(2) New york: Wiley.

Bector, C. R. Ve Chandra, S. (2005). Fuzzy Mathematical Programming And Fuzzy Matrix Games. *Studies In Fuzziness And Soft Computing*, Vol.169, Springer, Germany, pp. 70.

Belman, R. E. ve Zadeh L. A. (1970). Management Science. *Decision – Making In A Fuzzy Environment,* The U.S.A., pp. 141-164.

Bodjanova S. (2004). Median Value and Median Interval of A Fuzzy Number. *Information Sciencess,* pp.73-89.

Bojadziev, G. ve Bojadziev, M. (2007). *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management*. 2nd Edition, World scientific Publishing, Singapore, pp. 93.

Carlsson, C. ve Korhonen, P. (1986). Fuzzy Sets and Systems. *A Parametric Approach to Fuzzy Linear Programming.* 20(1):17-31.

Chakraborty, A., Chakraborty, M., (2010). Cost-time Minimization in a Transportation Problem with Fuzzy Parameters: A Case Study. *Journal Of Transportation Systems Engıneering And Informatıon Technology,* 10(6), pp. 53−63.

Chanas S., Kolodziejczyk W., Machaj A. (1984). Fuzzy Sets and Systems. *A Fuzzy Approach to the Transportation Problem.*13(3): 211–221.

Charnes A. - Cooper W.W. (1954). *The Stepping-Stone Method for Explaining Linear Programming: Calculation in Transportation Problems*, Management Science, pp. 49-69.

Cheng, H. W. (2011). Quality and Quantity. *A Satisficing Method for Fuzzy Goal Programming Problems with Different İmportance and Priorities,* Springer Science and Business Media B.V., pp. 485–498.

Çevik, O. ve Yıldırım, Y. (2010). Bulanık Doğrusal Programlama ile Bir Süt İşletmesinde Uygulama. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Sosyal ve Ekonomik Araştırmalar Dergisi,* Karaman, 12 (18). ss.15-26.

Doğan, İ. (1995). *Yöneylem Araştırması Teknikleri ve İşletme Uygulamaları*. Bilim Teknik Yayınları, İstanbul.

Dyson, R. G. (1980). Maximin Programming and Multi-Criteria Decision Making. *The Journal of the Operational Research,* 31(3): 263-267.

Ebrahimnejad, A. (2014). Applied Soft Computing. *A Simplified New Approach For Solving Fuzzy Transportation Problemswith Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers*. 19, pp. 171-176.

Gani, A. N. and Razak, K. A. (2006). Two Stage Fuzzy Transportation Problem. *Journal of Physical Sciences*, Vol. 10, pp. 63-69.

Gülcan, B. (2012). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Bisküvi İşletmesinde Optimum Ürün Formülü Oluşturma*. Yüksek Lisans Tezi Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Karaman.

Güzel, N. (2010). Fuzzy Transportation Problem with the Fuzzy Amounts and the Fuzzy Costs. *World Applied Sciences Journal*,8(5), ss. 543-549.

Hallaç, O. (1995). *Kantitatif Karar Verme Teknikleri ile Yöneylem Araştırmasına Giriş*. Alfa Basım Yayın, İstanbul, ss.432-438.

Hiller, F. S., Lieberman, G. J. (1986). *Introdutıon To Operatıon Research*. USA, pp.187-200.

Inuiguchi, M. Ve Tanino, T. (2004). Reliable computing. *Fuzzy Linear Programming with Interactive Uncertain Parameters.* Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp.357-367.

Jairaj, P. G. and Vedulla S. (2000), *Multireservoir System Optimization Using Fuzzy Mathematical Programming.* Water Resources Management 14, Kluwer Academic Publishers, pp. 463.

Jiménez, F., Verdegay, J. L., (1999). Solving Fuzzy Solid Transportation Problems by an Evolutionary Algorithm Based Parametric Approach. *European Journal of Operational Research*, 117, pp. 485-510.

Kabak, M. (2000). *Kara Kuvvetleri Akaryakıt İkmal Sistemlerinde Ulaştırma Modelleri Yardımıyla Maliyet Optimizasyonu*. Basılmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, ss. 64.

Kaur, A., Kumar, A. (2012). Applied Soft Computing. *A New Approach For Solving Fuzzy Transportation Problems Using Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers.*12, pp. 1201-1213.

Keskin, M. H. (2006). Lojistik Tedarik Zinciri Yönetimi *(Geçmişi, Değişimi, Bugünü, Geleceği)*. Nobel yayın dağıtım, Ankara, ss.65.

Klir, G. J., ve Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Application*. New Jersey, pp.6-11.

Lai, Y.J. ve Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 122.

Liang, T. F. (2008). Interactive Multi-Objective Transportation Planning Decision Using Fuzzy Linear Programming. *Asia-Pasific Journal of Operational Research,* 25(1): 11-31.

Liu, S. T., Kao, C. (2004). Solving Fuzzy Transportation Problems Based on Extension Principle. *European Journal of Operational Research,* 153: 661–674.

Mohanaselvi, S. (2012). Fuzzy Optimal Solution to Fuzzy Transportation Problem: A New Approach. *International Journal on Computer Science and Engineering,* Vol. 4, pp. 367-375.

