

172587

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN TERS
KATSAYI PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL ANALİZİ ve
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ
Burhan PEKTAŞ

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Danışman : Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

OCAK 2006

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN TERS
KATSAYI PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL ANALİZİ ve
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

Burhan PEKTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Ocak 2006

Tezin Savunulduğu Tarih : 03 Şubat 2006

Tez Danışmanı

rof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

(.....)

Üye

Prof. Dr. Okay ÇELEBİ

(.....)

Üye

Prof. Dr. Bülent KARASÖZEN

(.....)

Üye

Prof. Dr. Arif DEMİR

(.....)

Üye

Doç. Dr. Serdal PAMUK

(.....)

OCAK 2006

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN TERS KATSAYI PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL ANALİZİ ve SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Burhan PEKTAŞ

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörü, Ters Problemler, Adi Diferansiyel Denklemler, Zayıf Çözüm, Ters Polinom Yöntemi, Hata Analizi.

Özet: Bu çalışmada bir boyutlu Sturm-Liouville operatörü ile verilen ters katsayı problemleri ele alınarak bu problemler için bir sınıflandırma yapılmış ve Ters Polinom Yöntemi adı verilen bir yöntemle uygulanarak yaklaşık çözümünün elde edilmesi incelenmiştir. Daha sonra bu çözümün ve yöntemin hata analizi yapılmıştır. Tezin son kısmında ise sözü edilen ters problemlerin yaklaşık çözümlerinin hesaplanmasında kullanılan Matlab Programları ek olarak verilmiştir.

**THE MATHEMATICAL ANALYSIS and NUMERICAL SOLUTION OF
INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS RELATED TO THE STURM-
LIOUVILLE OPERATOR**

Burhan PEKTAŞ

Keywords: Sturm-Liouville Operator, Inverse Problems, Ordinary Differential Equations, Weak Solution, Inverse Polynomial Method, Noise Analysis.

Abstract: In this study, inverse coefficient problems for the Sturm-Liouville operator are considered. A classification of the inverse problems and an inverse polynomial method for finding a quasi-solution are presented. An error analysis of the numerical approximate solution as well as the method are given. Finally, Matlab programs used for numerical solution to the considered problems are given in appendix.



ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Mühendislik ve fiziki bilimlerde ikinci mertebeden doğrusal adi diferansiyel denklemler için formüle edilmiş güncel birçok problem-örneğin ısı iletimi problemi, malzemenin malzemeye karışması problemi gibi- Sturm-Liouville¹ (SL) operatörü olarak bilinen

$$Au := -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x)$$

operatörüyle verilmekte veya ona indirgenebilmektedir (Gelfand and Levitan 1955), (Hochstedt 1973), (Hasanov and Shores 1997), (Hasanov 1997a, Hasanov 1997b).

Bu operatörün pozitif tanımlı ($(Au, u) \geq 0$) ve kendine eşlenik ($A = A^*$) olması onunla ifade edilen problemlerin zayıf çözümlerinin varlığı ve tekliği açısından önemli olmasıyla birlikte çözümün, operatörün yapısında bulunan $k(x)$ başkatsayı ve $q(x)$ çarpım katsayısı fonksiyonlarına göre sürekliliğinin analizi de güncel konular arasındadır.

Bu çalışmada (SL) operatörüyle verilen ters katsayı problemi ele alınarak ters polinom yöntemi adı verilen polinomyal yöntemle çözümün yaklaşık olarak elde edilmesi ve bu çözümün hatasının analizi yapılmıştır. Çalışmanın planı aşağıdaki gibidir.

Bölüm 1 giriş bölümü olarak düzenlenmiş ve bu kısımda problemin geçmişi ve bu konuda yapılan daha önceki çalışmalar hakkında bilgiler verilerek tezdeki yaklaşımla aralarındaki farklılıklara dikkat çekilmiştir.

2. Bölümde ele alınan ters problem tanımlanarak problemin özellikleri ortaya konulmuş buna bağlı olarak da problemin düzgün ve bozuk yapıları için daha önceden verilmiş bir sınıflandırma açıklanmıştır. Ayrıca gerekli olan tanımlar verilerek çeşitli önsel değerlendirmeler elde edilmiştir.

¹ Joseph Liouville (1809-1882) Fransız matematikçisi
Jacques Charles Sturm (1803-1855) Fransız Matematikçisi

3. Bölümde yaklaşık yöntemin uygulanmasında gerekli olan temel teorem ve lemmalar ifade edilerek yaklaşık çözümlerin bulunmasında kullanılan ters polinom yöntem her bir durum için ayrı ayrı açıklanmış ve örneklerle de desteklenmiştir.

4. Bölüm yapılan çalışmaların sayısal hata analizini içermektedir. Burada da her bir durum için yöntemin hatası detaylı olarak incelenerek sonuçlar tablolar halinde gösterilmiştir.

Tezin son kısmında edilen sonuçlar ve bunların ışığında yapılabilecek diğer çalışmaları ifade edilmiş Matlab programlarından oluşan kısım ise ek olarak verilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın geriden gelecek olan genç araştırmacılara ve bilim dünyasına faydalı olacağını umuyorum. Beni böyle bir konuda çalışmaya sevk eden ve bir araştırmacı olarak yetiştiren değerli hocam sayın Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu başta olmak üzere Kocaeli Üniversitesi Uygulamalı Matematik Bilimleri Araştırma Merkezi (UMBAM) ve Matematik Bölümünün diğer çok değerli hocalarına ve çalışma arkadaşlarım Arzu Erdem, Ali Demir, Salih Tatar ve Ebru Özbilge'ye çok teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmalarım sırasında manevi desteğini hep arkamda hissettiğim değerli eşim Meryem Pektaş ve yavrularımız Büşra ve Bahadır'a da buradan teşekkür etmek istiyorum.

Bu tez çalışmasını, beni ve kardeşlerimi binbir güçlkle büyüten sevgili annem Emine PEKTAŞ ve bu mutlu günlerimizi göremeden aramızdan ayrılan sevgili babam Yusuf PEKTAŞ'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
TABLolar DİZİNİ	xii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN TERS KATSAYI PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL MODELİ ve ANALİZİ.....	5
2.1. Problemin Formülasyonu.....	5
2.2. Düz Problem, Zayıf Çözüm Kavramı ve Önsel Değerlendirmeler.....	6
2.3. Ters Problemlerin Çözümü. Zayıf Çözüme Dayalı Yaklaşık Çözüm Kavramı ve Çözümün Varlığı.....	8
2.3.1. Düz problemin katsayılar göre sürekliliği ve ters örnekler	9
2.3.2. Ters problemin yaklaşık çözümünün varlığı.....	14
2.4. Tekillik Derecelerine Göre Ters Problemlerin Sınıflandırılması	15
BÖLÜM 3 TERS POLİNOM YÖNTEMİ ve UYGULAMALARI	17
3.1. Ters Problemlerin Matematiksel Analizi: Bazı Önsel Değerlendirmeler	18
3.1.1. Düzgün yapılı durum.....	18
3.1.2. Bozuk yapılı durumlar	19
3.2. Ters Polinom Yöntemi ve Ters Problemlere Uygulanması	20
3.2.1. Düzgün yapılı durum için TPY'nin uygulanması	23
3.2.2. İlimli bozuk yapılı durum için TPY'nin uygulanması	28
3.2.3. Ciddi bozuk yapılı durum için TPY'nin uygulanması	32
3.3. Çok Tekil Noktalı Bozuk Yapılı Durumlar ve TPY'nin Uygulanması	38
3.3.1. İlimli-ılimli bozuk yapılı durum ve TPY'nin uygulanması.....	38
3.3.2. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum ve TPY'nin uygulanması	43
3.3.3. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum ve TPY'nin uygulanması	47
BÖLÜM 4 TERS POLİNOM YÖNTEMİNİN HATA ANALİZİ	51
4.1. Düzgün Yapılı (Well-Posed) Durum	52

4.2. Bozuk Yapılı (Ill-posed) Durumlar.....	54
4.2.1. İlimli bozuk yapılı durum.....	54
4.2.2. Ciddi bozuk yapılı durum.....	57
4.3. Çok Tekil Noktalı Bozuk Yapılı Durumlar	59
4.3.1. İlimli-ılımlı bozuk yapılı durum.....	59
4.3.2. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum	60
4.3.3 Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum	61
4.4. Ters Problemlerin Sayısal Hata Analizi ve Duyarlılık Sayısı.....	62
4.4.1. Yöntemin ve bilgisayar programının hatasının analizi.....	62
4.4.2. Hatalı giriş verilerinin etkisinin analizi (noise analysis).....	64
4.4.2.1. Neuman türü giriş verisinin etkisinin analizi	65
4.4.2.2. Dirichlet türü giriş verisinin etkisinin analizi.....	73
SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	79
KAYNAKLAR	81
EKLER	85
MATLAB PROGRAMLARI.....	85
ÖZGEÇMİŞ	102

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

A	Lineer operatör
A^*	Eşlenik lineer operatör
H	Gerçel sayılar cismi üzerinde tanımlanmış Hilbert uzayı
$H^1[a, b]$	$:= \{u = u(x) : u, u' \in L_2[a, b], a, b \in \mathbf{R}\}$ Sobolev uzayı
H_A	A operatörünün tanımladığı Hilbert uzayı
K	$k(x) \in L_2[a, b]$ için uygun katsayılar kümesi
K	$k(x) \in C^1[a, b]$ için uygun katsayılar kümesi
$K(\alpha)$	α matrisinin duyarlılık sayısı (Condition Number)
$L_2(G)$	$G \subset \mathbf{R}^n$ bölgesinde karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
N	Doğal sayılar kümesi
\mathbf{R}	Gerçel sayılar cismi
$C^{0,\lambda}[a, b]$	λ dereceden Hölder anlamında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^n(G)$	G 'de n . mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
$\ \cdot\ _0$	$H^0(G) := L_2(G)$ Hilbert uzayında norm
$\ \cdot\ _{C[a, b]}$	$C[a, b]$ sürekli fonksiyonlar uzayının normu
$\ \cdot\ _A$	H_A Hilbert uzayında norm
$\ \cdot\ _e$	$x \in \mathbf{R}^n$ için öklid normu ($\ x\ _e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$)
$\ \cdot\ $	matris normu ($\ \alpha\ = \max_i \ \alpha_{ij}\ _e$)
$(\cdot, \cdot)_0$	$H^0 = L_2$ Hilbert uzayının iç çarpım fonksiyonu
δk	Ters problemler için TPY'nin bağıl hatası
δk_γ	Hatalı giriş verilerine karşılık ters problemler için TPY'nin bağıl hatası
$\delta k^{(wp)}$	Düzgün yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası
$\delta k^{(m)}$	İlimli bozuk yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası
$\delta k^{(s)}$	Ciddi bozuk yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası

$\delta k^{(mm)}$	İlimli-ılımlı bozuk yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası
$\delta k^{(ms)}$	İlimli-ciddi bozuk yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası
$\delta k^{(ss)}$	Ciddi-ciddi bozuk yapılı ters problem için TPY'nin bağıl hatası
R_D	Ters problemin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_D^{wp}	Düzgün yapılı ters problemin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_D^{mm}	İlimli-ılımlı bozuk yapılı ters problemin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_D^{ms}	İlimli-ciddi bozuk yapılı ters problemin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_D^{ss}	Ciddi-ciddi bozuk yapılı ters problemin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_N	Ters problemin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_N^{wp}	Düzgün yapılı ters problemin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_N^{mm}	İlimli-ılımlı bozuk yapılı ters problemin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_N^{ms}	İlimli-ciddi bozuk yapılı ters problemin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
R_N^{ss}	Ciddi-ciddi bozuk yapılı ters problemin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı
DP	Düz problem
HTKP	Heyecanlanmış (hatalı giriş verisi içeren) Ters Katsayı Problemi
SL	Sturm-Liouville
TKP	Ters Katsayı Problemi
TPY	Ters Polinom Yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Normal ve tekil noktaların simülasyonu	16
Şekil 3.1. Düzgün yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	26
Şekil 3.2. Düzgün yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	27
Şekil 3.3. Düzgün yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	27
Şekil 3.4.İlimli bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	30
Şekil 3.5. İlimli bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	31
Şekil 3.6. İlimli bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	31
Şekil 3.7. Ciddi bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü. 3. ve 5. dereceden polinom yaklaşımlarının karşılaştırılması.	36
Şekil 3.8. Ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	36
Şekil 3.9. Ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	37
Şekil 3.10. Ciddi tekil nokta civarında TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	37
Şekil 3.11. İlimli-ılımlı bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	41
Şekil 3.12. İlimli-ılımlı bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	42
Şekil 3.13. İlimli-ılımlı bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	42
Şekil 3.14. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	45
Şekil 3.15. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	46

Şekil 3.16. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	46
Şekil 3.17. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.	49
Şekil 3.18. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	50
Şekil 3.19. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.....	50
Şekil 4.1. Düzgün yapılı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı. .	68
Şekil 4.2. İlimli ılımlı bozuk yapılı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	70
Şekil 4.3. İlimli ciddi bozuk yapılı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	71
Şekil 4.4. Ciddi ciddi bozuk yapılı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	73
Şekil 4.5. Düzgün yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı. ..	75
Şekil 4.6. İlimli ılımlı bozuk yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	76
Şekil 4.7. İlimli ciddi bozuk yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	77
Şekil 4.8. Ciddi ciddi bozuk yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.....	78

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1. Düzgün yapılı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	68
Tablo 4.2. İlimli-ılımlı bozuk yapılı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	69
Tablo 4.3. İlimli-ciddi bozuk yapılı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	71
Tablo 4.4. Ciddi-ciddi bozuk yapılı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	72
Tablo 4.5. Düzgün yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	75
Tablo 4.6. İlimli-ılımlı bozuk yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	76
Tablo 4.7. İlimli-ciddi bozuk yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	77
Tablo 4.8. Ciddi-ciddi bozuk yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.	78

BÖLÜM 1.

GİRİŞ

Birçok fiziksel sistemin matematiksel modeli, uygun giriş verilerine dayanarak arzu edilen çıkış verilerinin hesaplanmasını hedefler. Çıkış verileri sistemin tavrını karakterize eder ve eğer hesaplanmış çıkış verileri, sistemin gözlemlenmiş hareketleriyle uyuşursa o zaman model iyi formüle edilmiştir denir.

Zamana bağlı birçok sistem parabolik türden diferansiyel denklemlerle veya kararlaşmış durum söz konusu olduğunda ise eliptik tür denklemlerle ifade edilir. Bu durumlarda talep edilen giriş verileri genellikle iki tiptedir. Birinci tipten olanlar sistemin fiziksel özellikleriyle ilgilidir ve bunlar modelde kendilerini katsayıların şekillenmesinde, sağ tarafın ifadesinde gösterirler. İkinci tipte olanlar ise sistemin durumu ile bağımlıdır ve bunlar sınır veya başlangıç koşulları olarak karşımıza çıkarlar. Tüm giriş verileri bilindiğinde düz problem çözülebilir ve istenen çıkış verileri hesaplanabilir. Diğer yandan sistemin fiziksel özellikleri yani katsayı veya sağ taraf fonksiyonu bilinmediğinde ve deneysel ölçümlerden elde edilemediğinde, o zaman deneysel olarak sistemin çıkış verileri ölçülerek ve bu ölçümleri bilinen giriş verileriyle kullanarak eksik olan giriş verilerini elde etmek mümkündür. Bu süreç ters problemin formülasyonu ve çözümünü teşkil eder. Bilinen giriş verilerini sabit tutarak eksik giriş verileriyle çıkış verileri arasındaki eşleme işlemi “giriş-çıkış dönüşümü” (input-output mapping) olarak adlandırılır. Ters problemi çözmek demek bu dönüşümün tersini yani çıkış verilerinden yararlanarak giriş verilerinin bulunması anlamına gelmektedir (DuChateau 1995, 1996).

Adi diferansiyel denklemler için zamana bağlı olmayan fiziksel sistemlerin ilk modelleri klasik Sturm-Liouville operatörü olarak bilinen

$$Au = -u'' + q(x)u(x)$$

operatörüyle

$$-u''(x) + (q(x) - \lambda u(x)) = 0, \quad x \in (0,1)$$

özdeğer problemi olarak formüle edilmiştir (Gelfand and Levitan 1955), (Rundell and Sacks 1992), (Fabiano et al 1995), (Brown et al 2003). Burada ana düşünce, operatörün özdeğerlerinden veya kaynak fonksiyonunun bilgisinden faydalanarak $q = q(x)$ katsayısının belirlenmesidir (Lowe and Rundell 1993, 1994, 1995). Oysa birçok gerçek fiziksel model için bu imkânsızdır. Diğer yandan malzemenin özelliklerinin belirlenmesi ile ilgili problemlerde fiziksel deneylerin mümkün olabildiği ölçüde sınırdaki ölçümlerden yararlanarak malzemenin ölçülemeyen özelliklerinin belirlenmesi önemlidir. Örneğin matematiksel modeli

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, & (k(x)u'(x))|_{x=1} = \varphi \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (1.1)$$

problemiyle ifade edilen türdeş olmayan malzemedan oluşan, birim uzunluklu çubukta ısının iletimi problemini ele alalım. $u(x)$, sıcaklık fonksiyonu, $k(x)$, çubuğun ısı geçirgenlik katsayısı, $q(x)$, çubuk ile dış ortamın ısı alış-verişini ifade eden katsayı fonksiyonu, $f(x)$ ise ısı kaynağı olmak üzere bu fiziksel süreç yukarıdaki karışık problemle ifade edilmektedir. Burada sıcaklık fonksiyonu olan $u(x)$ fonksiyonunun bilgisinden (yani (1.1) probleminin çözümünden) ve sınırdaki ölçülmüş

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi \in \mathbf{R}, \quad (\text{Sol uçtaki akı değeri}) \quad (1.2)$$

$$u(x;k)|_{x=1} = \beta \in \mathbf{R}, \quad (\text{Sağ uçtaki sıcaklık değeri}) \quad (1.3)$$

ek koşullarından yararlanarak malzemenin ısı geçirgenliği katsayısı olan $k(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi problemi araştırılabilir. (1.1)-(1.3) problemine, (SL) operatörü ile ilgili, sınırdaki ölçümlere dayalı Ters Katsayı Problemi (TKP) denir. (Canon and DuChataeu 1973, 1974), (Beck et al 1985), (Tadi, 1997), (Hasanov and Shores 1997), (Hasanov and Pektaş 2002), (Hasanov and Seyidmamedov 2002), (Hasanov 2004). (1.2)-(1.3) ile verilmiş olan koşulların dışında ek bilginin elde edilmesi sınırsız iç ölçümü gerektirir ki bu da imkânsızdır. Bu tez çalışmasında da

Ters Polinom Yöntemi (TPY) adı verilen yöntemle TKP'nin çözümün incelenmesi hedeflenmiştir.

(1.1)-(1.3) problemi aynı zamanda parabolik ve eliptik tip denklemler için Ters Katsayı Problemlerinin (TKP) bir boyutlu modelini ifade etmektedir (Choulli and Stefanov 1986), (Kohn and Vogelius 1984), (Badia 1999). Söz konusu problemlerin uygun katsayılar kümesindeki yaklaşık çözümünün varlığının elde edilmesi, çözümün giriş verilerine göre duyarlılığının incelenmesi ve daha sonra da bilinmeyen katsayının elde edilmesi için bir sayısal yöntemin geliştirilmesi bu tür ters problemler için temel sorunları oluşturmaktadır (Hasanov and Shores 1997), (Hasanov and Seyidmamedov 2002a). Bununla beraber (1.1)-(1.3) problemi için mevcut sayısal algoritmalar ölçülmüş verilerin sınırlı olması yüzünden optimal olamamaktadır. Üstelik tekil noktalar civarında bu algoritmaların birçoğu geçersizdir (Hasanov and Seyidmamedov 2002b).

Diğer taraftan TKP için diğer bir yaklaşım da literatürde "Denklem Hata Metodu" (Equation Error Method) olarak bilinir. Bu yaklaşım bir boyutlu parabolik denklemler için verilmiştir (Hanke and Scherzer 1999). Bu yaklaşımda da $u'(x) = u''(x) = 0$ koşulları sonucu ortaya çıkan tekil noktalar dikkate alınmamıştır. Bizim uyguladığımız TPY yaklaşımına göre ise sınır ölçümlerine ek olarak ve tekil noktalarla ilgili bilgiyi kullanarak problemin yaklaşık analitik çözümünü elde etmek mümkündür. Bunun için TKP'ni başlangıç-değer problemi olarak $k(x)$ 'e göre aşağıdaki gibi tekrar düzenleyelim:

$$\begin{cases} k'(x) + \frac{u''(x)}{u'(x)} k(x) = -\frac{f(x) - q(x)u(x)}{u'(x)}, & x \in (0,1) \\ k(0) = \frac{\phi}{u'(0)}, & u'(0) \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Buradan da görüleceği gibi $u(x)$ fonksiyonunun birinci ve/veya ikinci türevinin sıfır olduğu $(0,1)$ aralığının içindeki bir veya daha fazla noktada (1.4) problemi tanımsızdır. Bu durumda bu problem "Kötü Koşullandırılmış (Ill-Conditioned)" problem olarak tanımlanır. Bu tür durumların ilk çalışması

$$\nabla(k\nabla u) + k\Delta u = f, \quad u \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

hiperbolik denklemi için yapılmıştır (Richter 1981). Burada $f(x)$ kaynak fonksiyonunun gözlemsel değerlerine dayanarak hiperbolik denklem için kötü koşullandırılmış durumların analizi yapılmış ve her bir durum için ters problemin çözümünün varlığı ve $k(x)$ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

$u(x)$, (1.1) probleminin kesin çözümü olmak üzere Richter'in verdiği terminoloji aşağıdaki gibi geliştirilmiştir (Hasanov and Pektas 2002) (Hasanov 2003):

- a) $u'(x) \neq 0, u''(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$,
- b) $u'(x_0) = 0, x_0 \in (0,1); u'(x) \neq 0, \forall x \neq x_0; u''(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$,
- c) $u'(x_0) = u''(x_0) = 0, x_0 \in (0,1), u'(x) \neq 0, u''(x) \neq 0, \forall x \neq x_0$.

Bu durumlar ve TPY'nin uygulanması tezin 2. ve 3. Bölümlerinde daha ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

BÖLÜM 2.

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜYLE VERİLEN TERS KATSAYI PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL MODELİ ve ANALİZİ

2.1. Problemin Formülasyonu

$u(x)$ ve $k(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki sınır-değer problemini ele alalım.

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.1)$$

$$u(a) = 0, \quad (2.2)$$

$$(k(x)u'(x))\Big|_{x=b} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (2.3)$$

burada

$$c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0, \quad c_2 \geq q(x) > 0, \quad k(x) \in C^1[a, b], \quad q(x), f(x) \in C[a, b] \quad (2.4)$$

ve c_0, c_1, c_2 sabit değerlerdir. (2.4) koşullarındaki $k(x)$ ve $q(x)$ katsayı fonksiyonlarının sınırlı olması (2.1)-(2.3) probleminin, tezin birinci Bölümünde açıklanan fiziksel anlamının bir zorunluluğudur. Bu problemde $u(x)$ ile beraber $k(x)$ de bilinmeyen fonksiyon olduğundan (2.2), (2.3) sınır koşulları $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyon çiftini belirlemek için yeterli değildir. Dolayısıyla bu koşullara ek olarak ölçümler sonucu elde edilen aşağıdaki koşulların da verilmesi zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

$$(k(x)u'(x; k))\Big|_{x=a} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R} \quad (2.5)$$

$$u(x; k)\Big|_{x=b} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

Burada $u(x;k)$ fonksiyonu, (2.1)-(2.3) probleminin verilen $k(x)$ 'e karşılık gelen çözümü göstermektedir. Buna göre ters katsayı problemini ve buna karşılık gelen düz problemi aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

“(2.1)-(2.3) problemini ve (2.5), (2.6) koşullarını sağlayan $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyonlarının bulunması problemine (SL) operatörü için Ters Katsayı Problemi (TKP), (2.1)-(2.3) problemine ise ters probleme karşılık gelen düz problem (DP) denir”.

2.2. Düz Problem, Zayıf Çözüm Kavramı ve Önsel Değerlendirmeler

Ele alınan ters problemin yapısının daha iyi anlaşılabilmesi için ona karşılık gelen düz problemin zayıf çözümünün tanımlanması ve bu çözümün sağladığı özelliklerin verilmesi yerinde olacaktır. Bu sebeple (2.1)-(2.3) düz problemini ele alalım. Bu probleme (SL) operatörü için sınır-değer problemi de denir. (2.1) denklemi ve (2.2), (2.3) sınır koşullarından görüleceği gibi bu problemin klasik çözümü $C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ sınıfındadır. Pratikte ise çözüm fonksiyonu çoğu zaman bu sınıftan olmayabilir. O zaman bu koşulun biraz hafifletilmesi gereği ortaya çıkmaktadır. Bu ise türevin mertebesinin düşürülmesiyle mümkündür. Başlangıç problemine göre türev anlamında koşulları hafifletilmiş problemin çözümüne zayıf çözüm adı verilir. Bu fikir ilk olarak ünlü Rus matematikçisi S.L. Sobolev tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmiştir (Mikhlin 1964), (Lions 1970), (Ladyzhenskaya 1985).

Şimdi ele alınan problemin zayıf çözümünü elde edelim. Bunun için önce (2.1) denkleminin her iki yanını keyfi bir $v(x)$ fonksiyonu ile çarparak $[a,b]$ aralığında integralini alalım ve kısmi integral formülünü uygulayalım. Buna göre

$$-k(b)u'(b)v(b) + k(a)u'(a)v(a) + \int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

elde edilir. Burada $v(x)$ keyfi fonksiyon olarak seçildiğinden onun da (2.2) temel sınır koşulunu sağlaması talep edilebilir. Bunu diğer sınır koşulları ile birlikte son eşitlikte göz önüne alırsak o zaman

$$\int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \phi v(b), \quad u(a) = 0 \quad (2.7)$$

bulunur. (2.7) eşitliğine (2.1)-(2.3) problemine karşılık gelen integral özdeşlik, bu özdeşliği sağlayan $u(x)$ çözümüne ise problemin zayıf çözümü denir. Şimdi bu çözümünün hangi sınıftan olduğunu araştıralım. Bunun için (2.7) eşitliğinde $v(x) \equiv u(x)$ kabul edilirse o zaman

$$\int_a^b [k(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)]dx = \int_a^b f(x)u(x)dx + \phi u(b) \quad (2.8)$$

enerji özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin sol tarafının anlamının olabilmesi için $u(x)$ 'in kendisi ve birinci mertebeden türevinin karesi integrallenebilir olmalıdır. $[a, b]$ sınırlı aralığında karesi integrallenebilen fonksiyonun kendisi de integrallenebilen olacağından son eşitliğin sağ tarafı anlamlı olacaktır. Bunlar göz önüne alınacak olursa, zayıf çözümün aşağıdaki sınıftan olması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır:

$$H^1[a, b] := \{u(x) \in L_2[a, b] : u'(x) \in L_2[a, b], \quad u(a) = 0\} .$$

Bu tipteki uzaylara Sobolev uzayları denir (Adams 1975), (Rektorys 1975). Bu çözüme yüklenen koşullara dikkat edilecek olunursa onun birinci mertebeden bile türevlerinin sürekli olması gerekmiyor, sadece karesinin integrallenebilen olması yeterlidir. Buna göre (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümü bu bilgiler ışığında aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$$\exists u(x) \in H^1[a, b];$$

$$\int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \varphi v(b), \quad \forall v \in H^1[a, b]. \quad (2.9)$$

(2.9) integral özdeşliğinin sol tarafını ifade eden bilinear formun pozitif tanımlı, simetrik ve sağ taraftaki lineer fonksiyonel sınırlı olduğundan, Riesz teoremine göre bu probleminin çözümü var ve tektir (Rektorys 1975). Şimdi bu çözümün aşağıda verilen özelliklerini inceleyelim.

Lemma 2.1. (Hasanov and Shores 1997) (2.4) koşullarının sağlandığı durumda, (2.9) probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}c_0} \left\{ \|f\|_0 + \sqrt{\frac{2}{b-a}} |\varphi| \right\} |x_1 - x_2|^{1/2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (2.10)$$

Sonuç 2.1. Düz problemin zayıf çözümü H^1 -normunda sınırlıdır.

$$\|u\|_1 \leq \frac{b-a}{2c_0} \sqrt{(b-a)^2 + 2} \left\{ \|f\|_0 + \sqrt{\frac{2}{b-a}} |\varphi| \right\}. \quad (2.11)$$

Sonuç 2.2. Düz problemin $u \in H^1[a, b]$ zayıf çözümü, $C^{0,1/2}[a, b]$ uzayında süreklidir.

2.3. Ters Problemlerin Çözümü. Zayıf Çözüme Dayalı Yaklaşık Çözüm

Kavramı ve Çözümün Varlığı

Bu tez çalışmamızda, biz ters problemin çözümüne her ne kadar farklı bir açıdan yaklaşacak olsak da genel teori açısından zayıf çözüme dayalı yaklaşık çözüm kavramının verilmesi gerekmektedir.

