KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SMOOTH TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematikçi Banu PAZAR**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Danışman: Prof. Dr. Halis AYGÜN**

**MAYIS 2006**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# SMOOTH TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Banu PAZAR**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01 MAYIS 2006**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 31 MAYIS 2006**

| Tez Danışmanı | Üye | Üye |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Halis AYGÜN | Doç. Dr. Refik KESKİN | Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV |
| (.................) | (.................) | (.................) |

**MAYIS 2006**

**SMOOTH TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK**

**Banu PAZAR**

**Anahtar Kelimeler:** L-Fuzzy Kümesi, L-Fuzzy Topolojik Uzaylar, Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylar, $\alpha$- Alttan Yarı Sürekli Fonksiyon, $\alpha$-Scott Sürekli Fonksiyon, İyi Genelleştirme, Smooth Hausdorff Uzay, Smooth Kompaktlık, Smooth Yerel Kompaktlık, Smooth Parakompaktlık.

**Özet:** Bu çalışmanın amacı, smooth topolojik uzaylardaki temel kavramları vererek smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda verilen iyi genelleştirme özelliğine sahip kompaktlık kavramlarının ve özelliklerinin tanıtılması ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin incelenmesidir.

Birinci bölümde latis (kafes, örgü) kavramına ve bu kavrama ilişkin temel özelliklere değinildikten sonra L-fuzzy kümesi ve L-fuzzy topolojik uzay tanımı verilmiştir. Klasik topolojik uzaylar ile fuzzy topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

İkinci bölümde smooth topolojik uzay kavramı ve temel özellikleri verilerek "Üretilmiş Fuzzy Topolojik Uzaylar" başlığı altında I-fuzzy topoloji ile smooth I-fuzzy topoloji arasındaki ilişkiler verilmiştir. Scott sürekliliğin derecelendirilmesi tanımı verilerek klasik topolojik uzaylar ile smooth L-fuzzy topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelendikten sonra smooth Hausdorff uzay tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda iyi genelleştirme özelliğini sağlayan smooth kompaktlık, smooth relatif kompaktlık ve smooth yerel kompaktlık tanımları verilmiş ve bunların temel özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise L-fuzzy kümelerin smooth parakompaktlığı ele alınmış; kümenin yerine uzayın kendisi alınarak iyi genelleştirme özelliğine sahip smooth parakompakt uzay tanımı verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

**COMPACTNESS IN SMOOTH TOPOLOGICAL SPACES**

**Banu PAZAR**

**Keywords:** Fuzzy Set, L-Fuzzy Topological Spaces, Smooth L-Fuzzy Topological Spaces, $\alpha$-Lower Semi-Continuous Function, $\alpha$-Scott Continuous Function, Good Extension, Smooth Hausdorff Spaces, Smooth Compactness, Smooth Local Compactness, Smooth Paracompactness.

**Abstract:** The purpose of this study is to introduce the basic concepts of smooth topological spaces, the concepts of compactness which have good extension property and their properties in smooth topological spaces and to investigate the relations of these concepts.

In the first chapter, after mentioning some basic concepts in lattice theory, the fuzzy set and the definition of L-fuzzy topological spaces have been given. The relations between ordinary topological spaces and fuzzy topological spaces have been investigated.

In the second chapter, after giving the concept of smooth topological space and its basic properties, the relations between I-fuzzy topology and smooth I-fuzzy topology have been given in the subsection entitled "Produced Fuzzy Topological Spaces". Giving the definition of gradation of Scott continuity, relations between ordinary topological spaces and smooth L-fuzzy topological spaces have been investigated and then the definition of smooth Hausdorff space has been given.

In the third chapter, the definition of smooth compactness, smooth relative compactness and smooth local compactness which satisfies good extension property have been given in smooth L-fuzzy topological spaces and some basic properties have been investigated.

In the fourth chapter, the smooth paracompactness for L-fuzzy sets have been introduced, after taken the space itself instead of set, the definition of smooth paracompact space which has good extension property has been given and some properties have been investigated.

**ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR**

Fuzzy küme kavramı ilk kez 1965 yılında L.A.Zadeh tarafından verilmiştir. Bu kümeler baz alınarak 1968 yılında C.L.Chang, fuzzy topolojik uzay kavramını vermiş ve genel topolojideki bir çok kavramı ve özelliği fuzzy topolojik uzaylara genelleştirmiştir. Daha sonra R.Lowen, 1976 yılında yaptığı "Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Kompaktlık" isimli çalışmasında, Chang' in fuzzy topolojik uzay tanımındaki eksiklikleri ortadan kaldırarak yeni bir fuzzy topolojik uzay tanımı vermiştir. Ayrıca Lowen bu çalışmasında klasik topolojik uzaylar ile fuzzy topolojik uzaylar arasındaki ilişkileri de incelemiştir.

A.P.Sostak' a göre tüm bu tanımlarda fuzzy topoloji, bazı fuzzy kümelerinden oluşan ve klasik üç özelliği sağlayan bir crisp alt ailedir ve "fuzzy" olma sadece fuzzy küme kavramı ile sınırlı kalmıştır. Bu ise fuzzy topolojik uzay kavramının "fuzzy" olarak düşünülmesinde bir eksik gibi algılanmıştır. Bu nedenle, A.P.Sostak [20] 1985 yılında "smooth fuzzy topoloji" adı verilen yeni bir fuzzy topoloji tanımını vermiştir. A.P.Sostak' ın yaklaşımının ilk amacı, fuzzy topolojiyi bir fuzzy alt küme olarak düşünmek idi. İkinci amacı ise fuzzy kümelerini belli derecede açık olmasını sağlamaktı. [20, 21, 22] nolu makalelerde Sostak bu yeni fuzzy topolojik uzayın teorisini geliştirmiştir. 1992' de aynı yapı "açıklık derecelendirilmesi" adıyla K.C.Chattapodhyay ve arkadaşları [6] tarafından Sostak' ın çalışmasından habersiz olarak yeniden yapılmıştır. Aynı yıl A.A.Ramadan [18] Sostak' ın tanımına benzer bir fuzzy topoloji tanımını "smooth topoloji" adı ile vermiştir ve I = [0,1] kapalı aralığının yerine daha genel latislerin de alınabileceğini ileri sürmüştür.

[6] nolu makalede Chang fuzzy topolojilerin azalan bir ailesinden smooth topoloji ve verilen bir smooth I-fuzzy topolojiden de Chang fuzzy topolojiler elde edilerek aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

H.Aygün, M.W.Warner, S.R.T.Kudri [2] tarafından, verilen bir klasik topolojik uzaydan I = [0,1] kapalı aralığına "$\alpha$-alttan yarı sürekli fonksiyonlar" ($\alpha \in L$) tanımlanarak klasik topolojiden smooth I-fuzzy topoloji elde edilmiştir. I yerine L latisi (fuzzy latis) alınarak "$\alpha$-Scott sürekli fonksiyonlar" adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyonlar kullanılarak klasik topolojiden smooth L-fuzzy topoloji elde edilmiştir. Böylece, klasik topolojik uzaylar kategorisi (TOP) ile smooth L-fuzzy topolojik uzaylar kategorisi (SLFT) arasında bir funktor tanımlanmıştır. Bu funktor yardımıyla smooth L-fuzzy topolojik uzaylar için de "iyi genelleştirme özelliği" verilmiştir.

Klasik topolojik uzaylardaki kompaktlık tanımına benzer bir tanımı I-fuzzy topolojik uzaylarda ilk olarak Chang 1968 yılında yapmış olduğu çalışmada vermiştir. Ancak bu tanım "iyi genelleştirme özelliği"ne sahip olmadığından Lowen 1976 yılında, klasik topolojideki kompaktlığın bir çok özelliğini sağlamasının yanı sıra iyi genelleştirme özelliğini de sağlayan ve bu çalışmada "Lowen Fuzzy Kompaktlık" olarak adlandırılan bir kompaktlık tanımlamıştır. L-fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy kompaktlık tanımı ilk kez 1993 yılında Warner ve McLean tarafından verilmiştir. Daha sonra Kudri, 1994 yılında bu tanımı L-fuzzy kümeler için genelleştirerek kompakt L-fuzzy kümelerin özellikleri üzerine çalışmıştır.

Smooth L-fuzzy topolojik uzaylar için kompaktlık kavramı ise 1997 yılında H.Aygün, M.W.Warner ve S.R.T.Kudri [2] tarafından verilmiştir. [2]' de smooth Hausdorff uzay, smooth kompaktlık, smooth yerel kompaktlık tanımları verilerek bu kavramların iyi genelleştirme özelliğini sağladığı gösterilmiş ve bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Daha önce Malhang ve Benchalli [15] tarafından I-fuzzy topolojik uzaylarda çalışılmış olan "parakompaktlık" kavramı, 1995 yılında Kudri tarafından L-fuzzy topolojik uzaylarda ele alınıp bazı özellikleri incelenmiş ve iyi genelleştirme özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda parakompaktlık kavramı ise H.Aygün' ün [2]' de verdiği smooth kompaktlık kavramı baz alınarak, 2001 yılında A.A.Ramadan ve S.E.Abbas [19] tarafından verilmiştir. [19] nolu makalede smooth parakompaktlığın bazı özellikleri incelenmiş ve iyi genelleştirme özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN' e (K.O.Ü.F.E.F.) yoğun çalışmaları arasında göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca tez çalışmalarım sırasında yardımlarını eksik etmeyen Sayın Araş. Gör. A.Arzu BURAL' a (K.O.Ü.E.F) ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| X, Y, Z,... | : Klasik kümeler |
| f, g, h,… | : Fuzzy kümeler |
| $\varphi, \psi, \ldots$ | : Fonksiyonlar |
| I | : [0,1] kapalı aralığı |
| L | : Latis |
| $'$ | : Sırayı tersine koruyan dönüşüm |
| M(L) | : L latisinin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi |
| Pr(L) | : L latisinin birden farklı asal elemanlarının kümesi |
| $\beta(\alpha)$ | : $\alpha$ ' nın tüm minimal kümelerinin birleşimi |
| $\beta^{*}(\alpha)$ | : $\alpha \in L$ olmak üzere $\beta(\alpha)$ ve M(L)' nin arakesiti |
| $\chi_A$ | : A kümesinin karakteristik fonksiyonu |
| $L^X$ | : X üzerindeki tüm L-fuzzy kümelerin ailesi |
| Suppf | : f fuzzy kümesinin desteği |
| $x_p, x_\alpha$ | : L-fuzzy noktası |
| $M(L^X)$ | : $\{x_\alpha : x \in X, \alpha \in M(L)\}$ kümesi |
| $Pr(L^X)$ | : $\{x_p : x \in X, p \in Pr(L)\}$ kümesi |
| $(X, \tau)$ | : Smooth topolojik uzay |
| $\tau(f)$ | : f fuzzy kümesinin açıklık derecesi |
| $\mathcal{F}$ | : X üzerinde kapalılığın derecelendirilmesi |
| $\mathcal{F}(f)$ | : f fuzzy kümesinin kapalılık derecesi |
| $\tau_\alpha$ | : $\tau$ smooth topolojisinin $\alpha$ - seviyesi |
| $\omega_T$ | : T klasik topoloji tarafından üretilen smooth topoloji |
| $(X, \omega_T)$ | : (X,T) klasik topolojik uzayı tarafından üretilen smooth L-fuzzy topolojik uzay |
| $G_p$ | : $p \in Pr(L)$ ve $g \in L^X$ olmak üzere $\{x \in X : g(x) \geq p'\}$ kümesi |
| $(X, \tau_p)$ | : $(X, \tau)$ ' nun asal seviye uzayı |

# BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

## 1.1. Latisler ve Bazı Özellikleri

Tanım 1.1.1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in L$ için

$x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$

mevcutsa L kümesine bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve $L = (L, \leq, \wedge, \vee)$ ile gösterilir. [1]

Tanım 1.1.2: $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. Eğer L' nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcutsa L' ye tam latis denir.

L' nin en büyük elemanı $\vee L = 1$ ile gösterilir ve L' nin en küçük elemanı $\wedge L = 0$ ile gösterilir. 0' ı boş kümenin supremumu 1' i de boş kümenin infimumu olarak göz önüne alabiliriz. [1]

Tanım 1.1.3: $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. Eğer her $x \in L$ için

$x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$

olacak şekilde bir $x'$ elemanı mevcutsa $x'$ elemanına x' in tümleyeni denir.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$' : L \to L$$

$$x \to x'$$

dönüşümüne sırayı tersine koruyan dönüşüm denir. [1]

a) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$

b) $(a')' = a$

Tanım 1.1.4: $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. Eğer bu L latisi aşağıdaki özellikleri sağlarsa L' ye dağılımlı latis denir. [25]

a) $\forall x,y,z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

b) $\forall x,y,z \in L$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Tanım 1.1.5: $(L,\leq,\wedge,\vee)$ bir tam latis olsun. Eğer $\{\{a_{i,j} \mid j \in J_i\} \mid i \in F\} \subset \wp(L) - \{\varnothing\}$ $(F \neq \varnothing)$ ailesi için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L' ye tam dağılımlı latis denir. [25]

a) $\bigwedge_{i\in F}(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in F} J_i}(\bigwedge_{i\in F} a_{i,\varphi(i)})$

b) $\bigvee_{i\in F}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi\in\prod_{i\in F} J_i}(\bigvee_{i\in F} a_{i,\varphi(i)})$ $(\varphi : F \to J(i) := J_i)$

Tanım 1.1.6: Sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı latis fuzzy latis olarak adlandırılır ve $L = (L,\leq,\wedge,\vee,')$ ile gösterilir. [1]

Tanım 1.1.7: L bir latis ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer $a,b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa $\alpha$' ya L' nin bir indirgenemez (irreducible, coprime) elemanı denir.

L' nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanların kümesi

$$M(L) := \{\alpha \in L \mid \alpha,\ \text{L' nin indirgenemez elemanı ve } \alpha \neq 0\}$$

ile gösterilir. [9]

Tanım 1.1.8: L bir latis ve $p \in L$ olsun. Eğer $a,b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa p' ye L' nin bir asal (prime) elemanı denir. L' nin birden farklı asal elemanların kümesi

$$Pr(L) := \{p \in L \mid p,\ \text{L' nin asal elemanı ve } p \neq 1\}$$

ile gösterilir. [9]

Tanımlar karşılaştırıldığında, L bir fuzzy latis olmak üzere $\alpha \in M(L) \Leftrightarrow \alpha' \in Pr(L)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 1.1.9: L bir fuzzy latis olsun. Bu durumda L' deki her a elemanı için L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan en az bir B kümesi vardır öyle ki $\vee B = a$ ' dır.

İspat: ( [9], sayfa 66 )

Bu teorem L' nin her elemanının L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olduğunu ifade eder. Benzer olarak L' nin her elemanı asal elemanlarının infimumuna eşittir.

Tanım 1.1.10: L bir tam latis, $\alpha \in L$ ve $\emptyset \neq B \subset L$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan B kümesi $\alpha$' nın bir minimal kümesi olarak adlandırılır. [8]

a) $\vee B = \alpha$

b) $\forall b \in B$ ve $\vee K \geq \alpha$ olan her $K \subset L$ için $k \geq b$ olacak şekilde en az bir $k \in K$ vardır.

Uyarı 1.1.11:

1. Bir tam latiste $\alpha$' nın minimal kümelerinin birleşimi de $\alpha$' nın bir minimal kümesidir. $\alpha$' nın tüm minimal kümelerinin birleşimi $\beta(\alpha)$ ile gösterilir.

$d \in \beta(\alpha) \Leftrightarrow \vee K \geq \alpha$ olan her $K \subset L$ için $k \geq d$ olacak şekilde en az bir $k \in K$ vardır.

$\beta(\alpha) \cap M(L) := \beta^*(\alpha)$ olarak gösterilir.

2. B, $\alpha$' nın minimal kümesi olsun. Bu taktirde her $b \in B$ için $b \leq \alpha$' dır.

3. B, $\alpha$' nın minimal kümesi, $A \subset B$ ve $\vee A = \alpha$ ise A kümesi de $\alpha$' nın minimal kümesidir. [8]

Teorem 1.1.12: L bir fuzzy latis olsun. Eğer $\alpha \in L - \{0\}$ ise $\beta^*(\alpha)$ $\alpha$' nın bir minimal kümesidir. Ayrıca, eğer $\alpha \in M(L)$ ise $\beta^*(\alpha)$ yönlendirilmiş bir kümedir.

İspat: ( [8], sayfa 68 )

Örnek 1.1.13: L=[0,1] için Pr(L)=[0,1), M(L)=(0,1], $\beta(0) = \{0\}$ ve her $\alpha \in (0,1]$ için $\beta(\alpha) = [0, \alpha)$' dır. [1]

## 1.2. L-Fuzzy Kümeler

Tanım 1.2.1: X klasik bir küme ve $\wp(X)$ X' in güç kümesi olsun.

$A \in \wp(X)$ olmak üzere $\quad \chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$

$$x \longrightarrow \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\chi_A$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Önerme 1.2.2: $\forall m \in M$ için $A_m \subset X$ olmak üzere

a) $\chi_{\bigcup\limits_m A_m} = \bigvee\limits_m \chi_{A_m}$

b) $\chi_{\bigcap\limits_m A_m} = \bigwedge\limits_m \chi_{A_m}$

Özel olarak; a) $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$

b) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$

sağlanır.

Önerme 1.2.3: $A, B \subset X$ olmak üzere

$$A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B .$$

Tanım 1.2.4: $A \subset X$ verilsin. A kümesinin tümleyeni olan $A'$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$\chi_{A'} : X \longrightarrow \{0,1\}$

$$x \longrightarrow \chi_{A'}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A' \\ 0, & x \notin A' \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

Buradan görülür ki $\chi_{A'} = 1 - \chi_A$ ' dır. [4]

Tanım 1.2.5: X boştan farklı bir klasik küme ve L bir fuzzy latis olmak üzere her $f : X \to L$ fonksiyonu X' in bir L-fuzzy alt kümesi olarak adlandırılır.

Özel olarak $L = [0,1]$ alınırsa her $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu X' in bir fuzzy alt kümesi olarak adlandırılır. Yani X'-in her klasik alt kümesi X' in bir fuzzy alt kümesi olur.

X' in bütün L-fuzzy kümelerinin ailesi $L^X$ ile gösterilir.

$L^X := \{ f \mid f : X \to L \text{ bir fonksiyon} \}$

$x \in X$ ve $f \in L^X$ olmak üzere f(x) değerine, x elemanının f fuzzy kümesine ait olma derecesi denir.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi crisp fuzzy alt küme olarak adlandırılır.

$\{ x \in X \mid f(x) > 0 \} \subset X$ alt kümesine f fuzzy kümesinin desteği denir ve supp f ile gösterilir. [4]

Her $x \in X$ için X üzerinde $f(x) = 0$ ve $g(x) = 1$ olarak tanımlanan f ve g L-fuzzy kümeleri sırasıyla $0_x$ ve $1_x$ olarak gösterilir. [1]

Tezin bundan sonraki kısmında, aksi belirtilmedikçe L bir fuzzy latis olarak alınacaktır.

Tanım 1.2.6: f ve g iki L-fuzzy kümesi olsun.

a) $f = g :\Leftrightarrow \ \forall x \in X$ için $f(x) = g(x)$

b) $f \subset g :\Leftrightarrow \ \forall x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$

c) $f' : X \rightarrow L$

$$x \rightarrow f'(x) := (f(x))'$$

şeklinde tanımlanan $f'$ L-fuzzy kümesine f L-fuzzy kümesinin tümleyeni denir. [1]

Eğer L= I=[0,1] ise $f'$=1-f olur.

L-fuzzy kümelerinde birleşim ve kesişim işlemi sırasıyla

$(f \vee g)(x) := \sup\{f(x), g(x)\}$ ve $(f \wedge g)(x) := \inf\{f(x), g(x)\}$ olarak tanımlanmak üzere L-fuzzy kümelerinin birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri ile $L^X$ bir fuzzy latistir.

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) := \bigvee_{i \in J} f_i(x) = \mathrm{Sup}\{f_i(x) \mid i \in J\}$ ve $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) := \bigwedge_{i \in J} f_i(x) = \mathrm{\dot{I}nf}\{f_i(x) \mid i \in J\}$ dir.

Tanım 1.2.7: M(L), L' nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde, $M(L^X) = \{x_\alpha \mid x \in X, \alpha \in M(L)\}$ kümesinin elemanları X' in L-fuzzy noktaları olarak adlandırılır.

