

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇGEN GEOMETRİSİNDE BAZI ÖZEL ÇEMBERLER VE  
DÖRTGENLER İÇİN KELEBEK TEOREMİ**

**YÜKSEK LİSANS**

**Matematikçi Gülfer ACAR**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Neşe ÖMÜR**

**KOCAELİ, 2007**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇGEN GEOMETRİSİNDE BAZI ÖZEL ÇEMBERLER VE  
DÖRTGENLER İÇİN KELEBEK TEOREMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**Matematikçi Gülfer ACAR**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Mayıs 2007**

**Tezin Savunulduğu Tarih: 18 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı**

**Yrd. Doç. Dr. Neşe ÖMÜR**

()

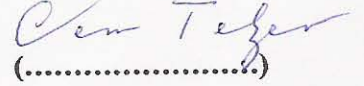
**Üye**

**Prof. Dr. Servettin BİLİR**

()

**Üye**

**Prof. Dr. Cem TEZER**

()

**KOCAELİ, 2007**

## **ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR**

Bu çalışmayı yürüten ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Neşe ÖMÜR' e, yüksek lisans öğrenimimin her aşamasında her türlü yardım ve desteği veren Eğitim Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Servettin BİLİR' e, değerli vakitlerini ayırarak Geometri alanındaki bilgilerini paylaşan ve hiçbir konuda desteklerini esirgemeyen Ortadoğu Teknik Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Cem TEZER' e, en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme de teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Bir Doğru Üzerindeki Noktaların Koordinatları.....	3
2.2. Bir Üçgene Göre Homojen Barisantrik Koordinatlar .....	4
2.3. Bir Üçgene Göre Tam Barisantrik Koordinatlar .....	8
2.4. Bir Üçgene Göre Trilineer Koordinatlar .....	9
2.5. Trilineer Koordinatlar ile Homojen Barisantrik Koordinatlar Arasındaki İlişki .....	11
2.6. Conway Notasyonu .....	12
2.7. İzogonal Eşlenikler.....	17
2.8. Harmonik Eşlenikler .....	19
2.9. Genel Doğru Denklemi .....	21
2.9.1. Doğrudaşlık .....	21
2.9.2. Noktadaşlık .....	22
2.10. Sonsuzdaki Doğru, Paralel Doğrular ve Dik Doğrular .....	22
2.10.1. Sonsuzdaki Doğru .....	22
2.10.2. Paralel Doğrular .....	23
2.10.3. Dik Doğrular .....	24
BÖLÜM 3. ÜÇGEN DÜZLEMİNDE ÇEMBERLER VE PERSPEKTİVİTELER .....	26
3.1. Üçgen Düzleminde Çemberler .....	26
3.1.1. Sonsuzdaki doğrunun izogonal eşleniği olarak ABC referans üçgeninin çevrelçemberi.....	26
3.1.2. Genel çember denklemi .....	28
3.1.3. Dokuz-nokta çemberinin denklemi .....	29
3.1.4. Miguel bağıntısı .....	29
3.1.5. Cevian çevrelçember .....	31
3.1.6. Cyclocevian eşlenik .....	32
3.1.7. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin denklemi .....	33
3.1.8. ABC referans üçgeninin dış teğet çemberleri .....	35
3.1.9. Kuvvet merkezi .....	37
3.1.10. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberi ile dokuz-nokta çemberinin kuvvet eksenini.....	38
3.1.11. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi ve dokuz-nokta çemberinin merkezinden geçen doğru .....	39