Ters problemin tanımından da görüleceği gibi (2.1)-(2.3) düz problemiyle beraber (2.5), (2.6) ek koşullarını sağlayan $\langle k(x), u(x; k) \rangle$ kesin çözümünün bulunması pratik açıdan mümkün değildir. Zira gerek (2.3), (2.5), (2.6) eşitlikleriyle verilen sınır

koşullarındaki ϕ, ϕ, β 'nin ölçülmüş değerler olması sebebiyle belli bir hata payı içermesi, gerekse (DP)'in çözümünün analitik olarak elde edilememesi bunu mümkün kılmaz. Bu durumda kesin çözümü en iyi temsil edecek yaklaşık çözüm kavramının verilmesi gereği ortaya çıkıyor. Bunun için aşağıdaki fonksiyonel yaklaşım kullanılmaktadır: Bu yaklaşıma göre

$$I(k) = I_1(k) + I_2(k), \quad k \in \mathbf{K} = \{k \in L_2[a, b]: c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0\}, \quad (2.12)$$

$$I_1(k) := \left| \phi - (k(x)u'(x; k)) \Big|_{x=a} \right|^2, \quad I_2(k) := \left| \beta - u(x; k) \Big|_{x=b} \right|^2,$$

fonksiyoneline en küçük değerini veren $k = k(x)$ fonksiyonuna TKP'nin yaklaşık çözümü veya quazi çözümü denir. Yani,

$$\exists k_0 \in \mathbf{K}, \quad I(k_0) = \inf_{k \in \mathbf{K}} I(k).$$

Bu tanım (2.5), (2.6) koşullarının kesin sağlanmadığı durumda birbirlerine en yakın olması talebi üzerine kurulmuş son derece doğal bir yaklaşımdır. Bu kavram ilk olarak 1939 yılında ünlü Rus matematikçisi A. Tikhonov tarafından verilmiş (Tikhonov-Arsenin, 1977), daha sonra Ivanov ve Vasin tarafından geliştirilmiştir (Lions 1970), (Payne 1975), (Ivanov-Vasin-Tanana, 1978), (Baumeister 1986), (Alessandrini, 1988, 1990), (Hasanov 1988, 1997), (Anger 1990), (Duchateau 1996), (Isakov 1998).

2.3.1. Düz problemin katsayılara göre sürekliliği ve ters örnekler

(2.1)-(2.3) ile verilmiş düz problemin (2.9) ile tanımlı zayıf çözümünün $k(x)$ fonksiyonuna bağımlılığının ($u=u(x; k)$) analizi ile ilgili aşağıdaki temel teorem doğrudur.

Teorem 2.1. (Hasanov-Shores, 1997). $\{k_n(x)\}, \{q_n(x)\}, \{f_n(x)\} \subset L_2[a, b]$ ve $u_n(x) = u[x; k_n, q_n, f_n]$, $n = 1, 2, \dots$, ise (2.1)-(2.3) probleminin bu dizilere karşılık gelen zayıf çözümler dizisi olsun. Eğer

$$1/k_n(x) \mapsto 1/k(x), \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[a, b] \text{ 'de zayıf yakınsama})$$

$$q_n(x) \mapsto q(x), \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[a, b] \text{ 'de zayıf yakınsama})$$

$$f_n(x) \mapsto f(x), \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[a, b] \text{ 'de zayıf yakınsama})$$

ise o halde (2.1)-(2.3) probleminin $\{u_n\}$ zayıf çözümler dizisi, $C^{0,\lambda}$ -normunda $u(x) = u[x; k, q, f]$ çözümüne yakınsar.

$$\text{Burada } \|u\|_{C^{0,\lambda}} := \|u\|_C + \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1/2 \text{ dir.}$$

Bu temel teoremden de görüleceği gibi düz problemin zayıf çözümünün sürekliliği baş katsayı denilen $k = k(x)$ fonksiyonunun yukarıdaki anlamda yakınsamasına bağlıdır. Normlar uygun seçilmediğinde $u = u(x; k)$ fonksiyonunun k 'ya göre sürekliliği mümkün olmamaktadır. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki ilginç örnekleri inceleyelim (Pektaş, 2002).

Örnek 2.1. (Murat, 1971) (2.1) denkleminde $q(x) \equiv k(x)$, $f(x) \equiv 0$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' + k(x)u(x) = 0, & x \in (a, b), \\ u(a) = 0, \\ (k(x)u'(x))|_{x=b} = \varphi, \end{cases} \quad (2.13)$$

Problemi elde edilir. Burada

$$k_n \mapsto k, \quad n \rightarrow \infty, \quad (L_2(a, b) \text{ 'de zayıf yakınsama})$$

yakınsamasının bu probleminin çözümler dizisinin yakınsaklığı için yeterli olmayacağı gösterilmiştir. Bunun nedeni ise türev altında bulunan $\{k_n(x)\}$ katsayılar dizisinin kendisi $k(x)$ 'e yakınsarken, $\{k_n^{-1}(x)\}$ dizisinin ise $k^{-1}(x)$ 'e yakınsamamasıdır.

Bir zamanlar bu durum ters veya optimal kontrol problemlerinin düzgün formüle edilmeyen problemler olmasının bir sonucu olarak açıklanmıştır (Murat,1971). Halbuki Teorem 2.1'de, $u_n \mapsto u$ yakınsaması için, $L_2[a,b]$ 'de $k_n \mapsto k$ (zayıf) yakınsaması yerine, $1/k_n \mapsto 1/k$ (zayıf) yakınsaması gerekmektedir. (2.13) denkleminde ise $k(x) \equiv q(x)$ ve $\{1/k_n\}$ ve $\{k_n\}$ dizilerinin zayıf limitleri de genel olarak birbirinden farklı olacağından dolayı limit denkleminde $k(x) \neq \tilde{k}(x)$ olarak elde edilir.

Örnek 2.2. Aşağıdaki sınır-değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' = 0, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0, & k(1)u'(1) = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

ve bu problemin $u(1) = 1$ ek koşulunu sağlayan $u = u[x;k]$ çözümünü arayalım.

Öncelikle

$$k_n(x) = \left(1 + \frac{2n}{2n+1} \cos 2n\pi x\right)^{-1}, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (2.15)$$

katsayılar dizisinin $L_2(0,1)$ uzayında zayıf yakınsamadığını fakat bunlara karşılık gelen çözüm fonksiyonlarının $C[0,1]$ 'de yakınsadığını gösterelim. Bunun için (2.14) denklemini integralleyerek sınır koşullarını ve (2.15) dizisini dikkate alalım. Buna göre

$$u_n(x) = x + \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin 2n\pi x \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) fonksiyonlarının ek koşulu sağladığı ve $u_n(x) \rightarrow u(x) = x$, $n \rightarrow \infty$ yakınsamasının doğruluğu açıktır. Bununla birlikte (2.15) dizisi iraksaktır.

Bu durum ise bilim adamları tarafından optimal kontrol problemlerinin düzgün formüle edilmemiş problemler olduğunun bir göstergesi olarak açıklanmıştır (Banks T.H. and Kunisch K. 1989). Halbuki zayıf yakınsama ölçütüne göre (Lusternik-Sobolev,1965)

$$\int_0^x \frac{d\xi}{k_n(\xi)} = \int_0^x \left[1 + \frac{2n}{2n+1} \cos 2n\pi\xi \right] d\xi = x + \frac{\sin 2n\pi x}{(2n+1)\pi} \rightarrow x = \int_0^x d\xi, \quad n \rightarrow \infty$$

ve $\forall x \in (0,1)$ için $\|k_n\|_0$ düzgün sınırlı olduğundan $(k(x))^{-1} = 1$ fonksiyonu $L_2(0,1)$ uzayında $\{k_n^{-1}(x)\}$ dizisinin zayıf limitidir. O zaman Teorem 2.1'e göre $u[x;k] = x$ aranan çözüm fonksiyonudur. Gerçekten (2.14)'de $k(x) = 1$, $u(x) = x$ yazılırsa denklemin ve sınır koşullarının sağlandığı görülür.

Örnek 2.3. Örnek 2.1'de verdiğimiz problemin katsayılarını özel olarak seçerek

$$-(k(x)u'(x))' + k(x)u(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (2.17)$$

$$u(0) = 1 \quad (2.18)$$

$$k(1)u'(1) = \frac{4}{3} \quad (2.19)$$

sınır değer probleminin $x = 1$ noktasında

$$u(x, k)_{x=1} = 2 \quad (2.20)$$

ek koşulunu sağlayan $u = u[x;k]$ çözümünü doğuran $k = k(x)$ katsayısının bulunması problemini ele alalım (Banks T.H. and Kunisch K. 1989), (Murat 1971). $k(x) \in \mathbf{K} = \{k(x) \in L_2[0,1] : c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0\}$ olduğunu varsayalım ve aşağıdaki katsayılar dizisini tanımlayalım.

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-x^2}{2-\frac{x^2}{6}}\right)^{1/2}, & \frac{m}{n} < x \leq \frac{2m+1}{2n} \\ 1 + \left(\frac{1-x^2}{2-\frac{x^2}{6}}\right)^{1/2}, & \frac{2m+1}{2n} < x \leq \frac{m+1}{n} \end{cases} \quad (2.21)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Böylelikle her bir $k_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^+$ fonksiyonu için $[0, 1]$ aralığı $2n$ -tane parçaya bölünmüş olur. Bu fonksiyonlar için $1 - 2^{-1/2} \leq k_n(x) \leq 1 + 2^{-1/2}$ eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Dolayısıyla $k_n(x) \in K$, $c_1 = 1 + 2^{-1/2}$, $c_0 = 1 - 2^{-1/2}$ olur. Öte yandan

$$k_n(x) \mapsto q_0(x) = 1, \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[0, 1]'de \text{ zayıf yakınsama}) \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{k_n(x)} \mapsto k_0^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[0, 1]'de \text{ zayıf yakınsama}) \quad (2.23)$$

yakınsamalarının doğru olduğu ispatlanabilir. (2.17) denkleminde (2.22) ve (2.23) limit fonksiyonları yazılırsa o zaman katsayılara göre yakınsaklık teoremine göre (Teorem 2.1), bu limit fonksiyonları aşağıdaki problemi sağlamak zorundadır.

$$-\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}\right)u'\right)' + u = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2.24)$$

$$u(0) = 1, \quad k_0(1)u'(1) = \frac{4}{3}.$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = 1 + x^2 \quad (2.25)$$

fonksiyonudur ve bu fonksiyon için (2.20) ek koşulu sağlanır. Diğer taraftan Teorem 2.1'in doğal sonucu olarak elde edilen ve (2.25) ile verilen $u[x; k; q] = \lim_{n \rightarrow \infty} u[x; k_n; q_n]$ kesin çözümünü (2.17) denkleminde yazarsak

$$-\left(k(x)(1+x^2)'\right)' + (1+x^2)k(x) = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi $k(x)$ 'e göre çözersek

$$\tilde{k}(x) = \tilde{C}\sqrt{x}e^{x^2/4} \quad (2.26)$$

fonksiyonunu elde ederiz. Nitekim görülüyor ki (2.23) ile tanımlı $k_0(x)$ ve (2.26) ile tanımlı $\tilde{k}(x)$ fonksiyonları birbirinden farklıdır.

Bu durum da optimal kontrol veya en küçük kareler problemlerinin çözümünün olmaması olarak yorumlanmaktadır. Bununla birlikte elde ettiğimiz bu çelişki (2.1) denkleminde $q(x) \equiv k(x)$, $x \in (a, b)$ alınmasının sonucu olarak ortaya çıkıyor. Zira (2.21) katsayılar dizisi öylesine seçilmiştir ki $L_2[0,1]$ 'deki zayıf limit anlamında

$$k_n(x) \mapsto 1 \text{ ve } k_n^{-1}(x) \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty$$

yakınsamaları doğrudur ve doğal olarak zayıf limitler birbirinden farklıdır.

2.3.2. Ters problemin yaklaşık çözümünün varlığı

Ters problemin yaklaşık çözümünün yukarıda tanımlanan fonksiyonel yaklaşıma göre (2.12) fonksiyonelinin minimumu onun yaklaşık çözümüdür. Öte yandan Weierstrass Teoremine göre kompakt kümede sürekli fonksiyonel en büyük ve en küçük değerlerini burada alacağından yaklaşık çözümün varlığını göstermek için (2.12) ile tanımlı fonksiyonelin $k \in \mathbf{K}$ kompakt uzayında (Hilbert uzayında sınırlı küme zayıf prekompakt olacağından $\mathbf{K} \subset L_2[a, b]$ prekompaktır) sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

Lemma 2.2. (Hasanov-Shores 1997) $\{k_n(x)\} \subset \mathbf{K}$ ve

$$\frac{1}{k_n} \mapsto \frac{1}{k}, \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2[a, b] \text{ 'de zayıf yakınsama})$$

koşulu sağlansın. O zaman $I_1(k_n) \rightarrow I_1(k)$, $n \rightarrow \infty$ yakınsaması doğrudur.

Uyarı 2.1. $I_1(k)$ fonksiyoneli $k \in \mathbf{K}$ 'ya göre aşağıdaki anlamda süreklidir.

$$k_n \rightarrow k, \quad n \rightarrow \infty \quad (L_2 \text{-normunda güçlü yakınsama}) \Rightarrow I_1(k_n) \rightarrow I_1(k), \quad n \rightarrow \infty .$$

Uyarı 2.2. $I_2(k)$ fonksiyoneli Uyarı 2.1'deki anlamda $k \in \mathbf{K}$ 'ya göre süreklidir.

Sonuç 2.3. $\mathbf{K} \subset L_2[a, b]$ olası katsayılar kümesi kompakt olsun. O zaman ters problemin $k_0 \in \mathbf{K}$ yaklaşık çözümü vardır.

2.4. Tekillik Derecelerine Göre Ters Problemlerin Sınıflandırılması

Yukarıda, (2.1)-(2.3) düz problemi ve (2.5), (2.6) ek koşullarını sağlayan $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyonlarının bulunması şeklinde tanımladığımız ters problemi tekrar göz önüne alalım. (2.1) ile verilen

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

denklemini $k(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre aşağıdaki gibi tekrar düzenleyelim.

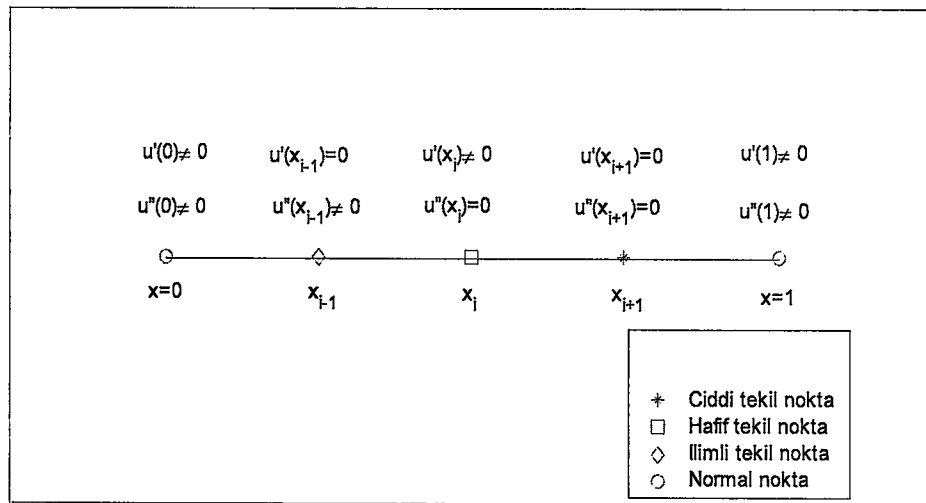
$$k'(x) + \frac{u''(x)}{u'(x)}k(x) = -\frac{f(x) - q(x)u(x)}{u'(x)}, \quad x \in (a, b). \quad (2.27)$$

(2.27) denklemin yapısından da görüldüğü gibi $u(x)$ fonksiyonunun birinci ve(veya) ikinci mertebeden türevinin mevcut olmadığı veya sıfır olduğu noktalar denklemin tekil noktalarıdır. Bu tür noktalarda (2.27) denklemi tanımsız olduğundan bu durumların sınıflandırılması gereği ortaya çıkmaktadır. Bu tür bir sınıflandırma literatürde ilk olarak G.R. Richter tarafından isimlendirilmiştir (Richter 1981).

Tekil noktalara bağılı olarak ters problemin yapısı ile ilgili aşağıdaki üç durum olasıdır (Hasanov 2003), (Şekil 2.1). Bunlar:

1. Düzgün Yapılı(Well-Posed) Durum: $u'(x) \neq 0$, $u''(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$. Yani (2.27) denklemin hiçbir tekil noktası yoktur.
2. İlimli Bozuk Yapılı (Moderately Ill-Posed) Durum: $u'(x_0) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $x \neq x_0$, $u''(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$. Yani (2.27) denklemini sadece $x = x_0$ noktasında birinci türevin sıfır olması sebebiyle tekil noktaya sahiptir. Bu tür tekil noktalara ilimli veya zayıf tekil nokta adı verilir.
3. Ciddi Bozuk Yapılı (Severely Ill-Posed) Durum: $u'(x_0) = u''(x_0) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $u''(x) \neq 0$, $x \neq x_0$. Yani denklem $x = x_0$ noktasında birinci ve ikinci mertebeden türevlerin her ikisi de sıfır olması sebebiyle tekil noktaya sahiptir. Bu türden noktalara ise ciddi veya güçlü tekil nokta adı verilir.

Bunların dışında birinci türevin sıfırdan farklı olup ikinci türevin sıfır olduğu noktalarda ele alınan denklemin tekil noktalarıdır. Bu türden olan noktalara hafif (mildly) tekil nokta, bu durumda denkleme ise hafif bozuk yapıdır(mildly Ill-Posed) denir. Öte yandan hafif tekil nokta, birbirinden farklı iki zayıf tekil noktanın Rolle teoremine göre sonucu olacağından sınıflandırmaya dahil edilmemiş ve ayrıca incelenmeyecektir.



Şekil 2.1 Normal ve tekil noktaların simülasyonu.

BÖLÜM 3.

TERS POLİNOM YÖNTEMİ ve UYGULAMALARI

Tek gerçel değişkenli $n+1$ tane parametreye bağlı $\Phi(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ fonksiyonlar ailesini ele alalım. Bilindiği gibi verilen $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0, n}$ gerçel sayı ikililerinden yola çıkarak

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \dots, a_n) = f(x_i)$$

eşitliği sağlanacak şekilde a_i parametrelerinin belirlenmesi problemine interpolasyon problemi adı verilir. Çeşitli interpolasyon problemleri vardır. Bunlar içinde en çok kullanılanı lineer interpolasyon problemleridir:

$$\Phi(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + \dots + a_n \Phi_n(x).$$

Burada özel durumda $\Phi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ olarak seçilirse

$$\Phi(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

şeklinde klasik polinom interpolasyon problemi elde edilir ki bunların içinde en iyi bilineni Lagrange ve fonksiyonun türevleri de kullanılıyorsa Hermite türü interpolasyon problemleridir (Stoer and Bulirsch, 2002), (Kincaid and Cheney, 1991).

Birçok uygulamalı problemde özellikle çok boyutlu polinom interpolasyonları önemli yer tutmaktadır (Ciarlet and Raviart, 1972), (Birkhoff, 1979), (Kergin, 1980), (Busch, 1990), (Gasca, 1990), (Boor, 1996). Bu tez çalışmasında biz Lagrange ve Hermite türü polinom interpolasyonu düz ve ters problemin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanacağız.

3.1. Ters Problemlerin Matematiksel Analizi: Bazı Önsel Değerlendirmeler

Bu konu başlığı altında ters polinom yönteminde kullanılan çeşitli lemma ve sonuçlar, Bölüm 2’de tanımladığımız düzgün yapılı ve bozuk yapılı durumlar için ayrı ayrı birer alt başlık altında verilecektir. Önce Ters Polinom Yönteminin uygulanmasında sıkça kullanılacak olan aşağıdaki doğal sonucu verelim:

Sonuç 3.1. $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyon çifti (2.1)-(2.3) düz problemini ve (2.5) ek koşulunu sağlasın. O zaman aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_a^b [f(x) - q(x)u(x)] dx = \phi - \varphi . \quad (3.1)$$

İspat. (2.1) denklemini (a, b) aralığında integralleyerek (2.3) ve (2.5) koşullarını göz önüne alırsak ispat elde edilir. Buna göre,

$$\int_a^b [f(x) - q(x)u(x)] dx = - \int_a^b (k(x)u'(x))' dx = -(k(b)u'(b) - k(a)u'(a)) = \phi - \varphi$$

(3.1) eşitliğine (TKP) için uyum koşulu (compatible condition) denir. \square

3.1.1. Düzgün yapılı durum

Lemma 3.1. (Hasanov and Seyidmamedov 2002a) $u_1(x), u_2(x) \in H^0[a, b]$, fonksiyonları düz problemin $k_1 \neq k_2 \in \mathbf{K}$ katsayılarına karşılık gelen çözümleri olsun ve (2.5) ek koşulu sağlansın. O zaman $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ fonksiyonu $L_2[a, b]$ uzayında $q(x)$ katsayı fonksiyonuna diktir.

Uyarı 3.1. Bu lemmanın $u_1(x), u_2(x) \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ $k_1(x), k_2(x) \in C^1[a, b]$ durumunda da geçerli olacağı açıktır.

Lemma 3.2. (Hasanov and Seyidmamedov 2002a) $\langle k_1(x), u_1(x; k_1) \rangle$, $\langle k_2(x), u_2(x; k_2) \rangle$ fonksiyonları (TKP)'nin iki çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\exists \tilde{x} \in (a, b), \quad u_1(\tilde{x}) = u_2(\tilde{x}). \quad (3.2)$$

(3.2) eşitliğine geçiş koşulu (transmission condition), \tilde{x} 'ya ise geçiş noktası (transmission point) adı verilir.

3.1.2. Bozuk yapıli durumlar

Lemma 3.3. (Hasanov 2004). $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyon çiftinin (2.1) denklemi ile (2.3), (2.5) Neumann koşullarını sağladığını varsayalım. O zaman $x_0 \in (a, b)$ noktasının tekil nokta olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$\int_a^{x_0} [f(x) - q(x)u(x)] dx = \phi \quad (3.3)$$

$$\int_{x_0}^b [f(x) - q(x)u(x)] dx = -\phi. \quad (3.4)$$

Bu hüküm sonlu sayıda tekil noktanın varlığı durumunda da geçerlidir. Aşağıdaki lemma bunu ifade etmektedir.

Lemma 3.4. (Hasanov 2004) $\langle k(x), u(x) \rangle$ fonksiyon çiftinin (2.1) denklemi ile (2.3), (2.5) Neumann koşullarını sağladığını varsayalım. O zaman $a < x_0 < x_1 < \dots < x_N < b$ noktalarının tekil nokta olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$\int_a^{x_0} [f(x) - q(x)u(x)] dx = \phi, \quad \int_{x_N}^b [f(x) - q(x)u(x)] dx = -\phi$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - q(x)u(x)] dx = 0, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Lemma 3.5. (Hasanov 2004) $\langle k_1, u_1 \rangle, \langle k_2, u_2 \rangle$ fonksiyonları için Lemma 3.3 ün koşulları sağlansın. $x_0 \in (a, b)$, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de ortak tekil noktası ise o zaman aşağıdaki geçiş koşulları sağlanır:

$$u_1(x_a) = u_2(x_a), \quad x_a \in (a, x_0), \quad (3.5)$$

$$u_1(x_b) = u_2(x_b), \quad x_b \in (x_0, b) \quad (3.6)$$

Sonuç 3.2. (Hasanov 2004) $\langle k_1, u_1 \rangle, \langle k_2, u_2 \rangle$ fonksiyonları için Lemma 3.3 ün koşulları sağlansın. $a < x_0 < x_1 < \dots < x_N < b$, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de ortak tekil noktaları ise o zaman aşağıdaki geçiş koşulları sağlanır:

$$u_1(\tilde{x}_0) = u_2(\tilde{x}_0), \quad \tilde{x}_0 \in (a, x_0), \quad u_1(\tilde{x}_{N+1}) = u_2(\tilde{x}_{N+1}), \quad \tilde{x}_{N+1} \in (x_N, b)$$

$$u_1(\tilde{x}_{i+1}) = u_2(\tilde{x}_{i+1}), \quad \tilde{x}_{i+1} \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

3.2. Ters Polinom Yöntemi ve Ters Problemlere Uygulanması

Yönteme geçmeden önce, sadelik açısından problemin tanım aralığı ile ilgili bir uyarı yapalım. Bilindiği gibi $a, b \in \mathbf{R}$ olmak üzere keyfi sonlu $[a, b]$ aralığı $x = (t-a)/(b-a)$, $t \in [a, b]$ sürekli dönüşümü kullanılarak her zaman $x \in [0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. O zaman (2.1)-(2.3) ve (2.5), (2.6) ile tanımlı (TKP) aşağıdaki özdeş probleme dönüşür:

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.7)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

$$(k(x)u'(x; k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x; k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

Burada gerekli işlemler yapıldıktan sonra problem tekrar x değişkenine göre düzenlenmiştir. Uygulama açısından (a,b) aralığı yerine $(0,1)$ aralığı ile çalışmak çok daha sade olduğundan bundan sonraki işlemlerde değişkenin, (a,b) aralığı yerine $(0,1)$ aralığında değerler aldığı varsayılarak (TKP) dendiğinde (3.7)-(3.8) düz problemi ile (3.9) ek koşulları anlaşılacaktır.

Şimdi (3.7)-(3.9) problemini ele alarak onu $k(x)$ 'e göre aşağıdaki gibi tekrar düzenleyelim ($u'(x) \neq 0, x \in [0,1]$):

$$\begin{cases} k'(x) + \frac{u''(x)}{u'(x)} k(x) = -\frac{f(x) - q(x)u(x)}{u'(x)}, & x \in (0,1) \\ k(0) = \frac{\phi}{u'(0)} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \beta, \quad u'(1) = \phi/k(1). \quad (3.11)$$

Burada (3.10) problemindeki sol uçta verilmiş başlangıç koşulu yerine (3.11) ile verilen sağ uçta verilmiş $k(1) = \phi/u'(1)$ koşulunun kullanılabileceği de açıktır. Bu durumda (3.11)'de $u'(1) = \phi/k(1)$ koşulu yerine $u'(0) = \phi/k(0)$ koşulu verilmiş olacaktır.

Burada $u(x)$ bilindiğinde (3.10) başlangıç-değer probleminin kesin çözümü için

$$k(x) = \frac{1}{u'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1]$$

analitik çözüm formülünün bulunacağı açıktır. Ters polinom yöntemi de bu gerçeği baz alarak oluşturulmuştur. Şimdi bu probleme Ters Polinom Yöntemini uygulayarak çözümün yaklaşık olarak bulunmasını verelim:

Bu yöntemin özü iki aşamadan oluşmaktadır. Bunların ilki düz problemin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonunun verilen sınır koşulları ve tekil noktaların bilgisinden faydalanarak Lagrange ve Hermite türü

$$u_p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad x \in [0,1], \quad m > 1 \quad (3.12)$$

interpolasyon polinomu yaklaşımını elde etmektir. Burada $a_i, i = \overline{0, m}$, bilinmeyenleri aşağıdaki doğrusal cebirsel denklemler sisteminin çözümünden elde edilir:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0m-1} & \alpha_{0m} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m-1} & \alpha_{1m} \\ & & \ddots & & \\ \alpha_{m-10} & \alpha_{m-11} & \dots & \alpha_{m-1m-1} & \alpha_{m-1m} \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm-1} & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \\ \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Katsayılar matrisi $\alpha = \{\{\alpha_{ij}\}\}$ ve sağ taraf vektörü $\lambda = \{\{\lambda_j\}\}$, her bir durum için koşulların yapısına göre ayrı ayrı elde edilir.

İkinci aşamada ise (3.10) başlangıç-değer probleminde bu yaklaşımı baz alarak elde edilecek yaklaşık problemde $k(x)$ katsayısının yaklaşık çözümü olan $k_p(x)$ fonksiyonunun analitik olarak elde edilmesine dayanmaktadır. Buna göre önce problemde verilen sınır koşulları, ek koşullar ve tekil noktaların bilgisinden faydalanarak $u_p(x)$ ile göstereceğimiz Lagrange veya Hermite türü interpolasyon polinomunu tanımlanır. O zaman (3.10) başlangıç-değer probleminde $u(x)$ ile $u_p(x)$ 'i yer değiştirirsek aşağıdaki yaklaşık problemi elde ederiz.

$$k_p'(x) + \frac{u_p''(x)}{u_p'(x)} k_p(x) = -\frac{f(x) - q(x)u_p(x)}{u_p'(x)}, \quad x \in (0,1). \quad (3.14)$$

$$k_p(0) = \frac{\phi}{u_p'(0)}, \quad u_p'(0) \neq 0. \quad (3.15)$$

Buradan da görüldüğü gibi $u'_p(x) \neq 0$, $u''_p(x) \neq 0$, $x \in [0,1]$ olduğunda verilen $u_p(x)$ fonksiyonu için (3.14)-(3.15) probleminin tek çözümü vardır. Bilinen yöntemlerle bu problem çözüldüğünde ise ters katsayı probleminin yaklaşık çözümü için aşağıdaki analitik fonksiyon bulunur ($u'_p(x) \neq 0$):

$$k_p(x) = \frac{1}{u'_p(x)} \left\{ \phi + \int_0^x [q(t)u_p(t) - f(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1]. \quad (3.16a)$$

Başlangıç koşulu olarak (3.15) yerine $k_p(1) = \frac{\phi}{u'_p(1)}$, $u'_p(1) \neq 0$ seçildiğinde ise yaklaşık analitik çözüm için

$$k_p(x) = \frac{1}{u'_p(x)} \left\{ \phi + \int_x^1 [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1]. \quad (3.16b)$$

fonksiyonunun elde edileceği açıktır.

Burada elbette TKP'nin çözümü için literatürden belli olan alternatif yaklaşık yöntemler uygulanabilir (Kollokasyon yöntemi, varyasyonel yöntemler gibi). Fakat bu yöntemlerde tekil noktaların bilgisinden faydalanılmamaktadır. Oysa biz burada Ters Polinom Yöntemini uygulayarak tekil noktaların bilgisinden de faydalanmış oluyoruz. Bu ise çözümü daha yüksek kesinlikte bulunmasını sağlamaktadır.

Şimdi sırayla düzgün ve bozuk yapıli durumları ele alarak her bir ters problem için yönteminin uygulanmasını inceleyelim.

