T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DİZİ UZAYLARI

116691

Mehmet Emin ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2002

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DİZİ UZAYLARI

Mehmet Emin ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, 22.05.2002 Tarihinde, aşağıda belirtilen jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Başarılı/~~Başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

....	Prof. Dr. Etibar PENAHLOY Jüri Başkanı	Prof. Dr. Fahrettin GÖKTAŞ Üye

Danışman
Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DİZİ UZAYLARI

Mehmet Emin ÖZTÜRK

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2002, Sayfa: 43

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur.

Çalışmanın birinci bölümünde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$, $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarının birer Banach uzayı oldukları gösterilerek bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiş ve bu uzayların sürekli dualleri verilmiştir. Ayrıca $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$, $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ dualleri de verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümde ise; $(l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$, $(l_\infty, c(\Delta^m))$, $(c, l_\infty(\Delta^m))$, $(c, c(\Delta^m))$ matris sınıfları karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fark dizi uzayları, $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri, matris dönüşümleri

SUMMARY

Ms.D. Thesis

DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

Mehmet Emin ÖZTÜRK

Fırat Universty
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

2002, Page : 43

In this study, which is prepared as three chapter, we investigate generalized difference sequence spaces which where defined by Et and Çolak.

In the first chapter we give the fundamental definitions and theorems.

In the second chapter we study the sequence spaces $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$, $c_0(\Delta^m)$ and we show that these sequence spaces are Banach spaces and give the continuous duals of the sequence spaces. We also give the $\alpha-$, $\beta-$ and $\gamma-$ duals of these sequence spaces.

In the last chapter, we give the matrix classes $(l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$, $(l_\infty, c(\Delta^m))$, $(c, l_\infty(\Delta^m))$, $(c, c(\Delta^m))$.

KEYWORDS: Difference sequence spaces, $\alpha-$, $\beta-$ and $\gamma-$ duals, matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı veren ve bu çalışmanın düzenli bir şekilde yürütülmesini sağlayan Sayın Hocam Prof. Dr. Rifat Çolak 'a minnet ve şükranlarını sunarım.

Ayrıca benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Mikail Et 'e teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet Emin ÖZTÜRK

SİMGELER

$\mathbf{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbf{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
w	: C üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı
l_1	: $\{x=(x_k): \sum_k \lvert x_k\rvert < \infty\}$ dizi uzayı
X'	: X normlu uzayının sürekli dual uzayı
X^α	: X 'in α- duali
X^β	: X 'in β- duali
X^γ	: X 'in γ- duali
(X, Y)	: X dizi uzayından Y dizi uzayı içine olan tüm matrislerin cümlesi
$\overline{X}$	: X cümlesinin kapanışı
$\sum_k x_k$	: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$
$\binom{n}{a}$	: Binom katsayısı
$x_k = O(k)$	: $(k^{-1}x_k)$ dizisinin sınırlı olduğunu ifade eder.

I. BÖLÜM

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1 [Maddox,1970] X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun, $+: X \times X \to X$ ve $\cdot: K \times X \to X$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $x, y \in X$ için

L 1) $x + y = y + x$

L 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L 3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L 4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L 5) $1.x = x$

L 6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L 8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

dir.

Tanım 1.2 [Kreyszig, 1978] X bir vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \to R^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N 1) $\|x\| \geq 0$

N 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (α skaler)

N 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir.

Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Bu çalışmada kompleks terimli bütün $x=(x_k)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w, $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k) \text{ ve } \alpha x=(\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.3. [Goes, G., Goes, S., 1970] X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\begin{aligned} \tau_k &: X \to C \\ x &\to \tau_k(x)=x_k, \quad (k=1,2,\ldots) \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekli ise X'e bir BK-uzayı denir.

Tanım 1.4. [Kantorovich, L.V., Akilov, G.P, 1982] $(X,\|.\|_1)$ ve $(Y,\|.\|_2)$ birer normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani $\forall x \in X$ için $\|Tx\|_2=\|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alır.

Tanım 1.5. [Maddox, 1970] Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X'den Y'ye bir lineer izometri vardır.

Tanım 1.6. [Maddox, 1970] X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü birebir, örten, f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f 'e X'den Y'ye bir homeomorfizm denir.

$f: X \to Y$ bir homeomorfizm ise, f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denk uzaylar olur.

Tanım 1.7. [Kreyszig, 1978] X normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{x\in X, x\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X,\|x\|=1}|f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X'in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 1.8. [Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981] X bir dizi uzayı olsun.

a) $X^{\alpha} = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X \text{ için} \right\},$

b) $X^{\beta} = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X \text{ için} \right\}$

c) $X^{\gamma} = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| < \infty \ \forall x \in X \text{ için} \right\}$

X^{α}, X^{β} ve X^{γ}'ya sırası ile X'in $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$duali denir. X^{α}, X^{β} ve X^{γ} birer dizi uzayı olup, $\phi \subset X^{\alpha} \subset X^{\beta} \subset X^{\gamma}$ dir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere $X \subset Y$ ise $Y^{\eta} \subset X^{\eta}$ dir.

Teorem 1.9. [Kreyszig, 1978] Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y'nin X' de kapalı olmasıdır.

Tanım 1.10. [Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981] $X \subset w$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_k) \in X$ ve $y = (y_k) \in X$ olmak üzere $x.y = (x_k y_k) \in X$ oluyorsa, yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X'e bir dizi cebiri denir.

Tanım 1.11. [Choudhary, B., Nanda, S., 1989] $X \neq \phi$ ve $Y \neq \phi, w$ dizi uzayının herhangi iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk}), (n,k = 1,2,\ldots)$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi, $\forall n \in \mathrm{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$

serisi yakınsak olmak üzere $Ax = (A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A' ya X' den Y' ye bir matris dönüşümü ve Ax 'e de x 'in A dönüşüm dizisi denir. (X,Y) ile X' den Y içine olan bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz.

Tanım 1.12 [Hardy, 1949] $\alpha \in R$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara binom katsayıları denir. Eğer n ve k birer doğal sayı ise $n \le k$ için

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!}$$

ve $n > k$ için

$$\binom{k}{n} = 0$$

dir.

Teorem 1.13. [Kreyszig, 1978] (X,d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\overline{M}, M$ 'nin kapanışını göstersin. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde M' de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

II. BÖLÜM

2.1. FARK DİZİ UZAYLARI

Fark dizileri kavramı H. Kızmaz tarafından [1981] geliştirildi. Kızmaz $X = \ell_\infty$, c ve c_0 olmak üzere,

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}) \in X\}$$

uzaylarını tanımladı ve bir kısım özellikleri verdi. Ayrıca bu uzayların,

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdi.

Daha sonra M.A.Sarıgöl [1987], $X = \ell_\infty$, c ve c_0 olmak üzere, Kızmaz 'ın tanımladığı dizi uzaylarını genelleştiren

$$X(\Delta_q) = \{x = (x_k) \in w : \Delta_q x = k^q (x_k - x_{k+1}) \in X, q < 1\}$$

uzaylarını tanımladı. Bu uzaylar arasındaki kapsama bağlantılarını verdi ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta_q} = |x_1| + \sup|k^p (x_k - x_{k+1})|$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdi.

Sonra M. Et [1993], $X = \ell_\infty$, c ve c_0 olmak üzere,

$$X(\Delta^2) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^2 x = (\Delta^2 x_k) = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1}) \in X\}$$

uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \|\Delta^2 x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdi.

Daha sonra M. Et ve R.Çolak [1995], $m \in \mathrm{N}$,

$$\Delta^0 x = (x_k),\ \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}),$$

$$\Delta^m x = \Delta^m x_k = \left(\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right)$$

ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzayları tanımladılar. Ayrıca bu uzayların,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdiler. Bu uzayların $m = 1$ hali Kızmaz'ın tanımladığı uzayları, $m = 2$ hali Et'in çalışmalarındaki uzayları özel haller olarak vermektedir.

Son olarak da Ç.Bektaş [2001], $m \in N$ ve $r \in R$ olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta^m{}_r) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m{}_r) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m{}_r) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^{m} |x_1| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdi.

