

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YERÇEKİMİ KUVVETİ VE YÜZEY GERİLİMİNİN DAMLACIK  
OLUŞUMUNA ETKİSİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ  
VE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS**

**Ertürk YILMAZATİLA**

**Anabilim Dalı: Makina Mühendisliği**

**Danışman: Yrd.Doç.Dr.Hasan KARABAY**

**KOCAELİ, 2006**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YERÇEKİMİ KUVVETİ VE YÜZEY GERİLİMİNİN DAMLACIK OLUŞUMUNA  
ETKİSİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ VE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ertürk YILMAZATİLA**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Temmuz 2006**

**Tezin Savunulduğu Tarih: 31 Ekim 2006**

**Tez Danışmanı**

**Yrd.Doç.Dr.Hasan KARABAY**



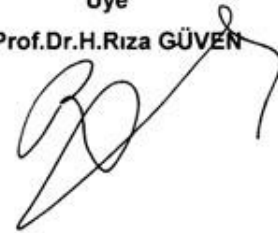
**Üye**

**Prof.Dr.H.Şinasi ONUR**



**Üye**

**Prof.Dr.H.Rıza GÜVEN**



**KOCAELİ, 2006**

## **ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR**

Yerçekimi kuvveti ve yüzey geriliminin damlacık oluşumuna etkisinin matematiksel modellenmesi ve sayısal çözümü konusunda proje ve tez aşamasında fikirleri ile beni yönlendiren ve teşvik eden, halen Southampton Üniversitesinde Proje Yöneticisi olarak görev yapmakta olan Sn.Yrd.Doç.Dr.M.Hakkı ERES'e, Kocaeli Üniversitesi Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalında görev yapmakta olan Tez Danışmanım Sn.Yrd.Doç.Dr.Hasan KARABAY ile tez jürimde yer alan Sn.Prof.Dr.H.Şinasi ONUR'a ve tez jürimin diğer üyesi Sakarya Üniversitesinde görevli Sn.Prof.Dr.H.Rıza GÜVEN'e emek ve katkılarından ötürü sonsuz minnettarlığımı sunmayı borç bilmekteyim. Ayrıca, çalışmalarım esnasında benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, beni sürekli olarak öğrenimime kanalize eden sevgili eşim Buket YILMAZATİLA'ya, hikaye kitabı okurcasına notlarımı okuyarak tezimin yazım aşamasında bana can-ı gönülden yardımcı olan dokuz yaşındaki oğlum Aybars YILMAZATİLA'ya ve tezimin hazırlık safhasında gereksinim duyduğum bilgisayar donanımları ihtiyacımı karşılamakta yardımseverliklerini defaeten gösteren kıymetli meslektaşlarım Bora HASKARA ile Cem TUNCER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
TABLolar DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR	v
ÖZET	vi
İNGİLİZCE ÖZET (ABSTRACT)	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Viskozite	3
2.2. Reynolds Sayısı	5
2.3. Yüzey Gerilimi	6
2.4. Yöneten Denklemler	7
2.5. Yüzey Geriliminin Boyutsuzlaştırılması	7
2.6. Yöntem	10
2.7. İnce Katman Yaklaşımı (Lubrication Approximation)	10
2.8. Boyutsuzlaştırma	22
2.9. Sayısal İnceleme	23
2.9.1. Ayrıklaştırma	23
2.10. Sonuç	27
3. İNCE SIVI FİLMLEİN YERÇEKİMSEL KARARSIZLIKLARI	28
3.1. Matematiksel Model	28
3.2. Sayısal Çözüm	32
3.3. Sonuçlar	32
4. DEĞERLENDİRME	47
KAYNAKLAR	54
EK	56
ÖZGEÇMİŞ	74

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$\frac{\delta\theta}{\delta t}$ hızı ile şekil değiştiren akışkan elemanı	4
Şekil 2.2	Katı çepere bitişik sınır tabaka içindeki Newton tipi hız dağılımı	4
Şekil 2.3	Islatmayan sıvı için sıvı-gaz-katı ara kesiti ( $\theta > 90^\circ$ )	9
Şekil 2.4	Islatan sıvı için sıvı-gaz-katı ara kesiti ( $\theta < 90^\circ$ )	10
Şekil 2.5	Eğimli bir yüzeyin üzerindeki ince bir sıvı film tabakasının şematik gösterimi	11
Şekil 3.1.	Geçirmez yatay bir yüzeyin altında asılı duran ince sıvı bir film tabakasının şematik gösterimi	28
Şekil 3.2	$t = 0.0$ 'da tek bir damlanın gelişimi	33
Şekil 3.3	$t = 92.849$ 'de tek bir damlanın gelişimi	33
Şekil 3.4	$t = 100.794$ 'de tek bir damlanın gelişimi	34
Şekil 3.5	$t = 102.775$ 'de tek bir damlanın gelişimi	35
Şekil 3.6	$t = 104.273$ 'de tek bir damlanın gelişimi	35
Şekil 3.7	$t = 109.900$ 'de tek bir damlanın gelişimi	36
Şekil 3.8	$t = 130.324$ 'de tek bir damlanın gelişimi	36
Şekil 3.9	$t = 211.457$ 'de tek bir damlanın gelişimi	37
Şekil 3.10	$t = 0.0$ 'da birden fazla damlanın gelişimi	38
Şekil 3.11	$t = 78.851$ 'de birden fazla damla gelişimi	39
Şekil 3.12	$t = 80.002$ 'de birden fazla damla gelişimi	39
Şekil 3.13	$t = 82.095$ 'de birden fazla damla gelişimi	40
Şekil 3.14	$t = 83.797$ 'de birden fazla damla gelişimi	41
Şekil 3.15	$t = 91.159$ 'de birden fazla damla gelişimi	41
Şekil 3.16	$t = 97.980$ 'de birden fazla damla gelişimi	42
Şekil 3.17	$t = 133.463$ 'de birden fazla damla gelişimi	42
Şekil 3.18	$t = 136.761$ 'de birden fazla damla gelişimi	43
Şekil 3.19	$t = 137.332$ 'de birden fazla damla gelişimi	43
Şekil 3.20	$t = 153.249$ 'de birden fazla damla gelişimi	44
Şekil 3.21	$t = 211.455$ 'de birden fazla damla gelişimi	44
Şekil 3.22	$t = 87.846$ 'de birden fazla damla gelişimi	45
Şekil 3.23	$t = 92.607$ 'de birden fazla damla gelişimi	45
Şekil 3.24	$t = 102.432$ 'de birden fazla damla gelişimi	46
Şekil 3.25	$t = 211.454$ 'de birden fazla damla gelişimi	46
Şekil 4.1	Altıgen simetride damlacık dizilimi	49
Şekil 4.2	Damlacık dalga boyları	50
Şekil 4.3	Boyada "Cratering (Çukurlaşma)" oluşumu	50
Şekil 4.4	Boyada "Flashing (Parlama)" oluşumu	51
Şekil 4.5	Boyada "Flowlevel (Akışın hatlaşması)" oluşumu	51
Şekil 4.6	Boyada "Blistering (Kabarma)" oluşumu	51
Şekil 4.7	Boyada "Rust (Korozyon, paslanma)" oluşumu	52
Şekil 4.8	Boyada "Sagging (Dalgalanma, katmerleşme)" oluşumu	52
Şekil 4.9	Boyada "Wrinkling (Kıvrımlaşma, oluklanma)" oluşumu	52

## **TABLolar DİZİNİ**

Tablo 3.1. Simülasyonun fiziksel ve ilgili diğler parametreleri (Tek damlacık oluşumuna göre)	32
Tablo 3.2. Simülasyonun fiziksel ve ilgili diğler parametreleri (Birden fazla damlacık oluşumuna göre)	38

## SİMGELER DİZİNİ

- $\theta$  : Yüzeyin yatay eksenle yaptığı eğim açısı, ( $^{\circ}$ )
- $h^{(0)}$  : Ortalama kaplama tabakası kalınlığı, (cm)
- $\lambda_x$  :  $x$  doğrultusundaki başlangıç bozukluğunun (dalgalanmasının) dalga uzunluğu, (cm)
- u** : Hız vektörü, (cm/s)
- $\rho$  : Yoğunluk, (gr/cm<sup>3</sup>)
- $t$  : Zaman, (s)
- $p$  : Basınç, (dyne/cm<sup>2</sup>)
- $\mu$  : Viskozite, (gr/cm s)
- g** : Yer çekimi ivmesi, (cm/s<sup>2</sup>)
- v** : **u** hızının  $y$  eksenine doğrultusundaki bileşeni, (cm/s)
- w** : **u** hızının  $z$  eksenine doğrultusundaki bileşeni, (cm/s)
- $L$  : Karakteristik uzunluk (uzunluk ölçeği), (cm)
- $H$  : Karakteristik kalınlık (kalınlık ölçeği), (cm)
- $\sigma$  : Yüzey gerilimi, (dyne/cm)
- $\tau$  : Normal gerilim, (dyne/cm)
- $\kappa$  : Yüzey eğriliği, (boyutsuz)
- Q** : Alan akısı, (cm<sup>2</sup>/s)
- $T$  : Karakteristik zaman (zaman ölçeği), (s)
- $Bo$  : Bond sayısı, (boyutsuz)
- $\rho_0$  : Atmosferik basınç (referans basınç), (dyne/cm<sup>2</sup>)

# YERÇEKİMİ KUVVETİ ve YÜZEY GERİLİMİNİN DAMLACIK OLUŞUMUNA ETKİSİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ ve SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Ertürk YILMAZATİLA

**Anahtar Kelimeler:** İnce katman yaklaşımı, yer çekimi ve yüzey gerilimi, ince sıvı filmlerin yer çekimsel kararsızlığı, Rayleigh-Taylor Kararsızlığı.

**Özet:** Bu çalışmada yerçekimi kuvveti ve yüzey geriliminin damlacık oluşumuna etkisinin matematiksel modellenmesi ve sayısal çözümü yapılmıştır.

İkinci bölümde; meyilli ve geçirmez bir yüzeydeki yerçekimi kuvveti ve yüzey geriliminin etkisi altındaki bir sıvının akışı model problem olarak sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde ise; ikinci bölümde açıklanan model esas alınarak, söz konusu yüzeyin ters çevrilmesi durumunda yani yüzey üzerindeki ince sıvı film tabakasının yüzeyin altında kaldığı durumda, bu tabakada yerçekimine bağlı olarak meydana gelen kararsızlıklar ve yüzey geriliminin bu kararsızlığı düzeltici yöndeki etkisi açıklanmaktadır. Bir çok uygulamada katı bir maddenin alt tarafı kaplandığında, kaplama tabakasında gözle görülebilir bir damlacık şekli oluşur. Bu tip bir kararsızlık Rayleigh-Taylor Kararsızlığı olarak adlandırılır. Sonuçta da, Rayleigh-Taylor Kararsızlığına bağlı olarak damlacık oluşumunun matematiksel modellenmesi ve sayısal çözümü sunulmaktadır.



# MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL SOLUTION OF SURFACE TENSION AND GRAVITATIONAL EFFECTS ON DROP FORMATION

Ertürk YILMAZATİLA

**Keywords:** Lubrication approximation, gravity and surface tension, gravitational instabilities of thin liquid films, Rayleigh-Taylor Instability.

**Abstract:** In this study, the mathematical model and numerical solution of surface tension and gravitational effects on drop formation was carried out.

In chapter 2, a model problem, the flow of a liquid on an inclined, impermeable substrate under the effect of gravity and surface tension, is presented.

The gravitational instabilities of thin liquid films are considered in chapter 3. In many applications, when the underside of a solid substrate is coated, the coating may form visible drops, depending on the physical and operational parameters. This type of an instabilities is called Rayleigh-Taylor Instability. In the end, a mathematical model and numerical solution will be presented for drop formation related to this instability.

## 1. GİRİŞ

İnce film tabakalarının üretimi, araştırmalardan doğan modern bir teknolojinin kullanımını gerektirir. Kaplayıcı akışkanların kullanımı bir çok endüstriyel sahada, özellikle de kimya endüstrisinde, tek katmanlı dekoratif bir kaplamadan fotoğraf filmlerindeki çok katmanlı kaplamalara, güneş ışınlarına karşı optik yüzeylerin kaplanmasından metal yüzeylerdeki olası korozyonu önleme maksatlı kaplama uygulamalarına kadar değişik alanlarda kendini göstermektedir. Kaplayıcı akışkanlar küçük ölçekli, viskoz ve serbest yüzeye sahip akışkanlardır. Genelde uygulayıcılar, ince, mükemmel yakın, mümkün olduğunca hızlı bir şekilde uygulanabilen ve istenilen kalınlıkta uniform özellikli bir film tabakası kullanabilmeyi arzu ederler. Kaplayıcı akışkanların bir tür kozmetik niceliğini belirten kalınlıklarının uygulanmasında kendi tolerans standartlarına sahip bir çok üretici bazı sorunlarla sık sık karşılaşır. Bu sorunlar;

a. Kılcal Boşluklar: Katı yüzeyin bazı lokal bölgelerinin kaplanmamış olarak kalması şeklinde başgösterirler. Bunun nedeni ise; yüzeyin yağdan arındırılmasında yetersiz kalınması, kalınlığın uniform olarak uygulanamaması veya yüzeydeki kirliliktir. Tüm bu sayılan olumsuzlukların oluşumu engellense dahi, kaplama sıvısının içine nüfuz eden havanın meydana getirdiği kabarcıklar da bu kılcal boşlukların oluşumuna sebebiyet verebilir.

b. İnce Çizgiler ve Damllar: Kaplayıcı sıvı filme istenmeyen yabancı bir akışkan karıştığında ya da kaplayıcı film sentrifügal bir sıçratmaya maruz kaldığında bu tür bir sorunla karşılaşılır. Kaplayıcı sistemde birikebilen yabancı cisimler de kaplayıcı filmde düzensizliklere sebebiyet verir. Seri kararsızlık olarak da bilinen bu ince çizgiler ve damlacıklar; kaplama uygulaması esnasında kaplayıcı akışkanın süreklilik isteyen bir şekilde miktarsal olarak sisteme beslenmesi gerekirken bu beslemenin zaman içinde aralıklarla yapılması nedeniyle de oluşmaktadır.

c. Oluklaşma veya fitillenme: Kaplayıcı film kalınlığının enine değişimiyle ilgilidir ve tabaka üzerinde damarlı bir patern gelişimine neden olurlar. Bu durum en çok

karşılaşılan sorundur ve kararsızlığı arttırıcı nitelikteki hidrodinamik kuvvetlerin kararsızlığı düzeltici etkiye sahip yüzey gerilimi kuvvetlerinden fazla olması halinde kaplama kalınlığının kabarıklılığında oluşan kararsızlıklardır. Yukarıda bahsedilen tüm bu sorunlar, bir dereceye kadar tolere edilebilir ve oluşan küçük genlikli düzensizlikler (kararsızlıklar) kuruma veya kurutma sürecinden önce düzeltilebilir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Viskozite

Viskozite hareket halindeki akışkanda mevcut olan yerel gerilmelerle, akışkan elemanının şekil değiştirme hızı arasındaki ilişkiyi belirler. Bir akışkana kayma gerilmesi uygulandığında, akışkan,  $\mu$  viskozite katsayısı olarak adlandırılan bir özelliği ile ters orantılı bir şekil değiştirme hızında hareket etmeye başlar. Şekil 2.1'de gösterildiği gibi, bir düzleminin  $\tau$  kayma gerilmesinin etkisinde olduğu bir akışkan elemanı göz önüne alınsın.  $\tau$  kayma gerilmesi etkilediği sürece, üst yüzey alt yüzeyden  $\delta u$  kadar daha hızlı hareket ettiği için,  $\delta\theta$  şekil değiştirme açısı devamlı olarak artar. Su, yağ ve hava gibi akışkanlar için uygulanan gerilme ile şekil değiştirme hızı arasındaki ilişki doğrusaldır:

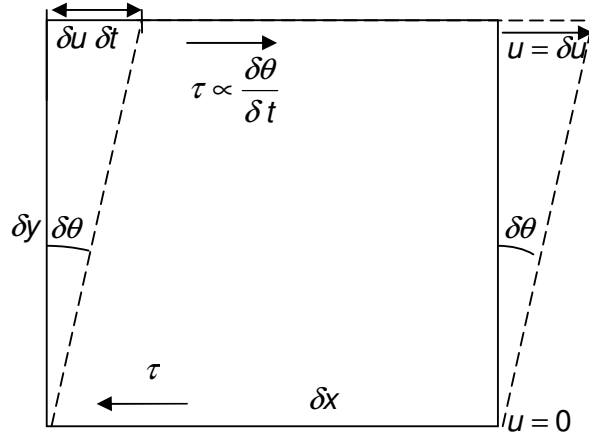
$$\tau \propto \frac{\delta\theta}{\delta t} \quad (2.1)$$

Şekil-2.1'deki geometriden;

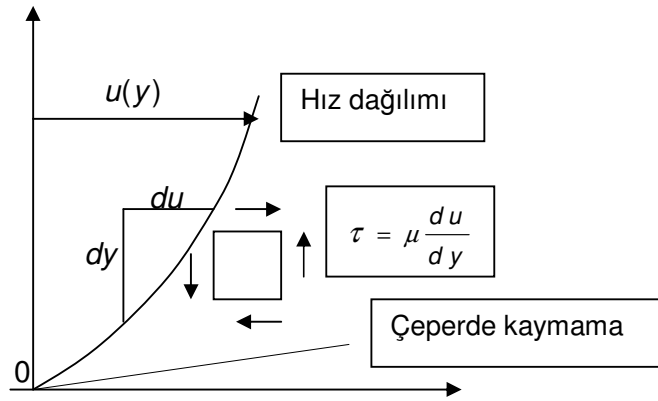
$$\tan\delta\theta = \frac{\delta u \delta t}{\delta y} \quad (2.2)$$

bağıntısı elde edilir. Sonsuz küçük değişimler düşünülerek limit alındığında, bu denklem hız gradyanı ile şekil değiştirme hızı arasındaki ilişkiyi ifade eder:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (2.3)$$



Şekil 2.1:  $\frac{\delta\theta}{\delta t}$  hızı ile şekil değiştiren akışkan elemanı.



Şekil 2.2: Katı çeperle bitişik sınır tabaka içindeki Newton tipi hız dağılımı.

Denklem (2.1)'den, uygulanan kayma gerilmesinin, doğrusal karakterdeki yaygın akışkanlar için, hız gradyanı ile orantılı olduğu görülür. Orantı sabiti,  $\mu$ , viskozite katsayısıdır:

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.4)$$

Denklem (2.4) boyutsal olarak uyumludur. Bu nedenle,  $\mu$ , gerilme-zaman boyutuna sahiptir:  $[M/(LT)]$  veya  $[FT/L^2]$ . CGS birim sisteminde bu boyutun birimi  $gr/(cm.s)$ 'dir. Denklem (2.4)'e uyan doğrusal karakterdeki akışkanlara, bu direnç yasasını 1687

yılında ilk defa öneren Sir Isaac Newton'un anısına, Newton Tipi Akışkanlar denilmektedir. Akışkanlar mekaniğinde  $\theta(t)$  şekil değiştirme açısı ile ilgilenmek yerine Şekil-2.2'de gösterildiği gibi  $u(y)$  hız dağılımı ile ilgilenilir. Denklem (2.4), sürtünmeli (viskoz) akışlardaki  $u(y)$  hız dağılımını—daha genel ifade ile  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  hız alanını- belirlemekte kullanılacak olan diferansiyel denklemleri türetmek için kullanılır. Şekil-2.2'de katı çepere bitişik kayma tabakası ya da sınır tabaka gösterilmektedir. Kayma gerilmesi hız profiline eğimi ile orantılıdır ve en büyük değere çeperde sahiptir. Çeper üzerindeki akışkanın  $u$  hızı çepere göre sıfırdır: Bu durum kaymama koşulu olarak adlandırılır ve tüm sürtünmeli akışların karakteristik bir özelliğidir [1, 2].