3.2.1. Düzgün yapıli durum için TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız TKP'ni ele alarak (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun hiçbir tekil noktaya sahip olmadığını varsayalım ($u'(x) \neq 0$, $u''(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.17)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad (3.18)$$

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.19)$$

Bu durumda $u(x)$ kesin çözümlü ile onun Lagrange interpolantı olan $u_p(x)$ polinomu için aşağıdaki koşullar sağlanır.

$$u(0) = u_p(0) = 0, \quad u(1) = u_p(1) = \beta, \quad k(1)u'(1) = k_p(1)u'_p(1) = \phi \quad (3.20).$$

Burada $k(1)$ değeri bilinmediğinden interpolasyon için son koşulu bu şekliyle kullanamayız. Ancak denklemin yapısını ve Neumann türü diğer sınır koşulunu da göz önüne alarak bu koşula denk olan ve polinomun tanımlanmasında kullanabileceğimiz (3.1) uyum koşulunu elde ederiz ($a = 0, b = 1$). Diğer ters problemler için de benzer sorun söz konusu olacağından bu durumlarda da (3.20) nin son koşulu yerine (3.1) uyum koşulu kullanılacaktır. Bu durumda ikinci dereceden

$$u_p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (3.21)$$

polinomu uyum koşuluyla beraber aşağıdaki 3 koşulla tanımlanır:

$$u_p(0) = 0, \quad u_p(1) = \beta, \quad \int_0^1 [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = \phi - \phi.$$

Bu koşullar, Lagrange polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli (yerel olmayan (nonlocal)) koşulunu da içermektedir. Dolayısıyla (3.21) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen lineer cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \int_0^1 q(x)dx & \int_0^1 xq(x)dx & \int_0^1 x^2q(x)dx \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \phi - \phi + \int_0^1 f(x)dx \end{bmatrix}.$$

Burada katsayılar matrisinin determinanı,

$$|\alpha| = \int_0^1 q(x)(x^2 - x)dx = -\frac{1}{6}q(c) \neq 0, \quad c \in (0,1)$$

olduğundan bu sistemin tek çözümü vardır. Buradan (3.21) polinomunun a_0, a_1, a_2 katsayıları,

$$a_2 = \left\{ \int_0^1 f(x)dx + \phi - \phi - \beta \int_0^1 xq(x)dx \right\} \left\{ \int_0^1 q(x)(x^2 - x)dx \right\}^{-1}, \quad a_1 = \beta - a_2, \quad a_0 = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilmektedir. O zaman (3.17)-(3.19) TKP'nin yaklaşık çözümü

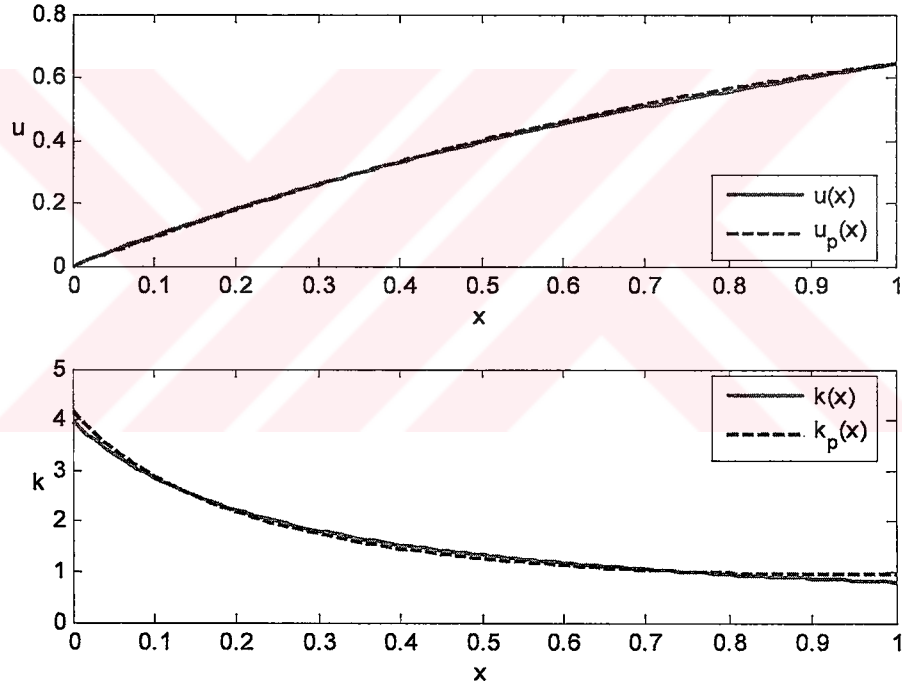
$$k_p(x) = \frac{1}{u'_p(x)} \left\{ \phi + \int_0^x [q(t)u_p(t) - f(t)]dt \right\}, \quad x \in [0,1]$$

analitik çözüm formülünden elde edilir.

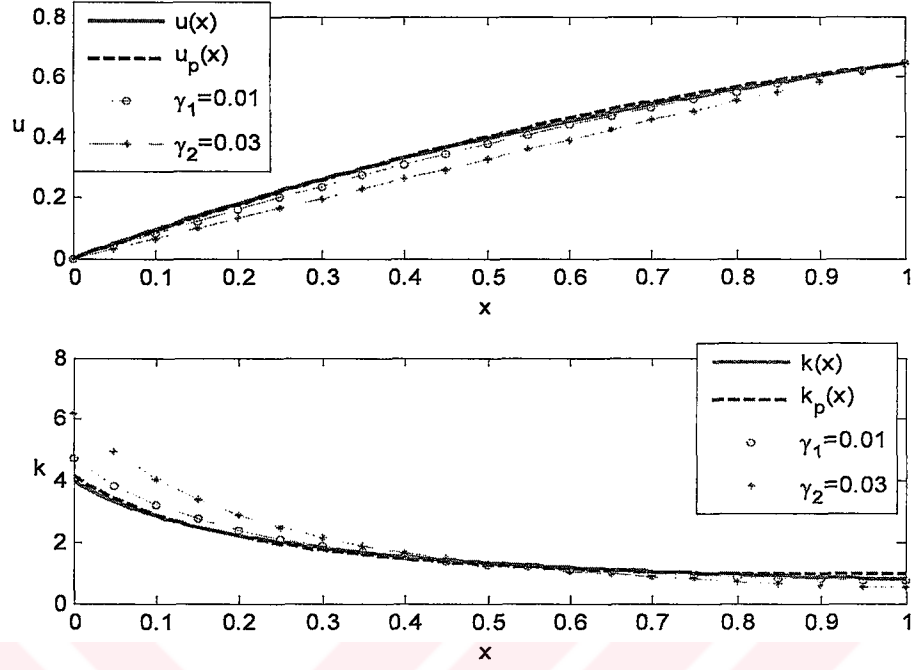
Yöntem aşağıdaki örnekle test edilmiş ve elde edilen sonuçlar açıklanmıştır.

Örnek 3.1. Düz ve ters problemin kesin çözümleri $u(x) = 2 \arctan(x+1) - 0.5\pi$, $k(x) = (x+0.25)^{-1}$ olarak alınmıştır. $q(x) = (x+0.25)^{-2}$ olmak üzere $f(x)$ kaynak fonksiyonu bu değerler kullanılarak analitik olarak hesaplanmıştır. Sayısal çözüm için Matlab Programı (bkz. Ekler) kullanılarak problemin yaklaşık çözümü için aşağıdaki değerler elde edilmiştir. $N=51$ düğüm noktası kullanılarak (3.21) polinomunun katsayıları $a_2 = -0.3117$, $a_1 = 0.9552$ olarak bulunmuş, mutlak ve

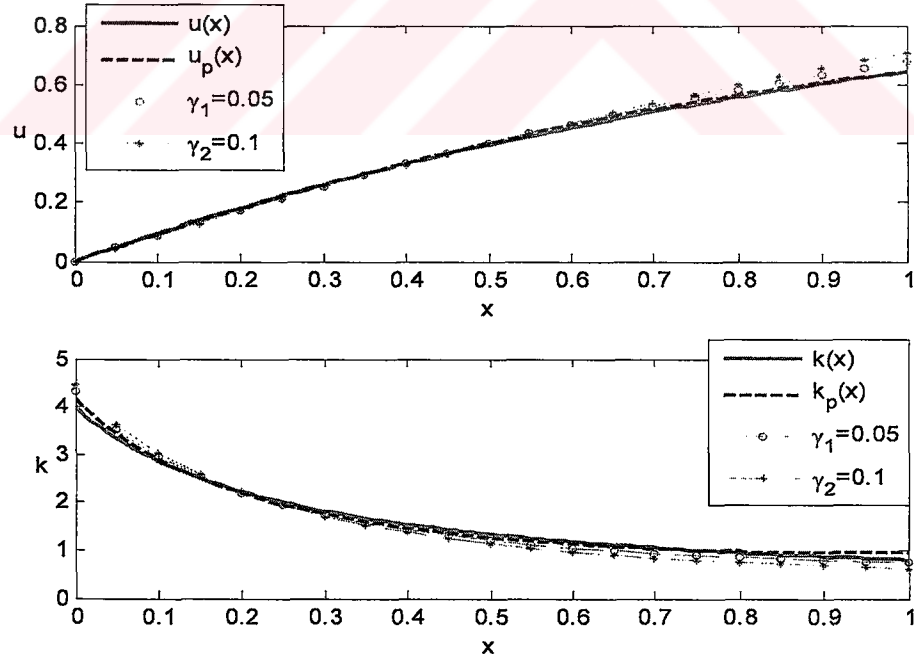
bağıl hatalar ise $u(x)$ çözümü için 0.0086 ile 0.0431, $k(x)$ için ise 0.1875 ile 0.2056 olarak hesaplanmıştır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir (Şekil 3.1). Şekil 3.2'de $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma_1 = 0.01$ için ters problemin bağıl hatası 0.1763 iken $\gamma_2 = 0.03$ olduğunda bu hata 0.5478'lere yükselmektedir. Bu da ters problemin Neumann türü giriş verisine göre kararsız olduğunu göstermektedir. Şekil 3.3'de ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma_1 = 0.05$ için ters problemin bağıl hatası 0.1181 iken $\gamma_2 = 0.1$ için hata 0.2340 olmaktadır.



Şekil 3.1. Düzgün yapıli durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.



Şekil 3.2. Düzgün yapıli durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.



Şekil 3.3. Düzgün yapıli durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.

3.2.2. İlimli bozuk yapılı durum için TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız TKP'ni ele alalım ve (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in (0,1)$ noktasında ilimli tekil noktaya sahip olduğunu varsayalım ($u'(x_0) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $x \neq x_0$; $u''(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.23)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (3.24)$$

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.25)$$

O zaman (3.10)'daki diferansiyel denklem $x = x_0$ noktasında tanımsız olacağından $k_p(x_0)$ yaklaşık değeri,

$$-k_p'(x)u_p'(x) - k_p(x)u_p''(x) + q(x)u_p(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

eşitliğinden $u_p'(x_0) = 0$ olduğu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$k_p(x_0) = \frac{q(x_0)u_p(x_0) - f(x_0)}{u_p''(x_0)}, \quad u_p''(x_0) \neq 0. \quad (3.26)$$

Diğer taraftan $u'(x_0) = 0$ koşulunu aynı zamanda $u_p(x)$ polinomunun derecesini yükseltmek için kullanacağız. Buna göre

$$u_p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (3.27)$$

polinomu için aşağıdaki 5 koşul sağlanır:

$$u_p(0) = 0, \quad u_p(1) = \beta, \quad u_p'(x_0) = 0, \quad \int_0^{x_0} [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = \phi,$$

$$\int_{x_0}^1 [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = -\phi.$$

Burada da koşullar, Lagrange-Hermite polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli (yerel olmayan (nonlocal)) koşullarını da içermektedir. Dolayısıyla (3.27) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange-Hermite interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \int_0^{x_0} q(x) dx & \int_0^{x_0} xq(x) dx & \int_0^{x_0} x^2 q(x) dx & \int_0^{x_0} x^3 q(x) dx & \int_0^{x_0} x^4 q(x) dx \\ \int_{x_0}^1 q(x) dx & \int_{x_0}^1 xq(x) dx & \int_{x_0}^1 x^2 q(x) dx & \int_{x_0}^1 x^3 q(x) dx & \int_{x_0}^1 x^4 q(x) dx \end{bmatrix}$$

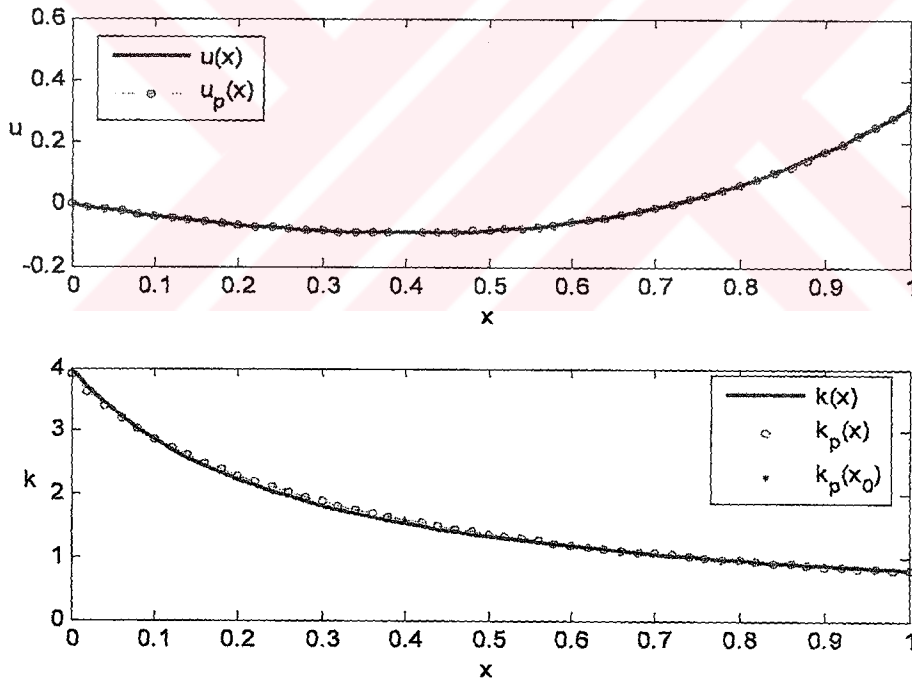
$$\lambda = \left(0 \quad \beta \quad 0 \quad \int_0^{x_0} f(x) dx - \phi \quad \int_{x_0}^1 f(x) dx + \phi \right)^T.$$

Bilinen yöntemlerle bu sistem çözümlerse ($|\alpha| \neq 0$), (3.27) ile tanımlı polinomun katsayıları elde edilir. O zaman ters problemin yaklaşık çözümü

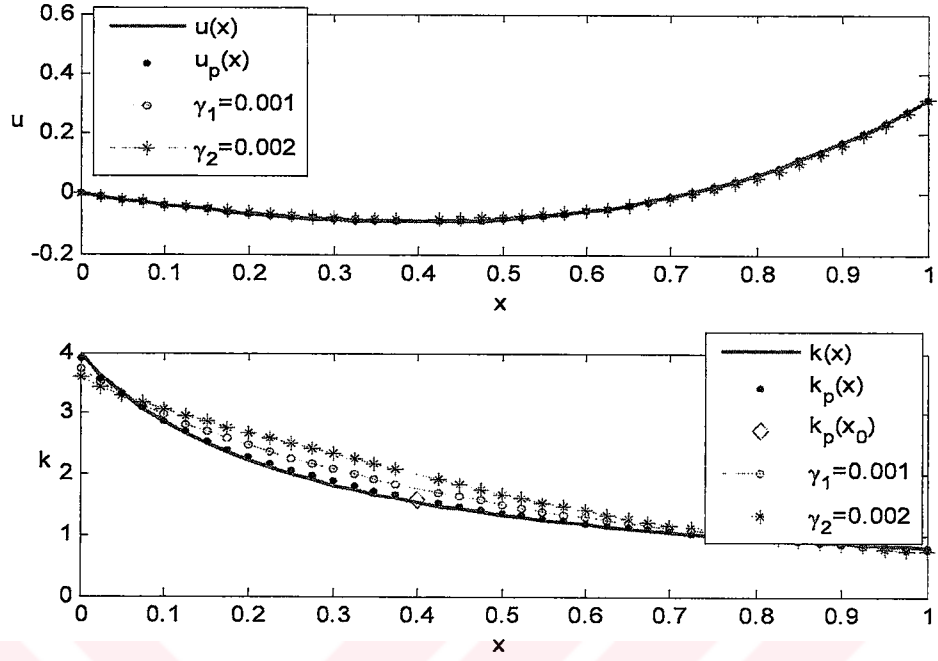
$$k_p(x) = \frac{1}{u_p'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right\}, \quad x \in [0, x_0) \cup (x_0, 1], \quad (3.28)$$

analitik formülü ve (3.26) eşitliğinden elde edilir.

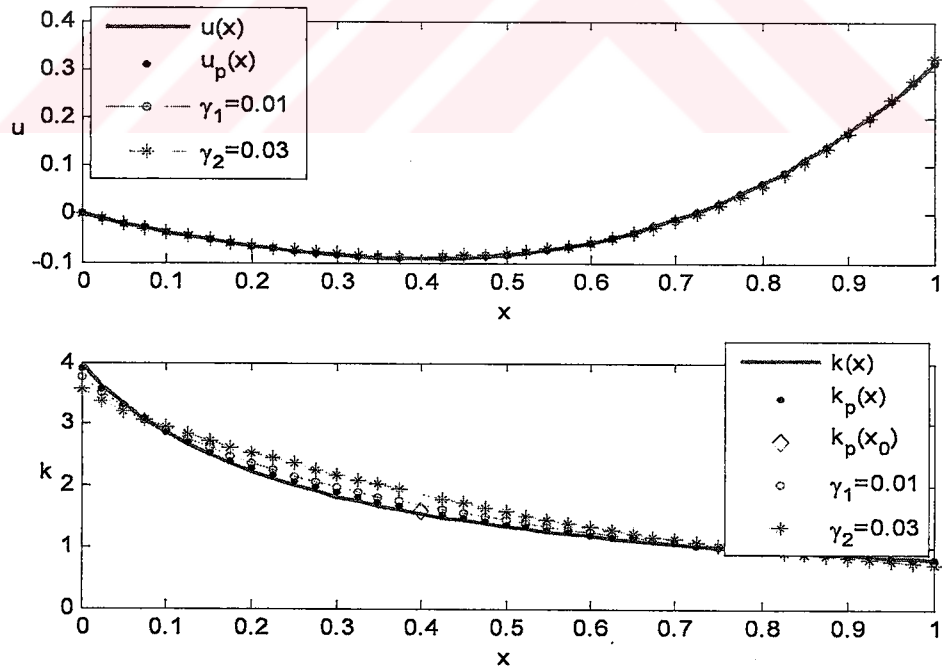
Örnek 3.2. $u(x) = (x-1.4)e^x + 1.4$, $k(x) = (x+0.25)^{-1}$, $q(x) = (x+0.25)^{-2}$ fonksiyonları için problem Matlab Programında (bkz. Ekler) sayısal olarak çözülmüş ve polinomunun katsayıları $a_4 = 0.2780$, $a_3 = 0.0524$, $a_2 = 0.3929$, $a_1 = -0.4107$ olarak bulunmuş, mutlak ve bağıl hatalar $u(x)$ fonksiyonu için 0.0011 ile 0.0483, $k(x)$ için ise 0.0675 ile 0.0341 olarak hesaplanmıştır. $x_0 = 0.4$ ilımlı tekil noktadır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir (Şekil 3.4). Şekil 3.5'de $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma_1 = 0.001$, $\gamma_2 = 0.002$ için ters problemin bağıl hataları 0.1505, 0.2958 dir. Şekil 3.6'da ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 0.03$ için ters problemin bağıl hataları 0.0866, 0.2097 olmaktadır. Buda ters problemin hem Neumann hem de Dirichlet türü giriş verisine göre kararsız olduğunu göstermektedir.



Şekil 3.4. İlımlı bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.5. Ilımlı bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.6. Ilımlı bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.

3.2.3. Ciddi bozuk yapılı durum için TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız (TKP)' ni ele alalım ve (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in (0,1)$ noktasında ciddi tekil noktaya sahip olduğunu varsayalım ($u'(x_0) = u''(x_0) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $u''(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_0$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.29)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (3.30)$$

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.31)$$

Problemin ciddi tekil noktasının olması, tekil nokta civarında katsayının belirlenmesini imkânsızlaştırırken öte yandan bize aşağıdaki bilgiyi kullanmamıza olanak verir. $u'(x_0) = u''(x_0) = 0$ olduğundan (3.7) denkleminde çözümüm bu noktadaki değerini bulabiliriz:

$$\beta_0 := u(x_0) = \frac{f(x_0)}{q(x_0)}. \quad (3.32)$$

(3.32) koşulunu Lagrange-Hermit türü polinomun tanımlanmasında kullanacağız. Diğer taraftan (3.16) eşitliklerinden de görüleceği gibi ılımlı bozuk yapılı durumdan farklı olarak $k = k(x)$ çözümünün x_0 ciddi tekil noktasındaki değerini bulmak mümkün değildir. Bu nedenle (3.28)-(3.30) ters problemini $k(x)$ 'e göre aşağıdaki iki alt başlangıç-değer problemine parçalamak gerekmektedir (Hasanov 2003):

$$\begin{cases} k_p'(x) + \frac{u_p''(x)}{u_p'(x)} k_p(x) = -\frac{f(x) - q(x)u_p(x)}{u_p'(x)}, & x \in (0, x_0 - \delta) \\ k_p(0) = \frac{\phi}{u_p'(0)}, \quad u_p'(0) \neq 0, \quad \delta > 0 \end{cases}, \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} k_p'(x) + \frac{u_p''(x)}{u_p'(x)} k_p(x) = -\frac{f(x) - q(x)u_p(x)}{u_p'(x)}, & x \in (x_0 + \delta, 1) \\ k_p(1) = \frac{\varphi}{u_p'(1)}, \quad u_p'(1) \neq 0, \quad \delta > 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Bu durumda yaklaşık çözümün analitik ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$k_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{u_p'(x)} \left[\phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right], & x \in [0, x_0 - \delta], \\ \frac{1}{u_p'(x)} \left[\varphi + \int_x^1 [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right], & x \in [x_0 + \delta, 1] \end{cases}, \quad \delta > 0 \quad (3.35)$$

Burada

$$u_p(x) = \begin{cases} \frac{\beta_0}{x_0^3} (x - x_0)^3 + \beta_0, & x \in [0, x_0] \\ \frac{\beta - \beta_0}{(1 - x_0)^3} (x - x_0)^3 + \beta_0, & x \in [x_0, 1] \end{cases}, \quad (3.36)$$

fonksiyonu, düz problemin çözümü olan $u(x)$ 'in Lagrange-Hermite interpolasyon polinomudur ve aşağıdaki 5 koşulla tanımlanır:

$$u_p(0) = 0, \quad u_p(1) = \beta, \quad u(x_0) = \beta_0, \quad u_p'(x_0) = 0, \quad u_p''(x_0) = 0.$$

Bu duruma ikinci bir yaklaşım da şu şekildedir. Problemi parçalamadan bir bütün olarak ele alırsak o zaman DP'in çözümü

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \beta, \quad u(x_0) = \beta_0, \quad u'(x_0) = u''(x_0) = 0, \\ \int_0^1 [f(x) - q(x)u(x)] dx = \phi - \varphi$$

koşullarını sağlayacağından, $u_p(x)$ polinomu

$$u_p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x, \quad x \in [0,1] \quad (3.37)$$

şeklinde beşinci dereceden tanımlanabilir.

Burada da koşullar, Lagrange-Hermite polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli(yerel olmayan(nonlocal)) koşulunu içermektedir. Dolayısıyla (3.37) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange-Hermite interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 \\ 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 & 5x_0^4 \\ 0 & 2 & 6x_0 & 12x_0^2 & 20x_0^3 \\ \int_0^1 xq(x)dx & \int_0^1 x^2q(x)dx & \int_0^1 x^3q(x)dx & \int_0^1 x^4q(x)dx & \int_0^1 x^5q(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \left(\beta \quad \beta_0 \quad 0 \quad 0 \quad \int_0^1 f(x)dx + \varphi - \phi \right)^T.$$

Bilinen yöntemlerle bu sistem çözümlerse ($|\alpha| \neq 0$), (3.27) ile tanımlı polinomun katsayıları elde edilir. Bu durumda ters problemin ikinci yaklaşık çözümü

$$k_p(x) = \frac{1}{u_p'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right\}, \quad x \in [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1]$$

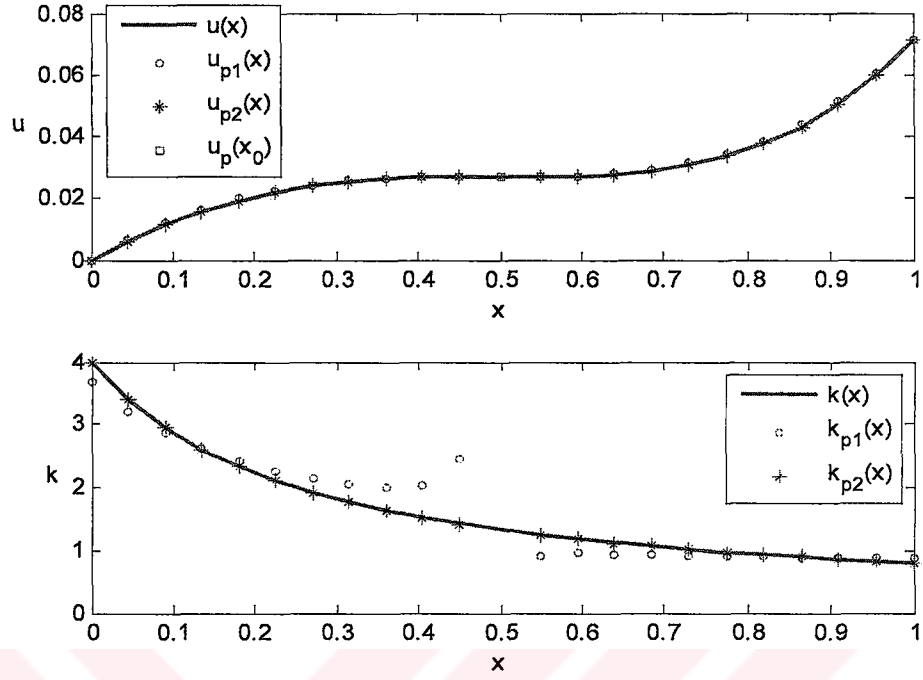
formülünden elde edilir.

Örnek 3.3 (1. ve 2. Yaklaşım). $u(x) = (x - 2.5)e^x + xe^{0.5} + 2.5$, $k(x) = (x + 0.25)^{-1}$, $q(x) = (x + 0.25)^{-2}$ fonksiyonları için ilk ve 2. yaklaşımın Matlab Programlarından

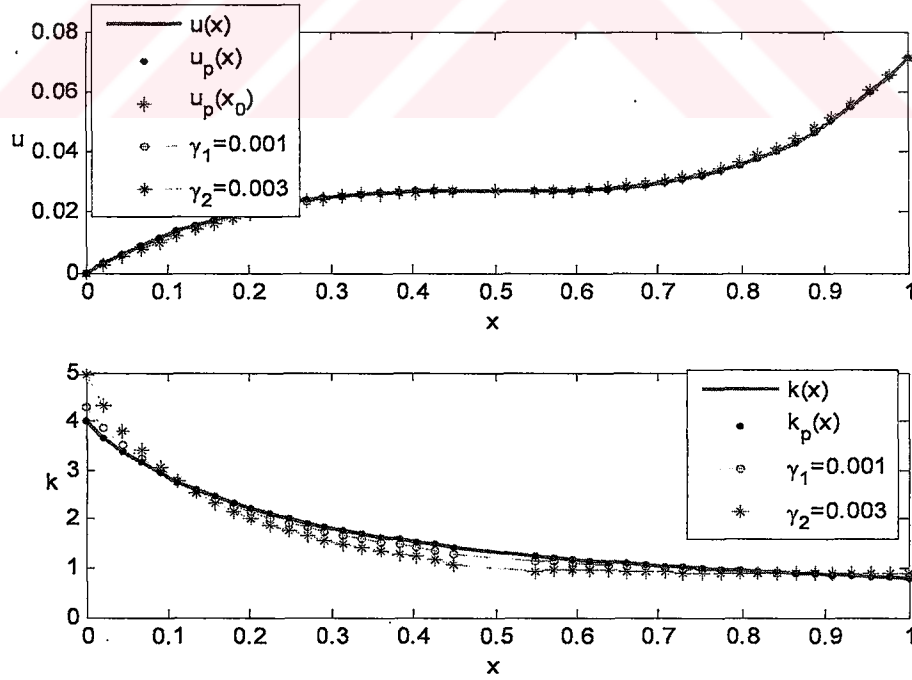
(bkz. Ekler) elde edilen değerler aşağıdaki gibidir: $x_0 = 0.5$ noktası problemin ciddi tekil noktasıdır. Şekil 3.7'de (...) ile gösterilen 1 yaklaşımın $\delta = 0.05$ için mutlak ve bağıl hataları $u(x)$ fonksiyonu için 0.0012 ile 0.0175, $k(x)$ için ise 1.0120 ile 0.1573 olarak hesaplanmıştır. (*) ile gösterilen ikinci yaklaşıma göre $\delta = 0.05$ değeri için mutlak ve bağıl hatalar $u(x)$ fonksiyonu için $1.0e-5$ ile $6.0e-4$, $k(x)$ için ise 0.009 ile 0.0021 olarak hesaplanmıştır. Diğer δ değerleri için de benzer hatalar elde edilmektedir (Şekil 3.7). Grafiklerden de görüleceği gibi 2. yaklaşım için düz ve ters problemin yaklaşık çözümleri 1. yaklaşıma göre daha kesindir. Böyle olması da gerekir zira polinomların dereceleri farklıdır.