Okuda, T., Tanaka, H., Asai, K. (1978). A Forrmulation of Fuzzy Decision Problems with Fuzzy Information Using Proability Measures of Fuzzy Events. *Information and Control,* 38, pp. 135-147.

Öner, A. ve Ülengin, F. (2003). Atama Problemi İçin Yeni Bir Çözüm Yaklaşımı. *İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik Dergisi*, 2(1): 73-79.

Özkan, M. M. (2003). *Bulanık Hedef Programlama*. Ekin Yayın Evi, Bursa, ss.6-21.

Öztürk, A. (2005). Yöneylem Araştırması. Ekin Kitap Evi, Bursa.

Paksoy, T. (2002). Bulanık Küme Teorisi ve Doğrusal Programlamada Kullanımı: Karşılaştırmalı Bir Analiz. *Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi,* 17(1): 14.

Pandian P., Natarajan G. (2010). Applied Mathematical Sciences. *A new Algorithm for Finding a Fuzzy Optimal Solution for Fuzzy Transportation Problems.* pp.79-90.

Sağır, M., Atlas, M., Aras, N. ve Kamışlı Öztürk, Z. (2013). *Yöneylem Araştırması 1*. Açıköğretim Fakültesi Yayını No:1499, Eskişehir, ss.171-194.

Saranya, S., Moheswari, S. (2013). A Method for Solving Fuzzy Transportation Problem (FTP) using Fuzzy Russell's Method. *International Journal Intelligent Systems and Applications*, 02, pp. 71-75.

Seçme, N. Y. (2005). *Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği*. Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kayseri, ss. 34-37.

Shih, L.H. (1998). Cement Transportation Planning Via Fuzzy Linear Programming. *International Journal Production Economics*, 58(1999): 277-287.

Smithson, M., Verkuilen, J., (2006). *Fuzzy Set Theory: Applications in the Social Sciences.* Sage Publication, USA, pp.4.

Stanciulescu, C. vd. (2003). Multiobjective Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Decision Variables. *European Journal of Operational Research,* 149(2003), ss. 654-675.

Şen, Z. (2001). *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*. Bilge Sanat Yapım Yayınları, İstanbul.

Şen, Z. (2004). *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*. Bilge Sanat Yapım Yayınları, İstanbul.

Tavakkoli Moghaddain, R. ve Shayan, E. (1998). Facilities Layout Design by Genetic Algorithms. *Computers and Industriel Engineering* 35(3):527-530.

Tabuk, M. (2006). *Taşıma Problemlerine Çözüm Önerileri*. Basılmamış Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, ss:7.

Terano, T., Asai K. ve Sugeno M. (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications.* Academic Press Inc., San Diego, pp. 268.

Tokgöz, E. A. (2008). Bir *Matematiksel Modelin Havacılık Sektöründe Uygulaması* Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, ss:40.

Tulunay, Y. (1991). *Matematik programlama ve İşletme Uygulamaları*. Renk- İş Matbaası, İstanbul, ss. 3-431.

Tuş, A. (2006). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Üretim Planlanmasında Uygulama Örneği.* Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli, ss. 11.

Türe, H. (2006). *Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Uygulama*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara, ss. 52.

Ural, G. F. (2006). *Bulanık Doğrusal Programlama Yöntemi Kullanılarak Bir Sanayi Kuruluşunda Üretim Planlama Çalışmasının Gerçekleştirilmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kocaeli, ss.85.

Werners, B. (1987). Fuzzy Sets And Systems. *An Interactive Fuzzy Programming Systems,* Vol:23, pp. 131-147.

Yalçın-Seçme N. (2005). *Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırılmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği*. Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kayseri, ss. 34-37.

Yang L., Liu L. (2007). Applied soft computing. *Fuzzy Fixed Charge Solid Transportation Problem and Algorithm.* pp. 879-889.

Yıldırım, Y. Ve Çevik, O. (2010). Bulanık Doğrusal Programlama ile Süt Ürünleri İşletmesinde Bir Uygulama. *KMÜ Sosyal ve Ekonomik Araştırmalar Dergisi* (12) 18:15-26.

Zhang, H. ve Liu, D. (2006). Fuzzy Modeling and Fuzzy Control. *Control Engineering Book Series*. Brikhauser, Boston, pp. 8.

Zimmermann H. J. (1978). Fuzzy Sets and Systems. *Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions*, Volume 1, Issue 1, pp. 45–55.

Zimmermann H. J. (1983). Fuzzy Mathematical Programming. *Computers and Operation Research,* 10(4), pp. 292.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Pekmezci 1990 yılında Gaziantep'te doğdu. Lisans derecesini 2010 yılında Gaziantep Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü'nden mezun oldu. 2011 yılında Sosyal Bilimler Enstitüsü Uluslar arası Ticaret ve Lojistik ABD Tezli Yüksek Lisansa başlamıştır. Mehmet Pekmezci iyi derecede İngilizce bilmektedir.

VITAE

Mehmet Pekmezci was born in Gaziantep in 1990. He graduated from the Faculty of Economics and Administrative Sciences at Gaziantep University in 2010. He studied Economics there. He began his master degree in the field of International Trade and Logistics at Gaziantep University Institute of Social Sciences in 2011. He has English in intermediate degree.