Burada $x_\alpha : X \longrightarrow L$

$$y \longrightarrow x_\alpha(y) := \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu durumda x' e $x_\alpha$ fuzzy noktasının desteği , $\alpha$ değerine de $x_\alpha$ fuzzy noktasının değeri (yüksekliği) denir ve supp $x_\alpha = x$ ve $h(x_\alpha) = \alpha$ ile gösterilir.

$x_\alpha \in M(L^X)$ için $x_\alpha \in f :\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha$ ' dır. [8]

Ayrıca Pr(L) L' nin birden farklı asal elemanların kümesi olmak üzere

$Pr(L^X) = \{x_p \mid x \in X, p \in Pr(L)\}$ olur. Bu durumda da $x_p$ ' ye X' in L-fuzzy noktası denir.

Burada $x_p : X \longrightarrow L$

$$y \longrightarrow x_p(y) := \begin{cases} p, & y = x \\ 1, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$x_p \in Pr(L^X)$ için $x_p \in f :\Leftrightarrow f(x) \not\leq p$ ' dır.

Uyarı 1.2.8: Teorem 1.1.9' dan X üzerindeki her L-fuzzy kümesi $M(L^X)$ ' deki L-fuzzy noktalarının birleşimi şeklinde ifade edilir. [8]

Diğer bir deyişle $f = \bigvee_{x_\alpha \in f} x_\alpha$ yazabiliriz.

Önerme 1.2.9 (De Morgan Kuralları): $\{ f_m \in L^X \mid m \in M \}$ ailesi X üzerindeki L-fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun.

a) $(\bigvee_{m \in M} f_m)' = \bigwedge_{m \in M} f'_m$

b) $(\bigwedge_{m \in M} f_m)' = \bigvee_{m \in M} f'_m$

İspat : ( [4] , sayfa 3 )

Tanım 1.2.10: X ve Y iki klasik küme ve $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) $f \in L^X$ L-fuzzy kümesinin $\varphi$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

$\varphi(f) : Y \rightarrow L$

$$y \rightarrow \varphi(f)(y) := \sup\{f(x) \mid x \in X, \varphi(x) = y\} \quad (\forall y \in Y)$$

olarak tanımlanır.

(b) $g \in L^Y$ L-fuzzy kümesinin $\varphi$ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$\varphi^{-1}(g) : X \to L$

$$x \to \varphi^{-1}(g)(x) := (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \quad (\forall x \in X)$$

olarak tanımlanır. [4]

Önerme 1.2.11: $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ , $B \subset Y$ klasik kümeleri verilsin.

a) $\varphi(\chi_A) = \chi_{\varphi(A)}$

b) $\varphi^{-1}(\chi_B) = \chi_{\varphi^{-1}(B)}$

İspat: Kolaylıkla görülür.

Önerme 1.2.12: $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon , $f, f_1, f_2 \in L^X$ ve $g, g_1, g_2 \in L^Y$ olsun.

Bu takdirde

a) $f \subset \varphi^{-1}(\varphi(f))$

Eğer $\varphi$ fonksiyonu 1-1 ise $f = \varphi^{-1}(\varphi(f))$ sağlanır.

b) $\varphi(\varphi^{-1}(g)) \subset g$

Eğer $\varphi$ fonksiyonu örten ise $\varphi(\varphi^{-1}(g)) = g$ sağlanır.

c) $f_1 \subset f_2 \Rightarrow \varphi(f_1) \subset \varphi(f_2)$

d) $g_1 \subset g_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(g_1) \subset \varphi^{-1}(g_2)$

e) $\varphi$ örten ise $\varphi(f') \supseteq (\varphi(f))'$

f) $\varphi$ bire-bir ise $\varphi(f') \subseteq (\varphi(f))'$ ve böylece $\varphi$ bire-bir ve örten ise $\varphi(f') = (\varphi(f))'$ olur.

g) $\varphi^{-1}(g') = (\varphi^{-1}(g))'$

h) $\{ f_m \in L^X \mid m \in M \}$ X üzerindeki L-fuzzy kümelerin bir ailesi ise

$$\varphi(\bigvee_{m \in M} f_m) = \bigvee_{m \in M} \varphi(f_m)$$

$$\varphi(\bigwedge_{m \in M} f_m) \subseteq \bigwedge_{m \in M} \varphi(f_m)$$

i) $\{ g_m \in L^Y \mid m \in M \}$ Y üzerindeki L-fuzzy kümelerin bir ailesi ise

$$\varphi^{-1}(\bigvee_{m \in M} g_m) = \bigvee_{m \in M} \varphi^{-1}(g_m)$$

$$\varphi^{-1}(\bigwedge_{m \in M} g_m) = \bigwedge_{m \in M} \varphi^{-1}(g_m)$$

İspat : ( [5] , sayfa 186-187 )

## 1.3. L-Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 1.3.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir fuzzy latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ fuzzy alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\tau$' ya X üzerinde bir (Chang) L-fuzzy topoloji adı verilir.

1) $0,1 \in \tau$

2) $f, g \in \tau \Rightarrow f \wedge g \in \tau$

3) $\{ f_i \mid i \in J\} \subset \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in J} f_i \in \tau$

$(X, \tau)$ ikilisi de bir (Chang) L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır. $\tau$' nun elemanlarına açık L-fuzzy kümeleri denir. Eğer $f' \in \tau$ ise f' ye kapalı L-fuzzy kümesi denir. Kapalı L-fuzzy kümelerinin ailesi de $\tau'$ ile gösterilir. [5]

L= I=[0,1] olması durumunda $(X, \tau)$ ikilisine bir I-fuzzy topolojik uzay denir.

Tanım 1.3.2: $(X, \tau)$ ve $(Y, \tau^*)$ iki L-fuzzy topolojik uzay olsun.

a) $\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ fuzzy süreklidir $:\Leftrightarrow \forall g \in \tau^*$ için $\varphi^{-1}(g) \in \tau$.

b) $\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ açıktır $:\Leftrightarrow \forall g \in \tau$ için $\varphi(g) \in \tau^*$.

c) $\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ kapalıdır $:\Leftrightarrow \forall g \in \tau'$ için $\varphi(g) \in \tau^{*'}$.

Uyarı 1.3.3: Klasik topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde fuzzy topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların fuzzy sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği fuzzy topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen, Chang' in fuzzy topoloji tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 1.3.4: X boştan farklı klasik bir küme, L bir fuzzy latis ve $\tau \subset L^X$ olsun. Eğer $\tau$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\tau$' ya X üzerinde bir (Lowen) L-fuzzy topoloji denir.

L1) $\forall \alpha : X \to L$ sabit fonksiyonu için $\alpha \in \tau$

L2) $f, g \in \tau \Rightarrow f \wedge g \in \tau$

L3) $\forall m \in M$ için $f_m \in \tau \Rightarrow \bigvee_{m \in M} f_m \in \tau$

$(X,\tau)$ ikilisine de (Lowen) L- fuzzy topolojik uzay denir. [13]

Tanım 1.3.5: $(X,\tau)$ bir L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

a) $\overset{o}{f} := \vee\{ g \mid g \subset f, g \in \tau \}$ fuzzy kümesi f fuzzy kümesinin içi olarak adlandırılır.

b) $\bar{f} := \wedge\{ h \mid h \supset f, h \in \tau' \}$ fuzzy kümesi f fuzzy kümesinin kapanışı olarak adlandırılır. [13]

Klasik topolojik uzaylarda bilinen iç ve kapanış özellikleri L-fuzzy topolojik uzaylarda da geçerlidir.

Tanım 1.3.6: $(X,\tau)$ bir L-fuzzy topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun.

$\tau_Y := \{f|_Y \mid f \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir fuzzy topolojidir.

Bu fuzzy topolojiye $\tau$ ' nun Y alt kümesi üzerinde ürettiği fuzzy alt uzay topolojisi denir.

$(Y,\tau_Y)$ L-fuzzy topolojik uzayına da $(X,\tau)$ L-fuzzy topolojik uzayının alt uzayı adı verilir. [4]

## 1.4. Klasik Topolojik Uzaylar İle Fuzzy Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Tanım 1.4.1: (X,T) bir klasik topolojik uzay, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

$f: (X,T) \to (\mathbb{R}, T_e)$ fonksiyonu $x_0$ ' da alttan yarı-süreklidir : $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için

$\exists U \in \mathcal{U}(x_0) : \forall x \in U$ için $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$

Buradan görülür ki;

$f: (X,T) \to (\mathbb{R}, T_e)$ fonksiyonu $x_0$ noktasında alttan yarı-süreklidir. $\Leftrightarrow$

$f: (X,T) \to (\mathbb{R}, T_{sağ})$ $x_0$ noktasında süreklidir.

$(T_{sağ} = \{(\alpha,\infty) \mid \alpha \in R\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\})$

Eğer f X kümesinin her noktasında alttan yarı-sürekli ise f fonksiyonuna alttan yarı-sürekli fonksiyon denir.

$\mathbb{R}$ yerine $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ aldığımızda alt uzay topolojisi tanımından

$(T_{sağ})_I := T_r = \{ I \cap (\alpha, \infty) \mid (\alpha, \infty) \in T_{sağ} \} = \{ (\alpha, 1] \mid 0 \leq \alpha < 1 \} \cup \{\emptyset, I\}$

I = [0,1] kapalı aralığının sağ topolojisi elde edilir.

Buradan şu ifade elde edilir:

$f : (X,T) \to I$ alttan yarı-süreklidir $\Leftrightarrow$ $f : (X,T) \to (I, T_r)$ süreklidir.

$\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in [0,1)$ için $f^{-1}(\alpha, 1] \in T$. [4]

Önerme 1.4.2: (a) Her sabit fonksiyon alttan yarı-süreklidir.

(b) f ve g alttan yarı-sürekli fonksiyonlar ise $f \wedge g$ alttan yarı-süreklidir.

(c) $\{ f_i \}_{i \in J}$ alttan yarı-sürekli fonksiyonların ailesi ise $\bigvee_{i \in J} f_i$ alttan yarı-süreklidir.

(d) $G \in T \Leftrightarrow \chi_G$ alttan yarı-süreklidir. [4]

Önerme 1.4.3: T, X kümesi üzerinde klasik bir topoloji olsun. Bu takdirde

$$\omega(T) := \{ f \mid f : (X,T) \to I \text{ alttan yarı-süreklidir} \} \subset I^X$$

ailesi X kümesi üzerinde bir fuzzy topolojidir. [16]

Tanım 1.4.4: L bir tam latis ve $U \subset L$ olsun. Eğer U aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa U ' ya L' nin Scott açık alt kümesi denir.

a) $a \in U$ ve $a \leq b$ ise $b \in U$ ' dur.

b) $D \subset L$ yönlendirilmiş bir küme ve $\vee D \in U \Rightarrow \exists d \in D$ öyle ki $d \in U$ ' dur.

L' nin bütün Scott açık alt kümelerinin ailesi L üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topoloji L' nin Scott topolojisi olarak adlandırılır ve $T_S$ ile gösterilir. [23]

Önerme 1.4.5: L bir tam dağılımlı latis olsun. Bu taktirde L üzerindeki Scott topoloji $\{x \in L \mid x \not\leq p\}$ $(p \in Pr(L))$ formundaki kümeler tarafından üretilir.

İspat: ( [24], sayfa 104)

Tanım 1.4.6: (X,T) bir klasik topolojik uzay, L bir fuzzy latis ve $f : (X,T) \to (L, T_S)$ bir fonksiyon olsun. Eğer L' nin her Scott açık alt kümesinin ters görüntüsü (X,T) topolojik uzayında açık ise f fonksiyonu Scott sürekli (veya sürekli) olarak adlandırılır.

Önerme 1.4.5' ten $f:(X,T)\rightarrow(L,T_S)$ Scott süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall p\in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{x\in L \mid x\not\leq p\})\in T$.

$L=I$ olması durumunda Scott süreklilik alttan yarı-süreklilik ile çakışır. Yani

$f:(X,T)\rightarrow I$ Scott süreklidir. $\Leftrightarrow$ $\forall p\in Pr(I)=[0,1)$ için $f^{-1}((p,1])\in T$

$\Leftrightarrow$ f alttan yarı-süreklidir. [9]

Önerme 1.4.7: (X,T) bir klasik topolojik uzay ve L bir fuzzy latis olsun. (X,T)' den $(L,T_S)$' ye Scott sürekli olan tüm fonksiyonların ailesi

$$\omega_L(T):=\{f \mid f:(X,T)\rightarrow(L,T_S) \text{ Scott sürekli }\}$$

X üzerinde bir L-fuzzy topolojidir.

İspat: ( [23], sayfa 88 )

L= I olması durumunda $\omega_L(T)=\omega(T)$ elde edilir. [16]

Tanım 1.4.8: T, X üzerinde bir klasik topoloji olmak üzere $\omega_L(T)$' ye T topolojisi tarafından üretilen L-fuzzy topoloji denir.

$(X,\tau)$ bir L-fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer $\omega_L(T)=\tau$ olacak şekilde X üzerinde klasik bir T topolojisi mevcut ise $(X,\tau)$ L-fuzzy topolojik uzayına topolojik olarak üretilmiştir denir. [1]

Önerme 1.4.9: (X,T) bir klasik topolojik uzay, $f\in L^X$ ve $A\subset X$ olsun.

a) f, $(X,\omega_L(T))$'de açıktır $\Leftrightarrow$ $\forall p\in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{x\in L \mid x\not\leq p\})\in T$ dir.

b) f, $(X,\omega_L(T))$'de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\forall a\in L$ için $f^{-1}(\{x\in L \mid x\geq a\})$ kümesi (X,T)' da kapalıdır.

c) A, (X,T)' de açıktır $\Leftrightarrow$ $\chi_A$, $(X,\omega_L(T))$' de açıktır.

d) A, (X,T)' de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\chi_A$, $(X,\omega_L(T))$' de kapalıdır.

İspat: ( [1], sayfa 53)

Lemma 1.4.10: $(X,T_1)$ ve $(Y,T_2)$ iki klasik topolojik uzay olsun.

$\varphi:(X,T_1)\rightarrow(Y,T_2)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varphi:(X,\omega_L(T_1))\rightarrow(Y,\omega_L(T_2))$ fuzzy süreklidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $f \in \omega_L(T_2)$ olsun.

$\forall p \in Pr(L)$ için $\{t \in L \mid t \not\leq p\} \in T_S \Rightarrow f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\}) \in T_2$ ' dir.

$\varphi$ sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})) \in T_1$ ' dir.

$x \in \varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})) \in T_1$ alalım.

$\Leftrightarrow \varphi(x) \in f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$

$\Leftrightarrow f(\varphi(x)) \in \{t \in L \mid t \not\leq p\}$

$\Leftrightarrow f(\varphi(x)) \not\leq p$

$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(f)(x) \not\leq p$

$\Leftrightarrow x \in (\varphi^{-1}(f))^{-1}\{t \in L \mid t \not\leq p\}$

Buradan $(\varphi^{-1}(f))^{-1}\{t \in L \mid t \not\leq p\} = \varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})) \in T_1$ ' dir.

Dolayısıyla da $\varphi^{-1}(f) \in \omega_L(T_1)$ ' dir.

$(\Leftarrow)$ $A \in T_2$ alalım.Önerme 1.4.9(c)' den $\chi_A \in \omega_L(T_2)$' dir.

$\varphi : (X, \omega_L(T_1)) \rightarrow (Y, \omega_L(T_2))$ fuzzy sürekli olduğundan

$\varphi^{-1}(\chi_A) = \chi_{\varphi^{-1}(A)} \in \omega_L(T_1) \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in T_1$ ' dir.

Sonuç 1.4.11: KT klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi, L-FT de L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonların kategorisi olsun.

$$\begin{aligned} \omega_L : KT &\rightarrow L\text{-}FT \\ T &\rightarrow \omega_L(T) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm KT ile L-FT kategorileri arasında bir funktordur. [1]

Tanım 1.4.12: (X,T) bir klasik topolojik uzay olsun. Eğer "(X,T) klasik topolojik uzayı P özelliğine sahiptir. $\Leftrightarrow$ $(X, \omega_L(T))$ üretilmiş L-fuzzy topolojik uzayı $P_f$ özelliğine sahiptir."özelliği sağlanıyorsa L-fuzzy topolojik uzaylardaki bir $P_f$ özelliği klasik topolojik uzaylardaki bir P özelliğinin iyi genelleştirilmişidir denir. [1]

# BÖLÜM 2. SMOOTH FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

## 2.1. Smooth Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.1: X boştan farklı klasik bir küme olsun. Eğer bir $\tau : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bu $\tau$ dönüşümüne X üzerinde bir smooth I-fuzzy topoloji denir.

(S1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$

(S2) $\forall$ f, g $\in I^X$ için $\tau(f \wedge g) \geq \tau(f) \wedge \tau(g)$

(S3) $\forall (f_i)_{i\in J} \subset I^X$ için $\tau(\bigvee_{i\in J} f_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \tau(f_i)$

$(X, \tau)$ ikilisine de smooth topolojik uzay ( kısaca stu ) veya smooth I - fuzzy topolojik uzay denir.

$\tau$' ya açıklık derecelendirilmesi, $\tau(f)$' ye f fuzzy kümesinin açıklık derecesi denir. [20]

Örnek 2.1.2: X bir küme olsun.

$$\tau :\ I^X \to I, \quad \tau(f) := \begin{cases} 1, & f = 0_X, 1_X \\ 0, & f \in I^X - \{0_X, 1_X\} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\tau$ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir.

Örnek 2.1.3: X bir küme ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun.

$$\tau : I^X \to I, \quad \tau(f) := \begin{cases} 1, & f = 0_X, 1_X \\ \alpha, & f \in I^X - \{0_X, 1_X\} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\tau$ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir.

Not: L bir fuzzy latis olmak üzere $\tau : L^X \to L$ dönüşümü Tanım 2.1.1' deki (S1), (S2), (S3) özelliklerini sağlarsa bu $\tau$ dönüşümüne X üzerinde bir smooth L – fuzzy topoloji denir.

$(X, \tau)$ ikilisine de smooth L- fuzzy topolojik uzay ( kısaca smooth L- ftu ) denir.

Her $f \in L^X$ için $\tau(f)$, f fuzzy alt kümesinin açıklık derecesi olarak adlandırılır.

L fuzzy topoloji $L^X$' in klasik bir alt kümesi iken smooth L- fuzzy topoloji $L^X$' in fuzzy alt kümesidir.

Örnek 2.1.4: ( X, T ) klasik topolojik uzay olsun. $\tau := \chi_T : 2^X \to 2 = \{0, 1\}$ olarak tanımladığımızda (X, T) yi smooth fuzzy topolojik uzay olarak göz önüne alabiliriz.

Örnek 2.1.5 : $(X, \tau)$ L- ftu olsun. $\tau := \chi_\tau : L^X \to 2$ olarak tanımladığımızda $(X, \tau)$' yu smooth L- ftu olarak göz önüne alabiliriz.

Tanım 2.1.6: Bir $\mathcal{F} : L^X \to L$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{F}$' ye X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi denir.

(C1) $\mathcal{F}(0_x) = \mathcal{F}(1_x) = 1$

(C2) $\forall$ $f, g \in L^X$ için $\mathcal{F}(f \vee g) \geq \mathcal{F}(f) \wedge \mathcal{F}(g)$

(C3) $\forall$ $(f_i)_{i \in J} \subset L^X$ için $\mathcal{F}(\bigwedge_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \mathcal{F}(f_i)$. [20]

Önerme 2.1.7: $\tau$, X üzerinde bir smooth topoloji ise $\mathcal{F}_\tau : L^X \to L$, $\mathcal{F}_\tau(f) := \tau(f')$ ile tanımlanan $\mathcal{F}_\tau$ dönüşümü X üzerinde kapalılığın derecelendirilmesidir. [20]

Önerme 2.1.8: $\mathcal{F}$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi ve $\tau_{\mathcal{F}} : L^X \to L$, $\tau_{\mathcal{F}}(f) := \mathcal{F}(f')$ ise $\tau_{\mathcal{F}}$ X üzerinde bir smooth topolojidir. [20]

Sonuç 2.1.9: $\tau$ ve $\mathcal{F}$, X üzerinde sırasıyla smooth topoloji ve kapalılığın derecelendirilmesi ise $\tau_{\mathcal{F}_\tau} = \tau$ ve $\mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ dir.

İspat: Önerme 2.1.7 ve 2.1.8' den kolaylıkla görülür.

Tanım 2.1.10: $\tau_1$ ve $\tau_2$ , X üzerinde iki smooth topoloji olsun. $\forall f \in L^X$ için $\tau_1(f) \geq \tau_2(f)$ ise $\tau_1$, $\tau_2$ den güçlü veya $\tau_2$, $\tau_1$ den zayıf denir. $\tau_1 \geq \tau_2$ ile gösterilir. [20]

Önerme 2.1.11: $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ ailesi X' de smooth topolojilerin ailesi ise,

$\tau := \wedge\{\tau_k : k \in \Delta\}$ , $\tau(f) := \wedge\{\tau_k(f) : k \in \Delta\}$

ile tanımlanan $\tau$ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir.