Şekil 3.8'de ise $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık 2.yaklaşımdan bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma_1 = 0.001$, $\gamma_2 = 0.003$ için ters problemin bağıl hataları 0.0989, 0.2523 dir. Şekil 3.9'da ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = 0.1$ için ters problemin bağıl hataları 0.1694, 0.3148 olmaktadır. Buda ters problemin hem Neumann hem de Dirichlet türü giriş verisine göre kararsız olduğunu göstermektedir.

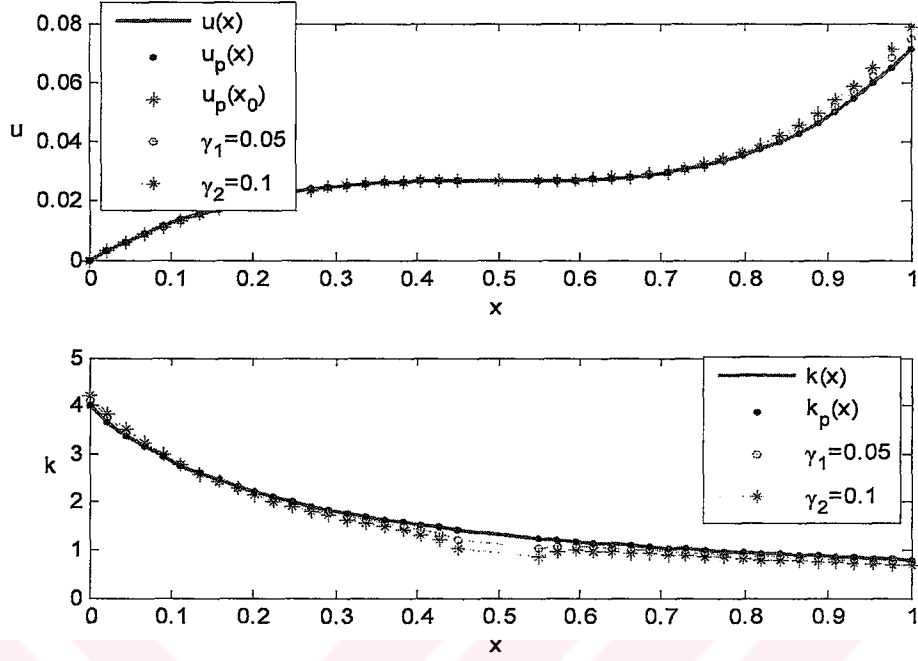
Son olarak Şekil 3.10 ile $\delta_1 = 0.05$ ve $\delta_2 = 0.005$ değerleri için $x_0 = 0.5$ ciddi tekil noktasının $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ civarında, TKP'nin çözümünün davranışı verilmiştir. Grafikte $\delta \rightarrow 0$ için $k_p(x) \rightarrow \infty$ olduğu görülmektedir ki bu da beklenen bir sonuçtur.



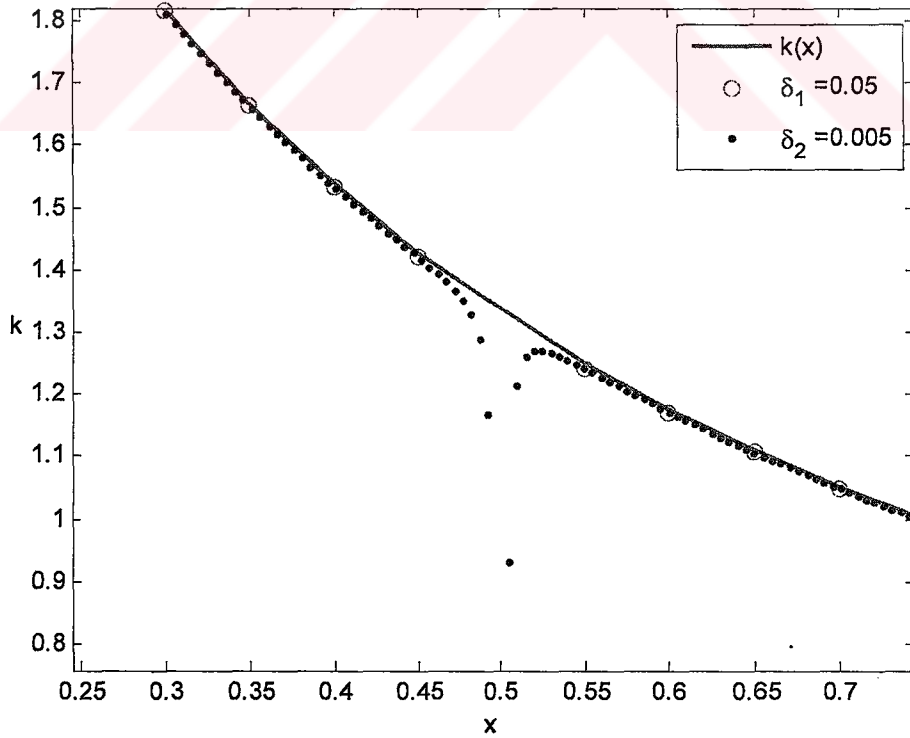
Şekil 3.7. Ciddi bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü. 3. ve 5. dereceden polinom yaklaşımlarının karşılaştırılması.



Şekil 3.8. Ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.



Şekil 3.9. Ciddi bozuk yapıli durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.10. Ciddi tekil nokta civarında TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.

3.3. Çok Tekil Noktalı Bozuk Yapılı Durumlar ve TPY'nin Uygulanması

Bundan önceki bölümde TPY'nin birtek tekil nokta içeren bozuk yapıli durumlara uygulanmasını inceledik. Bu kısımda ise ele alınan problemin iki tekil noktaya sahip olduğunu varsayarak yöntemin bu durumlara uygulanmasını inceleyeceğiz. Bu sonuçlardan yola çıkarak yöntemin ikiden daha fazla tekil nokta içeren ters problemlere uygulanması da genelleştirilebilir. Çok tekil nokta durumlarını 3 ana başlık altında inceleyeceğiz. Bunlar:

1. İlimli-ılımlı bozuk yapıli durum
2. İlimli-ciddi bozuk yapıli durum
3. Ciddi-ciddi bozuk yapıli durum.

Şimdi bu durumlara karşılık gelen her bir ters problemi sırayla tanımlayarak yöntemin uygulanmasını verelim.

3.3.1. İlimli-ılımlı bozuk yapıli durum ve TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız TKP'ni ele alalım ve (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümlü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun $x_1, x_2 \in (0,1)$ noktalarında ilimli tekil noktaya sahip olduğunu varsayalım ($u'(x_1) = u'(x_2) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $u''(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_1, x_2$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.38)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad (3.39)$$

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.40)$$

O zaman (3.10)'daki diferansiyel denklem $x = x_1$ ve $x = x_2$ noktalarında tanımsız olacağından $k_p(x_1)$ ve $k_p(x_2)$ yaklaşık değerleri

$$-k'_p(x)u'_p(x) - k_p(x)u''_p(x) + q(x)u_p(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

denklemden, $u'_p(x_1) = u'_p(x_2) = 0$ olduğu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
k_p(x_1) &= \frac{q(x_1)u_p(x_1) - f(x_1)}{u_p''(x_1)}, \quad u_p''(x_1) \neq 0 \\
k_p(x_2) &= \frac{q(x_2)u_p(x_2) - f(x_2)}{u_p''(x_2)}, \quad u_p''(x_2) \neq 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Diğer taraftan $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$ koşullarını aynı zamanda $u_p(x)$ Lagrange-Hermite polinomunun derecesini yükseltmek için kullanacağız. Buna göre

$$u_p(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \tag{3.42}$$

polinomu için aşağıdaki 6 koşul sağlanır:

$$\begin{aligned}
u_p(1) &= \beta, \quad u_p'(x_1) = 0, \quad u_p'(x_2) = 0 \\
\int_0^{x_1} [f(x) - q(x)u_p(x)] dx &= \phi, \quad \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = 0, \quad \int_{x_2}^1 [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = -\phi.
\end{aligned}$$

Burada da koşullar, Lagrange-Hermite polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli (yerel olmayan (nonlocal)) koşulunu içermektedir. Dolayısıyla (3.42) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange-Hermite interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 & 6x_1^5 \\ 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 & 5x_2^4 & 6x_2^5 \\ \int_0^{x_1} xq(x)dx & \int_0^{x_1} x^2q(x)dx & \int_0^{x_1} x^3q(x)dx & \int_0^{x_1} x^4q(x)dx & \int_0^{x_1} x^5q(x)dx & \int_0^{x_1} x^6q(x)dx \\ \int_{x_1}^{x_2} xq(x)dx & \int_{x_1}^{x_2} x^2q(x)dx & \int_{x_1}^{x_2} x^3q(x)dx & \int_{x_1}^{x_2} x^4q(x)dx & \int_{x_1}^{x_2} x^5q(x)dx & \int_{x_1}^{x_2} x^6q(x)dx \\ \int_{x_2}^1 xq(x)dx & \int_{x_2}^1 x^2q(x)dx & \int_{x_2}^1 x^3q(x)dx & \int_{x_2}^1 x^4q(x)dx & \int_{x_2}^1 x^5q(x)dx & \int_{x_2}^1 x^6q(x)dx \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \left(\beta \quad 0 \quad 0 \quad \int_0^{x_1} f(x)dx - \phi \quad \int_0^{x_1} f(x)dx \quad \int_0^{x_1} f(x)dx + \varphi \right)^T.$$

Bilinen yöntemlerle bu sistem çözümlürse ($|\alpha| \neq 0$), (3.42) ile tanımlı polinomun katsayıları elde edilir. O zaman ters problemin yaklaşık çözümü

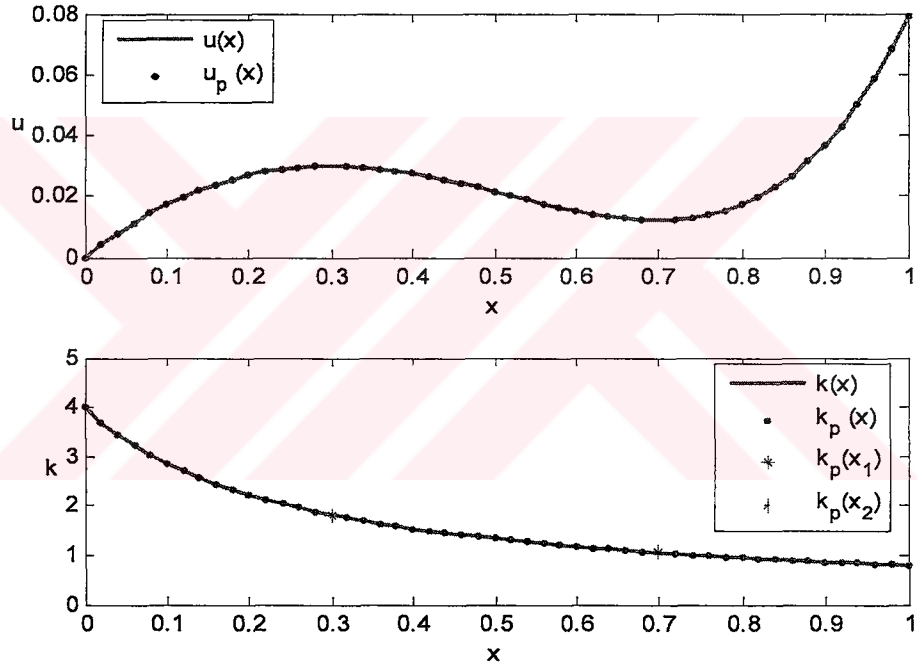
$$k_p(x) = \frac{1}{u_p'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x f(t) - q(t)u_p(t)dt \right\}, \quad x \in [0, x_1 - \delta_1] \cup [x_1 + \delta_1, x_2 - \delta_2] \cup [x_2 + \delta_2, 1],$$

analitik formülü ve (3.41) eşitliklerinden elde edilir.

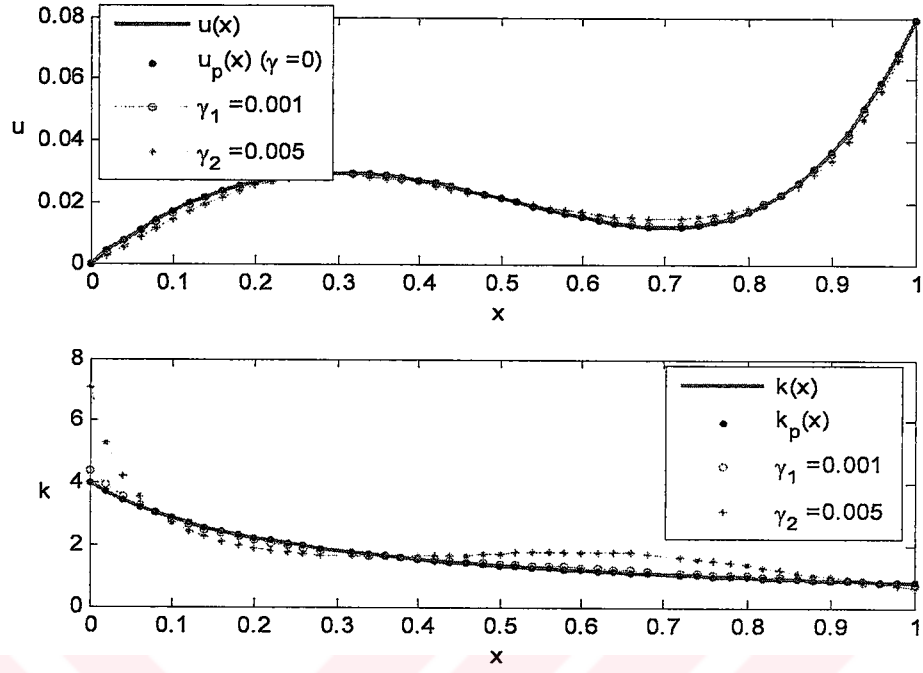
Söz konusu durum aşağıdaki örnekle test edilmiş ve elde edilen sonuçlar açıklanmıştır.

Örnek 3.4. $u(x) = (x^2 - c_1x + c_2)e^x - c_2$, $c_1 = x_1 + x_2 + 2$, $c_2 = x_1x_2 + c_1$, $k(x) = (x + 0.25)^{-1}$, $q(x) = (x + 0.25)^{-2}$ fonksiyonları için problem Matlab Programı ile sayısal olarak çözülmüş ve polinomunun katsayıları $a_6 = 0.0427$, $a_5 = 0.0383$, $a_4 = 0.1548$, $a_3 = 0.0268$, $a_2 = -0.3934$, $a_1 = 0.2099$ olarak bulunmuştur. $\delta_1 = \delta_2 = 0.02$ için mutlak ve bağıl hatalar $u(x)$ fonksiyonu için $1.1e-5$ ile $7.2e-4$, $k(x)$ için ise 0.0021 ile 0.001 olarak hesaplanmıştır. $x_1 = 0.3$ ve $x_2 = 0.7$ ılımlı tekil noktaldır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda Şekil 3.11 ile verilmiştir.

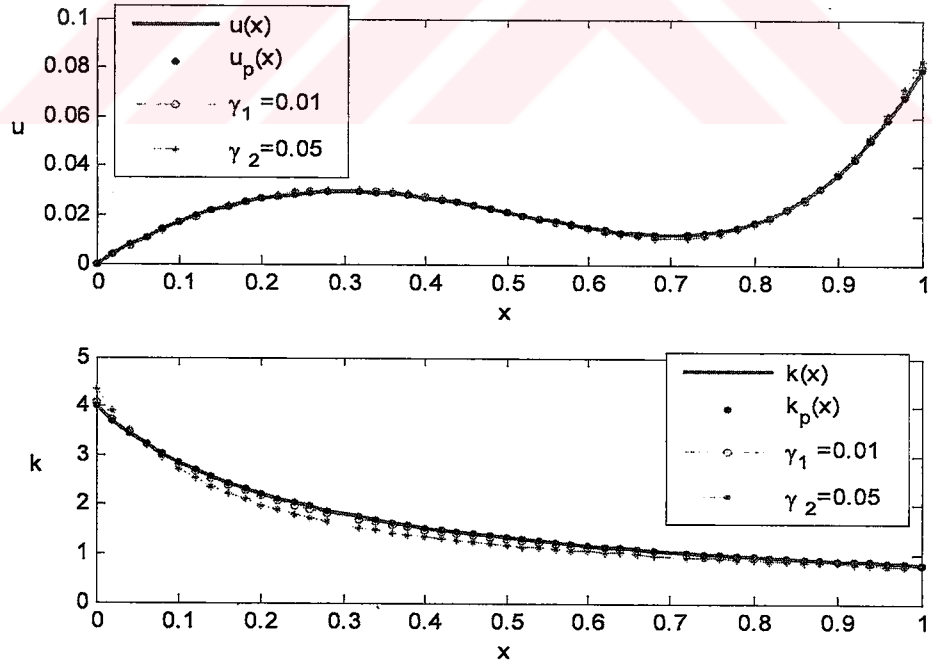
Grafikte “*” ile gösterilen $k_p(x_1)$ ve $k_p(x_2)$ değerleri (3.41) eşitliklerinden hesaplanmıştır. Şekil 3.12’de $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma = 0.001$ için ters problemin bağıl hatası 0.095 iken $\gamma = 0.005$ olduğunda bu hata 0.765’lere yükselmektedir. Buda ters problemin Neumann türü giriş verisine göre kararsız olduğunu göstermektedir. Şekil 3.13’de ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma = 0.01$ için ters problemin bağıl hatası 0.029 iken $\gamma = 0.05$ için hata 0.127 olmaktadır.



Şekil 3.11. İlimli-ılimli bozuk yapılu durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.12. İlimli-ılimli bozuk yapıli durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.13. İlimli-ılimli bozuk yapıli durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.

3.3.2. İlimli-ciddi bozuk yapılı durum ve TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız TKP'ni ele alalım ve (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun $x_1 \in (0,1)$ noktasında ilimli tekil noktaya ($u'(x_1) = 0$, $u'(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_1$), $x_2 \in (0,1)$ noktasında ise ciddi tekil noktaya sahip olduğunu varsayalım ($u'(x_2) = u''(x_2) = 0$, $u''(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_2$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.43)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))|_{x=1} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (3.44)$$

$$(k(x)u'(x;k))|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.45)$$

O zaman (3.10) diferansiyel denklemi, x_1 ve x_2 tekil noktalarında tanımsız olacağından bu noktalarda ters problem de tanımlı değildir. Ancak daha önceden de bilindiği gibi ilimli tekil noktanın özeliği ve denklemin yapısı gereği $k_p(x_1)$ yaklaşık değeri

$$-k_p'(x)u_p'(x) - k_p(x)u_p''(x) + q(x)u_p(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

denklemden $u_p'(x_1) = 0$ olduğu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$k_p(x_1) = \frac{q(x_1)u_p(x_1) - f(x_1)}{u_p''(x_1)}, \quad u_p''(x_1) \neq 0. \quad (3.46)$$

Diğer taraftan x_2 ciddi tekil noktası polinom yaklaşımında kullanabileceğimiz

$$u(x_2) = \beta_2 = \frac{f(x_2)}{q(x_2)} \text{ koşulunu üretir. O zaman } u_p(x) \text{ polinomu}$$

$$u_p(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \quad (3.47)$$

için aşağıdaki 6 koşul sağlanır:

$$u_p(1) = \beta, \quad u_p'(x_1) = 0, \quad u_p'(x_2) = 0, \quad u_p''(x_2) = 0, \quad u_p(x_2) = \beta_2,$$

$$\int_0^1 [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = \phi - \varphi.$$

Bu koşullardan da görüleceği gibi $u_p(x)$ için Lagrange-Hermite polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli (yerel olmayan (nonlocal)) koşulu kullanılmaktadır. Dolayısıyla (3.47) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange-Hermite interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 & 6x_1^5 \\ 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 & 5x_2^4 & 6x_2^5 \\ 0 & 2 & 6x_2 & 12x_2^2 & 20x_2^3 & 30x_2^4 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ \int_0^1 xq(x)dx & \int_0^1 x^2q(x)dx & \int_0^1 x^3q(x)dx & \int_0^1 x^4q(x)dx & \int_0^1 x^5q(x)dx & \int_0^1 x^6q(x)dx \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \left(\beta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \beta_2 \quad \int_0^1 f(x)dx + \varphi - \phi \right)^T.$$

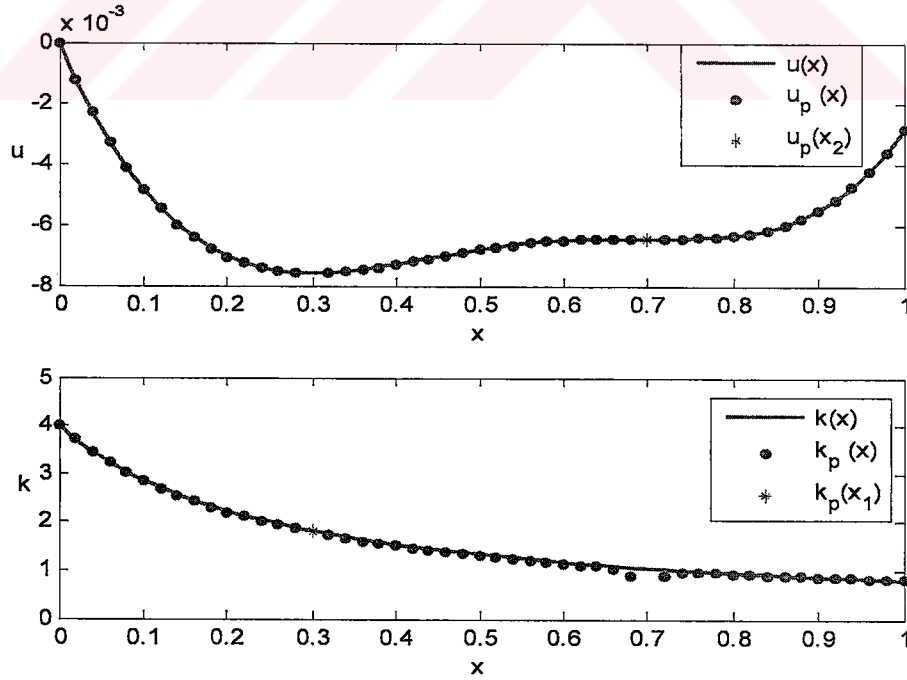
Bilinen yöntemlerle bu sistem çözümlürse ($|\alpha| \neq 0$), (3.47) ile tanımlı Lagrange-Hermite polinomunun katsayıları elde edilir. O zaman ters problemin yaklaşık çözümü x_2 ciddi tekil noktası civarı haricinde,

$$k_p(x) = \frac{1}{u_p'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right\}, \quad x \in [0, x_1 - \delta_1] \cup [x_1 + \delta_1, x_2 - \delta_2] \cup [x_2 + \delta_2, 1]$$

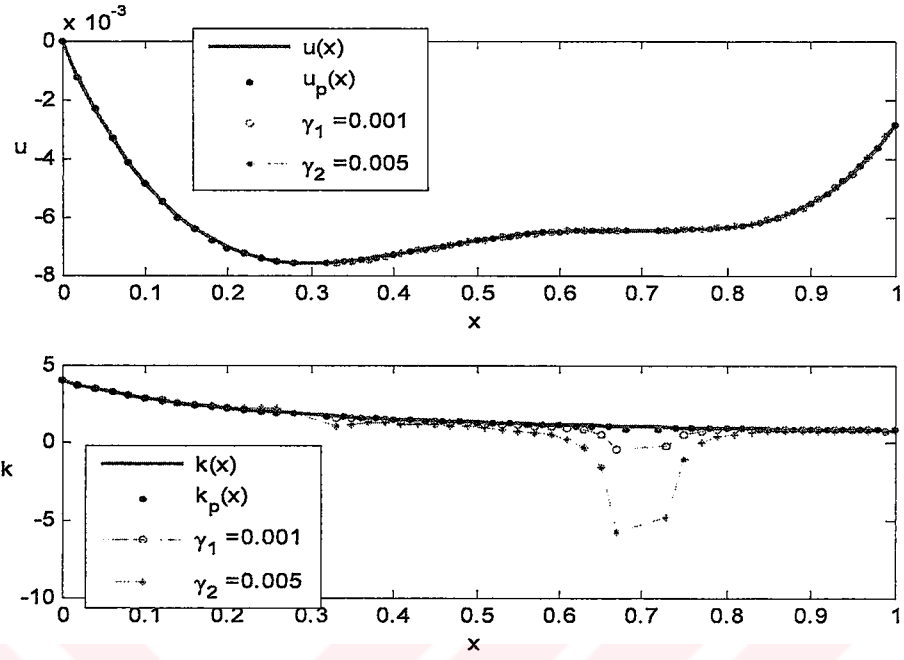
analitik formülü ve (3.46) eşitliğinden elde edilir.

$$\text{Örnek 3.5. } u(x) = (x - x_2 - 2)e^x + \frac{c_1}{3}(x - x_2)^3 + xe^{x_2} + c_2, \quad c_1 = -\frac{e^{x_2} + (x_1 - x_2 - 1)e^{x_1}}{(x_1 - x_2)^2},$$

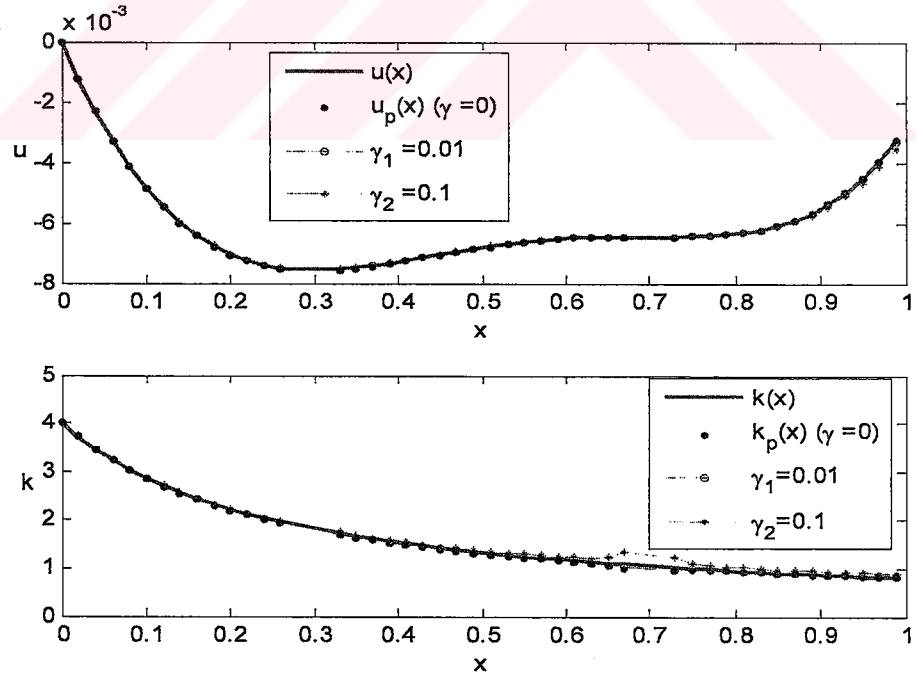
$c_2 = \frac{c_1}{3}x_2^3 + x_2 + 2$, $k(x) = (x + 0.25)^{-1}$, $q(x) = (x + 0.25)^{-2}$ fonksiyonları için problem Matlab Programı ile sayısal olarak çözülmüş ve polinomun katsayıları $a_6 = 4.9e-7$, $a_5 = 0.0410$, $a_4 = 0.0243$, $a_3 = -0.1904$, $a_2 = 0.1877$, $a_1 = -0.0655$ olarak bulunmuştur. $\delta_1 = \delta_2 = 0.03$ için mutlak ve bağıl hatalar $u(x)$ fonksiyonu için $2.1e-5$ ile 0.0040 , $k(x)$ için ise 0.0895 ile 0.0823 olarak hesaplanmıştır. $x_1 = 0.3$ ilımlı, $x_2 = 0.7$ ise ciddi tekil noktadır. Bu fonksiyonların grafikleri şekil 3.14 ile verilmiştir. Şekil 3.15'de $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma = 0.001$, $\gamma = 0.005$ için ters problem ciddi tekil nokta civarında kararsızlaşmaktadır. Şekil 3.16'da ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma = 0.01$ için ters problemin bağıl hatası 0.053 iken $\gamma = 0.1$ için bu hata 0.226 olmaktadır.



Şekil 3.14. İlımlı-ciddi bozuk yapılı durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.15. İlimli-ciddi bozuk yapıli durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.



Şekil 3.16. İlimli-ciddi bozuk yapıli durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümlü.

3.3.3. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum ve TPY'nin uygulanması

(3.7)-(3.9) ile tanımladığımız TKP'ni ele alalım ve (3.7)-(3.8) düz probleminin çözümü olan $u = u(x)$ fonksiyonunun $x_1, x_2 \in (0,1)$ noktalarında ciddi tekil noktaya sahip olduğunu varsayalım ($u'(x_1) = u''(x_1) = 0, u'(x) \neq 0, u''(x) \neq 0, \forall x \neq x_1$) ($u'(x_2) = u''(x_2) = 0, u'(x) \neq 0, u''(x) \neq 0, \forall x \neq x_2$).