3.1.12. Feuerbach teoremi .....	41
3.1.13. Brocard noktaları .....	41
3.1.14. Conway notasyonundan yararlanarak elde edilen üçüncü Brocard noktası...	43
3.1.15. (A(a),B(b),C(c)) çember üçlüsü .....	45
3.1.15.1 Steiner noktası .....	46
3.1.16. Lucas çemberleri .....	47
3.2. ABC Referans Üçgeninin Kenarları Üzerine Yerleştirilen Dikdörtgenler ile Elde Edilen Perspektivitelere .....	50
3.2.1. ABC referans üçgeninin kenarları üzerine yerleştirilen dikdörtgenler .....	50
3.2.2. ABC referans üçgeninin köşe noktalarına bağlı $AY_1Z_2$ , $BZ_1X_2$ , $CX_1Y_2$ üçgenlerinin kütle merkezleri .....	52
<b>BÖLÜM 4. KELEBEK TEOREMİ</b> .....	<b>58</b>
4.1. Kelebek Teoremi ve Bu Teoremin Bazı Kanıtları .....	58
4.2. Klasik Kelebek Teoreminin Bir Genellemesi .....	75
4.3. Üç Kanatlı Kelebek Problemi .....	77
4.4. Çift Kelebek Teoremi .....	79
4.4.1. Çift kelebek teoreminin farklı bir kanıtı .....	82
4.5. Dörtgenler İçin Kelebek Teoremi .....	84
4.6. İç İç Girilmiş Dörtgenler İçin Kelebek Teoremi .....	88
4.7. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Yükseklikleri .....	96
4.8. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Kütle Merkezleri .....	98
4.9. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Çevrelçemberlerinin Yarıçapları .....	100
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>103</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>106</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir doğru üzerindeki noktaların koordinatları.....	3
Şekil 2.2. ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının homojen barisantrik koordinatları.....	4
Şekil 2.3. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi.....	7
Şekil 2.4. ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının kenar doğrularına gerçek trilineer uzaklıkları( $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma_1 > 0$ ).....	11
Şekil 2.5. ABC üçgen düzleminde bir P noktası alındığında PCB, PCA, ABP üçgenlerinin alanları.....	13
Şekil 2.6. ABC referans üçgeninin kenarları üzerine dıştan yerleştirilen kareler.....	16
Şekil 2.7. ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının izogonal eşleniği.....	18
Şekil 2.8. ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının harmonik eşleniği.....	19
Şekil 3.1. ABC referans üçgenin çevrelçemberi.....	27
Şekil 3.2. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin ABC üçgeninin kenar doğrularına değme noktalarının homojen barisantrik koordinatları.....	34
Şekil 3.3. ABC referans üçgeninin A-dış teğet çemberinin ABC üçgeninin kenar doğrularına değme noktaları.....	36
Şekil 3.4. ABC referans üçgeninin Brocard açısı ile birinci ve ikinci Brocard noktası.....	44
Şekil 3.5. ABC referans üçgeninin Lucas çemberleri.....	48
Şekil 3.6. ABC referans üçgeninin kenarları üzerine yerleştirilen dikdörtgenler.....	51
Şekil 3.7. $G_1G_2G_3$ üçgeni ile ABC üçgeninin perspektiflik merkezi.....	54
Şekil 4.1. Bir çemberin herhangi bir kirişinin orta noktasından geçen farklı iki kirişin oluşturduğu kelebek.....	58
Şekil 4.2. AB kirişine paralel çizilen CG kirişi.....	59
Şekil 4.3. Birbirini kesmeyen CF ve ED kirişleri ile oluşturulan kelebek.....	60
Şekil 4.4. Bir çemberin kirişlerinden birine çizilen paralel doğru.....	61
Şekil 4.5. Bir kirişin AB kirişinin orta noktasından geçen çapa göre yansıması.....	63
Şekil 4.6. Eş üçgenler.....	64
Şekil 4.7. Paralel kirişler ve eşit yaylar.....	65
Şekil 4.8. A, M, I, B noktalarının çifte oranı.....	66
Şekil 4.9. Dikdörtgensel koordinat sistemi.....	68
Şekil 4.10. Kesişen iki doğrunun oluşturduğu dejenere konik.....	69
Şekil 4.11. Çapraz doğrular.....	71
Şekil 4.12. A, G, O, B noktalarının çifte oranı.....	73
Şekil 4.13. Eşit açılar ve üçgenlerin alanları.....	74