İspat: ( [18], sayfa 372 )

Önerme 2.1.12: ( X, $\tau$ ) bir smooth L-ftu ve $A \subset X$ olsun.

$\tau_A : L^A \to L$ , $\tau_A(f) := \vee \{\tau(g) : g \in L^X \text{ ve } g|_A = f\}$ ise $\tau_A$, A üzerinde bir smooth L- fuzzy topolojidir. [21]

Tanım 2.1.13: ( X, $\tau$ ) bir smooth L-ftu ve $A \subset X$ olsun. (A, $\tau_A$) smooth L-fuzzy topolojik uzayına ( X, $\tau$ )' nın bir alt uzayı ve $\tau_A$ ' ya da $\tau$ ' nun A üzerinde ürettiği bir smooth topoloji denir. [21]

Teorem 2.1.14: (A, $\tau_A$), ( X, $\tau$ ) smooth L-fuzzy topolojik uzayının bir alt uzayı ve $f \in L^X$ ise,

a) $\mathcal{F}_{\tau_A}(f) = \vee\{\mathcal{F}_\tau(g) : g \in L^X \text{ ve } g|_A = f\}$

b) $B \subset A \subset X$ ise $\tau_B = (\tau_A)_B$

özellikleri geçerlidir.

İspat: ( [18], sayfa 373 )

Tanım 2.1.15: ( X, $\tau$ ) smooth L-ftu ve $f \in L^X$ olsun.

a) $\bar{f} = \wedge\{g \in L^X : f \leq g \text{ ve } \tau(g') > 0\}$ ile tanımlanan $\bar{f}$ kümesine f' nin $\tau$-smooth kapanışı denir.

b) $\overset{\circ}{f} = \vee\{g \in L^X : g \leq f \text{ ve } \tau(g) > 0\}$ ile tanımlanan $\overset{\circ}{f}$ kümesine f' nin $\tau$-smooth içi denir.

c) f' ye smooth yarı-açık denir: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $\exists$ $g \in L^X : \tau(g) \not\leq p$ ve $g \leq f \leq \bar{g}$. [7]

Önerme 2.1.16: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve f, g $\in L^X$ olsun.

a) $f \leq g \Rightarrow \overset{o}{f} \leq \overset{o}{g}$ ve $\bar{f} \leq \bar{g}$ dir.

b) $(\bar{f})' = (f')^o$ , $(\overset{o}{f})' = (f')^-$ dir.

c) $\tau(f) > 0 \Rightarrow f = \overset{o}{f}$ dir.

d) $\mathcal{F}(f) > 0 \Rightarrow f = \bar{f}$ dir.

İspat: ([7], sayfa 84-85 )

Tanım 2.1.17: $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

a) $\varphi$ ' ye smooth süreklidir denir :$\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $\tau_1(\varphi^{-1}(f)) \geq \tau_2(f)$. [20]

b) $\varphi$ ' ye smooth zayıf süreklidir denir:$\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $\tau_2(f)>0$ ise $\tau_1(\varphi^{-1}(f))>0$.[18]

d) $\varphi$ ' ye smooth yarı-süreklidir denir :$\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ ve $\forall p \in Pr(L)$ için $\tau_2(f) \nleq p$ ise $\varphi^{-1}(f)$ smooth yarı-açıktır. [17]

d) $\varphi$ ' ye smooth kararsız (irresolute) denir :$\Leftrightarrow$ $\forall g \in L^Y$ yarı-açık kümesi için $\varphi^{-1}(g)$ X' in smooth yarı-açık kümesidir. [17]

Tanımlar karşılaştırıldığında smooth sürekli her fonksiyonun zayıf smooth sürekli olduğu görülür.

Önerme 2.1.18: $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

a) $\varphi$ smooth süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $\mathcal{F}_{\tau_1}(\varphi^{-1}(f)) \geq \mathcal{F}_{\tau_2}(f)$.

b) $\varphi$ zayıf smooth süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $\mathcal{F}_{\tau_2}(f) > 0$ ise $\mathcal{F}_{\tau_1}(\varphi^{-1}(f)) > 0$. [18]

Teorem 2.1.19: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$, $(Z, \tau_3)$ smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ smooth sürekli dönüşümler ise $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ dönüşümü smooth süreklidir. [20]

Teorem 2.1.20: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ iki smooth L-ftu, $\varphi : X \rightarrow Y$ smooth sürekli ve $A \subset X$ ise $\varphi|_A : (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau_2)$ smooth süreklidir.

İspat: ( [18], sayfa 375 )

Önerme 2.1.21: $(X,\tau_1)$, $(Y,\tau_2)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ smooth sürekli ise $\forall g \in L^Y$ için $\overline{\varphi^{-1}(g)} \leq \varphi^{-1}(\overline{g})$ ' dir.

İspat: ( [7], sayfa 86 )

Tanım 2.1.22: $(X,\tau_1)$, $(Y,\tau_2)$ iki smooth L-ftu, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sırasıyla X ve Y üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

a) $\varphi$ ' ye smooth açıktır denir : $\Leftrightarrow \forall f \in L^X$ için $\tau_2(\varphi(f)) \geq \tau_1(f)$.

b) $\varphi$ ' ye smooth kapalıdır denir : $\Leftrightarrow \forall f \in L^X$ için $\mathcal{F}_2(\varphi(f)) \geq \mathcal{F}_1(f)$. [20]

Tanım 2.1.24: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\varphi$ 'ye smooth homeomorfizm denir : $\Leftrightarrow \varphi$ bire-bir, örten, $\varphi$ ve $\varphi^{-1}$ smooth süreklidir. [18]

Tanım 2.1.25: Smooth homeomorfizmi altında korunan özelliğe smooth topolojik özellik denir. [18]

Teorem 2.1.26: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : X \to Y$ bire-bir, örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\varphi$ smooth homeomorfizmdir.

b) $\varphi$ smooth açık ve smooth süreklidir.

c) $\varphi$ smooth kapalı ve smooth süreklidir. [18]

## 2.2. Üretilmiş Fuzzy Topolojik Uzaylar

Teorem 2.2.1: $(X,\tau)$ smooth I-fuzzy topolojik uzay olsun.

a) $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\tau_\alpha := \{ f \in I^X : \tau(f) \geq \alpha \}$ ailesi X üzerinde bir Chang fuzzy topolojidir.

b) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için $\tau_{\alpha_2} \subset \tau_{\alpha_1}$ dir.

c) $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\tau_\alpha = \cap \{ \tau_s : s < \alpha \}$ dir.

İspat : (a) ve (b) nin ispatı kolaylıkla yapılır.

c) $\forall s < \alpha$ için $\tau_\alpha \subset \tau_s$ dir.

$\Rightarrow \tau_\alpha \subset \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$.......(1)

$f \notin \tau_\alpha$ alalım.

$\Rightarrow \tau(f) \not\geq \alpha \Rightarrow \exists s \in (0,1] : \tau(f) < s < \alpha$

$\Rightarrow \exists s \in (0,1] : f \notin \tau_s \Rightarrow f \notin \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$

$\Rightarrow \cap\{\tau_s : s < \alpha\} \subset \tau_\alpha$.......(2)

(1) ve (2) den $\tau_\alpha = \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$ ele edilir.

Tanım 2.2.2: $(X,\tau)$ smooth I-ftu ve $\alpha \in (0,1]$ ise $\tau_\alpha := \{f \in I^X : \tau(f) \geq \alpha\}$ ile tanımlanan Chang fuzzy topolojisine $\tau$' nun $\alpha$ - seviyesi ($\alpha$ - düzeyi, kesimi) denir. [6]

Teorem 2.2.3: $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde Chang fuzzy topolojilerin azalan bir ailesi ise

a) $\tau : I^X \to I$ , $\tau(f) = \vee\{\alpha \in (0,1] : f \in T_\alpha\}$ ile tanımlanan $\tau$ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir.

b) $\forall \alpha \in (0,1]$ için $T_\alpha = \cap\{T_s : s < \alpha\}$ise , $\tau_\alpha = T_\alpha$ dır.

İspat : (a) (S1) $\forall \alpha \in (0,1]$ için $0_X$, $1_X \in T_\alpha$ olduğundan $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$olur.

(S2) $f, g \in I^X$ alalım.

$\tau(f) = \vee\{\alpha \in (0,1] : f \in T_\alpha\} = a \geq s$ ve $\tau(g) = \vee\{\alpha \in (0,1] : g \in T_\alpha\} = b \geq s$ olsun.

Bu taktirde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \gamma, \beta \in (0,1] : a-\varepsilon < \gamma \leq a$ ve $b-\varepsilon < \beta \leq b$ sağlanır.

$r := \min\{\gamma, \beta\}$ , $d := \min\{a, b\}$ olarak alalım.

$\gamma \geq r \Rightarrow \tau_\gamma \subset \tau_r$ , $\beta \geq r \Rightarrow \tau_\beta \subset \tau_r$

$g \in \tau_\beta \subset \tau_r$ ve $f \in \tau_\gamma \subset \tau_r$ ise $f \wedge g \in \tau_r$

$\tau(f \wedge g) = \vee\{\alpha \in (0,1] : f \wedge g \in T_\alpha\} \geq r > d-\varepsilon > s-\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ için sağlandığından $\tau(f \wedge g) \geq s$ olur.

$\tau(f) \geq s$ ve $\tau(g) \geq s$ aldığımızda $\tau(f \wedge g) \geq s$ elde ettik.

$\{\alpha: f\wedge g \in T_\alpha\} \supset \{\alpha: f\in T_\alpha$ ve $g\in T_\alpha\}$ olduğundan $\tau(f\wedge g) \geq \tau(f)\wedge\tau(g)$ sağlanır.

(S3) $(f_i)_{i\in J} \subseteq I^x$ alalım.

$\{\alpha: \vee f_i \in T_\alpha\} \supset \{\alpha: f_i \in T_\alpha, \forall i\in J\}$ olduğundan $\tau(\bigvee_{i\in J} f_i) \geq \tau(f_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \tau(f_i)$ sağlanır.

b) $f \in T_\alpha \Rightarrow \tau(f) = \vee\{r\in (0,1] : f\in T_r\} \geq \alpha \Rightarrow f \in \tau_\alpha$

$\Rightarrow T_\alpha \subset \tau_\alpha$..........(1)

$f \in \tau_\alpha \Rightarrow \tau(f) \geq \alpha$. $\tau(f) = \vee\{\alpha \in (0,1] : f\in T_\alpha\} = s$ olsun.

Bu taktirde, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists k \in (0,1] : s-\varepsilon < k$ ve $f \in T_k$ sağlanır.

$s \geq \alpha$ olduğundan $\alpha-\varepsilon \leq s-\varepsilon < k$ ve $f\in T_k$ dır. Buradan $f\in T_{\alpha-\varepsilon}$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $f \in T_\alpha$ dır.

$\Rightarrow \tau_\alpha \subset T_\alpha$ ..............(2)

(1) ve (2) den $\tau_\alpha = T_\alpha$ elde edilir.

Tanım 2.2.4: Bir önceki teoremde verilen $\tau$ smooth topolojisine $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ Chang fuzzy topoloji ailesi tarafından üretilen smooth topoloji denir. [6]

Teorem 2.2.5: $(X,\tau)$ smooth I-fuzzy topolojik uzay ve $\forall\ \alpha \in (0,1]$ için $\tau_\alpha$, $\tau$' nun $\alpha$-seviyesi olsun. $\tau_1$, $\{\tau_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ fuzzy topoloji ailesi tarafından üretilen smooth topoloji , yani

$\tau_1 : I^x \rightarrow I$ , $\tau_1(f) = \vee\{\alpha : f \in \tau_\alpha\}$ ise $\tau_1 = \tau$ olur.

İspat : $\forall\ f \in I^X$ için $\tau_1(f) = \vee\{\alpha : f \in \tau_\alpha\} = \vee\{\alpha : \tau(f) \geq \alpha\} = \tau(f)$ olduğundan $\tau_1 = \tau$ elde edilir.

Sonuç 2.2.6: $\tau$ ve $\tau'$ X üzerinde iki smooth topoloji olsun.

$\tau = \tau' \Leftrightarrow \forall\ \alpha \in (0,1]$ için $\tau_\alpha = \tau'_\alpha$

İspat : $(\Rightarrow)$ Teorem 2.2.5' den kolaylıkla görülür.

$(\Leftarrow) \forall\ f \in I^X$ için

$\tau(f)=\vee\{\alpha\in(0,1]: f\in\tau_\alpha\}=\vee\{\alpha\in(0,1]: f\in\tau'_\alpha\}=\vee\{\alpha\in(0,1]: \tau'(f)\geq\alpha\}=\tau'(f)$

olduğundan $\tau=\tau'$ elde edilir.

Teorem 2.2.7: $(X,\tau)$ Chang fuzzy topolojik uzay olsun. $\forall\ \alpha\in(0,1]$ için

$\tau^\alpha(0_x):=\tau^\alpha(1_x):=1,\ \tau^\alpha(f)=\begin{cases}\alpha, f\in\tau-\{0_x,1_x\}\\ 0, f\notin\tau-\{0_x,1_x\}\end{cases}$ şekilde tanımlanan $\tau^\alpha: I^x\to I$

dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir ve $(\tau^\alpha)_\alpha=\tau$ sağlanır.

İspat: Kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.8: $\{T_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$ve $\{T'_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$ sırasıyla X ve Y üzerinde fuzzy topolojilerin azalan bir ailesi, $\tau$ ve $\tau'$ sırasıyla bu aileler tarafından üretilen smooth topoloji ve $\varphi: X\to Y$ bir dönüşüm olsun.

a) $\forall\ \alpha\in(0,1]$ için $\varphi:(X,T_\alpha)\to(Y,T'_\alpha)$ fuzzy sürekli ise $\varphi:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ smooth süreklidir.

b) $\forall\ \alpha\in(0,1]$ için $\varphi:(X,T_\alpha)\to(Y,T'_\alpha)$ fuzzy açık ise $\varphi:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ smooth açıktır.

c) $\forall\ \alpha\in(0,1]$ için $\varphi:(X,T_\alpha)\to(Y,T'_\alpha)$ fuzzy kapalı ise $\varphi:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ smooth kapalıdır.

İspat: a) $f\in I^Y$ alalım.

$\varphi$ fuzzy sürekli olduğundan $\{\alpha:\varphi^{-1}(f)\in\tau_\alpha\}\supset\{\alpha: f\in\tau'_\alpha\}$

$\Rightarrow\ \vee\{\alpha:\varphi^{-1}(f)\in\tau_\alpha\}\supset\vee\{\alpha: f\in\tau'_\alpha\}\Rightarrow\ \tau(\varphi^{-1}(f))\geq\tau'(f)$

$\Rightarrow\ \varphi$ smooth süreklidir.

(b) ve (c) de (a)' ya benzer şekilde kolaylıkla yapılır.

Teorem 2.2.9: $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki stu ve $\varphi: X\to Y$ bir dönüşüm olsun.

$\varphi$ smooth süreklidir $\Leftrightarrow\ \forall\ \alpha\in(0,1]$ için $\varphi:(X,\tau_\alpha)\to(Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy süreklidir.

İspat: $(\Rightarrow)\ \alpha\in(0,1]$ ve $f\in\tau'_\alpha$ alalım.

Buradan $\tau'(f)\geq\alpha$ olur.

$\varphi$ smooth sürekli olduğundan $\tau(\varphi^{-1}(f))\geq\tau'(f)\geq\alpha$ dır.

$\Rightarrow \varphi^{-1}(f) \in \tau_\alpha \Rightarrow \varphi$ fuzzy süreklidir.

$(\Leftarrow)$ $f \in I^Y$ alalım.

Eğer $\tau'(f) = 0$ ise $\tau(\varphi^{-1}(f)) \geq \tau'(f)$ olur.

$\tau'(f) = \alpha \in (0,1]$ ise $f \in \tau'_\alpha$ dir. $\varphi$ fuzzy sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(f) \in \tau_\alpha$.

$\Rightarrow \tau(\varphi^{-1}(f)) \geq \alpha = \tau'(f) \Rightarrow \varphi$ smooth süreklidir.

Teorem 2.2.10: $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki stu ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

a) $\varphi$ smooth açıktır $\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in (0,1]$ için $\varphi : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy açıktır.

b) $\varphi$ smooth kapalıdır $\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in (0,1]$ için $\varphi : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy kapalıdır.

İspat: Teorem 2.2.9' un ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.11: $(X,\tau_1)$, $(Y,\tau_2)$ iki fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

$\varphi$ fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in (0,1]$ için $\varphi : (X,\tau_1^\alpha) \to (Y,\tau_2^\alpha)$ smooth süreklidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\varphi : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ dönüşümü fuzzy sürekli olsun.

$\alpha \in (0,1]$ ve $f \in I^Y$ alalım.

(i) $f = 0_Y$ veya $f = 1_Y$ ise $\varphi^{-1}(f) = 0_X$ veya $\varphi^{-1}(f) = 1_X$

$\Rightarrow \tau_1^\alpha(\varphi^{-1}(f)) = 1 \geq \tau_2^\alpha(f)$

(ii) $f \in \tau_2 - \{1_Y, 0_Y\}$ alalım.

$\Rightarrow \tau_2^\alpha(f) = \alpha$

$f \in \tau_2$ ve $\varphi$ fuzzy sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(f) \in \tau_1$ olur.

$\Rightarrow \tau_1^\alpha(\varphi^{-1}(f)) \geq \alpha = \tau_2^\alpha(f)$ elde edilir.

(iii) $f \notin \tau_2$ ise $\tau_2^\alpha(f) = 0 \leq \tau_1^\alpha(\varphi^{-1}(f))$ olur.

Sonuç olarak, $\forall\, \alpha \in (0,1]$ için $\varphi : (X,\tau_1^\alpha) \to (Y,\tau_2^\alpha)$ smooth süreklidir.

$(\Leftarrow)$ Teorem 2.2.9' dan $\varphi : (X,(\tau_1^\alpha)_\alpha) \to (Y,(\tau_2^\alpha)_\alpha)$ fuzzy sürekli ve Teorem 2.2.7 den $\varphi : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ dönüşümü fuzzy süreklidir.

## 2.3. Klasik Topolojik Uzaylar ile Smooth Fuzzy Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

A. Alttan Yarı Sürekliliğin Derecelendirilmesi (Üretilmiş Smooth I-Fuzzy Topolojik Uzay)

Tanım 2.3.1: $(X,T)$ klasik topolojik uzay ve $\alpha \in I$ olsun.

$f : (X,T) \to I$ fonksiyonu $\alpha$- alttan yarı-süreklidir $:\Leftrightarrow \forall \beta < \alpha$ için $(\beta \in [0,1))$ $f^{-1}(\beta,1] \in T$' dir. [2]

- Bu tanımdan açıktır ki her alttan yarı-sürekli fonksiyon $\forall\ \alpha \in I$ için $\alpha$- alttan yarı-süreklidir.
- f alttan yarı-sürekli ise f 1- alttan yarı-süreklidir.
- Her $f : (X,T) \to I$ fonksiyonu 0- alttan yarı-süreklidir.

Lemma 2.3.2: $(X,T)$ klasik topolojik uzay olsun.

a) $f,\ g : (X,T) \to I$ sırasıyla $\alpha_1$-alttan yarı-sürekli ve $\alpha_2$-alttan yarı sürekli fonksiyonlar ise $f \wedge g : (X,T) \to I$ fonksiyonu $\alpha_1 \wedge \alpha_2$- alttan yarı süreklidir.

b) $\forall i \in J$ için $f_i : (X,T) \to I$ $\alpha_i$- alttan yarı sürekli fonksiyonlar ise $\bigvee_{i \in J} f_i : (X,T) \to I$ fonksiyonu $\wedge\, \alpha_i$- alttan yarı süreklidir.

İspat: a) f ve g sırasıyla $\alpha_1$-alttan yarı-sürekli ve $\alpha_2$ -alttan yarı sürekli olsun. $\beta \in [0,1)$ ve $\beta < \alpha_1 \wedge \alpha_2$ olsun. $\Rightarrow \beta < \alpha_1$ ve $\beta < \alpha_2$ olur.

f $\alpha_1$-alttan yarı-sürekli olduğundan $f^{-1}(\beta,1] \in T$ ve g $\alpha_2$ -alttan yarı sürekli olduğundan $g^{-1}(\beta,1] \in T$' dir.

