

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONOTON POTANSİYEL OPERATÖRLER ve LİNEER OLMAYAN
ELİPTİK DENKLEM İÇİN KARIŞIK SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Matematikçi M. Aylin BAYRAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :24 Temmuz 2003

Tezin Savunulduğu Tarih :19 Eylül 2003

Tez Danışmanı

Üye

Üye

Doç.Dr.Zahir MURADOĞLU Prof.Dr.Alemdar HASANOĞLU Prof.Dr.Mehmet CAN

Üye

Prof.Dr.Hüseyin KARABELLİ

Üye

Prof.Dr.Hüseyin HALİLOV

TEMMUZ 2003

MONOTON POTANSİYEL OPERATÖRLER ve LİNEER OLMAYAN ELİPTİK DENKLEM İÇİN KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

M. Aylin Bayrak

Anahtar Kelimeler: Monoton potansiyel operatörler, Sayısal çözüm, Sonlu farklar yöntemi, Sonlu elemanlar yöntemi, Karışık sınır değer problemi

Özet: Tezde, lineer olmayan eliptik denklem için,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= F(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) &= 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

karışık sınır değer problemi ele alınmıştır. Zayıf çözümün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Problemin sayısal çözümü için sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri ile fark şemaları elde edilmiştir. Her iki yöntem ile farklı problemler çözülmüş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır.

Bölüm 1, giriş bölümüdür.

Bölüm 2’de, monoton potansiyel operatörler ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3’de, karışık sınır değer problemi, sonlu farklar yöntemi ile incelenmiştir.

Bölüm 4’de, sonlu elemanlar yöntemi, karışık sınır değer problemine uygulanmış ve klasik sonlu farklar ile sonlu elemanlar yöntemi karşılaştırılmıştır.

Bölüm 5’de, sayısal olarak çeşitli örnekler verilmiştir.

**MONOTONE POTENTIAL OPERATORS and NUMERICAL SOLUTION OF
MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS**

M. Aylin BAYRAK

Keywords: Monotone Potential Operators, Numerical Solution, Finite Differences ,
Finite Elements , Mixed Boundary Value Problem

Abstract: In this thesis, the mixed boundary value problem for nonlinear elliptic equation

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= F(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) &= 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

is considered . Properties of monotone potential operators, existence and uniqueness of a weak solution is studied. For numerical solution of the problem, difference schemes are obtained via finite differences and finite elements methods. Several problems are solved by the use of the both methods and the results are compared.

This thesis contains five chapters.

Chapter 1 is introduction.

In Chapter 2, The monotone potential operators are introduced.

In Chapter 3, mixed boundary value problem is studied via the method of the finite differences.

In Chapter 4, The method of the finite elements is applied to the above mixed boundary value problem. The results obtained by the use of the methods of classic finite differences and finite elements are compared.

In Chapter 5, Further examples are given.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, monoton potansiyel operatörler tanıtılarak, bir potansiyel operatörlü denklemin çözümünün en küçük değer problemi olarak aranması problemi ele alınmış, bununla ilgili incelemeler yapılmıştır.

Ayrıca, var olan lineer olmayan eliptik denklemin sayısal çözümü için sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri uygulanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümlerin, sonlu farklar yöntemine göre yaklaşım hatasının daha az olduğu görülmüştür.

Yapılan çalışmanın, sayısal yöntemlerle ilgili çalışmalara katkısının olmasını dilerim.

Çalışmalarım sırasında bana büyük yardımlarından dolayı danışman hocam sayın Doç. Dr. Zahir MURADOĞLU'na, bu konuda çalışma olanağı sağlayan sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU'na teşekkür eder, saygılar sunarım.

Şekillerin çiziminde emeği geçen kardeşim Mimar Müge Aysun TEKİN'e, tezin yazımında katkılarından dolayı sayın Öğr.Gör. Süleyman TUNÇ'a, tez sürecinde bana daima destek olan annem ve babama, bu süreci benimle sabırla paylaşan eşim Yrd.Doç.Dr. Metin BAYRAK'a ve oğlum B. Atacan BAYRAK'a sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜRLER.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. MONOTON ve POTANSİYEL OPERATÖRLER	3
2.1. Bir Tür Lineer Olmayan Eliptik Denklem İçin Karışık Sınır Değer Problemi.....	3
2.2. Monoton Potansiyel Operatörler.....	7
2.2.1. Operatörlerin ve fonksiyonellerin gateaux türevleri.....	7
2.2.2. Operatörlerin monotonluk özellikleri	15
2.3. Çözümün Varlığı ve Tekliği	22
2.4. Dışbükeylik Prensibi ve Soyut İterasyon Yöntemi.....	26
2.5. Eliptik Tip Lineer Olmayan Monoton Operatörler İçin Dışbükeylik Yeter Koşulu.....	31
BÖLÜM 3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM	38
3.1. Sonlu Farklar Yönteminin Genel Kavramları.....	38
3.2. Sonlu Fark Denkleminin Elde Edilmesi	43
BÖLÜM 4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM	46
4.1. Giriş	46

4.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Temel Kavramları	47
4.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Genel Şeması	51
4.4. Birinci Tip Dikdörtgen Lagrange Sonlu Elemanları.....	55
4.4.1. Bilineer baz fonksiyonlarının tanımlanması	55
4.4.2. Bilineer form fonksiyonları	60
4.4.3. Lokal sertlik matrisi	61
4.4.4. Global sertlik matrisi	66
4.4.5. Sistemin global sertlik matrisinin oluşturulması	68
4.4.6. Sağ taraf vektörünün oluşturulması	70
4.4.7. Dörtgen elemanlardan elde edilen sonlu fark denklemi	71
4.5. Sonlu Elemanlardan Elde Edilen Sonlu Fark Denklemlerinin, Klasik Sonlu Fark Denklemleri ile Karşılaştırılması.....	75
BÖLÜM 5. UYGULAMA.....	76
SONUÇLAR ve ÖNERİLER	101
KAYNAKLAR.....	102
ÖZGEÇMİŞ	105

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

A	:Lineer Olmayan Operatör
A^*	:Eşlenik Operatör
(\cdot, \cdot)	:İç Çarpım Fonksiyoneli
$a(u, v)$:Bilineer Form
B	:Banach Uzayı
B^*	:Banach uzayının eşlenik uzayı
B_0	:Banach uzayının alt uzayı
B_1	:Banach uzayında her yerde yoğun lineer uzay
$b(v)$:Lineer form
b_m	: e_m sonlu elemanın sağ taraf vektörü
$C^k(\Omega)$: Ω 'da k .nıncı mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$C_0^k(\Omega)$: Ω bölgesinin sınırının bazı komşuluğunda 0'a eşit , $C^k(\Omega)$ fonksiyonlar kümesi
c_i	: $u_h(x)$ fonksiyonunun $x = p_i$ düğüm noktalarındaki değerleri
$C^{(i)}$: Bilinmeyenler vektörü
e_m	:Sonlu elemanlar
E_n	: n boyutlu Euclid uzayı
$H^1(\Omega)$:Sobolev uzayı
$H_0^1(\Omega)$: Ω bölgesinin sınırının bazı komşuluğunda 0'a eşit Sobolev alt uzayı
H	:Reel Hilbert uzayı
h	:Bölgenin bölünme parametresi
H_h	:Birinci tip Lagrange Sonlu Elemanlar uzayı
h_i, τ_i	: x ve y 'ye göre adımlar

int	: interior(iç)
I_m	: M_m kümesinden Z_m kümesine birebir dönüşüm
$J(u)$: A operatörünün potansiyeli
K_m	: e_m sonlu elemanın global sertlik matrisi
K	: Varyasyonel problemin sertlik matrisi
K_m^0	: e_m sonlu elemanın lokal sertlik matrisi
$L_2(\Omega)$: Kareleri Ω 'da Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
M	: Sonlu elemanların sayısı
M_m	: e_m sonlu elemanında izdüşümleri sıfırdan farklı olan baz fonksiyonlarının indislerinin oluşturduğu küme
N	: Düğüm noktalarının sayısı
N_i	: p_i düğüm noktaları ile komşuluğu olan sonlu elemanların sayılarının oluşturduğu küme
p_i	: Şebekenin temel düğüm noktaları
S_m	: e_m sonlu elemanın alanı
supp	: support(dayanak)
$u_{x,ij}, u_{x,ij}^-, u_{x,ij}^0$: u fonksiyonunun birinci mertebeden x 'e göre sağ,sol ve merkezi sonlu fark türev ifadeleri
$u_{y,ij}, u_{y,ij}^-, u_{y,ij}^0$: u fonksiyonunun birinci mertebeden y 'ye göre sağ,sol ve merkezi sonlu fark türev ifadeleri
$u_{xx,ij}^-$: u fonksiyonunun ikinci mertebeden x 'e göre sonlu fark türev ifadesi
$u_{yy,ij}^-$: u fonksiyonunun ikinci mertebeden y 'ye göre sonlu fark türev ifadesi
$u_h(x)$: Yaklaşık çözüm fonksiyonu
T_h	: Ω bölgesinin sonlu elemanlara ayrılması
$VA(u, v)$: A operatörünün Gateaux Diferansiyeli
$VJ(u, v)$: $J(u)$ fonksiyonelinin Gateaux Diferansiyeli

Z_m	: 1'den μ_m 'e kadar elemanların oluşturduğu küme
Ω	: Sınırları sonlu sayıda pürüzsüz parçalardan oluşan sınırlı bir bölge
$\overline{\Omega}$: Ω bölgesinin kapanması
$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
η_i	: P_i noktası ile komşuluğu olan sonlu elemanların sayısı
$\xi_i(x)$: Sonlu dayanıklı fonksiyon
$\varphi_{m,i}(x)$: e_m sonlu elemanının form fonksiyonu
$\Psi_i(s, t)$: İki değişkenli bilinear form fonksiyonu
$\xi(s, t)$: Pilot baz fonksiyonu
δ_{ij}	: Kronecker sembolü
μ_m	: M_m kümesinin elemanlarının sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $W_{hr} = W_h \times W_r$ kafesi	38
Şekil 3.2. W_{hr} kafesinde herhangi bir (x_i, y_j) noktası	39
Şekil 4.1. e_m sonlu elemanın düğüm noktalarının numaralandırılması	54
Şekil 4.2. Ω bölgesinin dikdörtgen sonlu elemanlara bölünmesi	55
Şekil 4.3. $e = \{(s, t) 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ pilot sonlu elemanı	57
Şekil 4.4. $(0,0)$ noktası ile bağlı olan $\xi(s, t)$ Lagrange Baz Fonksiyonu	58
Şekil 5.1. $k(\xi)$ fonksiyonunun grafiği	76
Şekil 5.2. Problem 1 için yaklaşık çözümün grafiği	77
Şekil 5.3. Problem 1 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	78
Şekil 5.4. Problem 2 için yaklaşık çözümün grafiği	80
Şekil 5.5. Problem 2 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	80
Şekil 5.6. Problem 3 için yaklaşık çözümün grafiği	82
Şekil 5.7. Problem 3 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	82
Şekil 5.8. Problem 4 için yaklaşık çözümün grafiği	85
Şekil 5.9. Problem 4 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	85
Şekil 5.10. Problem 4 için $[0,0.35] \times [0,0.35]$ bölgesinde çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	86
Şekil 5.11. Problem 4 için $[0,0.6] \times [0,0.6]$ bölgesinde çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} (\xi = \nabla u ^2)$ 'nin grafiği	87

Şekil 5.12. Problem 5 için yaklaşık çözümün grafiği.....	90
Şekil 5.13. Problem 5 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ($\xi = \nabla u ^2$)'nin grafiği.....	90
Şekil 5.14. Problem 6 için yaklaşık çözümün grafiği.....	92
Şekil 5.15. Problem 6 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ($\xi = \nabla u ^2$)'nin grafiği.....	92
Şekil 5.16. Problem 7 için yaklaşık çözümün grafiği.....	94
Şekil 5.17. Problem 7 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ($\xi = \nabla u ^2$)'nin grafiği.....	94
Şekil 5.18. Problem 8 için yaklaşık çözümün grafiği.....	96
Şekil 5.19. Problem 8 için $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ($\xi = \nabla u ^2$)'nin grafiği.....	97



TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1. İndislerin lokal ve global sıralanması ('Aşağıdan yukarıya ve Soldan sağı' düzeni).....	66
Tablo 4.2. $e_{(i,j)}$ sonlu elemanın L x L boyutlu $K^{(ij)}$ sertlik matrisinin oluşturulması şeması	66
Tablo 4.3. Global sertlik matrisinin n . Satır elemanları	69
Tablo 4.4. Sağ taraf vektörünün n . Bileşeninin hesaplanması	70
Tablo 5.1. Problem 1 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	78
Tablo 5.2. Problem 2 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	81
Tablo 5.3. Problem 3 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	83
Tablo 5.4. Problem 4 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	87
Tablo 5.5. Problem 4 için [0,0.35] aralığında J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	88
Tablo 5.6. Problem 5 için [0,0.6] aralığında J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	91
Tablo 5.7. Problem 6 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	93
Tablo 5.8. Problem 7 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	95
Tablo 5.9. Problem 8 için J(u) fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi	97
Tablo 5.10. $u(x,y) = e^{x+y}$ ve $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için J(u) fonksiyonelinin değerlendirilmesi	99
Tablo 5.11. $u(x,y) = e^x + e^y$ ve $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için J(u) fonksiyonelinin değerlendirilmesi	99
Tablo 5.12. $u(x,y) = e^x + e^y$ ve $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için J(u) fonksiyonelinin değerlendirilmesi	100

BÖLÜM 1

1. Giriş

Mühendisliğin ve fiziğin birçok alanında diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini içeren problemlerle karşılaşılmaktadır (Ladyzhenskaya 1985). Bu problemler, lineer olmayan sınır değer problemleri ile modellenir. Lineer olmayan sınır değer problemlerinin içinde hem pratik hem de teorik açıdan önemli olan bir sınıf da monoton potansiyel operatörler ile ilgili sınır değer problemleridir.

Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri, birçok uygulamalı problemde sayısal modellemeye temel oluşturur. Sonlu farklar yöntemi, sınır değer probleminin varyasyonel formülasyonuna dayanır (Samarskii 2001). Sonlu elemanlar yöntemi ise, problemin klasik çözümünü temel alır. Geliştirilen her iki sayısal yaklaşım, diferansiyel denklemler üzerindeki bir problemi, cebirsel denklem sistemine dönüştürmektedir (Zienkiewicz 1977). Bu yöntemlerde, yaklaştırma hatası çok önemlidir.

Bölüm 2’de, monoton potansiyel operatörler ile ilgili temel kavramlar, bir tür lineer olmayan eliptik tip denklem için karışık sınır değer probleminin klasik ve zayıf çözümü, varlık ve teklik, lineer olmayan operatörlerin lineerleştirilmesi için bir soyut iterasyon yöntemi, dışbükeylik prensibi ve yaklaşık çözümün yakınsaması ele alınmıştır (Hasanov 2000).

Bölüm 3’de, karışık sınır değer problemine integro-enterpolasyon (balance) yöntemi uygulanmış ve sonlu fark şeması elde edilmiştir (Samarskii 2001).

Bölüm 4’de, incelenen lineer olmayan eliptik tip denklem için karışık sınır değer problemine, sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Önce sonlu elemanlar yöntemi

ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmış, daha sonra birinci tip dikdörtgen Lagrange sonlu elemanlar uzayında, lineer baz fonksiyonları tanımlanmış, lokal ve global sertlik matrisleri oluşturulmuştur (Hasanov 2001). Karışık sınır değer problemi için sonlu elemanlardan bir sonlu fark şeması elde edilmiş ve klasik sonlu fark şeması ile karşılaştırılmıştır.

Bölüm 5’de, sayısal çözüm örnekleri verilmiştir.



BÖLÜM 2

2. MONOTON ve POTANSİYEL OPERATÖRLER

2.1. Bir Tür Lineer Olmayan Eliptik Denklem İçin Karışık Sınır Değer Problemi

$$Au := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = F(x) , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

eliptik denklemini alalım. Burada, A özdeşlik operatördür. Eğer, $a_{ij}(x, u)$ katsayıları, u fonksiyonunun kendisine ve/veya türevlerine bağımlı ise, A operatörü, lineer olmayan operatördür. \mathbb{R}^2 'de,

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = F(x_1, x_2) , \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (2.2)$$

$$u(x_1, x_2) = 0 , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x_1, x_2) , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \quad (2.4)$$

sınır değer problemini ele alalım. Burada k katsayısı , çözüm fonksiyonunun gradientine bağlıdır.

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset , \quad \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \quad (2.5)$$

olmak üzere, (2.2)-(2.4) problemine, (2.2) bir tür lineer olmayan eliptik denklem için karışık sınır değer problemi denir.

Ω bölgesinde, (2.2) denklemini ve $\partial\Omega$ 'da (2.3)-(2.4) koşullarını sağlayan $u(x_1, x_2) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonuna, (2.2)-(2.4) karışık sınır değer probleminin klasik çözümü denir.

Çözüm fonksiyonun ikinci mertebeden sürekli türevi olmayabilir, ama bu fonksiyonlar, (2.2) denkleminin (2.3)-(2.4) koşullarını sağlayabilir. Bu durumda, klasik çözüm kavramını genelleştirme gereksinimi ortaya çıkar.

(2.2) denkleminin her iki tarafı keyfî $v = v(x_1, x_2)$ fonksiyonu ile çarpılıp, Ω bölgesinde integrallenirse,

$$-\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.6) eşitliğinin sol tarafına, Green formülü (Tuncer 1992) uygulanırsa,

$$\iint_{\Omega} \left[k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \right] dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} v ds \quad (2.7)$$

integral eşitliği bulunur ve burada, $v = v(x_1, x_2)$ fonksiyonunun,

$$v(x_1, x_2) = 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \quad (2.8)$$

koşulunu sağladığı varsayılırsa, $u(x_1, x_2)$ çözümünün,

$$\iint_{\Omega} \left[k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \right] dx_1 dx_2 := \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \varphi v ds \quad , \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \quad (2.9)$$

integral özdeşliğini sağladığı elde edilir.

$\forall v \in C_0^1(\Omega)$ için, (2.9) özdeşliğini sağlayan $u \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonuna, (2.2)-(2.4) karışık probleminin genelleşmiş veya zayıf çözümü denir.

Teorem 2.1. (Hasanov 2001) Eğer, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonu, (2.2)-(2.4) probleminin klasik çözüümü ise, aynı zamanda zayıf çözüüdüdür. Tersine, eğer, $u(x_1, x_2)$ fonksiyonu, hem zayıf çözüü, hem de $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ise, o halde, aynı zamanda (2.2)-(2.4) probleminin klasik çözüüdüdür.

İspat: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonu, (2.2)-(2.4) problemini sağlasın, yani u fonksiyonu, klasik çözüü olsun. $\forall v \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için , (2.6) eşitliği sağlandığında (2.9) integral özdeşliği sağlanır. Demek ki, (2.11) integral özdeşliğini sağlayan u fonksiyonu, zayıf çözüüdüdür.

Tersine, u fonksiyonu, (2.9) eşitliğini sağlasın ve $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olsun. (2.9)'da özdeşliğin sol tarafına Green formülünü tersinden uygularsak,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v] dx_1 dx_2 \\ &= - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \phi v ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde ederiz. (2.10) integral eşitliğinin sağ tarafını , (2.9) özdeşliğinin sağ tarafına eşitlersek,

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \phi v ds \\ &= \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \phi v ds, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.11)$$

olur. Buradan da, (2.2) denklemini elde ederiz. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

(2.9) özdeşliğinin sol tarafında, u ve v fonksiyonlarının sadece kısmi türevlerinin integrallenebilmesi (Lebesgue anlamında) istenmektedir. Bu nedenle, fonksiyonel analiz'den bilinen $L_2(\Omega)$ ve $H^1(\Omega)$ uzaylarının tanımlarını gözden geçirmekte yarar vardır (Renardy ve Rogers 1992, Kolmogorov ve Fomin 1977).

Karesi Ω 'da integrallenebilen fonksiyonlar sınıfına $L_2(\Omega)$ -uzayı denir (Kolmogorov ve Fomin 1977).

$$u \in L_2(\Omega), \quad \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = \overline{1, n},$$

$$L_2(\Omega) := \left\{ u(x) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \int_{\Omega} u^2(x) dx < +\infty \right\} \quad (2.12)$$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfına, $H^1(\Omega)$ -Sobolev uzayı denir:

$$H^1(\Omega) := \left\{ u(x), x \in \Omega : u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = \overline{1, n} \right\} \quad (2.13)$$

ile gösterilir. Klasik çözüm kavramı genelleştirilerek,

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : u(s) = 0, s \in \Gamma_1 \right\} \quad (2.14)$$

alt uzayında zayıf çözüm,

$$u \in H_0^1(\Omega),$$

$$\iint_{\Omega} [k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v] dx_1 dx_2 := \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \varphi(s) v(s) ds, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$k, F \in L_2(\Omega), \quad \varphi \in L_2(\Gamma_2) \quad (2.16)$$

olmalıdır.

2.2. Monoton Potansiyel Operatörler

2.2.1. Operatörlerin ve fonksiyonellerin gateaux türevi

B Banach uzayında her yerde yoğun B_1 lineer uzayında tanımlı lineer olmayan $A : B_1 \rightarrow B_1^*$ operatörünü ele alalım.

Tanım 2.1. (Rektorys 1975) $u \in B_1$ olsun. Eğer, $\forall v \in B_1$ için,

$$\frac{d}{dt} A(u + tv) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(u + tv) - A(u)}{t} = VA(u, v) \quad (2.17)$$

limiti var ise, $VA(u, v)$ 'ye $A(u)$ operatörünün $u \in B_1$ noktasında, Gateaux varyasyonu veya Gateaux türevi denir.

$VA(u, v)$ Gateaux türevi, $v \in B_1$ elemanına göre, türdeşdir ama lineer değildir.

$$VA(u, \alpha v) = \alpha VA(u, v), \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (2.18)$$

$$VA(u, v_1 + v_2) \neq VA(u, v_1) + VA(u, v_2) \quad (2.19)$$

Eğer verilen $u \in B_1$ için, $v \in B_1$ elemanına göre, $VA(u, v)$ Gateaux türevi lineer ise,

$$VA(u, v) = DA(u, v) = A'(u)v = (A(u), v) = A'(u; v) \quad (2.20)$$

şeklinde gösterilebilir. $A'(\cdot)$ 'ya $A(\cdot)$ operatörünün $u \in B_1$ noktasındaki Gateaux türevi denir.

Herhangi $u \in B_1$ için, $A'(\cdot)$ operatörü sınırlı ise, bu operatör sürekli olarak, B_1 'den B' 'ye genişletilebilir. Böylece, $A'(\cdot)$ operatörü, tüm B' 'de tanımlanmış olur.

Şimdi benzer kavramları, her yerde yoğun $B_1 \subset B$ 'de tanımlanmış olan lineer olmayan $J(u): B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli için verelim.

Tanım 2.2. (Rektorys 1975) Eğer, $\forall v \in B_1$ için

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = VJ(u, v) \quad (2.21)$$

limiti, var ve sonlu ise, $VJ(u, v)$ 'ye, $J(u)$ fonksiyonelinin $u \in B_1$ noktasında Gateaux varyasyonu veya Gateaux türevi denir.

Eğer, verilen $u \in B_1$ için $v \in B_1$ elemanına göre, $VJ(u, v)$ Gateaux türevi lineer ise,

$$VJ(u, v) = DJ(u, v) = J'(u)v = (J'(u), v) = J'(u; v) \quad (2.22)$$

ile gösterilir. $J'(\cdot)$ lineer fonksiyoneline, $J(\cdot)$ fonksiyonelinin $u \in B_1$ noktasındaki Gateaux türevi denir.

$u \in B_1$ için, $J'(\cdot)$ lineer fonksiyoneli sınırlı ise, bu fonksiyonel süreklidir ve sürekli olarak, tüm B uzayına genişletilebilir. Bu genişletilmiş fonksiyonele, $J(u)$ fonksiyonelinin $u \in B$ noktasındaki gradyanı denir ve

$$J'(u) = \text{grad } J(u), \quad u \in B \quad (2.23)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3. Eğer, $\forall v \in B$ için,

$$(\text{grad } J(u), v) = (A(u), v), \quad u \in B \quad (2.24)$$

olacak şekilde bir $A : B \rightarrow B^*$ operatörü varsa, o halde J fonksiyoneline, A operatörünün potansiyeli, A operatörüne de potansiyel operatör denir.

Varyasyon hesabından bilindiği gibi, $J(u)$ fonksiyoneli pozitif ve $u = u_0$ 'da en küçük değerini alıyorsa,

$$J'(u_0; v) = 0 \quad (2.25)$$

şeklindedir.

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} k(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} F u dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_2} \varphi u ds, \quad u \in H^1_0(\Omega) \quad (2.26)$$

fonskiyonelini ele alalım. Bu fonskiyonelin, Gateaux türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [2k(|\nabla(u + tv)|^2) (\nabla(u + tv)) \nabla v] dx_1 dx_2 \right. \\ & \left. - \iint_{\Omega} F(u + tv) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_2} \varphi(u + tv) ds \right\} \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (2.27)$$

olur. Sağ tarafın t 'ye göre tek değişkenli fonksiyon gibi türevi alınıp, daha sonra $t = 0$ yazılarak,

$$J'(u; v) = \iint_{\Omega} [k(|\nabla u|^2) (\nabla u) (\nabla v)] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_2} \varphi v ds \quad (2.28)$$

elde edilir. $u \in H^1_0(\Omega)$ zayıf çözüm ise, (2.28) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olacaktır. Bu ise, zayıf çözüm üzerinde $J(u)$ fonksiyonelinin Gateaux türevinin sıfır olması anlamına

gelir. $u \in H^1_0(\Omega)$ fonksiyonunun,

$$\iint_{\Omega} [k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v] dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} \phi v ds, \quad \forall v \in H^1_0[a, b] \quad (2.29)$$

eşitliğinden aranması problemine, varyasyonel problem denir. (2.28) eşitliğinin sağ tarafına ise varyasyonel problemin potansiyeli adı verilir.