Şekil 4.14. AB kirişinin herhangi bir noktasından geçen farklı iki kiriş.....	76
Şekil 4.15. Üç kanatlı kelebek.....	78
Şekil 4.16. Aynı çember ile çevrelenen bir çift kelebek.....	80
Şekil 4.17. PQ kirişini $\frac{xz}{y} = a$ (sabit) olacak şekilde bölen kirişler.....	82
Şekil 4.18. Bir çift kelebek.....	83
Şekil 4.19. YXZ ve TZX üçgenlerinin alanlarının oranları.....	85
Şekil 4.20. ABC ve XYZ üçgenlerinin Z noktası BC doğrusu üzerinde B ile C noktasının arasında iken orantılı alanları.....	85
Şekil 4.21. ABC ve XYZ üçgenlerinin Z noktası BC doğrusu üzerinde B ile C noktasının dışında iken orantılı alanları.....	86
Şekil 4.22. ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktalarından geçen doğruların oluşturduğu kelebek.....	88
Şekil 4.23. Düzlemde sekiz kelebek.....	89
Şekil 4.24. Köşeleri $A(0,0)$ , $B(f, g)$ , $C(1,1)$ , $D(p, q)$ ( $f, g, p, q \in \mathbb{R}$ ) olan ABCD dörtgeni.....	90
Şekil 4.25. ABCD dörtgeni ile çevrelenen $A'B'C'D'$ dörtgeni.....	92
Şekil 4.26. $D'AA'$ , $D'A'E$ , $EB'C'$ , $CC'B'$ , $ABD$ , $CDB$ üçgenleri.....	93
Şekil 4.27. XYZ üçgeninin kütle merkezinin YZ kenarına dik uzaklığı.....	98

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$x : y : z$ veya $(x, y, z)$	: Homojen koordinatlarıyla verilen nokta
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ veya $lx + my + nz = 0$	: doğru
$P^*$	: P noktasının izogonal eşleniği
$\mathcal{L}_\infty$	: Sonsuzdaki doğru
$h(T, r)$	: T merkezli r oranlı homoteti
$P'$	: P noktasının Miguel noktası
$\Delta$	: ABC referans üçgeninin alanı
$a$	: ABC referans üçgeninin BC kenarının uzunluğu
$b$	: ABC referans üçgeninin CA kenarının uzunluğu
$c$	: ABC referans üçgeninin AB kenarının uzunluğu
$r$	: ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı
$R$	: ABC referans üçgeninin çevrelçemberinin yarıçapı
$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$	: ABC referans üçgeninin çevre uzunluğunun yarısı
$S$	: ABC referans üçgeninin alanının iki katı
$H = \tan A : \tan B : \tan C$	: ABC referans üçgeninin yükseklik merkezinin homojen barisantrik koordinatları
$G = 1 : 1 : 1$	: ABC referans üçgeninin kütle merkezinin homojen barisantrik koordinatları
$S_\theta = \text{Scot } \theta$	: Conway notasyonu
$\Delta_{XYZ}$	: XYZ üçgeninin alanı
$A(a)$	: Merkezi ABC referans üçgeninin A köşesi, yarıçap uzunluğu a olan çember
$[X, Y, Z, T]$ veya $\{XY, ZT\}$	: X, Y, Z, T noktalarının çifte oranı



# ÜÇGEN GEOMETRİSİNDE BAZI ÖZEL ÇEMBERLER VE DÖRTGENLER İÇİN KELEBEK TEOREMİ

Gülfer ACAR

**Anahtar Kelimeler:** Perspektivite, çemberler, referans üçgen, kelebek

**Özet:** Bu çalışmada üçgen geometrisindeki bazı çemberler ve bazı perspektivite ile “kelebek” türündeki teoremler ele alınmıştır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak olan temel sonuçlar gösterilmiştir. Üçüncü bölümde üçgen geometrisinde bazı önemli çemberler verilmiştir. Ek olarak ABC referans üçgeninin kenarları üzerine yerleştirilen dikdörtgenlerle ilgili perspektivite gösterilmiştir. Dördüncü bölümde klasik kelebek teoreminin bazı kanıtları verilmiş ve dörtgenler için kelebek teoremi ile bağlantılı bazı sonuçlar elde edilmiştir.