$f^{-1}(\beta,1] \cap g^{-1}(\beta,1] = (f \wedge g)^{-1}(\beta,1] \in T$ olur. $\Rightarrow f \wedge g,\ \alpha_1 \wedge \alpha_2$- alttan yarı-sürekli olur.

b) $\forall i \in J$ için $f_i : (X,T) \to I$ $\alpha_i$- alttan yarı sürekli fonksiyon olsun.

$\beta \in [0,1)$ ve $\forall\ i \in J$ için $\beta < \wedge\, \alpha_i$ olsun. $\Rightarrow \forall\ i \in J$ için $\wedge\, \alpha_i < \alpha_i$ olduğundan $\beta < \alpha_i$ olur.

$\forall\ i \in J$ için $f_i$ $\alpha_i$- alttan yarı sürekli olduğundan $f_i^{-1}(\beta,1] \in T$' dir.

$\Rightarrow \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\beta,1] \in T$. ve $\bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\beta,1] = (\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\beta,1] \in T$ olduğundan $\bigvee_{i\in J} f_i$, $\wedge\alpha_i$- alttan yarı sürekli olur.

Teorem 2.3.3: $(X,T)$ klasik topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan $\omega_T : I^X \to I$ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir

$\omega_T(f) := \vee\{\alpha \in I : f\ \alpha\text{- alttan yarı-sürekli}\}$

İspat: (S1) Her sabit fonksiyon alttan yarı-sürekli ve alttan yarı-sürekli her fonksiyon 1- alttan yarı-sürekli olduğundan $\omega_T(0_X) = \omega_T(1_X) = 1$ olur.

(S2) $f, g \in I^X$ alalım.

$\omega_T(f) = \vee\{\alpha \in I : f\ \alpha\text{- alttan yarı-sürekli}\}$

$\omega_T(g) = \vee\{\beta \in I : g\ \beta\text{- alttan yarı-sürekli}\}$

$\omega_T(f\wedge g) = \vee\{\gamma \in I : f\wedge g\ \ \gamma\text{- alttan yarı-sürekli}\}$

$\omega_T(f)\wedge\omega_T(g) = \vee\{\alpha\wedge\beta : f\ \alpha\text{- alttan yarı-sürekli, } g\ \beta\text{- alttan yarı-sürekli}\}$

iddia: $A:=\{\alpha\wedge\beta : f\ \alpha\text{- alttan yarı-sürekli, } g\ \beta\text{- alttan yarı-sürekli}\} \subset \{\gamma : f\wedge g,$ $\gamma$ alttan yarı-sürekli$\} := B$ sağlanır.

$\alpha\wedge\beta \in A \Rightarrow f\ \alpha$- alttan yarı-sürekli ve $g\ \beta$- alttan yarı-süreklidir.

Lemma 2.3.2 a) dan $f\wedge g$, $\alpha\wedge\beta$- alttan yarı-süreklidir.

$\gamma := \alpha\wedge\beta$ olarak alırsak $f\wedge g$, $\gamma$- alttan yarı-sürekli olur.

$\Rightarrow \gamma = \alpha\wedge\beta \in B$ olur.

$\Rightarrow A \subset B \Rightarrow \vee A \leq \vee B \Rightarrow \omega_T(f\wedge g) \geq \omega_T(f)\wedge\omega_T(g)$ elde edilir.

(S3) $(f_i)_{i\in J} \subset I^X$ alalım.

$\forall i \in J$ için $\omega_T(f_i) = \vee\{\alpha_i \in I:\ f_i\ ,\alpha_i\text{- alttan yarı sürekli}\}$.

$\forall i \in J$ için $\omega_T(\bigvee_{i\in J} f_i) = \vee\{\gamma \in I: \bigvee_{i\in J} f_i\ ,\ \gamma\text{- alttan yarı sürekli}\}$.

$\forall i \in J$ için $\bigwedge_{i\in J}\omega_T(f_i) = \bigwedge_{i\in J}\{\vee\{\alpha_i \in I:\ f_i\ ,\alpha_i\text{- alttan yarı sürekli}\}\}$

$$= \bigvee_{\alpha_i\in I}\{\bigwedge_{i\in J}\alpha_i\ :\ f_i\ ,\alpha_i\text{- alttan yarı sürekli}\}.$$

iddia: $A:=\{\wedge\alpha_i : f_i,\ \alpha_i\text{- alttan yarı sürekli}\} \subset \{\gamma \in I: \vee f_i, \gamma\text{- alttan yarı sürekli}\} := B$ sağlanır.

$\wedge\alpha_i \in A \Rightarrow \forall i \in J$ için $f_i\ ,\alpha_i$- alttan yarı süreklidir.

Lemma 2.3.2 b) den $\vee f_i$, $\wedge \alpha_i$ - alttan yarı sürekli olur.

$\gamma := \wedge \alpha_i$ olarak alırsak $\vee f_i$ , $\gamma$ - alttan yarı sürekli olur.

$\Rightarrow \gamma = \wedge \alpha_i \in B$ olur. $\Rightarrow A \subset B \Rightarrow \vee A \le \vee B \Rightarrow \omega_T(\bigvee_{i \in J} f_i) \ge \bigwedge_{i \in J} \omega_T(f_i)$ elde edilir.

Bir önceki teoremde her T klasik topolojiden bir smooth fuzzy topoloji ($\omega_T$) üretildiği gösterildi.

Tanım 2.3.4: $\omega_T$ smooth topolojisi T klasik topolojisi tarafından üretilmiş smooth I-fuzzy topoloji olarak adlandırılır. $(X, \omega_T)$ ikilisine de (X,T) klasik topolojik uzayı tarafından üretilmiş smooth I-ftu denir.

Lemma 2.3.5: (X,T) klasik topolojik uzay olsun. $A \in T \Leftrightarrow \omega_T(\chi_A) \neq 0$.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in T$ olsun.

$\Rightarrow \chi_A$ süreklidir. $\Rightarrow \chi_A$ 1-alttan yarı süreklidir. $\Rightarrow \omega_T(\chi_A) = 1 \neq 0$ dır.

$(\Leftarrow) \omega_T(\chi_A) \neq 0$ olsun.

$\Rightarrow \vee \{\alpha \in I : \chi_A\ \alpha$ -alttan yarı-sürekli$\} \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha \in I : \chi_A\ \alpha$ -alttan yarısürekli

$\Rightarrow \forall \beta < \alpha$ için $\chi_A^{-1}(\beta, 1] \in T$' dır.

$\chi_A^{-1}(\beta, 1] = \{x : \chi_A(x) > \beta\} = A \Rightarrow A \in T$ olur.

Lemma 2.3.6: (X,T) , $(Y, T^*)$ klasik topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\varphi : (X, T) \to (Y, T^*)$ süreklidir $\Leftrightarrow \varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth süreklidir.

İspat :$(\Rightarrow)$ $\varphi : (X, T) \to (Y, T^*)$ sürekli olsun.

$f \in I^Y$ için $\omega_T$ ve $\omega_{T^*}$ ' ın tanımından

$\omega_T(\varphi^{-1}(f)) = \vee \{\alpha \in I : \varphi^{-1}(f), \alpha$ -alttan yarı-sürekli$\}$ ve

$\omega_{T^*}(f) = \vee \{\alpha \in I : f\ \alpha$ - alttan yarı-sürekli$\}$ olur.

iddia: $A := \{\alpha \in I : f\ \alpha$ - alttan yarı-sürekli$\} \subset \{\alpha \in I : \varphi^{-1}(f), \alpha$ -alttan yarı-sürekli$\} := B$ sağlanır.

$\alpha \in A \Rightarrow f : (Y, T^*) \to I\ \ \alpha$ - alttan yarı-süreklidir.

Dolayısıyla, $\beta < \alpha$ olan $\forall \beta \in [0,1)$ için $f^{-1}(\beta, 1] \in T^*$ dır.

$\varphi$ sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(f^{-1}(\beta,1]) \in T$ olur.

$$(\varphi^{-1}(f))^{-1}(\beta,1] = \{x \in X : \varphi^{-1}(f)(x) \in (\beta,1]\}$$
$$= \{x \in X : f(\varphi(x)) \in (\beta,1]\}$$
$$= \{x \in X : \varphi(x) \in f^{-1}(\beta,1]\}$$
$$= \{x \in X : x \in \varphi^{-1}(f^{-1}(\beta,1])\}$$
$$= \varphi^{-1}(f^{-1}(\beta,1]) \in T$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(f)$ $\alpha$- alttan yarı-süreklidir. $\Rightarrow \alpha \in B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow \vee A \leq \vee B$

$\vee A = \vee\{\alpha \in$ I: f $\alpha$- alttan yarı-sürekli$\} \leq \vee\{\alpha \in$ I: $\varphi^{-1}(f), \alpha$-alttan yarı-sürekli$\}$

olduğundan $\omega_T(\varphi^{-1}(f)) \geq \omega_{T^*}(f)$ olur.

$(\Leftarrow) \varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth sürekli olsun.

$A \in T^* \Rightarrow$ Lemma 2.3.5' den $\omega_{T^*}(\chi_A) = 1$ olur.

$\varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth sürekli olduğundan $\omega_T(\varphi^{-1}(\chi_A)) \geq \omega_{T^*}(\chi_A) = 1$

$\Rightarrow \omega_T(\varphi^{-1}(\chi_A)) = 1 \Rightarrow \omega_T(\chi_{\varphi^{-1}(A)}) = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in T$ olur.

Sonuç 2.3.7: Klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth I-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SIFT olmak üzere,

$\omega$ : TOP $\to$ SIFT

$\quad T \to \omega_T$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur.

Lemma 2.3.8: $\tau$ X üzerinde bir smooth I-fuzzy topoloji olmak üzere

$\iota(\tau) := \{A \subset X : \tau(\chi_A) = 1\}$ ailesi X üzerinde bir klasik topolojidir.

İspat: (T1) $\chi_\phi = 0_X$ ve $\chi_X = 1_X$ olarak alındığında $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$ olduğundan $\emptyset, X \in \iota(\tau)$ olur.

(T2) $G, H \in \iota(\tau) \Rightarrow \tau(\chi_G) = 1$ ve $\tau(\chi_H) = 1$ olur.

$\tau(\chi_{G \cap H}) = \tau(\chi_G \wedge \chi_H)$ ve $\tau$ X üzerinde smooth I-fuzzy topoloji olduğundan $\tau(\chi_G \wedge \chi_H) \geq \tau(\chi_G) \wedge \tau(\chi_H) = 1 \Rightarrow \tau(\chi_{G \cap H}) = 1 \Rightarrow G \cap H \in \iota(\tau)$ olur.

(T3) $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \iota(\tau) \Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda$ için $\tau(\chi_{G_\lambda}) = 1 \Rightarrow \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \tau(\chi_{G_\lambda}) = 1$ dir.

$\tau(\chi_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}) = \tau(\bigvee_{\lambda\in V} \chi_{G_\lambda})$ ve $\tau$ X üzerinde smooth I-fuzzy topoloji olduğundan

$\tau(\bigvee_{\lambda\in V} \chi_{G_\lambda}) \geq \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \tau(\chi_{G_\lambda}) = 1 \Rightarrow \tau(\chi_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}) = 1 \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \in \iota(\tau)$ olur.

Lemma 2.3.9: $(X, \tau)$, $(Y, \tau^*)$ smooth I-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ smooth sürekli ise $\varphi : (X, \iota(\tau)) \to (Y, \iota(\tau^*))$ süreklidir.

İspat: $G \in \iota(\tau^*) \Rightarrow \tau^*(\chi_G) = 1$ dir.

$\tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = \tau(\varphi^{-1}(\chi_G))$ ve $\varphi$ smooth sürekli olduğundan $\tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) \geq \tau^*(\chi_G) = 1$

$\Rightarrow \tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(G) \in \iota(\tau) \Rightarrow \varphi : (X, \iota(\tau)) \to (Y, \iota(\tau^*))$ sürekli olur.

Sonuç 2.3.10: Klasik topolojik uzaylar kategorisi ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth I-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SIFT olmak üzere,

$\iota :$ SIFT $\to$ TOP

$\tau \to \iota(\tau)$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur.

Önerme 2.3.11: $\iota :$ SIFT $\to$ TOP ve $\omega :$ TOP $\to$ SIFT funktorları için $\iota \circ \omega$ funktoru özdeşlik funktorudur.

İspat: $A \in \iota(\omega_T) \Leftrightarrow \omega_T(\chi_A) = 1 \Leftrightarrow A \in T$ olur.

B. Scott Sürekliliğin Derecelendirilmesi (Üretilmiş Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzay)

Tanım 2.3.12: (X, T) klasik topolojik uzay ve $\alpha \in L$ olsun.

f: $(X, T) \to (L, T_S)$ fonksiyonuna $\alpha$-Scott sürekli denir $:\Leftrightarrow \alpha \not\leq p$ olan $\forall p \in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$ dir. [2]

$L = I$ ise $\alpha$-Scott süreklilik $\alpha$-alttan yarı sürekliliğe denktir.

Yani, f: $(X, T) \to I$ $\alpha$-Scott süreklidir $\Leftrightarrow$ $\alpha > p$ olan $\forall p \in Pr(I) = [0, 1)$ için $f^{-1}((p, 1]) \in T \Leftrightarrow f$ $\alpha$-alttan yarı süreklidir.

- f Scott sürekli ise $\forall \alpha \in L$ için f $\alpha$-Scott süreklidir.
- f Scott sürekli ise f 1-Scott süreklidir.
- Her f: $(X, T) \to L$ fonksiyonu 0-Scott süreklidir.

Lemma 2.3.13: f, g : $(X, T) \to L$ iki fonksiyon olsun. $\forall p \in Pr(L)$ için $(f \wedge g)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ dir.

İspat: $x \in (f \wedge g)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \Leftrightarrow (f \wedge g)(x) \not\leq p \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x) \not\leq p$

$\Leftrightarrow f(x) \not\leq p$ ve $g(x) \not\leq p \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ ve $x \in g^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

Lemma 2.3.14: $\forall i \in J$ için $f_i : (X, T) \to L$ bir fonksiyon olsun. $\forall p \in L$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ sağlanır.

İspat: $x \in (\bigvee_{i \in J} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \Leftrightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \Leftrightarrow \exists i \in J$ için $f_i(x) \not\leq p$

$\Leftrightarrow \exists i \in J$ için $x \in f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

Lemma 2.3.15: (X, T) klasik topolojik uzay olsun.

a) f, g: $(X, T) \to L$ sırasıyla $\alpha_1$-Scott sürekli ve $\alpha_2$-Scott sürekli ise $f \wedge g: (X, T) \to L$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2$- Scott süreklidir.

b) $\forall i \in J$ için $f_i : (X, T) \to L$ $\alpha_i$-Scott sürekli ise $\bigvee_{i \in J} f_i : (X, T) \to L$, $\bigwedge_{i \in J} \alpha_i$- Scott süreklidir.

İspat: a) f ve g sırasıyla $\alpha_1$-Scott sürekli ve $\alpha_2$-Scott sürekli olsun.

$p \in Pr(L)$ ve $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \not\leq p$ olsun. $\Rightarrow$ $\alpha_1 \not\leq p$ ve $\alpha_2 \not\leq p$ olur.

f $\alpha_1$-Scott sürekli olduğundan $f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \in T$ ve g $\alpha_2$-Scott sürekli olduğundan $g^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \in T$ dir.

p asal olduğundan Lemma 2.3.13' den

$(f \wedge g)^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) = f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \in T$ olur.

$\Rightarrow f \wedge g$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ - Scott süreklidir.

b) $\bigwedge_{i \in J} \alpha_i \nleq p$ olan $p \in Pr(L)$ alalım.

$\Rightarrow \forall i \in J$ için $\alpha_i \nleq p$.

$\forall i \in J$ için $f_i$ $\alpha_i$-Scott sürekli olduğundan $f_i^{-1}(\{ t \in L : t \nleq p\}) \in T$' dir.

$\Rightarrow \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{ t \in L : t \nleq p\}) \in T$

Lemma 2.3.14'den $(\bigvee_{i \in J} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) = \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{ t \in L : t \nleq p\}) \in T$.

$\Rightarrow \bigvee_{i \in J} f_i$ , $\bigwedge_{i \in J} \alpha_i$ - Scott süreklidir.

Teorem 2.3.16: (X, T) bir klasik topolojik uzay olmak üzere

$\omega_T(f) := \vee \{\alpha \in L : f\ \alpha\text{-Scott sürekli}\}$ olarak tanımlanan $\omega_T : L^X \to L$ dönüşümü X üzerinde bir smooth L-fuzzy topolojidir.

İspat: (S1) Sabit her fonksiyon Scott sürekli ve Scott sürekli her fonksiyon 1-Scott sürekli olduğundan $\omega_T(0_X) = \omega_T(1_X) = 1$ olur.

(S2) $f, g \in L^X$ alalım.

$\omega_T(f) = \vee \{\alpha \in L : f\ \alpha\text{-Scott sürekli}\}$

$\omega_T(g) = \vee \{\lambda \in L : g\ \lambda\text{-Scott sürekli}\}$

$\omega_T(f \wedge g) = \vee \{\beta \in L : f \wedge g\ \beta\text{-Scott sürekli}\}$

L tam dağılımlı olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_T(f) \wedge \omega_T(g) &= (\vee \{\alpha \in L : f\ \alpha\text{-Scott sürekli}\}) \wedge (\vee \{\lambda \in L : g\ \lambda\text{-Scott sürekli}\}) \\ &= \vee \{\alpha \wedge \lambda \in L : f\ \alpha\text{-Scott sürekli, } g\ \lambda\text{-Scott sürekli}\} \end{aligned}$$

iddia: $A := \{\alpha \wedge \lambda \in L : f\ \alpha\text{-Scott sürekli, } g\ \lambda\text{-Scott sürekli}\} \subset \{\beta \in L : f \wedge g\ \beta\text{-Scott sürekli}\} := B$ sağlanır.

$\alpha \wedge \lambda \in A \Rightarrow f\ \alpha$- Scott sürekli ve g $\lambda$-Scott süreklidir.

Lemma 2.3.15 a) dan $f \wedge g$ , $\alpha \wedge \lambda$-Scott süreklidir. $\Rightarrow$ $\beta := \alpha \wedge \lambda \in B$

$\Rightarrow A \subset B \Rightarrow \vee A \leq \vee B \Rightarrow \omega_T(f \wedge g) \geq \omega_T(f) \wedge \omega_T(g)$ elde edilir.

(S3) $(f_i)_{i \in J} \subset L^X$ olsun.

$\forall i \in J$ için $\omega_T(f_i) = \vee\{\alpha_i \in L : f_i\ ,\ \alpha_i\text{-Scott sürekli}\}$ ve

$\omega_T(\bigvee_{i \in J} f_i) = \vee\{\beta \in L : \bigvee_{i \in J} f_i\ ,\ \beta\text{- Scott sürekli}\}$ dir.

L tam dağılımlı olduğundan,

$$\bigwedge_{i \in J} \omega_T(f_i) = \bigwedge_{i \in J}(\vee\{\alpha_i \in L : f_i\ ,\alpha_i\text{- Scott sürekli}\}$$

$$= \bigvee\{\bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in L : f_i\ ,\alpha_i\text{- Scott sürekli}\} \text{ olur.}$$

iddia: $A := \{\bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in L : f_i,\ \alpha_i\text{- Scott sürekli}\} \subset \{\beta \in L : \vee f_i,\ \beta\text{ - Scott sürekli}\} := B$

sağlanır.

$\bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in A \Rightarrow \forall i \in J$ için $f_i\ ,\alpha_i$-Scott süreklidir.

Lemma 2.3.15 b) den $\bigvee_{i \in J} f_i$ , $\wedge\, \alpha_i$-Scott sürekli olur. $\Rightarrow \beta = \bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in B \Rightarrow A \subset B$

$\Rightarrow \vee A \leq \vee B \Rightarrow \omega_T(\bigvee_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \omega_T(f_i)$ elde edilir.

Not: $L = I$ olması durumunda,

$\omega_T : I^X \to I$, $\omega_T(f) = \vee\{\alpha \in I : f\ \alpha\text{ - alttan yarı-sürekli}\}$ olur. Yani, bu $\omega_T$ dönüşümü Teorem 2.3.3' deki dönüşümle aynı olur.

Tanım 2.3.17: Bir önceki teoremde elde edilen $\omega_T$ smooth L-fuzzy topolojisine "T klasik topolojisi tarafından üretilmiş smooth L-fuzzy topoloji" veya kısaca "üretilmiş smooth L-fuzzy topoloji" ve $(X, \omega_T)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayına da "üretilmiş smooth L-ftu" denir. [2]

Bir $(X, \tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayının üretilmiş olması için gerek ve yeter şart $\omega_T = \tau$ olacak şekilde bir T klasik topolojisinin var olmasıdır.