Bu bölümde $c_0(\Delta^m), c(\Delta^m)$ ve $\ell_\infty(\Delta^m)$ dizi uzaylarının bazı özelliklerini teoremler halinde ispatları ile birlikte vereceğiz.

Teorem 2.1.1. [Et, 1992] $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^{m+1})$ dır.

İspat: $x \in c_0(\Delta^m)$ olsun. Bu takdirde $k \to \infty$ için

$$(\Delta^m x_k) \to 0 \text{ dır}$$

$$\left|\Delta^{m+1} x_k\right| = \left|\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}\right|$$

$$\leq \left|\Delta^m x_k\right| + \left|\Delta^m x_{k+1}\right| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

olduğundan $x \in c_0(\Delta^{m+1})$ dır.

Teorem 2.1.2. [Et, 1992] $c(\Delta^{m-1}) \subset c(\Delta^m)$ dir.

İspat: $x \in c(\Delta^{m-1})$ olsun. Bu takdirde en az bir ℓ için

$$(\Delta^{m-1} x_k) \to \ell \quad (k \to \infty)$$

dır.

$$\left|\Delta^{m-1} x_k\right| = \left|\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right| \leq \left|\Delta^{m-1} x_k - \ell\right| + \left|\Delta^{m-1} x_{k+1} - \ell\right| \to 0$$

olur ki bu $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$ demektir. O halde $x \in c(\Delta^m)$ dir.

Teorem 2.1.3. [Et, 1992] $\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$ dır.

İspat: $x \in \ell_\infty(\Delta^{m-1})$ olsun. Bu takdirde her bir $k \in \mathrm{N}$ için $\left|\Delta^{m-1}(x_k)\right| \leq K$ olacak şekilde en az bir $K > 0$ sayısı vardır. Böylece her $k \in \mathrm{N}$ için

$$\left|\Delta^m x_k\right| = \left|\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right| \leq \left|\Delta^{m-1} x_k\right| + \left|\Delta^{m-1} x_{k+1}\right| \leq 2K$$

ve buradan $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir.

Yukarıdaki üç teoremden şu sonucu yazabiliriz:

Sonuç 2.1.1. X, ℓ_∞, c veya c_0 uzaylarından birini göstersin. $n, m \in \mathrm{N}$ olmak üzere $n < m$ ise $X(\Delta^n) \subset X(\Delta^m)$ dir.

Teorem 2.1.4. [Et, Çolak, 1995] $c_0(\Delta^m) \subset c(\Delta^m)$ dir.

İspat: $x \in c_0(\Delta^m)$ olsun. Bu takdirde $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$ olup $x \in c(\Delta^m)$ dir.

Teorem 2.1.5 [Et, Çolak, 1995] $c(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$ dır.

İspat: $c(\Delta^m)$, $\ell_\infty(\Delta^m)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $c(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$ dır.

Şimdi $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ uzaylarının sürekli duallerini vereceğiz.

$$
\begin{aligned}
D : \ell_\infty(\Delta^m) &\to \ell_\infty(\Delta^m) \\
x &\to Dx = y = (0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan D operatörü lineerdir.

Gerçekten, $x, y \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve α skaleri için

1)
$$
\begin{aligned}
D(x+y) &= (0,0,\ldots,x_{m+1}+y_{m+1},x_{m+2}+y_{m+2},\ldots) \\
&= (0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots) + (0,0,\ldots,y_{m+1},y_{m+2},\ldots) \\
&= Dx + Dy
\end{aligned}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
D(\alpha x) &= (0,0,\ldots,\alpha x_{m+1},\alpha x_{m+2},\ldots) \\
&= \alpha(0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots) \\
&= \alpha Dx
\end{aligned}
$$

dir. D sınırlıdır. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
\|Dx\|_\Delta &= \sum_{i=1}^{m} |y_i| + \sup_k |\Delta^m y_k| \\
&= \sup\left\{ |\Delta^m y_1|, \ldots, |\Delta^m y_m|, |\Delta^m y_{m+1}|, \ldots \right\}
\end{aligned}
$$

$$
= \sup\left\{ \left| \sum_{v=m}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, \left| \sum_{v=m-1}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \left| \sum_{v=1}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, |\Delta^m x_{m+1}|, |\Delta^m x_{m+2}|, \ldots \right\}
$$

dir. Ayrıca

$$
\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \sup\left\{ |\Delta^m x_1|, \ldots, |\Delta^m x_m|, |\Delta^m x_{m+1}|, \ldots \right\}
$$

dir. Buradan $\|Dx\|_\Delta \le K \|x\|_\Delta$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$$D[\ell_\infty(\Delta^m)] = D\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : x \in \ell_\infty(\Delta^m)\, ve\ x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0\} \subset \ell_\infty(\Delta^m)$$

alt kümesini alalım. Bu $\ell_\infty(\Delta^m)$ 'un normlu bir alt uzayı olup, $D\ell_\infty(\Delta^m)$ üzerindeki norm

$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty$ şeklinde tanımlıdır.

Şimdi,

$$\begin{aligned} \Delta^m &: D\ell_\infty(\Delta^m) \to \ell_\infty \\ x &= (x_k) \to y = (y_k) = (\Delta^m x_k) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m nin lineerliği açıktır. Δ^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m birebirdir. $x, y \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $\Delta^m x = \Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^m(x_k - y_k) = \sum_{v=0}^{m}(-1)^v \binom{m}{v}(x_{k+v} - y_{k+v}) = \binom{m}{0}(x_k - y_k) + \ldots +$$
$$+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}(x_{k+m-1} - y_{k+m-1}) + (-1)^m \binom{m}{m}(x_{k+m} - y_{k+m}) = 0$$

olur. Buradan her $k \in N$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ^m örtendir. $\forall y \in \ell_\infty$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ vardır. Gerçekten,

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-m}(-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} y_v \tag{2.1.2}$$

olarak seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m sınırlıdır.

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|\Delta^m x\|_\infty} = 1$$

4) $(\Delta^m)^{-1}$ sınırlıdır ve $y_k = \sum_{v=1}^{k-m}(-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v$ olmak üzere

$$\left(\Delta^m\right)^{-1} : \ell_\infty \to D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)$$
$$x \to \left(\left(\Delta^m\right)^{-1} x_k\right) = \left(y_k\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\left\|\left(\Delta^m\right)^{-1}\right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|y\|_\Delta}{\|x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sup_k \left|\Delta^m \left(\Delta^m\right)^{-1} x_k\right|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dir. O halde Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Demek ki $D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)$ ile ℓ_∞ uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka, $\left\|\Delta^m x\right\|_\infty = \|x\|_\Delta = \sup_k \left|\Delta^m x_k\right|$ ve

$$\left\|\left(\Delta^m\right)^{-1} x\right\|_\Delta = \sup_k \left|\Delta^m \left(\Delta^m\right)^{-1} x_k\right| = \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

olduğundan Δ^m ve $\left(\Delta^m\right)^{-1}$ operatörleri normu korur.

$\left[D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)\right]'$ ve ℓ_∞' sırası ile $D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)$ ile ℓ_∞ uzaylarının sürekli duallerini göstersinler.

$$T : \left[D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)\right]' \to \ell_\infty'$$
$$f_\Delta \to T\left(f_\Delta\right) = f_\Delta \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlanan operatör bir lineer izometridir. Gerçekten

$f_\Delta, g_\Delta \in \left[D\ell_\infty\left(\Delta^m\right)\right]'$ ve $\forall\alpha$ skaleri için