## 2.2. Reynolds Sayısı

Tüm newton tipi akışkanların viskoz davranışlarını belirleyen ana parametre boyutsuz Reynolds Sayısı'dır:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (2.5)$$

Burada  $V$  ve  $L$  akışa ait karakteristik hız ve uzunluk ölçekleridir. Denklem (2.5)'in en sonundaki teriminin paydasında yer alan  $\nu$ ,  $\mu$ 'nün  $\rho$ 'ya oranı olarak tanımlanan kinematik viskoziteyi belirtir:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.6)$$

Kütle boyutları ortadan kalktığı için bu kinematik bir büyüklüktür ve  $[L^2/T]$  boyutundadır. Çok küçük Reynolds Sayısı, atalet etkilerinin önemli olmadığı sürtünmeli akışın sürünme hareketi yaptığını gösterir. Reynolds Sayısı'nın orta değerleri laminer akışa karşılık gelir. Yüksek Reynolds Sayıları, olasılıkla, zaman içinde yavaşça değişen fakat bunun üzerine güçlü yüksek frekanslı rasgele çalkantıların eklendiği türbülanslı akışa neden olur. Bu çerçevede Reynolds Sayısı için aşağıdaki yaklaşık aralıklar oluşur [1]:

$0 < Re < 1$	: Çok sürtünmeli laminer “sürünme” hareketi
$1 < Re < 100$	: Laminer (Reynolds Sayısına şiddetli bağımlılık)
$100 < Re < 1000$	: Laminer (Sınır tabaka teorisi faydalı)
$1000 < Re < 10^4$	: Türbülansa geçiş
$10^4 < Re < 10^6$	: Türbülanslı (Orta derecede Reynolds Sayısına bağımlılık)
$10^6 < Re < \infty$	: Türbülanslı (Az derecede Reynolds Sayısına bağımlılık)

### 2.3. Yüzey Gerilimi

Serbestçe genişleyemeyen sıvılar ikinci bir sıvı ile ya da gaz ile bir ara yüzey oluştururlar. Sıvının iç kısımlarında yer alan moleküller çok yakın kümелendikleri için birbirlerini iterler. Yüzeyde bulunan moleküller daha az yoğundur ve birbirlerini çekerler. Komşularının yarısı olmadığı için mekanik etki yüzeyin gerilmesi ile ortaya çıkar. Eğer, ara yüzeyde,  $dL$  uzunluğunda bir kesim yapılırsa,  $\sigma dL$  eşit ve zıt yönlere olan kuvvetler, kesim doğrultusuna dik ve yüzeye paralel olarak oluşur. Burada  $\sigma$  yüzey gerilimi katsayısı (kısaca, yüzey gerilimi) olarak adlandırılır.  $\sigma$  'nın boyutları  $[MT^{-2}]$  olup, SI birim sisteminde Newton/metre veya  $N.m/m^2$ 'dir. Bir sıvının molekülleri arasında karşılıklı bir çekim ve etkileşme vardır. Bu çekim kuvveti termal çalkalanmadan etkilendiğinde, sıvının molekülleri gaz fazına geçerler. Öncelikle örnek olarak hava ve su arasındaki serbest bir yüzeyi ele alalım. Eğer  $E$  molekül başına toplam kohezif enerji ise, düz bir yüzeydeki bir molekülün enerjisi  $E/2$  olacaktır. Dolayısıyla yüzey geriliminin, direkt olarak birim yüzey alanı başına düşen bu enerji kaybının miktarı olduğu ortaya çıkar. Eğer karakteristik molekül boyutu  $R$  ve karakteristik molekül alanı da  $R^2$  ise yüzey gerilimi  $\sigma \approx \frac{E}{(2R^2)}$ 'dir. Moleküller

arası çekim artarken ve molekül ölçü azalırken yüzey geriliminin arttığına dikkat edilmelidir. Bir çok yağ-hava arayüzeyinde  $\sigma \approx 20$  dyne/cm, su-hava arayüzeyinde  $\sigma \approx 70$  dyne/cm'dir. Sıvı metaller ise en yüksek yüzey gerilimine sahiptir, örneğin sıvı cıvanın yüzey gerilimi  $\sigma \approx 500$  dyne/cm'dir. Yüzey gerilimi  $\sigma$ , kuvvet/uzunluk veya enerji/alan boyutuna sahip olduğundan negatif yüzey basıncı olarak da düşünülebilir. Basınç genel olarak sıvı hacminden dışarıya doğru etkiyen, alan başına izotropik bir kuvvet olarak ele alındığında, küçük bir yüzey elemanı  $dS$ 'e; lokal basınç alanı  $p(x)$  olmak üzere toplam  $p(x)dS$ kadar bir toplam kuvvet etki edecektir. Eğer  $S$  yüzeyi kapalıysa ve basınç da düzgün dağılmışsa  $S$  yüzeyine etkiyen net basınç kuvveti sıfır olacaktır ve akışkan hareketsiz olarak kalacaktır. Bir

akışkan içerisinde basınç gradyanları birim hacim başına düşen birim kuvvet olan bünyesel kuvvete karşılık gelir ve Navier-Stokes denklemlerinde açık olarak ifade edilirler. Basit olarak açıklanabilmesi maksadıyla mükemmel düzgünlükte bir ara yüzey düşünüldüğünde yüzey hattı elemanı  $dl$  'ye, lokal yüzey gerilimi  $\sigma(x)$  olmak üzere toplam olarak  $\sigma dl$  kuvveti etki eder. Yüzey hattı elemanı kapalı bir  $C$  lup'u ise ve yüzey gerilimi de eşit ve düzgün olarak dağılıyorsa,  $C$ 'ye etkiyen net yüzey gerilimi kuvveti sıfırdır ve böylelikle de akışkan hareketsiz kalmaktadır. Eğer yüzey gerilimi gradyanları artarsa yüzey elemanına etki eden net bir kuvvet ortaya çıkacaktır ve bu kuvvet de akışkanın hareketin neden olacaktır.

## 2.4. Yöneten Denklemler

$\rho$  yoğunluğuna ve  $\mu$  viskozitesine sahip bir akışkan Navier-Stokes denklemleriyle yönetilir ve Newton'un süreklilik kanununu içerir [1]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{F} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

Bu denklem sistemi;  $p$  akışkanın basıncını,  $\mathbf{u}$  da hız alanının  $x, y, z$  eksenlerindeki üç bileşenini temsil etmek üzere dört bilinmeyenli bir denklem sistemini oluşturur. Burada  $\mathbf{F}$  akışkana etki eden herhangi bir bünyesel kuvveti göstermektedir. Örneğin, yer çekimi kuvvetinin etkidiği bir alanda  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$  'dir ve  $\mathbf{g}$  de yer çekimi ivmesidir. Yüzey gerilimi sadece serbest yüzeyde etki eder, bunun neticesinde de Navier-Stokes denklemlerinde yer almaz, fakat sınır koşullarının içinde bulunur.

## 2.5. Yüzey Geriliminin Boyutsuzlaştırılması

Yüzey gerilimi  $\sigma$  tarafından karakterize edilen  $\rho$  yoğunluğuna ve  $\mu = \rho \nu$  viskozitesine sahip bir akışkan serbest yüzeyini ele alınır. Akış, karakteristik uzunluk ve hız ölçekleri olmak üzere sırasıyla  $L$  ve  $V$  ile belirtilir ve  $\mathbf{g} = -g \hat{z}$  yer çekimsel alanında geliştirilir. Böylece kütle, uzunluk ve zaman temel boyutlarıyla ifade



edilebilen altı değişkenle ( $\rho, \nu, \sigma, a, U, g$ ) tanımlanan fiziksel bir sistem elde edilir. Buckingham Teoreminden bu değişkenlerden üç adet boyutsuz sayı tanımlar:

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad Fr = \frac{V^2}{gL} \quad Bo = \frac{\rho g L^2}{\sigma}$$

Burada Re (Reynolds Sayısı)=Atalet Kuvvetleri/Viskozite, Fr (Froude Sayısı)=Atalet/Yerçekimi ve Bo (Bond Sayısı)=Yerçekimi/Eęrilik'tir. Reynolds sayısı sistemdeki atalet ve viskoz kuvvetlerinin birbirlerine göre göreceli büyüklüklerini, Froude sayısı da atalet kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetine göre göreceli büyüklüklerini ifade etmektedir. Bond Sayısı ise, yerçekimi ve yüzey gerilimi tarafından oluşturulan kuvvetlerin birbirlerine göre göreceli önemlerini belirtmektedir. Bu iki kuvvetin  $Bo=1$  olduğunda karşılaştırılabilir olduğuna ve bu durumda da uzunluk ölçeğinin  $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$  olduğuna dikkat edilmelidir. Kılcal uzunluktan daha

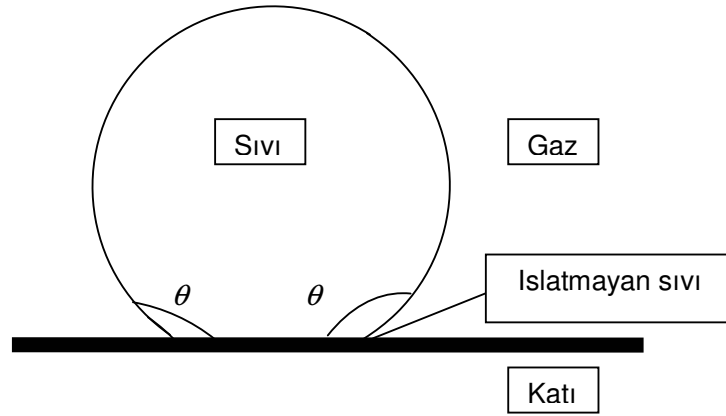
küçük olan havadaki su tanecikleri yüzey gerilimi tarafından baskı altında tutulmaktadır. Daha açık bir deyişle, kılcal uzunluk, bir damlacığın bir tavandan aşağıya doğru sarkık durabilmesi ve bir böceğin su üzerinde batmadan yürüyebilmesi için sahip olması gereken maksimum boyutunu belirtmektedir. Son olarak da, Re, Fr ve Bo sayılarından türetilen Weber (We) ve Kılcallık (Ca) sayılarını vermek gerekirse;

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} \text{ ve } Ca = \frac{\rho \nu V}{\sigma} \text{ 'dir.}$$

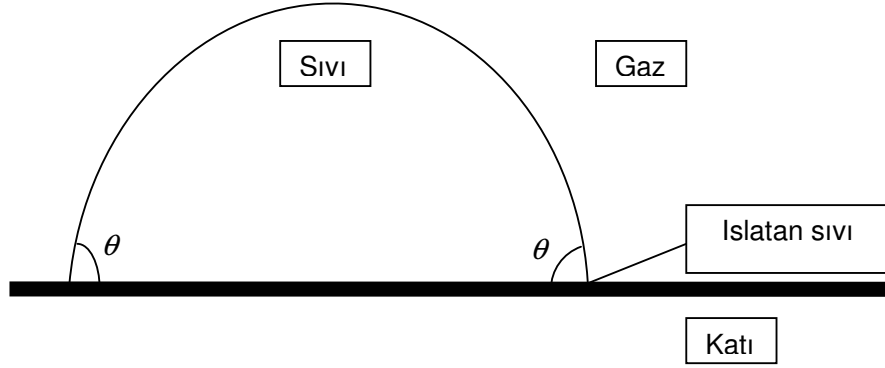
Burada da  $We$ =Atalet Kuvvetleri/Eęrilik ve  $Ca$ =Viskoz Kuvvetleri/Eęrilik'tir. Weber Sayısı, bir akışkan içerisindeki atalet ve eğrilik kuvvetlerinin birbirlerine göre olan göreceli büyüklüklerini belirtir. Yüzey geriliminin yerçekimi ve viskoz gerilmelere oranının önemi, Weber, Froude ve Reynolds sayılarının göreceli büyüklükleriyle açıklanmaktadır. Yüksek Reynolds sayısı ile ilgilenildiğinde ise normal kuvvetlerin dengelenebilmesi; ya yerçekimi kuvveti ya da eğrilik kuvvetleri tarafından dengelenen bir dinamik basınca ihtiyaç duymaktadır. Özetlemek gerekirse, Bond sayısı tipik olarak statik durumlarda kullanılır. Eğer sistem hareket halinde veya kararsız durumda ise Reynolds veya Weber sayıları önemli hale gelir. Yüksek Bond sayısı sistemin göreceli olarak yüzey geriliminden etkilenmediği, küçük Bond sayısı

ise yüzey geriliminin baskın karakterde olduğunu gösterir. Orta büyüklükteki Bond sayısı ise her iki durum arasında belirsiz (kararsız) bir dengeyi ifade eder. Eğer Bond sayısı; 1'den çok büyükse yüzey gerilimi etkileri ihmal edilebilir, 1'den çok küçükse yerçekimi kuvvetinin etkileri ihmal edilebilir. Örnek vermek gerekirse, 2.7 mm. çapındaki bir tüpte bulunan ve yerçekimi kuvvetine tabi bir suyun Bond sayısı 1'dir ve böyle bir tüpte akışkan yüzeyi eğridir. Eğer tüpün çapı çok daha küçükse, yerçekimi kuvveti akışkan üzerinde önemli bir etki yapmayacaktır ve bu tüp baş aşağı çevrilse bile tüpteki su tüpten dışarıya akmayacaktır.

İkinci bir önemli yüzey etkisi temas açısı  $\theta$  'dır ve Şekil 2.3 ve Şekil 2.4'de gösterildiği üzere sıvı ara kesit yüzeyinin katı bir yüzeyle kesişmesi durumunda oluşur. Bu durumda kuvvet dengesi  $\sigma$  ve  $\theta$  'nın her ikisi ile de ilişkili olacaktır. Eğer temas açısı  $90^\circ$ 'den küçükse, sıvı ıslatan sıvı; eğer temas açısı  $90^\circ$ 'den büyükse sıvı ıslatmayan sıvı olarak adlandırılır. Örneğin su, sabunu ıslatır fakat cila maddesini ıslatmaz. Su temiz bir cam yüzeyi aşırı derecede ıslatır dolayısıyla  $\theta = 0$  'dır.



Şekil 2.3: Islatmayan sıvı için sıvı-gaz-katı ara kesiti ( $\theta > 90^\circ$ ).



Şekil 2.4: Islatan sıvı için sıvı-gaz-katı ara kesiti ( $\theta < 90^\circ$ )

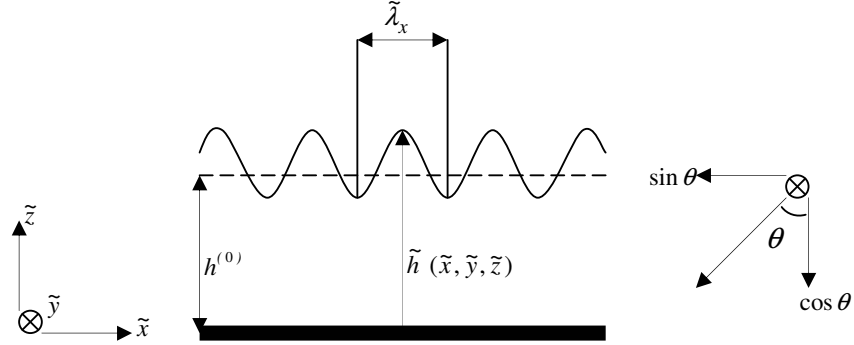
## 2.6. Yöntem

Kaplayıcı akışkanların incelikleri ve yavaşlıkları bize İnce Katman Yaklaşımını (Reynold's Lubrication Theory) kullanma ve böylelikle de olayı yöneten kısmi diferansiyel denklemleri basitleştirme imkanı sağlar. Bu basitleştirme uygulaması; viskoz ve sıkıştırılmayan nitelikteki akışkanın hızının çok düşük, bir başka deyişle de çok düşük Reynolds sayısına sahip olması ve bünyesindeki viskoz kuvvetlerin de atalet kuvvetlerinden çok daha büyük olması esas alınarak, Navier-Stokes denklemlerinin bazı yaklaşım veya kabullerle kısaltılmasına dayanmaktadır. Bu problem için ilk önce İnce Katman Yaklaşımı (Reynold's Lubrication Approximation) türetilir, sonra da elde edilen doğrusal olmayan gelişim denklemi boyutsuzlaştırılır. Sonrasında da uygun ayrıklaştırma ve sayısal çözüm teknikleri kullanılır. Bir çok uygulamada katı bir maddenin alt tarafı kaplandığında, kaplama tabakasında gözle görülebilir bir damlacık şekli oluşur. Bu tip bir kararsızlık Rayleigh-Taylor Kararsızlığı olarak adlandırılır ve bu tip bir problemin çözümü için sayısal ve matematiksel bir model kullanılır.

## 2.7. İnce Katman Yaklaşımı

Bu bölümde eğimli, geçirmez bir madde üzerindeki bir sıvının yerçekimi ve yüzey gerilimi etkisi altındaki akışının matematiksel modeli incelenmektedir. Kaplama film tabakaları için süreklilik ve momentum denklemleri, İnce Katman Yaklaşımı kullanılarak basitleştirilir. Sonuçta ortaya çıkan gelişim denklemi uygun ölçeklendirmeler kullanılarak boyutsuz şekle dönüştürülür. Elde edilen boyutsuz gelişim denklemi ayrıklaştırılır ve kısmi kapalı bölme metodu kullanılarak sayısal

çözüm algoritması elde edilir. Şekil 2.5; geçirimsiz eğimli bir yüzey üzerindeki ince bir sıvı film tabakasını göstermektedir.



Şekil 2.5: Eğimli bir yüzeyin üzerindeki ince bir sıvı film tabakasının şematik gösterimi.

Burada  $\theta$  ; yüzeyin yatay eksenle yaptığı eğim açısı,  $\tilde{x}$  ve  $\tilde{y}$  ; yüzeyin koordinatları,  $\tilde{z}$  ; yüzeye dik olan koordinattır.  $\tilde{x}$  doğrultusundaki başlangıç bozukluğunun (dalgalanmasının) dalga uzunluğu  $\tilde{\lambda}_x$  ve ortalama kaplama tabakası kalınlığı  $h^{(0)}$ 'dir. Sıkıştırılmaz ( $\rho \Rightarrow$  sabit) bir Newtonian akışkanın süreklilik ve momentum denklemleri [3];

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{p}} + \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{g} \quad (2.10)$$

Burada  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}\mathbf{i} + \tilde{v}\mathbf{j} + \tilde{w}\mathbf{k}$  hız vektörü,  $\tilde{t}$  ; zaman,  $\tilde{p}$  ; basınç,  $\mu$  ; viskozite,  $\rho$  ; yoğunluk ve  $\mathbf{g}$  ; yerçekimi ivmesidir. Keyfi bir koordinat sistemi için süreklilik ve momentum denklemlerinin türevleri [3] tarafından verilmektedir. Atalet kuvvetlerinin ihmal edilebilir olduğu farz edilirse, momentum denklemi;

$$0 = -\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{p}} + \mu \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{g} \quad (2.11)$$

haline indirgenmiş olur.