Lemma 2.3.18: (X, T) bir klasik topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \in T \Leftrightarrow \omega_T(\chi_A) \neq 0$.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in T \Rightarrow \chi_A$ süreklidir. $\Rightarrow \chi_A$ Scott süreklidir. $\Rightarrow \chi_A$ 1- Scott süreklidir.

$\Rightarrow \omega_T(\chi_A) = 1 \neq 0$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\omega_T(\chi_A) \neq 0$ olsun.

$\omega_T(\chi_A) = \vee\{\alpha \in L : \chi_A \ \alpha\text{-Scott sürekli}\} \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in L : \chi_A \ \alpha$- Scott süreklidir.

$\Rightarrow \alpha \not\leq p$ olan $\forall p \in Pr(L)$ için $\chi_A^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$

$\Rightarrow \chi_A^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = A \in T$ olur.

Önerme 2.3.19: (X,T) bir klasik topolojik uzay olsun.

a) $\forall e \in L$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq e\}) \in T$ ise $\omega_T(f) > 0$' dır.

b) $\forall p \in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$ ise $\omega_T(f) > 0$' dır.

c) $\forall b \in L$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \geq b\})$ (X,T)' de kapalı ise $\omega_T(f') > 0$' dır.

İspat: a) $\forall e \in L$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq e\}) \in T$ olsun.

$\Rightarrow$ f Scott süreklidir $\Rightarrow$ f 1-Scott süreklidir $\Rightarrow$ $\omega_T(f) = 1 > 0$ dır.

b) (a) nın ispatına benzer şekilde yapılır.

c) $\forall b \in L$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \geq b\})$ (X,T)' de kapalı olsun.

$\Rightarrow$ $\forall b \in L$ için $(f^{-1}(\{t \in L : t \geq b\}))' \in T$ ' dir.

$$\begin{aligned} (f^{-1}(\{t \in L : t \geq b\}))' &= (\{x \in X : f(x) \geq b\})' \\ &= \{x \in X : f(x) \not\geq b\} \\ &= \{x \in X : f'(x) \not\leq b' := e\} \\ &= (f')^{-1}(\{t \in L : t \not\leq e\}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\forall e \in L$ için $(f')^{-1}(\{t \in L : t \not\leq e\}) \in T$ olur. (a)' dan $\omega_T(f') > 0$ elde edilir.

Lemma 2.3.20: (X, T), $(Y, T^*)$ klasik topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\varphi : (X,T) \to (Y,T^*)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth süreklidir.

İspat: $\varphi : (X,T) \to (Y,T^*)$ sürekli olsun.

$f \in L^Y$ alalım.

$\omega_T(\varphi^{-1}(f)) = \vee\{\alpha \in L : \varphi^{-1}(f) : (X, T) \to L \ \alpha\text{-Scott sürekli}\}$

$\omega_{T^*}(f) = \vee\{\beta \in L : f:(Y, T^*) \to L \ \beta\text{-Scott sürekli}\}$

iddia: $A := \{\beta \in L : f, \beta\text{-Scott sürekli}\} \subset \{\alpha \in L : \varphi^{-1}(f), \ \alpha\text{-Scott sürekli}\} := B$ sağlanır.

$\beta \in A \Rightarrow f: (Y, T^*) \to L, \beta$-Scott süreklir.

$\Rightarrow \beta \not\leq p$ olan $\forall p \in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T^*$ dır.

$\varphi : (X, T) \to (Y, T^*)$ sürekli olduğundan $\beta \not\leq p$ olan $\forall p \in Pr(L)$ için

$\varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$ olur.

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1}(f))^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) &= \{x \in X : \varphi^{-1}(f)(x) \not\leq p\} \\ &= \{x \in X : f(\varphi(x)) \not\leq p\} \\ &= \{x \in X : \varphi(x) \in f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})\} \\ &= \{x \in X : x \in \varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}))\} \\ &= \varphi^{-1}(f^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(f) : (X, T) \to L \ \beta$-Scott süreklidir $\Rightarrow \beta \in B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow \vee A \leq \vee B$

$\vee A = \vee\{\beta \in L : f, \beta\text{-Scott sürekli}\} \leq \vee\{\alpha \in L : \varphi^{-1}(f), \alpha\text{-Scott sürekli}\} = \vee B$

olduğundan $\omega_T(\varphi^{-1}(f)) \geq \omega_{T^*}(f)$ sağlanır.

$(\Leftarrow) \ \varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth sürekli olsun.

$A \in T^*$ alalım. Lemma 2.3.18' den $\omega_{T^*}(\chi_A) = 1$ dir.

$\varphi : (X, \omega_T) \to (Y, \omega_{T^*})$ smooth sürekli olduğundan $\omega_T(\varphi^{-1}(\chi_A)) \geq \omega_{T^*}(\chi_A) = 1$.

$\Rightarrow \omega_T(\varphi^{-1}(\chi_A)) = 1 \Rightarrow \omega_T(\chi_{\varphi^{-1}(A)}) = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in T$ olur.

Sonuç 2.3.21: Klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SLFT olmak üzere,

$$\begin{aligned}\omega : \mathrm{TOP} &\to \mathrm{SLFT} \\ T &\to \omega_T\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur. [2]

Böylece, bir klasik topolojik uzaydan bir smooth L-fuzzy topojik uzay ve bunun sonucunda TOP ile SLFT kategorileri arasında bir funktor elde ettik. Bu bize smooth L-fuzzy topolojik uzaylar için ' iyi genelleştirme' kriterini verir.

Eğer " (X, T) klasik topolojik uzay P özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ smooth L-ftu $P_f$ özelliğine sahiptir." özelliği sağlanıyorsa L-fuzzy topolojik uzaylardaki bir $P_f$ özelliği klasik topolojik uzaylardaki bir P özelliğinin iyi genelleştirilmesidir denir. [2]

Lemma 2.3.22: $\tau$ X üzerinde bir smooth L-fuzzy topoloji olsun.

$\psi(\tau) := \{A \subset X : \tau(\chi_A) = 1\}$ X üzerinde bir klasik topolojidir.

İspat: (T1) $\chi_\phi = 0_X$ ve $\chi_X = 1_X$ ve $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$ olduğundan $\emptyset$, X $\in \psi(\tau)$ olur.

(T2) G, H$\in \psi(\tau) \Rightarrow \tau(\chi_G) = 1$ ve $\tau(\chi_H) = 1$ olur.

$\tau(\chi_{G\cap H}) = \tau(\chi_G \wedge \chi_H)$ ve $\tau$ X üzerinde smooth topoloji olduğundan $\tau(\chi_G \wedge \chi_H) \geq \tau(\chi_G) \wedge \tau(\chi_H) = 1$' dir.

$\Rightarrow \tau(\chi_{G\cap H}) = 1 \Rightarrow G \cap H \in \psi(\tau)$ olur.

(T3) $(G_\lambda)_{\lambda\in\wedge} \subset \psi(\tau) \Rightarrow \forall\lambda \in \wedge$ için $\tau(\chi_{G_\lambda}) = 1 \Rightarrow \bigwedge_{\lambda\in\wedge} \tau(\chi_{G_\lambda}) = 1$ olur.

$\tau(\chi_{\bigcup_{\lambda\in\wedge} G_\lambda}) = \tau(\bigvee_{\lambda\in\vee} \chi_{G_\lambda})$ ve $\tau$ X üzerinde smooth topoloji olduğundan

$\tau(\bigvee_{\lambda\in\vee} \chi_{G_\lambda}) \geq \bigwedge_{\lambda\in\wedge} \tau(\chi_{G_\lambda}) = 1.$

$\Rightarrow \tau(\chi_{\bigcup_{\lambda\in\wedge} G_\lambda}) = 1 \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\wedge} G_\lambda \in \psi(\tau)$ olur.

Lemma 2.3.23: $(X, \tau)$, $(Y, \tau^*)$ smooth L-ftu lar ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ smooth sürekli ise $\varphi : (X, \psi(\tau)) \to (Y, \psi(\tau^*))$ süreklidir.

İspat: $\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ smooth sürekli olsun.

$G \in \psi(\tau^*)$ alalım.

$\psi(\tau^*)$' ın tanımından $\tau^*(\chi_G) = 1$' dir.

$\tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = \tau(\varphi^{-1}(\chi_G)$ ve $\varphi$ smooth sürekli olduğundan $\tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) \geq \tau^*(\chi_G) = 1$

$\Rightarrow \tau(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(G) \in \psi(\tau) \Rightarrow \varphi : (X, \psi(\tau)) \to (Y, \psi(\tau^*))$ sürekli olur.

Sonuç 2.3.24: Klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SLFT olmak üzere,

$\psi$ : SLFT $\to$ TOP

$\tau \to \psi(\tau)$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur. [2]

Önerme 2.3.25: $\psi$ : SLFT $\to$ TOP ve $\omega$ : TOP $\to$ SLFT olmak üzere $\psi \circ \omega$ funktoru idantiktir.

İspat: $(\psi \circ \omega)(T) = \psi(\omega_T) = \{A \subset X : \omega_T(\chi_A) = 1\} = \{A \subset X : A \in T\} = T$ olur.

## 2.4. Smooth Hausdorff Uzay

Tanım 2.4.1: $(X, \tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayına smooth Hausdorff denir $:\Leftrightarrow$ [$\forall p, q \in Pr(L)$ ve $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$ için $\exists f, g \in L^X$: $\tau(f) \nleq p$, $\tau(g) \nleq q$ ve $f(x) \nleq p$, $g(y) \nleq q$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$' dır.] [2]

Diğer bir ifadeyle;

$\forall p, q \in Pr(L)$ ve $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$ için $\exists f, g \in L^X$: $\tau(f) \nleq p$, $\tau(g) \nleq q$ ve $x_p \in f$, $y_q \in g$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$' dır.

$\tau$ crisp ise, yani $\tau : L^X \to \{0, 1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$(X, \tau)$ (smooth) Hausdorff' tur $:\Leftrightarrow \forall p, q \in Pr(L)$ ve $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$ için $\exists f, g \in L^X$: $\tau(f) = 1$, $\tau(g) = 1$ ve $f(x) \nleq p$, $g(y) \nleq q$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$' dır.

Böylece, $\tau$' nun crisp olması durumunda bu tanım Warner ve McLean [24] tarafından L-fuzzy uzaylarda verilen tanımla çakışır. Dolayısıyla, smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda verilen bu tanım L-fuzzy topolojik uzayda verilen Hausdorff ayırma aksiyomunun bir genelleştirilmesidir.

Teorem 2.4.2: (X,T) klasik topolojik uzayı Hausdorff' tur $\Leftrightarrow$ $(X,\omega_T)$ üretilmiş smooth L-ftu smooth Hausdorff' tur.

İspat: $(\Rightarrow)$ (X,T) klasik topolojik uzayı Hausdorff olsun.

$p, q \in Pr(L)$ ve $x, y \in X$ $(x \neq y)$ alalım.

Hipotezden $\exists$ $G, H \in T : x \in G, y \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ dır.

$p, q \in Pr(L)$ olduğundan $p \neq 1$ ve $q \neq 1$ dir.

Lemma 2.3.18' den $\omega_T(\chi_G) = 1 \not\leq p$ ve $\omega_T(\chi_H) = 1 \not\leq q$ olur.

$x \in G \Rightarrow \chi_G(x) = 1 \not\leq p \Rightarrow x_p \in \chi_G$ ve $y \in H \Rightarrow \chi_H(y) = 1 \not\leq q \Rightarrow y_q \in \chi_H$ olur.

$\forall z \in X$ için $\chi_G(z) = 0$ veya $\chi_H(z) = 0$' dır. Gerçekten,

$z \in X$ için $\chi_G(z) \neq 0$ olsa, $z \in G$ olur. $\Rightarrow z \notin H \Rightarrow \chi_H(z) = 0$ elde edilir.

Böylece, $(X,\omega_T)$ smooth Hausdorff olur.

$(\Leftarrow)$ $(X,\omega_T)$ smooth L-ftu smooth Hausdorff olsun.

$p, q \in Pr(L)$ ve $x, y \in X$ $(x \neq y)$ alalım.

Hipotezden,

$\exists$ $f, g \in L^X$: $\omega_T(f) \not\leq p$, $\omega_T(g) \not\leq q$ ve $x_p \in f$, $y_q \in g$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$' dır.

$\omega_T(f) \not\leq p$ ve $\omega_T(g) \not\leq q$ olduğundan $f^{-1}(\{t \in L: t \not\leq p\}) \in T$ ve

$g^{-1}(\{t \in L: t \not\leq q\}) \in T$ olur.

$x_p \in f \Rightarrow f(x) \not\leq p \Rightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L: t \not\leq p\})$ dır.

$y_q \in g \Rightarrow g(y) \not\leq p \Rightarrow y \in g^{-1}(\{t \in L: t \not\leq q\})$ dır.

$f^{-1}(\{t \in L: t \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L: t \not\leq q\}) = \varnothing$' dir.Gerçekten,

$f^{-1}(\{t \in L: t \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L: t \not\leq q\}) \neq \varnothing$ olsa,

$\exists$ $a \in f^{-1}(\{t \in L: t \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{t \in L: t \not\leq q\}) \Rightarrow f(a) \not\leq p$ ve $g(a) \not\leq q$

$\Rightarrow$ $f(a) \neq 0$ ve $g(a) \neq 0$ olur. Bu ise $(X,\omega_T)$' nin smooth Hausdorff olması ile çelişir. O halde, (X,T) klasik topolojik uzayı Hausdorff' tur.

Önerme 2.4.3: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $Y \subset X$ olsun. Eğer $(X,\tau)$ smooth Hausdorff ise $(Y,\tau_Y)$ smooth alt uzayı da smooth Hausdorff' tur.

İspat: $(X,\tau)$ smooth Hausdorff olsun.

$p, q \in Pr(L)$ ve $x, y \in Y$ $(x \neq y)$ alalım.

$(X,\tau)$ smooth Hausdorff olduğundan $\exists$ $f, g \in L^X$: $\tau(f) \not\leq p$ , $\tau(g) \not\leq q$ ve $f(x) \not\leq p$, $g(y) \not\leq q$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$' dır.

$h \in L^Y$ olmak üzere $\tau_Y(h) = \vee\{\tau(f)\colon f \in L^X \text{ ve } f|_Y = h\}$ olduğunu Önerme 2.1.12' den biliyoruz.

$f^* = f|_Y$ , $g^* = g|_Y$ alınırsa

$f^*, g^* \in L^Y$ ve $\tau_Y$' nin tanımından $\tau_Y(f^*) \not\leq p$ ve $\tau_Y(g^*) \not\leq q$ olur.

$f^*(x) \not\leq p$ ve $g^*(y) \not\leq q$ dır.

$\forall z \in X$ için $f^*(z) = 0$ veya $g^*(z) = 0$' dır. Gerçekten,

$z \in X$ için $f^*(z) \neq 0$ olsa, $f(z) \neq 0$ olur. $\Rightarrow$ $g(z) = 0$ $\Rightarrow$ $g^*(z) = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak $(Y,\tau_Y)$ smooth alt uzayı smooth Hausdorff' tur.

# BÖLÜM 3. SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

## 3.1. Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 3.1.1: $(X, \tau)$ bir smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.
g' ye smooth kompakt L-fuzzy kümesi denir $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ ailesi için $\exists F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ dir. [2]

$g = X$ $(=1_X)$ smooth kompakt ise, $(X, \tau)$ smooth kompakt smooth L-ftu olarak adlandırılır.

$\tau$ crisp ise, yani $\tau : L^X \to \{0, 1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.
g (smooth) kompakttır : $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i : \tau(f_i) = 1\}_{i\in J}$ ailesi için
$\exists F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ dir.

Böylece, $\tau$'nun crisp olması durumunda smooth kompaktlık Warner ve McLean [24] tarafından tüm uzay için tanımlanan ve Kudri' nin [10] keyfi L-fuzzy kümelerine genelleştirdiği L-fuzzy kompaktlık tanımına denk olmaktadır. Dolayısıyla, smooth kompaktlık L-fuzzy kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirilmesidir.

$L = I$ olması durumunda bütün uzay için verilen tanım aşağıdaki gibi olur.

$(X, \tau)$ smooth I-ftu smooth kompakttır $:\Leftrightarrow \forall\ \alpha \in [0,\ 1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > \alpha\ \ (\forall\, x \in X)$

olan I-fuzzy kümelerinin her $\{\, f_i : \tau(f_i) > \alpha \,\}_{i\in J}$ ailesi için

$\exists\, F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) > \alpha\ \ (\forall\, x \in X)$ dır.

Bu durumda eğer $\tau$ crisp ise, yani $\tau : I^X \to \{0,\ 1\}$ ise, I-fuzzy topolojik uzaydaki smooth kompaktlık Lowen' ın [14] güçlü fuzzy kompaktlık tanımı ile çakışır.

Aşağıdaki teorem smooth kompaktlığın kapalı kümelerle karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.1.2: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth kompakttır $\Leftrightarrow \forall\ \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i\in J} h_i)(x) \not\geq \alpha\ \ (g(x) \geq \alpha,\ \forall\, x \in X)$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{\, h_i : \mathcal{F}(h_i) \not\leq \alpha' \}_{i\in J}$ ailesi için

$\exists\, F \subset J$ sonlu : $(\bigwedge_{i\in F} h_i)(x) \not\geq \alpha\ \ (g(x) \geq \alpha,\ \forall\, x \in X)$ dır.

İspat: Tanımdan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.1.3: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth kompakttır $\Leftrightarrow \forall\, p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p\ \ (\forall\, x \in X)$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{\, f_i : \tau(f_i) \not\leq p \}_{i\in J}$ ailesi için

$\exists\, F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p\ (\forall\, x \in X)$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in Pr(L)$ ve $\forall\, x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ olan L-fuzzy kümelerinin $\{\, f_i : \tau(f_i) \not\leq p \}_{i\in J}$ ailesini alalım.

$(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) = (\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \vee g'(x) \not\leq p \Rightarrow g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p'$dir.

g smooth kompakt olduğundan $\exists\, F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p\ \ (g(x) \geq p')$ dir.

$x \in X$ alalım.

• $g(x) \geq p' \Rightarrow g'(x) \leq p$ ve $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \nleq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \vee g'(x) = (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$ olur.

• $g(x) \ngeq p' \Rightarrow g'(x) \nleq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \vee g'(x) = (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$ olur.

Böylece, $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ $p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \nleq p$ ( $g(x) \geq p'$) olan L-fuzzy kümelerinin

$\{f_i : \tau(f_i) \nleq p\}_{i\in J}$ ailesini alalım.

$g(x) \geq p' \Rightarrow g'(x) \leq p$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \nleq p$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \vee g'(x) = (\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \nleq p$ olur.

Hipotezden, $\exists F \subset J$ sonlu : $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$' dir.

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \nleq p$ , $g'(x) \nleq p$ olur.

Sonuç olarak, g smooth kompakttır.

Lemma 3.1.4: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $p \in Pr(L)$ olsun.
$\{f^{-1}(\{t \in L: t \nleq p\}) : f \in L^X$ ve $\tau(f) \nleq p\}$ küme ailesi X üzerindeki bir klasik topoloji için tabandır.
İspat: Kolaylıkla görülür.

Notasyon: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $\forall p \in Pr(L)$ olsun. Bir önceki lemmadan elde edilen X üzerindeki klasik topolojiyi $\tau_p$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.5: $(X, \tau)$ bir smooth L-ftu olsun. Her bir $p \in Pr(L)$ için $(X, \tau_p)$ klasik topolojik uzayına $(X, \tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayının asal seviye uzayı denir.[2]

Smooth kompaktlık, asal seviye uzaylarında klasik kompaktlık ile aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

Teorem 3.1.6: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$ kümesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $g \in L^X$ smooth kompakt olsun.

$p \in Pr(L)$ ve $\{A_i\}_{i \in J}$ $(X, \tau_p)$'de $G_p$' nin taban elemanlarından oluşan açık bir örtümü olsun. Bu takdirde,

$\forall i \in J$ için $\exists\, f_i \in L^X : \tau(f_i) \not\leq p$ ve $A_i = f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ dir.

$G_p \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ olduğundan $\forall x \in G_p$ için $x \in \bigcup_{i \in J} A_i$ olur.

$\Rightarrow \forall x \in G_p$ için $x \in \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ dir.

$\Rightarrow \forall x \in G_p$ için $x \in (\bigvee_{i \in J} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ ( Lemma 2.3.14' den )

$\Rightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ dir.

g smooth kompakt olduğundan $\exists F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$.

$\Rightarrow x \in (\bigvee_{i \in F} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i \in F} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i \in F} A_i$

$\Rightarrow G_p \subset \bigcup_{i \in F} A_i$ olur.