Teorem 2.2. (Hasanov 2001) H reel sayılar üzerinde tanımlanmış Hilbert uzayı, $l: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineer ve sınırlı bir fonksiyonel olmak üzere,

$$u \in H : J(u) = \inf_{v \in H} J(v), \quad v \in H \quad (2.30)$$

en küçük değer problemini ele alalım. Burada,

$$J(u) = 0.5a_0(u, u) - l(u) \quad (2.31)$$

şeklindedir. $u \in H$ elemanının, (2.30) en küçük değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul,

$$u \in H : a_0(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H \quad (2.32)$$

varyasyonel probleminin çözümü olmasıdır.

İspat: $u \in H$ elemanı, (2.30) en küçük değer probleminin çözümü olsun. Bu durumda, $v \in H$ keyfi bir eleman ise herbir $t \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$J(u) \leq J(u + tv), \quad u + tv \in H \quad (2.33)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= 0.5a_0(u + tv, u + tv) - l(u + tv) \\ &= 0.5a_0(u, u) + ta_0(u, v) + 0.5t^2a_0(v, v) - l(u) - tl(v) \\ &= J(u) + t[a_0(u, v) - l(v)] + 0.5t^2a_0(v, v) \end{aligned} \quad (2.34)$$

eşitliğinin sağ tarafı, $t \in \mathbb{R}$ değişkenine göre, ikinci dereceden bir polinomdur ve $a_0(v, v) > 0$ 'dır. Bu durumda, polinomun en küçük değeri,

$$\left. \frac{dJ(u + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \{[a_0(u, v) - l(v)] + ta_0(v, v)\}_{t=0} \quad (2.35)$$

türevinin sıfır olduğu noktada gerçekleşir. Bu ise,

$$a_0(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H \quad (2.36)$$

sonucunu gösterir. Dolayısıyla, en küçük değer probleminin çözümü, aynı zamanda (2.32) varyasyonel probleminin çözümüdür.

$u \in H$, (2.32) varyasyonel probleminin çözümü olsun ve bu fonksiyonun (2.31) fonksiyoneline en küçük değer veren fonksiyon olduğunu ispatlayalım. (2.34) eşitliğinde $a_0(u, v) = l(v)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$J(u + tv) = J(u) + 0.5t^2 a_0(v, v) \quad (2.37)$$

elde edilir.

$a_0(v, v) > 0$ ve herbir $t \in \mathbb{R}$ sayısı için, $v \in H$ keyfi olduğundan, $w = u + tv$ olmak üzere,

$$J(w) \geq J(u), \quad \forall w \in H \quad (2.38)$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucuna varılır. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

Pozitif tanımlı ve özdeşlik A lineer operatörü, H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış olsun.

$$Au = F, u \in H, F \in H^* \quad (2.39)$$

operatör denklemleri, $v \in H$ ile çarpılarak sol tarafta elde edilen (Au, v) skaler çarpımından yararlanılarak, $a_0(u, v) = (Au, v)$ bilineer formu tanımlanabilir (Hasanov 2001).

A operatörünün özdeşlik olması ile $a_0(u, v)$ 'nin simetrikliği, A operatörünün pozitif tanımlı olması ile $a_0(u, v)$ 'nin pozitif tanımlılığı birbirine eşdeğerdir.

Teorem 2.3. (Hasanov 2001) A lineer operatörü, H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış özdeşlik ve pozitif tanımlı operatör olsun. Bu durumda, $u \in H$ elemanının,

$$0.5(Au, u) - (F, u) = \inf_{v \in H} \{0.5(Av, v) - (F, v)\} \quad (2.40)$$

en küçük değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul, u fonksiyonunun,

$$(Au, v) = (F, v), \forall v \in H \quad (2.41)$$

varyasyonel probleminin çözümü olmasıdır.

U lineer vektör uzayında,

$$(u, v)_A := a_0(u, v), u, v \in U \quad (2.42)$$

skaler çarpım tanımlayalım. Burada, $a_0(u, v)$ bir pozitif tanımlı, simetrik ve sınırlı bilineer fonksiyoneldir. Skaler çarpım özellikleri sağlandığından U lineer vektör uzayı, H_A uzayı şeklinde tanımlanabilir. H_A uzayında norm,

$$\|u\|_A := \sqrt{a_0(u, u)} \equiv (u, u)_A^{1/2} \quad (2.43)$$

şeklindedir.

$a_0(u, u)$ 'nin pozitif tanımlılığından,

$$\|u\|_A^2 = a_0(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \alpha > 0 \quad (2.44)$$

ve $a_0(u, u)$ 'nin sınırlılık özelliğinden ise,

$$\|u\|_A^2 = a_0(u, u) \leq M \|u\|_H \|u\|_H = M \|u\|_H^2 \quad (2.45)$$

bulunur. Bu eşitsizliklerden,

$$\gamma_1 \|u\|_H \leq \|u\|_A \leq \gamma_2 \|u\|_H, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad (2.46)$$

sonucuna varılır ($\gamma_1 = \sqrt{\alpha}, \gamma_2 = \sqrt{M}$).

Teorem 2.4. (Hasanov 2001) $a(w, v)$ fonksiyoneli, $H_A \times H_A$ üzerinde tanımlanmış sınırlı, simetrik ve pozitif tanımlı bilinear fonksiyonel, $l(w)$ fonksiyoneli de H_A üzerinde tanımlanmış sınırlı lineer fonksiyonel ise, bu durumda H_A 'da,

$$J(w) = 0.5a_0(w, w) - l(w) \quad (2.47)$$

fonksiyoneline en küçük değer veren tek bir $u \in H_A$ elemanı vardır:

$$J(u) = \inf J(w), \quad w \in H_A \quad (2.48)$$

İspat: $l(w)$ fonksiyoneli, H_A Hilbert uzayında tanımlanmış bir sınırlı lineer fonksiyonel ise, Riesz-Fisher teoremine göre, H_A 'da $l(w) = (u, w)_A$ eşitliğini

sağlayan ve $l(w)$ fonksiyoneliyle birebir tanımlanan tek bir $u \in H_A$ elemanı vardır ve

$\|u\|_A = \|u\|_A$ 'dır. $J(w)$ fonksiyoneli, $(a_0(w, w) = (w, w)_A)$

$$J(w) = 0.5(w, w)_A - (u, w)_A \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir.

$u \in H_A$ elemanının, $J(w)$ fonksiyoneline en küçük değer veren eleman olduğunu ispatlayalım. Bunun için ,

$$J(u) \leq J(w) , \forall w \in H_A \quad (2.50)$$

olması gerekir.

$$J(u) = 0.5(u, u)_A - (u, u)_A = -0.5(u, u)_A \quad (2.51)$$

olduğundan,

$$J(w) - J(u) = 0.5(w - u, w - u)_A \geq 0 \quad (2.52)$$

olur. Dolayısıyla, (2.50) eşitsizliği sağlandığından, $u \in H_A$ elemanı, $J(w)$ fonksiyoneline en küçük değer veren elemandır. Böylece,

$$J(w) = 0.5a_0(w, w) - l(w) \quad (2.53)$$

fonksiyonelinin H_A uzayında en küçük değeri,

$$J(u) = -0.5a_0(u, u) , u \in H_A \quad (2.54)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu teoremden ve Teorem 2.2'den zayıf çözümün varlığına ilişkin aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.5. (Hasanov 2001) $a_0(u, v)$ ve $l(v)$, $u, v \in H_A$ fonksiyonelleri, yukarıdaki teoremden tanımlanmış özelliklere sahip ise bu durumda ,

$$a_0(u, v) = l(v), \quad v \in H_A \quad (2.55)$$

varyasyonel probleminin H_A uzayında tek bir $u \in H_A$ çözümü vardır.

2.2.2. Operatörlerin monotonluk özellikleri

Tanım 2.4. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974) $B_0 \subset B$ olmak üzere $A: B_0 \rightarrow B^*$ operatör olsun. Eğer,

$$\forall u, v \in B_0, \quad (Au - Av, u - v) \geq 0 \quad (2.56)$$

ise, A 'ya monoton operatör denir.

Monoton operatörlerin bu tanımı, monoton fonksiyonların tanımının bir genelleşmesidir. Gerçekten de, $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ fonksiyonu, monoton artan (azalan) ise,

$$x_1 < x_2 \text{ ise } f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)), \quad x_1, x_2 \in [a, b] \quad (2.57)$$

koşulları sağlanır. Bu tanım,

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0 \quad (2.58)$$

şeklinde de verilebilir. Böylece, (2.58) eşitsizliği, (2.56) eşitsizliğine benzer.

Monoton operatör ile monoton fonksiyon arasındaki ilişkiyi inceleyelim. $u, v \in B_0$ için,

$$\varphi_{u,v}(t) = (A(u + tv), v) \quad , \quad t \in [a, b] \quad (2.59)$$

fonksiyonunu ele alalım.

Lemma 2.1. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974) $A : B_0 \subset B \rightarrow B^*$ operatörünün monoton olması için gerek ve yeter koşul, $\varphi_{u,v}(t)$ reel değerli fonksiyonun, $[0,1]$ aralığında monoton artan olmasıdır.

İspat: A operatörünün monoton olduğunu varsayalım. O halde, $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $t_2 > t_1$ için,

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v}(t_2) - \varphi_{u,v}(t_1) &= (A(u + t_2 v), v) - (A(u + t_1 v), v) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} (A(u + t_2 v) - A(u + t_1 v), u + t_2 v - (u + t_1 v)) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

elde edilir. Böylece, $\forall t_2 > t_1$ için $\varphi_{u,v}(t_2) \geq \varphi_{u,v}(t_1)$ olur.

$\varphi_{u,v}(t)$ fonksiyonunun monoton artan fonksiyon olduğunu varsayalım. Buna göre, $\varphi(1) - \varphi(0) \geq 0$ 'dır. $\varphi_{u,v}(t)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (A(u + v), v) - (Au, v) = (Av, v) \geq 0 \quad (2.61)$$

elde edilir. Böylece, $v = w - u$, $w \in B_0$ alınırsa,

$$(Aw - Au, w - u) \geq 0 \quad (2.62)$$

olur. $w \in B_0$ elemanı, keyfi olduğundan, A operatörü monotondur.

Lemma 2.2. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974) $A : B_0 \subset B \rightarrow B^*$ operatörünün Gateaux türevinin varolduğunu ve $u, v \in B_0$ için,

$$\Psi_{u,v}(t) = (A'(u + tv), v) \quad , \quad t \in [0,1] \quad (2.63)$$

reel değerli fonksiyonun sürekli olduğunu varsayalım. O halde, A operatörünün monotonluğu için gerek ve yeter koşul,

$$\forall u, v \in B_0 \quad \text{için} \quad (A'(u)v, v) \geq 0 \quad (2.64)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: A operatörünün monoton olduğunu varsayalım. O halde,

$$\forall s \in [0,1] \quad \text{için} \quad (A(u + sv) - Au, sv) \geq 0 \quad (2.65)$$

ve Newton-Leibnitz formülüne göre,

$$(A(u + sv) - Au, sv) = \int_0^s (A'(u + tv)v, sv) dt \quad (2.66)$$

olarak yazılabilir. Bu integrale, ortalama değer teoremi uygulanıp (2.65) eşitsizliği gözönünde bulundurulursa,

$$0 \leq (A(u + sv) - Au, sv) = s^2 (A'(u + s_0 v)v, v) \quad , \quad s_0 \in (0, s) \quad (2.67)$$

olur. Her iki taraf, $s^2 \neq 0$ 'a bölünerek, $s \rightarrow 0$ limit durumunda,

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A(u + sv) - Au, v)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (A'(u + s_0 v)v, v) = (A'(u)v, v) \quad (2.68)$$

elde edilir.

(2.64) eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayalım.

$$(Au - Av, u - v) = \int_0^1 (A'(v + t(u - v))(u - v), u - v) dt, \quad \forall u, v \in B_0 \quad (2.69)$$

özdeşliğinden faydalanılırsa ve integralin, (2.64) eşitsizliği gereği, $\forall t \in [0,1]$ için negatif olmadığı gözönüne alınırsa,

$$(Au - Av, u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in B_0 \quad (2.70)$$

elde edilir. Bu ise, A' 'nin monotonluğu anlamına gelir.

Tanım 2.5. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974) $A : B_0 \subset B \rightarrow B^*$ operatörü,

$$\forall u, v \in B_0 \quad \text{için} \quad (Au - Av, u - v) \geq \gamma \|u - v\|_B^2, \quad \gamma > 0 \quad (2.71)$$

koşulunu sağlıyorsa, A operatörüne güçlü monoton operatör denir.

A operatörünün lineer olduğu durumda, eğer, $A0 = 0$ ise yani B_0 uzayının sıfır elemanını, B^* uzayının sıfır elemanına dönüştüren A operatörünün güçlü monotonluk özelliğinden, operatörün pozitif tanımlılığı elde edilir. (2.71) eşitsizliğinde, $v = 0$ yazılırsa

$$\forall u \in B_0 \quad \text{için} \quad (Au, u) \geq \gamma \|u\|_B^2, \quad \gamma > 0 \quad (2.72)$$

olduğu görülür.

Tanım 2.6. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974) $A:H \rightarrow H^*$ ile tanımlı potansiyel operatör, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli de A operatörünün potansiyeli olsun. Eğer,

$$\forall u, v \in H, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad (2.73)$$

ise, f fonksiyoneline, dışbükey fonksiyonel denir.

Lemma 2.3. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974 , Vainberg 1992) Açık $B_0 \subset B$ dışbükey alt kümesinde tanımlı bir A operatörünün monoton olması için gerek ve yeter koşul, f fonksiyonelinin B_0 üzerinde dışbükey bir fonksiyonel olmasıdır.

İspat: $u, v \in B_0$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda u + (1-\lambda)v \in B_0$ 'dır.

$$\begin{aligned} \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \\ \lambda[f(u) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] + (1-\lambda)[f(v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] \end{aligned} \quad (2.74)$$

eşitliğin sağ tarafına, fonksiyoneller için,

$$f(u_1) - f(u_2) = \langle f'(u_1 + \tau(u_1 - u_2)), u_1 - u_2 \rangle, \tau \in [0,1] \quad (2.75)$$

Lagrange formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lambda[f(u) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] &= \lambda[f(\lambda u + (1-\lambda)u) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] \\ &= \lambda(1-\lambda) \langle f'(u + \tau_1(1-\lambda)(u-v)), u-v \rangle, \tau_1, \lambda \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)[f(v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] &= (1-\lambda)[f((1-\lambda)v + \lambda v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v)] \\ &= \lambda(1-\lambda) \langle f'(v + \tau_2\lambda(v-u)), v-u \rangle, \tau_2, \lambda \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.77)$$

eşitlikleri bulunur. $A(u) = \text{grad } f(u)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\langle f'(u), v \rangle = \langle A(u), v \rangle \quad (2.78)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \\ & = \lambda(1-\lambda) \langle A(u + \tau_1(1-\lambda)(u-v)), u-v \rangle - \langle A(v + \tau_2\lambda(v-u)), u-v \rangle, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$

elde edilir. Burada, w_1 ve w_2 'yi $w_1 = u + \tau_1(1-\lambda)(u-v)$ ve $w_2 = v + \tau_2\lambda(v-u)$ ile gösterelim. $w_1, w_2 \in B_0$ için $w_1 - w_2 = [1 + \tau_1 - \lambda(\tau_1 - \tau_2)](u-v)$ olur. Buradan, $\forall \lambda \in [0,1]$ ve $\forall u_1, u_2 \in B_0$ için,

$$\begin{aligned} & \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) - f(\lambda u + (1-\lambda)v) \\ & = \frac{\lambda(1-\lambda)}{1 + (1-\lambda)\tau_1 + \lambda\tau_2} \langle A(w_1) - A(w_2), w_1 - w_2 \rangle, \tau_1, \tau_2 \in [0,1], w_1, w_2 \in B_0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı pozitif olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Lemma 2.4. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974 , Vainberg 1992) A operatörünün, Gateaux anlamında lineer diferansiyeli varsa, A operatörü için,

$$\langle A(u+h) - Au, v \rangle = \langle A'(u+zh)h, v \rangle \quad (2.81)$$

Lagrange formülü geçerlidir.

İspat:

$$f(u; v) = \langle Au, v \rangle \quad (2.82)$$

olmak üzere $f(u)$ fonksiyoneli için,

$$f(u+h; v) - f(u; v) = \langle f'(u+zh; v), h \rangle \quad (2.83)$$

Lagrange formülü ve Gateaux türevinin tanımı kullanılarak,

$$\frac{1}{t} [f(u+th; v) - f(u; v)] = \frac{1}{t} [\langle A(u+th) - Au, v \rangle] \quad (2.84)$$

yazılır ve limit durumunda,

$$f'(u; v, h) := \langle f'(u; v), h \rangle = \langle A'(u)h; v \rangle := \langle A'(u; h), v \rangle \quad (2.85)$$

elde edilir. (2.83) ve (2.85) eşitliklerinden,

$$\langle A(u+h), v \rangle - \langle Au, v \rangle = f(u+h; v) - f(u; v) = \langle f'(u+zh; v), h \rangle = \langle A'(u+zh; h), v \rangle \quad (2.86)$$

şeklinde elde edilen eşitliğe de, A operatörü için Lagrange Formülü denir.

Teorem 2.6. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974 , Vainberg 1992)
A operatörünün monotonluğu için gerek ve yeter koşul, operatörün potansiyelinin dışbükey olmasıdır.

İspat: $f(u)$ fonksiyonelinin yerine $J(u)$ fonksiyoneli alalım. Eğer,

$$(J''(u; v), v) \geq 0 \quad (2.87)$$

ise, $J(u)$ fonksiyoneli, dışbükeydir.

$$(J'(u), v) = (Au, v) \quad (2.88)$$

olduğundan, bu eşitliğin bir kez daha Gateaux türevi alınır,

$$(J''(u; v), h) := \frac{d}{dt} (J'(u + th), v) \Big|_{t=0} \quad (2.89)$$

elde edilir. Buna, J fonksiyonelinin 2. dereceden h yönünde Gateaux türevi denir.

(2.88) eşitliğinin her iki tarafının, (2.89) şeklinde türevi alınırsa,

$$(J''(u; v), h) = \frac{d}{dt} (A(u + th), v) \Big|_{t=0} = (A'(u; h), v) \quad (2.90)$$

bulunur ve $h = v$ yazılarak,

$$(J''(u; v), v) = (A'(u; v), v) \quad (2.91)$$

elde edilir. (2.87) koşulundan,

$$(A'(u; v), v) \geq 0 \quad (2.92)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise, A 'nın monotonluğu anlamına gelir.

2.3. Çözümün Varlığı ve Tekliği

A operatörünün

$$\forall u, v \in B_0, \quad (Au - Av, u - v) \geq \gamma \|u - v\|_B^2, \quad \gamma > 0 \quad (2.93)$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Bu operatörün, B_0 uzayının $v = 0$ elemanını, B^* uzayının $A0 = 0$ elemanına dönüştürdüğünü kabul ederek, yukarıdaki eşitsizlikte $v = 0$ yazılırsa,

$$\forall u \in B_0, \quad (Au, u) \geq \gamma \|u\|_B^2, \quad \gamma > 0 \quad (2.94)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise, A 'nın pozitif tanımlılığının ifadesidir.

A operatörünün monoton potansiyel olması durumunda,

$$Au = F, \quad u \in B, \quad F \in B^* \quad (2.95)$$

operatör denkleminin çözümü için temel teoremi verelim.

Teorem 2.7. (Browder-Minty Teoremi) (Gajewski, Greger and Zacharias 1974)

$A : B \rightarrow B^*$ operatörü sürekli, güçlü monoton ve pozitif tanımlı operatör ise o halde, $\forall F \in B^*$ için (2.95) operatör denkleminin çözümü vardır ve tektir.

Eğer, $A0=0$ ise pozitif tanımlılık koşulu monotonluğun sonucu olarak sağlanır.

$u_1, u_2 \in B$, (2.95) denkleminin farklı çözümleri olsun. Bu durumda, $Au_1 = F$, $Au_2 = F$ özdeşliklerinin herbiri, $u_1 - u_2 \in B$ elemanı ile çarpılıp, birbirinden çıkarılırsa,

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) = 0 \quad (2.96)$$

elde edilir. Diğer yandan da, A operatörünün güçlü monotonluğundan,

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq \gamma \|u_1 - u_2\|, \quad \gamma > 0 \quad (2.97)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ifadelerin, birarada sağlanması için sadece $u_1 = u_2$ olmalıdır.

Eğer, $A0=0$ ve A operatörü güçlü monoton ise, Browder-Minty Teoremindeki pozitif tanımlılık koşulu ihmal edilebilir. Böylece, A güçlü monoton ve sürekli operatör ise, (2.95) denkleminin tek bir çözümü vardır.

Böylece, güçlü monotonluk durumunda, Browder-Minty Teoreminden çözümün hem varlığı hem de tekliliği elde edilir.

Lemma 2.5. (Gajewski , Greger and Zacharias 1974 , Vainberg 1992) Eğer, $f : B_0 \subset B \rightarrow B^*$ fonksiyoneli, A monoton potansiyel operatörünün gradyanı ise,

$$\forall u, v \in B_0 \text{ için } f(v) \geq f(u) + (Au, v - u) \quad (2.98)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\Psi(t) = (A(u + t(v - u)), v - u) \quad , \quad t \in [0,1] \quad (2.99)$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$v - u = \frac{1}{t}(u + t(v - u) - u) \quad (2.100)$$

olarak alınır ve A 'nın monotonluğundan,

$$\begin{aligned} & (A(u + t(v - u)) - Au, v - u) \\ &= \frac{1}{t}(A(u + t(v - u)) - Au, u + t(v - u) - u) \geq 0 \quad , \forall u, v \in B_0 \quad , \quad t \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.101)$$

olduğu görülür. Buradan da,

$$(A(u + t(v - u)), v - u) \geq (Au, v - u) \quad (2.102)$$

eşitsizliğinden ve

$$f(v) - f(u) = \int_0^1 (A(u + t(v - u)), v - u) dt \quad (2.103)$$

formülünden faydalanılarak,

bulunur. Bu ise, $u \in B_0 \subset B$ elemanının, (2.95) denkleminin çözümü olması anlamına gelir. Böylece ispat, tamamlanmış olur.

2.4. Dışbükeylik Prensibi ve Soyut İterasyon Yöntemi

Birçok uygulamalı problemlerin matematiksel modellenmesi, monoton potansiyel operatörler (Kufner ve Fucik 1980, Lions 1969) ve eliptik tip lineer olmayan diferansiyel denklemler ile verilir. Lineer olmayan operatörlerin farklı sınıfları için varlık, teklik ve lineer olmayan operatörlerin lineerleştirilmesi için soyut iterasyon şemasını oluşturmak ve yaklaşık çözümün yakınsaklığını ispatlamak için (Hasanov 2000) bazı yöntemler geliştirilmiştir. Dışbükeylik Prensibi de, monoton potansiyel operatörler için soyut iterasyon şemasının yakınsaklığı için yeter koşul olarak kullanılır.

$a(u; \cdot, \cdot)$ fonksiyoneli, $H \times H$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış olan sınırlı, sürekli, simetrik ve pozitif tanımlı bilinear form (Lions 1969) ve A operatörü de, $a(u; v, h)$ lineer olmayan fonksiyoneline karşılık gelen güçlü monoton potansiyel operatör (Gajewski, Greger ve Zacharias 1974) olsun. Bu durumda,

$$a(u; u, v) = \iint_{\Omega} k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx_1 dx_2 \quad (2.110)$$

olmak üzere

$$(Au, v) = a(u; u, v) \quad , \quad u, v \in H \quad (2.111)$$

şeklinde gösterilir. A operatörünün potansiyelini, $J(u)$ ile gösterelim. O zaman,

$$(J'(u), v) = a(u; u, v) \quad , \quad u, v \in H \quad (2.112)$$

olur.

Tanım 2.8. (Hasanov 2000) Eğer,

$$0.5a(u; v, v) - 0.5a(u; u, u) - J(v) + J(u) \geq 0 \quad , \quad u, v \in H \quad (2.113)$$

ise, A operatörü için 'dışbükeylik prensibi sağlanır' denir.

$$Au = F \quad , \quad u \in H \quad , \quad F \in H^* \quad (2.114)$$

lineer olmayan problemi ele alalım. H^* , H uzayının eşleniğidir. (2.114) probleminin zayıf çözümü,

$$\exists u \in H \quad , \quad a(u; u, v) = l(v) \quad , \quad \forall v \in H \quad (2.115)$$

şeklinde tanımlanır. $l(v) = (F, v)$ fonksiyoneli, H üzerinde lineer fonksiyoneldir.

Tanım 2.9. (Hasanov 2000)

$$\Pi(u) = J(u) - l(u) \quad , \quad u \in H \quad (2.116)$$

fonksiyoneline, (2.114) lineer olmayan probleminin potansiyeli denir. (2.115) lineer olmayan probleminin yaklaşık çözümü,

$$a(u_{n-1}; u_n, v) = l(v) \quad , \quad u_n, v \in H \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.117)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $u_0 \in H$ herhangi bir iterasyon başlangıcıdır.

(2.117) iterasyon şemasını, (2.114) lineer olmayan operatör denklemi için, soyut iterasyon şeması olarak tanımlayalım. Önce, eğer dışbükeylik prensibi sağlanıyorsa, (2.115) lineer olmayan probleminin potansiyeller dizisinin monoton azalan olduğunu ispatlayalım.