Denklem (2.11) kartezyen koordinat sistemi bileşenleri şeklinde;

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] - \rho g \sin \theta \quad (2.12)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (2.13)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right] - \rho g \cos \theta \quad (2.14)$$

olarak yazılabilir. Süreklilik denklemi ;

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (2.15)$$

Denklem (2.14) ve Denklem (2.15)'i basitleştirmek için;  $L$  olarak uzunluk ölçeği,  $H$  olarak kalınlık ölçeği tanımlarsak, sıvı film tabakasının inceliğinin  $\frac{H}{L} \ll 1$  olması gerekir.  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  ve  $\tilde{z}$  koordinatları;

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= xL, \\ \tilde{y} &= yL, \\ \tilde{z} &= zH \end{aligned} \quad (2.16)$$

olarak,  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ve  $\tilde{w}$  hızları da;

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= uU, \\ \tilde{v} &= vU, \\ \tilde{w} &= wW \end{aligned} \quad (2.17)$$

olarak boyutsuzlaştırılırlar.

Burada  $U$  ve  $W$  ; sırasıyla yüzeye paralel ve normal (dik) doğrultudaki karakteristik hızlardır. Denklem (2.16) ve Denklem (2.17)'deki yeni değişkenleri Denklem (2.15)'deki süreklilik denkleminde yerine koyulursa Denklem (2.15);

$$\frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{W}{H} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

şeklini alır. Denklem (2.15)'ten türeyen Denklem (2.18)'e bakıldığında bütün terimlerin ve başlarındaki katsayıların aşağı yukarı aynı olması gerektiği kabulüyle  $U$  ve  $W$  arasında;

$$W \approx \frac{H}{L} U \quad (2.19)$$

olacak şekilde bir bağıntı bulunması gerektiği belirlenir.  $\tilde{p} = pP$  olarak ( $P$  : Referans bir basınç) boyutsuzlaştırıldıktan sonra Denklem (2.16), Denklem (2.17) ve Denklem (2.19) kullanılarak  $\tilde{z}$  yönündeki momentum denklemini;

$$0 = -\frac{P}{H} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{UH}{L} \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - \rho g \cos \theta \quad (2.20)$$

haline dönüşür.  $\frac{H}{L} \ll 1$  olduğunda harekete neden olan  $\tilde{z}$  yönündeki kuvvet, bünyesel kuvvettir. Burada bünyesel kuvvet ile basınç gradyanı arasında bir denge mevcuttur, bundan ötürü basıncın;

$$P = \rho g H \quad (2.21)$$

olarak boyutsuzlaştırılması gerektiği bulunur. Denklem (2.16), Denklem (2.17) ve Denklem (2.21) ile  $\tilde{p} = pP$  ölçeklendirmesi kullanılarak ve  $\tilde{y}$  doğrultusundaki boyutsuzlaştırılmış momentum denklemini ;

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right]$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \left[ \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

$$0 = -\frac{\rho g H}{L} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{U}{H^2} \left[ \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. Buradan da  $U$  hızının tespitinde;

$$0 = -\frac{\rho g H}{L} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \text{eşitliğindeki birinci terim ile}$$

dördüncü terimin katsayılarının yaklaşık olarak aynı olduğu varsayımıyla;

$\frac{\rho g H}{L} \sim \mu \frac{U}{H^2}$  olarak bulunur. Bu eşitliğin basitleştirilmesi sonucunda da  $U$  hızının;

$$U \approx \frac{\rho g H^3}{\mu L} \quad (2.23)$$

olarak ölçeklendirilmesi gerektiği sonucuna varılır. Denklem (2.19)'u kullanarak  $W$  hızının da;

$$W \approx \frac{\rho g H^4}{\mu L^2} \quad (2.24)$$

olarak ölçeklendirilmesi gerektiği bulunur. Denklem (2.16), Denklem (2.17) ve Denklem (2.21) ile  $\tilde{p} = pP$  ölçeklendirmesi kullanılarak ve  $\tilde{x}$  doğrultusundaki boyutsuzlaştırılmış momentum denklemi;

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] - \rho g \sin \theta$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left[ \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \rho g \sin \theta$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left[ \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \rho g \sin \theta$$

Denklem (2.23) ile Denklem (2.24)'ün de kullanımı ve  $\frac{H}{L} \ll 1$  olduğuna göre

$$\frac{H^2}{L^2} = \left( \frac{H}{L} \right)^2 \text{ teriminin de 1'den çok daha küçük, sıfıra çok daha yakın bir değer}$$

olacağı düşüncesiyle Denklem (2.12), Denklem (2.13) ve Denklem (2.14)'te yer alan momentum denklemleri;

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \rho g \sin \theta \quad (2.25)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (2.26)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \rho g \cos \theta \quad (2.27)$$

olacak şekilde basitleştirilmiş olur. Denklem (2.27)'in  $\tilde{z}$  doğrultusunda integralini alınırsa;

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\rho g \cos \theta \tilde{z} + f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad (2.28)$$

elde edilir. Hava ile temas halindeki kaplama yüzeyindeki ( $z=h$ ) normal gerilme;

$$\tilde{\tau}_{zz} = \sigma \tilde{\kappa} \quad (\tilde{z} = \tilde{h}) \quad (2.29)$$

ile verilmektedir [3]. Burada  $\sigma$  ; yüzey gerilimidir. Yüzeyin eğriliğini ifade eden  $\kappa$  ise;

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\nabla} \cdot \left( \frac{\tilde{\nabla} \tilde{h}}{\sqrt{1 + (\tilde{\nabla} \tilde{h})^2}} \right) \text{ eşitliği ile tanımlanmıştır [3].}$$

Yüzey; dümdüz bir yüzey olarak dahi ele alınsa;



$\tilde{\nabla}\tilde{h} = \frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\mathbf{k}$ , ve de  $|\tilde{\nabla}\tilde{h}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial z}\right)^2}$  olduğundan  $\tilde{\nabla}\tilde{h}$ 'ın

mutlak değerinin de;  $|\tilde{\nabla}\tilde{h}| \ll 1$  (sıfıra çok yakın bir değer) olması gerekmektedir.

Buradan serbest yüzeyin eğriliği;  $\tilde{\kappa} = \tilde{\nabla} \cdot \left( \frac{\tilde{\nabla}\tilde{h}}{\sqrt{1 + (\tilde{\nabla}\tilde{h})^2}} \right)$  eşitliği kullanılarak yaklaşık

olarak  $\kappa = \tilde{\nabla}^2 \tilde{h}$  olarak bulunur ve Denklem (2.28);

$$\tilde{p} = -\sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0 \quad (\tilde{z} = \tilde{h} \text{ sınır koşulunda}) \quad (2.30)$$

haline dönüşür. Denklem (2.30)'daki  $\tilde{p}_0$  ifadesi çevre (atmosfer) basıncını simgelemektedir. Denklem (2.28)'e sınır koşullarını uygulayarak kaplama tabakasındaki basınç dağılımını;

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\rho g \cos\theta \tilde{z} + f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad (2.28)$$

$$\tilde{p} = -\sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0 \quad (\tilde{z} = \tilde{h} \text{ sınır koşulunda}) \quad (2.30)$$

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = \tilde{h}, \tilde{t}) = -\rho g \cos\theta \tilde{h} + f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$$

$$-\rho g \cos\theta \tilde{h} + f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = -\sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0$$

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \rho g \cos\theta \tilde{h} - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0$$

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \rho g \cos\theta (\tilde{h} - \tilde{z}) - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0$$

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \rho g \cos\theta (\tilde{h} - \tilde{z}) - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0 \quad (2.31)$$

olarak elde edilir. Kaplama tabakasında elde edilen bu basınç dağılımı kullanılarak Denklem (2.25)  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$  hızını bulmak için integre edilir:

$$\int \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{z} = \int \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] d\tilde{z}$$

$$\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \tilde{z} + c_1$$

$$\int \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{z} = \int \left[ \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right) \tilde{z} + c_1 \right] d\tilde{z}$$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \tilde{z}^2 + c_1 \tilde{z} + c_2 \quad (2.32)$$

Denklem (2.26) da;  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$  hızını bulmak için integre edilir:

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\int \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{z} = \int \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} d\tilde{z}$$

$$\mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{z} + c_3$$

$$\int \mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{z} = \int \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{z} + c_3 \right) d\tilde{z}$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{z}^2 + c_3 \tilde{z} + c_4 \quad (2.33)$$

Bir akış bir katı yüzey ile sınırlandığında, moleküler etkileşim, katı yüzeyle temas halinde olan akışkanın, yüzey ile momentum ve enerji dengesini oluşturmaya

çalışmasına yol açar. Tüm sıvılar temas ettikleri yüzey ile denge halindedirler ve tüm akışkanlar, katı yüzey ile temasta buldukları noktada o yüzeyin hızını alırlar. Bu durum, katı yüzey üzerinde “Kaymama Koşulu” olarak adlandırılır [2, 3]. Kaymanın olmadığı durumda  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = 0, \tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = 0, \tilde{t}) = 0$  olacağından Denklem (2.32) ve Denklem (2.33)'deki integral sabitleri  $c_2 = c_4 = 0$  bulunur.  $c_1$  ve  $c_3$  sabitleri, serbest yüzeyde ( $\tilde{z} = \tilde{h}$ ) kesme geriliminin sıfır olduğu bilindiğine göre;

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\tilde{h}} = 0 \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\tilde{h}} = 0 \quad \text{olduğundan Denklem (2.32) ve Denklem (2.33)'ün}$$

z'ye göre türevi alındığında;

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \tilde{z} + c_1$$

$$0 = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \tilde{z} + c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \tilde{h} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{z} + c_3$$

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{z} + c_3$$

$$c_3 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{h} \quad (2.35)$$

olarak bulunur.  $c_1$  ve  $c_3$  sabitlerinin değerleri Denklem (2.32) ve Denklem (2.33)'de yerine koyulursa  $\tilde{u}$  ve  $\tilde{v}$  hız denklemlerinin son şekli;

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \rho g \sin \theta \right] \left( \frac{\tilde{z}^2}{2} - \tilde{h} \tilde{z} \right) \quad (2.36)$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\tilde{z}^2}{2} - \tilde{h} \tilde{z} \right) \quad (2.37)$$

olur. Süreklilik denklemini  $\tilde{z}$  doğrultusunda integre edilirse;

$$\int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{z} = - \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{z} - \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} d\tilde{z} \quad \text{ve bu integralde de Leibniz Kuralı}$$

uygulandığında;

$$\tilde{w}(\tilde{h}) - \tilde{w}(0) = - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{z} + \tilde{u}(\tilde{h}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \tilde{v} d\tilde{z} + \tilde{v}(\tilde{h}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} \quad (2.38)$$

elde edilir. Tabakanın yüzeyinde  $\tilde{w} = 0$  olduğundan serbest yüzeydeki kinematik koşul;

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{w} - \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} \quad (\tilde{z} = \tilde{h}) \quad (2.39)$$

denklemini hızın ara yüzey boyunca sürekli olduğunu ifade eder [4].  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}}$  ve  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}}$  bileşenlerinden oluşan  $\tilde{\mathbf{Q}}$  alan akı vektörü tanımlanırsa [3, 9];

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \mathbf{i} + \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \mathbf{j} \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}} = \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{z} \quad \text{ve} \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}} = \int_0^{\tilde{h}} \tilde{v} d\tilde{z} \quad (2.41)$$

$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}}$  ve  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}}$ 'nin bu değerleri ve Denklem (2.39), Denklem (2.38)'de yerine konduğunda;

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{w}(\tilde{h}) - \tilde{u}(\tilde{h}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{v}(\tilde{h}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\tilde{u}(\tilde{h})\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}(\tilde{h})\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{y}} = \tilde{w}(\tilde{h}) - \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}$$

$$\tilde{w}(\tilde{h}) - \tilde{w}(0) = -\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{z} + \tilde{u}(\tilde{h})\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \tilde{v} d\tilde{z} + \tilde{v}(\tilde{h})\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{y}}$$

$$\tilde{w}(\tilde{h}) = -\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} \tilde{Q}_{\tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} \tilde{Q}_{\tilde{y}} + \tilde{w}(\tilde{h}) - \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}$$

$$\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}} = -\left(\frac{\partial\tilde{Q}_{\tilde{x}}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{Q}_{\tilde{y}}}{\partial\tilde{y}}\right) = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} \quad (2.42)$$

kaplama kalınlığının zamana bağlı gelişimi alan akısı cinsinden elde edilir. Alan akı vektörünün bileşenleri Denklem (2.36) ve Denklem (2.37) integre edilerek bulunabilir. Sonuçta;

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left[ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} + \rho g \sin\theta \right] \quad (2.43)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} \quad (2.44)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}}$  ve  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}}$  alan akı vektörlerini Denklem (2.31) ile birleştirmek için;  $\tilde{p} = \rho g \cos\theta(\tilde{h} - \tilde{z}) - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0$  eşitliğinin  $\tilde{x}$  ve  $\tilde{y}$  yönündeki türevlerini alırsak;

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} = \rho g \cos\theta \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}} - \sigma \frac{\partial}{\partial\tilde{x}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h}$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} = \rho g \cos\theta \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{y}} - \sigma \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h}$$

bulunur. Böylece de Denklem (2.43) ve Denklem (2.44)'den;

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{x}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left[ \rho g \cos \theta \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \sigma \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \rho g \sin \theta \right] \text{ ve}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\tilde{y}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left[ \rho g \cos \theta \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} - \sigma \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \right]$$

elde edilir. Bu iki terim,  $\mathbf{i}$  ve  $\mathbf{j}$  yönlerinde vektörel büyüklük olduklarından;

$$\tilde{\mathbf{Q}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left[ \rho g \cos \theta \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \sigma \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \rho g \sin \theta \right] \mathbf{i} - \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left[ \rho g \cos \theta \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} - \sigma \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \right] \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}} &= \left( -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \cos \theta \right) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i} + \left( -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \cos \theta \right) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{j} + \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \mathbf{j} \right] \\ &\quad - \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \sin \theta \mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left( -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \cos \theta \right) \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{j} \right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \mathbf{j} \right] - \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \sin \theta \mathbf{i}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left( -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \cos \theta \right) \tilde{\nabla} \tilde{h} + \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \sigma \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} - \frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \rho g \sin \theta \mathbf{i}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\sigma}{3\mu} \tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} - \frac{\rho g \cos \theta}{3\mu} \tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{h} - \frac{\rho g \sin \theta}{3\mu} \tilde{h}^3 \mathbf{i} \quad (2.45)$$

bulunur. Sonuç olarak; Denklem (2.45)'i Denklem (2.42)'de yerine koyduğumuzda, kaplama kalınlığı için son gelişim denklemi;

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\sigma}{3\mu} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}^2 \tilde{h}) + \frac{\rho g \cos \theta}{3\mu} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{h}) + \frac{\rho g \sin \theta}{3\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{h}^3) \quad (2.46)$$

olarak bulunur. Denklem (2.46) eğimli bir yüzeydeki ince bir sıvı film tabakasının zamana göre gelişimini açıklar.

## 2.8. Boyutsuzlaştırma

Problemin parametre sayısı, boyutsuzlaştırma yöntemiyle azaltılabilir. Boyutsuz-bağımsız değişkenler olarak;

$$x = \frac{\tilde{x}}{L},$$

$$y = \frac{\tilde{y}}{L},$$

$$t = \frac{\tilde{t}}{T}$$

Boyutsuz-bağımlı değişkenler olarak da;  $h = \frac{\tilde{h}}{H}$ ,  $Q = \frac{T}{LH} \tilde{Q}$  olarak tanımlanır.

Burada L, H ve T ; sırasıyla yüzeyin karakteristik uzunluğu, kaplama kalınlığı ve zaman ölçekleridir.  $\tilde{x}$  doğrultusundaki dalga uzunluğunun  $L = \tilde{\lambda}_x$  olduğu duruma göre yüzey uzunluğu seçilir. Kaplama kalınlık ölçeği, ortalama kaplama kalınlığına eşittir ( $H = h^{(0)}$ ). Problemin uygun zaman ölçeği Orchard [5] tarafından verilen yataylaşma veya sönümlenme (Levelling) zaman ölçeğidir.

$$T = \frac{3\mu L^4}{\sigma H^3}$$

Bu boyutsuz değişkenleri kullanarak, boyutlu kaplama kalınlığı ( $\tilde{h}$ ) için gelişim denklemi;

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h^3 \nabla \nabla^2 h) + Bo \cos \theta \nabla \cdot (h^3 \nabla h) + \frac{Bo L \sin \theta}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h^3) \quad (2.47)$$

dur.

## 2.9. Sayısal İnceleme

İki boyutlu ( $x$  ve  $y$  yönlerinde), zamana bağlı doğrusal olmayan denklem sistemini çözme işlemi bu alt bölümde gerçekleştirilecektir. Boyutsuz kaplama kalınlığı ( $h$ ) için gelişim denklemini sayısal olarak çözmek maksadıyla akış sahası ayrıklaştırılır ve sonlu farklar yöntemini kullanarak kısmi türevlere yaklaştırılır. Zaman içindeki integrallerin tam zaman adımıyla çözümü dağınık ya da seyrek matrislerin tersinin bulunmasını gerektirmektedir. Bu da oldukça uzun süren ve zaman alan bir işlemdir. Buna ilaveten, parabolik denklemlerin açık yöntemle çözümü katı bir kararlılık kriteriyle sınırlıdır. Kararlılığı garanti eden alternatifler sunan Crank-Nicholson tekniği gibi kapalı yöntemlerin parabolik denklemlere doğrudan uygulanmasının ise  $m \times n$  kadar eş zamanlı denklemin çözümünü gerektirmesi, iki veya üç boyut için yazıldığında üçlü köşegen olması gibi değerli bir özelliği kaybetmesi ve bu nedenle de matris hesaplama zamanının aşırı artmasından ötürü sayısal çözüm işleminde “Zaman Dilimleme/Bölümleme Yöntemi” (“Time Splitting Scheme”) yöntemi ya da başka deyişle “Değişken Yönlü Kapalı Metod (“Alternating Direction Implicit (ADI)”) kullanılır. Değişken yönlü kapalı yöntemde seyrek matrisler yerine üç ya da beş bant genişliğinde çözülmesi çok daha hızlı matrislerle işlem yapılmaktadır.