O halde $G_p$ kümesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

$(\Leftarrow)$ $p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ olan L-fuzzy kümelerinin

$\{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i \in J}$ ailesini alalım.

O halde, $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\} \subset \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

Böylece, $\{f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) : f_i \in L^X \text{ ve } \tau(f_i) \not\leq p\}_{i \in J}$ ailesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında $G_p$' nin açık bir örtümü olur.

$G_p$ kompakt olduğundan $\exists F \subset J$ sonlu : $G_p \subset \bigcup_{i \in F} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

$\Rightarrow\ \forall x \in G_p$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p\ \ (g(x) \geq p') \Rightarrow$ g smooth kompakttır.

Sonuç 3.1.7: $(X,\tau)$ smooth L-ftu smooth kompakttır. $\Leftrightarrow$ $(X,\tau)$' nun her asal seviye uzayı kompakttır. (Yani, $\forall p \in Pr(L)$ için $(X,\tau_p)$ klasik topolojik uzayı kompakttır.)

İspat: Bir önceki teoremde g yerine X $(=1_X)$ uzayı alınarak kolaylıkla görülür.

Lemma 3.1.8: (X,T) klasik topolojik uzay olsun. $\forall p \in Pr(L)$ için $(\omega_T)_p = T$' dir.

İspat: $p \in Pr(L)$ ve $A \in (\omega_T)_p$ olsun.

$(\omega_T)_p$ ' nin tanımından $A = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olacak şekilde bir

$\{f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) : f_i \in L^X$ ve $\omega_T(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ küme ailesi mevcuttur.

$\forall i \in J$ için $\omega_T(f_i) \not\leq p$ olduğundan $f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$ olur. $\Rightarrow A \in T$ olur.

$\Rightarrow (\omega_T)_p \subset T$ ........(1)

$A \in T$ olsun $\Rightarrow$ Lemma 2.3.18' den $\omega_T(\chi_A) = 1 \not\leq p$ olur.

$\Rightarrow A = \chi_A^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in (\omega_T)_p$ olur.

$\Rightarrow T \subset (\omega_T)_p$ ........(2)

(1) ve (2) den eşitlik sağlanır.

Aşağıdaki teorem smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda tanımlanan smooth kompaktlığın klasik topolojik uzaylardaki kompaktlığın bir iyi genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.1.9: (X, T) klasik topolojik uzayı kompakttır. $\Leftrightarrow$ $(X, \omega_T)$ smooth L-ftu smooth kompakttır.

İspat: Sonuç 3.1.7 ve Lemma 3.1.8' den $(X, \omega_T)$ smooth kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $(X, (\omega_T)_p) = (X, T)$ kompakttır.

Önerme 3.1.10: Sonlu her küme üzerindeki smooth L-fuzzy topolojik uzay smooth kompakttır.

İspat: X sonlu bir küme ve $\tau$ X üzerinde bir smooth L-fuzzy topoloji olsun.

O halde, $\forall p \in Pr(L)$ için $\tau_p$ X üzerinde bir uzayı klasik topolojidir. X sonlu olduğundan her bir $p \in Pr(L)$ için $(X, \tau_p)$ klasik topolojik uzayı kompakt olur. Sonuç 3.1.7' den $(X, \tau)$ smooth L-ftu smooth kompakt olur.

Önerme 3.1.11: Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda sonlu destekli her L-fuzzy kümesi smooth kompakttır.

İspat: $(X, \tau)$ bir smooth L-ftu, g X üzerinde sonlu destekli bir L-fuzzy kümesi ve $p \in Pr(L)$ olsun.

Teorem 3.1.6' dan $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$ kümesinin $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

g' nin desteği sonlu ve $p' \neq 0$ olduğundan $G_p$ kümesi sonludur.

$\Rightarrow$ $G_p$ kümesi $(X, \tau_p)$' de kompakttır.

Önerme 3.1.12: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve g, h $\in L^X$ olsun. g ve h smooth kompakt ise $g \vee h$ smooth kompakttır.

İspat: $p \in Pr(L)$ , $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$, $H_p = \{ x \in X : h(x) \geq p'\}$ ve

$K_p = \{ x \in X : (g \vee h)(x) \geq p'\}$ olsun.

p asal olduğundan $K_p = G_p \cup H_p$ ' dir.

g ve h smooth kompakt olduğundan Teorem 3.1.6' dan $G_p$ ve $H_p$ kümeleri $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

Böylece, $K_p = G_p \cup H_p$ kümesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

Teorem 3.1.6' dan $g \vee h$ smooth kompakt olur.

Önerme 3.1.13: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve g, h $\in L^X$ olsun. $\mathcal{F}$, X' de kapalılığın bir derecelendirilmesi olmak üzere $\mathcal{F}(h) = 1$ ve g smooth kompakt ise, $g \wedge h$ smooth kompakttır.

İspat: $p \in Pr(L)$ , $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$, $H_p = \{ x \in X : h(x) \geq p'\}$ ve

$K_p = \{ x \in X : (g \wedge h)(x) \geq p'\}$ olsun.

$K_p = G_p \cap H_p$ ' dir.

g smooth kompakt olduğundan Teorem 3.1.6' den $G_p$ kümesi $(X,\tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

Şimdi de $H_p$' nin $(X,\tau_p)$' de kapalı olduğunu gösterelim.

$X \setminus H_p = \{ x\in X : h(x) \not\geq p' \} = \{ x\in X : h'(x) \not\leq p\} = (h')^{-1}(\{ t \in L : t \not\leq p\})$

$\mathcal{T}(h) = \tau(h') = 1 \not\leq p$ ve $\tau_p$' nin tanımından $X \setminus H_p \in \tau_p$ olur.

Yani, $H_p$ kümesi $(X,\tau_p)$' de kapalıdır.

$G_p$ kompakt ve $H_p$ kapalı olduğundan $K_p = G_p \cap H_p$ kümesi $(X,\tau_p)$' de kompakt olur. Teorem 3.1.6' dan $g \wedge h$ smooth kompakt olur.

Sonuç 3.1.14: $(X,\tau)$ smooth L-ftu olsun. $g \in L^X$ smooth kompakt, $h \leq g$ ve $\mathcal{T}(h) = 1$ ise h da smooth kompakttır.

İspat: Bir önceki önermeden kolaylıkla görülür.

Önerme 3.1.15: $(X,\tau)$, $(Y,\tau^*)$ smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\varphi : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ smooth sürekli ise, $\forall\, p\in Pr(L)$ için $\varphi : (X,\tau_p) \to (Y,\tau_p^*)$ süreklidir.

İspat: $p\in Pr(L)$ ve B, $(Y,\tau_p^*)$ klasik topolojik uzayının bir taban elemanı olsun.

Yani, $f\in L^Y$, $\tau^*(f) \not\leq p$ ve $B = f^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$ olsun.

$\varphi : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ smooth sürekli olduğundan $\tau(\varphi^{-1}(f)) \geq \tau^*(f)$ dır.

$\tau^*(f) \not\leq p$ olduğundan $\tau(\varphi^{-1}(f)) \not\leq p$' dir.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(B) &= \varphi^{-1}( f^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})) \\
&= (f o \varphi)^{-1}(\{ t\in L : t \not\leq p\}) \\
&= \{ x\in X : (f o \varphi)(x) \not\leq p\} \\
&= \{ x\in X : f(\varphi(x)) \not\leq p\} \\
&= \{ x\in X : \varphi^{-1}(f) \not\leq p \} \\
&= (\varphi^{-1}(f))^{-1} (\{ t\in L : t \not\leq p\})
\end{aligned}$$

Böylece, $\varphi^{-1}(B)$ kümesi $(X,\tau_p)$ asal seviye uzayında bir taban elemanıdır ve dolayısıyla açıktır.

Sonuç olarak, $\varphi : (X,\tau_p) \to (Y,\tau_p^*)$ süreklidir.

Önerme 3.1.16: $(X,\tau)$, $(Y,\tau^*)$ smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ smooth sürekli, örten bir dönüşüm olsun. $(X,\tau)$ smooth kompakt ise $(Y,\tau^*)$ smooth kompakttır.

İspat: $p \in Pr(L)$ ve $(X,\tau)$ smooth kompakt olsun.

Sonuç 3.1.7' den $(X,\tau)$' nun $(X,\tau_p)$ asal seviye uzayı kompakt olur.

$\varphi : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ smooth sürekli ve örten olduğundan bir önceki önermeden

$\varphi : (X,\tau_p) \to (Y,\tau_p^*)$ sürekli ve örtendir.

Kompaktlık sürekli dönüşüm altında korunduğundan $(Y,\tau^*)$' ın $(Y,\tau_p^*)$ asal seviye uzayı kompakttır. Sonuç 3.1.7' den $(Y,\tau^*)$ smooth kompakt olur.

Tanım 3.1.17: L tam latisinin bir p elemanına tam asal denir : $\Leftrightarrow$ $\bigwedge_{i\in J} a_i \le p$ olan L latisinin her $(a_i)_{i\in J}$ ailesi için $\exists\, i \in J : a_i \le p$ dir. [2]

Tanımlar karşılaştırıldığında, her tam asal eleman asaldır.

Örnek 3.1.18: X bir küme ve L, X' in güç kümesi olsun. O halde, L bir tam latistir ve $x \in X$ için $X \setminus \{x\}$, L' de bir tam asal elemandır. [2]

Lemma 3.1.19: L, 0' ı tam asal eleman olan bir fuzzy latis, $(X,\tau)$ bir smooth L-ftu ve $f \in L^X$ olsun.

$\tau(f) \neq 0 \Leftrightarrow x_p \in f$ olan $\forall\, x_p \in Pr(L^X)$ için $\exists\, g \in L^X : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \le f$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\tau(f) \neq 0$, $x_p \in Pr(L^X)$ ve $x_p \in f$ olsun.

$g := f$ olarak alındığında $\tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g$ olur.

$(\Leftarrow)$ Hipotezden $f = \vee\{ g \in L^X : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \le f\}$ dir.

$\tau(f) = \tau(\vee\{g \in L^X : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \le f\}) \ge \wedge(\{\tau(g) : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \le f\})$ olur.

0 tam asal olduğundan $\wedge\{\tau(g) : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \leq f\} \neq 0$' dır.

Böylece, $\tau(f) \neq 0$ olur.

Teorem 3.1.20: L, 0' ı tam asal eleman olan fuzzy latis, $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $F \subset X$ olsun. Eğer $(X, \tau)$ smooth Hausdorff ve $\chi_F$ smooth kompakt ise $\chi_F$' nin kapalılık derecesi 0' dan büyüktür. Yani, $\mathcal{F}(\chi_F) \neq 0$' dır.

İspat: $\mathcal{F}(\chi_F) = \tau(\chi_{F'}) \neq 0$ olduğunu göstermek için önceki lemmadan dolayı

$x_p \in \chi_{F'}$ olan $\forall\, x_p \in Pr(L^X)$ için $\exists\, g \in L^X : \tau(g) \neq 0$ ve $x_p \in g \leq \chi_{F'}$ sağlandığını ispatlamalıyız.

$x_p \in Pr(L^X)$ olmak üzere $x_p \in \chi_{F'}$ olsun.

$x_p \in \chi_{F'} \Rightarrow \chi_{F'}(x) \nleq p \Rightarrow x \in F' \Rightarrow x \notin F$ dir.

$\forall\, y \in F$ için $(X, \tau)$ smooth Hausdorff olduğundan $\exists\, f_y,\ g_y \in L^X : \tau(f_y) \nleq p$,

$\tau(g_y) \nleq p$ ve $x_p \in g_y$, $y_p \in f_y$ ve $\forall\, z \in X$ için $f_y(z) = 0$ veya $g_y(z) = 0$ dır.

Böylece, $\forall\, z \in F$ için $(\bigvee_{y \in F} g_y)(z) \nleq p$ ve $\forall\, y \in F$ için $\tau(g_y) \nleq p$ dir.

$\chi_F$ smooth kompakt olduğundan $\exists\ g_{y_1}, \ldots, g_{y_n} : \forall\, z \in F$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} g_{y_i})(z) \nleq p$ sağlanır.

$g := \bigwedge_{i=1}^{n} g_{y_i}$ olarak tanımlayalım.

O halde, $\tau(g) = \tau(\bigwedge_{i=1}^{n} g_{y_i}) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \tau(g_{y_i})$ dir.

$\Rightarrow\ \forall\, i \in \{1, \ldots n\}$ için $\tau(g_{y_i}) \nleq p$ olduğundan $\tau(g) \nleq p$ olur.

$x_p \in g$ ve $g \leq \chi_{F'}$' dür. Çünkü, $\chi_{F'}(x) = 1 \geq g(x)$' dir.

## 3.2. Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylarda Relatif Kompaktlık

Tanım3.2.1: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g' ye smooth relatif kompakt L-fuzzy kümesi denir $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ ailesi için

$\exists F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ dir. [3]

Eğer $g = X$ $(=1_X)$ smooth relatif kompakt ise $(X,\tau)$' ya smooth relatif kompakt adı verilir.

Tanımlar karşılaştırıldığında her smooth kompakt L-fuzzy kümesi smooth relatif kompakt olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem smooth relatif kompaktlığın kapalı kümelerle karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.2.2: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth relatif kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in M(L)$ ve $\forall x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in J} h_i)(x) \not\geq \alpha$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{h_i : \mathcal{F}(h_i) \not\leq \alpha'\}_{i\in J}$ ailesi için $\exists F \subset J$ sonlu $:(\bigwedge_{i\in F} h_i) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha, \forall x \in X)$ dır.

İspat: Tanımdan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.3: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth relatif kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$ kümesi $(X, \tau_p)$ klasik topolojik uzayında relatif kompakttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $g \in L^X$ smooth relatif kompakt olsun.

$p \in Pr(L)$ ve $\{A_i\}_{i\in J}$ ailesi $(X,\tau_p)$' nin taban elemanlarından oluşan açık bir örtümü olsun.

$\tau_p$ 'nin tanımı gereğince, $\forall i \in J$ için $\exists f_i \in L^X : \tau(f_i) \not\leq p$ ve $A_i = f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

$X = \bigcup_{i\in J} A_i = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) = (\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ (Lemma 2.3.14' den)

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $x \in (\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olur.

g smooth relatif kompakt olduğundan

$\exists F \subset J$ sonlu : $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p', \forall x \in X)$ dir.

$\Rightarrow \forall x \in G_p$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$

$\Rightarrow \forall x \in G_p$ için $x \in (\bigvee_{i\in F} f_i)^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i\in F} f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i\in F} A_i$

$\Rightarrow G_p \subset \bigcup_{i\in F} A_i$ olur.

O halde $G_p$ kümesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

$(\Leftarrow)$ $p \in Pr(L)$ ve $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olan L-fuzzy kümelerinin

$\{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ ailesini alalım. Bu takdirde,

$\forall x \in X$ için $x \in (\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow X = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$ ve $\forall i \in J$ için $f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) \in \tau_p$ ' dir.

Böylece, $\{f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) : f_i \in L^X$ ve $\tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ ailesi $(X, \tau_p)$ uzayının açık bir örtümü olur.

$G_p$, $(X, \tau_p)$' de relatif kompakt olduğundan $\exists F \subset J$ sonlu: $G_p \subset \bigcup_{i\in F} f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow \forall x \in G_p$ için $x \in \bigcup_{i\in F} f_i^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\}) = (\bigvee_{i\in F} f_i)^{-1}(\{t\in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

$\Rightarrow g$, $(X, \tau)$' da smooth relatif kompakt olur.

Teorem 3.2.4: (Relatif Kompaktlığın İyi Genelleştirilmesi)

(X, T) klasik topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A, (X, T)'-de relatif kompakttır $\Leftrightarrow$ $\chi_A$, $(X, \omega_T)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayında smooth relatif kompakttır.

İspat: Lemma 3.1.8' den ve Teorem 3.2.3' den kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.5: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth relatif kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olan L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in J}$ ailesi için $\exists F \subset J$ sonlu :

$(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ dir.

İspat: Teorem 3.1.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.6: $(X,\tau)$ smooth L-ftu ve f, g, $h \in L^X$ olsun.

a) g ve h smooth relatif kompakt ise $g \vee h$ smooth relatif kompakttır.

b) g smooth relatif kompakt ve $f \leq g$ ise f smooth relatif kompakttır.

İspat: a) Önerme 3.1.12' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

b) g smooth relatif kompakt ve $f \leq g$ olsun.

$G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$, $F_p = \{x \in X : f(x) \geq p'\}$ olsun. g smooth relatif kompakt olduğundan Teorem 3.2.3' den $G_p$ kümesi $(X, \tau_p)$ klasik topolojik uzayında relatif kompakt olur.

$f \leq g$ olduğundan $F_p \subset G_p$ olur.

$G_p$ kümesi relatif kompakt olduğundan $F_p$ kümesi de relatif kompakttır.

Teorem 3.2.3' den dolayı f smooth relatif kompakt olur.

Teorem 3.2.7: $(X,\tau)$, $(Y,\tau^*)$ smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olmak üzere $\varphi : (X,\tau) \rightarrow (Y,\tau^*)$ smooth sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer g , $(X,\tau)$' da smooth relatif kompakt ise $\varphi(g)$, $(Y,\tau^*)$' da smooth relatif kompakt olur.

İspat: $p \in Pr(L)$ ve g , $(X,\tau)$' da smooth relatif kompakt olsun.

g smooth relatif kompakt olduğundan Teorem 3.2.3' den $G_p = \{x \in X : g(x) \geq p'\}$ kümesi $(X, \tau_p)$ klasik topolojik uzayında relatif kompakttır. Ayrıca,

$\varphi(G)_p = \{y \in Y : \varphi(g)(y) \geq p'\} = \varphi(G_p)$ dir.

$\varphi : (X,\tau) \rightarrow (Y,\tau^*)$ smooth sürekli olduğundan Önerme 3.1.15' den

$\varphi : (X,\tau_p) \rightarrow (Y,\tau_p^*)$ süreklidir. Dolayısıyla $\varphi(G_p)$, $(Y,\tau_p^*)$' da relatif kompakttır.

O halde, Teorem 3.2.3' den $\varphi(g)$ , $(Y,\tau^*)$' da smooth relatif kompakttır.

### 3.3. Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylarda Yerel Kompaktlık

Tanım 3.3.1: $(X,\tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayına smooth yerel kompakt denir

$$:\Leftrightarrow \forall x_p \in Pr(L^X) \text{ için } \tau(f) \nleq p \text{ olan } f \in L^X \text{ ve } k(z)=\begin{cases} e, & z\in K\subset X \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (e\in L)$$

formunda $k \in L^X$ vardır : $\chi_K$ smooth kompakt ve $x_p \in f \leq k$. [2]

Özel olarak $\tau$ crisp ise, yani $\tau: L^X \to \{0,1\} \subset L$ ise, smooth yerel kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki yerel kompaktlığa denk olur. [11]

Tanımlar karşılaştırıldığında, her smooth kompakt uzayın smooth yerel kompakt olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda tanımlanan smooth yerel kompaktlığın klasik topolojik uzaylardaki yerel kompaktlığın bir iyi genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.3.2: (X,T) klasik topolojik uzay yerel kompakttır $\Leftrightarrow$ $(X,\omega_T)$ smooth L-ftu smooth yerel kompakttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ (X,T) klasik topolojik uzayı yerel kompakt olsun.

$x_p \in Pr(L^X)$ alalım.

(X ,T) yerel kompakt olduğundan $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset X$ kompakt.

$\Rightarrow \exists G \in T : x \in G \subset U$

$\Rightarrow \omega_T(\chi_G) = 1 \nleq p$ ve $x_p \in \chi_G \leq \chi_U$ olur.

U , (X, T)' de kompakt olduğundan Teorem 3.1.9' a göre $\chi_U$ , $(X,\omega_T)$' de smooth kompakt olur.

Sonuç olarak $(X,\omega_T)$ smooth yerel kompakt olur.

$(\Leftarrow)$ $x_p \in Pr(L^X)$ alalım.

$(X,\omega_T)$ smooth yerel kompakt olduğundan $\omega_T(f) \nleq p$ olan $f \in L^X$ ve

$$k(z)=\begin{cases} e, & z\in K\subset X \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (e\in L)$$

formunda $k \in L^X$ vardır : $\chi_K$ smooth kompakt ve $x_p \in f \leq k$.

$\omega_T(f) \nleq p$ olduğundan $A = f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \in T$ olur.

$U = k^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) = \{ z \in X : k(z) \nleq p\}$ olsun.

$e \nleq p$ ise $U = K$ olur. $e \leq p$ ise $U = \emptyset$ dir.