1)
$$\begin{aligned} T\left(f_\Delta + g_\Delta\right) &= \left(f_\Delta + g_\Delta\right) \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} + g_\Delta \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} \\ &= T\left(f_\Delta\right) + T\left(g_\Delta\right) \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} T\left(\alpha f_\Delta\right) &= \left(\alpha f_\Delta\right) \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} \\ &= \alpha\left(f_\Delta \circ \left(\Delta^m\right)^{-1}\right) \\ &= \alpha T\left(f_\Delta\right) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T' nin normu koruduğunu yani,

$$\left\|f_\Delta\right\| = \left\|T\left(f_\Delta\right)\right\|$$

olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_\Delta=1}|f_\Delta(x)|, \quad x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$$

ve

$$\begin{aligned}\|T(f_\Delta)\| = \|f\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1}\left|f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1}(x)\right|, \quad x \in \ell_\infty \\ &= \sup_{\|(\Delta^m)^{-1}(x)\|_\Delta=1}\left|f_\Delta((\Delta^m)^{-1}(x))\right| \\ &= \sup_{\|y\|_\Delta=1}|f_\Delta(y)| = \|f_\Delta\|\end{aligned}$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in \ell_\infty'$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]'$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned}T(f_\Delta) &= T(f \circ \Delta^m) \\ &= (f \circ \Delta^m) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f \circ \left(\Delta^m \circ (\Delta^m)^{-1}\right) = f\end{aligned}$$

demek ki $T : [D\ell_\infty(\Delta^m)]' \to \ell_\infty'$ bir lineer izomorfizmdir. O halde $D\ell_\infty(\Delta^m)$ nin duali ℓ_∞ un dualine denktir.

$$\begin{aligned}D : c(\Delta^m) &\to c(\Delta^m) \\ x \quad &\to Dx = y = (0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan D operatörü $x, y \in c(\Delta^m)$ ve herhangi α skaleri için

1)
$$\begin{aligned}D(x+y) &= (0,0,\ldots,x_{m+1}+y_{m+1},x_{m+2}+y_{m+1},\ldots) \\ &= (0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots) + (0,0,\ldots,y_{m+1},y_{m+2},\ldots) \\ &= Dx + Dy\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}D(\alpha x) &= (0,0,\ldots,\alpha x_{m+1},\alpha x_{m+2},\ldots) \\ &= \alpha(0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots) \\ &= \alpha Dx\end{aligned}$$

sağlandığından lineerdir.

$$\|Dx\|_{\Delta}=\sum_{i=1}^{m}y_i+\sup_k|\Delta^m y_k|$$
$$=\sup\{|\Delta^m y_1|,\ldots,|\Delta^m y_m|,|\Delta^m y_{m+1}|,\ldots\}$$

$$=\sup\left\{\left|\sum_{v=m}^{m}(-1)^m\binom{m}{v}x_{v+1}\right|,\left|\sum_{v=m-1}^{m}(-1)^m\binom{m}{v}x_{v+2}\right|,\ldots,\left|\sum_{v=1}^{m}(-1)^m\binom{m}{v}x_{v+m}\right|,|\Delta^m x_{m+1}|,|\Delta^m x_{m+2}|,\ldots\right\}$$

ve

$$\|x\|_{\Delta}=\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\sup\{|\Delta^m x_1|,\ldots,|\Delta^m x_m|,|\Delta^m x_{m+1}|,\ldots\}$$

dir. Buradan $\|Dx\|_{\Delta}\leq K\|x\|_{\Delta}$ olacak şekilde bir $K>0$ vardır.

O halde D sınırlıdır.

$$D[c(\Delta^m)]=Dc(\Delta^m)=\{x=(x_k):x\in\Delta^m(c)\ \ ve\ \ x_1=x_2=\ldots=x_m=0\}\subset c(\Delta^m)$$

alt kümesini alalım. Bu $c(\Delta^m)$ ‘nin normlu bir alt uzayı olup, $Dc(\Delta^m)$ üzerindeki norm

$$\|x\|_{\Delta}=\|\Delta^m x\|_{\infty}=\sup_k|\Delta^m x_k|$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi

$$\Delta^m : Dc(\Delta^m)\to c$$
$$x=(x_k)\to\Delta^m(x)=y=(y_k)=(\Delta^m x_k)$$

şeklinde tanımlanan operatör bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m ‘nin lineerliği açıktır. Δ^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m **birebirdir.** $x,y\in Dc(\Delta^m)$ ve $\Delta^m x=\Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^m(x_k-y_k)=\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}(x_{k+v}-y_{k+v})$$
$$=\binom{m}{0}(x_k-y_k)+\ldots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}(x_{k+m-1}-y_{k+m-1})+(-1)^m\binom{m}{m}(x_{k+m}-y_{k+m})=0$$

olur. Buradan $\forall k\in\mathrm{N}$ için $x_k=y_k$ elde edilir. O halde $x=y$ dir.

2) Δ^m **örtendir.** Her $y \in c$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in c(\Delta^m)$ vardır. Gerçekten (x_k) dizisi (2.1.2) deki gibi seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m **sınırlıdır.**

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|\Delta^m x\|_\infty} = 1$$

4) $(\Delta^m)^{-1}$ sınırlıdır ve $y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v$ olmak üzere

$$(\Delta^m)^{-1} : c \to Dc(\Delta^m)$$
$$x = (x_k) \to \left((\Delta^m)^{-1} x_k\right) = (y_k)$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\left\|(\Delta^m)^{-1}\right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|y\|_\Delta}{\|x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sup_k \left|\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k\right|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dir. O halde Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Demek ki $Dc(\Delta^m)$ ve c uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka,

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty = \sup_k |\Delta^m x_k|$$

ve

$$\left\|(\Delta^m)^{-1} x\right\|_\Delta = \sup_k \left|\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k\right| = \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

olduğundan Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

Eğer T operatörü

$$T : [Dc(\Delta^m)]' \to c'$$
$$f_\Delta \to T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlanırsa, T operatörü bir lineer izometridir. Gerçekten $f_\Delta, g_\Delta \in [Dc(\Delta^m)]'$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

1) $$T(f_\Delta+g_\Delta)=(f_\Delta+g_\Delta)\circ(\Delta^m)^{-1}$$
$$=f_\Delta\circ(\Delta^m)^{-1}+g_\Delta\circ(\Delta^m)^{-1}$$
$$=T(f_\Delta)+T(g_\Delta)$$

2) $$T(\alpha f_\Delta)=(\alpha f_\Delta)\circ(\Delta^m)^{-1}$$
$$=\alpha\left(f_\Delta\circ(\Delta^m)^{-1}\right)$$
$$=\alpha T(f_\Delta)$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T 'nin normu koruduğunu yani,

$$\|f_\Delta\|=\|T(f_\Delta)\|$$

olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\|=\sup_{\|x\|_\Delta=1}|f_\Delta(x)|,\quad x\in D\Delta^m(c)$$

$$\|T(f_\Delta)\|=\|f\|=\sup_{\|x\|_\infty=1}\left|f_\Delta\circ(\Delta^m)^{-1}x_k\right|,\quad x\in c$$
$$=\sup_{\|(\Delta^m)^{-1}(x)\|_\Delta=1}\left|f_\Delta((\Delta^m)^{-1}(x))\right|$$
$$=\sup_{\|y\|_\Delta=1}|f_\Delta(y)|=\|f_\Delta\|$$

olduğundan T normu korur. Demek ki T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f\in c'$ için $T(f_\Delta)=f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta\in[Dc(\Delta^m)]'$ vardır. Gerçekten,

$$T(f_\Delta)=T(f\circ\Delta^m)$$
$$=(f\circ\Delta^m)\circ(\Delta^m)^{-1}$$
$$=f\circ\left(\Delta^m\circ(\Delta^m)^{-1}\right)=f$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[Dc(\Delta^m)]'$ ile c' uzayları denk topolojik uzaylardır. Böylece $\ell_1=\left\{x=(x_k)=\sum_k|x_k|<\infty\right\}$ olmak üzere $[Dc(\Delta^m)]'\cong\ell_1$ dir.

$$D:c_o(\Delta^m)\to c_o(\Delta^m)$$
$$x\to Dx=y=(0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)$$

şeklinde tanımlanan D operatörü lineerdir.