### 2.9.1. Ayrıklaştırma

Ayrıklaştırma işlemi için aşağıdaki dönüşümler kullanılır:

$$\begin{aligned} dx &\Rightarrow \Delta x, \\ dy &\Rightarrow \Delta y, \\ dt &\Rightarrow \Delta t, \\ x &\Rightarrow x_i = i \Delta x, \\ y &\Rightarrow y_j = j \Delta y, \\ t &\Rightarrow t_k = k \Delta t, \\ h(x, y, t) &\Rightarrow h(x_i, y_j, t_k) = h_{i,j}^k, \\ Q_x(x, y, t) &\Rightarrow Q_x(x_i, y_j, t_k) = (Q_x)_{i,j}^k, \\ Q_y(x, y, t) &\Rightarrow Q_y(x_i, y_j, t_k) = (Q_y)_{i,j}^k \end{aligned}$$

Buradaki  $i$  ve  $j$ ,  $x$  ve  $y$  doğrultusundaki mesafe/adım indisleridir,  $k$  da geçici indekstir. Grid noktaları arasındaki mesafe  $\Delta x$  ve  $\Delta y$ 'dir ve geçici ağ ölçüsü de



$\Delta t$ 'dir. Bağılı değişken  $h$ 'in ağ hücresi sınırlarındaki birinci dereceden adımsal türevlerine merkezi farklar yöntemi ile yaklaşılır:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^k \cong \frac{1}{\Delta x} [h_{i+1,j}^k - h_{i,j}^k]$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^k \cong \frac{1}{\Delta y} [h_{i,j+1}^k - h_{i,j}^k]$$

Benzer olarak,  $h$ 'in üçüncü dereceden adımsal türevleri aşağıdaki gibi ayrıklaştırılır:

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^k \cong \frac{1}{\Delta x^3} [h_{i+2,j}^k - 3h_{i+1,j}^k + 3h_{i,j}^k - h_{i-1,j}^k]$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^k \cong \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y} [(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k) - (h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)]$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^2 \partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^k \cong \frac{1}{\Delta y^2 \Delta x} [(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k) - (h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)]$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^k \cong \frac{1}{\Delta y^3} [h_{i,j+2}^k - 3h_{i,j+1}^k + 3h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k]$$

Zamansal türevler için ileri fark yöntemi kullanılır;

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i,j}^k \cong \frac{1}{\Delta t} [h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k] \quad (2.48)$$

Denklem (2.42)'de verilen gelişim denkleminin boyutsuz şekli;

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (2.49)$$

aşağıdaki gibi ayrıklaştırılır:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^k \right] = -\frac{1}{\Delta x} \left[ (Q_x)_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - (Q_x)_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right], \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right] = -\frac{1}{\Delta y} \left[ (Q_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - (Q_y)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} \right] \quad (2.51)$$

İkinci eşitlik yani Denklem (2.51);  $y$  doğrultusunda alanı tararken ve  $x$  doğrultusundaki değişimleri dikkate almazken, ilk eşitlik yani Denklem (2.50);  $x$  doğrultusunda alanı tararken ve  $y$  doğrultusundaki değişimleri dikkate almaz. Birinci ve ikinci adımlar sırasıyla,  $x$  – taraması ve  $y$  – taraması olarak adlandırılırlar. Her bir zaman adımında, yüzey gerilimi teriminden elde edilen dördüncü dereceden adimsal türevlerden dolayı beşgen sistem tersine çevrilir. Beşgen denklem sisteminin tersi Gauss Eliminasyon yöntemi ile yapılır. Bu işlem; her bir zaman adımında denklemlerin köşegen olmayan matrisini çözmekten daha kullanışlıdır. Yerçekimi kuvvetiyle ilişkili yataylaşma / sönümlenme (levelling) terimi ve yüzey gerilimi terimi, kısmi kapalı (partially implicit) yöntemle çözülür. Önce, Denklem (2.47)'deki yerçekimi terimi izole edilerek;

$$\frac{\partial h}{\partial t} \leftarrow Bo \cos \theta \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

elde edilir.  $x$  – taraması için bu terimin sonlu fark sunumu (açılımı);

$$h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^k \leftarrow \frac{Bo \cos \theta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ h_{i+\frac{1}{2},j}^3 \left( h_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) - h_{i-\frac{1}{2},j}^3 \left( h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.52)$$

Ve  $y$  – taraması için de;

$$h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{Bo \cos \theta \Delta t}{(\Delta y)^2} \left[ h_{i,j+\frac{1}{2}}^3 \left( h_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - h_{i,j}^{k+1} \right) - h_{i,j-\frac{1}{2}}^3 \left( h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j-1}^{k+1} \right) \right] \quad (2.53)$$

dir. Denklem (2.47)'deki yüzey gerilimi terimi;

$$\frac{\partial h}{\partial t} \leftarrow -\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \left[ \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial y^2 \partial x} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \left[ \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial y} \right] \right) \quad (2.54)$$

ifadesine ulaştırır.

Yüzey gerilimi terimindeki adımsal türevler dördüncü dereceden olduğundan, onların sonlu fark sunumları karmaşıktır. Bu karmaşayı gidermek ve notasyonu basitleştirmek maksadıyla  $h$ 'ın üçüncü dereceden adımsal türevlerine ayrıklaştırılması sonunda elde edilen denklem takımından istifade edilerek aşağıdaki ayrıklaştırma operatörleri tanımlanır;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} : \Delta_{30} \left( h_{i+\frac{1}{2},j} \right) &\equiv h_{i+2,j} - 3h_{i+1,j} + 3h_{i,j} - h_{i-1,j} \\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} : \Delta_{12} \left( h_{i+\frac{1}{2},j} \right) &\equiv h_{i+1,j+1} - 2h_{i+1,j} + h_{i+1,j-1} - (h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}) \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} : \Delta_{21} \left( h_{i,j+\frac{1}{2}} \right) &\equiv h_{i+1,j+1} - 2h_{i,j+1} + h_{i-1,j+1} - (h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}) \\ \frac{\partial^3}{\partial y^3} : \Delta_{03} \left( h_{i,j+\frac{1}{2}} \right) &\equiv h_{i,j+2} - 3h_{i,j+1} + 3h_{i,j} - h_{i,j-1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Denklem (2.55)'de verilen tanımlamaları kullanarak, izole edilmiş yüzey gerilimi terimi için  $x$  – taraması;

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^k &\leftarrow -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^4} \left[ h_{i+\frac{1}{2},j}^3 \Delta_{30} \left( h_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right) - h_{i-\frac{1}{2},j}^3 \Delta_{30} \left( h_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^4} \left[ h_{i+\frac{1}{2},j}^3 A_{21} \left( h_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) - h_{i-\frac{1}{2},j}^3 A_{12} \left( h_{i-\frac{1}{2},j}^k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

$y$  – taraması;

$$h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \leftarrow -\frac{\Delta t}{(\Delta y)^4} \left[ h_{i,j+\frac{1}{2}}^3 \Delta_{03} \left( h_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} \right) - h_{i,j-\frac{1}{2}}^3 \Delta_{03} \left( h_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} \right) \right]$$

$$-\frac{\Delta t}{(\Delta y)^4} \left[ h^3_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta_{21} \left( h^{k+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}} \right) - h^3_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta_{21} \left( h^{k+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.57)$$

dur. Geriye kalan akış terimi yani Denklem (2.47)'nin son terimi, açık yöntemle (explicitly) çözülür.  $x$  – taraması için yöntem;

$$h^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} - h^k_{i,j} \leftarrow -\frac{Bo L \sin \theta}{H} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (h^3)^k_{i+\frac{1}{2},j} - (h^3)^k_{i-\frac{1}{2},j} \right] \quad (2.58)$$

dir. Bu ayrık denklemler, her bir yarım zaman adımı için beşgen denklem sistemi üretir. Bu denklemlerin çözümü, özel bir Gauss-Eliminasyon yöntemi kullanılarak gerçekleştirilir.

## 2.10. Sonuç

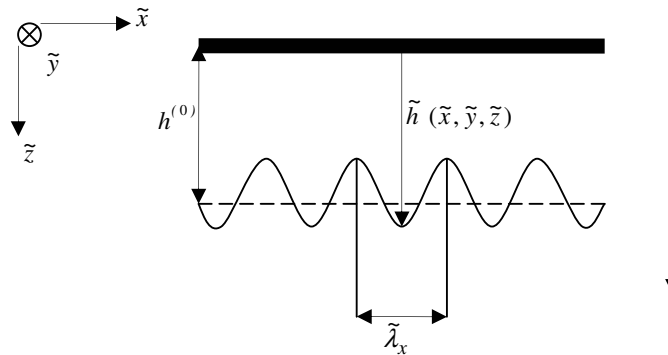
Bu bölümde boyutsuzlaştırma ve sayısal çözüm işlemleri vasıtasıyla, eğimli bir satıhtaki ince bir sıvı filmin “İnce Katman Yaklaşımı” ile matematiksel ve sayısal modelinin türetimi sunulmuştur.

### 3. İNCE SIVI FİMLERİN YERÇEKİMSEL KARARSIZLIKLARI

İnce sıvı filmlerin yerçekimsel kararsızlığına (Rayleigh-Taylor Kararsızlığı) pratikte bir çok uygulamada rastlanır, en çok bilinen uygulama ise bir odanın tavanının kaplanmasıdır. Üstteki sıvının yoğunluğunun alttaki sıvının yoğunluğundan daha fazla olduğu, sınırlanmamış, iki tabakalı sıvı bir sistem için Rayleigh-Taylor Kararsızlığında kararlı damlaların şekilsel düzenleri Fermigier [6, 7, 8]'in ve Limat [6, 7, 8]'in deneysel çalışmalarında kayıt altına alınmıştır. Damlaların bir düzen içerisinde sıralanması boyunca Fermigier [6, 7, 8], farklı simetri için değişik tipte paternler gözlemlemiştir. Fermigier ve Limat, paternler arası geçişlerin mümkün olduğu aksel ve altıgen simetrisi ele almayı tercih etmişlerdir. Müteakip kısımlarda, düz ve yatay bir sathın alt kenarında ince bir kaplama tabakasının gelişim denklemini elde edebilmek için İnce Katman Yaklaşımı kullanılır. Katı bir levhanın üst kısmındaki bir sıvının, yerçekimi ve yüzey gerilimine bağlı olarak, sıvı-gaz ara yüzeyinin düzleşmesi problemindeki yerçekimiyle karşılaştırıldığında bu problemdeki yerçekimi ters yönde etki ettiğinden, bu gelişim denklemi kararlı değildir. Bu gelişim denklemi boyutsuzlaştırılır ve Alt Bölüm 2.9'da belirtilen yöntem kullanılarak çözülür.

#### 3.1. Matematiksel Model

Şekil 3.1, geçirimsiz ve yatay bir sathın altında asılı halde duran ince bir sıvı film kaplamasının şematik bir diyagramını göstermektedir.



Şekil 3.1: Geçirimsiz yatay bir yüzeyin altında asılı duran ince bir sıvı film tabakasının şematik gösterimi.

Kaplama kalınlığı  $\tilde{h}$  ; satır boyunca seçilen  $\tilde{x}$  ve  $\tilde{y}$  koordinatları ile  $\tilde{t}$  zamanının bir fonksiyonu olarak  $\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$  olarak tanımlanır. Ortalama başlangıç kaplama kalınlığı  $h^{(0)}$ , yerçekimi ivmesi  $g$  ve  $\tilde{x}$  doğrultusundaki başlangıç bozukluğunun dalga uzunluğu  $\tilde{\lambda}_x$ 'tir. Film kalınlığı yeterince küçük olduğunda, İnce Katman Yaklaşımı, sıvının içindeki basıncı (Bkz. Alt Bölüm 2.7, Denklem (2.31) );

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\rho g \cos\theta(\tilde{h} - \tilde{z}) - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0 \quad (3.1)$$

olarak verir. Burada;  $\rho$  sıvının yoğunluğu,  $g$  yerçekimi ivmesi,  $\sigma$  yüzey gerilimi,  $\tilde{p}_0$  sabit atmosferik basınçtır.  $\theta=0$  olduğundan (Levha yere yatay durmaktadır.)  $\cos\theta = 1$  ve  $\sin\theta = 0$ , Denklem (2.42) ve Denklem (2.43) nolu denklemlerde bileşenleri verilen alan akı vektörü;

$$\tilde{Q}_{\tilde{x}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$$

$$\tilde{Q}_{\tilde{y}} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_{\tilde{x}} \mathbf{i} + \tilde{Q}_{\tilde{y}} \mathbf{j}$$

$$\tilde{Q} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \mathbf{j} \right)$$

$$\tilde{Q} = -\frac{\tilde{h}^3}{3\mu} \nabla \tilde{p} \quad (3.2)$$

olur. Bu şartlar altında Denklem (3.1)'den;

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\rho g (\tilde{h} - \tilde{z}) - \sigma \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} + \tilde{p}_0$$

$\tilde{z}$  ve  $\tilde{p}_0$  terimleri sabit olduğundan  $\tilde{\nabla} \tilde{z} = 0$  ve  $\tilde{\nabla} \tilde{p}_0 = 0$ 'dir. Buradan;

$$\tilde{\nabla} \tilde{p} = -\rho g \tilde{\nabla} \tilde{h} - \sigma \tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \quad (3.3)$$

elde edilir. Denklem (3.3), Denklem (3.2)'de yerine konduğunda;

$$\tilde{Q} = \frac{\rho g}{3\mu} \tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{h} + \frac{\sigma}{3\mu} \tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu denklem, boyutsuz-bağımsız değişkenler olarak;

$$x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{L}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{T},$$

Boyutsuz-bağımlı değişkenler olarak da;  $h = \frac{\tilde{h}}{H}$ ,  $Q = \frac{T}{LH} \tilde{Q}$  olarak tanımlanır, bu

değişkenler boyutlu akı denkleminde yerlerine konur ve  $\left( \tilde{\nabla} = \frac{1}{L} \nabla \right)$  ve

$\left( \tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{L^3} \nabla \right)$  olduğu da göz önünde bulundurulursa, aşağıdaki boyutsuz şekle dönüştürülür:

$$\frac{LH}{T} Q = \frac{\rho g}{3\mu} (H^3 h^3) \left( \frac{1}{L} \right) \nabla (Hh) + \frac{\sigma}{3\mu} (H^3 h^3) \left( \frac{1}{L^3} \right) \nabla \nabla^2 (Hh) \quad (3.5)$$

bulunur. Alt Bölüm 2.8'de belirtilen zaman ölçeği olarak  $T = \frac{3\mu L^4}{\sigma H^3}$  eşitliği de

Denklem (3.5)' de yerine konduğunda;

$$Q = \frac{\rho g L^2}{\sigma} h^3 \nabla h + h^3 \nabla \nabla^2 h$$

bulunur.  $Bo = \frac{\rho g L^2}{\sigma}$  olduğuna göre sonuç olarak alan akısının boyutsuz gelişim

denklemini;

$$Q = Bo h^3 \nabla h + h^3 \nabla \nabla^2 h \quad (3.6)$$

haline gelir. Kaplama kalınlığının zamana göre değişimi, alan akısına bağlı olarak aşağıdaki şekilde verilmektedir (Bkz. Alt Bölüm 2.7, Denklem (2.41));

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{Q} \quad (3.7)$$

gerektirir. Denklem (3.1), Denklem (3.2) ve Denklem (3.7)'yi birleştirerek nihai boyutsal gelişim denklemi bulunur;

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\sigma}{3\mu} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^2 \tilde{h}) + \frac{\rho g}{3\mu} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{h}^3 \tilde{\nabla} \tilde{h}) \quad (3.8)$$

Boyutsal gelişim denkleminin çok küçük bir fark türetimi Fermigier [8] tarafından verilmektedir. Denklem (3.8), aşağıdaki ölçekler kullanılarak boyutsuz şekle dönüştürülür:

$$x = \frac{\tilde{x}}{L},$$

$$y = \frac{\tilde{y}}{L},$$

$$t = \frac{\tilde{t}}{T}, \Rightarrow T = \frac{3\mu L^4}{\sigma H^3} \Rightarrow t = \tilde{t} \frac{\sigma H^3}{3\mu L^4}$$

$$h = \frac{\tilde{h}}{H},$$

Burada  $L$  karakteristik yüzey uzunluk ölçeği,  $H = h^{(0)}$  kaplama kalınlığı ölçeğidir. Bu ölçekleri kullanarak Denklem (3.8)'in boyutsuz şekli;

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h^3 \nabla \nabla^2 h) + Bo \nabla \cdot (h^3 \nabla h) \quad (3.9)$$



haline dönüşür.

### 3.2. Sayısal Çözüm

Boyutsuz gelişim denklemi (Denklem (3.9)), Alt Bölüm 2.9'da açıklandığı gibi, standart sonlu fark yöntemleri kullanılarak çözülür. Hem yüzey gerilimi hem de yerçekimi terimlerinin her ikisi de kısmi-kapalı metod kullanılarak çözülebilir. Çözüm tekniği  $\theta = -\pi$  için, Alt Bölüm 2.9'da anlatılanla özdeştir. Ek bölümünde, damlacık şekillerinin elde edilmesinde kullanılan programın kaynak kodu verilmektedir. Bu programın çalıştırılması neticesinde elde edilen ve şekillere ait olan data dosyaları Gnuplot 4.0 çizim programı kullanılmak suretiyle Alt Bölüm 3.3'te sunulacak olan damlacık şekilleri elde edilmiştir.

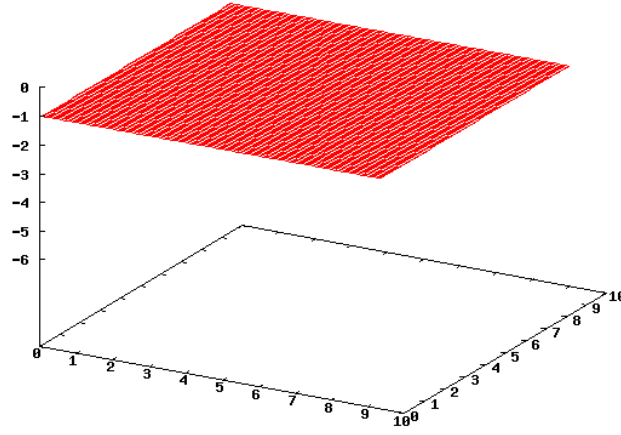
### 3.3. Sonuçlar

Sıvının fiziksel parametreleri ve tek damlacığın oluşumunda kullanılan ilgili diğer parametreler Tablo 3.1'de verilmektedir.

Tablo 3.1: Simülasyonun fiziksel ve ilgili diğer parametreleri (Tek damlacık oluşumuna göre).

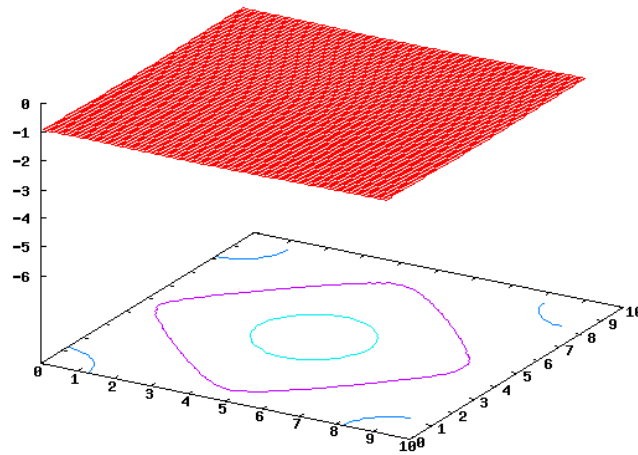
Parametreler	Sembol	Değer	Birim (CGS)
Yüzey gerilimi	$\sigma$	65.0	dynes/cm
Viskozite	$\mu$	1.0	gr/(cm s)
Yoğunluk	$\rho$	1.07	gr/cm <sup>3</sup>
Yerçekimi ivmesi	$g$	980.0	cm/s <sup>2</sup>
Başlangıç kaplama kalınlığı	$h^{(0)}$	0.05	cm
$\tilde{x}$ doğrultusundaki boyut	$\tilde{x}_M$	2.25	cm
$\tilde{y}$ doğrultusundaki boyut	$\tilde{y}_M$	2.25	cm

Şekil 3.2'den Şekil 3.9'a kadar olan şekillerde, yatay bir yüzeyin altındaki tek bir damlanın doğrusal olmayan zaman gelişimi sunulmaktadır.