Lemma 2.6. (Hasanov 2000) A lineer olmayan operatörü için dışbükeylik prensibi sağlansın ve $\{u_n\}$, yaklaşık çözümler dizisi olsun. O zaman, $\{\Pi(u_n)\}$ dizisi, monoton azalandır.

İspat: (2.116) probleminde, u yerine u_{n-1} ve v yerine u_n yazılırsa,

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - 0.5a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - J(u_n) + J(u_{n-1}) \geq 0 \quad (2.118)$$

elde edilir.

$u_{n-1} \in H$ verilen bir fonksiyon, $a(u_{n-1}; \cdot, \cdot)$ ise simetrik ve bilinear form olduğu için, (2.117) lineerleştirilen problemin çözümü, aynı zamanda

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n) = \inf \{0.5a(u_{n-1}; v, v) - l(v)\} \quad , \quad v \in H \quad (2.119)$$

en küçük değer probleminin çözümüdür. Burada, $v \in H$ keyfi eleman olduğu için $v = u_{n-1} \in H$ alınır,

$$0.5a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - l(u_{n-1}) - [0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n)] \geq 0 \quad (2.120)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.118) denklemi ile (2.120) eşitsizlikleri alt alta toplanır,

$$J(u_{n-1}) - l(u_{n-1}) - [J(u_n) - l(u_n)] \geq 0 \quad (2.121)$$

elde edilir. Buradan,

$$\Pi(u_{n-1}) \geq \Pi(u_n) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.122)$$

sonucuna varılır. Bu da, $\{\Pi(u_n)\}$ dizisinin, monoton azalan dizi olduğunu gösterir. (2.116) ile tanımlı $\Pi(u)$ fonksiyoneli, aşağıdan sınırlı olduğu için, $\{\Pi(u_n)\}$ dizisi, yakınsar.

H normunda $u_n - u_{n-1}$ farkını inceleyelim.

Lemma 2.7. (Hasanov 2000) Eğer, A güçlü monoton potansiyel operatörü için dışbükeylik prensibi sağlanır ise,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \rightarrow 0 \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (2.123)$$

koşulu sağlanır.

İspat: $a(u_{n-1}; u, u)$ bilineer formun pozitif tanımlılığı kullanılarak ve u yerine $u_n - u_{n-1}$ alınarak,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|u_n - u_{n-1}\|^2 &\leq a(u_{n-1}; u_n - u_{n-1}, u_n - u_{n-1}) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_n) + l(u_n - u_{n-1}) \quad , \quad \alpha_0 > 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

yazılabilir. (2.124) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için simetriklik ve (2.117) problemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_n) &= a(u_{n-1}; u_n, u_{n-1} - u_n) + a(u_{n-1}; u_n, u_n) \\ &= l(u_{n-1} - u_n) + a(u_{n-1}; u_n, u_n) \end{aligned} \quad (2.125)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen eşitlik, (2.124) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|u_n - u_{n-1}\|^2 &\leq a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - a(u_{n-1}; u_n, u_n) - 2l(u_{n-1}) + 2l(u_n) \\ &\leq 2[\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)] \end{aligned} \quad (2.126)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha_0} [\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)]}^{1/2} \quad , \quad \alpha_0 > 0 \quad (2.127)$$

bulunur. Lemma 2.6'ya göre,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.128)$$

olur.

Teorem 2.9. (Hasanov 2000) Eğer, A güçlü monoton potansiyel operatör ise, bu koşulda (2.117) soyut iterasyon şeması ile tanımlı $\{u_n\}$ yaklaşık çözümler dizisi, (2.115) lineer olmayan probleminin $u \in H$ çözümüne, H normunda yakınsar.

İspat: A operatörü, güçlü monoton operatör olsun. u yerine u_{n-1} , v yerine u alınırsa,

$$(Au_{n-1} - Au, u_{n-1} - u) \geq \gamma_0 \|u_{n-1} - u\|^2, \quad \gamma_0 > 0 \quad (2.129)$$

bulunur. Ayrıca, (2.115) ve (2.117) problemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Au_{n-1} - Au, u_{n-1} - u) &= a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1} - u) - a(u; u, u_{n-1} - u) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) - l(u_{n-1} - u) + l(u_{n-1} - u) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) \end{aligned} \quad (2.130)$$

şeklinde yazılabilir. (2.129) eşitsizliğinden ise,

$$\gamma_0 \|u_{n-1} - u\|^2 \leq a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) \leq \alpha_1 \|u_{n-1} - u_n\| \|u_{n-1} - u\|, \quad \alpha_1 > 0 \quad (2.131)$$

elde edilir. Buradan,

$$\|u_{n-1} - u\| \leq \frac{\alpha_1}{\gamma_0} \|u_{n-1} - u_n\| \quad (2.132)$$

bulunur ve Lemma 2.7 uygulanarak, ispat tamamlanmış olur.

(2.127) ve (2.132) eşitsizliklerinden,

$$\|u_{n-1} - u\| \leq \frac{\alpha_1 \sqrt{2}}{\gamma_0 \sqrt{\alpha_0}} [\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)]^{1/2} \quad (2.133)$$

sonucuna varılır.

2.5. Bir Tür Eliptik Tip Lineer Olmayan Monoton Operatör için Dışbükeylik Yeter Koşulu

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.134)$$

lineer olmayan eliptik operatörü ve bu operatör için

$$Au = F, \quad x \in \Omega \quad (2.135)$$

$$u = 0, \quad \Gamma_1 \subset \partial\Omega \quad (2.136)$$

$$k(|\nabla u|^2) \nabla u|_{\Gamma_2} = \varphi, \quad \Gamma_2 \subset \partial\Omega \quad (2.137)$$

karışık sınır değer problemini ele alalım. Burada, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$ olsun (Hasanov 2000).

(2.135)-(2.137) lineer olmayan problemin zayıf çözümü,

$$\exists u \in \overset{0}{H^1}(\Omega), \quad a(u; u, v) = l(v), \quad \forall v \in \overset{0}{H^1}(\Omega) \quad (2.138)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$a(u; v, h) = \int_{\Omega} k(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla h dx \quad (2.139)$$

lineer olmayan,

$$l(v) = \int_{\Omega} Fv dx + \int_{\Gamma_2} \varphi v ds \quad (2.140)$$

ise, lineer fonksiyoneldir.

Burada, $H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(s) = 0, s \in \Gamma_1\}$ ve $H^1(\Omega)$ -Sobolev uzayıdır. $k = k(\xi)$, $\xi \in (0, \xi^*)$ fonksiyonunun, sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunu,

$$c_1 \geq k(\xi) \geq c_0 > 0 \quad (2.141)$$

ve $F(x) \in H^0(\Omega)$, $\varphi(s) \in H^0(\Gamma)$ koşullarını sağladığını varsayalım.

Önce, $H^1(\Omega)$ uzayında (2.135)-(2.137) problemi için çözülebilirlik koşullarını araştıralım. Bunun için, Teorem 2.7'yi kullanalım.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} k(\xi) d\xi \right\} dx \quad (2.142)$$

fonksiyoneli, A operatörünün potansiyelidir.

$$(J'(u), v) = \int_{\Omega} k(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx \quad (2.143)$$

olduğu açıkça görülür. $J(u)$ fonksiyonelinin ikinci mertebeden Gateaux türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
J''(u; v, h) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[k(|\nabla u + t\nabla h|^2) \nabla u + t\nabla h |\nabla v| \right] dx \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} \left[2k'(|\nabla u + t\nabla h|^2) \nabla u + t\nabla h |\nabla h| |\nabla u + t\nabla h| |\nabla v| + k(|\nabla u + t\nabla h|^2) \nabla h \nabla v \right] dx \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} \left[k(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla h + 2k'(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla h \nabla v \right] dx
\end{aligned} \tag{2.144}$$

elde edilir.

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \tag{2.145}$$

ve

$$|\nabla u \nabla v|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 = |\nabla u|^2 |\nabla v|^2 \tag{2.146}$$

özelliklerini kullanırsak, $h = v$ olması durumunda,

$$J''(u; v, v) = \int_{\Omega} \left[k(|\nabla u|^2) \nabla v|^2 + 2k'(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v|^2 \right] dx \tag{2.147}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca, $k = k(\xi)$ fonksiyonunun,

$$k(\xi) + 2k'(\xi)\xi \geq \gamma_0 > 0 \quad , \quad \xi \in (0, \xi^*) \tag{2.148}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. Bu durumda,

$$J''(u; v, v) \geq \gamma_0 \|\nabla v\|_0^2 \quad , \quad \gamma_0 > 0 \tag{2.149}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\|v\|_0^2 \leq C_\Omega^2 \|\nabla v\|_0^2, \quad C_\Omega > 0, \quad v \in H^1(\Omega) \quad (2.150)$$

Poincare Eşitsizliğinden (Ladyzhenskaya 1985) yararlanılarak ve,

$$\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1 - \sigma) \|\nabla v\|_0^2 \geq \sigma \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1 - \sigma}{C_\Omega^2} \|v\|_0^2 = \frac{1}{1 + C_\Omega^2} \|v\|_1^2, \quad \sigma \in [0, 1] \quad (2.151)$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$J''(u; v, v) \geq \frac{\gamma_0}{1 + C_\Omega^2} \|\nabla v\|_1^2, \quad \frac{\gamma_0}{1 + C_\Omega^2} > 0 \quad (2.152)$$

elde edilir.

Bu ise, $J(u)$ fonksiyonelinin güçlü dışbükeyliği anlamına gelir ve bu nedenle, (2.134) ile tanımlı A operatörü, güçlü monoton operatördür (Gajewski, Greger ve Zacharias 1974). Buradan,

$$(Au - Av, u - v) \geq \frac{\gamma_0}{1 + C_\Omega^2} \|u - v\|_1^2, \quad u, v \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0, C_\Omega > 0 \quad (2.153)$$

olduğu görülür.

Buradan, yukarıdaki ifadeler gözönünde bulundurularak, Teorem 2.7'nin bir özel durumu aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.10. (Hasanov 2000) $k = k(\xi)$ katsayısı, (2.141) ve (2.148) eşitsizliklerini sağlasın. Aynı zamanda, $F \in H^0(\Omega)$, $\varphi \in H^0(\Gamma)$ olsun. O halde, (2.138) lineer olmayan problemi, $H^1(\Omega)$ 'da tek çözüme sahiptir.

Teorem 2.11. (Hasanov 2000) Eğer, $k = k(\xi)$, $\xi \in (0, \xi^*)$ katsayısı,

$$k'(\xi) \leq 0 \quad (2.154)$$

koşulunu sağlarsa, bu durumda (2.134) ifadesi ile tanımlı A lineer olmayan operatörü için, (2.113) dışbükeylik prensibi sağlanır.

İspat:

$$\Phi(t) = \int k(\xi) d\xi \quad (2.155)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\Phi''(t) = k'(\xi)$ olduğu için (2.154) koşulu kullanılarak, $\Phi''(t) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle, $\Phi(t)$ fonksiyonu, bir dışbükey fonksiyondur. Dışbükey fonksiyonların bilinen özellikleri kullanılarak,

$$\Phi'(t)(t_2 - t_1) - \Phi(t_2) + \Phi(t_1) \geq 0 \quad , \quad t_2 > t_1 > 0 \quad (2.156)$$

elde edilir. Burada, t_1 ve t_2 yerine $|\nabla u|^2$ ve $|\nabla v|^2$ yazılarak,

$$k(|\nabla u|^2) \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) + \int_{|\nabla v|^2}^{|\nabla u|^2} k(\xi) d\xi \geq 0 \quad (2.157)$$

elde edilir. Diğer bir ifade ile, (2.139) ve (2.142) eşitlikleri ve (2.112) eşitsizliğinin sol tarafı kullanılarak,

$$\begin{aligned} & 0.5a(u; v, v) - 0.5a(u; u, u) - J(v) + J(u) \\ &= 0.5 \int_{\Omega} \left\{ k(|\nabla u|^2) \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) + \int_{|\nabla v|^2}^{|\nabla u|^2} k(\xi) d\xi \right\} dx \end{aligned} \quad (2.158)$$

bulunur. Buradan, (2.157) eşitsizliği göz önüne alınarak, dışbükeylik prensibinin sağlandığı görülür. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

(2.117) soyut iterasyon şemasını kullanarak, (2.138) lineer olmayan problemin $u_n \in H^1(\Omega)$ yaklaşık çözümünü tanımlayalım. Teorem 2.9 ve 2.10'u kullanarak, (2.135)-(2.137) karışık sınır değer problemi için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.12. (Hasanov 2000) $k = k(\xi)$ katsayısı, (2.141), (2.148), (2.154) koşullarını sağlasın ve $F \in H^0(\Omega)$, $\varphi \in H^0(\Gamma)$ olsun. Buna göre, (2.138) lineer olmayan problemin (2.117) iterasyon şeması ile tanımlı $u_n \in H^1(\Omega)$ yaklaşık çözümü, $n \rightarrow \infty$ olması durumunda H^1 normunda (2.138) probleminin $u \in H^1(\Omega)$ tek çözümüne yakınsar.

Ayrıca, yakınsaklık hatası için,

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{\sqrt{2c_1}}{\sqrt{c_0\gamma_0}} (1 + c_\Omega^2)^{3/2} [\Pi(u_n) - \Pi(u_{n+1})]^{1/2} \quad (2.159)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teoremin ilk kısmı, Teorem 2.9-2.11'den ispatlanabilir. Yakınsaklık hatasını değerlendirmek için, (2.127) ve (2.129) eşitsizliklerini kullanalım. (2.141) koşulundan,

$$|a(u; v, h)| \leq c_1 \|v\|_1 \|h\|_1 \quad (2.160)$$

sınırlılık koşulu alınarak ve Poincare eşitsizliği kullanılarak,

$$a(u; v, v) \geq \frac{c_0}{1 + c_\Omega^2} \|v\|_1^2 \quad (2.161)$$

elde edilir. Teorem 2.9 'un ispatından da,

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma_0}{1+c_\Omega^2} \|u_n - u\|^2 &\leq \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \\
 &= a(u_n; u_{n+1} - u_n, u_n - u) \\
 &\leq c_1 \|u_{n+1} - u_n\|_1 \|u_n - u\|_1
 \end{aligned} \tag{2.162}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\|u_n - u\|_1 \leq \frac{c_1(1+c_\Omega^2)}{\gamma_0} \|u_{n+1} - u_n\|_1 \tag{2.163}$$

elde edilir. Diğer taraftan ise , (2.127) ve (2.161) eşitsizliğinden,

$$\|u_{n+1} - u_n\|_1 \leq \sqrt{\frac{2(1+c_\Omega^2)}{c_0}} [\Pi(u_n) - \Pi(u_{n+1})]^{1/2} \tag{2.164}$$

bulunur. (2.163) ve (2.164) eşitsizlikleri ele alınarak, (2.159) eşitsizliği elde edilir.

Böylece, teorem ispatlanmış olur.

BÖLÜM 3

3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM

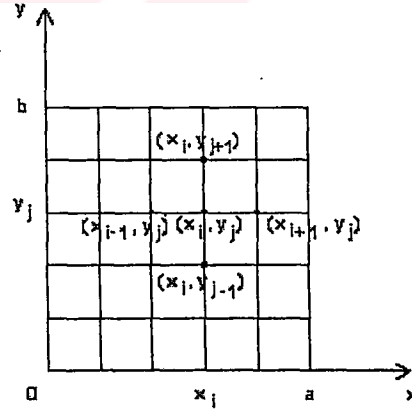
3.1. Sonlu Farklar Yönteminin Genel Kavramları

Kısmi türevli denklemleri, Sonlu Fark denklemleri ile ifade etmek için diferansiyel operatörler yerine fark operatörlerinin yazılması gerekir (Samarskii 2001).

$u(x, y)$ fonksiyonunun tanım bölgesi olarak,

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (3.1)$$

dikdörtgenini ele alalım (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 $W_{hr} = W_h \times W_r$ kafesi

Ox ekseninde,

$$W_h = \{x_i \in [0, a], i = 0, N-1 : x_{i+1} = x_i + h_{i+1}, x_0 = 0, x_N = a\} \quad (3.2)$$

ve Oy ekseninde ise,

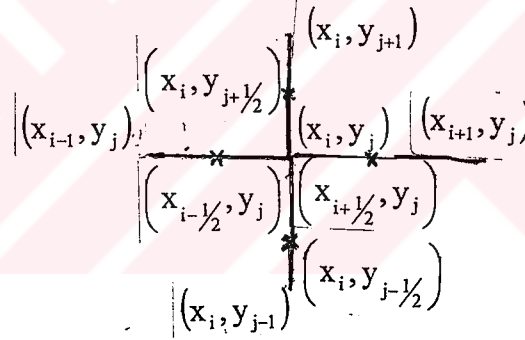
$$W_\tau = \{y_j \in [0, b], j = \overline{0, M-1} : y_{j+1} = y_j + \tau_{j+1}, y_0 = 0, y_M = b\} \quad (3.3)$$

kafesini tanımlayalım. Burada, x_i ve y_j noktalarına sırasıyla, W_h ve W_τ 'nin düğüm noktaları denir. W_h ve W_τ kafeslerinin Deşcartes çarpımından oluşan

$W_{hr} = W_h \times W_\tau$ kafesini ele alalım:

$$W_{hr} = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in W_h, y_j \in W_\tau, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}\} \quad (3.4)$$

W_{hr} kafesinde, herhangi bir (x_i, y_j) noktasını ele alalım (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 W_{hr} kafesinde herhangi bir (x_i, y_j) noktası

$u(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) noktasında, Taylor seri açılımını kullanalım:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_i, y_j) + u_x(x_i, y_j)(x - x_i) + u_y(x_i, y_j)(y - y_j) + \\ &\frac{1}{2!} [u_{xx}(x_i, y_j)(x - x_i)^2 + 2u_{xy}(x_i, y_j)(x - x_i)(y - y_j) + u_{yy}(x_i, y_j)(y - y_j)^2] \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left[(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_j) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n u(x, y) \Big|_{(x_i, y_j)} + R_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada, R_n kalan terimi,

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-x_i) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_j) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} u(x,y)_{(\xi,\eta)}, \quad \xi \in [x_0, x], \eta \in [y_0, y] \quad (3.6)$$

şeklindedir.

(3.5) ifadesinde, (x,y) yerine sırasıyla $(x_{i+1}, y_j), (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j-1})$ yazalım:

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{h_i}{1!} u_x(x_i, y_j) + \frac{h_i^2}{2!} u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h_i^3}{3!} u_{xxx}(x_i, y_j) + O(h_i^4) \quad (3.7)$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{h_i}{1!} u_x(x_i, y_j) + \frac{h_i^2}{2!} u_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h_i^3}{3!} u_{xxx}(x_i, y_j) + O(h_i^4) \quad (3.8)$$

$$u(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_j) + \frac{\tau_j}{1!} u_y(x_i, y_j) + \frac{\tau_j^2}{2!} u_{yy}(x_i, y_j) + \frac{\tau_j^3}{3!} u_{yyy}(x_i, y_j) + O(\tau_j^4) \quad (3.9)$$

$$u(x_i, y_{j-1}) = u(x_i, y_j) - \frac{\tau_j}{1!} u_y(x_i, y_j) + \frac{\tau_j^2}{2!} u_{yy}(x_i, y_j) - \frac{\tau_j^3}{3!} u_{yyy}(x_i, y_j) + O(\tau_j^4) \quad (3.10)$$

(3.7) ve (3.8) ifadelerinde, $u(x_i, y_j)$ 'ler eşitliğin sol tarafına alınıp, her iki taraf h 'a bölünürse,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = u_{x,ij} \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\tau_j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\tau_j} = u_{y,ij} \quad (3.12)$$

sağ ve sol sonlu fark türev ifadelerini, (3.7)'den (3.8) çıkarılıp, her iki taraf $2h$ 'a bölündüğünde ise,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = u_{x,ij} \quad (3.13)$$

merkezi sonlu fark türev ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde, (3.9) ve (3.10)'dan y değişkenine göre türevler için,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\tau} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = u_{y,ij} \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{\tau} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} = u_{y,ij}^- \quad (3.15)$$

ve

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\tau} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\tau} = u_{y,ij}^o \quad (3.16)$$

ifadeleri elde edilir.

İkinci mertebeden türevin yaklaşımı için, (3.11)'in sağ tarafından (3.12)'nin sağ tarafı çıkarılıp, h 'a bölünürse,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u_{x,ij} - u_{x,ij}^-}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = u_{xx,ij}^- \quad (3.17)$$

ve benzer şekilde, (3.14)'ün sağ tarafından (3.15)'in sağ tarafı çıkarılıp, τ 'ya bölünürse,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u_{y,ij} - u_{y,ij}^-}{\tau} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = u_{yy,ij}^- \quad (3.18)$$

ifadeleri bulunur.

Eşit adımlı olmayan W_{hr} kafesinde, birinci ve ikinci mertebeden türevler için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_{x,ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+1}} \quad (3.19)$$

$$u_{x,ij}^- = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_i} \quad (3.20)$$

$$u_{x,ij}^o = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\tilde{h}_i}, \quad \tilde{h}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}) \quad (3.21)$$

$$u_{xx,ij}^- = \frac{u_{x,ij} - u_{x,ij}^-}{\tilde{h}_i} = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_i} \right] \quad (3.22)$$

ve

$$u_{y,ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau_{j+1}} \quad (3.23)$$

$$u_{y,ij}^- = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau_j} \quad (3.24)$$

$$u_{y,ij}^o = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\bar{\tau}_j}, \quad \bar{\tau}_j = \frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1}) \quad (3.25)$$

$$u_{yy,ij}^- = \frac{u_{y,ij} - u_{y,ij}^-}{\bar{\tau}_j} = \frac{1}{\bar{\tau}_j} \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau_{j+1}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau_j} \right] \quad (3.26)$$

3.2. Sonlu Fark Denkleminin Elde Edilmesi

Lineer olmayan eliptik denklem için,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.27)$$

$$u(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (3.28)$$

$$k(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad (3.29)$$

karışık sınır değer problemini alalım.

Bölüm 2'den görüldüğü gibi (3.27) denklemi lineerleştirilerek,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(|\nabla u^{(n-1)}|^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(|\nabla u^{(n-1)}|^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.30)$$

denklemi elde edilir (Samarskii 2001).

Şimdi, bu denklemin sayısal integralleme yöntemiyle elde edilen sonlu fark yaklaşımını verelim (Samarskii 2001). (3.27) denkleminin sonlu fark yaklaşımını elde etmek için eşit adımlı W_h ve W_τ kafeslerinde ek noktalar tanımlayalım.

$$x_{i-1/2} = x_i - 0.5h \quad , \quad x_{i+1/2} = x_i + 0.5h \quad \text{ve} \quad y_{j-1/2} = y_j - 0.5\tau \quad , \quad y_{j+1/2} = y_j + 0.5\tau \quad \text{olsun.}$$

(3.30) denklemi $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ve $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ aralığında integrallenirse,

$$-\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k(|\nabla u^{(n-1)}|^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(|\nabla u^{(n-1)}|^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(x, y) dx dy \quad (3.31)$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}
& \tau \left[-k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\
& + h \left[-k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = h \tau F_{ij}, \quad (3.32) \\
& i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1}
\end{aligned}$$

yaklaşık ifadesi elde edilir.

Türevlerin ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{-k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right) \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right) \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} \\
& + \frac{-k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right) \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}}{\tau} = -F_{ij}, \quad (3.33) \\
& i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1}
\end{aligned}$$

şekline dönüştür. Sonuç olarak, bu ifade düzenlenirse (3.27) denklemi,

$$\begin{aligned}
& \frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{h^2} u_{i-1,j} + \frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{\tau^2} u_{i,j-1} \\
& - \left(\frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right) + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{h^2} + \frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right) + k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{\tau^2} \right) u_{i,j} \\
& + \frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{\tau^2} u_{i,j+1} + \frac{k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)} \right|^2 \right)}{h^2} u_{i+1,j} = F_{i,j}, \quad (3.34) \\
& i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Lineer olmayan (3.34) denklem sistemini lineerleştirmek için ise, aşağıdaki açık şema uygulanır:

$$\begin{aligned}
& \frac{k\left(\left|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)}\right|^2\right)}{h^2} u_{i-1,j}^{(n)} + \frac{k\left(\left|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)}\right|^2\right)}{\tau^2} u_{i,j-1}^{(n)} \\
& - \left[\frac{k\left(\left|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)}\right|^2\right) + k\left(\left|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n-1)}\right|^2\right)}{h^2} + \frac{k\left(\left|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)}\right|^2\right) + k\left(\left|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n-1)}\right|^2\right)}{\tau^2} \right] u_{i,j}^{(n)} \\
& + \frac{k\left(\left|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n-1)}\right|^2\right)}{\tau^2} u_{i,j+1}^{(n)} + \frac{k\left(\left|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n-1)}\right|^2\right)}{h^2} u_{i+1,j}^{(n)} = F_{i,j} \quad , \\
& i = \overline{1, N-1} \quad , \quad j = \overline{1, M-1}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

u -kesin çözüm, $u^{(n)}$ - yaklaşık çözüm, $u_h^{(n)}$ -yaklaşık sayısal çözüm olmak üzere, yaklaşım hatası,

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u^{(n)}\| + \|u^{(n)} - u_h^{(n)}\| \tag{3.36}$$

şeklinde değerlendirilir. $h \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\|u^{(n)} - u_h^{(n)}\| \rightarrow 0$ olduğu Sonlu Farklar teorisinden bellidir. $\|u - u^{(n)}\| \rightarrow 0$ olması ise (Hasanov 2000)'de kanıtlanmıştır.