Gerçekten, $x, y \in c_o(\Delta^m)$ ve α skaleri için

1) $$D(x+y) = (0,0,\ldots,x_{m+1}+y_{m+1},x_{m+2}+y_{m+2},\ldots)$$
$$= (0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)+(0,0,\ldots,y_{m+1},y_{m+2},\ldots)$$
$$= Dx + Dy$$

2) $$D(\alpha x) = (0,0,\ldots,\alpha x_{m+1},\alpha x_{m+2},\ldots)$$
$$= \alpha(0,0,\ldots,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)$$
$$= \alpha Dx$$

olduğundan D lineerdir. Diğer taraftan

$$\|Dx\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m}|y_i| + \sup_k|\Delta^m y_k|$$
$$= \sup\{|\Delta^m y_1|,\ldots,|\Delta^m y_m|,|\Delta^m y_{m+1}|,\ldots\}$$
$$= \sup\left\{\left|\sum_{v=m}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{v+1}\right|,\left|\sum_{v=m-1}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{v+2}\right|,\ldots,\left|\sum_{v=1}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{v+m}\right|,|\Delta^m x_{m+1}|,|\Delta^m x_{m+2}|,\ldots\right\}$$

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m}|x_i| + \sup\{|\Delta^m x_1|,\ldots,|\Delta^m x_m|,|\Delta^m x_{m+1}|,\ldots\}$$

olduğundan $\|Dx\|_\Delta \le K\|x\|_\Delta$ olacak şekilde bir $K>0$ vardır.

O halde D sınırlıdır.

$$D[c_0(\Delta^m)] = Dc_0(\Delta^m) = \{x=(x_k) : x\in c_0(\Delta^m)\, ve\ x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0\} \subset c_0(\Delta^m)$$

alt kümesini alalım. Bu alt küme $c_0(\Delta^m)$'in normlu bir alt uzayı olup, $Dc_0(\Delta^m)$ üzerindeki norm,

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty = \sup_k|\Delta^m x_k|$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\Delta^m : Dc_o(\Delta^m) \to c_o$$
$$x = (x_k) \quad \to \Delta^m(x) = y = (y_k) = (\Delta^m x_k)$$

şekliden tanımlanan operatör bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m nin lineerliği açıktır. Δ^m nin bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m birebirdir. $x, y \in Dc_0(\Delta^m)$ ve $\Delta^m x = \Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^m(x_k - y_k) = \sum_{v=0}^{m}(-1)^v \binom{m}{v}(x_{k+v} - y_{k+v})$$

$$= \binom{m}{0}(x_k - y_k) - \binom{m}{1}(x_{k+1} - y_{k+1}) + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(x_{k+m} - y_{k+m}) = 0$$

olur. Buradan $\forall k \in \mathrm{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ^m örtendir. Her $y \in c_0$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in Dc_0(\Delta^m)$ vardır. Gerçekten (x_k) dizisi (2.1.2) deki gibi seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m sınırlıdır.

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|\Delta^m x\|_\infty} = 1$$

4) $(\Delta^m)^{-1}$ sınırlıdır ve $y_k = \sum_{v=1}^{k-m}(-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v$ olmak üzere

$$(\Delta^m)^{-1} : c_0 \to Dc_0(\Delta^m)$$
$$x = (x_k) \to ((\Delta^m)^{-1} x_k) = y = (y_k)$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\|(\Delta^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_\Delta}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_k |\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dir.

O halde Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $Dc_0(\Delta^m)$ ve c_0 uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka,

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty = \sup_k |\Delta^m x_k|$$

ve

$$\left\|(\Delta^m)^{-1} x\right\|_\Delta = \sup_k \left|\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k\right| = \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

olduğundan Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

$$T : [Dc(\Delta^m)]' \to c_0'$$
$$f_\Delta \to T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlanan, T dönüşümü bir lineer izometri olur. Gerçekten $f_\Delta, g_\Delta \in [Dc_0(\Delta^m)]'$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

1)
$$\begin{aligned} T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} + g_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} T(\alpha f_\Delta) &= (\alpha f_\Delta) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= \alpha\left(f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1}\right) \\ &= \alpha T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. T normu da korur. Yani, $\|f_\Delta\| = \|T(f_\Delta)\|$ dir. Gerçekten,

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_\Delta = 1} |f_\Delta(x)|, \quad x \in Dc_0(\Delta^m)$$

ve

$$\|T(f_\Delta)\| = \|f\| = \sup_{\|x\|_\infty=1}\left|f_\Delta \circ \left(\Delta^m\right)^{-1} x_k\right|, \quad x \in c_0$$
$$= \sup_{\left\|\left(\Delta^m\right)^{-1}(x)\right\|_\Delta=1}\left|f_\Delta((\Delta^m)^{-1}(x))\right|$$
$$= \sup_{\|y\|_\Delta=1}\left|f_\Delta(y)\right| = \|f_\Delta\|$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in c_0'$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [Dc_0(\Delta^m)]'$ vardır. Gerçekten,

$$T(f_\Delta) = T(f \circ \Delta^m)$$
$$= \left(f \circ \Delta^m\right) \circ \left(\Delta^m\right)^{-1}$$
$$= f \circ \left(\Delta^m \circ \left(\Delta^m\right)^{-1}\right) = f$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[Dc_0(\Delta^m)]'$ ile c_0' uzayları denk topolojik uzaylardır. Böylece $\ell_1 = \left\{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\right\}$ olmak üzere $[Dc_0(\Delta^m)]' \cong \ell_1$ dir.

Teorem 2.1.6. [Et, Çolak, 1995] $\ell_\infty(\Delta^m), c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \qquad (2.1.3)$$

normu ile birer normlu uzaydır.

İspat: $X, \ell_\infty(\Delta^m), c(\Delta^m)$ *ve* $c_0(\Delta^m)$ uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

N1) $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \geq 0$ olduğu aşikardır.

N2) $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty = 0$ olsun. Bu takdirde

$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ ve her $k \in \mathrm{N}$ için

$\left|\binom{m}{0}x_k-\binom{m}{1}x_{k+1}+\ldots+(-1)^m\binom{m}{m}x_{k+m}\right|=0$ olduğundan her $k\in N$ için $x_k=0$ elde edilir ki buradan $x=\theta$ bulunur.

Tersine $x=\theta$ olması halinde $\|x\|_\Delta=0$ olduğu aşikardır.

N3) $$\|\alpha x\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|+\sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\alpha x_{k+v}\right|$$

$$=|\alpha|\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{k+v}\right|\right)$$

$$=|\alpha|\|x\|_\Delta$$

N4) $$\|x+y\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i+y_i|+\sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}(x_{k+v}+y_{k+v})\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{k+v}\right|+\sum_{i=1}^{m}|y_i|+\sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}y_{k+v}\right|$$

$$=\|x\|_\Delta+\|y\|_\Delta$$

Teorem 2.1.7. [Et, Çolak, 1995] $(\ell_\infty(\Delta^m),\|.\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $x^s=(x_1^s,x_2^s,\ldots)\in\ell_\infty(\Delta^m)$ olmak üzere (x^s), $\ell_\infty(\Delta^m)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s,t\to\infty$ için

$$\|x^s-x^t\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i^s-x_i^t|+\sup_k|\Delta^m(x_k^s-x_k^t)|\to 0$$

olur. O halde $k\le m$ ve $s,t\to\infty$ için $|x_k^s-x_k^t|\to 0$ ve her $k\in N$ ve $s,t\to\infty$ için

$$\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}(x_{k+v}^s-x_{k+v}^t)\right|\to 0$$

dir.

Diğer taraftan

$$\left|x_{k+m}^s - x_{k+m}^t\right| \le \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t\right)\right| + \left|\binom{m}{0}\left(x_k^s - x_k^t\right)\right| + \ldots + \left|\binom{m}{m-1}\left(x_{k+m-1}^s - x_{k+m-1}^t\right)\right|$$

olması nedeni ile her $k \in \mathrm{N}$ ve $s,t \to \infty$ için

$$\left|x_k^s - x_k^t\right| \to 0$$

elde edilir. Buna göre $\left(x_k^s\right) = \left(x_k^1, x_k^2, \ldots\right)$ her sabit $k = 1,2,\ldots$ için $\boldsymbol{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\boldsymbol{C}$ tam olduğundan $\left(x_k^s\right)_{s=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, $(k = 1,2,\ldots)$ diyelim. $\left(x_k^s\right)$, $\ell_\infty(\Delta^m)$ da bir Cauchy dizi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s,t \ge \mathrm{N}$ oldukça $\left\|x^s - x^t\right\|_\Delta \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $s,t \ge \mathrm{N}$ için

$$\sum_{i=1}^{m}\left|x_i^s - x_i^t\right| \le \varepsilon \text{ ve } \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t\right)\right| \le \varepsilon$$