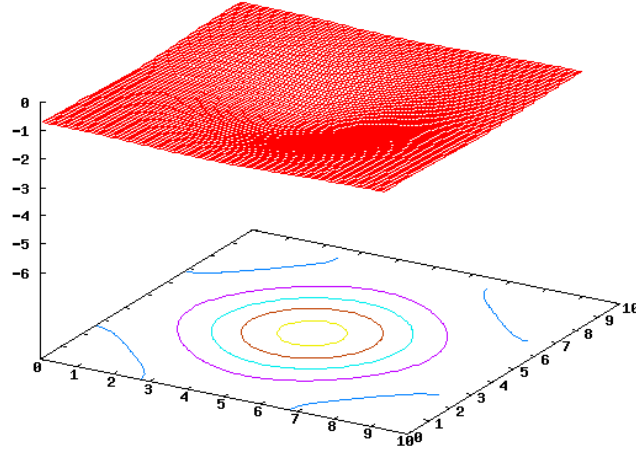
Şekil 3.2:  $t = 0.0$  anında yüzeyin altında çok ince bir tabaka halindeki yüzeyin görünümü.

Şekil 3.2'de düzgün bir yüzey halinde görünen alanın merkezine çok küçük genlikli bir pertürbasyon uygulanır. Pertürbasyon, alan merkezinde yapılan küçük bir tutma-bırakma (Çekme) şeklinde de yapılabilir ya da yine alan merkezine konan bir toz parçası tarafından doğal olarak gerçekleştirildiği de varsayılabilir. Şekil 3.2'de açıkça görüleceği üzere yüzeyde henüz bir damlacık oluşumu başlamamıştır. Bu başlangıç pertürbasyonu, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de de görüldüğü üzere, zaman içerisinde yavaş yavaş büyür.



Şekil 3.3:  $t = 92.849$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.

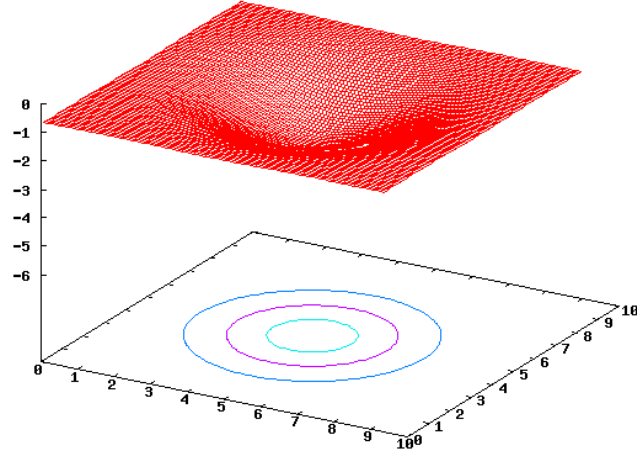
Şekil 3.3'de, uygulanan pertürbasyon neticesinde yüzeyin altında yavaş yavaş bir damlacık oluşumu başlamıştır. Bu oluşum yüzeyin üstten görüşünde alanın ortasında meydana gelen çok küçük boyutlu çökme ile x-y düzleminde oluşan ve aşağıya doğru sarkmanın boyutunu ifade eden eş yükselti (Kontur) dairelerinden de anlaşılmaktadır.



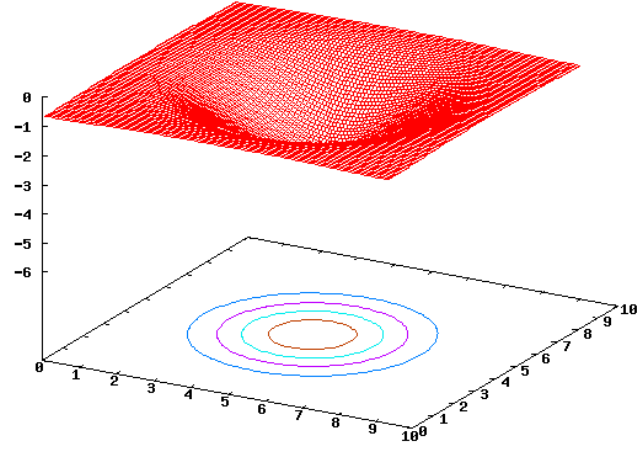
Şekil 3.4:  $t = 100.794$  zamanında yüzeyin altında başlayan tek bir damlacık oluşumu.

Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 arasındaki zamanda meydana gelen oluşumun büyüklüğü ile eş yükselti daireleri vasıtasıyla karşılaştırıldığında, Şekil 3.4'deki damlacık oluşumunun yaklaşık olarak  $t \approx 100$ 'den sonra çok daha hızlı bir şekilde gerçekleştiği görülmektedir. Bu durum da,  $t \approx 100$ 'den itibaren yerçekimi kuvvetinin yüzey gerilimine göre daha fazla etkin olduğu anlamına gelmektedir.

Şekil 3.4 ile Şekil 3.5 arasındaki zamanda yüzey geriliminin artan etkisiyle birlikte damlacığın kalınlığında küçük bir miktar düşme meydana geldiği eş yükselti dairelerinden anlaşılmaktadır.

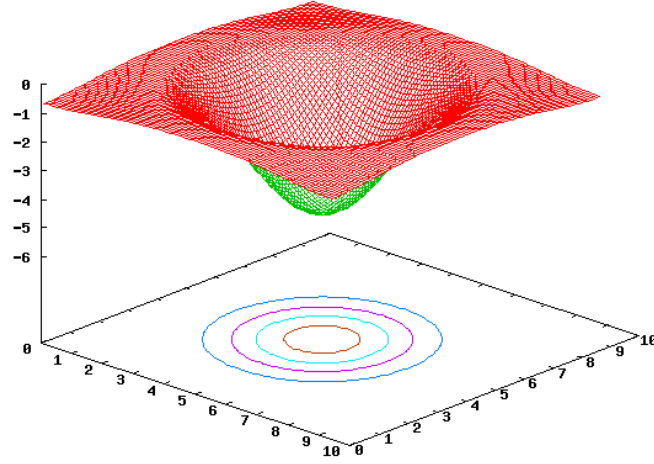


Şekil 3.5:  $t = 102.775$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.



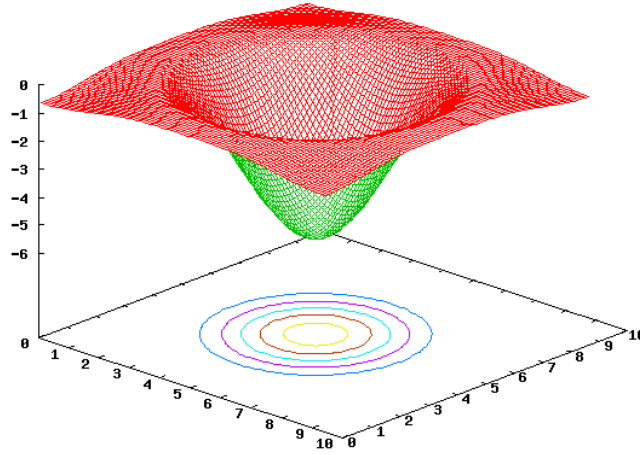
Şekil 3.6:  $t = 104.273$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.

Şekil 3.5 ile karşılaştırıldığında Şekil 3.6'da  $t = 102.775$  ile  $t = 104.273$  arasındaki sürede damlacık oluşumunun tekrardan hız kazandığı görülebilmektedir.



Şekil 3.7:  $t = 109.900$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.

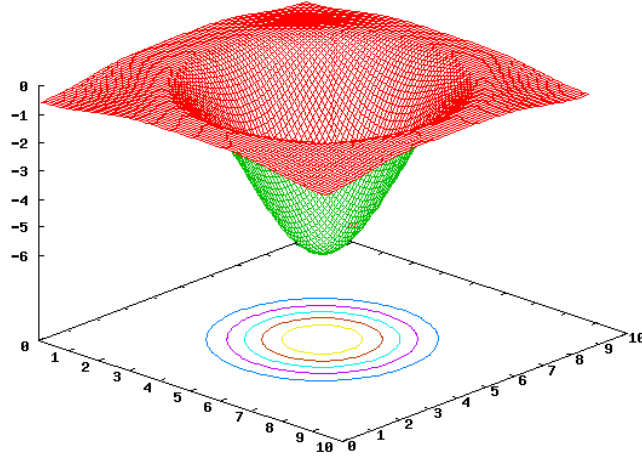
Şekil 3.7'de; damlacık oluşumunun Şekil 3.6'dan itibaren hemen hemen sabit bir ivmeyle devam ettiği tüm eş yükselti dairelerinden ve uç kısmındaki sivrilmenin de belirginleşmeye başladığı en içteki eş yükselti dairesinin çapındaki azalmadan anlaşılmaktadır.



Şekil 3.8:  $t = 130.324$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.

Şekil 3.8'de; damlacık oluşumu belirgin bir hale gelmiştir ve bu durum eş yükselti dairelerinin sayısındaki artıştan da belli olmaktadır. Yüzey gerilimi kuvvetleri  $t \approx 130$ 'den sonra yerçekimsel kuvvetlerle dengelendiğinde bir başka pozitif denge

noktasına ulaşılmış olur. Bir başka deyişle,  $t = 130.324$  (Şekil 3.8) ve  $t = 211.457$  (Şekil 3.9)'da serbest yüzeylerdeki fark, zaman aralıkları düşünüldüğünde çok küçüktür.



Şekil 3.9:  $t = 211.457$  zamanında yüzeyin altında tek bir damlacığın gelişimi.

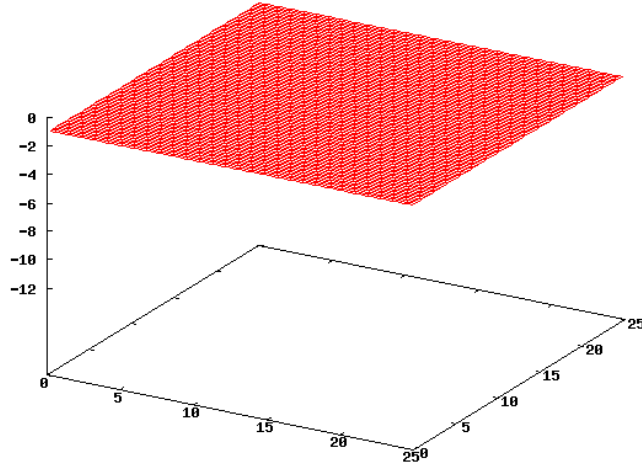
Şekil 3.8'den önceki damlacıklarla karşılaştırıldığında ve Şekil 3.8 ile Şekil 3.9 arasında geçen süre dikkate alındığında Şekil 3.9'daki damlacığın oluşumunda bir yavaşlama meydana geldiği görülmektedir.

Fermigier [6, 7, 8], damlacıkların oluşumu süresince farklı paternler (Şekilsel düzenler/simetriler) gözlemlemiştir. Fermigier'in deneysel çalışmasında, bir silikon yağ damlacığının bir cam yüzey üzerinde yayılması sağlanmış, sonra da yağın kalınlığı 1 mm'den bile çok küçükken cam yüzey tam tersine çevirerek kararlı damlacıkların zaman gelişimi kaydedilmiştir. Yayılma işlemi çok yavaş olduğundan, bazı durumlarda serbest yüzeyin küçük toz parçacıklarıyla kirlendiği tespit edilmiştir. Bu bulaşmalar, bu bölgelerdeki başlangıç damlacıklarının oluşumuna neden olmuştur. Söz konusu toz parçacığı izole edildiğinde, pertürbasyonun aksel simetrik bir şekilde geliştiğini gözlemlemiştir. Sayısal simülasyonları Fermigier ve diğer çalışma arkadaşlarının aksel simetrik deneysel sonuçlarıyla [6, 7, 8] karşılaştırabilmek için, sayısal alan; birden fazla damlacık içerebilmesi amacıyla büyütülür. Çözüm alanını genişletmek suretiyle birden fazla damlacığın elde edilmesinde kullanılan sıvının fiziksel parametreleri Tablo-3.1'deki değerlerle aynı olup, çözüm alanımıza bağlı olarak değişen parametreler ise Tablo-3.2'de verilmektedir.

Tablo 3.2: Simülasyonun fiziksel ve ilgili diğer parametreleri (Birden fazla damlacık oluşumuna göre).

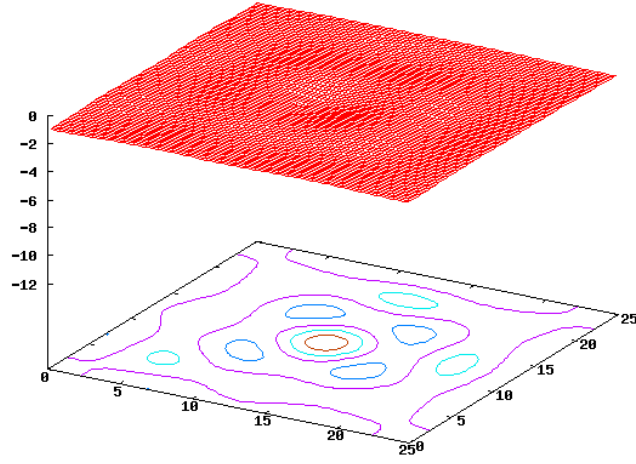
Parametreler	Sembol	Değer	Birim (CGS)
Yüzey gerilimi	$\sigma$	65.0	dynes/cm
Viskozite	$\mu$	1.0	gr/(cm s)
Yoğunluk	$\rho$	1.07	gr/cm <sup>3</sup>
Yerçekimi ivmesi	$g$	980.0	cm/s <sup>2</sup>
Başlangıç kaplama kalınlığı	$h^{(0)}$	0.05	cm
$\tilde{x}$ doğrultusundaki boyut	$\tilde{x}_M$	6.30	cm
$\tilde{y}$ doğrultusundaki boyut	$\tilde{y}_M$	6.30	cm

Bu simülasyonun zamansal gelişimi ise Şekil 3.9'dan Şekil 3.20'ye kadarki şekillerde verilmektedir.



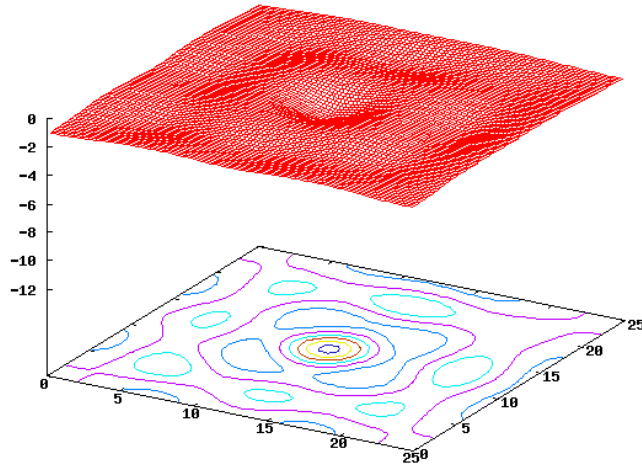
Şekil 3.10:  $t = 0.0$  anında yüzeyin altında çok ince bir tabaka halindeki yüzeyin görünümü.

Şekil 3.10'daki alanın boyutunun Şekil 3.2 ile Şekil 3.9 arasındaki simülasyonda kullanılanın 2,5 katı kadar büyük olarak alındığına dikkat edilmelidir. Yüzeyde henüz bir damlacık oluşumu başlamamıştır. Bu başlangıç anında alanın ortasına bir pertürbasyon (Sarsım) uygulanır. Pertürbasyon, alan merkezinde yapılan küçük bir tutma-bırakma (Çekme) şeklinde de yapılabilir ya da yine alan merkezine konan bir toz parçası tarafından doğal olarak gerçekleştirildiği de varsayılabilir.



Şekil 3.11:  $t = 78.851$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

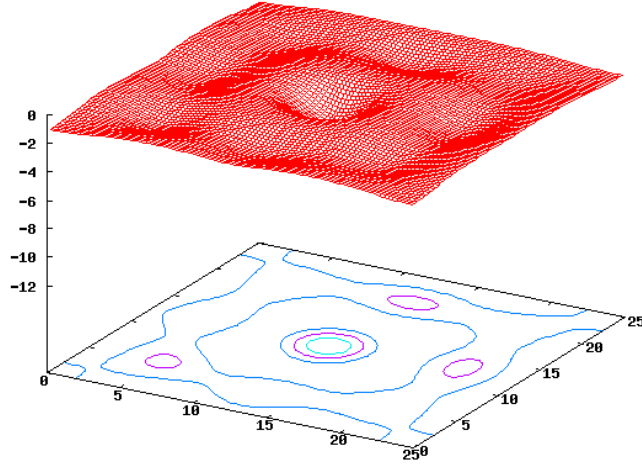
Şekil 3.11'deki şekle göre; alanın ortasında uzama yani tepecik oluşumu, tepecik oluşumuna bağlı olarak da alanın dış kenarlarına doğru olan bölgelerinde de çukurlaşma oluşumu başlamıştır.



Şekil 3.12:  $t = 80.002$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.12'de, damlacığı oluşturacak olan dalga tepecikleri ve çukurlarının oluşumu belirginleşmeye başlamıştır.

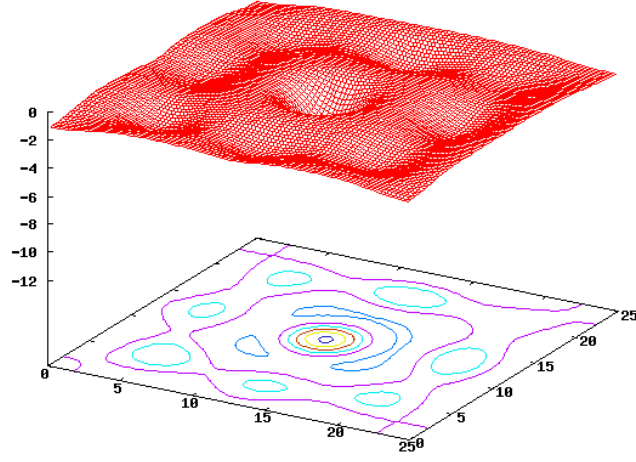




Şekil 3.13:  $t = 82.095$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

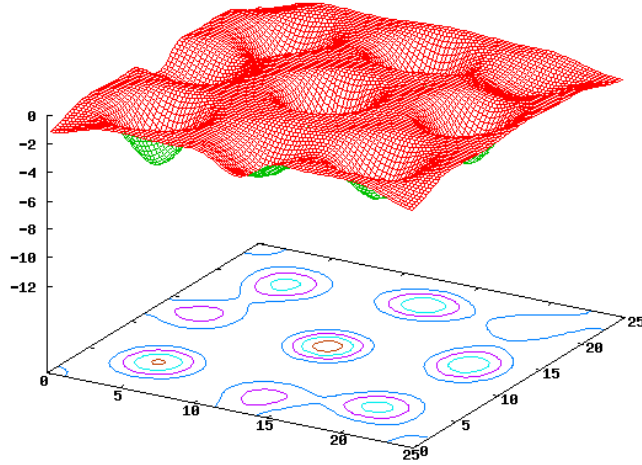
Şekil 3.13'de, tepeliklerin yükseklikleri (Damlacıkların kalınlıkları) artmakta ve buna bağlı olarak da geçen süre zarfında tepelik ve çukurcukların karşılıklı etkileşimleri ile damlacık oluşumu daha stabil bir halde devam etmektedir.