BÖLÜM 4

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM

4.1. Giriş

Sonlu Elemanlar Yönteminin başlangıç tarihi, 19.yy'ın ikinci yarısı sayılsa da, aslında temelini, 1908 yılında W.Ritz'in özeşlenik operatörlerle ilgili diferansiyel problemlerin çözümü için önerdiği varyasyonel yöntem (Ritz 1908) oluşturmuştur. Daha sonra bu yöntem, B.Galerkin tarafından özeşlenik olmayan operatörler (Zienkiewicz 1977) için de geliştirilmiştir.

Doğadaki her olay, fizik kanunları yardımıyla ifade edilir. Katı hal mekaniği, akışkanlar mekaniği, kimyasal reaksiyonlar, nükleer reaktörler, plazma, akustik ve elektromanyetik problemlere, sonlu elemanlar yöntemi uygulanabilmektedir.

Sonlu elemanlar yönteminin son otuz yılda hızla gelişmesi ve hemen hemen bütün doğa ve mühendislik bilimlerinde kullanılmasındaki temel neden, klasik sonlu farklar yönteminden farklı olarak, sonlu elemanlar yönteminin doğrudan doğruya sınır değer problemlerine değil, bunların dengi olan varyasyonel problemlere hitap etmesidir.

Sonlu elemanlar yönteminin hitap ettiği çözüm kavramı, sonlu farklar yönteminin hitap ettiği klasik çözüm kümesini de içererek, daha geniş ve uygulama açısından çok önemli olan çözümleri de ele alma olanağı vermektedir. Sonlu elemanlar yönteminin bu üstünlüğü aynı zamanda ona matematik modellerle, bunların fiziksel benzeşikleri arasında bir köprü rolü oynama olanağı da sağlamaktadır.

4.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Temel Kavramları

Sonlu elemanlar yönteminin herhangi bir varyasyonel probleme uygulanması, iki temel aşamadan oluşur. Birinci aşamada, problemin verildiği Ω bölgesi, belirli koşulları sağlayan sonlu elemanlara bölünür ve bu elemanlara uygun baz fonksiyonları seçilir (Hasanov 2001 , Zienkiewicz 1977).

İkinci aşamada ise, sonlu boyutlu $H_h \subset H$ uzayında probleme karşılık gelen fonksiyonel bulunur. Bu fonksiyonele minimum değer veren $u_N \in H_N$ elemanın aranması için, lineer cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

$\Omega \subset E_n$ bölgesi, n -boyutlu E_n -Euclid uzayında ($n=1,2,3$), sınırı $\partial\Omega$ olan bir bölge olsun. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ kapalı bölgesini, aşağıdaki koşulları sağlayan sonlu sayıda e_m , $m = \overline{1, M}$ kapalı bölgelerine ayıralım:

$$a) \bigcup_{m=1}^M e_m = \bar{\Omega}; \quad (4.1)$$

$$b) \forall m \text{ için } \text{int } e_m = e_m \setminus \partial e_m \neq \emptyset; \quad (4.2)$$

$$c) \forall m_1 \neq m_2 \text{ için } \text{int } e_{m_1} \cap \text{int } e_{m_2} = \emptyset; \quad (4.3)$$

$$d) \text{Eğer, } e_{m_1} \cap e_{m_2} \neq \emptyset \text{ ise, } e_{m_1} \text{ ve } e_{m_2} \text{ bölgelerinin ortak sınırları vardır.} \quad (4.4)$$

Burada, $\text{int } e_m$ ile e_m sonlu elemanın iç bölgesi gösterilmiştir.(4.1)-(4.4) koşullarını sağlayan e_m kapalı bölgelerine, sonlu elemanlar denir. Ω bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesine ise, Ω bölgesinin T_h bölgüsü denir. Ω bölgesinin T_h bölgüsü, sonlu farklar yönteminde olduğu gibi, sonlu elemanların ortak sınırlarının, kesişme noktalarından oluşan W_h kafesini tanımlar (h , bölgenin bölünme parametresidir).

Düğüm noktaları olarak, sadece ortak sınırların kesişme noktaları olan (x_i, y_j) kabul edilmişse, bunlara, temel düğüm noktaları denir.

Sonlu elemanların köşe noktaları, tanımlanmış kafesin (x_i, y_j) düğüm noktalarını oluşturuyorsa, bu tür sonlu elemanlara uyumlu veya konform sonlu elemanlar denir. e_m sonlu elemanının tepe noktalarını, yani kafesin temel düğüm noktalarını p_i , (i , düğüm noktasının numarasıdır) ve bu nokta ile ilişkisi olan sonlu elemanların sayısını η_i ve bu sayılar kümesinin kendisini ise N_i ile gösterelim. Bu durumda,

$$\eta_i = \text{meas } N_i, \quad N_i = \{i : p_i \in e_m\} \quad (4.5)$$

olur.

Her bir p_i noktasında, aşağıdaki koşulları sağlayan $\xi_i(x) \in C(\Omega)$ sürekli fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\xi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad (4.6)$$

$$\xi_i(x) \begin{cases} \neq 0, & x \in \Omega_i \\ = 0, & x \notin \Omega_i \end{cases}, \quad \Omega_i = \cup e_m, \quad m \in N_i. \quad (4.7)$$

(4.6) koşulu, herbir $\xi_i(x)$ fonksiyonunun düğüm noktaları arasından sadece x_i düğüm noktasında sıfırdan farklı, diğer düğüm noktalarında sıfır olduğunu, (4.7) koşulu ise $\xi_i(x)$ fonksiyonunun Ω bölgesinin sadece Ω_i kısmında sıfırdan farklı olduğunu gösterir. (4.7) koşulunu sağlayan $\xi_i(x)$ fonksiyonuna, sonlu dayanaklı fonksiyon denir ve sonlu dayanağı $\Omega_i = \text{supp } \xi_i(x)$ ile gösterilir (Rektorys 1977).

(4.6) koşulunu sağlayan $\xi_i(x)$ fonksiyonlar sistemi, lineer bağımsızdır (Zienkiewicz 1977), yani,

$$\forall c_i, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N c_i \xi_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0, i = \overline{1, N} \quad (4.8)$$

$\xi_i(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu boyutlu uzayı $H_h \subset H$ ile, kafesin düğüm noktalarının sayısını ise N ile gösterirsek, herhangi $u_h \in H_h$ fonksiyonu,

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N c_j \xi_j(x), \quad x \in \Omega \quad (4.9)$$

şeklinde olur.

Tanım 4.1. (4.6)-(4.7) özelliklerine sahip $\xi_i(x)$ fonksiyonlar sisteminin belirlediği H_h uzayına Lagrange sonlu elemanlar uzayı, bu fonksiyonlara da Lagrange baz fonksiyonları denir (Zienkiewicz 1977).

Lagrange sonlu elemanların tanımından ve (4.6) koşulundan, c_i parametreleri, $u_h(x)$ fonksiyonunun $x = P_i$ düğüm noktalarındaki değerleridir:

$$u_h(P_i) = c_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (4.10)$$

Lagrange sonlu elemanlar uzayının temel özellikleri, bu uzayda fonksiyonların sürekli olması, aranan parametrelerin ise yaklaşık çözümün kafesin düğüm noktalarındaki değerlerinden oluşmasıdır.

W_h kafesinin temel düğüm noktaları (sonlu elemanların tepe noktaları) kullanılarak, elde edilen sonlu elemanlara birinci tip sonlu elemanlar denir. Bazı durumlarda, H uzayı sonlu boyutlu H_h uzayı ile yaklaştırıldığında temel düğüm noktaları ve onlara bağlı baz fonksiyonları yeterli olmaz ve bu nedenle, ek düğüm noktalarının alınması gerekir.

T_h bölgesinde sonlu elemanların kenarlarının orta noktaları olan $P_{ij} = (P_i + P_j)/2$ noktalarını, aralık nokta olarak tanımlayalım. Böyle, aralık noktalar alınarak tanımlanan sonlu elemanlara ikinci tip sonlu elemanlar denir.

Birçok durumda, sonlu boyutlu H_h uzayında minimum kılınan fonksiyonelin değerini hesaplamak için, işlemlerin tümünü bir pilot sonlu elemanda yapmak ve daha sonra, uygun dönüşümlerin yardımı ile, elde edilen sonuçları, her bir sonlu elemana genellemek mümkündür. Sonlu elemanlar yöntemi teorisinde, bu bağıntılarda, afin sonlu elemanlar ailesinin önemli bir yeri vardır. Bilindiği gibi, afin dönüşümünde, düzlemde paralel doğrular paralel, kesişen doğrular kesişen doğrulara geçer. Afin dönüşümünün analitik ifadesi,

$$\tilde{x} = Ax + b \quad (4.11)$$

formülü ile verilir. Burada A , $n \times n$ boyutlu kare matris, x , \tilde{x} ve b ise E_n Euclid uzayında n -boyutlu vektörlerdir. A matrisi için $\det A \neq 0$ olduğu varsayılmaktadır.

Tanım 4.2. Eğer, T_h bölgesünün tüm sonlu elemanları, afin dönüşümü ile yalnız bir pilot sonlu elemandan elde edilirse, bu sonlu elemanlar ailesine afin sonlu elemanlar ailesi denir (Zienkiewicz 1977).

Tek boyutlu problemlerde $[0,1]$ aralığı, iki boyutlu problemlerde ise tepe noktaları $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ olan dikdörtgen, N boyutlu problemlerde ise, kenarları koordinat eksenleri üzerine yerleşen ve kenarlarının uzunlukları bire eşit olan n boyutlu küp, pilot sonlu eleman olabilir. Pilot sonlu elemanın böyle basit seçilmesi, lineer cebirsel denklem sistemi matrisinin ve sağ taraf vektörünün bileşenlerinin hesaplanması işlemlerini kolaylaştırır.

4.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Genel Şeması

Aşağıdaki varyasyonel problemi ele alalım:

$$\exists u \in H, \quad a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H \quad (4.12)$$

Burada, $a(u, v)$ ve $b(v)$ sırasıyla bilinear ve linear formlardır. (4.12) probleminin

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \xi_i \quad (4.13)$$

yaklaşık çözümü arandığında,

$$\sum_{j=1}^N a(\xi_i, \xi_j) c_j = b(\xi_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (4.14)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir (Hasanov 2001). Lagrange sonlu elemanlarını kullanarak, (4.14) denklem sisteminin elde edilmesini araştıralım (Ciarlet and Raviart 1972).

$u(x)$ fonksiyonunun tanımlandığı Ω bölgesinin sonlu elemanlara ayrıldığını ve T_h bölgesinin birinci tip sonlu elemanlardan oluştuğunu varsayalım. Önce $u_h(x)$ yaklaşık çözümünü, H_h -birinci tip Lagrange sonlu elemanlar uzayında arayalım. Uygulamalarda, $a(u, v)$ ve $b(v)$, diferansiyel denklem ve sağ taraf ile ilgili ifadelerin Ω bölgesini veya bunun $\Gamma = \partial\Omega$ sınırında integrallerini ifade eder. Bu nedenle, $a(u, v)$ ve $b(v)$ formlarının Ω bölgesindeki e_m sonlu elemanlarına göre toplamsal olduğu göz önüne alınırsa,

$$a(u, v) = \sum_{m=1}^M a_m(u, v), \quad b(v) = \sum_{m=1}^M b_m(v) \quad (4.15)$$

elde edilir (M , sonlu elemanların sayısıdır). Burada, $a_m(u, v)$ ve $b_m(v)$, sırasıyla bilinear ve lineer formların e_m sonlu elemanı üzerindeki izdüşümüdür:

$$a_m(u, v) = a(u, v)|_{e_m}, \quad b_m(v) = b(v)|_{e_m} \quad (4.16)$$

Tanım 4.3. $\xi_i(x)$, $i = \overline{1, N}$ baz fonksiyonlarının verilmiş e_m sonlu elemanı üzerindeki,

$$\varphi_{m,i}(x) = \xi_i(x)|_{e_m} \quad (4.17)$$

izdüşümünden oluşan $\varphi_{m,i}(x)$ fonksiyonuna, e_m sonlu elemanın form fonksiyonu denir (Zienkiewicz 1977).

e_m sonlu elemanında izdüşümleri sıfırdan farklı olan baz fonksiyonlarının indislerinin oluşturduğu,

$$M_m = \{i : \varphi_{m,i}(x) \neq 0\} \quad (4.18)$$

kümesini tanımlayalım. e_m sonlu elemanı üzerinde tanımlanmış form fonksiyonlarının sayısını μ_m ile gösterelim. (4.15) toplamsallık özelliği, (4.14)'de göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_m(\xi_i, \xi_j) b_j = \sum_{m=1}^M b_m(\xi_i) \quad i = \overline{1, N} \quad (4.19)$$

lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

Form fonksiyonunun tanımına göre, $a_m(\xi_i, \xi_j) = a_m(\varphi_{m,i}, \varphi_{m,j})$ 'dir ve sadece, $k \in M_m$ için $\varphi_{k,m}(x) \neq 0$ olduğundan dolayı, her bir $i = \overline{1, N}$ için,

$$a_m(\varphi_{m,i}, \varphi_{m,j}) \begin{cases} \neq 0, & j \in M_m \\ = 0, & j \notin M_m \end{cases} \quad (4.20)$$

olur. Böylelikle, (4.20) özelliği, (4.19) sisteminde göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j \in M_m} \sum_{m=1}^M a_m(\varphi_{m,i}, \varphi_{m,j}) c_j = \sum_{m=1}^M b_m(\varphi_{m,i}), \quad i = \overline{1, N} \quad (4.21)$$

sistemi elde edilir.

$$K_m = \{ \{ k_{i,j}^m \} \} \equiv \{ \{ a_m(\varphi_{m,i}, \varphi_{m,j}) \} \}, \quad b_m = \{ \{ b_m(\varphi_{m,i}) \} \}, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (4.22)$$

$$K = \sum_{m=1}^M K_m, \quad b = \sum_{m=1}^M b_m$$

ifadelerini tanımlayalım.

Burada, K_m ve K matrislerinin $N \times N$ boyutlu olduğu bellidir. K_m matrisine e_m sonlu elemanın, K matrisine ise (4.12) probleminin sertlik (stifness) matrisi denir. (4.20) özelliğinden anlaşılacağı gibi, K matrisinin içinde çok sayıda sıfır elemanı vardır. K matrisinin içinde çok sayıda sıfır vardır. K matrisinin bu özelliği, Sonlu Elemanlar Yöntemine özgüdür ve bu, $\xi_i(x)$ baz fonksiyonlarının sonlu dayanıklı fonksiyon olmalarının sonucudur. K 'nin band matrisi olması, hesapları basitleştirir ve bilgisayarın belleğine yazılma işlemini kolaylaştırır.

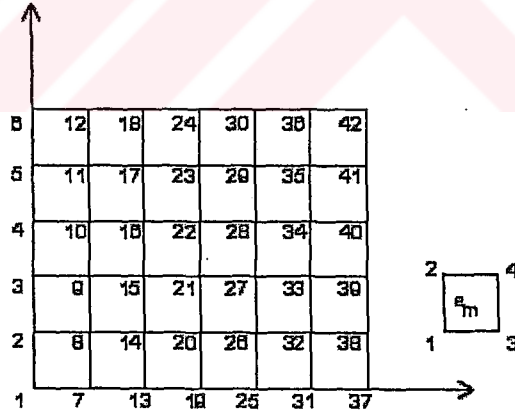
e_m sonlu elemanın K_m sertlik matrisini ele alalım. Bu matrisin, sıfırdan farklı elemanları, (4.20) özelliğinden anlaşıldığı gibi, en çok $\mu_m \times \mu_m$ sayıda olabilir. Bu durumda, elemanlarının sayısı μ_m olan M_m kümesinin elemanlarını $1, 2, \dots, \mu_m$ diye yeniden sıralarsak, düğüm noktalarının kafesteki global sıralamasına ek olarak, e_m sonlu elemanın kendisine özgü bir lokal sıralama da elde ederiz. Bu kümeyi, $Z_m = \{1, 2, \dots, \mu_m\}$ ile gösterelim. M_m ve Z_m kümeleri arasında birebir ilişki kurarak, kafesin her bir sonlu elemanında indislerin hem global hem de lokal numaralarını

tanımlayabiliriz. Bu, e_m sonlu elemanı ile ilgili $N \times N$ boyutlu K_m sertlik matrisi ve N boyutlu b_m sağ taraf vektörünün yerine, bunların sadece sıfır olmayan elemanlarından oluşan ve boyutları, karşılıklı olarak $\mu_m \times \mu_m$ ve μ_m olan,

$$K_m^0 = \left\{ \left\{ k_{ij}^m \right\}_{i,j \in Z_m} \right\}, \quad b_m^0 = \left\{ \left\{ b_m^{(i)} \right\}_{i \in Z_m} \right\} \quad (4.23)$$

matris ve vektörünü tanımlama olanağı sağlar. $M_m \xrightarrow{I_m} Z_m$ birebir I_m dönüşümünü alalım: Ω bölgesinin T_h bölgesünün yapıldığı W_h kafesinin düğüm noktaları belirli biçimde numaralanır. Bu numaralamaya düğüm noktalarının global numaralanması denir. M_m kümesi, K_m matrisinin sıfırdan farklı elemanlarının hangi satır ve sütunda olduğunu göstermektedir.

I_m birebir dönüşümü ile e_m sonlu elemanın düğüm noktalarının global numaraları uygun şekilde 'aşağıdan yukarıya, soldan sağa' numaralama kuralı ile 1'den μ_m 'e kadar lokal numaralara geçer (Şekil:4.1).



Şekil 4.1 e_m sonlu elemanın düğüm noktalarının numaralandırılması

Bir başka deyişle, K_m matrisinin sadece sıfırdan farklı elemanlarını kullanmakla $\mu_m \times \mu_m$ boyutlu K_m^0 matrisi kurulur. Bu şekilde tanımlanan K_m^0 matrisine, e_m sonlu elemanın lokal sertlik matrisi denir. Böylece, I_m dönüşümünden sonra e_m sonlu elemanı için denklemler sistemi,

$$\sum_{j=1}^{H_m} k_{ij}^m c_j = b_m^{(i)}, \quad i \in Z_m \quad (4.24)$$

olur.

4.4 Birinci Tip Dikdörtgen Lagrange Sonlu Elemanları

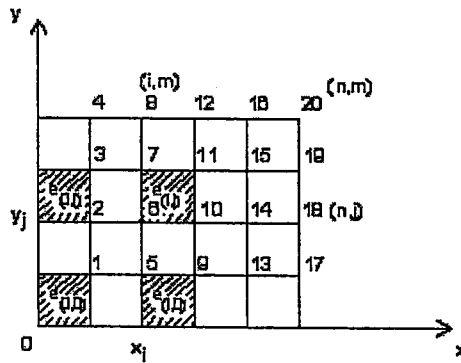
Bir boyutlu problemlerde, sonlu eleman $e_m = [x_{m-1}, x_m]$ aralığından oluşur. İki boyutlu problemlerde ise, dörtgen ve üçgen elemanlar söz konusudur.

İki boyutlu halde; dikdörtgen sonlu elemanlar, bir boyutlu sonlu elemanın topolojik çarpımı olmakla beraber, bir boyutlu durumun genelleşmiş halidir.

4.4.1. Bilineer baz fonksiyonlarının tanımlanması

Sonlu Elemanlar yöntemini uygulamak için Ω bölgesine aşağıdaki gibi dikdörtgen elemanlarla bölge yapalım. $W_{hr} = W_h \times W_r$ kafesini alalım. Bu durumda, geometrik olarak, sonlu eleman $e_{(ij)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ dikdörtgeninin oluşturduğu elemandır (Şekil 4.2).

Aranan parametreler olarak, $u = u(x, y)$ çözümünün (x_i, y_j) düğüm noktalarındaki değerlerini kabul edelim. Bu durumda, $\{\xi_{ij}(x, y)\}$ baz fonksiyonlarıyla yaklaşık çözümü,



Şekil 4.2 Ω bölgesinin dikdörtgen sonlu elemanlara bölünmesi

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N c_{ij} \xi_{ij}(x, y) \quad (4.25)$$

$$c_{ij} = u_h(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M} \quad (4.26)$$

gibi tanımlanabilir. Sonlu Elemanlar Yönteminin genel şemasına uygun olarak, $\xi_{ij}(x, y)$ baz fonksiyonlarının, sürekli ve sonlu dayanıklı olduğunu varsayalım.

$\xi_{ij}(x, y)$ baz fonksiyonu, kendi indisiyle aynı indisli düğüm noktasında bir, diğer indisli düğüm noktalarında ise sıfır, değerlerini almaktadır. Ayrıca, $\xi_{ij}(x, y)$ baz fonksiyonunun sadece (x_i, y_j) noktası ile ilişkisi olan sonlu elemanlarda sıfırdan farklı, bunların dışındaki elemanlarda sıfır olması koşulunu da buna eklersek, fonksiyonunun sonlu dayanağının ($\text{supp } \xi_{ij}(x)$),

$$\Omega_{ij} = e_{(i-1, j-1)} \cup e_{(i, j-1)} \cup e_{(i, j)} \cup e_{(i-1, j)} \quad (4.27)$$

bölgesi olduğu anlaşılır.

$$\xi_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ij,kl} = \begin{cases} 0 & , (i, j) \neq (k, l) \\ 1 & , (i, j) = (k, l) \end{cases} \quad (4.28)$$

koşulunu sağlayan sürekli $\xi_{ij}(x, y)$ fonksiyonu, $P(x, y) = (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 y)$ bilineer polinomlar sınıfından aranabilir. Bu durumda, her bir sonlu elemanda, $\xi_{ij}(x, y)$ fonksiyonunu tek değerli tanımlamak mümkündür. Böyle bir polinom, her değişkene göre lineerdir.

Böyle tanımlanmış $P(x, y)$ polinomu, bir bilineer fonksiyon olduğundan ve $e_{(ij)}$ sonlu elemanı, bir boyutlu elemanların $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ çarpımından oluştuğundan, bu tür sonlu elemanlara bilineer elemanlar denir. Arananlar, yaklaşık çözümün, sadece

kafesin (x_i, y_j) düğüm noktalarındaki değerleri olduğundan, bu sonlu elemanlar, birinci tip Lagrange sonlu elemanlarıdır. Baz fonksiyonunu önce,

$$e = \{(s, t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\} \quad (4.29)$$

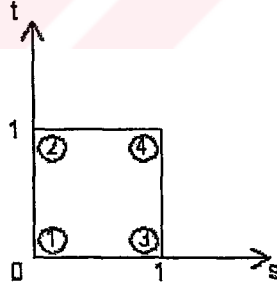
pilot sonlu elemanında tanımlayalım (Şekil 4.3). Bunun için, $(s, t) = (0, 0)$ noktasında bire, $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ noktalarında sıfıra eşit olan iki değişkenli bilinear,

$$\Psi(s, t) = (a_0 + a_1 s)(b_0 + b_1 t) \quad (4.30)$$

fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Bu dört koşuldan, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ olarak belirlenir ve

$$\Psi(s, t) = (1 - s)(1 - t) \quad (4.31)$$

şeklindedir.

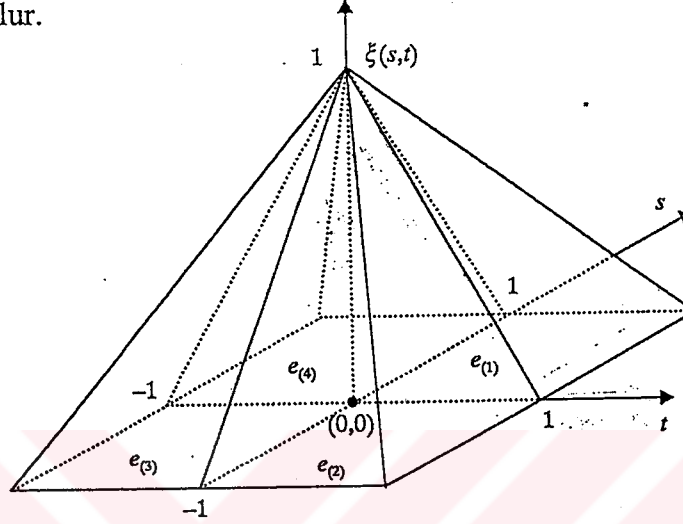


Şekil 4.3 $e = \{(s, t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ pilot sonlu elemanı

$(0, 0)$ noktasında bire eşit olan ve $e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}, e_{(4)}$ pilot sonlu elemanlarının diğer tepe noktalarında sıfır değerini alan $\xi(s, t)$ baz fonksiyonu

$$\xi(s,t) = \begin{cases} (1-s)(1-t) , & 0 \leq s \leq 1 , 0 \leq t \leq 1 \\ (1-s)(1+t) , & 0 \leq s \leq 1 , -1 \leq t \leq 0 \\ (1+s)(1-t) , & -1 \leq s \leq 0 , 0 \leq t \leq 1 \\ (1+s)(1+t) , & -1 \leq s \leq 0 , -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

şeklinde olur.