dur. Bu son ifadede $t \to \infty$ için limit alınırsa her $s \ge \mathrm{N}$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^{m}\left|x_i^s - x_i^t\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|x_i^s - x_i\right| \le \varepsilon$$

ve

$$\lim_t\left|\Delta^m\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t\right)\right| = \lim_t\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}\right)\right|$$

$$= \left|\Delta^m\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}\right)\right| \le \varepsilon$$

bulunur. Buradan $s \ge \mathrm{N}$ için

$$\left\|x^s - x\right\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\left|x_i^s - x_i\right| + \sup_k\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^s - x_{k+v}\right)\right| \leq 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi de $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left|\Delta^m x_k\right| &= \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{k+v}\right| \\
&= \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v} - x_{k+v}^{\mathrm{N}} + x_{k+v}^{\mathrm{N}}\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^{\mathrm{N}} - x_{k+v}\right)\right| + \left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{k+v}^{\mathrm{N}}\right| \\
&\leq \left\|x^{\mathrm{N}} - x\right\|_\Delta + \left|\Delta^m x_k^{\mathrm{N}}\right| = 0(1)
\end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. O halde $\left(\ell_\infty(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta\right)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.8 [Et, Çolak, 1995] $\left(c(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta\right)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $c(\Delta^m)$, $\ell_\infty(\Delta^m)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan Teorem 1.9 gereğince $c(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.9. 2 [Et, Çolak, 1995] $\left(c_0(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta\right)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $c_0(\Delta^m)$, $\ell_\infty(\Delta^m)$ in kapalı bir alt uzayı olduğundan Teorem 1.9 gereğince $c_0(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.10. [Et, Çolak, 1995] $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ uzayları (2.1.3) deki norm ile birer BK uzayıdır.

İspat: $\left\|x^n - x\right\|_\Delta \to 0 \quad (n \to \infty)$ olsun. Bu takdirde $k \leq m$ ve $n \to \infty$ için,

$$\left|x_k^n - x\right| \to 0$$

ve $\forall k \in \mathrm{N}$ ve $n \to \infty$ için

$$\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^{v}\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^{n}-x_{k+v}\right)\right|\to 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\left|x_{k+m}^{n}-x_{k+m}\right|\le\left|\sum_{v=0}^{m}(-1)^{v}\binom{m}{v}\left(x_{k+v}^{n}-x_{k+v}\right)\right|+\left|\binom{m}{0}\left(x_{k}^{n}-x_{k}\right)\right|+\ldots+\left|\binom{m}{m-1}\left(x_{k+m-1}^{n}-x_{k+m-1}\right)\right|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik göz önüne alınırsa $\forall k\in \mathrm{N}$ ve $n\to\infty$ için $\left|x_{k}^{n}-x_{k}\right|\to 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.2. DUAL UZAYLAR

Lemma 2.2.1. [Kızmaz, 1981] (p_n) pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olsun.

i) Eğer $\sup_n \left|\sum_{v=1}^{n} p_v a_v\right| < \infty$ ise $\sup_n \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \infty$

ii) Eğer $\sum_k p_k a_k$ yakınsak ise $\lim_n p_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$

dir.

Lemma 2.2.2. [Et, Çolak, 1995]

$\sup_k \left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup_k k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| < \infty$

ii) $\sup_k \left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$

olmasıdır.

İspat: $\sup_k \left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$ olsun. (2.2.1)

$$\left|\Delta^{m-1}x_1 - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| = \left|\sum_{v=1}^{k}\left(\Delta^{m-1}x_v - \Delta^{m-1}x_{v+1}\right)\right| \le \sum_{v=1}^{k}\left|\Delta^{m-1}x_v - \Delta^{m-1}x_{v+1}\right| = o(k)$$

yazılabileceğinden

$$k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| \le k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| + k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_1 - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| + k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_1\right|$$

eşitsizliğinden

$$\sup_k k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| < \infty \tag{2.2.2}$$

elde edilir.

Şimdi de $\sup_k \left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$ olduğunu gösterelim.

$\sup_k \left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$ olsun. Bu durumda (2.2.2) sağlanır.

$$\left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}x_{k+1}\right| \le k(k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| + (k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right|$$

$$\le \left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| + k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right|$$

eşitsizliğinden (2.2.1) ve (2.2.2) göz önüne alınırsa

$$\sup_k\left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$$

elde edilir.

(i) ve (ii) sağlansın. Bu takdirde

$$k(k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| - (k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| = k(k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_{k+1} - \Delta^{m-1}x_k\right| - (k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right|$$

$$\le \left|k(k+1)^{-1}\left(\Delta^{m-1}x_{k+1} - \Delta^{m-1}x_k\right) - (k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_k\right|$$

$$= \left|k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1} - (k+1)(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_k\right|$$

$$= \left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

elde edilir. Buradan

$$k(k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| \le (k+1)^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| + \left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

dır. Bu eşitsizlikten

$$\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| \le k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| + k^{-1}(k+1)\left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

$$\le k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| + k^{-1}(k+k)\left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

$$= k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| + 2\left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

bulunur. (i) ve (ii) göz önüne alınırsa $\sup_k\left|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$ elde edilir.

Lemma 2.2.3 [Et, 1993] $\sup_k k^{-1}\left|\Delta x_k\right| < \infty$ olması $\sup_k k^{-2}\left|x_k\right| < \infty$ olmasını gerektirir.

Sonuç 2.2.1 [Et, Çolak, 1995] $\sup_k k^{-1}\left|\Delta^{m-1}x_k\right| < \infty$ ise $\sup_k k^{-m}|x_k| < \infty$ dir.

Sonuç 2.2.2 [Et, Çolak, 1995] $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ise $\sup_k k^{-m}|x_k| < \infty$ dur.

Teorem 2.2.3 [Çolak, Et, 1997] $X = \ell_\infty$ veya c olsun. Buna göre

$$R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$$

olmak üzere

i) $[DX(\Delta^m)]^\alpha = \left\{a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty\right\}$

ii) $[DX(\Delta^m)]^\beta = \left\{a = (a_k) : \sum_k k^m a_k \text{ yakınsak}, \sum_k k^{m-1}|R_k| < \infty\right\}$

iii) $[DX(\Delta^m)]^\gamma = \left\{a = (a_k) : \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} k^m a_k\right| < \infty, \sum_k k^{m-1}|R_k| < \infty\right\}$

dir.

İspat: $X = \ell_\infty$ için ispatı vereceğiz.

i) $U_1 = \left\{a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty\right\}$ diyelim. $a \in U_1$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ için

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| \left(k^{-m}|x_k|\right) < \infty \tag{2.2.3}$$

dır. Buradan $a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ elde edilir.

$a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ için

$\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \le m \quad ise \\ k^m & k > m \quad ise \end{cases} \tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi için

$$\sum_k k^m |a_k| = \sum_{k=1}^{m} k^m |a_k| + \sum_k |a_k x_k| < \infty \tag{2.2.5}$$

olup, buradan $a \in U_1$ elde edilir.

ii) $U_2 = \left\{ a = (a_k) : \sum_k k^m a_k \text{ yakınsak } \sum_k k^{m-1} |R_k| < \infty \right\}$

diyelim. $a \in U_2$ olsun $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ ise

$y_{1-m} = y_{2-m} = \ldots = y_0 = 0$ ve (x_k) dizisi (2.1.2) deki gibi olmak üzere (2.1.1) sağlanacak şekilde bir tek $y = (y_k) \in \ell_\infty$ vardır. Bu durumda

$$\sum_{k=!}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} y_v \right) \tag{2.2.6}$$

$$= (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} (k+m-1)^{m-1} R_{k+m-1} \left(\frac{1}{(k+m-1)^{m-1}} \sum_{v=1}^{k} \binom{k+m-v-2}{m-2} y_v \right) \tag{2.2.7}$$

$$-n^m R_n n^{-m} x_n$$

dir. Lemma 2.2.1 (ii) ve Sonuç 2.2.2 göz önüne alınırsa $n \to \infty$ için

$$z = (z_k) = \left(\frac{1}{(k+m-1)^{m-1}} \sum_{v=1}^{k} \binom{k+m-v-2}{m-2} y_v \right)$$

olmak üzere $\sum_k k^{m-1} |R_k| < \infty$ olduğundan

$\sum_k (k+m-1)^{m-1} R_{k+m-1} z_k$ serisi mutlak yakınsaktır.