Başlangıçta, Şekil 3.10 ile Şekil 3.13 arasındaki şekillerde de görüldüğü gibi damlacıkların gelişiminde aksenal simetrik büyümenin baskın karakterde olduğu kontur (eş yükselti) dairelerinden tespit edilebilmektedir. Ancak bu başlangıç simetrisi; Şekil 3.14'den itibaren Şekil 3.21'e kadarki şekillerde de gösterildiği üzere, ilerleyen zaman adımlarında aksenal simetriden altıgen simetriye meyleder tarzda bir değişim göstermektedir. Bu durum da, aksenal simetrik yapıda başlayan damlacık oluşumunun, gelişim safhasının sonlarına doğru altıgen oluşumun baskın hale gelerek simetrik düzeninde değişim gerçekleştiğini açıklamaktadır. Bu patern değişiminin, bir başka deyişle de damlacıkların düzenindeki simetri bozulumu yaklaşık olarak Şekil 3.17 ile Şekil 3.21 arasındaki şekillerde izlenebilmektedir.



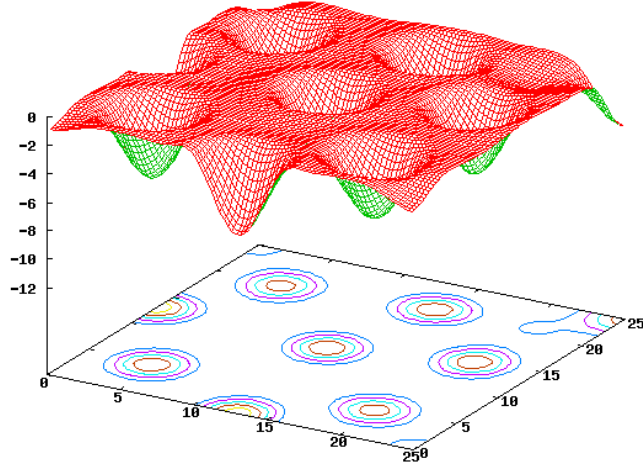
Şekil 3.14:  $t = 83.797$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.14'e göre, tepciklerin sayısında ve dolayısıyla da damlacıkların oluşum miktarında artış meydana gelmeye başladığı hem mavi renkli eş yükselti eğrilerinden hem de üstten görünüşte belirginleşen çukurlardan anlaşılmaktadır.



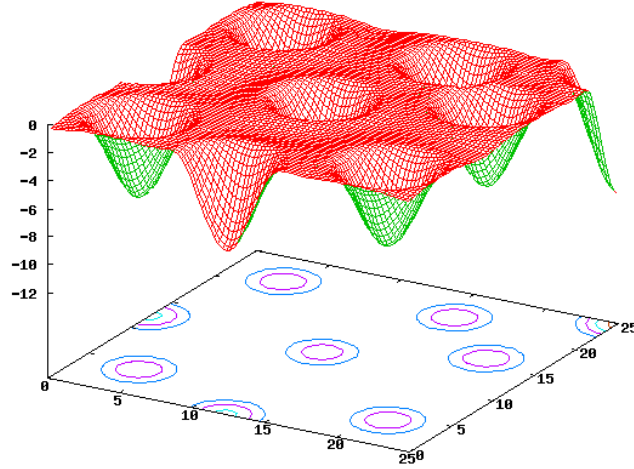
Şekil 3.15:  $t = 91.159$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.15'de damlacıklar artık oldukça belirgin hale gelmişlerdir ve sayıları da  $25 \times 25$  cm.lik alanda 9 adet olmaya doğru ilerlemektedir.



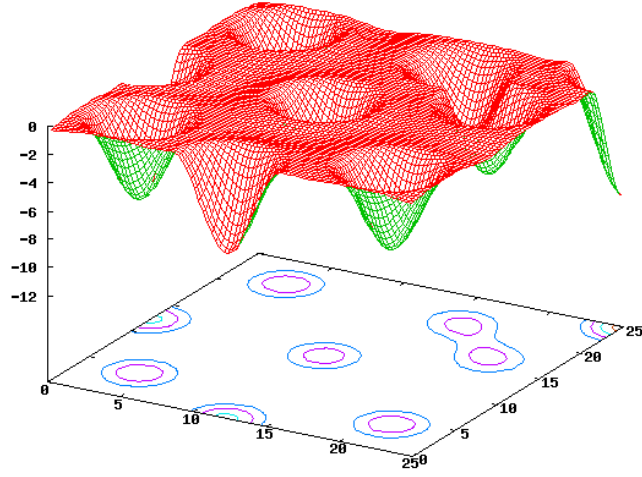
Şekil 3.16:  $t = 97.980$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.16'da komşu damlacıkların karşılıklı etkileşimleri nedeniyle bazı damlacıklar birbirleriyle birleşmeye doğru meyletmekte, bu esnada da her bir damlacığın fiziksel boyutları artmaktadır.

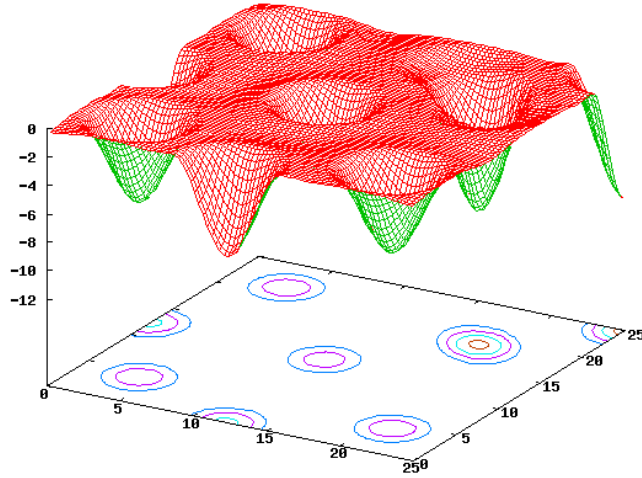


Şekil 3.17:  $t = 133.463$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.17'de oluşan damlacıklardan bazıları birleşmeye başlamaktadırlar.

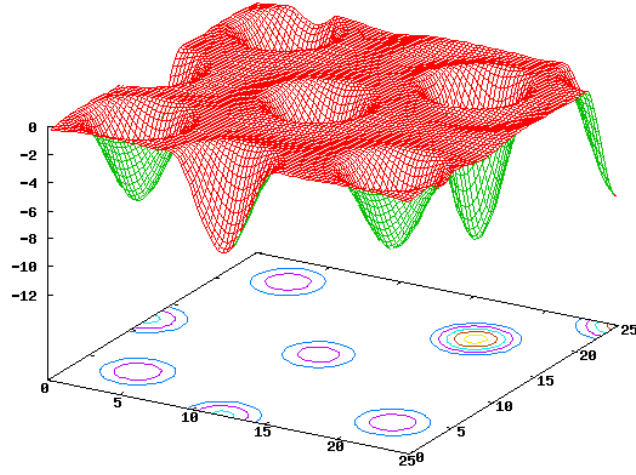


Şekil 3.18:  $t = 136.761$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.



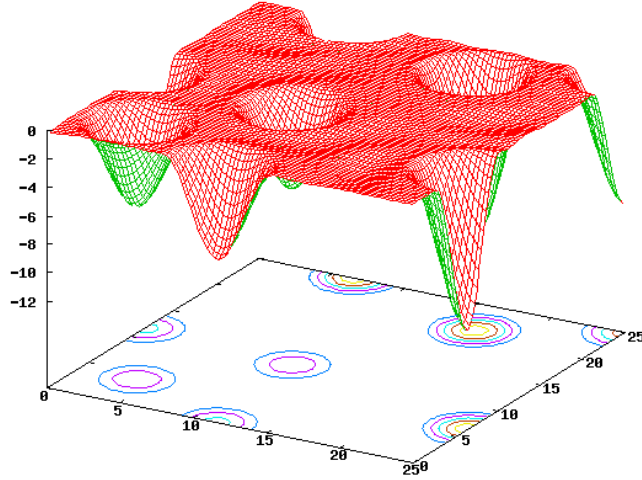
Şekil 3.19:  $t = 137.332$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da, damlacıklardan bazıları birleşmeye başlamışlardır ve Rayleigh-Taylor Teorisinde belirtildiği gibi oluşum altıgen bir formasyona doğru ilerlemektedir.



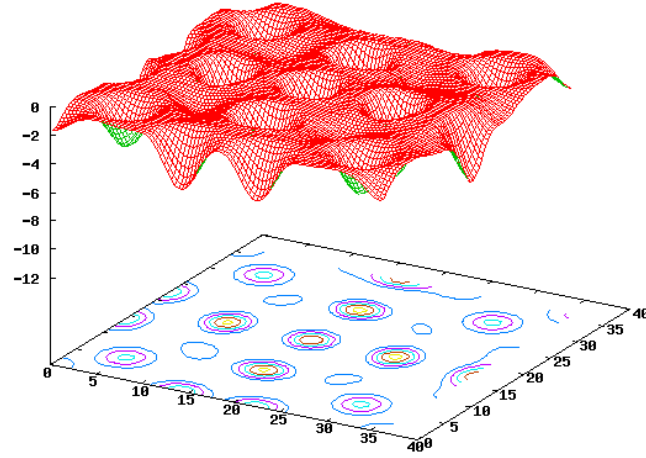
Şekil 3.20:  $t = 153.249$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.20'ye göre, damlacıklardan bazıları birleşmişlerdir fakat çalışma alanının yeterince büyük seçilmemesi ve yeni başlayan damlacık oluşumları nedeniyle altıgen yapılanmada bozulma başgöstermektedir.



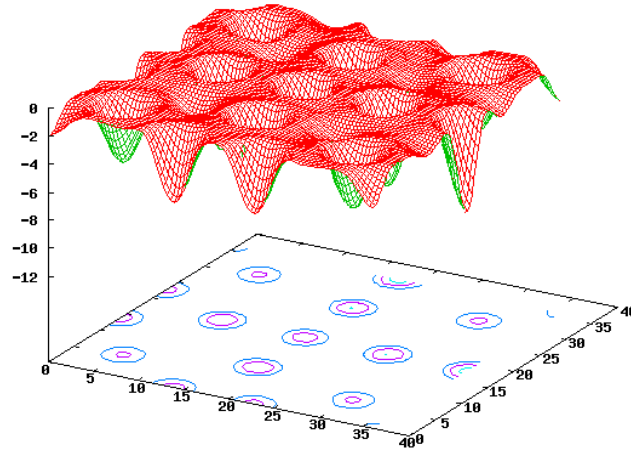
Şekil 3.21:  $t = 211.455$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.21'de, damlacıkların birleşimleri tamamlanmış fakat altıgen yapılanmada bozulma meydana gelmiştir. x ve y eksenleri yönündeki çözüm alanımızı büyülterek elde edilen ve Şekil 3.22 ile Şekil 3.25 arasında yer alan şekillerde bu simetri değişimi daha net bir biçimde görülebilmektedir.



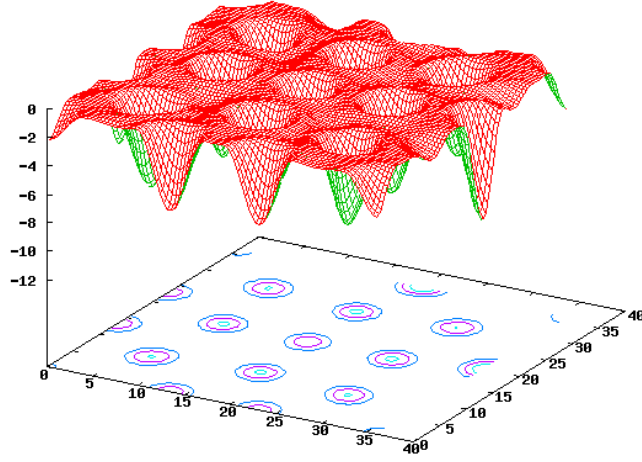
Şekil 3.22:  $t = 87.846$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.22'de, çözüm alanımızı büyüttüğümüzde belirtilen zamanda meydana gelen damlacıkların hemen hemen eksenal simetrik bir yapılanma içerisinde olduğu görülmektedir.



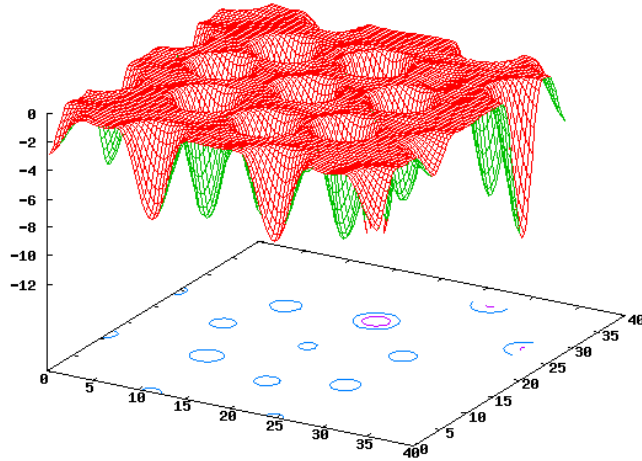
Şekil 3.23:  $t = 92.607$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.23'e göre, bazı damlacıkların birleşimi ve bazı damlacıkların da yeni oluşumuyla birlikte sistem eksenal şekillenmeden altıgen bir yapılanmaya doğru meyletmektedir.



Şekil 3.24:  $t = 102.432$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.24'deki damlacıkların diziliminde, altıgen bir simetri oluşturmaya yönelik baskının devam etmekte olduğu ve damlacıkların karşılıklı etkileşimlerinin azalarak damlacık kalınlığının artmaya devam ettiği görülmektedir.



Şekil 3.25:  $t = 211.454$  zamanında yüzeyin altında birden fazla damlacığın gelişimi.

Şekil 3.25'deki görünüme göre, altıgen bir simetri oluşumunun son safhasına gelinmiştir.

#### 4. DEĞERLENDİRME

M.H. Eres, D.E. Weidner ve L.W. Schwartz; yatay yüzeyler üzerinde kurumakta olan boya filmleri için ince katman yaklaşımını esas alan üç boyutlu, matematiksel ve nümerik bir model sunmuşlardır [10]. Bu çalışmalarda boya; uçucu ve uçucu olmayan yani solvent ve reçine olarak adlandırılan çok bilşenli bir sıvı şeklinde modellenmiştir. Bu model, yüzey gerilimi ve yer çekimi etkileriyle birlikte solvent buharlaşmasına bağlı olarak yüzey gerilim gradyanı (Yüzey gerilimindeki değişimler) etkilerini de içermektedir. Modelde aynı zamanda viskozite, difüvizite (Geçirgenlik) ve reçine konsantrasyonundaki buharlaşma oranı da incelenmektedir. Yaptıkları model simülasyonu göstermiştir ki, üç boyutlu akış sahasındaki yapısal (Kimyevi) değişikliklere bağlı olarak yüzey gerilim gradyanlarının etkisi, daha düzgün bir nihai kaplama tabakası elde etmek için kullanılabilir.

Bir çok endüstriyel proses ve doğa olayları, ince sıvı film akışını içermektedir. Hatta bir çok yaygın endüstriyel uygulamadaki katı yüzeylerin bir boya filmiyle kaplanması da ince sıvı film akışı alanına girmektedir. Düz bir yüzey üzerine boya kaplaması yapıldığında ilk başlangıçtaki kaplama düzgün olmayacaktır. Fakat prosesin sonunda oluşan kaplamanın son halinin mümkün olduğunca düzgün dağılımda (Uniform) olması istenmektedir. Eğer katı bir yüzeyin bir sıvı film ile kaplanması dekoratif amaçlı ise uniform kaplama daha ziyade estetik kaygılarla istenir. Kaplamanın amacı "Koruma" ise katı yüzey üzerindeki ince bölgelerde yeterli düzeyde koruma sağlanamaması durumu ortaya çıkacaktır. Burada yüzey gerilimi ve yer çekimi kuvvetinin başlangıçtaki kaplama kalınlığında oluşan düzensizlikleri düzeltici etkisi yardıma koşar. Uniform bir kaplama tabakasında yüzey gerilimi enerjileri minimumdur ve yatay katı bir yüzeyin üzerinde bir sıvı yayıldığında yerçekimsel kuvvetler sıvıyı kalınlığının fazla olduğu bölgeden az olduğu bölgeye doğru harekete geçirirler. Bu iki kuvvetin (Yüzey gerilimi ve yerçekimi) tersi ise viskozitedir. Kaplama tabakasından solvent buharlaşırken, kaplama tabakası tam olarak katılaşınca kadar viskozite artmaya devam eder. Başlangıçta sinüzoidal bir yapıya sahip olan kaplama tabakasının basitleştirilmiş bir yataylaşma (Düzleşme) modeli iki boyutlu olarak S.E. Orchard [5] tarafından incelenmiştir. S.E. Orchard, lineer teoriyi kullanarak, ortalama film kalınlığının bir fonksiyonu olarak düzleşme



miktarında, viskozitede, yüzey geriliminde ve başlangıçtaki bozukluğun dalga uzunluğunda bir öngöründe bulunmuştur. S.E. Orchard'ın bu çalışması W.S. Overdiep [11] tarafından sürdürülmüştür ve W.S. Overdiep de solvent esaslı alkid boyaların düzleşme (Yataylaşma) davranışını incelemiştir. W.S. Overdiep alkid boyalar için S.E. Orchard'ın modelinin düzleşme prosesinde kalitatif (Nicel) bir açıklama yapma hususunda yetersiz kaldığını fark etmiştir. W.S. Overdiep'in yaptığı deneylerin sonuçları göstermiştir ki, düzleşme prosesi neticesinde alkid boyalar başlangıçta sinüzoidal bir görünüme sahipken, proses sonunda tamamen yatay bir hale gelebilmektedir. Genellikle, başlangıçta tepecik şeklinde olan bölgeler çukur haline, çukur halinde olan bölgeler de tepecik haline gelmektedir. W.S. Overdiep'e göre bu davranış S.E. Orchard'ın yataylaşma (Düzleşme) teorisi kullanılarak açıklanamamaktadır. W.S. Overdiep, bu uyumsuzluğun nedeninin, S.E. Orchard'ın analizlerinde yüzey gerilim gradyanı etkilerinin ihmal edilmiş olmasından kaynaklandığını ileri sürmüştür. Alkid boyaların yüzey gerilimi, reçine bileşeninin solvent bileşenine nazaran daha yüksek yüzey gerilimine sahip olduğu reçine konsantrasyonunun bir fonksiyonudur. Eğer kaplama tabakası boyunca reçine konsantrasyonu değişirse, yüzey gerilimi de değişecektir. Sinüzoidal bir başlangıç profili için çukurcuklar tepeciklere nazaran daha büyük bir ortalama reçine konsantrasyonuna sahiptir. Reçine konsantrasyonu gradyanları nedeniyle ortaya çıkan yüzey gerilim gradyanları sıvıyı tepeciklerden çukurcuklara doğru harekete geçirecek ve böylelikle de yüzey gerilimi ve yerçekimi kuvvetinin düzleştirici etkilerini arttıracaktır. Yüzey gerilim gradyanı, kaplama tabakası uniform bir hale ulaştıktan sonra da etkimeye devam edecektir. L.W. Schwartz, D.E. Weidner ve R.R. Eley, Overdiep'in yataylaşma modelini yüzey aktif maddelerinin etkilerini de içerecek şekilde sürdürmüşlerdir [12].