Şekil 4.4 (0,0) noktası ile bağlı olan $\xi(s,t)$ Lagrange Baz Fonksiyonu

$\xi(s,t)$ baz fonksiyonu (Şekil 4.4) kullanılarak, kafesin her bir (x_i, y_j) noktasıyla bağlı olan ve (4.28) koşulunu sağlayan $\xi_{ij}(x,y)$ bilinear baz fonksiyonu yazılabilir. Bunun için,

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i , \quad \tau_{j+1} = y_{j+1} - y_j , \quad i = \overline{0, N-1} , \quad j = \overline{0, M-1} \quad (4.33)$$

gösterimlerini kabul ederek,

$$\begin{cases} s, t \in [-1, 0] \text{ için } s = \frac{x - x_i}{h_i} , \quad t = \frac{y - y_j}{\tau_j} \\ s, t \in [0, 1] \text{ için } s = \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1}} , \quad t = \frac{y - y_{j+1}}{\tau_{j+1}} \end{cases} \quad (4.34)$$

afin dönüşümünü kullanalım. Bu durumda, kafesin her bir iç düğüm noktası için $(1 \leq i \leq N-1 , 1 \leq j \leq M-1)$ baz fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$\xi_{ij}(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{y - y_j}{\tau_{j+1}}\right), & (x, y) \in e_{(i,j)} \\ \left(1 - \frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{y - y_j}{\tau_j}\right), & (x, y) \in e_{(i,j-1)} \\ \left(1 + \frac{x - x_i}{h_i}\right) \left(1 - \frac{y - y_j}{\tau_{j+1}}\right), & (x, y) \in e_{(i-1,j)} \\ \left(1 + \frac{x - x_i}{h_i}\right) \left(1 + \frac{y - y_j}{\tau_j}\right), & (x, y) \in e_{(i-1,j-1)} \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_{ij} \end{cases} \quad (4.35)$$

Kafeste, $(N+1)(M+1)$ sayıda düğüm noktası vardır. Bu noktalardan, $(x_0, y_j) = (0, y_j)$, $j = \overline{1, M}$; $(x_i, y_0) = (x_i, 0)$, $i = \overline{1, N}$ noktaları, sınırın Γ_1 kısmına aittir. Γ_1 kısmına ait olan noktaların sayısı, $N + M + 1$ 'e eşittir. Bu noktalarda, (4.20) özelliği verildiği için çözüm fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri bellidir. Buna göre, (2.2)-(2.4) probleminin bilinmeyen sayısı $(N+1)(M+1) - (N+M+1) = NM$ olmalıdır. H_h , birinci tip Lagrange Sonlu Elemanlar uzayı, NM boyutludur. Sınır noktalarından, (i, M) , $i = \overline{1, N-1}$; (N, j) , $j = \overline{1, M-1}$ ve (N, M) için baz fonksiyonlarının tanımlanması gerekir. (4.41)'den yararlanılarak bu noktalardaki baz fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\xi_{i,M}(x, y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x - x_i}{h_i}\right) \left(1 + \frac{y - y_M}{\tau_M}\right), & (x, y) \in e_{(i-1, M-1)} \\ \left(1 - \frac{x - x_i}{h_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{y - y_M}{\tau_M}\right), & (x, y) \in e_{(i, M-1)} \\ 0, & (x, y) \notin e_{(i-1, M-1)} \cup e_{(i, M-1)} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\xi_{N,j}(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x-x_N}{h_N}\right) \left(1 + \frac{y-y_j}{\tau_j}\right), & (x,y) \in e_{(N-1,j-1)} \\ \left(1 + \frac{x-x_N}{h_N}\right) \left(1 - \frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right), & (x,y) \in e_{(N-1,j)} \\ 0, & (x,y) \notin e_{(N-1,j-1)} \cup e_{(N-1,j)} \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\xi_{N,M}(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x-x_N}{h_N}\right) \left(1 + \frac{y-y_N}{\tau_M}\right), & (x,y) \in e_{(N-1,M-1)} \\ 0, & (x,y) \notin e_{(N-1,M-1)} \end{cases} \quad (4.38)$$

4.4.2. Bilineer form fonksiyonları (Hasanov 2001)

Herbir $e_{(ij)}$ sonlu elemanı için serbestlik derecesini ifade eden $M_{(i,j)}$ kümesini tanımlayalım.

$$M_{(i,j)} = \{(i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)\}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1};$$

$$M_{(0,j)} = \{(1,j), (1,j+1)\}, \quad j = \overline{1, M-1}; \quad (4.39)$$

$$M_{(i,0)} = \{(i,1), (i+1,1)\}, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$M_{(0,0)} = \{(1,1)\}.$$

$e_{(ij)}$ sonlu elemanı ile bağlı olan form fonksiyonunun,

$$\varphi_{ij,kl}(x,y) = \xi_{l,k}(x,y) \Big|_{e_{(i,j)}}, \quad (l,k) \in M_{(i,j)} \quad (4.40)$$

tanımından yararlanılarak, $M_{(i,j)}$ kümesinin elemanlarının sayısının, bu form fonksiyonların sayısını belirlediği görülür.

İç düğüm noktalarında tanımlanmış $e_{(i,j)}$ sonlu elemanın form fonksiyonlarının analitik ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Hasanov 2001) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{ij,ij}(x,y) = \left(1 - \frac{x-x_i}{h_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right) \\ \varphi_{ij,i+1j}(x,y) = \left(1 + \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{y-y_j}{\tau_{j+1}}\right) \\ \varphi_{ij,ij+1}(x,y) = \left(1 - \frac{x-x_i}{h_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}}\right) \\ \varphi_{ij,i+1j+1}(x,y) = \left(1 + \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}}\right) \end{array} \right. , (x,y) \in e_{(i,j)} \quad (4.41)$$

4.4.3. Lokal sertlik matrisi

Sonlu Elemanlar Yönteminin genel şemasını ,

$$\exists u \in H^1_0(\Omega) , a(u; u, v) = l(v) , \forall v \in H^1_0(\Omega) \quad (4.42)$$

varyasyonel problemine uygulayalım. Burada,

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u; u, v) = \iint_{\Omega} k(|\nabla u|^2) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \\ b(v) = \iint_{\Omega} Fv dx dy + \int_{\Gamma_2} \phi v ds \end{array} \right. \quad (4.43)$$

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma_1\} \quad (4.44)$$

şekindedir. Bunun için , yaklaşık çözümün (4.25) formülüyle verilmiş ifadesini,

$$J(u_h) = 0.5a(u_h; u_h, u_h) - l(u_h) \quad (4.45)$$

fonksiyonelinde yazmak ve

$$\frac{\partial}{\partial c_{lk}} J \left(\sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq}(x, y) \right) = 0, \quad l = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, M} \quad (4.46)$$

koşulundan lineer cebirsel denklemler sistemini elde etmek gerekir.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial c_{lk}} J \left(\sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial c_{lk}} 0.5a \left(\sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq}; \sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq}, \sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq} \right) - b \left(\sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} \xi_{pq} \right) \\ &= \sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N a(\xi_{pq}; \xi_{pq}, \xi_{lk}) c_{pq} - b(\xi_{lk}), \quad l = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Bu, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında yazılırsa,

$$\sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N a(\xi_{pq}; \xi_{pq}, \xi_{lk}) c_{pq} = b(\xi_{lk}), \quad l = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, M} \quad (4.48)$$

e_{ij} sonlu elemanında lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} a_{(ij)}(\varphi_{ij,pq}; \varphi_{ij,pq}, \varphi_{ij,lk}) &= k \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \iint_{e_{(ij)}} \left[\frac{\partial \varphi_{ij,pq}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij,lk}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij,pq}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij,lk}}{\partial y} \right] dx dy, \\ (p, q), (l, k) &\in M_{(ij)}, \\ b_{lk}^{(ij)} &= \iint_{e_{(ij)}} F(x) \varphi_{ij,lk} dx dy (1 - \delta_{T, lk}) + \int_{e_{ij} \cap \Gamma_2} \varphi(s) \varphi_{ij,lk} |_{\Gamma_2} ds \end{aligned} \quad (4.49)$$

gibi hesaplanır. Burada, T, Γ_2 sınırına ait noktaların numaraları, δ_{ij} ise Kronecker sembolü, $\varphi|_{\Gamma_2}$ ise φ fonksiyonunun Γ_2 sınırındaki izdüşümüdür. Kullanılan sonlu elemanlar, afin sonlu elemanları olduğu için, lokal sertlik matrisinin elemanlarını, Ost düzleminde e pilot sonlu elemanları için hesaplayalım (Şekil 4.4). Bunun için,

$T_{(ij)}$ indis dönüşümünü kullanarak, $M_{(i,j)}$ indisler kümesinden $Z_{(i,j)} = \{1,2,3,4\}$ pilot indisler kümesine geçelim:

$$M_{(i,j)} = \{(i,j), (i,j+1), (i+1,j), (i+1,j+1)\} \xrightarrow{T_{(i,j)}} Z_{(i,j)} = \{1,2,3,4\},$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1};$$

$$M_{(0,j)} = \{(1,j), (1,j+1)\} \xrightarrow{T_{(0,j)}} Z_{(0,j)} = \{1,3\}, \quad j = \overline{1, M-1}; \quad (4.50)$$

$$M_{(i,0)} = \{(i,1), (i+1,1)\} \xrightarrow{T_{(i,0)}} Z_{(i,0)} = \{1,3\}, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$M_{(0,0)} = \{(1,1)\} \xrightarrow{T_{(0,0)}} Z_{(0,0)} = \{1\}.$$

Pilot sonlu elemanın indisler $\{1,2,3,4\}$ kümesinden olan her düğüm noktasına karşılık gelen form fonksiyonunu, $\Psi_m(s,t)$ ile gösterelim. Bu durumda, değişkenlerin (4.34) ve indislerin (4.50) dönüşümü gözönüne alınırsa, bu form fonksiyonlarıyla $e_{(ij)}$ sonlu elemanın form fonksiyonları arasındaki ilişkiler elde edilir:

$$\Psi_1(s,t) \equiv \varphi_{ij,ij} \left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}}, \frac{y-y_j}{\tau_{j+1}} \right), \quad \Psi_3(s,t) \equiv \varphi_{ij,i+1j} \left(\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, \frac{y-y_j}{\tau_{j+1}} \right)$$

$$\Psi_2(s,t) \equiv \varphi_{ij,ij+1} \left(\frac{x-x_i}{h_{i+1}}, \frac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}} \right), \quad \Psi_4(s,t) \equiv \varphi_{ij,i+1j+1} \left(\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, \frac{y-y_{j+1}}{\tau_{j+1}} \right) \quad (4.51)$$

Bu ilişkilerden ve (4.41) analitik formüllerinden $\Psi_m(s,t)$ form fonksiyonlarının analitik ifadesi elde edilir.

$$\Psi_1(s,t) = (1-s)(1-t); \quad \Psi_3(s,t) = t(1-s)$$

$$\Psi_2(s,t) = (1-t)s; \quad \Psi_4(s,t) = st \quad (4.52)$$

Benzer biçimde, (4.49) integrali de,

$$a_{(ij)}(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = k \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\tau_{j+1}}{h_{i+1}} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial s} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial s} + \frac{h_{i+1}}{\tau_{j+1}} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial t} \right] ds dt, \quad (4.53)$$

$$\alpha, \beta \in Z_{(ij)}$$

şekline dönüşür. $e_{(i,j)}$ sonlu elemanın lokal sertlik matrisini,

$$k^{(ij)} \equiv \{ \{ k_{\alpha\beta}^{(ij)} \} \}, \quad k_{\alpha\beta}^{(ij)} = a_{(ij)}(\Psi_\alpha, \Psi_\beta), \quad (ij) \in M_{(ij)}, \quad \alpha, \beta \in Z_{(ij)} \quad (4.54)$$

ile gösterilirse, bu matris, aşağıdaki gibi olur:

$$\{ \{ k_{\alpha\beta}^{(ij)} \} \} = k \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \times \begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} \\ -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \\ \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} \\ -\frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

(4.55) matrisi, $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, M-1}$ indislerini kapsayan $e_{(i,j)}$ sonlu elemanın lokal sertlik matrisidir. $e_{(0,j)}$, $j = \overline{1, M-1}$ sonlu elemanlarının lokal sertlik matrisini elde etmek için, $M_{(0,j)} = \{(1, j), (1, j+1)\}$ kümesini ele alalım. Ele aldığımız sonlu elemana karşılık gelen bilinmeyenler vektörünün

$$c^{(0,j)} = (c_{1,j}, c_{1,j+1})^T \quad (4.56)$$

biçiminde, sağ taraf vektörünün de

$$b^{(0,j)} = (b_{1,j}, b_{1,j+1})^T \quad (4.57)$$

şeklinde olduğunu gösterir. $e_{(0,j)}$ sonlu elemanlarının lokal sertlik matrisi $K^{(0,j)}$, (4.55) matrisinin birinci ve üçüncü satır ve sütunlarını kaldırarak elde edilir:

$$k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \\ \frac{\tau_{j+1}}{6h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Aynı yöntemle, $e_{(i,0)}$, $i = \overline{1, N-1}$ sonlu elemanlarının lokal sertlik matrisi, (4.55) matrisinin birinci ve ikinci satır ve sütunlarını kaldırarak elde edilir:

$$k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right|^2 \right) \begin{bmatrix} \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} & -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} \\ -\frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6\tau_{j+1}} & \frac{\tau_{j+1}}{3h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{3\tau_{j+1}} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Bu elemanın bilinmeyen vektörünün $\mathbf{c}^{(i,0)} = (c_{i,1}, c_{i+1,1})$ olduğu açıktır. Son olarak, $e_{(0,0)}$ sonlu elemanın 1×1 boyutlu lokal sertlik matrisi,

$$k \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\tau_1}{3h_1} + \frac{h_1}{3\tau_1} \right) \quad (4.60)$$

(4.55) matrisinin üç satır ve sütununu kaldırarak elde edilir.

4.4.4. Global sertlik matrisi

Bilinmeyenler sayısı $L = NM$ olduğu bellidir. Elemanlarının tümü sıfır olan $L \times L$ boyutlu matrisi ele alalım ve $e_{(ij)}$ sonlu elemanın $k^{(ij)} = \{k_{\alpha\beta}^{(ij)}\}$ lokal sertlik matrisinin elemanlarını, (4.50) dönüşümünden yararlanarak, $L \times L$ boyutlu matrisin uygun yerlerine yazalım. Elde edilen matrisi, $K^{(ij)}$ ile gösterelim. Bunun için, önce indislerin kabul ettiğimiz 'aşağıdan yukarıya, soldan sağa' düzeni uyarınca, kafesin yaklaşık çözümünün arandığı düğüm noktalarının (i, j) ikili indisinin tekli karşılığını bulalım. Kafesin (i, j) no'lu ikili indisine, $n = (i-1)M + j$ no'lu tekli indisi karşılık gelir (Tablo 4.1).

Tablo 4.1 İndislerin lokal ve global sıralanması ("Aşağıdan yukarıya ve Soldan sağa")

Lokal sıra	Şebekedeki global sıra	Tekli sıra
1	(i, j)	$n = (i-1)M + j$
2	$(i, j+1)$	$n+1 = (i-1)M + j+1$
3	$(i+1, j)$	$n+M = iM + j$
4	$(i+1, j+1)$	$n+M+1 = iM + j+1$

Böylelikle, ikili indisler kümesi de M_n tekli indisler kümesine dönüşür:

$$M_{(ij)} = \{(i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i+1, j+1)\} \xrightarrow{n=n(i,j)} M_n = \{n, n+1, n+M, n+M+1\},$$

$$n(i, j) = (i-1)M + j, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M \quad (4.61)$$

Tablo 4.2 'de $e_{(i,j)}$ sonlu elemanın 4×4 boyutlu lokal sertlik matrisinin, $L \times L$ boyutlu global sertlik matrisine dönüştürülmesi verilmiştir (Matrisler, simetrik olduğundan köşegen ve üstü elemanlar alınmıştır). Bu tablo, Tablo 4.1 ile birlikte kullanıldığında, kafesin herhangi bir (i, j) indisli düğüm noktasına karşılık gelen $e_{(ij)}$ sonlu elemanın $L \times L$ boyutlu $K^{(ij)}$ sertlik matrisi kolayca oluşturulur. Bu matris, aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.2 $e_{(ij)}$ sonlu elemanının $L \times L$ boyutlu $K^{(ij)}$ sertlik matrisinin oluşturulması şeması

4×4 boyutlu lokal sertlik matrisinin elemanları	$k_{\alpha\beta}^{(ij)}$ elemanının $K^{(ij)}$ matrisindeki satır no'su (n)	$k_{\alpha\beta}^{(ij)}$ elemanının $K^{(ij)}$ matrisindeki sütün no'su (m)
$k_{11}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j$	$m = (i-1)M + j$
$k_{12}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j$	$m = (i-1)M + j + 1$
$k_{13}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j$	$m = iM + j$
$k_{14}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j$	$m = iM + j + 1$
$k_{22}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j + 1$	$m = (i-1)M + j + 1$
$k_{23}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j + 1$	$m = iM + j$
$k_{24}^{(ij)}$	$n = (i-1)M + j + 1$	$m = iM + j + 1$
$k_{33}^{(ij)}$	$n = iM + j$	$m = iM + j$
$k_{34}^{(ij)}$	$n = iM + j$	$m = iM + j + 1$
$k_{44}^{(ij)}$	$n = iM + j + 1$	$m = iM + j + 1$

$$K^{(ij)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{11}^{(ij)} & k_{12}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & k_{13}^{(ij)} & k_{14}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{21}^{(ij)} & k_{22}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & k_{23}^{(ij)} & k_{24}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{31}^{(ij)} & k_{32}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & k_{33}^{(ij)} & k_{34}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{41}^{(ij)} & k_{42}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & k_{43}^{(ij)} & k_{44}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

(4.61)'de tanımlanmış M_n tamsayılar kümesi, $k^{(ij)}$ lokal sertlik matrisi elemanlarının $K^{(ij)}$ matrisindeki satır ve sütün numaralarını gösterdiği için bu küme $e_{(ij)}$ sonlu elemanının $K^{(ij)}$ sertlik matrisinin indisler kümesi şeklinde adlandırılır ($n = (i-1)M + j$).

4.4.5. Sistemin global sertlik matrisinin oluşturulması

(4.62) şeklinde oluşturulmuş $K^{(ij)}$ sertlik matrislerinin toplamı, (4.48) lineer cebirsel denklemler sisteminin matrisini veya

$$K = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} K^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N-1} K^{(i,0)} + \sum_{j=1}^{M-1} K^{(0,j)} + K^{(0,0)} \quad (4.63)$$

global sertlik matrisini oluşturur. Global sertlik matrisinin elemanlarını $K_{i,j}$ ($i, j = \overline{1, L}$) ile gösterelim: $K = \{K_{i,j}\}$.

(ij) no'lu düğüm noktası $e_{(i-1,j-1)}, e_{(i,j-1)}, e_{(i-1,j)}$ ve $e_{(i,j)}$ sonlu elemanlarının ortak noktası olduğu için, $n = (i-1)M + j$ no'lu satır, bu sonlu elemanların lokal sertlik matrisinin uygun satırlarından oluşacaktır. Sonlu elemanların her birinin lokal sertlik matrisinin bilinmeyenler vektörüyle çarpımını ($k^{(ij)} \times c^{(ij)}$) yazalım. (Matrislerde ve vektörlerdeki üst indisler sonlu elemanın numarasını göstermektedir.)

$$k^{(i-1,j-1)} \times c^{(i-1,j-1)} \equiv \begin{bmatrix} k_{11}^{(i-1,j-1)} & k_{12}^{(i-1,j-1)} & k_{13}^{(i-1,j-1)} & k_{14}^{(i-1,j-1)} \\ & k_{22}^{(i-1,j-1)} & k_{23}^{(i-1,j-1)} & k_{24}^{(i-1,j-1)} \\ & & k_{33}^{(i-1,j-1)} & k_{34}^{(i-1,j-1)} \\ & & & k_{44}^{(i-1,j-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i-1,j-1} \\ c_{i-1,j} \\ c_{i,j-1} \\ c_{i,j} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$k^{(i,j-1)} \times c^{(i,j-1)} \equiv \begin{bmatrix} k_{11}^{(i,j-1)} & k_{12}^{(i,j-1)} & k_{13}^{(i,j-1)} & k_{14}^{(i,j-1)} \\ & k_{22}^{(i,j-1)} & k_{23}^{(i,j-1)} & k_{24}^{(i,j-1)} \\ & & k_{33}^{(i,j-1)} & k_{34}^{(i,j-1)} \\ & & & k_{44}^{(i,j-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i,j-1} \\ c_{i,j} \\ c_{i+1,j-1} \\ c_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$k^{(i-1,j)} \times c^{(i-1,j)} \equiv \begin{bmatrix} k_{11}^{(i-1,j)} & k_{12}^{(i-1,j)} & k_{13}^{(i-1,j)} & k_{14}^{(i-1,j)} \\ & k_{22}^{(i-1,j)} & k_{23}^{(i-1,j)} & k_{24}^{(i-1,j)} \\ & & k_{33}^{(i-1,j)} & k_{34}^{(i-1,j)} \\ & & & k_{44}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i-1,j} \\ c_{i-1,j+1} \\ c_{i,j} \\ c_{i,j+1} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$k^{(i,j)} \times c^{(i,j)} \equiv \begin{bmatrix} k_{11}^{(i,j)} & k_{12}^{(i,j)} & k_{13}^{(i,j)} & k_{14}^{(i,j)} \\ & k_{22}^{(i,j)} & k_{23}^{(i,j)} & k_{24}^{(i,j)} \\ & & k_{33}^{(i,j)} & k_{34}^{(i,j)} \\ & & & k_{44}^{(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i,j} \\ c_{i,j+1} \\ c_{i+1,j} \\ c_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Global sertlik matrisinin satırlarını oluşturmak için $n = (i-1)M + j$. satırını oluşturalım. Tablo 4.3'de böyle bir satırın oluşturulması işlemi gösterilmiştir.

Tablo 4.3 Global sertlik matrisinin n . Satır elemanları

n . Satır elemanlarının sütun no'su	Global matrisin n . Satırına katkısı olan elemanlar				Global matrisin n . Satır elemanları
	$e_{(i-1,j-1)}$	$e_{(i-1,j)}$	$e_{(i,j-1)}$	$e_{(i,j)}$	
$n - M - 1$ $(i-1, j-1)$	$k_{41}^{(i-1,j-1)}$				$k_{41}^{(i-1,j-1)}$
$n - M$ $(i, j-1)$	$k_{43}^{(i-1,j-1)}$		$k_{21}^{(i,j-1)}$		$k_{43}^{(i-1,j-1)} + k_{21}^{(i,j-1)}$
$n - M + 1$ $(i+1, j-1)$			$k_{23}^{(i,j-1)}$		$k_{23}^{(i,j-1)}$
$n - 1$ $(i-1, j)$	$k_{42}^{(i-1,j-1)}$	$k_{31}^{(i-1,j)}$			$k_{42}^{(i-1,j-1)} + k_{31}^{(i-1,j)}$
n (i, j)	$k_{44}^{(i-1,j-1)}$	$k_{33}^{(i-1,j)}$	$k_{22}^{(i,j-1)}$	$k_{11}^{(i,j)}$	$k_{44}^{(i-1,j-1)} + k_{33}^{(i-1,j)}$ $+ k_{22}^{(i,j-1)} + k_{11}^{(i,j)}$
$n + 1$ $(i+1, j)$			$k_{24}^{(i,j-1)}$	$k_{13}^{(i,j)}$	$k_{24}^{(i,j-1)} + k_{13}^{(i,j)}$
$n + M - 1$ $(i-1, j+1)$		$k_{32}^{(i-1,j)}$			$k_{32}^{(i-1,j)}$
$n + M$ $(i, j+1)$		$k_{34}^{(i-1,j)}$		$k_{12}^{(i,j)}$	$k_{34}^{(i-1,j)} + k_{12}^{(i,j)}$
$n + M + 1$ $(i+1, j+1)$				$k_{14}^{(i,j)}$	$k_{14}^{(i,j)}$

Lineer olmayan eliptik operatör, pozitif tanımlı olduğu için bu matris, simetrik, baz fonksiyonlarının sonlu dayanıklı olması sonucu da, seyrekleşmiş band şekilli matris olacaktır. Bu matrisin her bir satırında sıfır olmayan birinci ve sonuncu elemanın

sütun numaralarının farkı bulunarak, bütün satırlar üzerinden bu sayının en büyük değerinin bir fazlası bandın genişliği olarak kabul edilir. Öyleyse, bandın genişliği $(n + M + 1) - (n - M - 1) = 2M + 2$ olmak üzere $L_M = 2M + 3$ olur.

4.4.6. Sağ taraf vektörünün oluşturulması

e_{ij} elemanın sağ taraf vektörü,

$$b^{(ij)} = (b_{i,j}^{(ij)}, b_{i,j+1}^{(ij)}, b_{i+1,j}^{(ij)}, b_{i+1,j+1}^{(ij)})^T \quad (4.68)$$

biçimindedir. Lokal sertlik matrisinin global sertlik matrisine dönüşümünde olduğu gibi, Tablo 4.1'den yararlanırsak, 4 boyutlu $b^{(ij)}$ sağ taraf vektörünü global sıralamada,

$$B^{(ij)} = (0, 0, \dots, 0, b_{i,j}^{(ij)}, b_{i,j+1}^{(ij)}, 0, \dots, 0, b_{i+1,j}^{(ij)}, b_{i+1,j+1}^{(ij)}, 0, \dots, 0)^T \quad (4.69)$$

biçiminde veya $n = (i-1)M + j$ dönüşümünü yaparsak,

$$B^{(ij)} = (0, 0, \dots, 0, b_n, b_{n+M}, 0, \dots, 0, b_{n+1}, b_{n+M+1}, 0, \dots, 0)^T \quad (4.70)$$

biçiminde yazabiliriz. Buradaki n sayısı, (i, j) indisinin (4.61) dönüşümündeki dengidir. Herbir $e_{(ij)}$ elemanın $L = NM$ boyutlu sağ taraf vektörünü oluşturduktan sonra, bunların sonlu elemanlar üzerindeki toplamından (4.48) lineer cebirsel denklemler sisteminin sağ taraf vektörü,

$$B = \sum_{e^{(ij)}} B^{(ij)} \quad (4.71)$$

elde edilir (Tablo 4.4).