$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.48)$$

$$u(0) = 0, \quad (k(x)u'(x))\Big|_{x=1} = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (3.49)$$

$$(k(x)u'(x;k))\Big|_{x=0} = \phi, \quad \phi \in \mathbf{R}, \quad u(x;k)\Big|_{x=1} = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.50)$$

O zaman (3.10) diferansiyel denklemini x_1 ve x_2 tekil noktalarında tanımsız olacağından ters problem de bu noktalarda tanımlı değildir. Diğer taraftan daha önceki benzer durumlardan da bilindiği gibi $x_1, x_2 \in (0,1)$ ciddi tekil noktalarında düz problemin çözümünün değerleri, diferansiyel denklemden aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$u(x_1) = \beta_1 = \frac{f(x_1)}{q(x_1)}, \quad u(x_2) = \beta_2 = \frac{f(x_2)}{q(x_2)}.$$

Biz bu koşullardan Lagrange-Hermit türü interpolasyon polinomunun tanımlanmasında faydalanacağız. O zaman $u_p(x)$ polinomu

$$u_p(x) = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \quad (3.51)$$

için aşağıdaki 8 koşul sağlanır:

$$u_p(1) = \beta, \quad u_p'(x_1) = \beta_1, \quad u_p(x_2) = \beta_2, \quad u_p'(x_1) = 0, \quad u_p'(x_2) = 0, \quad u_p''(x_1) = 0,$$

$$u_p''(x_2) = 0, \quad \int_0^1 [f(x) - q(x)u_p(x)] dx = \phi - \varphi.$$

Bu koşullardan da görüleceği gibi $u_p(x)$ için Lagrange-Hermite polinomları ile ilgili interpolasyon koşullarına ek olarak uyum koşulu sonucu elde edilen integral tipli(yerel olmayan(nonlocal)) koşulu kullanılmaktadır. Dolayısıyla (3.51) ile tanımlı interpolasyon polinomu klasik Lagrange-Hermite interpolasyon polinomundan farklıdır.

Buna göre (3.13) ile verilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_{1j} = 1, \quad \alpha_{2j} = x_1^j, \quad \alpha_{3j} = jx_1^{j-1}, \quad \alpha_{4j} = j(j-1)x_1^{j-2}, \quad \alpha_{5j} = x_2^j, \\ \alpha_{6j} = jx_2^{j-1}, \quad \alpha_{7j} = j(j-1)x_2^{j-2}, \quad \alpha_{8j} = \int_0^1 x^j q(x) dx, \quad j = \overline{1,8}$$

$$\lambda = \left(\beta \quad \beta_1 \quad 0 \quad 0 \quad \beta_2 \quad 0 \quad 0 \quad \int_0^1 f(x) dx + \varphi - \phi \right)^T.$$

Bilinen yöntemlerle bu sistem çözümlerse ($|\alpha| \neq 0$), (3.51) ile tanımlı polinomun katsayıları elde edilir. O zaman ters problemin yaklaşık çözümü

$$k_p(x) = \frac{1}{u'_p(x)} \left\{ \phi - \int_0^x f(t) - q(t)u_p(t) dt \right\}, \quad x \in [0, x_1 - \delta_1] \cup [x_1 + \delta_1, x_2 - \delta_2] \cup [x_2 + \delta_2, 1]$$

analitik formülüyle bulunur.

Örnek 3.6.

$$u(x) = [x^2 - (x_1 + x_2 + 4)x + x_1x_2 + 2(x_1 + x_2 + 2) + 2]e^x + \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x_1 + x_2}{6}x^3 + 0.5x_1x_2x^2 \right)C_2 + C_1x + C_0$$

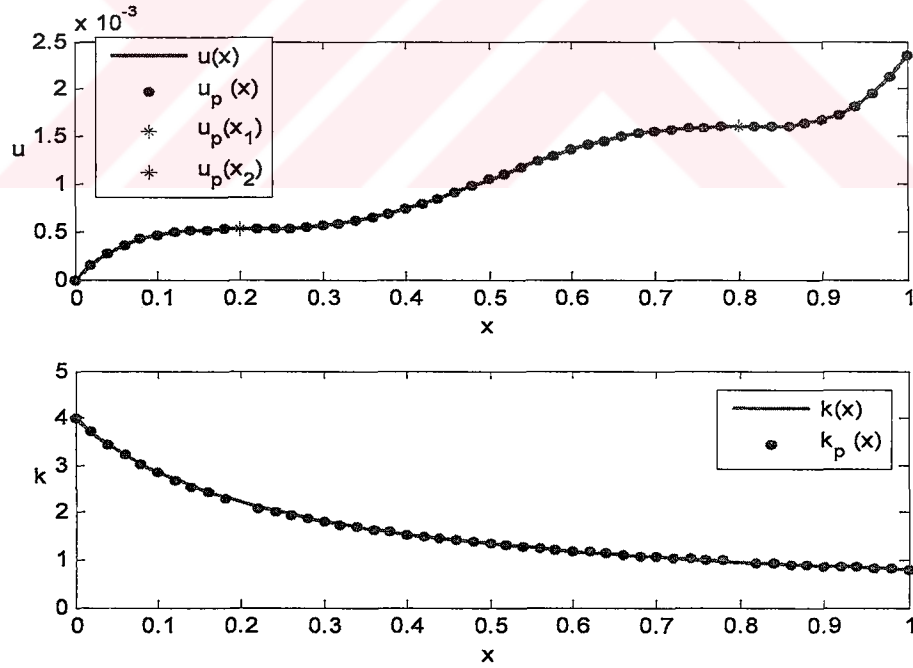
$$C_0 = -x_1x_2 - 2(x_1 + x_2 + 2) - 2, \quad C_1 = -C_5 - C_4C_2, \quad C_2 = (C_6 - C_5)/(C_3 - C_4)$$

$$C_3 = \frac{x_1^3}{3} - 0.5(x_1 + x_2)x_1^2 + x_2x_1^2, \quad C_4 = \frac{x_2^3}{3} - 0.5(x_1 + x_2)x_2^2 + x_1x_2^2$$

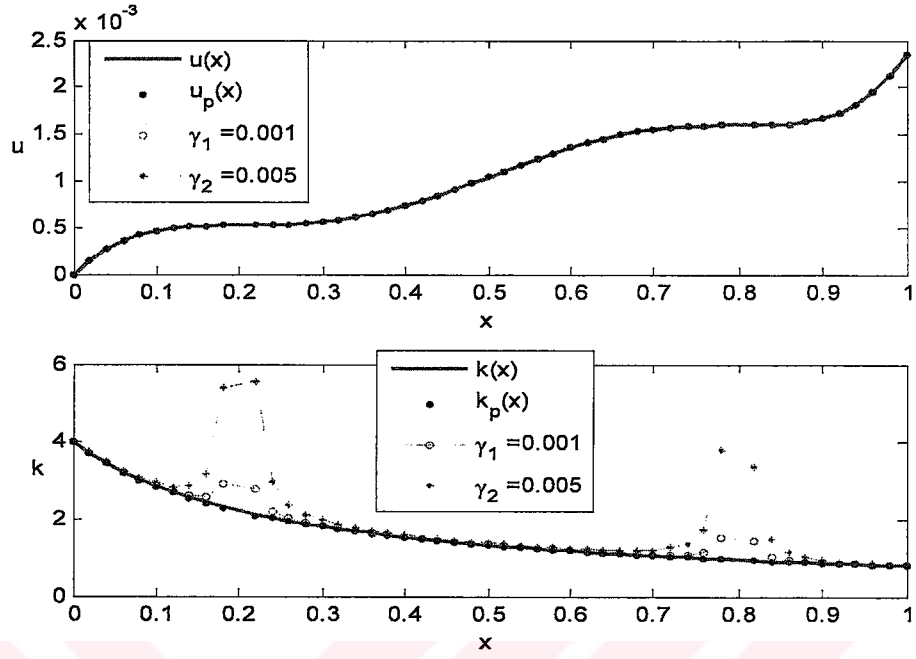
$$C_5 = (x_1^2 - (x_1 + x_2 + 2)x_1 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 2)e^{x_1},$$

$$C_6 = (x_2^2 - (x_1 + x_2 + 2)x_2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 2)e^{x_2},$$

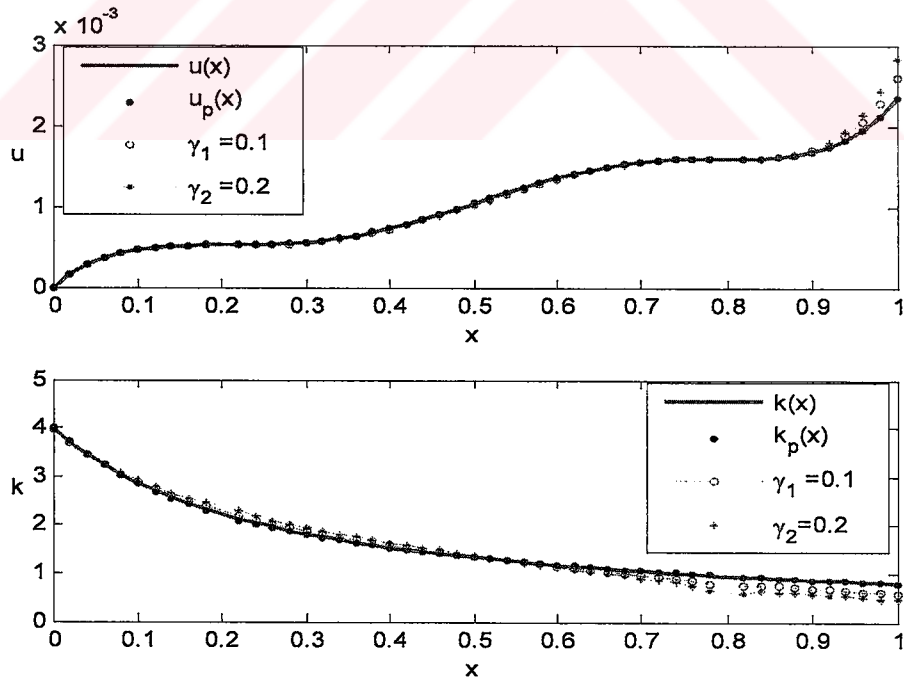
$k(x) = (x + 0.25)^{-1}$, $q(x) = (x + 0.25)^{-2}$ fonksiyonları için problem Matlab Programı ile sayısal olarak çözülmüş ve polinomunun katsayıları $a_8 = 0.0111$, $a_7 = -0.0378$, $a_6 = 0.0767$, $a_5 = -0.0282$, $a_4 = -0.1068$, $a_3 = 0.1310$, $a_2 = -0.0523$, $a_1 = 0.0087$ olarak bulunmuştur. $\delta_1 = \delta_2 = 0.02$ için mutlak ve bağıl hatalar $u(x)$ fonksiyonu için $1.8e-6$ ile $3.5e-3$, $k(x)$ için ise 0.0309 ile 0.0145 olarak hesaplanmıştır. $x_1 = 0.2$ ve $x_2 = 0.8$ ciddi tekil noktalarıdır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda Şekil 3.17 ile verilmiştir. Şekil 3.18'de $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. $\gamma = 0.001$, $\gamma = 0.005$ için ters problem ciddi tekil noktalar civarında kararsızlaşmaktadır. Burada ters problemin bağıl hatası 0.59 ve 2.91 olarak hesaplanmıştır. Şekil 3.19'da ise $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ verisine karşılık bulunan düz ve ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Burada $\gamma = 0.1$ için ters problemin bağıl hatası 0.027 iken $\gamma = 0.2$ için hata 0.42 olmaktadır.



Şekil 3.17. Ciddi-ciddi bozuk yapılu durum için DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümleri.



Şekil 3.18. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Neumann türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.



Şekil 3.19. Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum için hatalı Dirichlet türü giriş verisine karşılık DP ve TKP'nin kesin ve yaklaşık çözümü.

BÖLÜM 4.

TERS POLİNOM YÖNTEMİNİN HATA ANALİZİ

Ters problemlerde çözümün hatası ile ilgili genel düşünce şöyledir: “Ters problemi iyi çözmek istiyorsanız düz problemi iyi çözmelisiniz”. Buradan da anlaşılacağı gibi ters problemin hatasını analiz edebilmek için düz problemin hatasını analiz etmek gerekmektedir. Biz bu analizi, başlangıç anında aşağıdaki iki temel durum için yapacağız. Bunlar:

$$\text{Yöntemin hatası ve sayısal hatanın çözüme etkisi: } \frac{k(x) - k_p(x)}{k(x)}, \quad (4.1)$$

$$\text{Hatalı giriş verilerinin çözüme etkisi: } \frac{k_p(x) - k_\gamma(x)}{k_p(x)}. \quad (4.2)$$

Burada $k_\gamma(x)$ ile, $\phi_\gamma = \phi \mp \gamma\phi$, $\beta_\gamma = \beta \mp \gamma\beta$ hatalı giriş verilerine karşılık ters problemin yaklaşık çözümü gösterilmiştir, γ ise yapılan hata miktarını ifade etmektedir. Şimdi daha önceden tanımladığımız kesin ve yaklaşık çözümün analitik ifadelerinden yola çıkarak aşağıdaki değerlendirmeyi elde edebiliriz. $k(x)$ ve $k_p(x)$ sırasıyla ters problemin kesin ve yaklaşık çözümleri olsun. O zaman,

$$k(x) = \frac{1}{u'(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1]$$

$$k_p(x) = \frac{1}{u'_p(x)} \left\{ \phi - \int_0^x [f(t) - q(t)u_p(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1],$$

$$k_\gamma(x) = \frac{1}{u'_\gamma(x)} \left\{ \phi_\gamma - \int_0^x [f(t) - q(t)u_\gamma(t)] dt \right\}, \quad x \in [0,1]$$

eşitlikleri doğrudur. $W_k(x) = k(x) - k_p(x)$, $W_u(x) = u(x) - u_p(x)$, $m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u_p'(x)|$ olmak üzere bu çözümleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$\delta k(x) := \frac{|k(x) - k_p(x)|}{|k(x)|} \leq M_1 |W_u(x)| + M_2 |W_u'(x)|, \quad M_1 = \frac{c_2}{mc_0}, \quad M_2 = \frac{1}{m} \quad (4.3a)$$

$$\delta k_\gamma(x) := \frac{|k_p(x) - k_\gamma(x)|}{|k_p(x)|} \leq M_3 |W_k(x)| + M_4, \quad M_3 = \frac{1}{c_0}, \quad M_4 = \frac{\gamma c_1}{c_0} \quad (4.3b)$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü gibi ters problemin (4.1) ile gösterilen sayısal ve (4.2) ile gösterilen giriş verilerindeki hatanın etkisinin analizi (4.3)'ün sağ taraftaki terimlerin analizine dayanmaktadır. Şimdi bu analizleri düzgün ve bozuk yapıları durumlar için sırası ile yapalım.

4.1. Düzgün Yapılı (Well-Posed) Durum

$u(x)$, (3.17)-(3.18) düz probleminin çözümü olmak üzere $u_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $x \in [0,1]$ fonksiyonu bu çözümün (3.20)-(3.21) ile tanımlı interpolasyon polinomu olsun.

Lemma 4.1.(Hasanov 2004) $u(x) \in C^3[0,1]$, (3.16)-(3.17) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.20)-(3.21) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman

$$\forall x \in (0,1), \quad W_u(x) = \frac{u'''(t)}{3!} x(x - \tilde{x})(x - 1), \quad t = t(x) \in (0,1)$$

eşitliği doğrudur.

Burada $\tilde{x} \in (0,1)$, (3.2) ile tanımlı geçiş noktasıdır.

Sonuç 4.1.(Hasanov 2004) Lemma 4.1'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\|W_u\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{4!} M_3 \alpha, \quad M_3 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u'''(x)|, \quad \alpha = \max_{0 \leq x \leq 1} |x - \tilde{x}| < 1. \quad (4.4)$$

şimdi ise aşağıdaki lemma ile $W'_u(x) = u'(x) - u'_p(x)$ fonksiyonunun hatasını değerlendirelim.

Lemma 4.2.(Hasanov 2004) Lemma 4.1'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|W'_u(x)| \leq \frac{1}{2} |(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)| M_3, \quad M_3 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u'''(x)|, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in (0,1).$$

Bu lemmadan aşağıdaki sonucun elde edileceği açıktır.

Sonuç 4.2. (Hasanov 2004) Lemma 4.1'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|W'_u(0)| \leq \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 M_3, \quad M_3 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u'''(x)|, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in (0,1). \quad (4.5)$$

Lemma 4.3. Lemma 4.1'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\begin{aligned} \|W_u\|_{C[0,1]} &\leq \frac{5}{8} |u''(c) - 2a_2| + \frac{3}{16} \|u'''\|_{C[0,1]} \\ \|W'_u\|_{C[0,1]} &= \frac{1}{2} |u''(c) - 2a_2| + \frac{1}{8} \|u'''\|_{C[0,1]} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada $c \in (0,1)$ için $W'_u(c) = 0$ dır.

İspat. $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları $W_u(x) = u(x) - u_p(x)$ fonksiyonunun sıfırları olduğunda Rolle teoremine göre $\exists c \in (0,1)$, $W'_u(c) = 0$ dir. O zaman $W_u(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarında Taylor açılımını yazarsak,

$$W_u(x) = W_u(c) + \frac{1}{2}(x-c)^2 W''_u(c) + \frac{1}{6}(x-c)^3 W'''_u(\xi), \quad (4.7)$$

$$\xi = c + \alpha(x-c), \alpha \in (0,1)$$

olur. Eğer $c < 1/2$ ise $x=0$, aksi durumda ise $x = 1$ alıp $W''_u(c) = u''(c) - 2a_2$, $W'''_u(\xi) = u'''(\xi)$ olduğunu göz önüne alırsak her iki durumda da

$$|W_u(c)| \leq \frac{1}{8}|u''(c) - 2a_2| + \frac{1}{48}|u'''(\xi)|$$

bulunur. Bunu (4.7) de yazarsak ispat elde edilir.

Lemmanın diğer hükmü ise (4.7) nin türevinden elde edilir.

4.2. Bozuk Yapılı (Ill-Posed) Durumlar

(3.7)-(3.8) düz probleminin çözümünün, (3.9) ek koşullarını sağladığını varsayalım. $x_0 \in (0,1)$ noktası ise ters problemin ılımlı veya ciddi tekil noktası olsun. Bu durumda yukarıdaki benzer değerlendirmeleri bozuk yapıli durumlar için de elde etmek mümkündür. Şimdi bunları sırasıyla inceleyelim.

4.2.1. İlimli bozuk yapıli durum

$u(x)$, (3.23)-(3.24) düz probleminin çözümü olmak üzere $u_p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $x \in [0,1]$ fonksiyonu bu çözümün (3.27) ile tanımlı interpolasyon polinomu olsun.

Lemma 4.4. $u(x) \in C^6[0,1]$, (3.23)-(3.24) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.27) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman

$$\forall x \in (0,1), \quad W_u(x) = \frac{u^{(6)}(\xi)}{6!} x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_m)^2(x-1), \quad \xi = \xi(x) \in (0,1)$$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b \in (0,1)$, (3.5) ve (3.6) ile tanımlı geçiş noktaları, $x_m \in (0,1)$ ise problemin ilımlı tekil noktasıdır.

İspat. $\delta(x) := x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_m)^2(x-1)$ olmak üzere $F(x) = W_u(x) - \omega\delta(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\forall \hat{x} \in (0,1)$, $F(\hat{x}) = 0$ olacak şekilde $\omega = W_u(\hat{x})/\delta(\hat{x})$ sabitini seçebiliriz. Buna göre $0, x_m, x_a, x_b, \hat{x}, 1$ noktaları $F(x)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. $W'_u(x_s) = \delta'(x_s) = 0$ olacağından Rolle teoremine göre,

$$\exists \xi \in (0,1), F^{(6)}(\xi) = 0, \Rightarrow 0 = u^{(6)}(\xi) - W_u(\hat{x})6!/\delta(\hat{x}) \Rightarrow W_u(\hat{x}) = \delta(\hat{x})u^{(6)}(\xi)/6!.$$

Burada \hat{x} keyfi nokta olduğundan ispat elde edilir. \square

Sonuç 4.3. Lemma 4.4'ün koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\|W_u\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{6!} \frac{1}{4} M_6 \sigma, \quad M_6 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(6)}(x)|, \quad \sigma = \max_{0 \leq x \leq 1} |(x-x_a)(x-x_b)(x-x_m)^2| < 1. \quad (4.8)$$

Lemma 4.5. $u(x) \in C^5[0,1]$, (3.23)-(3.24) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.27) ile tanımlı Lagrange-Hermite interpolasyonu olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|W'_u(x)| \leq \frac{M_5}{4!} |(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3)(x - x_m)|, \quad M_5 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(5)}(x)|, \quad (4.9)$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1) \setminus \{x_m\}.$$

Burada $x_m \in (0,1)$, problemin ılımlı tekil noktasıdır.

İspat. $x_a < x_b \in (0,1)$ noktaları ele alınan problemin geçiş noktaları olmak üzere $0, x_a, x_b, 1 \in (0,1)$ noktaları $W_u(x)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan Rolle teoremine göre $\exists \gamma_1 \in (0, x_a)$, $\exists \gamma_2 \in (x_a, x_b)$, $\exists \gamma_3 \in (x_b, 1)$, $W'_u(\gamma_1) = W'_u(\gamma_2) = W'_u(\gamma_3) = 0$ dir. $\delta(x) := (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3)(x - x_m)$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $\forall \hat{x} \in [0,1] \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, x_m\}$ olmak üzere $g(x) = W'_u(x) - \omega \delta(x)$ fonksiyonunun \hat{x} noktasında sıfır olması talebinden $\omega = W'_u(\hat{x})/\delta(\hat{x})$ sabitini belirleyebiliriz. Buna göre $\hat{x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, x_m$ noktaları $g(x)$ fonksiyonunun sıfırları olacağından yine Rolle teoremine göre $\exists \xi \in (0,1)$, $g^{(4)}(\xi) = 0$. Burada $\delta^{(4)}(\xi) = 4!$ ve $W_u^{(5)}(\xi) = u^{(5)}(\xi)$ olduğunu dikkate alacak olursak

$$0 = W_u^{(5)}(\xi) - 4! W'_u(\hat{x})/\delta(\hat{x}) \Rightarrow W'_u(\hat{x}) = \frac{u^{(5)}(\xi)}{4!} (\hat{x} - \gamma_1)(\hat{x} - \gamma_2)(\hat{x} - \gamma_3)(\hat{x} - x_m)$$

elde edilir. \hat{x} keyfi nokta olduğundan sağ tarafta maksimuma geçilirse ispat elde edilir. \square

Bu lemmadan aşağıdaki sonucun elde edileceği açıktır.

Sonuç 4.4. Lemma 4.5'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|W'_u(0)| \leq \frac{x_m}{4!} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 M_5, \quad M_5 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(5)}(x)|, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1) \setminus \{x_m\}.$$

4.2.2. Ciddi bozuk yapılı durum

$u(x)$, (3.29)-(3.30) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.37) ile tanımlı beşinci dereceden interpolasyon polinomu olsun. O zaman aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

Lemma 4.6. $u(x) \in C^7[0,1]$, (3.29)-(3.30) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.37) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman

$$\forall x \in (0,1), W_u(x) = \frac{u^{(7)}(\xi)}{7!} x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_s)^3(x-1), \xi = \xi(x) \in (0,1) \quad (4.10)$$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b \in (0,1)$, (3.5) ve (3.6) ile tanımlı geçiş noktaları, x_s ise problemin ciddi tekil noktasıdır.

İspat. $\delta(x) := x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_s)^3(x-1)$ olmak üzere $F(x) = W_u(x) - \omega\delta(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\forall \hat{x} \in (0,1)$, $F(\hat{x}) = 0$ olacak şekilde $\omega = W_u(\hat{x})/\delta(\hat{x})$ sabitini seçebiliriz. Buna göre $0, x_s, x_a, x_b, \hat{x}, 1$ noktaları $F(x)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. $W_u'(x_s) = W_u''(x_s) = \delta'(x_s) = \delta''(x_s) = 0$ olacağından Rolle teoremine göre,

$$\exists \xi \in (0,1), F^{(7)}(\xi) = 0, \Rightarrow 0 = u^{(7)}(\xi) - W_u(\hat{x})7!/\delta(\hat{x}) \Rightarrow W_u(\hat{x}) = \delta(\hat{x})u^{(7)}(\xi)/7!.$$

Burada \hat{x} keyfi nokta olduğundan ispat elde edilir. \square

Sonuç 4.5. Lemma 4.6'nın koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$|W_u'(0)| \leq \frac{M_7}{7!} x_a x_b x_s^3, \quad M_7 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(7)}(x)| \quad (4.11)$$

İspat. (4.10) eşitliğinde her iki tarafın türevini alıp $x = 0$ yazdığımızda ispat elde edilir. \square

Sonuç 4.6. Lemma 4.6'nın koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|W'_u(x)| \leq \frac{1}{6!} |(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3)(x - \gamma_4)(x - x_s)^2| M_7, \quad M_7 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(7)}(x)|,$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in (0,1) \setminus \{x_s\}.$$

Burada $x_s \in (0,1)$ problemin ciddi tekil noktasıdır.

İspat: Genelliği bozmayacak şekilde $x_a < x_s < x_b \in (0,1)$ olmak üzere

$0, x_a, x_s, x_b, 1 \in (0,1)$ noktaları $W_u(x)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan Rolle teoremine göre $\exists \gamma_1 \in (0, x_a), \exists \gamma_2 \in (x_a, x_s), \exists \gamma_3 \in (x_s, x_b), \exists \gamma_4 \in (x_b, 1)$ olmak üzere

$$W'_u(\gamma_1) = 0, \quad W'_u(\gamma_2) = 0, \quad W'_u(\gamma_3) = 0 \text{ 'dır.}$$

$\delta(x) := (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3)(x - \gamma_4)(x - x_s)^2$ şeklinde tanımlayalım. O zaman

$\forall \hat{x} \in [0,1] \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, x_s\}$, olmak üzere $g(x) = W'_u(x) - \omega \delta(x)$ fonksiyonunun \hat{x}

noktasında sıfır olması talebinden $\omega = W'_u(\hat{x})/\delta(\hat{x})$ sabitini belirleyebiliriz. Buna göre $\hat{x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, x_s$ noktaları $g(x)$ fonksiyonunun sıfırları ve $g'(x_s) = 0$

olacağından yine Rolle teoremine göre $\exists \xi \in (0,1), g^{(6)}(\xi) = 0$. Burada $\delta^{(6)}(\xi) = 6!$

ve $W_u^{(7)}(\xi) = u^{(7)}(\xi)$ olduğunu dikkate alacak olursak

$$W'_u(\hat{x}) = \frac{u^{(7)}(\xi)}{6!} (\hat{x} - \gamma_1)(\hat{x} - \gamma_2)(\hat{x} - \gamma_3)(\hat{x} - \gamma_4)(\hat{x} - x_s)^2$$

$$W'_u(\hat{x}) = \frac{u^{(7)}(\xi)}{6!} (\hat{x} - \gamma_1)(\hat{x} - \gamma_2)(\hat{x} - \gamma_3)(\hat{x} - \gamma_4)(\hat{x} - x_s)^2$$

olur. \hat{x} keyfi olduğundan ispat elde edilir. \square

4.3. Çok Tekil Noktalı Bozuk Yapılı Durumlar

Şimdi $W_u(x) = u(x) - u_p(x)$, $W'_u(x) = u'(x) - u'_p(x)$ hata fonksiyonu ve onun türevinin analizlerini çoklu tekil nokta içeren bozuk yapıları durumları için yapalım. Burada verilecek lemmaların ispat teknikleri bir önceki bölümde verilenlerle benzer olduğundan burada tekrarlanmamıştır.

4.3.1. İlimli-ılimli bozuk yapıları durum

Lemma 4.7. $u(x) \in C^5[0,1]$, (3.38)-(3.39) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.42) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W_u(x) = \frac{u^{(5)}(\xi)}{5!} x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_c)(x-1), \quad \xi = \xi(x) \in (0,1) \quad (4.12)$$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b, x_c \in (0,1)$ Sonuç 3.2 ile ifade edilen geçiş noktalarıdır.

Lemma 4.8. $u(x) \in C^7[0,1]$ fonksiyonu (3.38)-(3.39) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.42) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W'_u(x) = \frac{u^{(7)}(\xi)}{6!} (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)(x-\gamma_4)(x-x_{m1})(x-x_{m2}) \quad (4.13)$$

$\xi = \xi(x) \in (0,1)$, $\gamma_1 \in (0, x_a)$, $\gamma_2 \in (x_a, x_b)$, $\gamma_3 \in (x_b, x_c)$, $\gamma_4 \in (x_c, 1)$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b, x_c \in (0,1)$ geçiş noktaları, $x_{m1}, x_{m2} \in (0,1)$ ise problemin ılımlı tekil noktalarıdır.

Bu lemmadan aşağıdaki sonucun elde edileceği açıktır.

Sonuç 4.7. Lemma 4.8'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|W'_u(0)| \leq \frac{\gamma M_7}{6!}, \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 x_{m1} x_{m2}, \quad M_7 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(7)}(x)|. \quad (4.14)$$

4.3.2. İlımlı-ciddi bozuk yapılı durum

Lemma 4.9. $u(x) \in C^8[0,1]$, (3.43)-(3.44) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.47) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W_u(x) = \frac{u^{(8)}(\xi)}{8!} x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_c)(x-x_s)^3(x-1), \quad \xi = \xi(x) \in (0,1) \quad (4.15)$$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b, x_c \in (0,1)$, Sonuç 3.2 ile ifade edilen geçiş noktaları, $x_s \in (0,1)$ ise problemin ciddi tekil noktasıdır.

Lemma 4.10. $u(x) \in C^9[0,1]$ fonksiyonu (3.43)-(3.44) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.47) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W'_u(x) = \frac{u^{(9)}(\xi)}{8!} (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)(x-\gamma_4)(x-\gamma_5)(x-x_m)(x-x_s)^2 \quad (4.16)$$

$\xi = \xi(x) \in (0,1)$, $\gamma_1 \in (0, x_a)$, $\gamma_2 \in (x_a, x_b)$, $\gamma_3 \in (x_b, x_s)$, $\gamma_4 \in (x_s, x_c)$, $\gamma_5 \in (x_c, 1)$

eşitliği doğrudur. Burada $x_a, x_b, x_c \in (0,1)$ geçiş noktaları, $x_m \in (0,1)$ problemin ilımlı, $x_s \in (0,1)$ ise ciddi tekil noktasıdır.

Bu lemmadan aşağıdaki sonucun elde edileceği açıktır.