L.W. Schwartz, D.E. Weidner ve R.R. Eley, bu çalışmalarında, atalet terimlerini ihmal ederek ve ince katman yaklaşımını kullanarak ince sıvı filmlerin gelişimi ve yüzey aktif maddelerinin yüzey konsantrasyonu için matematiksel bir model türetmişlerdir ve matematiksel model içerisinde de fiziksel bir görünüş elde edebilmek ve ince sıvı filmin düzleşmesi sürecinde yüzey aktif maddelerinin etkilerini açıklayabilmek için doğrusallaştırılmış bir teori kullanmışlardır.

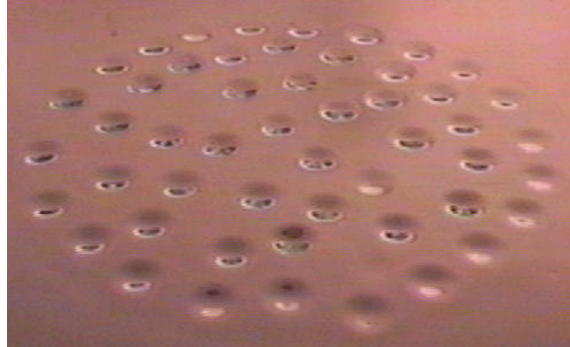
Konuyla bağıntılı olarak yapılan çeşitli çalışmalardan bazılarında aşağıda konu bazında kısaca bahsedilmiştir:

Yüzey kaplamasıyla ilgili olarak J.A. Moriarty, E.L. Terrill ve S.K. Wilson, katı bir yüzey üzerinde kaplama tabakası olarak kullanılan bir boyanın kuruması sürecinde kaplama tabakası kalınlığının değişimini modellemiştir [13].

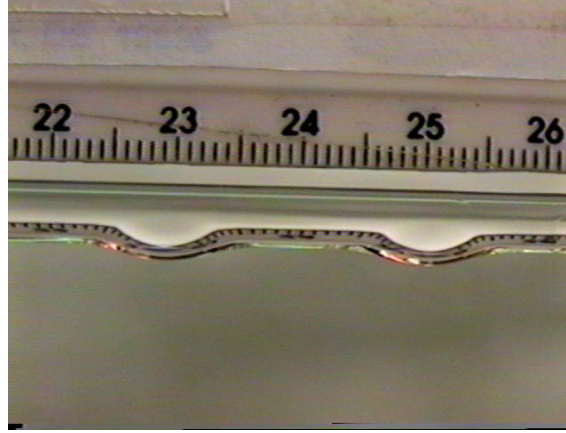
P. Dimitrakopoulos ve J.J.L. HIGDON da; ince sıvı film uygulamalarında oluşan sabit ve bir yerden asılı duran damlacıklarda sabit yüzey gerilimli arayüzeysel kuvvetlerini incelemiştir [14].

Yatay bir yüzey üzerine konan küçük bir damlacığın kılcallık kuvvetlerinin etkisi altında denge konumuna ulaşmaya kadar yayılmaya devam edeceğini, L.M. Hocking ve A.D.Rivers yaptıkları deneysel ve teorik çalışmalarla açıklamışlardır [15].

Rayleigh-Taylor Kararsızlığına göre bir yüzeyin altında sarkık vaziyette oluşan-ki bu yüzey en basit bir örnekle bir odanın tavanı olabilir-altıgen yapıdaki damlacık oluşumu ile bu damlacıkların dalga boylarını gösteren iki şekil aşağıda örnek olarak sunulmuştur:



Şekil 4.1: Altıgen simetride damlacık dizilimi. Üzerine silikon yağı konulan bir cam yüzey ters çevrildiğinde yüzeyin altında oluşan damlacıkların renklendirilmiş görüntüsü.



Şekil 4.2: Damlacık dalga boyları. Şekil 4.1'dekine benzer bir damlacık yapılanmasının yandan çekilen ve damlacıkların dalga boylarını ölçeklendiren görüntüsü.

Aşağıda yer alan Şekil 4.3 ile Şekil 4.9 arasındaki şekillerde; boya uygulaması esnasında oluşan ve boyanın kimyasal yapısında uzun süre kullanılmaması ve uygun olmayan ortam şartlarında muhafaza edilmesi gibi nedenlerden meydana gelen olumsuz değişim, yüzeyin boyamaya uygun hazırlanmaması (Yüzey pürüzlülüğü ya da yüzeyde nem ya da diğer başka yabancı maddelerin bulunması), boyayı uygulayan kişi ya da makinenin doğru yöntemlerle boya işlemini gerçekleştirmemesi gibi nedenlere bağlı olarak oluşan boya bozuklukları gösterilmektedir.



Şekil 4.3: Boyada "Cratering (Çukurlaşma)" oluşumu.



Şekil 4.4: Boyada "Flashing (Parlama)" oluşumu.



Şekil 4.5: Boyada "Flowlevel (Akışın hatlaşması)" oluşumu.



Şekil 4.6: Boyada "Blistering (Kabarma)" oluşumu.



Şekil 4.7: Boyada "Rust (Korozyon, paslanma)" oluşumu.



Şekil 4.8: Boyada "Sagging (Dalgalanma, katmerleşme)" oluşumu.



Şekil 4.9: Boyada "Wrinkling (Kivrımlaşma, oluklanma)" oluşumu.

Bu çalışmada; yatay bir katı yüzeyin altı ince bir akışkan tabakası ile kaplandığında, bu yüzeyde yüzey gerilimi ve yerçekimi kuvvetinin etkisi altında meydana gelen damlacıkların kalınlığının zamana bağlı boyutsuz gelişim denklemi “İnce Katman Yaklaşımı” kullanılmak suretiyle türetilmiştir. Boyutsuz gelişim denklemi kullanılmak suretiyle bu yüzeyde üç ayrı türde damlacık oluşumu modellenmiştir. İlk önce tek bir damlacığın  $\tau = 0.0$ ,  $\tau = 92.49$ ,  $\tau = 100.794$ ,  $\tau = 102.775$ ,  $\tau = 104.273$ ,  $\tau = 109.9$ ,  $\tau = 130.324$  ve  $\tau = 211.457$  zamanlarındaki oluşumu şekilsel olarak sunulmuştur. İkinci aşamada aynı boyutsuz gelişim denklemi kullanılarak ve çözüm alanını büyütülmek suretiyle  $\tau = 0.0$ ,  $\tau = 78.851$ ,  $\tau = 80.002$ ,  $\tau = 82.095$ ,  $\tau = 83.797$ ,  $\tau = 91.159$ ,  $\tau = 97.980$ ,  $\tau = 133.463$ ,  $\tau = 136.761$ ,  $\tau = 137.332$ ,  $\tau = 153.249$  ve  $\tau = 211.455$  zamanlarında birden fazla damlacığın oluşumu sunulmuştur. Üçüncü aşamada ise, çözüm alanı ikinci aşamaya göre bir miktar daha büyütülerek  $\tau = 87.846$ ,  $\tau = 92.607$ ,  $\tau = 102.432$  ve  $\tau = 211.454$  zamanında, Rayleigh-Taylor Kararsızlığında sözü geçen altıgen simetrik yapıdaki damlacıkların oluşumu incelenmiştir. İnce sıvı film kapladığı katı yüzeyin ister altında ister üstünde olsun yüzey gerilimi daima sistemin dengesini sağlayan bir rolde olmasına rağmen, ince sıvı filmin yüzeyin altında olduğu durumda yerçekimi kuvveti sistemin kararlılığını bozan nitelikte etki eder. Yüzey gerilim kuvvetleri yerçekimi kuvvetine eşit olduğunda ise kararlı denge (nötr denge) haline ulaşılır. Bu prensip, ince sıvı film yaklaşımını esas alan tüm dekoratif ve koruma amaçlı uygulamaların temel kuralını oluşturmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] WHITE, F.M., "Akışkanlar Mekaniği", Türkçesi: KIRKKÖPRÜ K., AYDER E., 4. Basımın Türkçesi, **Literatür Yayınları**, 41-42, (2004).
- [2] MUNSON B.R., YOUNG D.F., OKIISHI T.H., "Fundamentals of Fluid Mechanics", Third Edition, (1998).
- [3] ERES, M.H., "Three Dimensional Direct Numerical Simulation of Coating Flows", Doktora Tezi, **Faculty of the University of Delaware**, 5-23, 201-208, (Fall 1998).
- [4] SCRIVEN L.E., "Dynamics of a Fluid Interface", **Chemical Engineering Science**, Vol.12: 98-108, (1960).
- [5] ORCHARD S.E., "On Surface Levelling In Viscous Liquids And Gels", **Applied Scientific Research Section A**, Vol.11: 451-464, (1962).
- [6] FERMIGIER M., LIMAT L., WESFREID J. E., BOUDINET P., And QUILLIET C., "Two-Dimensional Patterns in Rayleigh-Taylor Instability of a Thin Layer", **Journal of Fluid Mechanics**, Vol.236: 349-383, (1992).
- [7] FERMIGIER M., LIMAT L., WESFREID E., BOUDINET P., GHIDAGLIA C. And QUILLIET C., "Rayleigh-Taylor Instability of a Thin Layer", **Growth and Form**, 441-451, (1991).
- [8] LIMAT L., JENFFER P., DAGENS B., TOURON E., FERMIGIER M., And WESFREID J. E., "Gravitational Instabilities of Thin Liquid Layers: Dynamics of Pattern Selection", **Physica D** 61: 166-182, (1992).
- [9] SCHLICHTING H., "Boundary-Layer Theory", Seventh Edition, (1979).
- [10] ERES M.H., WEIDNER D.E., SCHWARTZ L.W., "Three Dimensional Direct Numerical Simulation of Surface-Tension-Gradient Effects on the Leveling of an Evaporating Multicomponent Fluid", **Langmuir**, Vol.15: 1859-1871 (1998).
- [11] OVERDIEP W.S., "The Levelling of Paints", **Progress in Organic Coatings**, Vol.14: 159-175 (1986).
- [12] SCHWARTZ L.W., WEIDNER D.E., ELEY D.E., "An Analysis of the Surfactant on the Leveling Behavior of a Thin Liquid Coating Layer", **Langmuir**, Vol.11: 3690 (1995).
- [13] MORIARTY J.A., TERRILL E.L., WILSON S.K., "The Mathematical Modelling of Drying Paint Layers", **Progress in Industrial Mathematics at ECMI 94**, Pages: 112-119 (1996).
- [14] DIMITRAKOPOLOUS P., HIGDON J.J.L., "On the Gravitational Displacement of Three Dimensional Fluid Droplets From Inclined Solid Surfaces", **J.Fluid Mech.**, Vol.395: 181-209 (1999).

[15] HOCKING L.M., RIVERS A.D., "The Spreading of a Drop by Capillary Action",  
***J.Fluid Mech.***, Vol.121: 425-442 (1982).



## EK-KAYNAK KODU

```
program drops
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C   This program solves
C
C    $h_t = - \text{div} ( Q )$ 
C
C   where
C
C    $Q = \text{Bond } h^3 \text{ grad } h + h^3 \text{ grad laplacian } h$ 
C
C   (Note : Positive gravity is de-stabilizing)
C
C   using yanenko's splitting method
C
C   (implicit/explicit scheme will be added later)
C
C   modified by mhe at 04/12/97
C   modified by mhe at 04/13/97 (zero flux b.c.'s)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

implicit none
include 'parameter.h'
include 'common.h'

character*50 syscall
character*50 import

integer i,j,m,n
integer wsize
integer iseed
C   integer icount,fcount,fullcount
integer icount,fullcount
C   Modified for Open Watcom
integer kk
integer skip
integer ptype,intype,alldata,dimtype
C   integer outtype,ptype,intype,alldata,dimtype
C   integer takepic

C   Added for Open Watcom
real urand
```

double precision h(mmax,mmax)  
double precision hnew(mmax,mmax)  
double precision htemp(mmax)  
double precision dh(mmax,mmax)  
double precision nlx(mmax,mmax),nly(mmax,mmax)  
double precision a(mmax,5),rhs(mmax)

double precision sigma  
double precision mu,rho,g,h0dim,havgdim,bond  
double precision dxdim,dt,dim,xmaxdim,ymaxdim,ampdim,amp,lambda  
double precision dx,dt,xmax,ymax  
double precision phi  
double precision scalel,scalet,scaleh,lc  
double precision time,timedim,tmaxdim,tmax  
double precision caf,dtdx4max

c double precision e1,e2,e3  
double precision e1,e2  
c Modified for Open Watcom  
double precision lower,upper  
double precision sumh,dhmax,sume,sumeg,sumesig,sumh1sq  
double precision pi  
double precision rx,ry  
double precision q,arg1,arg2,arg3  
double precision rnumber

c  
c Function names  
c  
c double precision h2i,h2j,h3i,h3j,h4i,h4j  
c double precision dlap  
c double precision rand  
c Removed for Open Watcom

common/paint/h  
common/prefactors/nlx,nly  
common/scales/scalel,scaleh,scalet

c  
c Do some house cleaning  
c  
c call system('rm data.???)  
c Removed for Open Watcom compiler

pi=4.0d0\*datan(1.0d0)  
fullcount=0

c  
c File number assignments, avoid using 5&6  
c  
input =10  
hout =11  
init =12  
qout =13

```
eout =14
log =15
data =16
```

```
open(input,file='drops.input',status='unknown')
open(eout,file='energy.out',status='unknown')
```

```
c
c Read input parameters
c
read(input,'f15.10') sigma
read(input,'f15.10') rho
read(input,'f15.10') g
read(input,'f15.10') mu
read(input,'f15.10') h0dim
read(input,'f15.10') ampdim
read(input,'f15.10') lambda
read(input,'f15.10') xmaxdim
read(input,'f15.10') ymaxdim
read(input,'f15.10') dxdim
read(input,'f15.10') dtdim
read(input,'f15.10') dt dx4max
read(input,'f15.10') caf
read(input,'f15.10') tmaxdim
read(input,'f15.10') lower
read(input,'f15.10') upper
read(input,'f15.10') phi
read(input,'i10') kk
read(input,'i10') intype
c read(input,'i10') outtype
read(input,'i10') alldata
read(input,'i10') ptype
read(input,'i10') dimtype
c read(input,'i10') takepic
read(input,'i10') winsize
read(input,'i10') iseed
read(input,'i10') skip

c call srand(iseed)
c Removed for Open Watcom
syscall='gnuplot -geometry 300x300+50+50 gnu.init'
write(syscall(19:25),'(i3.3,a1,i3.3)') winsize,'x',winsize
import='import -delay 7 -window Gnuplot iris:frame.00000 &'

c
c Find m,n
c
m=idint(xmaxdim/dxdim)+2
n=idint(ymaxdim/dxdim)+2
xmaxdim=dble(m-2)*dxdim
ymaxdim=dble(n-2)*dxdim
if(m.gt.(mmax-2)) then
  write(*,*) 'm is greater than the array size.'
  write(*,*) 'Stopping.....'
  stop
```

```

endif
if(n.gt.(mmax-2)) then
  write(*,*) 'n is greater than the array size.'
  write(*,*) 'Stopping.....'
  stop
endif

c
c Initialize h (Dimensional)
c
sumh=0.0d0
do i=3,m
  do j=3,n
    rx=dble(i-3)*dxdim+dxdim/2.0d0
    ry=dble(j-3)*dxdim+dxdim/2.0d0
    if(intype.eq.0) then ! hexagon
      q=2.0d0*pi/lambda
      arg1=q*rx
      arg2=-0.5d0*q*rx+dsqrt(3.0d0)/2.0d0*q*ry
      arg3=-0.5d0*q*rx-dsqrt(3.0d0)/2.0d0*q*ry
      h(i,j)=h0dim+ampdim/3.0d0*(dcos(arg1)
1      +dcos(arg2)+dcos(arg3))
    else if(intype.eq.1) then ! square
      q=2.0d0*pi/lambda
      arg1=q*rx
      arg2=q*ry
      h(i,j)=h0dim+ampdim/2.0d0*(dcos(arg1)+dcos(arg2))
    else if(intype.eq.2) then ! roll
      q=2.0d0*pi/lambda
      arg1=q*rx
      h(i,j)=h0dim+ampdim*(dcos(arg1))
    else if(intype.eq.3) then ! random
      rnumber=urand(iseed)
c      rnumber=rand()
c      Modified for Open Watcom
      h(i,j)=h0dim+ampdim*(dble(rnumber)-0.5d0)
    else if(intype.eq.4) then ! line pert.
      if(j.ne.3) then
        h(i,j)=h0dim
      else
        q=2.0d0*pi/lambda
        arg1=q*rx
c      h(i,j)=h0dim+ampdim*(dcos(arg1))
        h(i,j)=h0dim+ampdim
      endif
    else if(intype.eq.5) then ! sq. pert.
      if((j.eq.3).or.(i.eq.3)) then
        h(i,j)=h0dim+ampdim
      else
        h(i,j)=h0dim
      endif
    else if(intype.eq.6) then ! center
      if((i.eq.(m-2)/2+2).and.(j.eq.(n-2)/2+2)) then
        h(i,j)=h0dim+ampdim
      endif
    endif
  enddo
enddo

```

```

else
  h(i,j)=h0dim
endif
else if(intype.eq.7) then          ! for growth
  q=2.0d0*pi/lambda
  arg1=q*rx
  h(i,j)=h0dim+ampdim*(dcos(arg1))
else
  write(*,*) 'intype is not valid!!!'
  stop
endif
sumh=sumh+h(i,j)*dxdim*dxdim
enddo
enddo
havgdim=sumh/(xmaxdim*yymaxdim)

```

```

c
c Find the scaling parameters
c
lc=dsqrt(sigma/(rho*dabs(g)))
c scalel=dmax1(xmaxdim,yymaxdim)
c scalel=dxdim
scalel=lc
scaleh=havgdim
scalet=(3.0d0*mu*scale**4.0d0)/(sigma*scaleh**3.0d0)
bond=rho*g*scale**2.0d0/sigma

```

```

write(*,*) 'lc = ',lc
write(*,*) 'scalel = ',scalel
write(*,*) 'scaleh = ',scaleh
write(*,*) 'scalet = ',scalet
write(*,*) 'bond = ',bond

```

```

c
c Scale all the other dimensional parameters
c

```

```

dx=dxdim/scalel
dt=dtdim/scalet
amp=ampdim/scaleh
xmax=xmaxdim/scalel
ymax=yymaxdim/scalel
tmax=tmaxdim/scalet

```

```

write(*,*) 'dx = ',dx
write(*,*) 'dt = ',dt
write(*,*) 'amp = ',amp
write(*,*) 'xmax = ',xmax
write(*,*) 'ymax = ',ymax
write(*,*) 'tmax = ',tmax
write(*,*) 'm = ',m
write(*,*) 'n = ',n