$\chi_K$, $(X, \omega_T)$' de smooth kompakt olduğundan Teorem 3.1.9' a göre K, (X,T)' da kompakt olur. Böylece U kompakt olur.

$x \in A \subset U$ olur. Gerçekten,

$x_p \in f \Rightarrow f(x) \nleq p \Rightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) = A \Rightarrow x \in A$

$a \in A$ alırsak $f(a) \nleq p$ olur.

$f \leq k$ olduğundan $k(a) \nleq p \Rightarrow a \in k^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) = U \Rightarrow a \in U$

$\Rightarrow A \subset U$ sağlanır.

Önerme 3.3.3: $(X, \tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth yerel kompakt ise, $(X, \tau)$' nun her bir asal seviye uzayı yerel kompakttır.

İspat: $(X, \tau)$ smooth yerel kompakt ve $p \in Pr(L)$ olsun.

$x \in X$ alalım.

$(X, \tau)$ smooth yerel kompakt olduğundan $\tau(f) \nleq p$ olan $f \in L^X$ ve

$$k(z) = \begin{cases} e, & z \in K \subset X \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad (e \in L)$$

formunda $k \in L^X$ vardır : $\chi_K$ smooth kompakt ve $x_p \in f \leq k$.

$x_p \in f \Rightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\})$ dir.

$\tau(f) \nleq p$ olduğundan ve $(X, \tau_p)$' nin tanımından $A = f^{-1}(\{t \in L : t \nleq p\}) \in \tau_p$ ' dir.

$\chi_K$ , $(X, \tau)$' da smooth kompakt olduğundan Teorem 3.1.6' dan

$K = \{z \in X : \chi_K(z) \geq p'\}$ kümesi $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakttır.

$x \in A$ ve $A \subset K$' dır. Gerçekten,

$a \in A$ alırsak $f(a) \nleq p$ olur. $f \leq k$ olduğundan $k(a) \nleq p$ olur. Böylece, $a \in K$ elde edilir. Sonuç olarak, K x noktasının $(X, \tau_p)$ asal seviye uzayında kompakt bir komşuluğu olur.

Teorem 3.3.4: $(X,\tau)$, $(Y,\tau^*)$ smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ smooth açık, smooth sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $(X,\tau)$ smooth yerel kompakt ise $(Y,\tau^*)$ da smooth yerel kompakttır.

İspat: $p\in Pr(L)$ ve $y\in Y$ alalım.

$\varphi$ örten olduğundan $\varphi(x)=y$ olacak şekilde bir $x\in X$ mevcuttur.

$(X,\tau)$ smooth yerel kompakt olduğundan $\tau(f)\nleq p$ olan $f\in L^X$ ve

$$k(z)=\begin{cases} e, & z\in K\subset X \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (e\in L)$$

formunda $k\in L^X$ vardır : $\chi_K$ smooth kompakt ve $x_p\in f\leq k$ dır.

$\varphi$ smooth açık olduğundan $\tau^*(\varphi(f))\geq\tau(f)$ ve $\tau(f)\nleq p$ olduğundan $\tau^*(\varphi(f))\nleq p$ olur.

$$\varphi(k)(u)=\begin{cases} e\ , & u\in\varphi(K)\subset Y \\ 0\ , & \text{diğer} \end{cases} \quad (e\in L)\ \text{dir.}$$

$\chi_K$, $(X,\tau)$' da smooth kompakt ve $\varphi$ smooth sürekli olduğundan $\varphi(\chi_K)=\chi_{\varphi(k)}$ $(Y,\tau^*)$' da smooth kompakt ve $y_p\in\varphi(f)\leq\varphi(k)$ sağlanır.

Böylece, $(Y,\tau^*)$ smooth yerel kompakt olur.

Teorem 3.3.5: $(X,\tau)$ smooth L-ftu, $Y\subset X$ ve $\mathcal{T}(\chi_Y)=1$ olsun.

$(X,\tau)$ smooth yerel kompakt ise $(Y,\tau_Y)$ smooth alt uzayı smooth yerel kompakttır.

İspat: $p\in Pr(L)$ ve $y\in Y\subset X$ alalım.

$(X,\tau)$ smooth yerel kompakt olduğundan $\tau(f)\nleq p$ olan $f\in L^X$ ve

$$k(z)=\begin{cases} e, & z\in K\subset X \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (e\in L)$$

formunda $k\in L^X$ vardır : $\chi_K$ smooth kompakt ve $y_p\in f\leq k$ dır.

$$f_Y=f|_Y \text{ ve } k_Y(z)=\begin{cases} e, & z\in K\cap Y \\ 0, & z\in Y-K \end{cases} \quad (e\in L)\ \text{olarak alalım.}$$

O halde, $y_p\in f_Y\leq k_Y$ ve $\tau_Y(f_Y)\nleq p$ olur.

Gerçekten,

$\tau(f)\nleq p$ olduğundan $\tau_Y(f_Y)=\vee\{\tau(g):g\in L^X \text{ ve } g|_Y=f_Y\}\nleq p$ olur.

$\chi_K$, $(X,\tau)$' da smooth kompakt ve $\mathcal{T}(\chi_Y) = 1$ olduğundan Önerme 3.1.13' den $\chi_K \wedge \chi_Y = \chi_{K\cap Y}$, $(X,\tau)$' da smooth kompakttır. O halde, $\chi_{K\cap Y}$ $(Y,\tau_Y)$' de smooth kompakttır.

Böylece, $(Y,\tau_Y)$ smooth yerel kompakt olur.

# BÖLÜM 4. SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA PARAKOMPAKTLIK

## 4.1. Smooth Parakompaktlık

Tanım 4.1.1: $(X,\tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun. $(f_i)_{i\in I}$ L-fuzzy kümeler ailesine g' de smooth yerel sonlu denir $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan $\forall x \in X$ için $\exists\ r \in L^X$, $I_0 \subset I$ ve $I_0$ sonlu vardır : $\tau(r) \not\leq p$, $r(x) \not\leq p$ ve $\forall i \in I \setminus I_0$ için $f_i(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ ($\forall z \in X$). [19]

g = X olması durumunda "g' de yerel sonludur" yerine sadece "yerel sonludur" kullanılır.

$\tau$ crisp ise, yani $\tau : L^X \to \{0, 1\}$ ise bu tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.
$(f_i)_{i\in I}$ L-fuzzy kümeler ailesi g' de (smooth) yerel sonludur $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan $\forall x \in X$ için $\exists\ r \in L^X$, $I_0 \subset I$ ve $I_0$ sonlu vardır : $\tau(r) = 1$, $r(x) \not\leq p$ ve $\forall i \in I \setminus I_0$ için $f_i(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ ($\forall z \in X$).
Böylece, $\tau$' nun crisp olması durumunda smooth yerel sonluluk Kudri' nin [12] tanımladığı yerel sonluluk ile çakışır.
Smooth yerel sonluluk L-fuzzy topolojik uzaylarda [12] de verilen yerel sonluluğun smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirilmesidir.

Tanım 4.1.2: $(X,\tau)$ bir L-ftu ve $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_j\}_{j\in J}$ L-fuzzy kümeler ailesi olsun. $\{f_i\}_{i\in I}$ ailesine $\{g_j\}_{j\in J}$ ailesinin bir inceltilmişidir denir $:\Leftrightarrow$ $\forall i \in I$ için $\exists j \in J : f_i \leq g_j$' dir. [12]

Tanım 4.1.3: $(X,\tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun. g' ye smooth parakompakttır denir $:\Leftrightarrow \forall p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x)\geq p', \forall x \in X)$ olan her $\mathcal{A} := \{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{B} := \{g_j : \tau(g_j) \not\leq p\}_{j\in J} \subseteq L^X$ ailesi vardır.

(i) $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\mathcal{B}$ ailesi g' de smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$ $(g(x)\geq p', \forall x \in X)$ dir. [19]

g yerine X uzayını alırsak $(X,\tau)$ smooth L-fuzzy topolojik uzayına smooth parakompakttır denir.

$\tau$ crisp ise, yani $\tau : L^X \to \{0,1\}$ ise bu tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.

g L-fuzzy kümesine (smooth) parakompakt denir $:\Leftrightarrow \forall p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x)\geq p', \forall x\in X)$ olan her $\mathcal{A} := \{f_i : \tau(f_i) = 1\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi için bir $\mathcal{B} := \{g_j : \tau(g_j) = 1\}_{j\in J} \subseteq L^X$ ailesi vardır:

(i) $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\mathcal{B}$ ailesi g' de (smooth) yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$ $(g(x)\geq p', \forall x \in X)$ dir.

Böylece, $\tau$ ' nun crisp olması durumunda smooth parakompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylarda Kudri' nin [12] de tanımladığı parakompaktlık ile çakışır. Dolayısıyla smooth parakompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki parakompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirmesi olur.

$L = I = [0,1]$ ise X uzayı için verilen tanım aşağıdaki şekildedir.

$(X,\tau)$ smooth I-ftu smooth parakompakttır : $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) > \alpha$ $(\forall x\in X)$ olan her $\mathcal{A} := \{f_i : \tau(f_i) > \alpha\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi için bir $\mathcal{B} := \{g_j : \tau(g_j) > \alpha\}_{j\in J} \subseteq L^X$ ailesi vardır:

(i) $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\mathcal{B}$ ailesi X' de smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p \;\; (\forall x \in X)$ dir.

Bu durumda $\tau$ crisp ise, yani $\tau : I^X \to \{0,1\}$ ise, smooth I-fuzzy topolojik uzaylardaki parakompaktlık tanımı fuzzy parakompaktlık tanımı ile aynı olur. [15]

Aşağıdaki teorem smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda tanımlanan smooth parakompaktlığın klasik topolojik uzaylardaki parakompaktlığın bir iyi genelleştirmesi olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.4: (X, T) klasik topolojik uzayı parakompakttır $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ smooth L-ftu smooth parakompakttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in Pr(L)$ ve $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p)$ olan $\mathcal{A} := \{f_i : \omega_T(f_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall i \in I$ için $\omega_T(f_i) \not\leq p$ olduğundan $f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \in T$' dir.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p$ olduğundan $\forall x \in X$ için $x \in (\bigvee_{i\in I} f_i)^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$.

Lemma 2.3.14' den $\forall x \in X$ için $x \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$

$\Rightarrow \mathcal{B} = (f_i^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}))_{i\in I}$ ailesi X' in bir açık örtümü olur.

(X, T) klasik topolojik uzayı parakompakt olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin X' i örten, açık, yerel sonlu bir $\delta$ inceltilmişi vardır.

$\delta$, $\mathcal{B}$'nın bir inceltilmişi olduğundan $\forall C \in \delta$ için $\exists f_{iC} \in \mathcal{A}$:

$C \subseteq f_{iC}^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\})$ olur.

$\psi := (\chi_C \wedge f_{iC})_{C\in\delta}$ ailesini alalım.

Her açık kümenin karakteristik fonksiyonu I-scott sürekli olduğundan $\omega_T(\chi_C) = 1 \not\leq p$ ve $\forall i \in I$ için $\omega_T(f_{iC}) \not\leq p$' dir.

$\omega_T(\chi_C \wedge f_{iC}) \geq \omega_T(\chi_C) \wedge \omega_T(f_{iC}) \not\leq p \Rightarrow \omega_T(\chi_C \wedge f_{iC}) \not\leq p$.

O halde, $\psi := (\chi_C \wedge f_{iC})_{C\in\delta}$ ailesi $(X, \omega_T)$' de $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir ve $(\bigvee_{h\in\psi} h)(x) \not\leq p \;\; (\forall x \in X)$ sağlanır.

Gerçekten, $\forall\, \chi_C \wedge f_{iC} \in \psi$ ve $f_{iC} \in \mathcal{A}$ için $\chi_C \wedge f_{iC} \leq f_{iC}$ olduğundan $\psi$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

Ayrıca, $\delta$ X' in açık bir örtümü olduğundan $\forall x \in X$ için $\exists C^* \in \delta : x \in C^*$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $\chi_{C^*}(x) = 1 \not\leq p$

$\delta$, $\mathcal{B}$'nın bir inceltilmişi olduğundan $x \in C^* \subseteq f_{iC^*}^{-1}(\{t \in L : t \not\leq p\}) \Rightarrow f_{iC^*}(x) \not\leq p$

$\Rightarrow (\chi_{C^*} \wedge f_{iC^*})(x) \not\leq p \Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{h\in\psi} h)(x) \not\leq p$ elde edilir.

Şimdi de $\psi$' nin smooth yerel sonlu olduğunu gösterelim.

$x \in X$ alalım.

$\delta$ yerel sonlu olduğundan sonlu sayıdakiler hariç diğer tüm $C \in \delta$ için $U \cap C = \varnothing$ olacak şekilde x in bir U komşuluğu vardır.

$\forall x \in X$ ve $p \in Pr(L)$ için $r := \chi_U \in L^X$ alırsak $\omega_T(r) \not\leq p$, $r(x) \not\leq p$ ve sonlu sayıdakiler hariç diğer tüm $h \in \psi$ için $h(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ $(\forall z \in X)$ sağlanır.

Çünkü, aksi taktirde $h(z) \neq 0 \Rightarrow h(z) = \chi_C(z) \wedge f_{iC}(z) \neq 0 \Rightarrow z \in C$ olur.

$r(z) \neq 0 \Rightarrow r(z) = \chi_U(z) \neq 0 \Rightarrow z \in U$ dur.

Böylece, $z \in U \cap C$ olur ki bu $U \cap C = \varnothing$ olması ile çelişir.

Sonuç olarak $(X, \omega_T)$ smooth L-ftu smooth parakompakttır.

$(\Leftarrow)$ $(X, \omega_T)$ smooth L-ftu smooth parakompakt olsun.

$\mathcal{A} := (A_i)_{i\in I}$ ailesi (X, T)' nin açık bir örtümü olsun.

$\mathcal{B} := (\chi_{A_i})_{i\in I}$ ailesi $(X, \omega_T)$' de $(\bigvee_{i\in I} \chi_{A_i})(x) \not\leq p \;(\forall x \in X)$ özelliğini sağlar.

Her açık kümenin karakteristik fonksiyonu 1-scott sürekli olduğundan $\forall i \in I$ için $\omega_T(\chi_{A_i}) = 1 \not\leq p$' dir.

$(X, \omega_T)$ smooth parakompakt olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\beta := \{f : \omega_T(f) \not\leq p\} \subseteq L^X$ ailesi vardır.

(i) $\beta$ ailesi $\mathcal{B}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\beta$ smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{f\in\beta} f)(x) \nleq p \ (\forall x \in X)$

$\mathcal{A}^* := (f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}))_{f\in\beta}$ olarak tanımlayalım.

$\mathcal{A}^*$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin yerel sonlu bir inceltilmişidir ve X' in bir açık örtümüdür.

Gerçekten, $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{f\in\beta} f)(x) \nleq p \Rightarrow \forall x \in X$ için $\exists f \in \beta : f(x) \nleq p$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $x \in f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \Rightarrow X = \bigcup_{f\in\beta} f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\})$

$\Rightarrow \mathcal{A}^*$, X' in bir örtümüdür.

$p \in Pr(L)$ için $\omega_T(f) \nleq p$ olduğundan $f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \in T$ olur.

Böylece, $\mathcal{A}^*$ X' in açık bir örtümüdür.

$\beta$ ailesi $\mathcal{B}$ ailesinin bir inceltilmişi olduğundan $\forall f\in \beta$ için $\exists \chi_{A_i} \in \mathcal{B} : f \leq \chi_{A_i}$ olur.

$\Rightarrow f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \subset \chi_{A_i}^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) = A_i$

$\Rightarrow \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

Şimdi $\mathcal{A}^*$ ailesinin yerel sonlu olduğunu gösterelim.

$\beta$, $(X, \omega_T)$' de smooth yerel sonlu olduğundan $\exists\ r \in L^X : \omega_T(r) \nleq p$, $r(x) \nleq p$ ve sonlu sayıdakiler hariç diğer tüm $f \in \beta$ için $f(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ $(\forall z \in X)$ dır.

$U := r^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\})$ olarak alalım.

$\omega_T(r) \nleq p$ olduğundan $U = r^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \in T$ ve $r(x) \nleq p$ olduğundan $x \in U$ olur.

$\Rightarrow U \in \mathcal{V}_T(x)$ olur ve sonlu sayıdakiler hariç diğer tüm $f \in \beta$ için

$f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \cap U = \varnothing$' dir.

Çünkü, aksi durumda $\exists y \in f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\}) \cap U : y \in f^{-1}(\{t\in L : t \nleq p\})$ ve $y \in U$

$\Rightarrow f(y) \nleq p$ ve $r(y) \nleq p$ olur.

$\Rightarrow f(y) \neq 0$ ve $r(y) \neq 0$ olur ki bu $\beta$' nın smooth yerel sonlu olmasıyla çelişir.

$\Rightarrow \mathcal{A}^*$ ailesi yerel sonludur.

Sonuç olarak (X, T) klasik topolojik uzayı parakompakttır.

Örnek 4.1.4: $X = \{1, 2, \ldots, 50\}$ olsun. $f_i \in I^X$ ve $i \in X$ olmak üzere $\forall j \in X$ için

$f_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ olarak tanımlansın.

X üzerindeki smooth topoloji ise,

$\tau : I^X \to I$

$$f \to \tau(f) := \begin{cases} 1 & ; f = 0 \text{ veya } f = 1 \\ 0{,}6 & ; f = \vee f_i, i \in X \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad \text{olarak tanımlansın.}$$

Bu durumda $(X, \tau)$ smooth topolojik uzayı smooth parakompakttır.

## 4.2. Bazı Özellikler

Teorem 4.2.1: Bir smooth L-fuzzy topolojik uzaydaki her smooth kompakt L-fuzzy kümesi smooth parakompakttır.

İspat: Tanımlar karşılaştırıldığında açıkça görülür.

Teorem 4.2.2: $(X, \tau)$ smooth L-ftu ve $g \in L^X$ smooth parakompakt olsun. $\mathcal{F}(h) = 1$ olan her $h \in L^X$ için $g \wedge h$ smooth parakompakttır.

İspat: g smooth parakompakt ve $\mathcal{F}(h) = 1$ olsun.

$p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in I} f_i)(x) \not\leq p$ $((g \wedge h)(x) \geq p', \forall x \in X)$ olan $\mathcal{A} := \{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i \in I} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\beta := (f_i)_{i \in I} \cup \{h'\}$ olarak tanımlayalım.

$\forall i \in I$ için $\tau(f_i) \not\leq p$ ve $\tau(h') = \mathcal{F}(h) = 1$ olduğundan her $k \in \beta$ için $\tau(k) \not\leq p$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ sağlanır.

Gerçekten, $x \in X$ ve $g(x) \geq p'$ olsun.

(i). $h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p'$

$$\Rightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i)(x) \vee h'(x) \not\leq p \quad ((\bigvee_{i \in I} f_i)(x) \not\leq p \text{ olduğundan})$$

$$\Rightarrow (\bigvee_{i\in I} f_i \vee h')(x) \not\leq p$$

$$\Rightarrow (\bigvee_{k\in\beta} k)(x) \not\leq p \text{ dir.}$$

(ii). $h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p$

$$\Rightarrow (\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \vee h'(x) \not\leq p$$

$$\Rightarrow (\bigvee_{i\in I} f_i \vee h')(x) \not\leq p$$

$$\Rightarrow (\bigvee_{k\in\beta} k)(x) \not\leq p \quad \text{elde edilir.}$$

g smooth parakompakt olduğundan aşağıdaki özelliklere sahip

$\delta = \{k \in L^X : \tau(k) \not\leq p\} \subseteq L^X$ ailesi vardır:

(i) $\delta$ ailesi $\beta$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\delta$, g' de smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{k\in\delta} k)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ dir.

$\delta^* := \{k \in \delta : \exists\, f_i \in \mathcal{A}$ ve $k \leq f_i\}$ olarak alalım.

$\delta^*$, $\mathcal{A}$' nin bir inceltilmişidir, $g \wedge h$' de smooth yerel sonludur ve

$(\bigvee_{k\in\delta^*} k)(x) \not\leq p$ $((g\wedge h)(x) \geq p')$ olur.

Aksi taktirde, $\exists\, x \in X : (g\wedge h)(x) \geq p'$ ve $(\bigvee_{k\in\delta^*} k)(x) \leq p$ olur.

Fakat $g(x) \geq p'$ olan $\forall\, x \in X$ için $(\bigvee_{k\in\delta} k)(x) \not\leq p$ olduğundan $\exists\, k_1 \in \delta : k_1(x) \not\leq p$.