Sonuç 4.8. Lemma 4.10'un koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|W'_u(0)| \leq \frac{\gamma M_9}{8!}, \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 x_m x_s^2, \quad M_9 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(9)}(x)|. \quad (4.17)$$

4.3.3 Ciddi-ciddi bozuk yapılı durum

Lemma 4.11. $u(x) \in C^{11}[0,1]$, (3.48)-(3.49) düz probleminin kesin çözümü, $u_p(x)$ ise bu çözümün (3.51) ile tanımlı interpolasyonu olsun. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W_u(x) = \frac{u^{(11)}(\xi)}{11!} x(x-x_a)(x-x_b)(x-x_c)(x-x_{s1})^3(x-x_{s2})^3(x-1) \quad (4.18)$$

$$\xi = \xi(x) \in (0,1),$$

eşitliği doğrudur.

Burada $x_a, x_b, x_c \in (0,1)$ Sonuç 3.2 ile ifade edilen geçiş noktaları, $x_{s1}, x_{s2} \in (0,1)$ ise problemin ciddi tekil noktalarıdır.

Lemma 4.12. Lemma 4.11'in koşulları sağlansın. O zaman $\forall x \in (0,1)$ için

$$W'_u(x) = \frac{u^{(11)}(\xi)}{10!} (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)(x-\gamma_4)(x-\gamma_5)(x-\gamma_6)(x-x_{s1})^2(x-x_{s2})^2 \quad (4.19)$$

$$\xi = \xi(x) \in (0,1), \quad \gamma_1 \in (0, x_a), \quad \gamma_2 \in (x_a, x_{s1}), \quad \gamma_3 \in (x_{s1}, x_b), \gamma_4 \in (x_b, x_{s2}), \\ \gamma_5 \in (x_{s2}, x_c), \quad \gamma_6 \in (x_c, 1),$$

eşitliği doğrudur.

Bu lemmadan aşağıdaki sonucun elde edileceği açıktır.

Sonuç 4.9. Lemma 4.11'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|W'_u(0)| \leq \frac{\gamma M_{11}}{10!}, \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 x_{s1}^2 x_{s2}^2, \quad M_{11} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(11)}(x)|. \quad (4.20)$$

4.4. Ters Problemlerin Sayısal Hata Analizi ve Duyarlılık Sayısı

(3.16a) ve (3.16b) ile verilen ters problemin yaklaşık analitik çözüm formülleri, Neumann ve Dirichlet türü ϕ ve β ölçülmüş giriş verilerinin, ters problem üzerindeki etkilerini analiz etmemize imkân sağlamaktadır. Bu analiz ise düzgün ve bozuk yapılı ters problemlerin, bu ölçülmüş verilere göre hassaslığını değerlendirmemizi sağlayacaktır.

4.4.1. Yöntemin ve bilgisayar programının hatasının analizi

Şimdi, yukarıda sırasıyla incelediğimiz düzgün yapılı ve tek-çok noktalı bozuk yapılı durumlarda için elde ettiğimiz hata değerlendirme sonuçlarını, (4.3a) ile verilen ifadeye kullanarak, TPY'nin başlangıç anındaki ($x = 0$) hatasını değerlendirelim. O zaman bu değerlendirme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta k(0) := \frac{|k(0) - k_p(0)|}{k(0)} \leq \frac{1}{m} |u'_p(0) - u'(0)|, \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|$$

Lemma 4.13. Lemma 4.1'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\delta k^{(wp)}(0) \leq \frac{\gamma_1 \gamma_2 M_3}{2m}, \quad M_3 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u'''(x)|, \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in (0,1). \quad (4.21).$$

Lemma 4.14. Lemma 4.5'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\delta k^{(m)}(0) \leq \frac{x_m}{m4!} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 M_5, \quad M_5 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|, \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|. \quad (4.22)$$

Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1)$, x_m ise problemin ılımlı tekil noktasıdır.

Lemma 4.15. Lemma 4.6'nın koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\delta k^{(s)}(0) \leq \frac{M_7}{m7!} x_a x_b x_s^3, \quad M_7 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(7)}(x)|, \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|. \quad (4.23)$$

Burada x_s problemin ciddi tekil noktası, $x_a, x_b \in (0,1)$ ise (3.5) ve (3.6) ile tanımlı geçiş noktalarıdır.

Lemma 4.16. Lemma 4.8'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\delta k^{(mm)}(0) \leq \frac{\gamma M_7}{m6!}, \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 x_{m1} x_{m2}, \quad M_7 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(7)}(x)|, \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|. \quad (4.24).$$

Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in (0,1)$, x_{m1}, x_{m2} ise problemin ılımlı tekil noktalarıdır.

Lemma 4.17. Lemma 4.10'un koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\delta k^{(ms)}(0) \leq \frac{\gamma M_9}{m8!}, \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 x_m x_s^2, M_9 = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(9)}(x)|, m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|. \quad (4.25)$$

Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \in (0,1)$, x_m, x_s ise problemin sırasıyla ılımlı ve ciddi tekil noktalarıdır.

Lemma 4.18. Lemma 4.11'in koşulları sağlansın. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\delta k^{(ss)}(0) \leq \frac{\gamma M_{11}}{m10!}, \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 x_{s1}^2 x_{s2}^2, M_{11} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(11)}(x)|, m = \min_{0 \leq x \leq 1} |u'_p(x)|. \quad (4.26)$$

Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 \in (0,1)$, $x_{s1}, x_{s2} \in (0,1)$ ise problemin ciddi tekil noktalarıdır.

Bu lemmalardan da görüleceği gibi paydalardaki 6!, 8! ve 10! sayıları çözümün başlangıç anındaki hatasını değerlendirme açısından bir sıralama ortaya koymaktadır. Öte yandan ciddi tekil nokta içeren durumlar problemin yapısı açısından kötü olmasına karşılık yaklaşık çözümün hatasının en az olduğu durumlardır. Şimdi aynı durumlar için hatalı verilen ölçülmüş değerlerin çözüm üzerindeki etkilerini inceleyelim.

4.4.2. Hatalı giriş verilerinin etkisinin analizi (noise analysis)

γ sayısı yapılan hata değeri olmak üzere $\phi_\gamma = \phi + \gamma\phi$ ve/veya $\beta_\gamma = \beta + \gamma\beta$ Neuman ve Dirichlet verilerinin hatalı ölçüldüğünü varsayalım. O zaman (3.14)-(3.15) Cauchy problemi aşağıdaki heyecanlandırılmış probleme (HTKP) dönüşür:

$$\begin{cases} k'_\gamma(x) + \frac{u''_\gamma(x)}{u'_\gamma(x)} k_\gamma(x) = -\frac{f(x) - q(x)u_\gamma(x)}{u'_\gamma(x)}, & x \in (0,1) \\ k_\gamma(0) = \frac{\phi_\gamma}{u'_\gamma(0)}, & u'_\gamma(0) \neq 0 \end{cases},$$

Burada

$$u_\gamma(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots + \tilde{a}_m x^m, \quad m > 1 \quad (4.27)$$

polinomu, hatalı giriş verilerine karşılık elde edilen düz problemin çözümünün Lagrange-Hermite türü interpolasyon yaklaşımıdır. Şimdi ϕ_γ , β_γ Neumann ve Dirichlet türü giriş verilerinin, HTKP probleminin çözümüne etkisini analiz edelim.

4.4.2.1. Neuman türü giriş verisinin etkisinin analizi

γ sayısı yapılan hata değeri olmak üzere $\phi_\gamma = \phi + \gamma\phi$ olsun. O zaman HTKP probleminin çözümünün $x=0$ noktasındaki bağıl hata değerlendirmesi aşağıdaki gibidir:

$$\delta k_\gamma(0) := \left| \frac{k_p(0) - k_\gamma(0)}{k_p(0)} \right| \leq \frac{1}{|u'_\gamma(0)|} \left\{ \frac{1}{|\gamma|} |u'_\gamma(0) - u'_p(0)| + |u'_p(0)| \right\} \gamma, \quad \gamma \neq 0 \quad (4.28)$$

Burada

$$R_N(\gamma) := \frac{1}{|u'_\gamma(0)|} \left\{ \frac{1}{|\gamma|} |u'_\gamma(0) - u'_p(0)| + |u'_p(0)| \right\} \quad (4.29)$$

ifadesine TKP'nin Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı denir.

O zaman (4.28) ve (4.29)'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.19. $k = k_p(x)$ (3.7)-(3.9) ters probleminin yaklaşık çözümü, $k = k_\gamma(x)$ ise aynı problemin ϕ_γ değerine karşılık elde edilen yaklaşık çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\delta k_\gamma(0) = \left| \frac{k_p(0) - k_\gamma(0)}{k_p(0)} \right| \leq R_N(\gamma)\gamma, \quad R_N(\gamma) = \frac{1}{|\tilde{a}_1|} \left\{ \frac{1}{|\gamma|} |\tilde{a}_1 - a_1| + |a_1| \right\}. \quad (4.30)$$

Burada \tilde{a}_1 ve a_1 sayıları sırasıyla (4.27) ve (3.12) ile tanımlı polinomların x -li terimlerinin katsayılarıdır.

Matris teorisinden de bilindiği gibi duyarlılık sayısı matrisin yapısını ortaya koymaktadır. Bu sayısının büyüklüğü matrisin duyarlılığı ile bağlantılıdır. Bu gerçek aynen ters problem için de geçerlidir. Çünkü (4.29) eşitliğinden de görüleceği gibi, ters problemin duyarlılık sayısı, $u'_\gamma(0)$ değerine bağlıdır. $u_\gamma(x)$ polinomunun katsayıları ise (3.13) lineer cebirsel denklemler sisteminin çözümünden elde edilmektedir. Dolayısıyla (3.13) sisteminin katsayılar matrisinin duyarlılığı, (4.29) sayısının değeri ile doğrudan bağlantılıdır.

Yöntemin uygulanmasından da görüleceği gibi hatalı giriş verileri (3.13) cebirsel denklemler sisteminin sadece sağ tarafını etkilemektedir (bkz. Alt bölüm 3.2). Buda bizi cebirsel denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili, sayısal analiz literatüründe çok iyi bilinen aşağıdaki sonuca götürür. $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ ve $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$, sırasıyla ters problemin ϕ ve ϕ_γ Neumann türü giriş verilerine karşılık (3.12) ve (4.27) ile tanımlı polinomların katsayılarının oluşturduğu vektörler, λ ve $\tilde{\lambda}$ ise ϕ ve ϕ_γ için (3.13) sisteminin sağ taraf vektörleri olsun. O zaman

$$\alpha \mathbf{a} = \lambda, \quad \alpha \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\lambda}$$

cebirsel denklem sistemlerinin çözümleri için aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 4.20 (Kincaid and Cheney, 1991). \mathbf{a} ve $\tilde{\mathbf{a}}$ yukarıdaki denklem sistemlerinin sırasıyla λ ve $\tilde{\lambda}$ sağ tarflarına karşılık bulunan çözümleri olsun. O zaman

$$\frac{\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\|_e}{\|\mathbf{a}\|_e} \leq \|\alpha\| \|\alpha^{-1}\| \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|_e}{\|\lambda\|_e}. \quad (4.31)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada

$$K(\alpha) := \|\alpha\| \|\alpha^{-1}\| \quad (4.32)$$

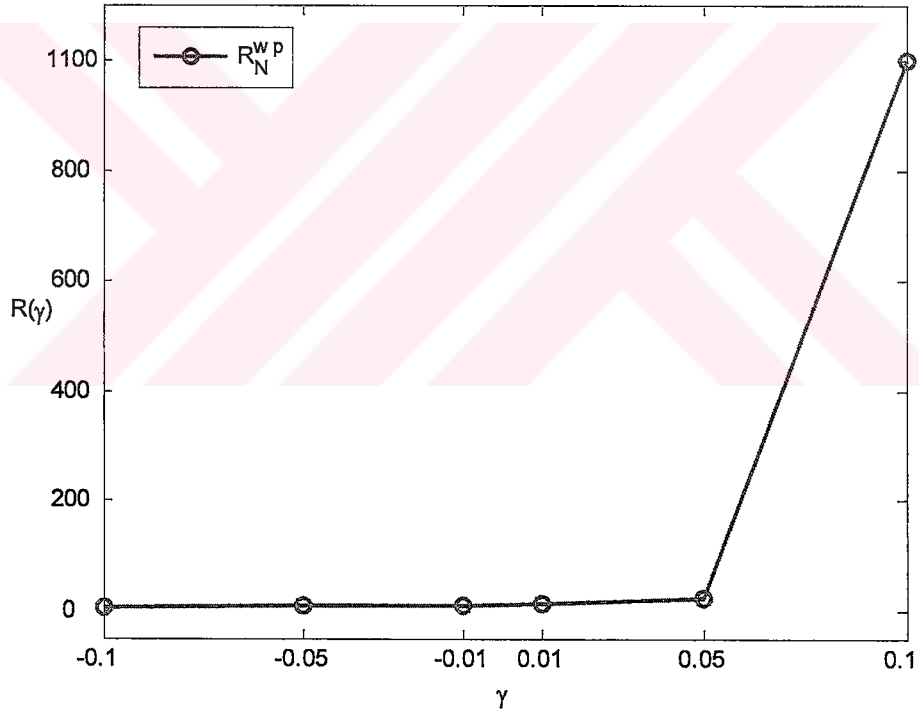
sayısına α katsayılar matrisinin duyarlılık sayısı(condition number) denir. (4.31)'den de görüleceği gibi duyarlılık sayısı çok büyük olduğunda, (3.13) sisteminin sağ tarafında çok küçük hata yapılmış olsa bile bu çözüme çok büyük ölçüde yansiyacaktır. Benzer durum β Dirichlet türü giriş verisi için de geçerlidir.

Diğer taraftan ters problemin bağıl hatasının $u'_\gamma(0)$ değeri ile ilişkili olması, farklı giriş verilerindeki hatanın HTKP'nin çözümünü ne şekilde etkileyeceğini analiz etmemize imkan sağlar. (4.29) ifadesi, aynı zamanda ters problemlerin duyarlılık sayılarının açık formülünü ifade ettiğinden bu değer yukarıda sözü edilen düzgün ve bozuk yapıli ters katsayı problemlerinin her biri için ayrı ayrı hesaplanabilir. Şimdi Neumann türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayılarını düzgün ve çok tekil noktali bozuk yapıli durumlar için elde edelim.

Düzgün yapıli durum: $u_p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $u'_p(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$ ve $u_\gamma(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2$ polinomları sırasıyla ϕ ve ϕ_γ değerlerine karşılık (3.17)-(3.18) düz problemin yaklaşık çözümleri olsun. Bu durumda (3.13) denklemler sisteminin katsayılar matrisinin determinantı ve duyarlılık sayıları $|\alpha| = -0.4142$, $K(\alpha) = 36.4069$ şeklinde elde edilmektedir. Neumann türü giriş verisi için ters problemin kararlılık sayısı (R_N^{wp}) ise (4.30) formülünden bazı γ değerleri için aşağıdaki gibi elde edilmiştir(Tablo 4.1). Şekil3.1 ve Şekil 3.2'nin karşılaştırılmasından da görüleceği gibi (3.17)-(3.19) ters problemi, Neumann türü giriş verisine göre, özellikle $x=0$ başlangıç noktası civarında kararsızdır. Ayrıca problem düzgün yapıda olmasına karşın bazı γ değerleri için HTKP'nin yapısı düzgün olmayabilmektedir (Hasanov 2003). Bu Şekil 4.1'den de görülmektedir.

Tablo 4.1. Düzgün yapıli TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için için bağılı hatası ve duyarlılık sayısı.

γ	a_1	\tilde{a}_1	δk_γ	$R_N^{wp}(\gamma)$
-0.1	0.9552	1.9210	98.20	5.5249
-0.05	0.9552	1.4381	65.53	7.3802
-0.01	0.9552	1.0518	0.70	10.0922
0.01	0.9552	0.8586	0.18	12.3589
0.05	0.9552	0.4723	1.22	22.4707
0.1	0.9552	-0.0106	104.76	1001.1



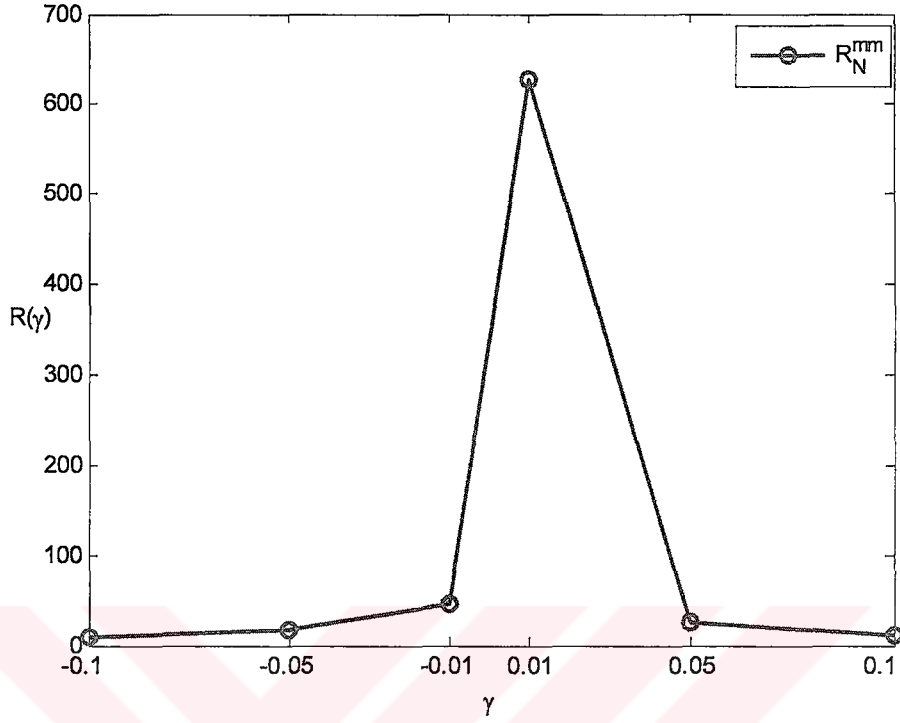
Şekil 4.1. Düzgün yapıli TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

İlimli-ılimli bozuk yapıli durum: $u_p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$,
ve $u_\gamma(x) = \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_3x^3 + \tilde{a}_4x^4 + \tilde{a}_5x^5 + \tilde{a}_6x^6$ polinomları sırasıyla ϕ ve ϕ_γ
değerlerine karşılık (3.38)-(3.39) düz problemin yaklaşık çözümleri olsun. Bu
durumda (3.13) denklemler sisteminin katsayılar matrisinin determinanı ve

duyarlılık sayıları $|\alpha| = 4.9266e - 009$, $K(\alpha) = 4.1516e + 004$ şeklinde elde edilmektedir. Görüldüğü gibi $K(\alpha)$ sayısı oldukça büyüktür. Dolayısıyla lemma 4.20'nin sonucu olarak yapılan hata çok küçük olsa bile bu çözümü büyük ölçüde etkileyecektir. Gerçekten de örnek 3.4 ve Şekil 3.12'den de görüleceği gibi ters problemin yaklaşık çözümü tekil noktalar ve başlangıç noktası civarında bozulmaktadır. Bu ise ters problemin Neumann türü giriş verisine göre duyarlı olduğunu göstermektedir. Tablo 4.2 ve Şekil 4.2 ile ters problemin Neumann türü giriş verisi için R_N^{mm} duyarlılık sayısının değerleri ve grafiği verilmiştir. Buradaki polinom yaklaşımı yüksek dereceden olduğundan duyarlılık sayısı problemin duyarlılığını destekleyememektedir.

Tablo 4.2. İlimli-ılimli bozuk yapı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

γ	a_1	\tilde{a}_1	δk_γ	$R_N^{mm}(\gamma)$
-0.1	0.2099	2.0172	22.31	9.0636
-0.05	0.2099	1.1135	9.90	16.4190
-0.01	0.2099	0.3906	0.71	46.8050
0.01	0.2099	0.0292	6.27	626.024
0.05	0.2099	-0.6938	1501.10	26.3530
0.1	0.2099	-1.5974	30.57	11.445

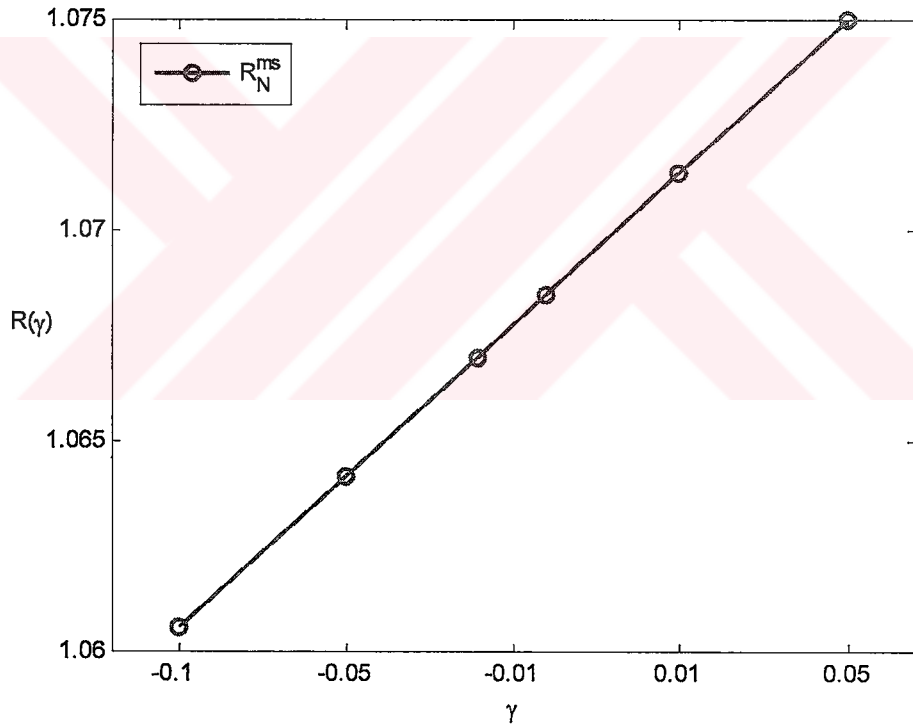


Şekil 4.2. İlimli ilimli bozuk yapı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

İlimli-ciddi bozuk yapı durumu: $u_p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$, ve $u_\gamma(x) = \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_3x^3 + \tilde{a}_4x^4 + \tilde{a}_5x^5 + \tilde{a}_6x^6$ polinomları sırasıyla ϕ ve ϕ_γ değerlerine karşılık (3.43)-(3.44) düz problemin yaklaşık çözümleri olsun. Bu durumda (3.13) denklemler sisteminin katsayılar matrisinin determinanı ve duyarlılık sayıları $|\alpha| = 1.8028e-006$, $K(\alpha) = 1.6294e+005$ şeklinde elde edilmektedir. Görüldüğü gibi $K(\alpha)$ sayısı oldukça büyüktür. Dolayısıyla lemma 4.20'nin sonucu olarak yapılan hata çok küçük olsa bile bu çözümü büyük ölçüde etkileyecektir. Gerçekten de Örnek 3.5 ve Şekil 3.15'den de görüleceği gibi ters problemin yaklaşık çözümü ciddi tekil nokta civarında bozulmaktadır. Bu ise ters problemin Neumann türü giriş verisine göre duyarlı olduğunu göstermektedir. Tablo 4.3 ve Şekil 4.3 ile ters problemin Neumann türü giriş verisi için R_N^{ms} duyarlılık sayısının değerleri ve grafiği verilmiştir. Buradan da görüleceği gibi duyarlılık sayısı değerleri çok değişmemektedir. Bu ise HTKP'nin başlangıç anındaki çözümün çok etkilenmeyeceğini göstermektedir (Şekil 3.15).

Tablo 4.3. Ilımlı-ciddi bozuk yapı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

γ	a_1	\tilde{a}_1	δk_γ	$R_N^{ms}(\gamma)$
-0.1	-0.0655	-0.0660	127.09	1.0606
-0.05	-0.0655	-0.0657	62.93	1.0642
-0.01	-0.0655	-0.0656	12.43	1.0670
0.01	-0.0655	-0.0655	12.55	1.0685
0.05	-0.0655	-0.0653	61.97	1.0714
0.1	-0.0655	-0.0651	122.77	1.075



Şekil 4.3. Ilımlı ciddi bozuk yapı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

Ciddi-ciddi bozuk yapı durumu:

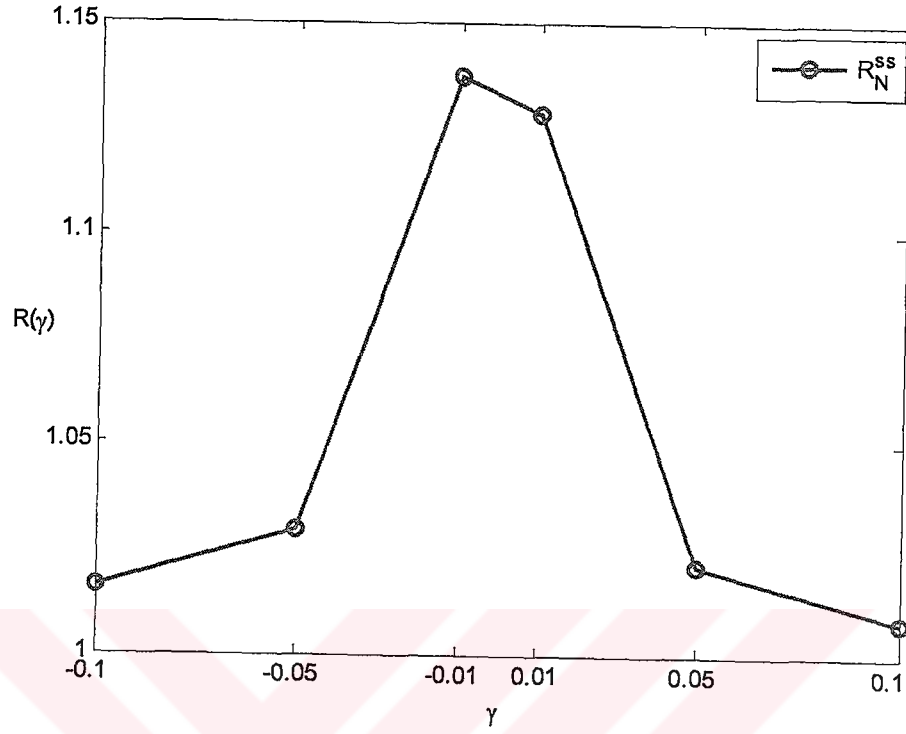
$$u_p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8, \quad \text{ve}$$

$$u_\gamma(x) = \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_3x^3 + \tilde{a}_4x^4 + \tilde{a}_5x^5 + \tilde{a}_6x^6 + \tilde{a}_7x^7 + \tilde{a}_8x^8 \text{ polinomları sırasıyla}$$

ϕ ve ϕ_γ değerlerine karşılık (3.48)-(3.49) düz problemin yaklaşık çözümleri olsun. Bu durumda (3.13) denklemler sisteminin katsayılar matrisinin determinanı ve duyarlılık sayıları $|\alpha| = -1.4886e-011$, $K(\alpha) = 3.0521e+007$ şeklinde elde edilmektedir. Görüldüğü gibi $K(\alpha)$ sayısı oldukça büyüktür. Dolayısıyla lemma 4.20'nin sonucu olarak yapılan hata çok küçük olsa bile bu çözümü büyük ölçüde etkileyecektir. Gerçekten de Örnek 3.6 ve Şekil 3.18'den de görüleceği gibi yapılan γ hata miktarları çok küçük olmasına rağmen ters problemin yaklaşık çözümü ciddi tekil noktalar civarında bozulmaktadır. Bu ise ters problemin Neumann türü giriş verisine göre duyarlı olduğunu göstermektedir. Tablo 4.4 ve Şekil 4.4 ile ters problemin Neumann türü giriş verisi için R_N^{ss} duyarlılık sayısının değerleri ve grafiği verilmiştir. Buradan da görüleceği gibi duyarlılık sayısı değerleri çok değişmemektedir. Bu ise HTKP'nin başlangıç anındaki çözümün çok etkilenmeyeceğini göstermektedir (Şekil 3.18).

Tablo 4.4. Ciddi-ciddi bozuk yapı TKP'nin hatalı Neumann türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

γ	a_1	\tilde{a}_1	δk_γ	$R_N^{ss}(\gamma)$
-0.1	0.0087	0.0087	58.03	1.0160
-0.05	0.0087	0.0087	29.02	1.0296
-0.01	0.0087	0.0087	5.80	1.1369
0.01	0.0087	0.0087	5.82	1.1281
0.05	0.0087	0.0087	29.05	1.0212
0.1	0.0087	0.0087	58.11	1.0081



Şekil 4.4. Ciddi ciddi bozuk yapılı TKP'nin Neumann türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

4.4.2.2. Dirichlet türü giriş verisinin etkisinin analizi

Şimdi ise hatalı Dirichlet türü sınır koşulunun etkisini analiz edelim. γ sayısı yapılan hata değeri olmak üzere $\beta_\gamma = \beta + \gamma\beta$ hatalı veri olsun. (3.10) problemi ve (3.11) koşullarından görüleceği gibi Neumann türü başlangıç koşulundan farklı olarak, Dirichlet türü giriş verisinin ters problemin yaklaşık çözümüne etkisi sadece interpolasyon polinomu üzerindedir. Oysa Neumann türü sınır koşulu kendisini polinomun şekillenmesinde gösterdiği gibi başlangıç koşulunda da yer almaktadır. Dolayısıyla Dirichlet türü giriş verisinin etkisinin, Neumann türüne göre daha az olacağını tahmin edebiliriz. Gerçekten de Şekil 3.3, Şekil3.13, Şekil 3.16 ve Şekil 3.19 dan da görüleceği gibi ters problemin yaklaşık çözümleri $x=1$ noktası civarında hemen hemen hiç değişmemektedir. Şimdi, yukarıda Neumann türü giriş verisi için elde ettiğimiz duyarlılık sayısı değerlerini, Dirichlet giriş verisi için tekrarlayalım.