# **SOME SPECIAL CIRCLES in TRIANGLE GEOMETRY and BUTTERFLY THEOREM for QUADRILATERALS**

**Gülfer ACAR**

**Keywords:** Perspectivity, circles, reference triangle, butterfly

**Abstract:** This study is concerned with certain circles and perspectivities in triangle geometry and theorems of the “butterfly” type. The first chapter consists of an introduction. In the second chapter preliminary results are presented which will be used in the sequel. In the third chapter certain remarkable circles of triangle geometry are introduced. In addition certain perspectivities are presented that emerge in connection with rectangles erected on the sides of the reference triangle. In the fourth chapter, some proofs for classic butterfly theorem are given and some results related to butterfly theorem for quadrilaterals are obtained.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu çalışmada üçgen düzleminde bazı özel çemberler ve perspektiveler ile kelebek teoremi verilmiştir. Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışmanın konusu ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, homojen barisantrik koordinatlarda genel çember denklemi, ABC referans üçgeninin çevrelçemberi, dokuz- nokta çemberi, Cevian çevrelçember,ABC referans üçgeninin iç teğet ve dış teğet çemberleri ile Lucas çemberleri verilmiştir. Daha sonra ABC referans üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerine  $\angle CX_1B = \theta$ ,  $\angle AY_1C = \varphi$  ve  $\angle BZ_1A = \omega$  ( $0 \leq \theta, \varphi, \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ) olacak şekilde  $BCX_1X_2$ ,  $CAY_1Y_2$  ve  $ABZ_1Z_2$  dikdörtgenleri yerleştirilmiştir. Bu dikdörtgenlerin köşe noktalarının koordinatları

$$\begin{aligned} X_1 &= -a^2 : S_C : S_B + S_\theta, \\ X_2 &= -a^2 : S_C + S_\theta : S_B, \\ Y_1 &= S_C + S_\varphi : -b^2 : S_A, \\ Y_2 &= S_C : -b^2 : S_A + S_\varphi, \\ Z_1 &= S_B : S_A + S_\omega : -c^2 \\ Z_2 &= S_B + S_\omega : S_A : -c^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

olduğu gösterilmiştir.  $AY_1Z_2$ ,  $BZ_1X_2$ ,  $CX_1Y_2$  üçgenlerinin kütle merkezleri olan

$$\begin{aligned} G_1 &= S_C + S_B + S_\varphi + S_\omega + 1 : -S_C : -S_B, \\ G_2 &= -S_C : S_A + S_\omega + S_C + S_\theta + 1 : -S_A, \\ G_3 &= -S_B : -S_A : S_A + S_B + S_\theta + S_\varphi + 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

noktalarının oluşturduğu  $G_1G_2G_3$  üçgeninin ABC referans üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektif olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, Kelebek teoremi ile ilgili literatür araştırması yapılarak bu teoremin çeşitli kanıtları verilmiştir. Zvonko Čerin' in [1] bir çalışmasında köşeleri  $A(0,0), B(f, g), C(1,0), D(p, q)$  ( $f, g, p, q \in \mathbb{R}$ ) olan bir ABCD dörtgeni üzerinde verdiği genelleştirilmiş kelebek teoreminin ve bu dörtgenle ilgili başka bazı bağıntıların bu dörtgenden farklı 7 dörtgen için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Böylece Čerin'in çalışmasındaki kelebek dahil olmak üzere sekiz kelebek elde edilmiştir.

## BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Bir Doğru Üzerindeki Noktaların Koordinatları

B ve C bir  $\ell$  doğrusu üzerinde sabit iki nokta olsun.  $\ell$  doğrusu üzerindeki her bir nokta aşağıdaki yollardan biri ile koordinatlanabilir:

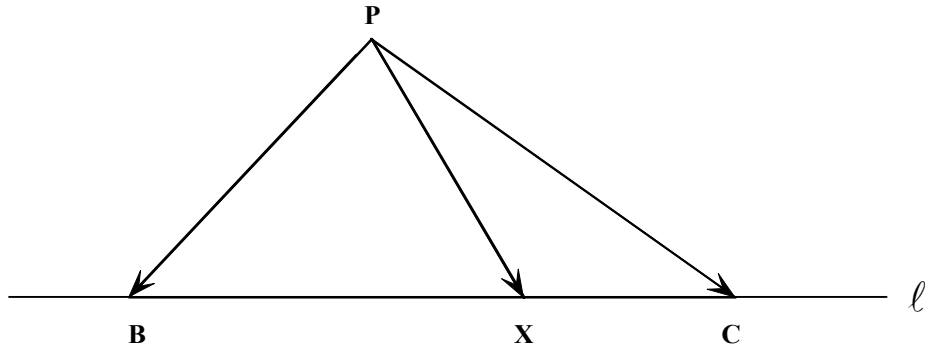
1)  $t = \frac{BX}{XC}$  bölme oranı,

2) Tam barisantrik koordinatlarda X noktası B ve C noktalarının bir konveks bileşkesi yani,

$$X = (1-t)B + tC \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

3) P noktası  $\ell$  doğrusunun dışında keyfi bir nokta ise  $\vec{PX}$  vektörü  $\vec{PB}$  ve  $\vec{PC}$  vektörlerinin bir bileşimi olarak yazılabilir(Şekil 2.1).

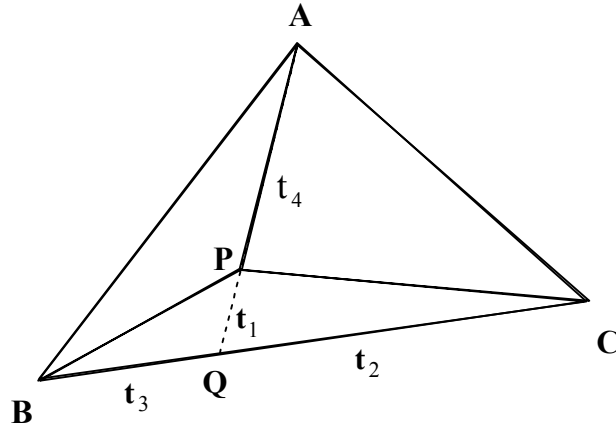


Şekil 2.1: Bir doğru üzerindeki noktaların koordinatları

Homojen barisantrik koordinatlarda X noktası B ve C deki kütlelerin  $\frac{XC}{BX}$  oranı ile yazılabilir. Burada X noktası bu kütlelerin oluşturduğu sistemin denge noktasıdır[2, s. 1].

## 2.2. Bir Üçgene Göre Homojen Barisantrik Koordinatlar

ABC referans üçgeninin köşe noktalarının homojen barisantrik koordinatları sırasıyla 1:0:0, 0:1:0 ve 0:0:1 dir ve bu üçgen referans üçgeni olarak adlandırılır[3]. ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının homojen barisantrik koordinatları BCP, CAP ve ABP üçgenlerinin yönlü alanlarının oranlarıdır. Şimdi bu yönlü alanlar hesaplanacaktır(Şekil 2.2).