$\delta$, $\beta$' nın bir inceltilmişi olduğundan $\exists\, k_2 \in \beta : k_1 \leq k_2$ ve $(\bigvee_{k\in\delta^*} k)(x) \leq p$

olduğundan $k_2 \notin \delta^*$ dolayısıyla $k_2 \notin \mathcal{A}$ ve $k_2 = h'$ olur.

Böylece $p \not\geq k_1(x) \leq k_2(x) = h'(x) \leq p$ olur. Bu bir çelişkidir.

O halde $\forall\, x \in X$ için $(\bigvee_{k\in\delta^*} k)(x) \not\leq p$ olur.

Şimdi de $\delta^*$' ın $g \wedge h$' de smooth yerel sonlu olduğunu gösterelim.

$(g\wedge h)(x) \geq p'$ olan $x \in X$ alalım.

Buradan $g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ olur.

$\delta$, g' de smooth yerel sonlu olduğundan $\exists r \in L^X : \tau(r) \not\leq p$, $r(x) \not\leq p$ ve sonlu sayıdakiler hariç diğer tüm $k \in \delta^*$ için $k(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ ($\forall z \in X$) sağlanır.

$\delta$, $\beta$' nın bir inceltilmişi olduğundan $\delta^*$, $g \wedge h$' de smooth yerel sonlu olur.

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth parakompakttır.

Sonuç 4.2.3: $(X, \tau)$ smooth L-ftu olsun. $g \in L^X$ smooth parakompakt ise $\mathcal{T}(h) = 1$ ve $h \leq g$ olan her $h \in L^X$ smooth parakompakttır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Lemma 4.2.4: $(X, \tau)$ smooth parakompakt smooth L-ftu ve $p \in Pr(L)$ olsun.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p$ olan her $\mathcal{A} = \{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi için aşağıdaki özelliğini sağlayan bir $\mathcal{B} = \{g_i : \tau(g_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi vardır.

(i) $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\mathcal{B}$ smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{i\in I} g_i)(x) \not\leq p$ ($\forall x \in X$) dir.

İspat: $(X, \tau)$ smooth parakompakt smooth L-fuzzy topolojik uzayında $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) \not\leq p$ olan $\mathcal{A} = \{f_i : \tau(f_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesi verilsin.

Smooth parakompaktlıktan $\mathcal{A}$ ailesinin $\exists\ \delta = \{h_j : \tau(h_j) \not\leq p\}_{j\in J}$ smooth yerel sonlu inceltilmişi vardır ve $(\bigvee_{j\in J} h_j)(x) \not\leq p$ ($\forall x \in X$) sağlanır.

$\delta$, $\mathcal{A}$' nın bir inceltilmişi olduğundan $\forall j \in J$ için $\exists i \in I : h_j \leq f_i$ olur.

Buradan bir $\varphi : J \to I$, $\varphi(j) := i$ dönüşümü tanımlanabilir.

Burada, $j \in J$ için $h_j \leq f_{\varphi(j)}$' dir.

$\forall i \in I$ için $g_i := \begin{cases} \vee h_i, & \varphi(j) = i \\ 0, & \varphi(j) \neq i \end{cases}$ olarak tanımlarsak $\mathcal{B} = (g_i)_{i\in I}$ ailesi istenen özellikleri sağlar.

$\varphi$' nin tanımından $\forall i \in I$ için $\tau(g_i) = \tau(\bigvee_{\varphi(j)=i} h_i) \geq \bigwedge_{\varphi(j)=i} \tau(h_i) \not\leq p$

$\Rightarrow\ \forall i \in I$ için $\tau(g_i) \nleq p$ olur.

$\forall i \in I$ için $g_i \leq f_i$ ve $(\bigvee_{i\in I} g_i)(x) \nleq p\ (\forall x \in X)$ sağlanır.

Şimdi $\mathcal{B}$' nın smooth yerel sonlu olduğunu gösterelim.

$\delta$ smooth yerel sonlu olduğundan $\exists r \in L^X$ ve $\exists J_o \subset J$ sonlu : $\tau(r) \nleq p$, $r(x) \nleq p$ ve

$\forall j \in J \setminus J_o$ için $h_j(z) = 0$ veya $r(z) = 0\ (\forall z \in X)$ olur.

$\Rightarrow \forall j \in J_o$ için $h_j(z) \neq 0$ ve $r(z) \neq 0$ olur.

Böylece $j \in J_o$ için $\varphi(j) = i$ olduğundan $g_i(z) \neq 0$ ve $r(z) \neq 0$ olur.

Sonuç olarak $\mathcal{B}$ smooth yerel sonludur.

Tanım 4.2.5: $(X, \tau)$ smooth L-ftu smooth regülerdir :$\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ ve $\forall x \in X$ için $\exists y \in X$ : $f(y) \geq p'$, $f(x) = 0$ ve $\mathcal{T}(f) = 1$ olan her $f \in L^X$ için $\exists u, v \in L^X$ :

$(\tau(u) \nleq p,\ \tau(v) \nleq p)$, $(u(x) \nleq p)$, ($f(y) \geq p'$ olan $\forall y \in X$ için $v(y) \nleq p$) ve

($\forall z \in X$ için $u(z) = 0$ veya $v(z) = 0$)' dır. [19]

Teorem 4.2.6: Her smooth parakompakt ve smooth Hausdorff uzay smooth regülerdir.

İspat: $(X, \tau)$ smooth parakompakt ve smooth Hausdorff olsun.

$p \in Pr(L)$, $x \in X$, $f(x) = 0$, $\mathcal{T}(f) = 1$ ve $\exists y \in X$ için $f(y) \geq p'$ olan $f \in L^X$ alalım.

$F := \{t \in X\ :\ f(t) \geq p'\}$ olarak tanımlarsak $y \in F$ olduğundan $F \neq \varnothing$ ve $f(x) = 0$ olduğundan $x \notin F$ olur.

$(X, \tau)$ smooth Hausdorff olduğundan $\forall y \in F$ için $\exists f_y,\ g_y \in L^X$ :

$(\tau(f_y) \nleq p, \tau(g_y) \nleq p)$, $(f_y(x) \nleq p,\ g_y(x) \nleq p)$ ve ($\forall z \in X$ için $f_y(z) = 0$ veya $g_y(z) = 0$) olur.

$\mathcal{A} = (g_y)_{y\in F} \cup \{f'\}$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda $\forall z \in X$ için $(\bigvee_{h\in A} h)(z) \nleq p$ sağlanır.

Gerçekten,

$z \in F \Rightarrow g_z(z) \nleq p \Rightarrow (\bigvee_{y\in F} g_y)(z) \vee f'(z) \nleq p \Rightarrow (\bigvee_{y\in F} g_y \vee f')(z) \nleq p$

$\Rightarrow (\bigvee_{h\in A} h)(z) \not\leq p$ olur.

$z \notin F \Rightarrow f(z) \not\geq p' \Rightarrow f'(z) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{y\in F} g_y)(z) \vee f'(z) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{h\in A} h)(z) \not\leq p$

elde edilir.

Ayrıca $\tau(g_y \vee f') \geq \tau(g_y) \wedge \tau(f') = \tau(g_y) \not\leq p \Rightarrow \tau(g_y \vee f') \not\leq p$ dir.

$(X,\tau)$ smooth parakompakt olduğundan Lemma 4.2.4' den aşağıdaki özelliklere sahip bir $\beta = (k_y)_{y\in F} \vee \{k_0\}$ ailesi vardır.

(i) $\forall k \in \beta$ için $\tau(k) \not\leq p$ dir.

(ii) $\beta$ smooth yerel sonludur.

(iii) $\forall y \in F$ için $k_y \leq g_y$ ve $k_0 \leq f'$ dir.

(iv) $(\bigvee_{y\in F} k_y \vee k_0)(z) \not\leq p$ $(\forall z \in X)$ dir.

$\beta$ smooth yerel sonlu olduğundan $\forall x \in X$ için $\exists r \in L^X$ ve $\exists \beta_0 \subset \beta$ sonlu :

$\tau(r) \not\leq p$, $r(x) \not\leq p$ ve $\forall b \in \beta \setminus \beta_0$ için $b(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ $(\forall z \in X)$ elde edilir.

Buradan $\exists r \in L^X$ ve $\exists F_0 \subset F$ sonlu alt kümesi için $\tau(r) \not\leq p$, $r(x) \not\leq p$ ve

$\forall y \in F \setminus F_0$ için $k_y(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ $(\forall z \in X)$ elde edilir.

$\forall y \in F$ için $k_y \leq g_y$ ve $\forall z \in X$ için $f_y(z) = 0$ veya $g_y(z) = 0$ olduğundan

$\forall y \in F$ ve $\forall z \in X$ için $f_y(z) = 0$ veya $k_y(z) = 0$ olur.

$u := r \wedge (\bigwedge_{y\in F_0} f_y)$ ve $v := \bigvee_{y\in F} k_y$ olarak tanımlayalım.

Buradan $\tau(u) \not\leq p$, $\tau(v) \not\leq p$ ve $u(x) \not\leq p$ elde edilir.

Gerçekten, $\tau(u) = \tau(r \wedge (\bigwedge_{y\in F_0} f_y)) \geq \tau(r) \wedge \bigwedge_{y\in F_0} \tau(f_y) \not\leq p \Rightarrow \tau(u) \not\leq p$.

$\tau(v) = \tau(\bigvee_{y\in F} k_y) \geq \bigwedge_{y\in F} \tau(k_y) \not\leq p \Rightarrow \tau(v) \not\leq p$ dir.

$u(x) = r(x) \wedge (\bigwedge_{y\in F_0} f_y)(x) \not\leq p$ (p asal olduğundan) dir.

Ayrıca $f(y) \geq p'$ olan $\forall y \in X$ için $v(y) \not\leq p$ ve $\forall z \in X$ için $u(z) = 0$ veya $v(z) = 0$ olur.

Gerçekten, $f(y) \geq p'$ olan $y \in X$ alırsak buradan $y \in F$ olur ve

$v(y) = (\bigvee_{y\in F} k_y)(y) \not\leq p$ elde edilir.

Son olarak $\forall z \in X$ için $u(z) = 0$ veya $v(z) = 0$ olduğunu gösterelim.

$z \in X$ için

(a) $u(z) \neq 0$ alalım.

$u(z) \neq 0 \Rightarrow r(x) \wedge (\bigwedge_{y\in F_0} f_y)(x) \neq 0 \Rightarrow r(x) \neq 0$ ve $\forall y \in F_0$ için $f_y(z) \neq 0$ olur.

$r(x) \neq 0 \Rightarrow \forall y \in F \setminus F_0$ için $k_y(z) = 0$ dır.

$\forall y \in F_0$ için $f_y(z) \neq 0 \Rightarrow \forall y \in F_0$ için $k_y(z) = 0$ dır.

Buradan $v(z) = (\bigvee_{y\in F} k_y)(z) = 0$ olur.

(b) $v(z) \neq 0$ alalım.

$v(z) \neq 0 \Rightarrow (\bigvee_{y\in F} k_y)(z) \neq 0 \Rightarrow \exists\ y \in F$: $k_y(z) \neq 0 \Rightarrow f_y(z) = 0$ elde edilir.

$y \in F_0$ için $u(z) = r(z) \wedge (\bigwedge_{y\in F_0} f_y)(z) = 0$ ve $y \in F / F_0$ için $r(z) = 0 \Rightarrow u(z) = 0$ olur.

Sonuç olarak $(X, \tau)$ smooth regülerdir.

Tanım 4.2.7: $(X, \tau)$ smooth L-ftu smooth normaldir: $\Leftrightarrow \forall p \in Pr(L)$ ve $x, y \in X$ için $f(x) \geq p'$, $g(y) \geq p'$ ve $\forall z \in X$ için $f(z) = 0$ veya $g(z) = 0$ ve $\mathcal{T}(f) = 1$, $\mathcal{T}(g) = 1$ olan her $f, g \in L^X$ için $\exists u, v \in L^X$: $(\tau(u) \not\leq p,\ \tau(v) \not\leq p)$, $(f(z) \geq p'$ için $u(z) \not\leq p)$, $(g(z) \geq p'$ için $v(z) \not\leq p)$ ve $(\forall z \in X$ için $u(z) = 0$ veya $v(z) = 0)$' dır. [19 ]

Teorem 4.2.8: Her smooth parakompakt ve smooth Hausdorff uzay smooth normaldir.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.9: $(X, \tau)$ ve $(Y, \tau^*)$ iki smooth L-ftu ve $\varphi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ dönüşümü smooth sürekli, smooth açık ve $\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olsun. $g \in L^X$ $(X, \tau)$' da smooth parakompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ de $(Y, \tau^*)$' da smooth parakompakttır.

İspat: $p \in Pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in I} f_i)(y) \not\leq p$ $(\varphi(g)(y) \geq p')$ olan $\mathcal{A} = \{f_i : \tau^*(f_i) \not\leq p\}_{i\in I} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

$\varphi$ smooth sürekli olduğundan $\forall i \in I$ için $\tau(\varphi^{-1}(f_i)) \geq \tau^*(f_i) \nleq p$

$\Rightarrow \forall i \in I$ için $\tau(\varphi^{-1}(f_i)) \nleq p$ olur.

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $\varphi(g)(\varphi(x)) \geq p'$ olduğundan

$(\bigvee_{i\in I} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in I} \varphi^{-1}(f_i))(x) \nleq p$ sağlanır.

Buradan $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in I} \varphi^{-1}(f_i))(x) \nleq p$ özelliğini sağlayan bir

$\beta = \{\varphi^{-1}(f_i) : \tau(\varphi^{-1}(f_i)) \nleq p\}_{i\in I} \subseteq L^X$ ailesini elde ederiz.

$g$, $(X, \tau)$' da smooth parakompakt olduğundan aşağıdaki özelliklere sahip bir

$\delta = \{h_j : \tau(h_j) \nleq p\}_{j\in J} \subseteq L^X$ ailesi vardır.

(i) $\delta$ ailesi $\beta$ ailesinin bir inceltilmişidir.

(ii) $\delta$, $g$' de smooth yerel sonludur.

(iii) $(\bigvee_{j\in J} h_j)(x) \nleq p$ ($g(x) \geq p'$, $\forall x \in X$) dir.

$\varphi$ smooth açık olduğundan $\forall j \in J$ için $\tau^*(\varphi(h_j)) \geq \tau(h_j) \nleq p$

$\Rightarrow \tau^*(\varphi(h_j)) \nleq p$ olur.

Böylece $\mathcal{A}^* = \{\varphi(h_j) : \tau^*(\varphi(h_j)) \nleq p\} \subseteq L^Y$ ailesini elde ederiz.

$\mathcal{A}^*$ ailesi $\mathcal{A}$' nın bir inceltilmişidir, $\varphi(g)$' de smooth yerel sonludur ve

$(\bigvee_{j\in J} \varphi(h_j))(y) \nleq p$ ($\varphi(g)(y) \geq p'$, $\forall y \in Y$) sağlanır.

$\delta$, $\beta$ ' nin bir inceltilmişi olduğundan $\forall\, h_j \in \delta$ için $\exists\, \varphi^{-1}(f_i) \in \beta : h_j \leq \varphi^{-1}(f_i)$

$\Rightarrow \varphi(h_j) \leq \varphi(\varphi^{-1}(f_i)) \leq f_i \Rightarrow \mathcal{A}^*$ ailesi $\mathcal{A}$' nın bir inceltilmişidir.

$\varphi(g)(y) \geq p' \Rightarrow \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p'$ olur. Buradan, p asal ve $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olduğundan

$\exists\, x \in X : g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ olur.

$(\bigvee_{j\in J} \varphi(h_j))(y) = (\bigvee_{j\in J} \varphi(h_j))(\varphi(x)) = (\bigvee_{j\in J} \varphi^{-1}(\varphi(h_j)))(x) \geq (\bigvee_{j\in J} h_j)(x) \nleq p$

$\Rightarrow (\bigvee_{j\in J} \varphi(h_j))(y) \nleq p$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{A}^*$ ' ın $\varphi(g)$' de smooth yerel sonlu olduğunu gösterelim.

$\delta$, g' de smooth yerel sonlu olduğundan $g(x) \geq p'$ olan $\forall\ x \in X$ için $\exists\, r \in L^X$ ve $F \subset J$ sonlu : $\tau(r) \nleq p$, $r(x) \nleq p$ ve $\forall j \in J / F$ için $h_j(z) = 0$ veya $r(z) = 0$ $(\forall\ z \in X)$ olur.

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olan $y \in Y$ alalım.

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X : g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$.

$g(x) = \varphi(g)(\varphi(x)) \geq p'$ olduğundan $\exists\, r \in L^X$ ve $F \subset J$ sonlu :

$\tau^*(\varphi(r)) \geq \tau(r) \nleq p \Rightarrow \tau^*(\varphi(r)) \nleq p$ ve $r(x) = \varphi(r)(\varphi(x)) \nleq p$ olur.

Ayrıca, $\forall j \in J / F$ için $\varphi(h_j)(\varphi(z)) = h_j(z) = 0$ veya $\varphi(r)(\varphi(z)) = r(z) = 0$ $(\forall\ z \in X)$ olur.

Sonuç olarak $\varphi(g)$ smooth parakompakttır.

## KAYNAKLAR


1. AYGÜN, H., 1997. Study of Covering Properties in Fuzzy Topology. PhD Thesis, City University, London.

2. AYGÜN, H., WARNER, M.W. and KUDRİ, S.R.T, 1997. On Smooth L-Fuzzy Topological Spaces. The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.5, No.2.

3. AYGÜN, H. and ABBAS, S.E, 2004. On Characterizations of Some Covering Properties in L-Fuzzy Topological Spaces in Sostak's Sense. Information Sciences , 165, 221-233.

4. BURAL, A.A., 2003. Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık. Yüksek Lisans Tezi, , KOÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.

5. CHANG, C.L., 1968. Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24, 182-190.

6. CHATTOPADHYAY, K.C., HAZRA, R.N. and SAMANTA, S.K., 1992. Gradation of Opennes: Fuzzy Topology. Fuzzy Sets and Systems, 49, 237-242.

7. DEMİRCİ, M., 1997. On Several Types of Compactness in Smooth Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems. 90, 83-88.

8. DONGSHENG, Z., 1987. The N-Compactness in L-Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 128, 64-79.

9. GIERZ, G., et al, 1980. A Compendium of Continuous Lattices. Springer – Verlag, Germany.

10. KUDRİ, S.R.T., 1994. Compactness in L-Fuzzy Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 67, 329-336.

11. KUDRİ, S.R.T. and WARNER, M.W., 1994. L-Fuzzy Local Compactness. Fuzzy Sets and Systems, 67, 337-345.

12. KUDRİ, S.R.T., 1995. Paracompactness in L-Fuzzy Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 70, 119-123.

13. LOWEN, R., 1976. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56, 621-633.

14. LOWEN, R., 1978. A Comparison of Different Compactness Notions in Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 64, 446-454.

15. MALGHAN, S.R. and BENCHALLI S.S., 1981. On Fuzzy Topological Spaces. Glasnik Mathematicki, 16, 313-325.

16. PAOMING, P. and YINGMING, L., 1980. Fuzzy Topology. I.Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 76, 571-599.

17. RAMADAN, A.A., ABBAS, S.E., YONG CHAN KIM, 2001. Fuzzy Irresolute Mappings in Smooth Fuzzy Topological Spaces. J.Fuzzy Math. 9 (4) 865-877.

18. RAMADAN, A.A., 1992. Smooth Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 48, 371-375.

19. RAMADAN, A.A. and ABBAS, S.E., 2001. On Smooth Paracompactness. The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.9, No.2, Los Angeles.

20. SOSTAK, A.P., 1985. On a Fuzzy Topological Structure . Suppl. Rend. Circ. Math. Palermo Ser. II, 11, 89-103.

21. SOSTAK, A.P., 1989. Two Decades of Fuzzy Topology; Basic Ideas, Notations and Results. Russion Math. Surveys, 44(6), 125-186.

22. SOSTAK, A.P., 1989. On Some Modifications of fuzzy Topology. Mat. Vesnik, 41, 51-64.

23. WARNER, M.W., 1990. Fuzzy Topology with Respect to Continuous Lattices. Fuzzy Sets and Systems, 35, 85-91.

24. WARNER, M.W. and McLEAN, R.G., 1993. On Compact Hausdorff L-Fuzzy Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 56, 103-110.

25. YINGMING, L. and MAOKANG, L., 1997. Fuzzy Topology. World Scientific, USA.

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Ordu' da doğdu. İlkokulu Ordu Mehmet Akif Ersoy İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Ordu Hamdullah Suphi Tanrıöver Ortaokulu'nda ve lise eğitimini de Ordu Fatih Lisesi' nde tamamladı. 1999 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 2003 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) Programına başladı. Aralık 2004' de Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalına araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevi sürdürmektedir.