$\beta_\gamma = \beta + \gamma\beta$ olsun. O zaman (3.11) eşitliklerindeki hatalı başlangıç koşulu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$k_\gamma(1) = \frac{\Phi}{u'_\gamma(1)}, \quad u'_\gamma(1) \neq 0.$$

Burada $u'_\gamma(x)$, (4.27) ile tanımlı, β_γ hatalı giriş verisine karşılık elde edilen interpolasyon polinomudur. O zaman başlangıç koşulunun bağlı hatasının değerlendirilmesi için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\delta k_\gamma(1) := \left| \frac{k_p(1) - k_\gamma(1)}{k_p(1)} \right| = \left| \frac{u'_\gamma(1) - u'_p(1)}{\gamma u'_\gamma(1)} \right| |\gamma|. \quad (4.33)$$

Burada

$$R_D(\gamma) := \left| \frac{u'_\gamma(1) - u'_p(1)}{\gamma u'_\gamma(1)} \right| \quad (4.34)$$

ifadesine TKP'nin Dirichlet türü giriş verisine karşılık gelen duyarlılık sayısı denir. Buradan aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.21. $k = k_p(x)$ (3.7)-(3.9) probleminin yaklaşık çözümü, $k = k_\gamma(x)$ ise aynı problemin β_γ değerine karşılık elde edilen yaklaşık çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik doğrudur.

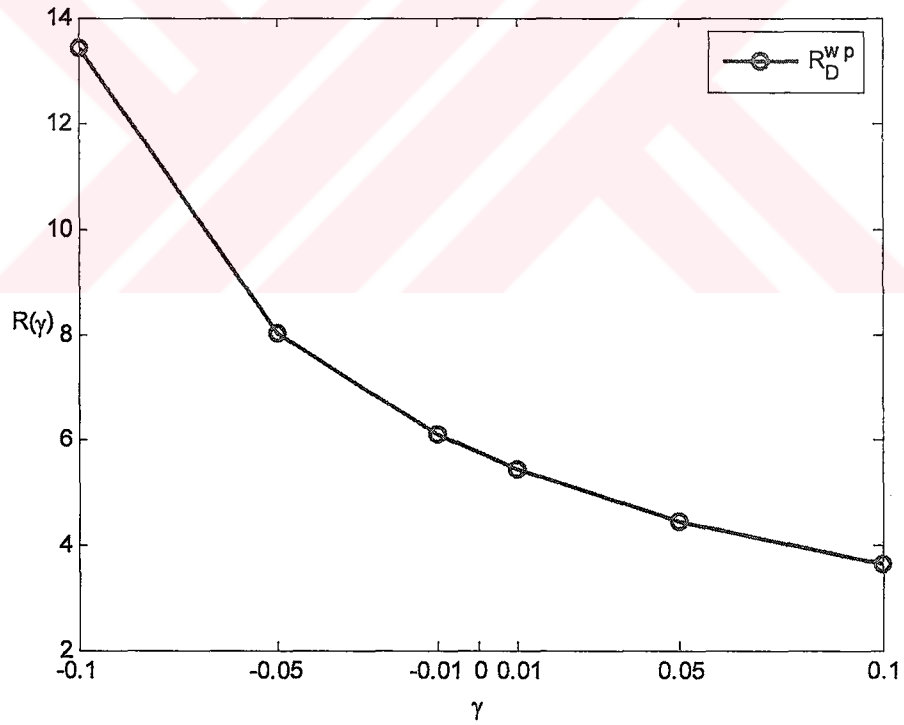
$$\delta k_\gamma(1) = \left| \frac{u'_\gamma(1) - u'_p(1)}{\gamma u'_\gamma(1)} \right| |\gamma| = R_D(\gamma) |\gamma|, \quad R_D(\gamma) = \left| \frac{\tilde{a} - a}{\gamma \tilde{a}} \right|. \quad (4.35)$$

Burada

$$\tilde{a} := u'_\gamma(1) = \tilde{a}_1 + 2\tilde{a}_2 + \dots + m\tilde{a}_m, \quad a := u'_p(1) = a_1 + 2a_2 + \dots + ma_m, \quad m > 1.$$

Tablo 4.5. Düzgün yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

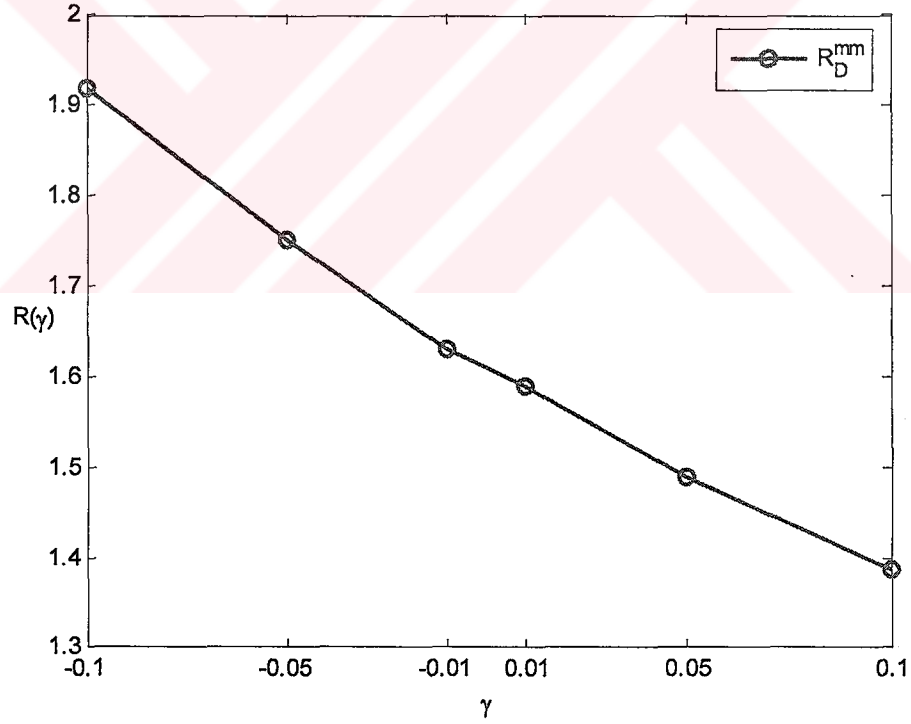
γ	a	\tilde{a}	δk_γ	$R_D^{wp}(\gamma)$
-0.1	0.3318	0.1417	1.82	13.421
-0.05	0.3318	0.2367	0.69	8.032
-0.01	0.3318	0.3128	0.28	6.08
0.01	0.3318	0.3508	0.14	5.42
0.05	0.3318	0.4268	0.12	4.454
0.1	0.3318	0.5219	0.23	3.643



Şekil 4.5. Düzgün yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

Tablo 4.6. İlimli-ılimli bozuk yapı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

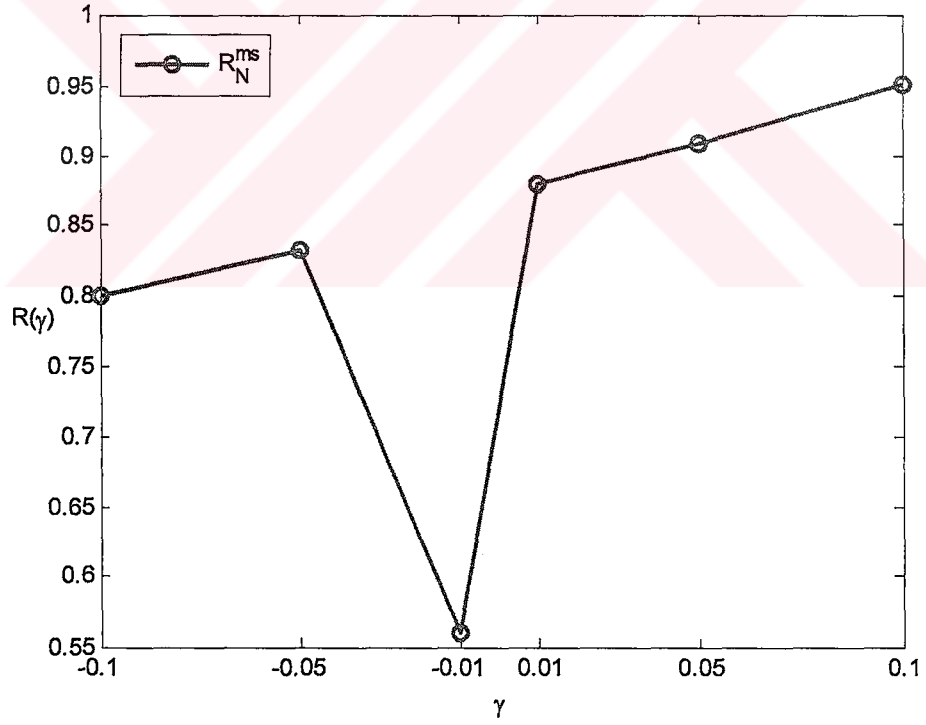
γ	a	\tilde{a}	δk_γ	$R_D^{mm}(\gamma)$
-0.1	0.5704	0.4785	0.40	1.919
-0.05	0.5704	0.5245	0.17	1.752
-0.01	0.5704	0.5612	0.03	1.63
0.01	0.5704	0.5796	0.03	1.59
0.05	0.5704	0.6163	0.13	1.49
0.1	0.5704	0.6623	0.23	1.387



Şekil 4.6. İlimli ılimli bozuk yapı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

Tablo 4.7. İlimli-ciddi bozuk yapı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

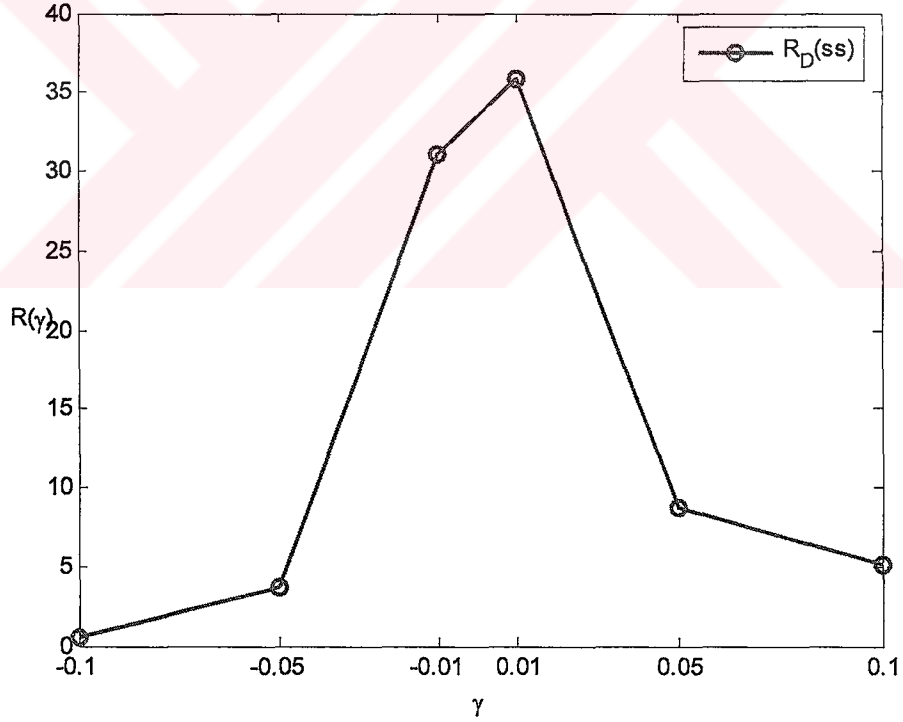
γ	a	\tilde{a}	δk_γ	$R_D^{ms}(\gamma)$
-0.1	0.0410	0.0446	0.36	0.799
-0.05	0.0410	0.0428	0.22	0.832
-0.01	0.0410	0.0414	0.11	0.56
0.01	0.0410	0.0406	0.05	0.88
0.05	0.0410	0.0392	0.07	0.908
0.1	0.0410	0.0374	0.23	0.951



Şekil 4.7. İlimli ciddi bozuk yapı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

Tablo 4.8. Ciddi-ciddi bozuk yapılı TKP'nin hatalı Dirichlet türü giriş verisi için bağıl hatası ve duyarlılık sayısı.

γ	a	\tilde{a}	δk_γ	$R_D^{ss}(\gamma)$
-0.1	0.0131	0.0083	0.57	0.486
-0.05	0.0131	0.0107	0.22	3.728
-0.01	0.0131	0.0126	0.03	31.01
0.01	0.0131	0.0136	0.04	35.88
0.05	0.0131	0.0155	0.16	8.764
0.1	0.0131	0.0179	0.27	5.135



Şekil 4.8. Ciddi ciddi bozuk yapılı TKP'nin Dirichlet türü giriş verisi için duyarlılık sayısı.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

1. Tezde, Sturm-Liouville Operatörü ile ilgili düz ve ters problemlerin yapısı incelenmiş, tek ve çok tekil nokta içeren ters problemlerin matematiksel ve sayısal analizi verilmiştir.
2. Daha önce sadece tek bir tekil nokta için geliştirilmiş olan ters polinom yöntemi, burada iki tekil nokta içeren bozuk yapılı durumlar için genel şekliyle verilmiştir.
3. Neumann ve Dirichlet türünden olan giriş verilerinin hata analizi yapılmıştır. Teorik olarak elde edilen sonuçlar, sayısal örneklerle desteklenmiş, her bir durum için sayısal çözüm örnekleri verilmiştir.
4. Ele alınan ters problemler için duyarlılık sayısı tanımlanmış, bu sayının
 - problemin yapısı,
 - giriş verilerinin tipi,
 - düz problemin çözümünü belirleyen polinomların katsayılarıile ilişkileri açıklanmıştır.
5. Bozuk yapılı ters problemin kötü koşullandırılmış (ill-posed) olması tekil noktalardan kaynaklanmaktadır ve bu noktalarda ters problemin çözümü yoktur. Buna karşılık düz problem iyi koşullandırılmış (well-posed) yapıdadır. Bundan dolayı sayısal çözüm için koşulların elverdiği ölçüde yüksek dereceden interpolasyon polinomu tanımlanabilir. Bu ise ters problemin daha yüksek kesinlikte yaklaşık çözümünün elde edilmesini sağlar.
6. Sayısal çözümde kullanılan polinomyal yöntemle, tekil noktalardaki dezavantaj, avantaja dönüştürülmüştür. Çünkü tekil noktaların bilgisi bu yöntemde tanımlanan interpolasyon polinomlarının derecelerinin yükseltilmesinde kullanılmıştır.
7. Bir boyutlu sınır-değer problemleri ile ilgili ters problemler için elde edilen sonuçlar, lineer olmayan Sturm-Liouville Operatörü ve benzeri operatörler için de uygulanabilir.
8. İki'den fazla tekil nokta içeren TKP'nin incelenmesi genel olarak önerilmemektedir. Zira bu gibi durumlarda (3.13) sisteminin katsayılar

matrisinin determinantı sayısal olarak sıfır olmaktadır. Bu durumda ise bulunan çözümün gerçek çözüme yakınsaması beklenemez.

9. Kararlaşmamış, zamana bağlı tip problemler için de benzer işlemler yapılabilir. Bunun için, Laplace dönüşümü kullanılarak ele alınan parabolik denklemin, adi diferansiyel denklemlere indirgenmesi önerilebilir.



KAYNAKLAR

1. ADAMS, R.A.,1975. Sobolev Spaces. Akademik Press, New York.
2. ALESSANDRINI, G.,1988. Stable Determination of Conductivity by Boundary Measurements. *Applic. Analysis*, 27, 153-172.
3. ALESSANDRINI, G.,1990. Singular Solutions of Elliptic Equations and the Determinations of Conductivity by Boundary Measurements. *Diff.Equat.*,84, 252-273.
4. ANGER, G.1990. Inverse Problems in Differential Equations. London: Plenum Publ.
5. BADIA, A. 1999. Coefficient identification in some partial differential equations from partial boundary measurements. *Inverse Problems*, 15, 11-18.
6. BANKS, T.H. And KUNISCH, K.,1989. Estimation Techniques for Distributed Parameter Sysytems. Birkhäuser, Boston.
7. BAUMEISTER 1986. Stable Solutions of Inverse Problems. Braunschweig: Vieweg Birkhauser.
8. BECK, J.V., BLACKWELL, B. And CLAIR, C.R. 1985. Inverse Heat Conduction. Ill-Posed Problems, New York, John Wiley.
9. BIRKHOFF G., 1979. The algebra of multivariate interpolation. Academic Press Inc.
10. de BOOR, C., 1996. On the Sauer-Xu formula in multivariate polynomial interpolation. *Math. Comp.*, 65, 1231-1234.
11. BROWN, B.M, SAMKO, V.S. KNOWLES, I.W., MARLETTA, M., 2003. Inverse Spectra Problem for Sturm-Liouville Equation, *Inverse Problems*, 19(1), 235-252.
12. BUSCH, J.R., 1990. A note on Lagrange interpolation in \mathbf{R}^2 . *Rev. Union Matem. Argent.*, 36, 33-38.
13. CANON, J.R. And DUCHATEAU, P.,1973. Determining Unknown Coefficients in a Nonlinear Heat Conduction Problem. *SIAM J. Appl. Math.*, 24, 298-314.
14. CANON, J.R. And DUCHATEAU, P.,1974. Determination of the Conductivity of an Isotropic Medium. *J. Math. Anal. Appl.*, 48, 699-707.

15. CHOULLI, M. and STEFANOV, P. 1986. Reconstruction of the coefficients of the stationary transport equation from boundary measurements, *Inverse Problems*, 12, L19-L23.
16. CIARLET, P.G. and RAVIART P.A. 1972. General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbf{R}^n with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46, 178-199.
17. DUCHATEAU, P.C., 1995. Monotonicity and Invertibility of Coefficient-to-Data Mappings for Parabolic Inverse Problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 26, 1473-1487.
18. DUCHATEAU, P.C., 1996. Introduction to Inverse Problems in Partial Differential Equations for Engineers, Physicists and Mathematicians In: *Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology* (J Gottlieb and P DuChateau eds). Kluwer Academic Publishers,) Netherland, 3-38.
19. FABIANO, R.H., KNOBEL, R., LOWE, B.D., 1995. A Finite Difference Algorithm for an Inverse Sturm-Liouville Problem, *IMA Jour. Num. Anal.*, 15, 75-88.
20. GASCA, M., 1990. *Multivariate polynomial interpolation*. Kluwer Academic Publishers.
21. GELFAND, I.M. And LEVITAN, B.M., 1955. On The Determination of a Differential Equation From its Spectrum. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1, 255-304.
22. HANKE, M. and SCHERZER, O., 1999. Error Analysis of An Equation Error Method for the Identification of the Diffusion Coefficient in A Quasilinear Parabolic Differential Equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 59, 1012-1027.
23. HASANOV, A., 1988. An inverse problem in Nondestructive Diagnostics of an Elastoplastic Medium. *Dokl. Akad. Nauk., SSSR*, 37, 242-6.
24. HASANOV, A. 1997(a). Inverse Coefficient Problems for Monotone Potential Operators. *Inverse Problems*, 13, 1265-78.
25. HASANOV, A. 1997(b). Coefficient Stability and Existence of a Quasisolution of an Inverse Parabolic Problem. *Applicable Analysis*, 67, 1-9.
26. HASANOV, A., 2003. An Inverse Polynomial Method for the Identification of the Leading Coefficient in Sturm-Liouville Operator From Boundary Measurements. *Appl. Math. Comput.*, 140, 501-515.
27. HASANOV, A., 2004. The determination of the leading coefficient in the monotone potential Sturm-Liouville operator from boundary measurements, *Applied Mathematics and Computation*, 152, 141-162.

28. HASANOV, A., 2004. Error Analysis of a multisingular inverse coefficient problem for the Sturm-Liouville operator based on boundary based on boundary measurement, *Applied Mathematics and Computation*, 150, 493-524.
29. HASANOV, A. and PEKTAŞ, B., 2002. Simulation of ill-conditioned situations in inverse coefficient problem for the Sturm-Liouville operator based on boundary measurements, *Mathematics and Computers in Simulation*, 61, 47-52.
30. HASANOV, A. And SHORES, T.S.,1997. Solution of an Inverse Coefficient Problem for an Ordinary Differential Equation. *Applicable Analysis*, 67, 11-20.
31. HASANOV, A. and SEYIDMAMEDOV, Z., 1995. The solution of an Axisymmetric Inverse Elasto-Plastic Problem Using Penetration Diagram. *Int. J. Non-linear Mech.*, 30, 465-77.
32. HASANOV, A. and SEYIDMAMEDOV, Z., 2002(a). Determination of leading coefficients in Sturm-Liouville Operator From Boundary Measurements. I. Stripping Algorithm. *Appl. Math. Comput.*,125, 1-21.
33. HASANOV, A. and SEYIDMAMEDOV, Z., 2002(b). Determination of Leading Coefficients in Sturm-Liouville Operator From Boundary Measurements. II. An Engineering Approach. *Appl. Math. Comput.*,125, 23-34.
34. HOCHSTADT, H. 1973. The Inverse Sturm-Liouville Problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, 715-729.
35. ISAKOV, V., 1998. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, New York.
36. IVANOV, V.K., VASIN, V.V., TANANA, V.P., 1978. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications*. Nauka, Moscow.
37. KERGIN, P., 1980. A natural interpolation of C^k functions. *J. Approx. Th.*, 29, 278-293.
38. KINCAID, D. And CHENEY, W. 1991. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Pub.
39. KOHN, R. and VOGELIUS, M. 1984. Determining conductivity by boundary measurements, *Communications on Pure Applied Mathematics*, 37, 289-298.
40. LADYZHENSKAYA, O.A., 1985. *Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Springer Verlag, New York.
41. LIONS, J.L. 1970. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer.
42. LOWE, B. and RUNDELL, W. 1993. Determination of multiple coefficients in a second order differential equation from input sources, *Inverse Problems*, 9, 469-482.

43. LOWE, B. and RUNDELL, W. 1994. An Inverse Problem for a Sturm-Liouville Operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 181, 188-199.
44. LOWE, B. and RUNDELL, W. ,1995. Unique Recovery of a Coefficient in an Elliptic Equation from Input Sources. *Inverse Problems*, 11, 211-215.
45. LUSTERNIK, L.A. and SOBOLEV, V.I.,1965. *Elements of Functional Analysis*. Nauka, Moscow.
46. MIKHLIN, S.G., 1964. *Variational Methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press, New York.
47. MURAT, F.,1971. Un Contre Exemple Pourdes Problems De Controle Dans Les Coefficients. *C. R. Acad. Sci.*, 273, 708-11, Paris.
48. PAYNE, L.E., 1975. *Inverse Problems in Partial Differential Equations*. SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia.
49. PEKTAŞ, B., 2002. Sturm-Liouville Operatörüyle Verilen Sınır-Değer Problemlerinin Katsayılara Göre Sürekliliğinin Sınıflandırılması ve Ters Problemler, KOÜ Fen Bil. Enst. Yüksek Lisans.
50. REKTORYS, K.,1975. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Publishing Company, USA.
51. RICHTER, G.R., 1981. An Inverse Problem for the Steady State Diffusion Equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 41, 210-221.
52. RUNDELL, W. and SACKS, P.E., 1992. Reconstruction Techniques for Classical Inverse Sturm-Liouville Problems, *Mathematics of Computation*, 58, 161-183.
53. STOER, J and BULIRSCH, R., 2002. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag. New York, USA.
54. TADI, M., 1997. Inverse Heat Conduction Based on Boundary Measurement. *Inverse Problems*, 13, 1585-1605.
55. TIKHONOV, A. and ARSENIN, V., 1977. *Solution of Ill-Posed Problems*. John Wiley, New York.

EKLER

MATLAB PROGRAMLARI

Program 1 (Düzgün Yapılı Ters Katsayı Probleminin Sayısal Çözümü)

```
% ANAPROGRAM
```

```
function wpicp
```

```
% NUMERICAL SOLUTION OF THE WELLPOSED INVERSE COEFFICIENT  
PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL METHOD
```

```
%equation  $-(ku)'+qu=f, 0<x<1;$ 
```

```
%boundary cond.  $u(0)=0; k(1)u'(1)=\phi;$ 
```

```
%overmeasured data  $u(1)=\beta; k(0)u'(0)=\psi;$ 
```

```
Warning off;clear all;clc
```

```
global A B beta
```

```
xa=0;xb=1;h=0.05;x=xa:h:xb;n=length(x);
```

```
% measured datas
```

```
beta=2.*atan(xb+1)-0.5.*pi;psi= fk(xa).*(2./(1+(xa+1).^2));
```

```
%compute Lagrange polynomial coefficients
```

```
phi=fk(xb).*(2./(1+(xb+1).^2));
```

```
B=(psi-phi+quad('int2',xa,xb))./(quad('int3',xa,xb));A=beta-B;
```

```
%compute approximate coefficient function kp(x)
```

```
for i=1:n
```

```
xi=x(i);
```

```
int1(i)=quad('int1',xa,xi);
```

```
kapp(i)=(psi+int1(i))./(2.*A.*xi+B);
```

```
end
```

```
kexc=fk(x); uexc=fu(x);uapp=fup(x);
```

```
subplot(2,1,1);plot(x,uexc,'k-',x,uapp,'b--'),legend('u(x)', 'u_p(x)',2);
```

```
xlabel('x');ylabel('u');
```

```
subplot(2,1,2);plot(x,kexc,'k-',x,kapp,'b--'),legend('k(x)', 'k_p(x)');
```

```
xlabel('x');ylabel('k');
```

```
abseru=max(abs(uexc-uapp));abserk=max(abs(kexc-kapp));
```

```
releru= norm(uexc-uapp)./norm(uexc);relerk= norm(kexc-kapp)./norm(kexc);
```

```
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk]
```

```
% ALTPROGRAMLAR
```

```
function y=fu(x)
```

```
%The exact solution of the DP
```

```
y=2.*atan(x+1)-0.5.*pi;
```

```
function y=fk(x)
```

```
%The exact coefficient k(x)
```

```
y=(x+0.25).^(-1);
```

```

function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-1);

```

```

function y=ff(x)
%The source function f(x)
y=(2.*atan(x+1)-0.5.*pi).*(x+0.25).^(-2)+((x+0.25).^(-2)).*(2./(1+(x+1).^2))+...
(x+0.25).^(-1).*4.*(x+1)./(1+(x+1).^2).^2;

```

```

function y=fup(x)
%The function up(x)
global A B
y=A.*x.^2+B.*x;

```

```

function y=int1(x)
global A B
y=(A.*x.^2+B.*x).*(x+0.25).^(-2)-ff(x);

```

```

function y=int2(x)
global beta
y=beta.*x.^2.*(x+0.25).^(-2)-ff(x);

```

```

function y=int3(x)
y=((x+0.25).^(-2)).*(x.^2-x);

```

Program 2 (İlmlı Bozuk Yapılı Ters Katsayı Probleminin Sayısal Çözümü)

```
% ANAPROGRAM
```

```
function modicp
% NUMERICAL SOLUTION OF THE MODERATELY ILLPOSED INVERSE
% COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL METHOD
% equation          -(ku)'+qu=f, 0<x<1;
% boundary cond.    u(0)=0; k(1)u'(1)=phi;
% overmeasured data u(1)=beta; k(0)u'(0)=psi; u'(x0)=0.
warning off;clear all;clc
global x0 A B C D
xa=0;xb=1;n=51;x0=0.4;h=(xb-xa)/(n-1);delta=h;
xspana=xa:h:x0-delta;xspanb=x0+delta:h:xb;xspan=[xspana xspanb];
% measured data
beta=fu(xb);psi=fk(xa).*(xa-x0).*exp(xa);
% compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients
phi=fk(xb).*(xb-x0).*exp(xb);
alfa01=quad('intalfa4',xa,x0);alfa11=quad('intalfa3',xa,x0);
alfa21=quad('intalfa2',xa,x0);alfa31=quad('intalfa1',xa,x0);
alfa02=quad('intalfa4',x0,xb);alfa12=quad('intalfa3',x0,xb);
alfa22=quad('intalfa2',x0,xb);alfa32=quad('intalfa1',x0,xb);
gama1=quad('ff',xa,x0)-psi;gama2=quad('ff',x0,xb)+phi;
Amat=[4.*x0^3 3*x0^2 2*x0 1;1 1 1 1;alfa01 alfa11
alfa21 alfa31;alfa02 alfa12 alfa22 alfa32];
Bvek=[0;beta;gama1;gama2];
X=inv(Amat)*Bvek;A=X(1);B=X(2);C=X(3);D=X(4);
% compute approximate coefficient function kp(x)
for i=1:length(xspan)
    xi=xspan(i);
    kapp(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(4.*A.*xi.^3+3.*B.*xi.^2+2.*C.*xi+D);
end
kpx0=(fq(x0)*fup(x0)-ff(x0))/(12.*A.*x0.^2+6.*B.*x0+2.*C);
kexc=fk(xspan);uapp=fup(xspan);uexc=fu(xspan);
subplot(2,1,1);plot(xspan,uexc,'r-',xspan,uapp,'b.'); legend('u(x)', 'u_p(x)');
xlabel('x');ylabel('u'); subplot(2,1,2);plot(xspan,kexc,'r-',
xspan,kapp,'b.',x0,kpx0,'b*'); legend('k(x)', 'k_p(x)', 'k_p(x^m)');
xlabel('x'); ylabel('k');
abseru=max(abs(uexc-uapp));abserk=max(abs(kexc-kapp));
releru=norm(uexc-uapp)/norm(uexc);relerk=norm(kexc-kapp)/norm(kexc);
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk];
```

```
% ALTPROGRAMLAR
```

```
function y=fu(x)
% The exact solution of the DP
global x0;
y=(x-x0-1).*exp(x)+x0+1;
```

```
function y=fk(x)
%The exact coefficient k(x)
y=(x+0.25).^(-1);
```

```
function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);
```

```
function y=ff(x)
%The source function f(x)
global x0
y=((x-x0-1).*exp(x)+x0+1).*((x+0.25).^(-2))+((x+0.25).^(-2)).*((x-x0).*exp(x))-
((x+0.25).^(-1)).*((x-x0+1).*exp(x));
```

```
function y=intkp(x)
%The function  $f(x)-q(x)*up(x)$ 
y=ff(x)-fq(x).*fup(x);
```

```
function y=fup(x)
%The function up(x)
global A B C D
y=A.*x.^4+B.*x.^3+C.*x.^2+D.*x;
```

```
function y=intalfa1(x)
y=fq(x).*x;
function y=intalfa2(x)
y=fq(x).*x.^2;
```

```
function y=intalfa3(x)
y=fq(x).*x.^3;
```

```
function y=intalfa4(x)
y=fq(x).*x.^4;
```