Tablo 4.4 Sağ taraf vektörünün n. Bileşeninin hesaplanması ($n = (i-1)M + j$)

$n=i$ $i=\overline{1, N-1}$	$n=N$ $j=\overline{1, M-1}$	$n=(i-1)M + j$ $i=\overline{1, N-1}, j=\overline{1, M-1}$	$n=L,$ $L=NM$
(i, M)	(N, j)	(i, j)	(N, M)
$b_{i,M}^{(i-1, M-1)}$ +	$b_{N,j}^{(N-1, j-1)}$ +	$b_{i,j}^{(i-1, j-1)}$ +	$b_{i,j}^{(N-1, M-1)}$
$b_{i,M}^{(i, M-1)}$	$b_{N,j}^{(N-1, j)}$	$b_{i,j}^{(i-1, j)}$ +	
		$b_{i,j}^{(i, j-1)}$ +	
		$b_{i,j}^{(i, j)}$	
$B_{i,M}$	$B_{N,j}$	$B_{i,j}$	$B_{N,M}$

4.4.7. Dörtgen elemanlardan elde edilen sonlu fark denklemi

Global matrisin n. satırını $c = (c_1, c_2, \dots, c_L)^T$, $L = N \times M$ bilinmeyenler vektörüyle çarpılırsa, (4.45) lineer cebirsel denklemler sisteminin n. denklemi elde edilir. $n = (i-1)M + j$. denklem, global sertlik matrisinin Tablo 4.3'te oluşturulmuş n. satırının sıfır olmayan elemanlarının sırasıyla $c_{i-1, j-1}, c_{i, j-1}, c_{i+1, j-1}, c_{i-1, j}, c_{i, j}, c_{i+1, j}, c_{i-1, j+1}, c_{i, j+1}, c_{i+1, j+1}$ parametreleriyle çarpımından elde edilir. Bu çarpım sonucu, (4.48) lineer denklemler sisteminin n. denklemi aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}
 & k_{41}^{(i-1, j-1)} c_{i-1, j-1} + (k_{43}^{(i-1, j-1)} + k_{21}^{(i, j-1)}) c_{i, j-1} + k_{23}^{(i, j-1)} c_{i+1, j-1} + (k_{42}^{(i-1, j-1)} + k_{31}^{(i-1, j)}) c_{i-1, j} \\
 & + (k_{44}^{(i-1, j-1)} + k_{33}^{(i-1, j)} + k_{22}^{(i, j-1)} + k_{11}^{(i, j)}) c_{i, j} + (k_{24}^{(i, j-1)} + k_{13}^{(i, j)}) c_{i+1, j} + k_{32}^{(i-1, j)} c_{i-1, j+1} \\
 & + (k_{34}^{(i-1, j)} + k_{12}^{(i, j)}) c_{i, j+1} + k_{14}^{(i, j)} c_{i+1, j+1} = B_{i, j}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Burada, sağ taraf,

$$B_{ij} = b_{i,j}^{(i-1,j-1)} + b_{i,j}^{(i-1,j)} + b_{i,j}^{(i,j-1)} + b_{i,j}^{(i,j)} , \quad 1 \leq i \leq N-1 , \quad 1 \leq j \leq M-1 \quad (4.73)$$

biçiminde hesaplanır.

Kafesin düzgün olduğunu varsayalım. $h_i = h = \text{sabit}$, $\tau_j = \tau = \text{sabit}$ olsun. Bu durumda, düzgün kafeste $e_{(ij)}$ sonlu elemanın $(1 \leq i \leq N-1 , 1 \leq j \leq M-1)$ lokal sertlik matrisi, $K_{ij} = k \left(\left| \nabla u_{ij} \right|^2 \right)$ olmak üzere aşağıdaki gibi olur:

$$\left\{ \left\{ k_{i,k}^{(ij)} \right\} \right\} = \frac{1}{6} K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \begin{bmatrix} \frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} & -\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} & \frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} & -\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \\ -\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} & \frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} & \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} & \frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} \\ \frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} & -\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} & \frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} & -\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \\ -\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} & \frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} & -\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} & \frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Bu matrisin elemanlarının ifadesini, (4.72)'de gözönüne alırsak, (4.48) sisteminin n. denklemini aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left\{ \left(-\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) c_{i-1,j-1} + \left(\frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} \right) c_{i-1,j} + \left(-\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) c_{i,j-1} + \left(\frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} \right) c_{ij} \right\} \\ & + \frac{1}{6} K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} \right) c_{i,j-1} + \left(-\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) c_{i-1,j+1} + \left(\frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} \right) c_{i,j} + \left(-\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) c_{ij+1} \right\} \\ & + \frac{1}{6} K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left\{ \left(-\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) c_{i-1,j} + \left(\frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} \right) c_{i,j} + \left(-\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) c_{i+1,j-1} + \left(\frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} \right) c_{i+1,j} \right\} \\ & + \frac{1}{6} K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{2\tau}{h} + \frac{2h}{\tau} \right) c_{i,j} + \left(-\frac{2\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) c_{i,j+1} + \left(\frac{\tau}{h} - \frac{2h}{\tau} \right) c_{i+1,j} + \left(-\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) c_{i+1,j+1} \right\} \\ & = B_{ij} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Bu denklem, kolayca sadeleştirilerek,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \frac{\tau}{h} \left\{ -K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i-1,j-1} - 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) c_{i,j-1} - K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i+1,j-1} \right. \\
& + \left(K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i-1,j} + 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j} \\
& + \left(K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i+1,j} - K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i-1,j+1} - 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j+1} \\
& \left. - K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j+1} \right\} \\
& + \frac{1}{6} \frac{h}{\tau} \left\{ -K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i-1,j-1} + \left(K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) c_{i,j-1} - K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i+1,j-1} \right. \\
& - 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i-1,j} + 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j} \\
& - 2 \left(K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i+1,j} - K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i-1,j+1} + \left(K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j+1} \\
& \left. - K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j+1} \right\} = B_{ij} \tag{4.76}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Sonlu Farklar teorisinin tanımlarından yararlanarak, $\frac{\partial}{\partial x} \left(k \left(|\nabla u|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ve

$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \left(|\nabla u|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ kısmi türevlerinin sonlu fark benzeşimlerini,

$$\left(k \left(|\nabla u|^2 \right) u \right)_{xx,ij} = \frac{K_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j} - \left(K_{i+\frac{1}{2},j} + K_{i-\frac{1}{2},j} \right) u_{i,j} + K_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}}{h^2} \tag{4.77}$$

$$\left(k \left(|\nabla u|^2 \right) u \right)_{yy,ij} = \frac{K_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1} - \left(K_{i,j+\frac{1}{2}} + K_{i,j-\frac{1}{2}} \right) u_{i,j} + K_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1}}{\tau^2} \tag{4.78}$$

kullanarak, $\left(k \left(|\nabla u|^2 \right) c \right)_{\overline{xy},ij} = \left(k \left(|\nabla u|^2 \right) c \right)_{\overline{yyxx},ij}$ dördüncü mertebeden sonlu fark türevini yazalım:

$$\begin{aligned}
\left(k \left(|\nabla u|^2 \right) c \right)_{\overline{xy},ij} &= \frac{1}{h^2 \tau^2} \left\{ K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i-1,j-1} - 2K_{i,j-\frac{1}{2}} c_{i,j-1} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j-1} \right. \\
& - 2K_{i-\frac{1}{2},j} c_{i-1,j} + 2 \left(K_{i,j+\frac{1}{2}} + K_{i,j-\frac{1}{2}} \right) c_{i,j} - 2K_{i+\frac{1}{2},j} c_{i+1,j} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i-1,j+1} \\
& \left. - 2K_{i,j+\frac{1}{2}} c_{i,j+1} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j+1} \right\} \tag{4.79}
\end{aligned}$$

(4.76) denklemini düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{h} \left\{ K_{i,j-\frac{1}{2}} c_{i,j-1} + \left(K_{i,j-\frac{1}{2}} + K_{i,j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j} - K_{i,j+\frac{1}{2}} c_{i,j+1} \right\} \\
& - \frac{1}{6} \frac{\tau}{h} \left\{ K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i-1,j-1} - 2K_{i,j-\frac{1}{2}} c_{i,j-1} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i+1,j-1} - 2K_{i-\frac{1}{2},j} c_{i-1,j} \right. \\
& + 2 \left(K_{i,j-\frac{1}{2}} + K_{i,j+\frac{1}{2}} \right) c_{i,j} - 2K_{i+\frac{1}{2},j} c_{i+1,j} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i-1,j+1} \\
& \left. - 2K_{i,j+\frac{1}{2}} c_{i,j+1} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j+1} \right\} \\
& + \frac{h}{\tau} \left\{ -K_{i-\frac{1}{2},j} c_{i-1,j} + \left(K_{i-\frac{1}{2},j} + K_{i+\frac{1}{2},j} \right) c_{i,j} - K_{i+\frac{1}{2},j} c_{i+1,j} \right\} \tag{4.80} \\
& - \frac{1}{6} \frac{h}{\tau} \left\{ K_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i-1,j-1} - 2K_{i,j-\frac{1}{2}} c_{i,j-1} + K_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} c_{i+1,j-1} - 2K_{i-\frac{1}{2},j} c_{i-1,j} \right. \\
& + 2 \left(K_{i-\frac{1}{2},j} + K_{i+\frac{1}{2},j} \right) c_{i,j} - 2K_{i+\frac{1}{2},j} c_{i+1,j} + K_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i-1,j+1} \\
& \left. - 2K_{i,j+\frac{1}{2}} c_{i,j+1} + K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} c_{i+1,j+1} \right\} = B_{ij}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tau^3}{h} \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{yy,ij} - \frac{1}{6} h \tau^3 \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{yyxx,ij} - \frac{h^3}{\tau} \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{xx,ij} \\
& - \frac{1}{6} h^3 \tau \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{xxyy,ij} = B_{ij}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1} \tag{4.81}
\end{aligned}$$

sonlu fark denklemini bulunur. Böylece, (2.1) denkleminin aşağıdaki sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{\tau^2} \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{xx,ij} - \frac{\tau^2}{h^2} \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{yy,ij} \\
& - \frac{1}{6} \left[h^2 \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{xxyy,ij} + \tau^2 \left(k(|\nabla u|^2) c \right)_{yyxx,ij} \right] = \frac{1}{h\tau} B_{ij}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1} \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Kafes, kare şeklinde düzgün kafes ise yani $h = \tau$ ise bu denklem daha basite indirgenir ve

$$-\left(k(|\nabla u|^2)c\right)_{xx,ij} - \left(k(|\nabla u|^2)c\right)_{yy,ij} - \frac{h^2}{3} \left(k(|\nabla u|^2)c\right)_{xxyy,ij} = \frac{1}{h^2} B_{ij} , \quad (4.83)$$

$$i = \overline{1, N-1} , j = \overline{1, M-1}$$

şeklinde yazılır.

4.5. Sonlu Elemanlardan Elde Edilen Sonlu Fark Denklemlerinin Klasik Sonlu Fark Denklemleri ile Karşılaştırılması

(4.82) ve (4.83) denklemleri incelendiğinde, bu denklemlerden her birinin (2.1) denkleminde sonlu eleman yaklaşımından elde edilen sonlu fark denklemleri olduğu görülür.

$$\frac{-K_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + K_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} + \frac{-K_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + K_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}}{\tau} = F_{ij} , \quad i = \overline{1, N-1} , j = \overline{1, M-1} \quad (4.84)$$

sonlu fark denklemi,

$$-\left(k(|\nabla u|^2)c\right)_{xx,ij} - \left(k(|\nabla u|^2)c\right)_{yy,ij} = F_{ij} , \quad i = \overline{1, N-1} , j = \overline{1, M-1} \quad (4.85)$$

şeklinde yazılabilir.

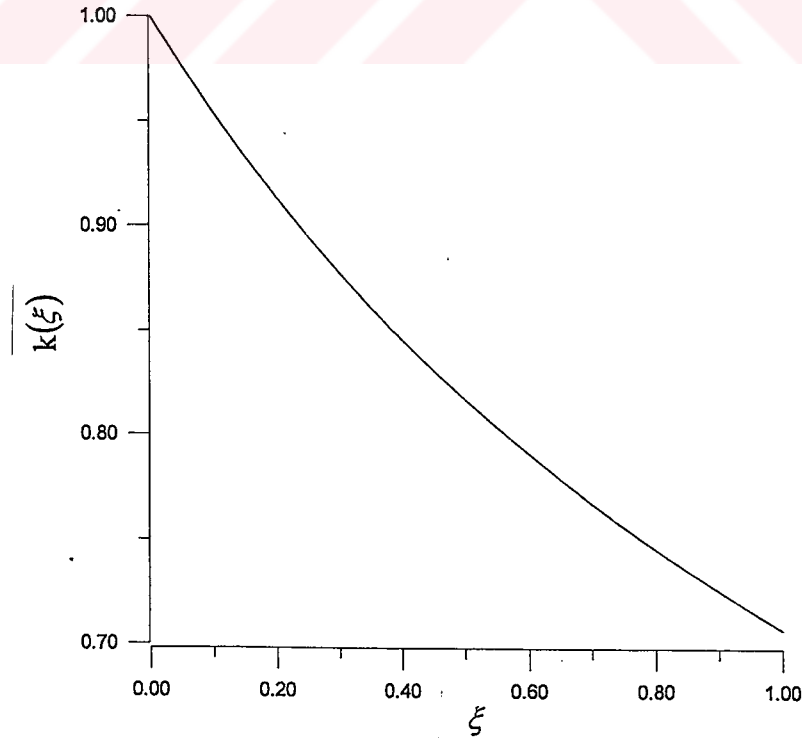
(4.85) denklemindeki terimler ile (4.83) sonlu elemanlardan elde edilen sonlu fark denklemindeki ilk terimler aynıdır. Ancak, sonlu elemanlardan elde edilen sonlu fark denkleminin son terimi olan $(k(\xi)c)_{xxyy,ij}$ 'nin sınırlı olduğu varsayılırsa, klasik çözümün var olduğu durumda, eşit olmayan adım için yaklaşım hatasının $O(h^2 + \tau^2)$; eşit adım için ise $O(h^2)$ düzeyinde olduğu açıkça görülür.

BÖLÜM 5

5. UYGULAMA

(2.1)-(2.4) problemi sayısal olarak $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ alınarak, (Şekil 5.1)

$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesinde Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar yöntemi ile çözülmüştür. W_{hr} kafesinde $N = M = 21$ ($h = 0.05$) olarak (Sonlu Elemanlar yönteminde 400 dikdörtgen sonlu eleman) ele alınmıştır. Yaklaşımlar, $\max |u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)}| < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$ koşulu ile sağlanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözüm grafikleri verilmiştir. Problemler, FORTRAN programlama dilinde yazılmış olan program ile çözülmüştür.



Şekil 5.1 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ fonksiyonu

Problem 1. Bu örnekte,

$$F(x, y) = \frac{4 + 8(x^2 + y^2)}{[1 + 4(x^2 + y^2)]^{3/2}} \quad (5.1)$$

olarak ele alınmıştır. Bu durumda, problemin kesin çözümü,

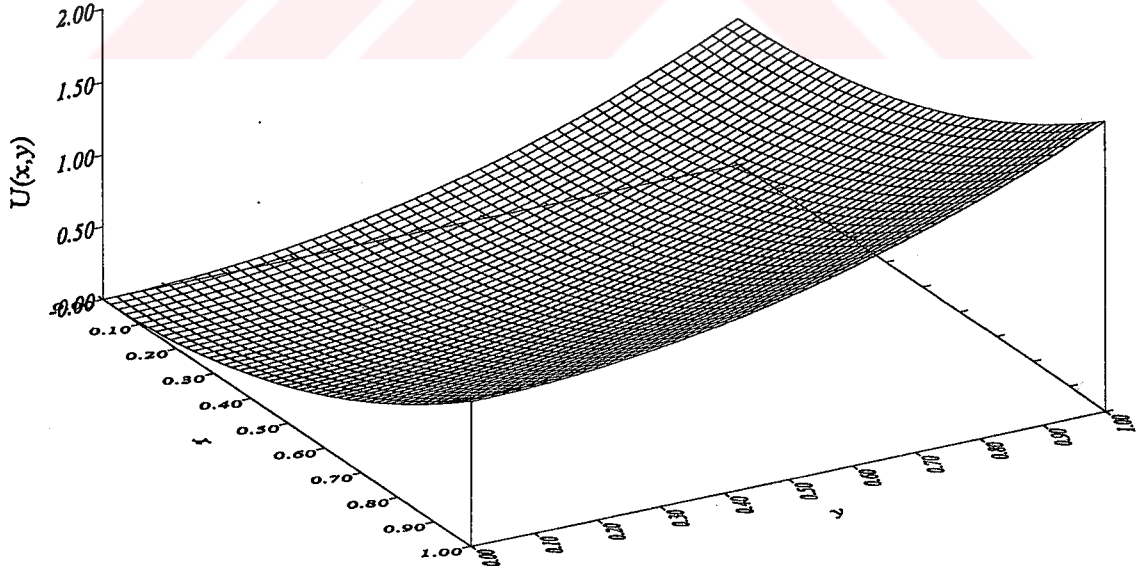
$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (5.2)$$

fonksiyonudur.

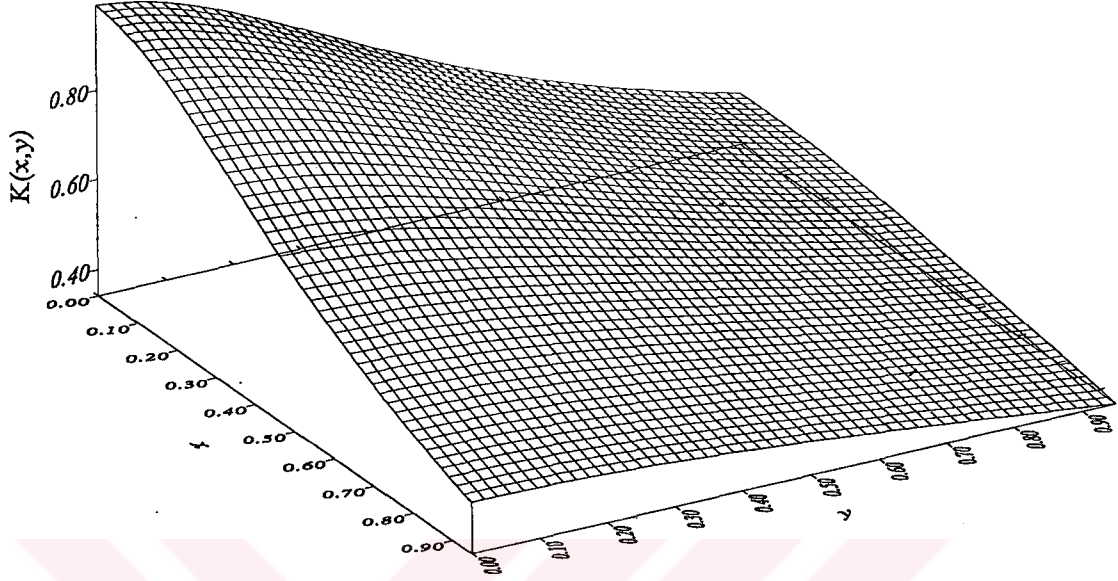
Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.2'de, bu çözüme karşılık gelen

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) fonksiyonu ise Şekil 5.3'de verilmiştir. Bu problemde

$k(\xi)$ fonksiyonu, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0.005, \xi^* = 7.6117$ şeklindedir.



Şekil 5.2 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.3 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği

$u(x,y)$ kesin çözümü için $J(u) = -2.27435700$ 'dır. Tablo 5.1'den görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

Tablo 5.1 Problem 1 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x,y) = x^2 + y^2$					
$u_0(x,y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$			$u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-2.32295100	1.00000000	1	-2.24798000	0.58385320
2	-2.26239600	0.07148319	2	-2.23340700	0.05477607
3	-2.25437700	0.02059567	3	-2.24029600	0.01896930
4	-2.25400600	0.00882292	4	-2.24606800	0.00897640
5	-2.25479700	0.00453508	5	-2.24994800	0.00491613
6	-2.25568000	0.00259376	6	-2.25256600	0.00291532
7	-2.25644700	0.00159186	7	-2.25438100	0.00183958
8	-2.25707500	0.00102383	8	-2.25567400	0.00120288
9	-2.25757700	0.00067872	9	-2.25661300	0.00081378
$J(u)$	-2.27435700			-2.27435700	

İterasyon başlangıcı olarak, $u_0(x, y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$ ve $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonları ele alınmış ve yaklaşık çözüm, her ikisi için de 9 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Fark yönteminde %1.8 , Sonlu Eleman yönteminde ise %0.4'dür.

Problem 2. Bu örnekte,

$$F(x, y) = \frac{2(1 + \cos^2 x) - \sin x(1 + 4y^2)}{[1 + 4y^2 + \cos^2 x]^{3/2}} \quad (5.3)$$

olarak ele alınmıştır. Bu durumda, problemin kesin çözümü,

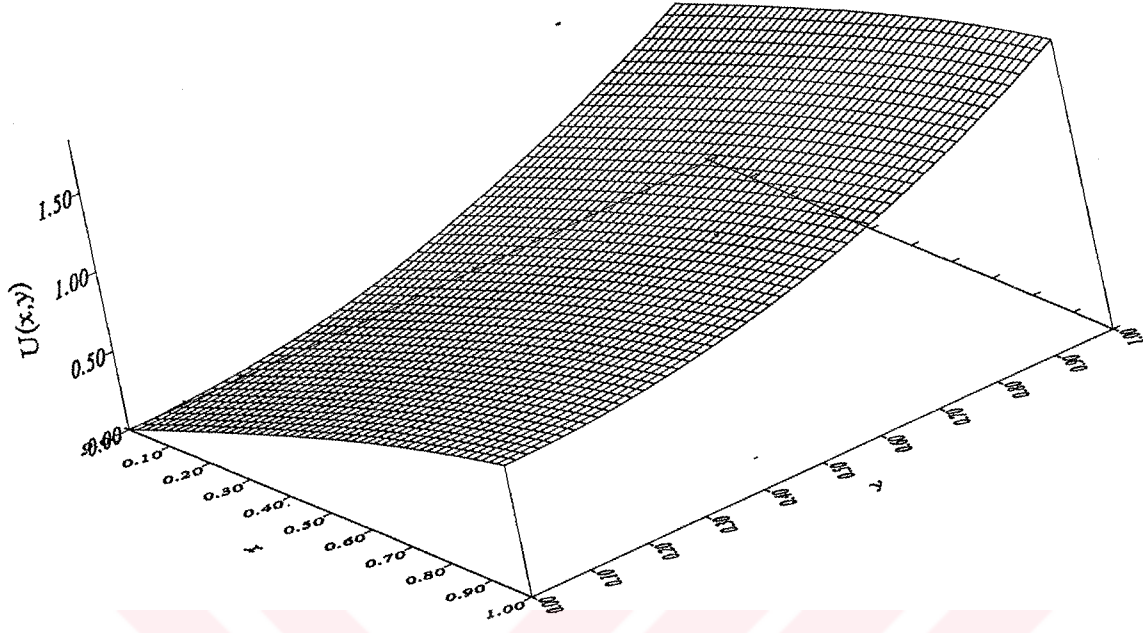
$$u(x, y) = y^2 + \sin x \quad (5.4)$$

fonksiyonudur.

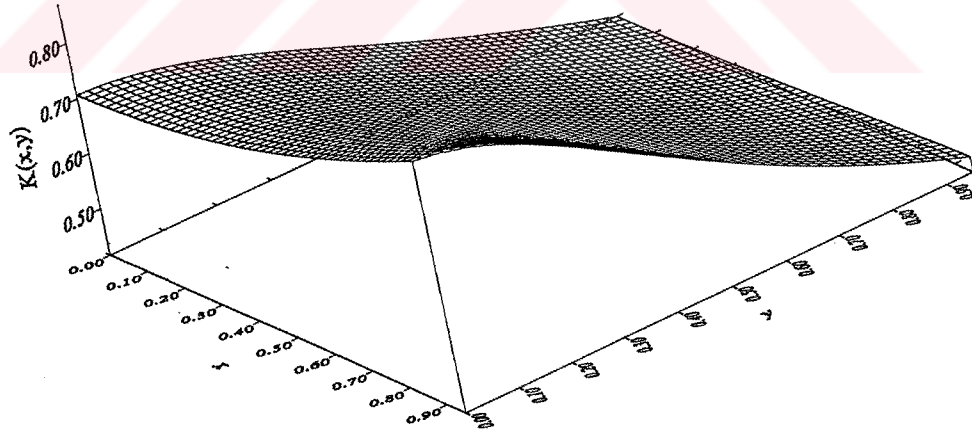
Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.4'de, bu çözüme karşılık gelen

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ fonksiyonu ise Şekil 5.5'de verilmiştir. Bu problemde

$k(\xi)$ fonksiyonu, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0.3172, \xi^* = 4.8018$ şeklindedir.



Şekil 5.4 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.5 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği

$u(x,y)$ kesin çözümü için $J(u) = -1.63548800$ 'dır. Tablo 5.2'den görüldüğü gibi $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

Yaklaşık çözüm, $u_0(x, y) = 0.5y^2 + \sin(0.5x)$ iterasyon başlangıç fonksiyonu ele alındığında 6 iterasyon ile, $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu alındığında ise 7 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Fark yönteminde %0.08, Sonlu Eleman yönteminde ise %0.07'dir.