O halde $\sum_k a_k x_k$ serisi her $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ için yakınsaktır. Buradan $a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\beta$ elde edilir.

$a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\beta$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ için $\sum_k a_k x_k$ yakınsaktır. (2.2.4) de verilen $x = (x_k)$ dizisi için

$$\sum_k k^m a_k = \sum_{k=1}^{m} k^m a_k + \sum_k a_k x_k \tag{2.2.8}$$

olup, buradan $\sum_k k^m a_k$ serisi için yakınsak olduğu çıkar. Bu ise Lemma 2.2.1 (ii) den $n^m R_n = o(1)$ olmasını gerektirir.

Şimdi $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\beta - U_2$ olsun. Bu takdirde $\sum_k k^{m-1}|R_k|$ serisi ıraksaktır, yani $\sum_k k^{m-1}|R_k| = \infty$ dur. $x = (x_k)$ dizisi $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \le m \\ \sum_{v=1}^{k-1} v^{m-1} \operatorname{sgn} R_{v_i} & k > m \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $|\Delta^m(x)| = (m-1)!$ olduğundan, açıkça $x = (x_k) \in Dl_\infty(\Delta^m)$ olur. Bu takdirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{m} R_{k-1}\Delta x_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1}\Delta x_{k+m-1} - n^m R_n n^{-m} x_n \tag{2.2.9}$$

yazabiliriz. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\begin{aligned} \sum_k a_k x_k &= -\sum_k R_{k+m-1}\Delta x_{k+m-1} \\ &= \sum_k (k+m-1)^{m-1}|R_{k+m-1}| = \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise $a \in [Dl_\infty(\Delta^M)]^\beta$ olması ile çelişir. Demek ki $a \notin U_2$ kabulümüz doğru olmayıp $a \in U_2$ dir.

iii) $U_3 = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} k^m a_k \right| < \infty, \sum_k k^{m-1}|R_k| < \infty \right\}$

diyelim. $a \in U_3$ ve $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ olsun (2.2.6) göz önüne alınırsa

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| \le \left| \sum_{k=1}^{n-m} (k+m-1)^{m-1} R_{k+m-1} z_k \right| + \left| n^m R_n n^{-m} x_n \right| \tag{2.2.10}$$

yazabiliriz. Lemma 2.2.2 (ii) ve sonuç 2.2.2 dikkate alınırsa $\sum_k k^{m-1}|R_k|$ serisinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı olacağından

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| < \infty$$

elde edilir. Buradan $a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\gamma$ olur.

$a \in [D\ell_\infty(\Delta^m)]^\gamma$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\ell_\infty(\Delta^m)$ için

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| < \infty$$

dır. (2.2.4) de verilen $x = (x_k)$ dizisi ve $n > m$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^m a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m} k^m a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \tag{2.2.11}$$

yazılabileceğinden

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n} k^m a_k\right| < \infty$$

elde edilir. Bu ise $\sup_n|n^m R_n| < \infty$ olmasını gerektirir.

Şimdi $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)] - U_3$ olsun. Bu takdirde $\sum k^{m-1}|R_k|$ serisi ıraksaktır. Yani $\sum_k k^{m-1}|R_k| = \infty$ dır. $x = (x_k)$ dizisi $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \le m \\ \sum_{v=1}^{k-1} v^{m-1}\operatorname{sgn} R_v & , \quad k > m \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $|\Delta^m(x)| = (m-1)!$ olacağından $x \in Dl_\infty(\Delta^m)$ dir. Bu takdirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{m} R_{k-1} \Delta x_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - n^m R_n n^{-m} x_n$$

yazabiliriz. $x \in Dl_\infty(\Delta^m)$ olduğundan sağ taraftaki ilk terim sıfırdır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n-m} (k+m-1)^{m-1} |R_k x_{k-1}| - n^m R_n n^{-m} x_n$$

elde edilir. Sağ taraftaki ikinci terim sınırlı ancak $\sum_k k^{m-1}|R_k| = \infty$ olduğundan ilk terimin kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir. Buradan $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$ sınırlı değildir. Bu ise $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\gamma$ olması ile çelişir. O halde

$$\sum_{k=1}^{n-m} (k+m-1)^{m-1} |R_k x_{k-1}| < \infty$$

dır. Böylece $a \in U_3$ dür.

Teorem 2.2.4.

i. $[DX(\Delta^m)]^\alpha = [X(\Delta^m)]^\alpha$
ii. $[DX(\Delta^m)]^\beta = [X(\Delta^m)]^\beta$
iii. $[DX(\Delta^m)]^\gamma = [X(\Delta^m)]^\gamma$

dir.

İspat: Sadece (i) 'nin ispatını yapalım. Diğerleri benzer olarak yapılır. $X = l_\infty$ olsun. $Dl_\infty(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^m)$ olduğundan $[l_\infty(\Delta^m)]^\alpha \subset [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ elde edilir. $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ ve $x \in l_\infty(\Delta^m)$ olsun.

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| (k^{-m} |a_k|)$$

eşitliğinden $a \in [l_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ elde edilir.

Bu teoremde $m=1$ alındığı zaman Kızmaz 'a ait olan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.5. [Kızmaz, 1981] $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ ve $X = l_\infty$ veya c olmak üzere

$$(X(\Delta))^{\alpha} = \left\{ a=(a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| < \infty \right\}$$

$$(X(\Delta))^{\beta} = \left\{ a=(a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty \right\}$$

$$(X(\Delta))^{\gamma} = \left\{ a=(a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} k a_k \right| < \infty \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty \right\}$$

dir.

Teorem 2.2.4 de $m=2$ alındığı zaman M. Et 'e ait olan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.6. [Et, 1993] $X = \ell_\infty$ veya c için

$$\left[X(\Delta^2)\right]^{\alpha} = \left\{ a=(a_k) : \sum_k k^2 |a_k| < \infty \right\}$$

dir.

Teorem 2.2.7. [Malkowsky, Parashar, 1997] m bir pozitif tam sayı ve

$$\mathrm{M}^{\alpha}(m) = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| k^m < \infty \right\}$$

olmak üzere

$$\left[c_0(\Delta^m)\right]^{\alpha} = \mathrm{M}^{\alpha}(m)$$

dir.

İspat: $a \in \mathrm{M}^{\alpha}(m)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| k^m < \infty \qquad (2.2.12)$$

dir. $x \in c_0(\Delta^m)$ olsun. Buna göre $|\Delta^m x_k| \le M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k x_k| &= \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\left|\sum^{(m)}(\Delta^m x)_k\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{j=0}^{k}\binom{m+k-j-1}{k-j}|(\Delta^m x)_j| \\ &\le M\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\binom{m+k}{k} \le MM_2\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|k^m < \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$M^{\alpha}(m) \subset [c_0(\Delta^m)]^{\alpha} \tag{2.2.13}$$

olur.

Tersine $a \notin \mathrm{M}^{\alpha}(m)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1}|a_k|\binom{m+k}{k} \ge s+1 \qquad (s = 0,1,\ldots)$$

olacak şekilde $0 = k(0) < k(1) < \ldots$ şartına uyan bir $(k(s))_{s=0}^{\infty}$ pozitif tam sayılar dizisi vardır.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{1}{\ell+1}\sum_{j=k(\ell)}^{k(\ell+1)-1}\binom{m+k-j-1}{k-j} + \frac{1}{s+1}\sum_{j=k(s)}^{k}\binom{m+k-j-1}{k-j}$$

$$(k(s) \le k \le k(s+1)-1; \quad s = 0,1\ldots)$$

şeklinde olsun. Bu takdirde

$$|\Delta^m x_k| = \frac{1}{s+1} \qquad (k(s) \le k \le k(s+1)-1; s = 0,1,\ldots)$$

yani $x \in c_0(\Delta^m)$ olur. Buradan

$$\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1}|a_k x_k| = \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1}|a_k|\left(\sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{1}{\ell+1}\sum_{j=k(\ell)}^{k(\ell+1)-1}\binom{m+k-j-1}{k-j} + \frac{1}{s+1}\sum_{j=k(s)}^{k}\binom{m+k-j-1}{k-j}\right)$$

$$\geq \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j}$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \binom{m+k}{k} \geq 1 \quad (s = 0,1,\ldots)$$

elde edilir, yani $a \notin c_0(\Delta^m)$dir. Böylece $[c_0(\Delta^m)]^\alpha \subset M^\alpha(m)$ olur. Buna göre;

$$[c_0(\Delta^m)]^\alpha = M^\alpha(m)$$

elde edilir.