Program 3 (Ciddi Bozuk Yapılı Ters Katsayı Probleminin Sayısal Çözümü)

1. Yaklaşım

% ANAPROGRAM

function sev3icp

% NUMERICAL SOLUTION OF THE SEVERELY ILLPOSED INVERSE
COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL METHOD

%(ku')'+ $qu=f$, $0 < x < 1$

% $u(0)=0$; $k(1)u'(1)=\phi$;

% $u(1)=\beta$; $k(0)u'(0)=\psi$;

% $u'(x_0)=u''(x_0)=0$, $0 < x_0 < 1$

%third-power polynomial approach

warning off;clear all;clc

global A B C x0

$x_a=0$; $x_b=1$; $x_0=0.5$;

$\beta_0=\text{feval}('ff',x_0)/\text{feval}('fq',x_0)$; $\delta=0.05$;

$x_{\text{spana}}=\text{linspace}(x_a,x_0-\delta,25)$; $x_{\text{spanb}}=\text{linspace}(x_0+\delta,x_b,25)$;

$x_{\text{span}}=[x_{\text{spana}} \ x_{\text{spanb}}]$;

% measured data

$\beta=\text{feval}('fu',x_b)$; $\psi=\text{feval}('fkx',x_a).*((x_a-1.5).*\exp(x_a)+\exp(0.5))$;

%compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients

$\phi=\text{feval}('fkx',x_b).*((x_b-1.5).*\exp(x_b)+\exp(0.5))$;

$A=\beta_0.*x_0.^{-3}$; $B=\beta_0$; $C=(\beta-\beta_0)/(1-x_0).^3$;

%compute approximate coefficient function $k_p(x)$

for $i=1:\text{length}(x_{\text{spana}})$

$x_i=x_{\text{spana}}(i)$;

$k_{p_x}(i)=(\psi-\text{quad}('intkp',x_a,x_i))/(3.*A.*(x_i-x_0).^2)$;

end

for $i=1:\text{length}(x_{\text{spanb}})$

$x_i=x_{\text{spanb}}(i)$;

$k_{p_x}(i)=(\phi+\text{quad}('intkp',x_i,x_b))/(3.*C.*(x_i-x_0).^2)$;

end

$k_{\text{app}}=[k_{p_x} \ k_{p_x}]$; $k_{\text{exc}}=\text{fkx}(x_{\text{span}})$; $u_{\text{app}}=\text{fup}(x_{\text{span}})$; $u_{\text{exc}}=\text{fu}(x_{\text{span}})$;

subplot(2,1,1); **plot**(x_{span} , u_{exc} , 'r-', x_{span} , u_{app} , 'b.', x_0 , β_0 , 'b*'),

legend('u(x)', 'u_p(x)', 'u_p(x^s)', 4); **xlabel**('x'); **ylabel**('u');

subplot(2,1,2); **plot**(x_{span} , k_{exc} , 'r-', x_{span} , k_{app} , 'b.'),

legend('k(x)', 'k_p(x)'); **xlabel**('x'); **ylabel**('k');

$\text{abseru}=\text{max}(\text{abs}(u_{\text{exc}}-u_{\text{app}}))$; $\text{abserk}=\text{max}(\text{abs}(k_{\text{exc}}-k_{\text{app}}))$;

$\text{releru}=\text{norm}(u_{\text{exc}}-u_{\text{app}})/\text{norm}(u_{\text{exc}})$; $\text{relerk}=\text{norm}(k_{\text{exc}}-k_{\text{app}})/\text{norm}(k_{\text{exc}})$;

$\text{absters}=[\text{abseru} \ \text{abserk}]$; $\text{relers}=[\text{releru} \ \text{relerk}]$

% ALTPROGRAMLAR

function $y=\text{fu}(x)$

%The exact solution of the DP

$y=(x-2.5).*\exp(x)+x.*\exp(0.5)+2.5$;

```

function y=fkx(x)
%The exact coefficient k(x)
y=(x+0.25).^(-1);

```

```

function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);

```

```

function y=ff(x)
%The source function f(x)
y=((x-2.5).*exp(x)+x.*exp(0.5)+2.5).*((x+0.25).^(-2))+((x+0.25).^(-2)).*(((x-1.5).*exp(x)+exp(0.5)))-((x+0.25).^(-1)).*((x-0.5).*exp(x));

```

```

function y=intkp(x)
%The function f(x)-q(x)*up(x)
y=ff(x)-fq(x).*fup(x)

```

```

function y=fup(x)
%The function up(x)
global x0 A B C
for i=1:length(x);
    if(x(i) < x0)
        y(i)=A.*(x(i)-x0).^3+B;
    else
        y(i)=C.*(x(i)-x0).^3+B;
    end
end

```

2. Yaklaşım

```
% ANAPROGRAM
```

```

function sev5icp
% NUMERICAL SOLUTION OF THE SEVERELY ILLPOSED INVERSE
% COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL METHOD
%equation          -(ku')'+qu=f, 0<x<1;
%boundary cond.    u(0)=0; k(1)u'(1)=phi;
%overmeasured data u(1)=beta; k(0)u'(0)=psi; u'(x0)=0.
%fifth-power polynomial approach
warning off;clear all;clc;
global A B C D E x0
xa=0;xb=1;n1=11; x0=0.5;delta=0.05;
xspana=linspace(xa,x0-delta,n1);xspanb=linspace(xb+delta,xb,n1);
xspan=[xspana xspanb];n=length(xspan);
beta0=feval('ff',x0)/feval('fq',x0);
% measured data
beta=feval('fu',xb);psi=feval('fk',xa).*((xa-1.5).*exp(xa)+exp(0.5));
%compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients
phi=feval('fk',xb).*((xb-1.5).*exp(xb)+exp(0.5));

```

```

alfa1=quad('intalfa5',xa,xb);alfa2=quad('intalfa4',xa,xb);
alfa3=quad('intalfa3',xa,xb);alfa4=quad('intalfa2',xa,xb);
alfa5=quad('intalfa1',xa,xb);gama=quad('ff',xa,xb)+phi-psi;
Amat=[1 1 1 1 1;x0^5 x0^4 x0^3 x0^2 x0;5*x0^4 4*x0^3 3*x0^2 2*x0 1
20*x0^3 12*x0^2 6*x0 2 0;alfa1 alfa2 alfa3 alfa4 alfa5];
Bvek=[beta;beta0;0;0;gama];
X=inv(Amat)*Bvek;A=X(1);B=X(2);C=X(3);D=X(4);E=X(5);
%compute approximate coefficient function kp(x)
for i=1:n
    xi=xspan(i);
    kapp(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(5*A*xi^4+4*B*xi^3+3*C*xi^2+2*D*xi+E);
end
kexc=fk(xspan);uapp=fup(xspan);uexc=fu(xspan);
subplot(2,1,1);plot(xspan,uexc,'r-',xspan,uapp,'b.',x0,beta0,'b*'),
legend('u(x)','u_p(x)','u_p(x^s)',4); xlabel('x');ylabel('u');
subplot(2,1,2);plot(xspan,kexc,'r-',xspan,kapp,'b.');
```

legend('k(x)','k_p(x)');
xlabel('x');**ylabel('k');**
abseru=**max(abs(uexc-uapp))**;abserk=**max(abs(kexc-kapp))**;
releru=**norm(uexc-uapp)/norm(uexc)**;relerk=**norm(kexc-kapp)/norm(kexc)**;
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk]

% ALTPROGRAMLAR

function y=fu(x)
%The exact solution of the DP
y=(x-2.5). *exp(x)+x. *exp(0.5)+2.5;

function y=fk(x)
%The exact coefficient k(x)
y=(x+0.25).^(-1);

function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);

function y=ff(x)
%The source function f(x)
y=((x-2.5). *exp(x)+x. *exp(0.5)+2.5).*((x+0.25).^(-2))+((x+0.25).^(-2)). *(((x-1.5). *exp(x)+exp(0.5)))-((x+0.25).^(-1)).*((x-0.5). *exp(x));

function y=intkp(x)
%The function f(x)-q(x)*up(x)
y=ff(x)-fq(x). *fup(x)

function y=fup(x)
%The function up(x)
global A B C D E
y=A. *x.^5+B. *x.^4+C. *x.^3+D. *x.^2+E. *x;


```
function y=intalfa1(x)  
y=fq(x).*x;
```

```
function y=intalfa2(x)  
y=fq(x).*x.^2;
```

```
function y=intalfa3(x)  
y=fq(x).*x.^3;
```

```
function y=intalfa4(x)  
y=fq(x).*x.^4;
```

```
function y=intalfa5(x)  
y=fq(x).*x.^5;
```



Program 4 (İlimli-İlimli Bozuk Yapılı TKP'nin Sayısal Çözümü)

```
% ANAPROGRAM
```

```
function modmodicp
% NUMERICAL SOLUTION OF THE MODERATELY-MODERATELY
% ILLPOSED INVERSE COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE
% POLYNOMIAL METHOD
% -(ku)'+qu=f, 0<x<1
% u(0)=0;k(1)u'(1)=phi;
% u(1)=beta;k(0)u'(0)=psi;
% u'(x1)=0;u'(x2)=0, 0<x1,x2<1
warning off;clear all;clc
global A1 A2 A3 A4 A5 A6 x1 x2
n=51;x1=0.3;x2=0.7;
xa=0;xb=1;h=(xb-xa)/(n-1);delta1=h;delta2=h;
xspanl=xa:h:x1-delta1;xspanc=x1+delta1:h:x2-delta2;xspanr=x2+delta2:h:xb;
xspan=[xspanl xspanc xspanr];
% measured data
beta=fu(xb);psi=fk(xa)*((xa-x1).*(xa-x2).*exp(xa));
% compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients
phi=fk(xb)*((xb-x1).*(xb-x2).*exp(xb));
alfa11=quad('intalfa1',xa,x1);alfa12=quad('intalfa2',xa,x1);
alfa13=quad('intalfa3',xa,x1);alfa14=quad('intalfa4',xa,x1);
alfa15=quad('intalfa5',xa,x1);alfa16=quad('intalfa6',xa,x1);
alfa21=quad('intalfa1',x1,x2);alfa22=quad('intalfa2',x1,x2);
alfa23=quad('intalfa3',x1,x2);alfa24=quad('intalfa4',x1,x2);
alfa25=quad('intalfa5',x1,x2);alfa26=quad('intalfa6',x1,x2);
alfa31=quad('intalfa1',x2,xb);alfa32=quad('intalfa2',x2,xb);
alfa33=quad('intalfa3',x2,xb);alfa34=quad('intalfa4',x2,xb);
alfa35=quad('intalfa5',x2,xb);alfa36=quad('intalfa6',x2,xb);
beta1=quad('ff',xa,x1)-psi;beta2=quad('ff',x1,x2);beta3=quad('ff',x2,xb)+phi;
Amat=[1 1 1 1 1 1;1 2.*x1 3.*x1.^2 4.*x1.^3 5.*x1.^4 6.*x1.^5;1 2.*x2 3.*x2.^2
4.*x2.^3 5.*x2.^4 6.*x2.^5;alfa11 alfa12 alfa13 alfa14 alfa15 alfa16;alfa21 alfa22
alfa23 alfa24 alfa25 alfa26;alfa31 alfa32 alfa33 alfa34 alfa35 alfa36];
Bvek=[beta;0;0;beta1;beta2;beta3];
X=inv(Amat)*Bvek;A1=X(1);A2=X(2);A3=X(3);A4=X(4);A5=X(5);A6=X(6);
% compute approximate coefficient function kp(x)
for i=1:length(xspanl)
    xi=xspanl(i); kpxl(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
end
for i=1:length(xspanc)
    xi=xspanc(i); kpxc(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
end
for i=1:length(xspanr)
    xi=xspanr(i); kpxr(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
end
```

```

end
kapp=[kpxl kpxc kpxr];kexc=feval('fk',xspan);
uapp=feval('fup',xspan);uexc=feval('fu',xspan);
kpx1=(fq(x1)*fup(x1)-ff(x1))/(2.*A2+6.*A3.*x1+12.*A4.*x1.^2+...
20.*A5.*x1.^3+30.*A6.*x1.^4);
kpx2=(fq(x2)*fup(x2)-ff(x2))/(2.*A2+6.*A3.*x2+12.*A4.*x2.^2+...
20.*A5.*x2.^3+30.*A6.*x2.^4);
subplot(2,1,1);plot(xspan,uexc,'r-',xspan,uapp,'b.')
legend('u(x)', 'u_p (x)',2);xlabel('x');ylabel('u');
subplot(2,1,2);plot(xspan,kexc,'r-',xspan,kapp,'b.',x1,kpx1,'b*',x2,kpx2,'b*'),
legend('k(x)', 'k_p (x)', 'k_p(x_1)', 'k_p(x_2)');xlabel('x');ylabel('k');
abseru=max(abs(uexc-uapp));abserk=max(abs(kexc-kapp));
releru=norm(uexc-uapp)./norm(uexc);relerk=norm(kexc-kapp)./norm(kexc);
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk]

```

% ALTPROGRAMLAR

```

function y=fu(x)
%The exact solution of the DP
global x1 x2
y=(x.^2-(x1+x2+2).*x+x1.*x2+x1+x2+2).*exp(x)-(x1.*x2+x1+x2+2);

```

```

function y=fk(x)
%The exact coefficient k(x)

```

```

y=(x+0.25).^(-1);
function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);

```

```

function y=ff(x)
%The source function f(x)
global x1 x2
y=((x+0.25).^(-2)).*((x.^2-(x1+x2+2).*x+x1.*x2+x1+x2+2).*...
exp(x)-(x1.*x2+x1+x2+2))+((x+0.25).^(-2)).*((x-x1).*(x-x2).*exp(x))-...
((x+0.25).^(-1)).*((x.^2-(x1+x2+2).*x+x1.*x2-x1-x2).*exp(x));

```

```

function y=fup(x)
%The function up(x)
global A1 A2 A3 A4 A5 A6;
y=A1.*x+A2.*x.^2+A3.*x.^3+A4.*x.^4+A5.*x.^5+A6.*x.^6;

```

```

function y=intkp(x)
%The function f(x)-q(x)*up(x)
y=feval('ff',x)-feval('fq',x).*feval('fup',x);

```

```

function y=intalfal(x)
y=fq(x).*x;

```

```
function y=intalfa2(x)  
y=fq(x).*x.^2;
```

```
function y=intalfa3(x)  
y=fq(x).*x.^3;
```

```
function y=intalfa4(x)  
y=fq(x).*x.^4;
```

```
function y=intaalfa5(x)  
y=fq(x).*x.^5;
```

```
function y=intalfa6(x)  
y=fq(x).*x.^6;
```



Program 5 (İlimli-Ciddi Bozuk Yapılı TKP'nin Sayısal Çözümü)

```
% ANAPROGRAM
```

```
function modsevicp
```

```
% NUMERICAL SOLUTION OF THE MODERATELY-SEVERELY ILLPOSED  
INVERSE COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL  
METHOD
```

```
%(ku')'+qu=f, 0<x<1
```

```
%u(0)=0;k(1)u'(1)=phi;
```

```
%u(1)=beta;k(0)u'(0)=psi;
```

```
%u'(x1)=0;u'(x2)=u''(x2)=0, 0<x1,x2<1
```

```
warning off;clear;clc;
```

```
global A1 A2 A3 A4 A5 A6 x1 x2
```

```
x1=0.3;x2=0.7;n=51;xa=0;xb=1;h=(xb-xa)/(n-1);
```

```
%measured datas
```

```
psi=fk(xa)*((xa-x2-1).*exp(xa)-(((x1-x2-1).*exp(x1)+exp(x2))./(x2-x1).^2).*(xa-  
x2).^2+exp(x2));beta=fu(xb);
```

```
%compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients
```

```
phi=fk(xb)*((xb-x2-1).*exp(xb)-(((x1-x2-1).*exp(x1)+exp(x2))./(x2-x1).^2).*...  
(xb-x2).^2+exp(x2)); delta1=h;delta2=h;
```

```
xspanl=xa:h:x1-delta1;xspanc=x1+delta1:h:x2-delta2;xspanr=x2+delta2:h:xb;
```

```
xspan=[xspanl xspanc xspanr];
```

```
beta2=ff(x2)/fq(x2);gama1=quad('ff',xa,xb)+phi-psi;
```

```
alfa1=quad('intalfa1',xa,xb);alfa2=quad('intalfa2',xa,xb);
```

```
alfa3=quad('intalfa3',xa,xb);alfa4=quad('intalfa4',xa,xb);
```

```
alfa5=quad('intalfa5',xa,xb);alfa6=quad('intalfa6',xa,xb);
```

```
Amat=[1 1 1 1 1;x2 x2.^2 x2.^3 x2.^4 x2.^5 x2.^6;1 2.*x1 3.*x1.^2 4.*x1.^3
```

```
5.*x1.^4 6.*x1.^5;1 2.*x2 3.*x2.^2 4.*x2.^3 5.*x2.^4 6.*x2.^5;0 2 6.*x2 12.*x2.^2
```

```
20.*x2.^3 30.*x2.^4;alfa1 alfa2 alfa3 alfa4 alfa5 alfa6];
```

```
Bvek=[beta;beta2;0;0;0;gama1]; X=inv(Amat)*Bvek;
```

```
A1=X(1);A2=X(2);A3=X(3);A4=X(4);A5=X(5);A6=X(6);
```

```
%compute approximate coefficient function kp(x)
```

```
for i=1:length(xspanl)
```

```
xi=xspanl(i); kpxl(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...  
4.*A4.*xi.^3+... 5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
```

```
end
```

```
for i=1:length(xspanc)
```

```
xi=xspanc(i); kpxc(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...  
4.*A4.*xi.^3+... 5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
```

```
end
```

```
for i=1:length(xspanr)
```

```
xi=xspanr(i); kpxr(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))./(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...  
4.*A4.*xi.^3+... 5.*A5.*xi.^4+6.*A6.*xi.^5);
```

```
end
```

```
kapp=[kpxl kpxc kpxr];
```

```
kpx1=(fq(x1)*fup(x1)-ff(x1))./(2.*A2+6.*A3.*x1+12.*A4.*x1.^2+...  
20.*A5.*x1.^3+30.*A6.*x1.^4);
```

```
kexc=feval('fk',xspan);uexc=feval('fu',xspan);uapp=feval('fup',xspan);
```

```

subplot(2,1,1);plot(xspan,uexc,'r-',xspan,uapp,'b.',x2,beta2,'b*'),legend('u(x)', 'u_p
(x)', 'u_p(x_2)',2);xlabel('x');ylabel('u');
subplot(2,1,2);plot(xspan,kexc,'r-',xspan,kapp,'b.',x1,kpx1,'b*'),legend('k(x)', 'k_p
(x)', 'k_p(x_1)');xlabel('x');ylabel('k');
abseru=max(abs(uexc-uapp));abserk=max(abs(kexc-kapp));
releru=norm(uexc-uapp)./norm(uexc);relerk=norm(kexc-kapp)./norm(kexc);
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk]

```

```
% ALTPROGRAMLAR
```

```

function y=fu(x)
%The exact solution of the DP
global x1 x2
c1=-((x1-x2-1).*exp(x1)+exp(x2))./(x2-x1).^2; c2=(c1./3).*x2.^3+x2+2;
y=(x-x2-2).*exp(x)+(c1./3).*(x-x2).^3+x.*exp(x2)+c2;

```

```

function y=fk(x)
%The exact coefficient k(x)
y=(x+0.25).^(-1);

```

```

function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);

```

```

function y=ff(x)
%The source function f(x)
global x1 x2
y=((x+0.25).^(-2)).*fu(x)+((x+0.25).^(-2)).*(((x-x2-1).*exp(x)-((x1-x2-
1).*exp(x1)+exp(x2))./(x2-x1).^2).*(x-x2).^2+exp(x2))-((x+0.25).^(-1)).*((x-
x2).*(exp(x)-2.*(((x1-x2-1).*exp(x1)+exp(x2))./(x2-x1).^2)));

```

```

function y=fup(x)
%The function up(x)
global A1 A2 A3 A4 A5 A6;
y=A1.*x+A2.*x.^2+A3.*x.^3+A4.*x.^4+A5.*x.^5+A6.*x.^6;

```

```

function y=intkp(x)
%The function f(x)-q(x)*up(x)
y=feval('ff',x)-feval('fq',x).*feval('fup',x);

```

```

function y=intalfal(x)
y=fq(x).*x;

```

```

function y=intalfa2(x)
y=fq(x).*x.^2;

```

```

function y=intalfa3(x)
y=fq(x).*x.^3;

```

```
function y=intalfa4(x)  
y=fq(x).*x.^4;
```

```
function y=intalfa5(x)  
y=fq(x).*x.^5;
```

```
function y=intalfa6(x)  
y=fq(x).*x.^6;
```



Program 6 (Ciddi-Ciddi Bozuk Yapılı TKP'nin Sayısal Çözümü)

```
% ANAPROGRAM
function sevsevicp
% NUMERICAL SOLUTION OF THE SEVERELY-SEVERELY ILLPOSED
INVERSE
%COEFFICIENT PROBLEM by USING INVERSE POLYNOMIAL METHOD
%-(ku)'+qu=f, 0<x<1
%u(0)=0;k(1)u'(1)=phi;
%u(1)=beta;k(0)u'(0)=psi;
%u'(x1)=0;u'(x2)=0, 0<x1,x2<1
warning off;clear;clc
global A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 x1 x2
x1=0.2;x2=0.8;n=51;xa=0;xb=1;h=(xb-xa)/(n-1);delta1=h;delta2=h;
%measured datas
psi=fk(xa)*fut(xa);beta=fu(xb);
%compute Lagrange-Hermite polynomial coefficients
phi=fk(xb)*fut(xb);
xspanl=xa:h:x1-delta1;xspanc=x1+delta1:h:x2-delta2;
xspanr=x2+delta2:h:xb;xspan=[xspanl xspanc xspanr];
beta1=ff(x1)/fq(x1);beta2=ff(x2)/fq(x2);
gama1=quad('ff',xa,xb)+phi-psi;
alfa1=quad('intalfa1',xa,xb);alfa2=quad('intalfa2',xa,xb);
alfa3=quad('intalfa3',xa,xb);alfa4=quad('intalfa4',xa,xb);
alfa5=quad('intalfa5',xa,xb);alfa6=quad('intalfa6',xa,xb);
alfa7=quad('intalfa7',xa,xb);alfa8=quad('intalfa8',xa,xb);
Amat=[1 1 1 1 1 1 1 1;x1 x1.^2 x1.^3 x1.^4 x1.^5 x1.^6 x1.^7 x1.^8;x2 x2.^2 x2.^3
x2.^4 x2.^5 x2.^6 x2.^7 x2.^8;1 2.*x1 3.*x1.^2 4.*x1.^3 5.*x1.^4 6.*x1.^5 7.*x1.^6
8.*x1.^7;1 2.*x2 3.*x2.^2 4.*x2.^3 5.*x2.^4 6.*x2.^5 7.*x2.^6 8.*x2.^7;0 2 6.*x1
12.*x1.^2 20.*x1.^3 30.*x1.^4 42.*x1.^5 56.*x1.^6;0 2 6.*x2 12.*x2.^2 20.*x2.^3
30.*x2.^4 42.*x2.^5 56.*x2.^6;alfa1 alfa2 alfa3 alfa4 alfa5 alfa6 alfa7 alfa8];
Bvek=[beta;beta1;beta2;0;0;0;0;gama1];
X=inv(Amat)*Bvek;A1=X(1);A2=X(2);A3=X(3);A4=X(4);A5=X(5);A6=X(6);
A7=X(7);A8=X(8);
for i=1:length(xspanl)
    xi=xspanl(i); kpxl(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))/(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+... 6.*A6.*xi.^5+7.*A7.*xi.^6+8.*A8.*xi.^7);
end
for i=1:length(xspanc)
    xi=xspanc(i); kpxc(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))/(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+... 6.*A6.*xi.^5+7.*A7.*xi.^6+8.*A8.*xi.^7);
end
for i=1:length(xspanr)
    xi=xspanr(i); kpxr(i)=(psi-quad('intkp',xa,xi))/(A1+2.*A2.*xi+3.*A3.*xi.^2+...
4.*A4.*xi.^3+5.*A5.*xi.^4+... 6.*A6.*xi.^5+7.*A7.*xi.^6+8.*A8.*xi.^7);
end
kapp=[kpxl kpxc kpxr];
kexc=feval('fk',xspan);uexc=feval('fu',xspan);uapp=feval('fup',xspan);
```



```

subplot(2,1,1);plot(xspan,uexc,'r-',xspan,uapp,'b.',x1,beta1,'b*',x2,beta2,'b*'),
legend('u(x)','u_p (x)','u_p(x_1)','u_p(x_2)',4);xlabel('x');ylabel('u');
subplot(2,1,2);plot(xspan,kexc,'r-',xspan,kapp,'b. '),legend('k(x)','k_p (x)');
xlabel('x');ylabel('k');
abseru=max(abs(uexc-uapp));abserk=max(abs(kexc-kapp));
releru=norm(uexc-uapp)./norm(uexc);relerk=norm(kexc-kapp)./norm(kexc);
absers=[abseru abserk];relers=[releru relerk]

```

% ALTPROGRAMLAR

function y=fu(x)

%The exact solution of the DP

global x1 x2

```

C0=-(x1*x2+2*(x1+x2+2)+2);
C1=(x1^2-(x1+x2+2)*x1+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x1);
C2=(1/3)*x1^3-0.5*(x1+x2)*x1^2+x2*x1^2;
C3=(x2^2-(x1+x2+2)*x2+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x2);
C4=(1/3)*x2^3-0.5*(x1+x2)*x2^2+x1*x2^2;
C5=(C3-C1)/(C2-C4); C6=-(C3+C5*C4);
y=(x.^2-(x1+x2+4).*x+x1*x2+2*(x1+x2+2)+2).*exp(x)+((1/12).*...
x.^4-(1/6)*(x1+x2).*x.^3+0.5*x1*x2*x.^2).*C5+C6*x+C0;

```

function y=fut(x)

%The first derivative of the exact solution of the DP

global x1 x2

```

C0=-(x1*x2+2*(x1+x2+2)+2);
C1=(x1^2-(x1+x2+2)*x1+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x1);
C2=(1/3)*x1^3-0.5*(x1+x2)*x1^2+x2*x1^2;
C3=(x2^2-(x1+x2+2)*x2+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x2);
C4=(1/3)*x2^3-0.5*(x1+x2)*x2^2+x1*x2^2;
C5=(C3-C1)/(C2-C4);C6=-(C3+C5*C4);
y=(x.^2-(x1+x2+2).*x+x1*x2+x1+x2+2).*exp(x)+((1/3).*x.^3-
0.5*(x1+x2).*x.^2+x1*x2*x).*C5+C6;

```

function y=fu2t(x)

%The second derivative of the exact solution of the DP

global x1 x2

```

C0=-(x1*x2+2*(x1+x2+2)+2);
C1=(x1^2-(x1+x2+2)*x1+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x1);
C2=(1/3)*x1^3-0.5*(x1+x2)*x1^2+x2*x1^2;
C3=(x2^2-(x1+x2+2)*x2+x1*x2+x1+x2+2)*exp(x2);
C4=(1/3)*x2^3-0.5*(x1+x2)*x2^2+x1*x2^2;
C5=(C3-C1)/(C2-C4);
y=(x-x1).*(x-x2).*(exp(x)+C5);

```

function y=fk(x)

%The exact coefficient k(x)

```

y=(x+0.25).^(-1);

```

```
function y=fq(x)
%The coefficient q(x)
y=(x+0.25).^(-2);
```

```
function y=ff(x)
%The source function f(x)
y=((x+0.25).^(-2)).*fu(x)+((x+0.25).^(-2)).*fut(x)-((x+0.25).^(-1)).*fu2t(x);
```

```
function y=fup(x)
global A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8
y=A1.*x+A2.*x.^2+A3.*x.^3+A4.*x.^4+A5.*x.^5+A6.*x.^6+A7.*x.^7+A8.*x.^8;
```

```
function y=intkp(x)
%The function f(x)-q(x)*up(x)
y=feval('ff',x)-feval('fq',x).*feval('fup',x);
```

```
function y=intalfa1(x)
y=fq(x).*x;
```

```
function y=intalfa2(x)
y=fq(x).*x.^2;
```

```
function y=intalfa3(x)
y=fq(x).*x.^3;
```

```
function y=intalfa4(x)
y=fq(x).*x.^4;
```

```
function y=intalfa5(x)
y=fq(x).*x.^5;
```

```
function y=intalfa6(x)
y=fq(x).*x.^6;
```

```
function y=intalfa7(x)
y=fq(x).*x.^7;
```

```
function y=intalfa8(x)
y=fq(x).*x.^8;
```

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Gebze’de doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Gebze’de tamamladı. 1993 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 1998 yılında Bölüm Birinciliği derecesiyle mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda araştırma görevlisi olarak işe başladı.

Halen Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi kadrosundaki görevini sürdürmektedir.