Tablo 5.2 Problem 2 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = y^2 + \sin x$					
$u_0(x, y) = 0.5y^2 + \sin(0.5x)$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-1.55629900	0.86204540	1	-1.49074100	0.54150330
2	-1.58400900	0.02580404	2	-1.55689400	0.01520348
3	-1.58908700	0.00765276	3	-1.57531100	0.00658989
4	-1.59114800	0.00296426	4	-1.58361200	0.00331199
5	-1.59239200	0.00135654	5	-1.58805300	0.00176132
6	-1.59321200	0.00070417	6	-1.59061500	0.00101078
			7	-1.59215500	0.00060296
$J(u)$	-1.63548800			-1.63548800	

Problem 3. Bu örnekte,

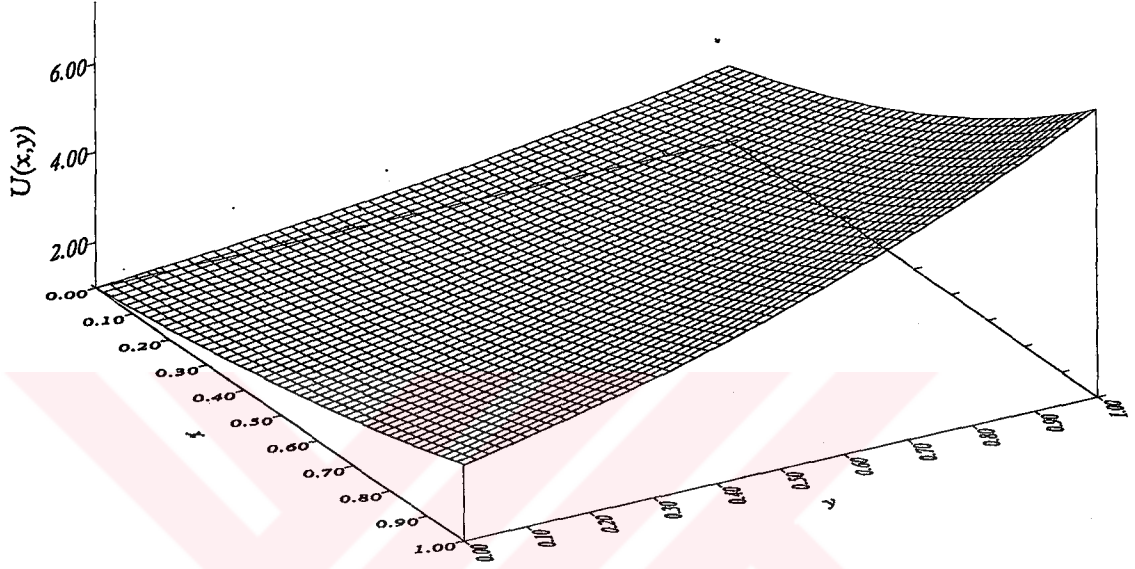
$$F(x, y) = \frac{2e^{x+y}}{[1 + 2e^{2(x+y)}]^{3/2}} \quad (5.5)$$

olarak ele alınmıştır. Bu durumda, problemin kesin çözümü,

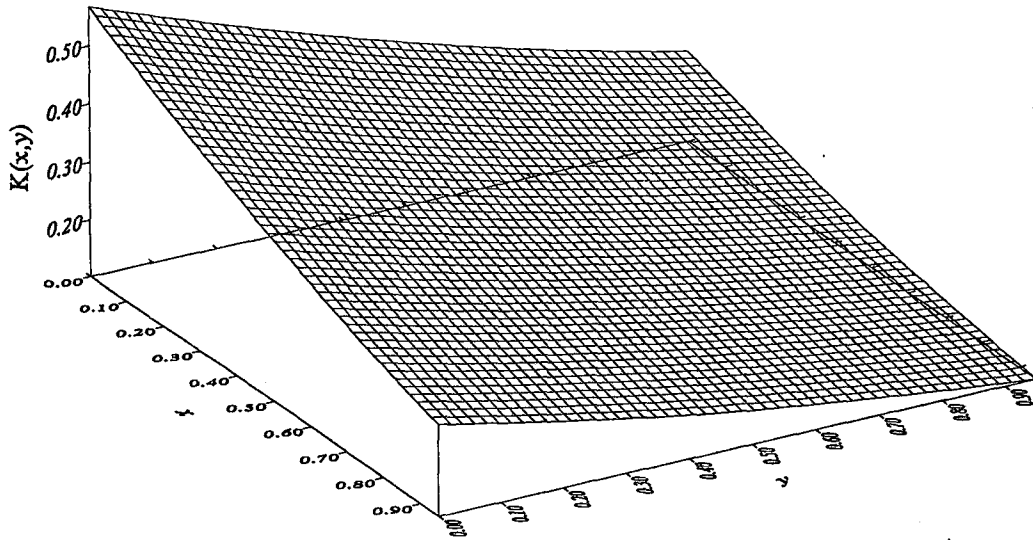
$$u(x, y) = e^{x+y} \quad (5.6)$$

fonksiyonudur.

Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.6'da, bu çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) fonksiyonu ise Şekil 5.7'de verilmiştir. Bu problemde $k(\xi)$ fonksiyonu, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 2.103, \xi^* = 94.1817$ şeklindedir.



Şekil 5.6 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.7 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) nin grafiği

$u(x, y)$ kesin çözümünü için $J(u) = -6.50408800$ 'dır. Tablo 5.3'den görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

İterasyon başlangıcı olarak, $u_0(x, y) = e^{0.5x+0.5y}$ ve $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonları ele alınmış ve her iki durumda da yaklaşık çözüm, 15 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Fark yönteminde %0.3, Sonlu Eleman yönteminde ise %0.16'dır.

Tablo 5.3 Problem 3 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = e^{x+y}$					
$u_0(x, y) = e^{0.5x+0.5y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-5.82459100	4.67077400	1	-5.49069500	5.97290900
2	-6.22358500	0.15663650	2	-6.08937700	0.17448620
3	-6.34295500	0.05879474	3	-6.27328600	0.06561470
4	-6.39063600	0.02791810	4	-6.35095000	0.03032613
5	-6.41430200	0.01526403	5	-6.39072700	0.01612139
6	-6.42812000	0.00926018	6	-6.41384800	0.00951266
7	-6.43715700	0.00609684	7	-6.42850500	0.00612378
8	-6.44352000	0.00427032	8	-6.43834500	0.00422406
9	-6.44819900	0.00315213	9	-6.44519800	0.00308251
10	-6.45172800	0.00243020	10	-6.45008300	0.00235319
11	-6.45440900	0.00190520	11	-6.45361400	0.00186586
12	-6.45645000	0.00154924	12	-6.45619000	0.00150204
13	-6.45800600	0.00127721	13	-6.45805500	0.00125313
14	-6.45920200	0.00107741	14	-6.45941200	0.00105596
15	-6.46012000	0.00091720	15	-6.46040700	0.00090337
$J(u)$	-6.50408800			-6.50408800	

Problem 4. $k = k(\xi)$ fonksiyonunun,

$$k(\xi) \geq 0$$

$$k'(\xi) \leq 0 \quad (5.7)$$

$$k(\xi) + 2k'(\xi)\xi \geq 0$$

koşullarını sağlaması gerektiği teoriden bellidir. İlk dört örnekte, ele alınan $u(x, y)$ fonksiyonları için $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde, bu koşulların tümü sağlanmaktadır. Burada,

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ ele alalım. Kesin çözümü,

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (5.8)$$

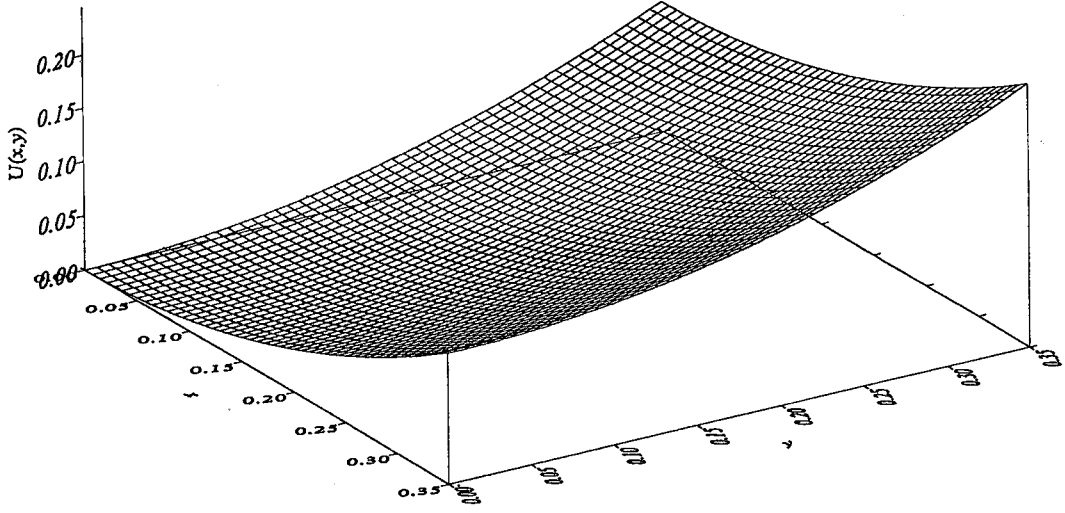
olduğu durumda,

$$F(x, y) = \frac{4}{[1 + 16(x^2 + y^2)^2]^{3/2}} \quad (5.9)$$

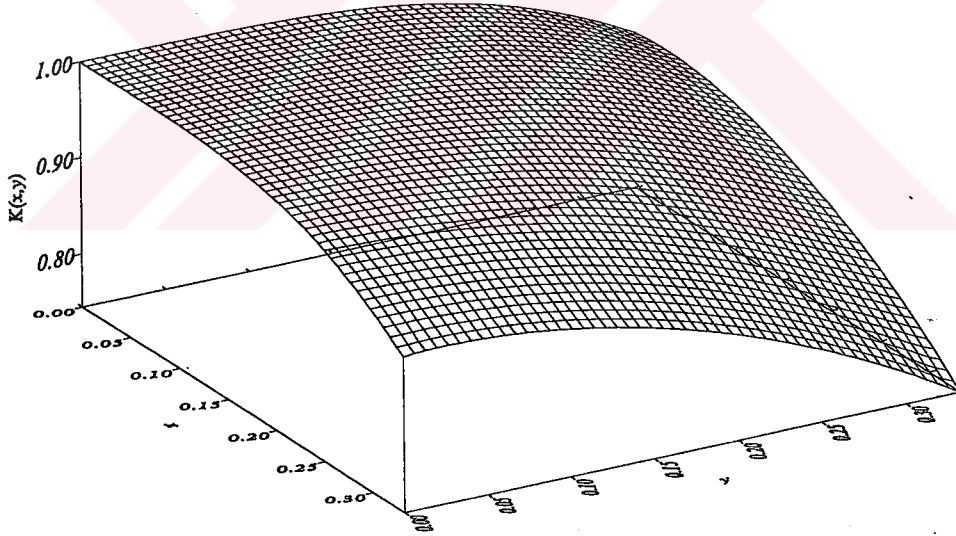
olur. Ele alınan $k(\xi)$ fonksiyonu için (5.7) koşullarından son koşulun sağlanması için $\xi \leq 1$ olmalıdır. Bu problem için, son koşul gereği, $x^2 + y^2 \leq 0.25$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Bu nedenle, aralık küçültülerek problem, $[0,0.35] \times [0,0.35]$ bölgesinde çözülmüştür.

$[0,0.35] \times [0,0.35]$ bölgesi için u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.8'de, bu çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) fonksiyonu ise Şekil 5.9'da verilmiştir.

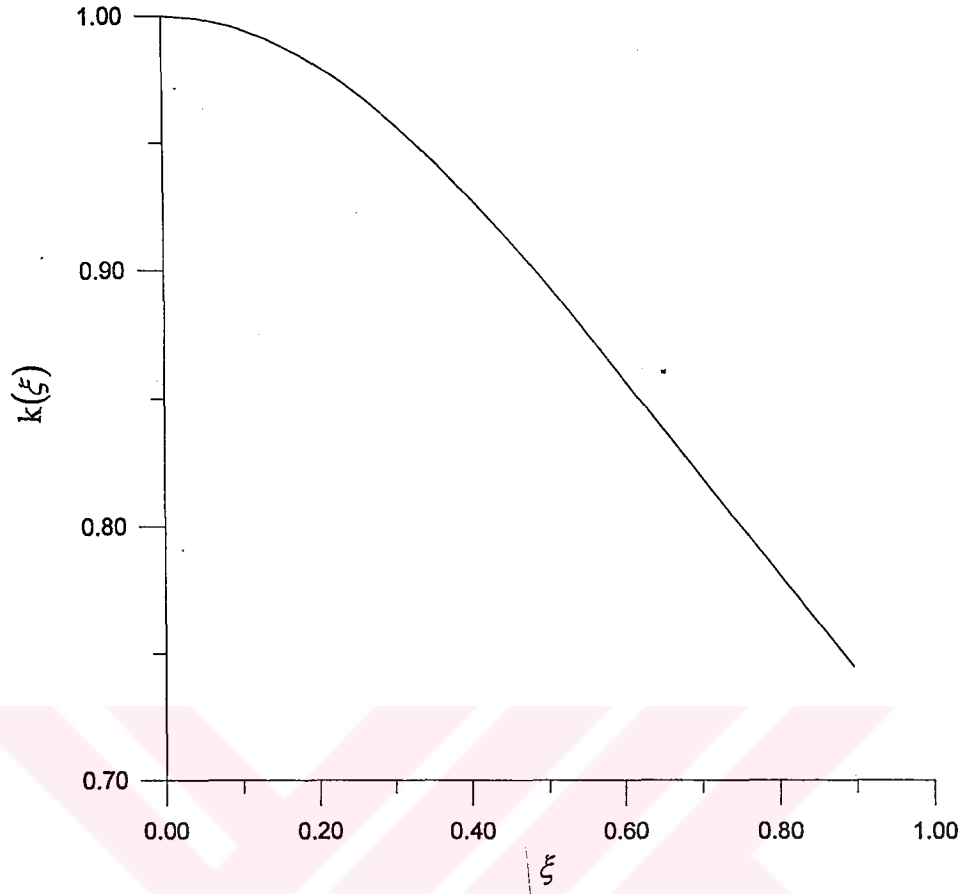
$\xi \in (\xi_*, \xi^*)$, ($\xi_* = 0.0006, \xi^* = 0.8962$) için $k(\xi)$ fonksiyonu, Şekil 5.10'daki gibidir.



Şekil 5.8 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.9 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği



Şekil 5.10 $[0,0.35] \times [0,0.35]$ bölgesinde, çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ 'nin grafiği

$u(x,y)$ kesin çözümü için $J(u) = -0.01920664$ 'dir. Tablo 5.4'den görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

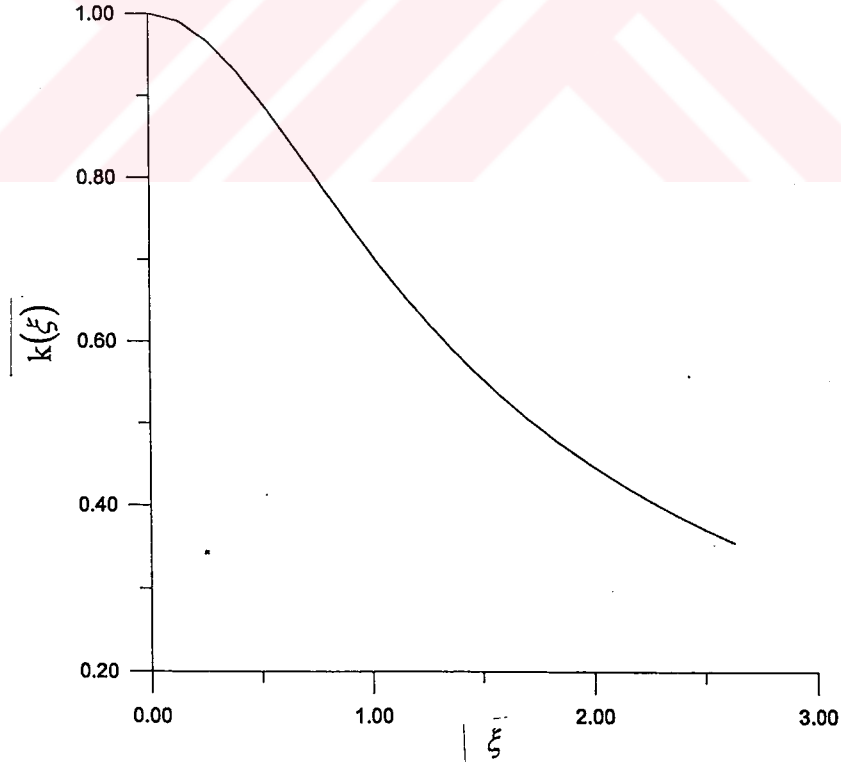
İterasyon başlangıcı olarak, yaklaşık çözüm $u_0(x,y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$ fonksiyonu için 3 iterasyon ile $u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu için 2 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Fark yönteminde %0.53, Sonlu Eleman yönteminde ise %0.23'dir.

Tablo 5.4 Problem 4 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = x^2 + y^2$					
$u_0(x, y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-0.01311116	0.12250000	1	-0.01605941	0.00984219
2	-0.01565713	0.00401823	2	-0.01658052	0.00080272
3	-0.01644010	0.00091963			
$J(u)$	-0.01920664			-0.01920664	

Bölge genişletilerek, problemin $[0,0.6] \times [0,0.6]$ bölgesinde çözülmesi istendiğinde iraksama olduğu görülmüştür. 51 iterasyon sonunda yaklaşılan $u(x, y)$ fonksiyonu için $k(\xi)$, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$, ($\xi_* = 0.0018, \xi^* = 2.6314$) fonksiyonu, Şekil 5.11'deki gibidir. Şekilden görüldüğü gibi (5.7)'un son koşulu sağlanmadığından gerçek $k(\xi)$ (Şekil 5.10) fonksiyonundan çok farklı olan bir fonksiyon elde edilmiştir.



Şekil 5.11 $[0,0.6] \times [0,0.6]$ bölgesinde, çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ 'nin grafiği

$u(x, y)$ kesin çözümünü için $J(u) = -0.10893550$ 'dir. Tablo 5.5'dan görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri salınımlarla değişmektedir.

İterasyon başlangıcı olarak, $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu ele alındığında işlemler 51 iterasyon sonucunda durmasına rağmen, $u_0(x, y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$ fonksiyonu ele alındığında, işlemler sürekli devam etmiştir. Yani, (5.7) koşullarından herhangi biri sağlanmadığı takdirde iraksama olur.

Tablo 5.5 Problem 4 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = x^2 + y^2$					
$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$			$u_0(x, y) = 0.5x^2 + 0.5y^2$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-0.11893910	0.08235776	27	-0.10729700	0.01774365
2	-0.11575940	0.00951611	28	-0.10677080	0.01088160
3	-0.11506600	0.00435597	29	-0.10831330	0.01154160
4	-0.11454290	0.00296913	30	-0.11032310	0.01296192
5	-0.11393230	0.00266701	31	-0.11246070	0.01080739
6	-0.11316480	0.00289258	32	-0.11334490	0.01044166
7	-0.11221450	0.00346613	33	-0.11367530	0.00501543
8	-0.11107370	0.00446680	34	-0.11421330	0.00434643
9	-0.10973530	0.00594410	35	-0.11448560	0.00410807
10	-0.10815900	0.00812468	36	-0.11437820	0.00324208
11	-0.10621940	0.01175302	37	-0.11406540	0.00231439
12	-0.10363950	0.01614958	38	-0.11377860	0.00167054
13	-0.09998992	0.02566422	39	-0.11357860	0.00133914
14	-0.09513280	0.03261518	40	-0.11350460	0.00139058
15	-0.08895823	0.04630226	41	-0.11352400	0.00147015
16	-0.08554018	0.05937624	42	-0.11361410	0.00152266
17	-0.08694071	0.04701257	43	-0.11376090	0.00146234
18	-0.07801405	0.07366025	44	-0.11394240	0.00154018
19	-0.07789987	0.03130257	45	-0.11413060	0.00132126
20	-0.08073732	0.00514883	46	-0.11428980	0.00104606
21	-0.08503354	0.00692075	47	-0.11439070	0.00104478
22	-0.09050024	0.01079059	48	-0.11442050	0.00121129
23	-0.09691045	0.01521444	49	-0.11437200	0.00118494
24	-0.10351880	0.01950556	50	-0.11425520	0.00120592
25	-0.10862280	0.02290565	51	-0.11410430	0.00096720
26	-0.10980630	0.02343845			
$J(u)$				-0.10893550	

Problem 5. Bu örnekte,

$$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}, \quad F(x, y) = 0 \quad (5.10)$$

olarak ele alınmıştır. Bu durumda, problemin kesin çözümü,

$$u(x, y) = \ln(\cos x) - \ln(\cos y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5.11)$$

fonksiyonudur.

$F(x, y) = 0$ olduğundan (2.1) denklemi,

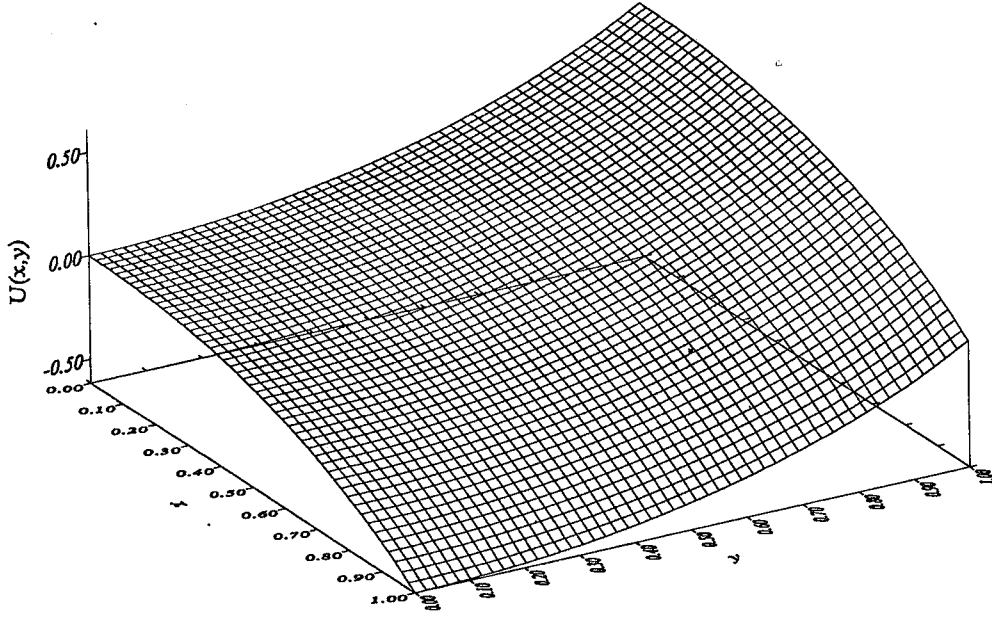
$$\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad (5.12)$$

Plateau denklemine dönüşür.

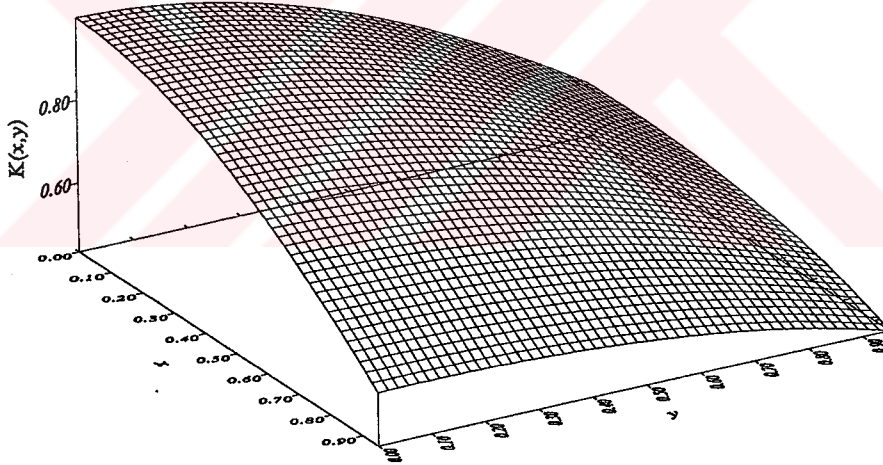
Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.12'de, bu çözüme karşılık gelen

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ fonksiyonu ise Şekil 5.13' de verilmiştir. Bu problemde

$k(\xi)$ fonksiyonu, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0.0013, \xi^* = 4.3568$ şeklindedir.



Şekil 5.12 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.13 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği

$u(x,y)$ kesin çözümü için $J(u) = -0.34543730$ 'dır. Tablo 5.6'dan görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

İterasyon başlangıcı olarak, yaklaşık çözüm, $u_0(x,y) = \ln(\cos(0.5x)) - \ln(\cos(0.5y))$ fonksiyonu için 5 iterasyon ile $u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu için 6 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Fark yönteminde %0.41, Sonlu Eleman yönteminde ise %0.40'dır.