[Bektaş, 2001] de Teorem 3.7. deki $r = 0$ aldığımız zaman aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.2.8: c_0^+, c_0 daki bütün pozitif terimli dizilerin cümlesi ve $v \in c_0^+$ olsun.

$$M_0^\beta(m) = \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} v_j < \infty, \forall v \in c_0^+ \right\}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

$$(Dc_0(\Delta^m))^\beta = M_0^\beta(m)$$

dir.

İspat: Eğer $x \in Dc_0(\Delta^m)$ ise, yeterince büyük k, örneğin $k > m$ için

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^m \binom{m+k-j-1}{m-1} y_{j-m}$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \ldots = y_0 = 0$$

olacak şekilde bir tek $y = (y_k) \in c_0$ mevcuttur. $a \in M_0^\beta(m)$

olsun. Bu takdirde $\forall v \in c_0^+$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j$$

yakınsak olduğundan Lemma 2.2.1 (ii) de $p_k = \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j$ alırsak

$$\lim_{n\to\infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} v_j = 0$$

elde ederiz. Şimdi (2.2.7) de $n \to \infty$ için limit alalım. $|y_j| \le v_j$ olacak şekilde bir $(v_j) \in c_0^+$ bulunabileceğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} y_j \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} |y_j|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} v_j < \infty$$

elde edilir. Yani $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} y_j$ serisi mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır. Yine $(y_i) \in c_0$ ve en az bir $(v_j) \in c_0^+$ için $|y_j| \le v_j$ olduğundan

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left| R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} y_j \right| \le \lim_{n\to\infty} |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} |y_j|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} v_j = 0$$

bulunur. Buradan $\lim_{n\to\infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} y_j = 0$ elde edilir.

Böylece her $x \in Dc_0(\Delta^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsak olur. Bu ise $a \in [Dc_0(\Delta^m)]^\beta$ olması demektir.

Tersine $a \in \left[Dc_0\left(\Delta^m\right)\right]^\beta$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her bir $x \in Dc_0\left(\Delta^m\right)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır. $x=(x_k)$ dizisini, $v \in c_0^+$ herhangi bir dizi olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0 &, \quad k \le m \quad \text{ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j, & \quad k > m \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $x=(x_k) \in Dc_0\left(\Delta^m\right)$ olur.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$$

yazılabileceğinden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j$ serisi yakınsak olur. Lemma 2.2.1 (ii) den $n \to \infty$ iken

$$R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} v_j \to 0$$

dir.

Şimdi $a \in \left[c_0\left(\Delta^m\right)\right]^\beta - M_0^\beta(m)$ olsun. Bu takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} \left|R_k\right| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} v_j$ serisi en az bir $(v_j) \in c_0^+$ için ıraksaktır. $x=(x_k)$ dizisi $\forall$k için $a_k > 0$ veya $\forall$k için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0 &, \quad k \le m \quad \text{ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \operatorname{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j+1}{m-2} v_j, & \quad k > m \quad \text{ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $\left|\Delta^m x_k\right| = v_k$ ve $(v_k) \in c_0^+$ olduğundan $x=(x_k) \in c_0\left(\Delta^m\right)$ olduğu açıktır. Bu takdirde $\forall$n $> m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz.

$$\left(\left(\sum_{v=1}^{n-1}\operatorname{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1}\binom{v-j+1}{m-2}v_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n-m}\binom{n-j-1}{m-1}v_j\right)^{-1}\right)\in \ell_\infty$$

olacağından $n\to\infty$ için limit alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty}|R_{k+m-1}|\sum_{v=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}v_j=\infty$$

elde edilir. Bu ise $a\in\left[Dc_0(\Delta^m)\right]^\beta$ olması ile çelişir.

[Bektaş, 2001] deki Teorem 3.8. de $r=0$ aldığımız zaman aşağıdaki Teoremi elde ederiz.

Teorem 2.2.9. $v\in c_0^+$ olsun

$$M_0^\gamma(m)=\left\{a\in w:\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}v_j\right|<\infty\right\}$$

ve $$\sum_{k=1}^{\infty}|R_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j+1}{m-2}v_j<\infty,\forall v\in c_0^+$$

ve $R_k=\sum_{v=k+1}^{\infty}a_v$ olmak üzere

$$\left[Dc_0(\Delta^m)\right]^\gamma=M_0^\gamma(m)$$

dir.

İspat: $x\in Dc_0(\Delta^m)$ ise yeterince büyük her k, örneğin $k>m$ için

$$x_k=\sum_{j=1}^{k-m}(-1)^m\binom{k-j-1}{m-1}y_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(-1)^m\binom{k+m-j-1}{m-1}y_{j-m}$$

$$y_{1-m}=y_{2-m}=\ldots=y_0=0$$

olacak şekilde bir tek $y=(y_k)\in c_0$ mevcuttur. $a\in M_0^{\gamma}(m)$ olsun. Bu takdirde $|y_j|\le v_j$ olacak şekilde bir $v=(v_j)\in c_0^+$ bulunabileceğinden (2.2.7) den

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right| &\le \sum_{k=1}^{n-m}|R_{k+m-1}|\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}|y_i|+|R_n|\sum_{j=1}^{n-m}\binom{n-j-1}{m-1}|y_j| \\ &\le \sum_{k=1}^{n-m}|R_{k+m-1}|\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}v_j+\left|R_n\sum_{j=1}^{n-m}\binom{n-j-1}{m-1}v_j\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.2.1. (i) gereğince

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}v_j\right|<\infty$$

ise

$$\sup_n\left|R_n\sum_{j=1}^{n-m}\binom{n-j-1}{m-1}v_j\right|<\infty \tag{2.2.14}$$

bulunur. Dolayısıyla, $a\in M_0^{\gamma}(m)$ olması nedeniyle (2.2.14) den

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|<\infty$$

olur. Buradan $a\in[Dc_0(\Delta^m)]^{\gamma}$ bulunur.

Tersine $a\in[Dc_0(\Delta^m)]^{\gamma}$ olsun. Bu takdirde her $x\in Dc_0(\Delta^m)$ için $\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|<\infty$ dir.

$v=(v_j)\in c_0^+$ herhangi bir dizi olmak üzere $x=(x_k)$ dizisini,

$$x_k=\begin{cases}0 & ,\quad k\le m \quad \text{ise}\\ \sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}v_j, & k>m \quad \text{ise}\end{cases}$$

şeklinde alalım. Böylece $x=(x_k)\in Dc_0(\Delta^m)$ olup, $n>m$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}v_j\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|$$

yazılabileceğinden,

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} v_j \right| < \infty$$

elde edilir. Lemma 2.2.1 (i) den $\sup_n \left| R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} v_j \right| < \infty$ dir.

Şimdi $a \in [Dc_0(\Delta^m)]^\gamma - M_0^\gamma(m)$ olsun. Bu takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{k=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} v_j = \infty$ dir. O halde bu serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \ k \le m \quad \text{ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \operatorname{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} v_j, & k > m \quad \text{ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçelim. $k > m$ için $|\Delta^m x_k| = v_k$ ve $(v_k) \in c_0^+$ olduğundan $x = (x_k) \in c_0(\Delta^m)$ olduğu açıktır. Bu takdirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n , \quad \text{yazabiliriz.}$$

Buradan $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} v_j - R_n x_n$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $(R_n x_n)$ dizisi sınırlı fakat ilk terimi genel terim kabul eden dizi sınırlı olmadığından $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right)$ sınırlı değildir. Bu ise $a \in [c_0(\Delta^m)]^\gamma$ olması ile çelişir. Demek ki $a \in M_0^\gamma(m)$ dir.