```

```

c
c Scale h with scaleh

```

```

c
sumh=0.0d0
do i=3,m
  do j=3,n
    h(i,j)=h(i,j)/scaleh
    sumh=sumh+h(i,j)*dx*dx
  enddo
enddo
sumh=sumh/(xmax*yamax)

icount=0
time=0.0d0

c
c write initial profile
c
rx=havgdim
timedim=time*scalet
c call write_gnu(timedim,rx)
call write_gnu()
call write_data(m,n,bond,timedim,dx,skip,dimtype)

if(alldata.eq.1) then
  call write_full(m,n,time,dx,dimtype,fullcount)
  fullcount=fullcount+1
endif

if(ptype.eq.1) then
  pause
endif

c
c This is the top of the loop
c
10 continue

time=time+dt
icount=icount+1

call pad_borders(m,n)

c
c Print out information, and call gnuplot
c
if(mod(icount,kk).eq.0) then
  rx=havgdim
  timedim=time*scalet
c call write_gnu(timedim,rx)
call write_gnu()
call write_data(m,n,bond,timedim,dx,skip,dimtype)

if(alldata.eq.1) then
  call write_full(m,n,time,dx,dimtype,fullcount)
  fullcount=fullcount+1
endif

```

```

endif
if(ptype.eq.1) then
  pause
endif
endif
if(kk.ge.10) then
  if(mod(icount,kk/10).eq.0) then
    timedim=time*scalet
    write(*,'(i7,1x,a7,1x,f15.6)') icount,t(ND)=',time
    write(*,'(a6,1x,f20.12,1x,a10,f20.12)')
1    'sumh=',sumh,'dt/dx^4 = ',dt/dx**4.0d0
    endif
  else
    timedim=time*scalet
    write(*,'(i7,1x,a7,1x,f15.6)') icount,t(ND)=',time
    write(*,'(a6,1x,f20.12,1x,a10,f20.12)')
1    'sumh=',sumh,'dt/dx^4 = ',dt/dx**4.0d0
  endif

c
c Pad borders for no-flux condition
c
call pad_borders(m,n)

sumh=0.0d0
sumeg=0.0d0
sumesig=0.0d0
sumh1sq=0.0d0
do i=3,m
  do j=3,n
    sumh=sumh+h(i,j)
    sumesig=sumesig
1    +(h(i+1,j)-h(i-1,j))**2.0d0/4.0d0
2    +(h(i,j+1)-h(i,j-1))**2.0d0/4.0d0
    sumeg=sumeg+h(i,j)**2.0d0*dx**2.0d0
    sumh1sq=sumh1sq+(h(i,j)-1.0d0)**2.0d0*dx**2.0d0
  enddo
enddo
sumeg=-bond/2.0d0*sumeg
sumesig=1.0d0/2.0d0*sumesig
sumh1sq=sumh1sq/2.0d0
sume=sumesig+sumeg
sumh=sumh/dble((m-2)*(n-2))

write(eout,'(5(g12.5,1x))') time,sumesig,sumeg,sume,sumh1sq

30 continue

c
c Pad borders for no-flux condition
c
call pad_x(m,n)
c

```

```

c Calculate non-linear terms at "old" time step
c
  call find_pref(m,n)

```

---

```

c
c IMPLICIT I-SWEEP FOR TOTAL HEIGHT
c
c

```

---

```

e1=dt/(dx**4.0d0)
e2=bond*dt/(dx**2.0d0)

```

```

do j=3,n
  do i=3,m
    a(i-2,1)=e1*nlx(i-1,j)
    a(i-2,2)=-e1*nlx(i,j)
1    +(-3.0d0*e1+e2)*nlx(i-1,j)
    a(i-2,3)=1.0d0+(3.0d0*e1-e2)*nlx(i,j)
1    +(3.0d0*e1-e2)*nlx(i-1,j)
    a(i-2,4)=(-3.0d0*e1+e2)*nlx(i,j)
1    -e1*nlx(i-1,j)
    a(i-2,5)=e1*nlx(i,j)
  enddo

```

```

i=3
a(i-2,3)=1.0d0+(2.0d0*e1-e2)*nlx(i,j)
a(i-2,4)=(-3.0d0*e1+e2)*nlx(i,j)

```

```

i=4
a(i-2,2)=-e1*nlx(i,j)+(-2.0d0*e1+e2)*nlx(i-1,j)

```

```

i=m-1
a(i-2,4)=(-2.0d0*e1+e2)*nlx(i,j)-e1*nlx(i-1,j)

```

```

i=m
a(i-2,3)=1.0d0+(2.0d0*e1-e2)*nlx(i-1,j)
a(i-2,2)=(-3.0d0*e1+e2)*nlx(i-1,j)

```

```

c
c Create rhs matrix
c

```

```

i=3
rhs(i-2)=h(i,j)
1  -e1*nlx(i,j)*
2  (h(i+1,j+1)-2.0d0*h(i+1,j)+h(i+1,j-1)
3  -h(i,j+1)+2.0d0*h(i,j)-h(i,j-1))
do i=4,m-1
  rhs(i-2)=h(i,j)
1  -e1*nlx(i,j)*
2  (h(i+1,j+1)-2.0d0*h(i+1,j)+h(i+1,j-1)
3  -h(i,j+1)+2.0d0*h(i,j)-h(i,j-1))
4  +e1*nlx(i-1,j)*

```



```

5      (h(i,j+1)-2.0d0*h(i,j)+h(i,j-1)
6      -h(i-1,j+1)+2.0d0*h(i-1,j)-h(i-1,j-1))
      enddo
      i=m
      rhs(i-2)=h(i,j)
4      +e1*nlx(i-1,j)*
5      (h(i,j+1)-2.0d0*h(i,j)+h(i,j-1)
6      -h(i-1,j+1)+2.0d0*h(i-1,j)-h(i-1,j-1))

      call penta(a,rhs,m-2,htemp)
      do i=3,m
        hnew(i,j)=htemp(i-2)
      enddo

    enddo

c
c   Update h
c
  do i=3,m
    do j=3,n
      dh(i,j)=hnew(i,j)-h(i,j)
      h(i,j)=hnew(i,j)
    enddo
  enddo

c
c   Pad borders for no-flux condition
c
  call pad_y(m,n)

c
c   Calculate non-linear terms at "int" time step
c
  call find_pref(m,n)

c


---


c
c   IMPLICIT J-SWEEP FOR TOTAL HEIGHT
c


---



  do i=3,m
    do j=3,n
      a(j-2,1)=e1*nly(i,j-1)
      a(j-2,2)=-e1*nly(i,j)
1      +(-3.0d0*e1+e2)*nly(i,j-1)
      a(j-2,3)=1.0d0+(3.0d0*e1-e2)*nly(i,j)
1      +(3.0d0*e1-e2)*nly(i,j-1)
      a(j-2,4)=(-3.0d0*e1+e2)*nly(i,j)
1      -e1*nly(i,j-1)
      a(j-2,5)=e1*nly(i,j)

```

```

enddo

j=3
a(j-2,3)=1.0d0+(2.0d0*e1-e2)*nly(i,j)
a(j-2,4)=(-3.0d0*e1+e2)*nly(i,j)

j=4
a(j-2,2)=-e1*nly(i,j)+(-2.0d0*e1+e2)*nly(i,j-1)

j=n-1
a(j-2,4)=(-2.0d0*e1+e2)*nly(i,j)-e1*nly(i,j-1)

j=n
a(j-2,3)=1.0d0+(2.0d0*e1-e2)*nly(i,j-1)
a(j-2,2)=(-3.0d0*e1+e2)*nly(i,j-1)

```

```

c
c Create rhs matrix
c

```

```

j=3
rhs(j-2)=h(i,j)
1 -e1*nly(i,j)*
2 (h(i+1,j+1)-2.0d0*h(i,j+1)+h(i-1,j+1)
3 -h(i+1,j)+2.0d0*h(i,j)-h(i-1,j))
do j=4,n-1
rhs(j-2)=h(i,j)
1 -e1*nly(i,j)*
2 (h(i+1,j+1)-2.0d0*h(i,j+1)+h(i-1,j+1)
3 -h(i+1,j)+2.0d0*h(i,j)-h(i-1,j))
4 +e1*nly(i,j-1)*
5 (h(i+1,j)-2.0d0*h(i,j)+h(i-1,j)
6 -h(i+1,j-1)+2.0d0*h(i,j-1)-h(i-1,j-1))
enddo
j=n
rhs(j-2)=h(i,j)
4 +e1*nly(i,j-1)*
5 (h(i+1,j)-2.0d0*h(i,j)+h(i-1,j)
6 -h(i+1,j-1)+2.0d0*h(i,j-1)-h(i-1,j-1))

```

```

call penta(a,rhs,n-2,htemp)
do j=3,n
hnew(i,j)=htemp(j-2)
enddo
enddo

```

```

c
c Update h
c

```

```

do i=3,m
do j=3,n
dh(i,j)=dh(i,j)+(hnew(i,j)-h(i,j))
h(i,j)=hnew(i,j)
enddo

```

```

        enddo

c
c   Find the maximum change in h
c
dhmax=-100.0d0
do i=3,m
  do j=3,n
    dhmax =dmax1(dabs(dh(i,j)),dhmax)
  enddo
enddo

c
c   Accelerate convergence
c
if(dhmax.le.lower) dt=dt*caf
if(dhmax.ge.upper) then
c   write(*,*) 'dhmax = ',dhmax, upper
c   time=time-dt
c   icount=icount-1
  do i=3,m
    do j=3,n
      h(i,j)=h(i,j)-dh(i,j)
    enddo
  enddo
  dt=dt/(2.0d0*caf)
  goto 30
endif
if((dt/dx**4.0d0).gt.dtdx4max) dt=dtdx4max*dx**4.0d0

if(time.gt.tmax) then
  write(*,*) 'Maximum time limit reached!....'
  goto 20
endif

goto 10

20 continue
rx=havgdim
timedim=time*scalet
c   call write_gnu(timedim,rx)
call write_gnu()
call write_data(m,n,bond,timedim,dx,skip,dimtype)

if(alldata.eq.1) then
  call write_full(m,n,time,dx,dimtype,fullcount)
endif

close(input)
close(eout)

write(*,*) 'Total # of steps : ',icount-1

stop

```

```

end

double precision function h3i(i,j)
implicit none
include 'parameter.h'

integer i,j

double precision h(mmax,mmax)

common/paint/h

h3i=2.d0*h(i+1,j)**2.0d0*h(i,j)**2.0d0/(h(i,j)+h(i+1,j))

return
end

double precision function h3j(i,j)
implicit none
include 'parameter.h'

integer i,j

double precision h(mmax,mmax)

common/paint/h

h3j=2.d0*h(i,j+1)**2.0d0*h(i,j)**2.0d0/(h(i,j)+h(i,j+1))

return
end

subroutine penta(a,r,n,x)
c
c calculates solution to pentadiagonal system using gauss elim and
c backsubstitution. diagonal is a(i,3), 1st above diag is a(i,4), etc.
c rhs is vector r. answer returned in x .....(lws 11-1-88)
c
implicit none
include 'parameter.h'

integer i,j

double precision ak
double precision a(mmax,5),r(mmax),x(mmax)
integer n

c
c eliminate below diagonal
c
do i=1,n-2
do j=1,2
ak=a(i+j,3-j)/a(i,3)

```

```

        a(i+j,4-j)=a(i+j,4-j)-ak*a(i,4)
        a(i+j,5-j)=a(i+j,5-j)-ak*a(i,5)
        r(i+j)=r(i+j)-ak*r(i)
    enddo
enddo

ak=a(n,2)/a(n-1,3)
a(n,3)=a(n,3)-ak*a(n-1,4)
r(n)=r(n)-ak*r(n-1)
c
c back substitute
c
x(n)=r(n)/a(n,3)
x(n-1)=(r(n-1)-a(n-1,4)*x(n))/a(n-1,3)
do i=2,n-1
    x(n-i)=(r(n-i)-a(n-i,4)*x(n-i+1)-a(n-i,5)*x(n-i+2))/a(n-i,3)
enddo
return
end

```

```

subroutine pad_borders(m,n)
c
c this subroutine paddes the variables h
c
implicit none
include 'parameter.h'

integer m,n
integer i,j

double precision h(mmax,mmax)

common/paint/h

do j=3,n
    h(2,j) =h(3,j)
    h(1,j) =h(4,j)
    h(m+1,j) =h(m,j)
    h(m+2,j) =h(m-1,j)
enddo

do i=1,m+2
    h(i,2) =h(i,3)
    h(i,1) =h(i,4)
    h(i,n+1) =h(i,n)
    h(i,n+2) =h(i,n-1)
enddo

return
end

subroutine pad_x(m,n)
c

```

c this subroutine paddes the variables h in x

c

```
implicit none
include 'parameter.h'
```

```
integer m,n
integer i,j
```

```
double precision h(mmax,mmax)
```

```
common/paint/h
```

```
do i=3,m
  h(i,2) =h(i,3)
  h(i,1) =h(i,4)
  h(i,n+1) =h(i,n)
  h(i,n+2) =h(i,n-1)
enddo
```

```
do j=1,n+2
  h(2,j) =h(3,j)
  h(1,j) =h(4,j)
  h(m+1,j) =h(m,j)
  h(m+2,j) =h(m-1,j)
enddo
```

```
return
end
```

```
subroutine pad_y(m,n)
```

c

c this subroutine paddes the variables h in y

c

```
implicit none
include 'parameter.h'
```

```
integer m,n
integer i,j
```

```
double precision h(mmax,mmax)
```

```
common/paint/h
```

```
do j=3,n
  h(2,j) =h(3,j)
  h(1,j) =h(4,j)
  h(m+1,j) =h(m,j)
  h(m+2,j) =h(m-1,j)
enddo
```

```
do i=1,m+2
  h(i,2) =h(i,3)
```

```

        h(i,1) =h(i,4)
        h(i,n+1) =h(i,n)
        h(i,n+2) =h(i,n-1)
    enddo

    return
end

subroutine find_pref(m,n)
c
c this subroutine calculates the non-linear prefactors
c
    implicit none
    include 'parameter.h'

    integer m,n
    integer i,j

    double precision h(mmax,mmax)
    double precision nlx(mmax,mmax),nly(mmax,mmax)

    double precision h3i,h3j

    common/paint/h
    common/prefactors/nlx,nly

    do j=3,n
        do i=2,m
            nlx(i,j)=h3i(i,j)
        enddo
    enddo

    do i=3,m
        do j=2,n
            nly(i,j)=h3j(i,j)
        enddo
    enddo

    return
end

subroutine write_gnu()
c
c subroutine write_gnu(time,rx)
c
c this subroutine writes the gnuplot initialization files
c
c note : do not assign any value to file units!!
c
    implicit none
    include 'common.h'

c double precision time,rx

```

c Removed for Open Watcom

```
open(init,file='gnu.init',status='unknown')
write(init,*) 'set term x11'
write(init,*) 'set nokey'
write(init,*) 'set parametric'
write(init,*) 'set hidden'
write(init,*) 'set contour'
write(init,*) 'splot "h.dat" w l'
write(init,*) 'pause 4'
write(init,*) 'exit'
close(init)
```

```
return
end
```

```
subroutine write_data(m,n,bond,time,dx,skip,dimtype)
```

```
c
c this subroutine writes the parametric gnuplot data files
c
c note : do not assign any value to file units!!
c
```

```
implicit none
include 'parameter.h'
include 'common.h'
```

```
integer m,n
integer i,j
integer skip
integer dimtype
double precision bond,time,dx
double precision rx,ry
double precision scalel,scaleh,scalet
```

```
double precision h(mmax,mmax)
```

```
common/paint/h
common/scales/scalel,scaleh,scalet
```

```
open(hout,file='h.dat',status='unknown')
if(dimtype.eq.1) then
  write(hout,'(a11,g15.2)') '# Time (D) ',time
  do i=3,m,skip
    do j=3,n,skip
      rx=scalel*(dble(i-3)*dx+dx/2.0d0)
      ry=scalel*(dble(j-3)*dx+dx/2.0d0)
      if(bond.gt.(0.0d0)) then
        write(hout,'(3(g10.4,1x))')
1          rx,ry,-h(i,j)*scaleh
      else
        write(hout,'(3(g10.4,1x))')
```



```

1          rx,ry,h(i,j)*scaleh
        endif
        enddo
        write(hout,'(2x)')
    enddo
else
    write(hout,'(a12,g15.2)') '# Time (ND) ',time/scalet
    do i=3,m,skip
        do j=3,n,skip
            rx=dbl(i-3)*dx+dx/2.0d0
            ry=dbl(j-3)*dx+dx/2.0d0
            if(bond.gt.(0.0d0)) then
                write(hout,'(3(g10.4,1x))')
1          rx,ry,-h(i,j)
            else
                write(hout,'(3(g10.4,1x))')
1          rx,ry,h(i,j)
            endif
        enddo
    enddo
    write(hout,'(2x)')
enddo
endif

```

```
close(hout)
```

```
return
end
```

```
subroutine write_full(m,n,time,dx,dimtype,fullcount)
implicit none
```

```

c
c  this subroutine writes time dependent data files.
c
c  note : do not assign any value to file units!!
c

```

```
include 'parameter.h'
include 'common.h'
```

```

c  character*8 fullname
character*12 fullname
integer m,n
integer fullcount
integer i,j
integer dimtype
double precision time,dx
double precision rx,ry
double precision scalel,scaleh,scalet

```

```
double precision h(mmax,mmax)
```

```
common/paint/h
common/scales/scalel,scaleh,scalet
```

```

c  fullname='data.000'
c  Modified for Open Watcom
   fullname='data-000.out'

if(fullcount.lt.1000) then
  write(fullname(6:8),'(i3.3)') fullcount
  open(data,file=fullname,status='unknown')

  if(dimtype.eq.1) then
    write(*,*)
1   'Writing file #',fullcount,' Time(D) : ',time*scalet
    write(data,'(a12,f15.10)') '# Time (D) ',time*scalet
    write(data,'(a1,a19,2(a21))') '#','xdim','ydim','hdim'
    do i=3,m
      do j=3,n
        rx=(dble(i-3)*dx+dx/2.0d0)*scalel
        ry=(dble(j-3)*dx+dx/2.0d0)*scalel
        write(data,'(3(g10.4,1x))') rx,ry,-h(i,j)*scaleh
      enddo
      write(data,'(2x)')
    enddo
  else
    write(*,*)
1   'Writing file #',fullcount,' Time(ND) : ',time
    write(data,'(a12,f15.10)') '# Time (ND) ',time
    write(data,'(a1,a19,2(a21))') '#','x','y','h'
    do i=3,m
      do j=3,n
        rx=dble(i-3)*dx+dx/2.0d0
        ry=dble(j-3)*dx+dx/2.0d0
        write(data,'(3(g10.4,1x))') rx,ry,-h(i,j)
      enddo
      write(data,'(2x)')
    enddo
  endif
else
  write(*,*) 'fullcount is gretaer than 999, ',fullcount
  write(*,*) 'No data is saved!!!!'
endif

return
end

```

## **ÖZGEÇMİŞ**

1969 yılında Gebze/Kocaeli'nde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kartal/İstanbul'da sürdürdü. 1990 yılında Deniz Harp Okulu'ndan mezun oldu. 1996 yılında evlenmiş olup, Buket adında eşi, Aybars adında dokuz yaşında bir oğlu bulunmaktadır. Halen İzmir'in Narlıdere ilçesinde ikamet etmekte olup, İzmir Tersanesi Komutanlığı-Karşıyaka/İzmir'de binbaşı rütbesiyle Karakol Gemileri Onarım Plan Subayı olarak görev yapmaktadır.