Tablo 5.6 Problem 5 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = \ln(\cos x) - \ln(\cos y)$					
$u_0(x, y) = \ln(\cos(0.5x)) - \ln(\cos(0.5y))$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
İterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-0.30538140	0.48504230	1	-0.29801650	1.47690900
2	-0.29846570	0.01387721	2	-0.29583930	0.01545802
3	-0.30083810	0.00465652	3	-0.29946290	0.00569877
4	-0.30261410	0.00203010	4	-0.30185980	0.00254962
5	-0.30367340	0.00095031	5	-0.30325410	0.00120655
			6	-0.30404570	0.00062484
$J(u)$	-0.34543730			-0.34543730	

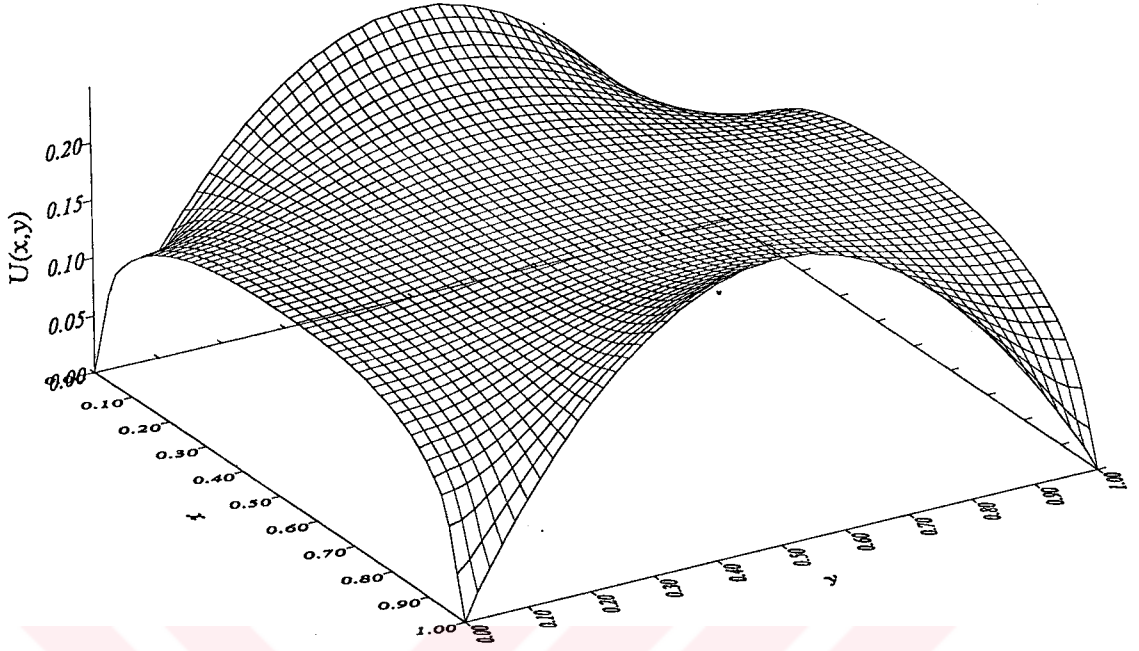
Problem 6. Bu örnekte ise (5.12) Plateau denklemi,

$$u(x, y) = -y(y-1), (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

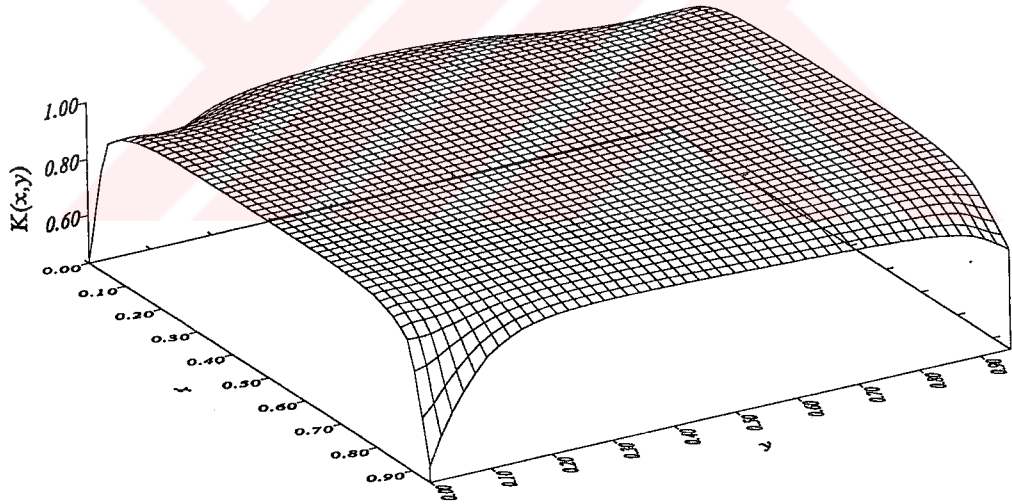
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (5.13)$$

koşulları ile çözülmüştür. Burada, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \partial\Omega$ 'dır.

Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.14'de, bu çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) fonksiyonu ise Şekil 5.15'de verilmiştir. Bu problemde $k(\xi)$ fonksiyonu, $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0.0005, \xi^* = 1.6383$ şeklindedir.



Şekil 5.14 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.15 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği

$J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerlerinin azaldığı, Tablo 5.7'de görülmektedir. İterasyon başlangıcı olarak, $u_0(x,y) = e^{0.5x+0.5y}$ ve $u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonları ele alınmış ve her iki durumda da yaklaşık çözüm, 5 iterasyon ile bulunmuştur.

Tablo 5.7 Problem 6 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = -y(y-1), (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$					
$u_0(x, y) = e^{0.5x+0.5y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	0.03335712	2.71828200	1	0.03482987	1.41614700
2	0.03179680	0.01675189	2	0.03187786	0.01751585
3	0.03166267	0.00431623	3	0.03166310	0.00439946
4	0.03163831	0.00123248	4	0.03163669	0.00124513
5	0.03163525	0.00036120	5	0.03163454	0.00038011

Problem 7. Bu problemde, $\Omega = [0,4] \times [0,1]$ olsun. Ω bölgesini $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ şeklinde iki bölgeye ayıralım: $\Omega_1 = [0,2] \times [0,1], \Omega_2 = [2,4] \times [0,1]$.

$u(x, y)$ fonksiyonu,

$$u(x, y) = \begin{cases} 4 & , (x, y) \in \Omega_1 \\ -x^2 + 4x & , (x, y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

şeklinde olsun. $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$ olduğu bellidir. Fakat, $u(x, y) \notin C^2(\Omega)$ olmaktadır. Bu durumda, Sınır koşulları aşağıdaki gibi olur:

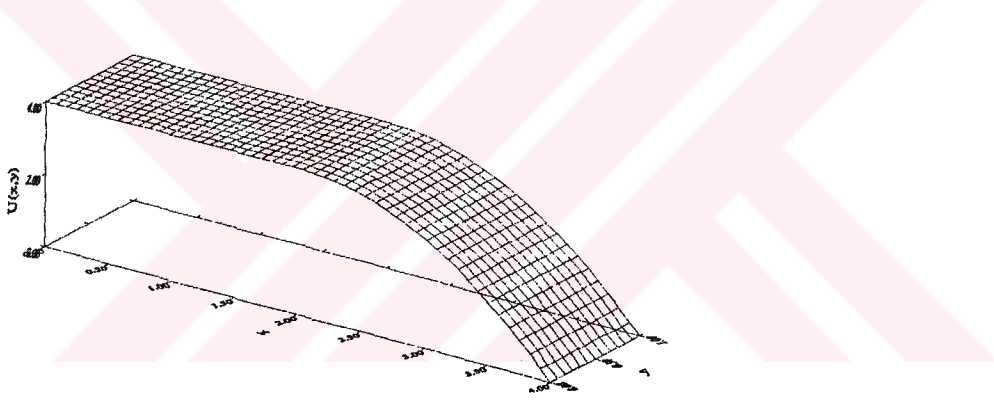
$$\begin{cases} u(x, y) = 4 & , (x, y) \in \Gamma_1 \\ u(x, y) = 0 & , (x, y) \in \Gamma_2 \\ u(x, y) = \begin{cases} 4 & , x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & , x > 2 \end{cases} & (x, y) \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases} \quad (5.15)$$

$$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \text{ olduğunda, (2.2)'den}$$

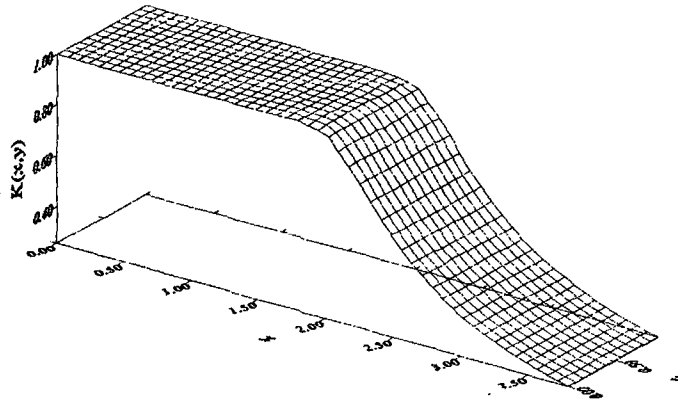
$$\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 & (x, y) \in \Omega_1, \\
F(x, y) &= -\frac{2}{[1 + 4(x - 2)^2]^{\frac{3}{2}}}, & (x, y) \in \Omega_2, \quad x \neq 2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

alalım.

(5.15) fonksiyonunun $x=2$ üzerinde $C^2(\Omega)$ sınıfından olmadığından yaklaşık çözüm sonlu farklar yöntemi ile hesaplanamaz. Sonlu elemanlardan elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.16'da, bu çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$) fonksiyonu ise Şekil 5.17'de verilmiştir. Bu problemde $k(\xi)$ fonksiyonu $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0, \xi^* = 14.4075$ şeklindedir.



Şekil 5.16 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.17 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, ($\xi = |\nabla u|^2$)'nin grafiği

$u(x, y)$ kesin çözümü için $J(u) = -0.73953200$ 'dır. Tablo 5.8'den görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

İterasyon başlangıcı olarak, $u_0(x, y) = e^{x+y}$ ve $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonları ele alınmış, yaklaşık çözüm, her iki durumda da 6 iterasyon ile bulunmuştur.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Eleman yönteminde ise %0.38'dir.

Tablo 5.8 Problem 7 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = \begin{cases} 4 & , (x, y) \in \Omega_1 \\ -x^2 + 4x & , (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$					
$u_0(x, y) = e^{x+y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-1.39159800	1.33125600	1	-1.34025300	1.31313500
2	-1.63996600	0.05568963	2	-1.61542000	0.04134658
3	-1.70315200	0.01253324	3	-1.68752000	0.01235609
4	-1.72129000	0.00291484	4	-1.72891300	0.00431241
5	-1.72666400	0.00123353	5	-1.71541800	0.00165860
6	-1.72832100	0.00043500	6	-1.71767200	0.00065898
$J(u)$	-1.73953200			-1.73953200	

Problem 8. Bu örnekte, Problem 7'de olduğu gibi $\Omega = [0, 4] \times [0, 1]$ ele alalım:

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Problem 7'den farklı olarak $u(x, y)$ fonksiyonu,

$$u(x, y) = \begin{cases} 4 & , (x, y) \in \Omega_1 \\ (x-4)^2 & , (x, y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (5.17)$$

olsun. Burada, $u(x, y) \in C(\Omega)$ 'dir.

Sınır koşullarını ise aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{cases} u(x,y) = 4, & (x,y) \in \Gamma_1 \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Gamma_2 \\ u(x,y) = \begin{cases} 4 & , x \leq 2 \\ (x-4)^2 & , x > 2 \end{cases} & (x,y) \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases} \quad (5.18)$$

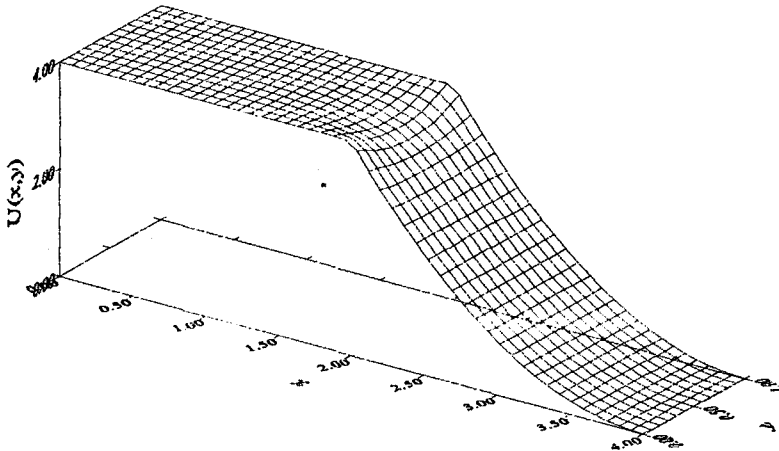
$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ olduğunda ,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & , (x,y) \in \Omega_1 \\ \frac{2}{[1+4(x-4)^2]^{3/2}} & , (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (5.19)$$

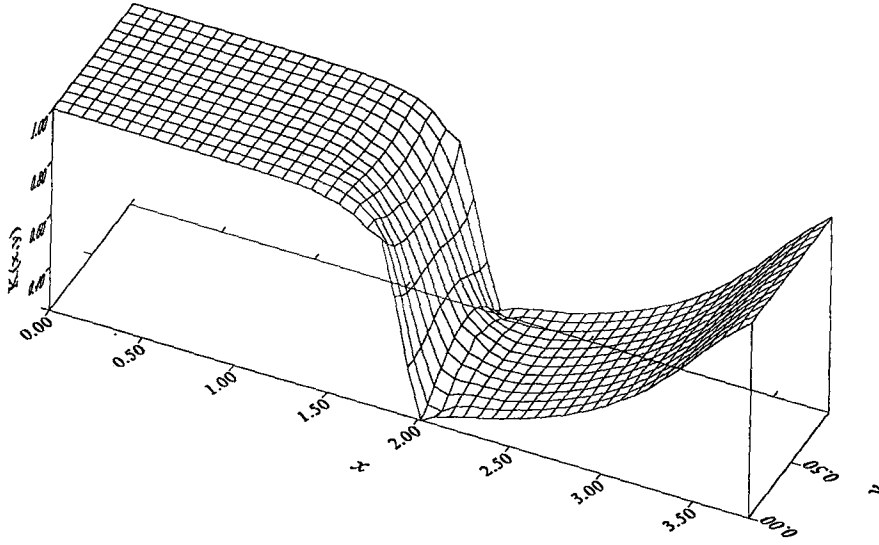
olur. (5.17) fonksiyonu, Ω_1 ve Ω_2 bölgelerinin ortak sınırında sürekli türevlenebilir olmadığı için, sonlu farklar yöntemi ile bulunamaz. Bu nedenle problem , sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilir.

Elde edilen u_h yaklaşık çözüm Şekil 5.18'de, bu çözüme karşılık gelen $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ fonksiyonu ise Şekil 5.19'da verilmiştir. Bu problemde $k(\xi)$ fonksiyonu , $\xi \in (\xi_*, \xi^*)$ için $\xi_* = 0, \xi^* = 17.7849$ şeklindedir.

Yaklaşık çözümün bağıl hatası, Sonlu Eleman yönteminde ise %7.03'dir.



Şekil 5.18 Yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 5.19 $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2)$ 'nin grafiği

$u(x, y)$ kesin çözümü için $J(u) = -0.34543730$ 'dır. Tablo 5.9'dan görüldüğü gibi, $J(u_h^{(n)})$ yaklaşık değerleri azalarak, $J(u)$ değerine yaklaşmaktadır.

İterasyon başlangıcı olarak, yaklaşık çözüm, $u_0(x, y) = e^{x+y}$ fonksiyonu için 4 iterasyon ile, $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu için 5 iterasyon ile bulunmuştur.

Tablo 5.9 Problem 8 için, $J(u)$ fonksiyoneli ve hatanın değerlendirilmesi.

$u(x, y) = \begin{cases} 4 & , (x, y) \in \Omega_1 \\ (x-4)^2 & , (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$					
$u_0(x, y) = e^{x+y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-1.28156700	1.25158700	1	-1.27055300	1.20221400
2	-1.35748200	0.04333120	2	-1.32131700	0.04232320
3	-1.36872100	0.02456130	3	-1.33158500	0.02211750
4	-1.36933500	0.00157800	4	-1.33923700	0.00214340
			5	-1.35131700	0.00199810
$J(u)$	-1.38154100			-1.38154100	

Farklı $k(\xi)$ değerleri için $J(u)$ fonksiyonelinin karşılaştırılması:

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ve $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ fonksiyonları için, değişik u fonksiyonlarının $J(u_h^{(n)})$

değerlerinin $J(u)$ değerine yaklaşımı aşağıdaki tablolarda gösterilmektedir.

Tablo 5.3 ve 5.10'dan görüldüğü gibi, $u = e^{x+y}$ fonksiyonu için, yaklaşık çözüm,

önce $u_0(x,y) = e^{0.5x+0.5y}$ başlangıç fonksiyonu alındığında, $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için, 15

iterasyon ve %0.17 hata ile $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için, 4 iterasyon ve %0.012 hata ile

bulunmuş, daha sonra ise $u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu alındığında,

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için, 15 iterasyon ve %0.16 hata ile $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için, 4 iterasyon ve

%0.013 hata ile hesaplanmıştır.

Tablo 5.11 ve 5.12'den görüldüğü gibi, $u = e^x + e^y$ fonksiyonu için, yaklaşık çözüm,

önce $u_0(x,y) = e^{0.5x} + e^{0.5y}$ başlangıç fonksiyonu alındığında, $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için, 11

iterasyon ve %0.051 hata ile $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için, 4 iterasyon ve %2.176 hata ile

bulunmuş, daha sonra ise, $u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ fonksiyonu alındığında,

$k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için, 11 iterasyon ve %0.045 hata ile $k(\xi) = \frac{\xi+3}{\xi+2}$ için, 4 iterasyon ve

%2.175 hata ile hesaplanmıştır.

Tablo 5.10 $u(x, y) = e^{x+y}$ ve $k(\xi) = \frac{\xi + 3}{\xi + 2}$ için, $J(u)$ fonksiyonelinin değerlendirilmesi.

$u(x, y) = e^{x+y}$					
$u_0(x, y) = e^{0.5x+0.5y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-22.14494000	4.67077400	1	-20.94056000	5.97290900
2	-23.43185000	0.06500030	2	-23.39864000	0.07367182
3	-23.44762000	0.00362158	3	-23.44595000	0.00342894
4	-23.44714000	0.00027633	4	-23.44707000	0.00024748
$J(u)$	-24.83798000			-24.83798000	

Tablo 5.11 $u(x, y) = e^x + e^y$ ve $k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ için, $J(u)$ fonksiyonelinin değerlendirilmesi.

$u(x, y) = e^x + e^y$					
$u_0(x, y) = e^{0.5x} + e^{0.5y}$			$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-5.91779400	2.13912100	1	-5.75149800	4.02041700
2	-5.88962900	0.08347034	2	-5.78938200	0.05500555
3	-5.86581700	0.03151679	3	-5.82047700	0.02259183
4	-5.87480500	0.01521182	4	-5.85368800	0.01158667
5	-5.89064400	0.00842309	5	-5.87971100	0.00674820
6	-5.90430400	0.00513148	6	-5.89816700	0.00425577
7	-5.91458900	0.00335312	7	-5.91101800	0.00284839
8	-5.92212000	0.00228977	8	-5.92006000	0.00198698
9	-5.92766800	0.00163531	9	-5.92653600	0.00143051
10	-5.93180200	0.00118661	10	-5.93126400	0.00104952
11	-5.93493100	0.00088787	11	-5.93474200	0.00079107
$J(u)$	-5.97535100			-5.97535100	

Tablo 5.12 $u(x,y) = e^x + e^y$ ve $k(\xi) = \frac{\xi + 3}{\xi + 2}$ için , $J(u)$ fonksiyonelinin değerlendirilmesi.

$u(x,y) = e^x + e^y$					
$u_0(x,y) = e^{0.5x} + e^{0.5y}$			$u_0(x,y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$		
iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $	iterasyon	$J(u_h^{(n)})$	$ u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n-1)} $
1	-14.47577000	2.13912100	1	-14.32759000	4.02041700
2	-14.93520000	0.03012943	2	-14.91629000	0.01761150
3	-14.97329000	0.00241709	3	-14.97160000	0.00143266
4	-14.97769000	0.00023198	4	-14.97748000	0.00014544
$J(u)$	-16.23454000			-16.23454000	



SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Sonuçlar:

1. Monoton potansiyel operatörler ile ilgili tanımlar verilmiştir.
2. Operatörün monotonluğu ile potansiyelin oluşturduğu fonksiyonelin dışbükeyliği arasındaki ilişki incelenmiştir.
3. Dışbükeylik prensibinden yararlanılarak , bir tür lineer olmayan eliptik denklemin yaklaşık çözümü için sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır.
4. Potansiyelin monoton azalan olduğu değişik örneklerle gösterilmiştir.

Öneriler:

1. Tezdeki sonuçlar , fizik ve matematikte çeşitli problemlere uygulanabilir.
2. Verilen iterasyon yönteminden ve algoritmadan yararlanarak, bir tür lineer olmayan eliptik denklemlerle ilgili problemlerin sayısal çözümü elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. ADAMS, R.A. ,1975. Sobolev Spaces. Academic Press, New York.
2. BABUSKA, I. and AZIZ,A.K.,1972. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in the mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differantial equations, Academic Press, New York.
3. BREZIS, HAIM and BROWDER, FELIX , 1998. Partial differential Equations in the 20th century . Advances in Mathematics 135, 76-144.
4. CIARLET, P.G. and RAVIART, P.A.,1972. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite elements methods, Arch. Rational Mech. Anal., 46,177-199.
5. CIARLET, P.G.,1976.The Finite element method for elliptic problems,78-79.
6. CIARLET, P.,1978.Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North Holland.
7. DUVANT, G. and LIONS, J.L. , 1976. Inequalities in Mechanics and Physics. (Berlin-Springer).
8. FELIX, C.G.SANTOS, 2000. The linearization method for the Numerical Analysis of Finite Element Solutions to Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. SIAM J. Numer. Anal. Vol 38, pp.227-266.
9. FUCIK, S. , KROTOCHVIL, A. and NECAS, J., 1975. Kachanov's method and its application. Rev. Roum. Math. Pure. Appl. 20, 907-16.
10. GAJEWSKI, H., GREGER, K., ZACHARIAS, K., 1974. Nightlinear Operator Gleichungen und Operator Differential Gleichungen. Academic-Verlag,Berlin.
11. GASANOV, A.I. and KAPORIN, I.E., 1987. Use of the Exclusion Method in Solving Strictly Elliptic Systems Using the Finite Element Method. Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz.,Univ of Nebraska , Vol. 26, Lincoln.
12. HASANOV, A.,2000. Convexity argument for monotone potential operators and its application. Nonlinear Analysis 41.
13. HASANOV, A.,2001. Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi. Literatür Yayınları, İstanbul.

14. HASANOV, A., 1997. Inverse coefficient problems for monotone potential operators. *Inverse Problems* 13,pp-1265-1278.
15. HASANOV, A. and SEYITMAMEDOV, Z.,1995. The Solution of an Axisymmetric Inverse Elasto-Plastic Problem Using Penetration Diagram *International Journal of Nonlinear Mechanics*,30,pp.466-77.
16. HASANOV , A. and SEYITMAMEDOV , Z.,1998. Determination of unknown elastoplastic properties in Signorini problem . *International Journal of Nonlinear Mechanics* 33, pp-979-991.
17. KACHANOV, L. M., 1974. *Fundamentals of the Theory of Plasticity.* (Moscow:Mir).
18. KIKUCHI, N. and ODEN, J.T., 1988. *Contact problems in elasticity. A study of variational inequalities and finite element methods.* (Philadelphia, pa: SIAM).
19. KINDERLEHRER, D., 1982.,Remarks about Signorini's problem in linear elasticity *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa* 4 605-45.
20. KOLMOGOROV, A.N. and FORMIN, S.V.,1977.Ölçüm Lebesgue integrali ve Hilbert uzayları.(Çev.Karacay, T. VE Ataman Y. Türk Tarih Kurumu Basımevi,92-96,116-118,Ankara.
21. KUFNER, A.,FUCIK, S.,1980. *Nonlinear Differential Equations. Studies in Applied Mathematics*,Vol.2, Elseiver,Amsterdam.
22. LADDE, G.S., LAKSHMIKANTAM, VATSALA A.S.,1985. *Monotone İterative Techniques for Nonlinear Differential Equations.* Pitman, Boston.
23. LADYZHENSKAYA , O.A.,1985. *Boundary Value Problems in Mathematical Physics.* Springer, NewYork.
24. LEVINE, H.A.,1973. Logarithmic Convexity and the Cauchy problem for $p(t)u_{tt} + m(t)u_t + n(t)u = 0$ in Hilbert space. *Symp. On non-well-posed problems and Logarithmic Convexity* , Vol. 316,pp.102-160 ,Springer Lecture Notes.
25. LEVINE, H.A.,1970. Logarithmic Convexity and the Cauchy problem for some abstract second order differential inequalities.*J.Differential Equations*,8,34-55.
26. LIONS, J.L.,1969. *Quelques Methods de resolution des problems aux limites Non-lineares.* Dunad,Paris.
27. MIKHLIN, S.G.,1964. *Variational Methods in Mathematical Physics.* Newyork: Pergamon Press.
28. NATANSON, I.P. , 1974. *Theory of functions Real Variable .* (Moscow:Nauka).

29. PAO, C.V.,1992. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations . (New York:Plenum).
30. PAYNE, L. E. , 1975. Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations. Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol 22 , Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia , PA.
31. REKTORYS, K.,1975. Variational Methods in Mathematics. Science and Engineering,Holland,Boston.
32. RENARDY, M. and ROGERS, R.C.,1992. An introduction to partial differential equations, springer verlag,(elliptic equations) classification, 294-296.
33. RITZ, W.,1908. Journal für die reine und angew.Matem., Bd. 135.
34. SAMARSKII, A.A.,2001.The Theory of Difference Schemes.NewYork.
35. SEYITMAMEDOV , Z., 2002. Finite Element Analysis of the frictionless contact problem for a laminated medium. Applied mathematics and Computers in Simulation 58 ,pp-11-123.
36. TUNCER, T., 1992. Kısmi türevli diferansiyel denklemler, Mimar Sinan Üniversitesi yayınları,16,496-405, İstanbul.
37. ZIENKIEWICZ, O.C.,1977.The Finite Element Method.Londra:McGraw-Hill.

ÖZGEÇMİŞ

M. Aylin Bayrak, 1972 yılında İzmit'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladı. 1992 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1993 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma görevlisi olarak atandı. Ekim 1994 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başlayarak 'Çember Üzerinde Singüler İntegral Denklemin Sayısal Çözümü' isimli yüksek lisans tezini 1996 yılında tamamladı. 1997 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programını kazandı. Halen Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuğu vardır.