Teorem 2.2.10. [Bektaş, 2001] $\eta = \beta$ veya γ için

$$[c_0(\Delta^m)]^\eta = [Dc_0(\Delta^m)]^\eta \text{ dir.}$$

İspat: $\eta = \beta$ olsun. $Dc_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^m)$ olduğundan

$$[c_0(\Delta^m)]^\beta \subset [Dc_0(\Delta^m)]^\beta$$

dır. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} x_k & , \quad k \leq m \quad \text{ise} \\ x'_k & , \quad k > m \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $n > m$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} a_k x'_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k x_k + (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k+m-j-2}{m-2} y'_j - (-1)^m R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^n y'_j \end{aligned}$$

olacak şekilde bir (y'_j) dizisi vardır. Lemma 2.2.1. (ii) ve Teorem 2.2.8. den $a \in [Dc_0(\Delta^m)]^\beta$ elde edilir.

$\eta = \gamma$ için benzer ispat yapılır.

III. BÖLÜM

3. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $A=(a_{nk})$ kompleks terimli bir matris olmak üzere $(l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$, $(l_\infty, c(\Delta^m))$, $(c, l_\infty(\Delta^m))$, $(c, c(\Delta^m))$ matris sınıflarını vereceğiz.

Teorem 3.1. $A \in (l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B=(b_{nk})=(\Delta^m a_{nk})=(\Delta^{m-1}a_{nk}-\Delta^{m-1}a_{n+1,k}) \tag{3.1}$$

olmak üzere

i. $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in \mathbf{N}$ için)

ii. $B \in (l_\infty, l_\infty)$

olmasıdır.

İspat: $A \in (l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$ olsun. Bu takdirde her $x \in l_\infty$ ve her $n \in N$ için $A_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in l_\infty(\Delta^m)$ dir.

i. Her $x \in l_\infty$ için $\sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak $(l_\infty)^\beta = l_1$ olduğundan her $n \in \mathbf{N}$ için $(a_{nk})=(a_{n1}, a_{n2}, \ldots,) \in l_1$ yani, $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ dur.

ii. $$\Delta^m A_n(x)=\sum_k \Delta^m a_{nk}x_k=\sum_k b_{nk}x_k=B_n(x) \tag{3.2}$$

olması nedeniyle $(A_n(x)) \in l_\infty(\Delta^m)$ olduğundan $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ olup, buradan $B \in (l_\infty, l_\infty)$ elde edilir.

i. ve ii. sağlansın ve $x \in l_\infty$ olsun. $(B_n(x)) \in l_\infty$ olması nedeniyle

$$B_n(x)=\sum_k b_{nk}x_k=\sum_k \Delta^m a_{nk}x_k=\Delta^m A_n(x) \tag{3.3}$$

eşitliğinden $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ bulunur ki buradan $(A_n(x)) \in l_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. O halde $A \in (l_\infty, l_\infty(\Delta^m))$ dir.

Teorem 3.2. B matrisi (3.1) deki gibi olsun. $A \in (l_\infty, c(\Delta^m))$ olması için gerek ve yeter koşul

i. $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in N$ için)

ii. $B \in (l_\infty, c)$

olmasıdır.

İspat: $A \in (l_\infty, c(\Delta^m))$ olsun. Bu takdirde her $x \in l_\infty$ ve her $n \in N$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in c(\Delta^m)$ dir.

i. Her $x \in l_\infty$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak $(l_\infty)^\beta = l_1$ olduğundan her $n \in N$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ olur.

ii. $(A_n(x)) \in c(\Delta^m)$ ise $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ dir. (3.2) kullanılırsa $B \in (l_\infty, c)$ bulunur.

i. ve ii. sağlansın ve $x \in l_\infty$ keyfi bir dizi olsun. (3.3) den $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ elde edilir. Buradan $A \in (l_\infty, c(\Delta^m))$ dur.

Teorem 3.3. B matrisi (3.1) deki gibi olsun. $A \in (c, l_\infty(\Delta^m))$ olması için gerek ve yeter koşul

i. $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in N$ için)

ii. $B \in (c, l_\infty)$

olmasıdır.

İspat: $A \in (c, l_\infty(\Delta^m))$ olsun. Bu takdirde her $x \in c$ için $(A_n(x)) \in l_\infty(\Delta^m)$ ve her $n \in N$ ve için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsaktır.

i. Her $x \in c$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ve $c^\beta = l_1$ olduğundan, her $n \in N$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ elde edilir.

ii. $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ olduğundan (3.2) den $B \in (c, l_\infty)$ olur.

i. ve ii. sağlansın ve $x \in c$ olsun. $(B_n(x)) \in l_\infty$ olduğundan (3.3) dikkate alınırsa $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ elde edilir. Buradan $A \in (c, l_\infty(\Delta^m))$ dur.

Teorem 3.4. B matrisi (3.1) deki gibi olsun. $A \in (c, c(\Delta^m))$ olması için gerek ve yeter koşul

i. $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in N$ için)

ii. $B \in (c, c)$

olmasıdır.

İspat: $A \in (c, c(\Delta^m))$ olsun. Bu takdirde her $x \in c$ için $(A_n(x)) \in c(\Delta^m)$ ve her $n \in N$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsaktır.

i. Her $x \in c$ ve her $n \in N$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve $c^\beta = l_1$ olduğundan her $n \in N$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ elde edilir.

ii. (3.2) yi göz önüne alalım. $(A_n(x)) \in c(\Delta^m)$ olduğundan $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ olup buradan $B \in (c, c)$ elde edilir.

Tersine i. ve ii. sağlansın ve $x \in c$ olsun. (3.3) göz önüne alınırsa $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ elde edilir. Bu ise $A_n(x) = \Delta^m(c)$ demektir. O halde $A \in (c, c(\Delta^m))$ dir.

KAYNAKLAR

Bektaş, Ç. (2001), "Genelleştirilmiş Bazı Fark Dizi Uzayları", Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Çolak,R. and Et,M. (1997), "On Some Generalized Difference Sequence and Related Matrix Transformations", Hokkaido Math. J. 26 (3), 483-492.

E, Malkowsky. S. D. Parashar (1997), "Matrix Transformation in Spaces of Bounded and Convergent Difference Sequences of Order m", Analysis 17, 87-97.

Et,M. (1992), "Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri", Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Et,M. (1993), "On Some Difference Sequence Spaces", Doğa-Tr. J. of Mathematics, 17, 18-24.

Et,M. and Çolak, R. (1995)," On Some Generalized Difference Sequence Spaces", Soochow J. Of Math. 21 (4), 377-386.

Goes, G. and Goes, S, (1970), "Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I", Math. Z. 118,93-102.

Hardy, G. H. (1949), "Divergent Series", A the Clarendon Press, Oxford.

Kampthan, P.K. and Gupta, M. (1981), "Sequence Spaces and Series", Marcel Dekker Inc. New York.

Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. (1982), "Functional Analysis",Pergamon Press, Oxford.

Kızmaz, H. "On Certain Sequence Spaces", Canad. Math. Bull. 24 (2), 169-176 (1981).

Kreyszig, E. (1978), "Introductory Functional Analysis with Applications", John Wiley and Sons, New York.

Maddox, I. J. (1970), "Elements of Functional Analysis", Cambridge Univ. Press.

Sarıgöl, M.A. (1987), "On Difference Sequence Spaces", J. Karadeniz Tech. Univ. Fac. Arts. Sci. Ser. Math. Phys. 10, 63-71.

ÖZGEÇMİŞ

11. 05. 1974 tarihinde Osmaniye İli Düziçi İlçesi Böcekli beldesinde doğdum. İlkokulu köyümde, Ortaokul ve Lise öğrenimimi Düziçi İlçesi Atatürk Lisesinde tamamladım. 1994'de Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 1998 yılında Üniversiteden mezun oldum. Aynı yıl içinde Hatay İli Erzin İlçesi Cumhuriyet İlköğretim Okuluna Matematik öğretmeni olarak atandım. 1999 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Sınavını kazandım ve aynı yıl içerisinde Elazığ İli Merkez Yakup Şevki Paşa İlköğretim Okuluna tayin oldum. Halen bu görevi yürütmekteyim.

Mehmet Emin ÖZTÜRK