Şekil 2.2: ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının homojen barisantrik koordinatları

$|PQ| = t_1, |QC| = t_2, |BQ| = t_3, |AP| = t_4$  olsun. CAP ile CPQ üçgenlerinin alanlarının oranları

$$\frac{\Delta_{CAP}}{\Delta_{CPQ}} = \frac{t_4}{t_1} \quad (2.2)$$

olur ve buradan  $x \neq 0$  bir gerçel sayı olmak üzere

$$\Delta_{CAP} = t_4 x \quad (2.3)$$

ve

$$\Delta_{CPQ} = t_1 x \quad (2.4)$$

yazılır. Benzer şekilde ABP ve PBQ üçgenleri için de

$$\frac{\Delta_{ABP}}{\Delta_{PBQ}} = \frac{t_4}{t_1} \quad (2.5)$$

olduğundan  $y \neq 0$  bir gerçel sayı olmak üzere

$$\Delta_{ABP} = t_4 y \quad (2.6)$$

ve

$$\Delta_{PBQ} = t_1 y \quad (2.7)$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta_{CAP} = t_4 x, \quad (2.8)$$

$$\Delta_{ABP} = t_4 y \quad (2.9)$$

ve BCP üçgeninin alanı  $\Delta_{BCP} = \Delta_{PBQ} + \Delta_{CPQ}$  olduğundan

$$\Delta_{BCP} = t_1(x + y) \quad (2.10)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{ABQ}}{\Delta_{AQC}} &= \frac{\Delta_{PBQ} + \Delta_{PAB}}{\Delta_{CPQ} + \Delta_{CAP}} \\
&= \frac{t_1 y + t_4 y}{t_1 x + t_4 x} \\
&= \frac{y}{x}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. Bununla birlikte

$$\frac{\Delta_{ABQ}}{\Delta_{AQC}} = \frac{t_3}{t_2} \tag{2.12}$$

olduğundan

$$\frac{y}{x} = \frac{t_3}{t_2} \tag{2.13}$$

yazılabilir. Buradan

$$x = \frac{t_2}{t_3} y \tag{2.14}$$

elde edilir. BCP, CAP ve ABP üçgenlerinin yönlü alanlarının oranları

$$\begin{aligned}
\Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP} &= t_1(x + y) : t_4 x : t_4 y : \\
&= t_1 \left( \frac{t_2}{t_3} y + y \right) : t_4 \left( \frac{t_2}{t_3} y \right) : t_4 y \\
&= t_1 \left( \frac{t_4}{t_3} \right) y : t_4 \frac{t_2}{t_3} y : t_4 y \\
&= \frac{t_1}{t_3} : \frac{t_2}{t_3} : 1
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa



$$\Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP} = t_1 : t_2 : t_3 \quad (2.16)$$

elde edilir[3]. Sonuç olarak ABC referans üçgenine göre P noktasının homojen barisantrik koordinatları

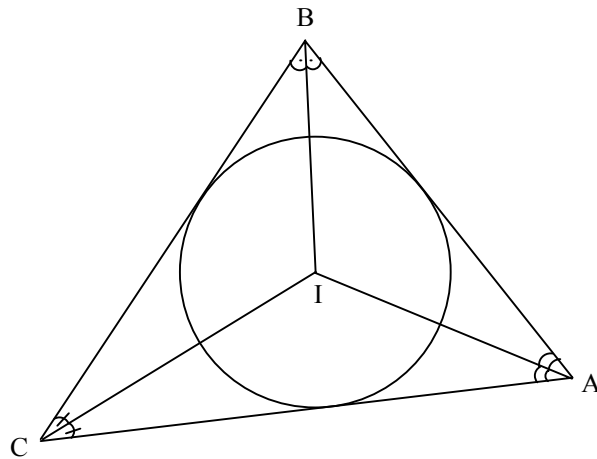
$$x : y : z = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP} \quad (2.17)$$

olacak şekildeki  $x:y:z$  sıralı üçlüsüdür[2, s.25].

Örnek 2.2.1: ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ve BC, CA, AB kenarlarının uzunlukları sırasıyla a, b, c olarak alınsın(Şekil 2.3). ABC üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere BCI, CAI, ABI üçgenlerinin alanları sırasıyla

$$\frac{1}{2}ra, \frac{1}{2}rb, \frac{1}{2}rc \quad (2.18)$$

biçimindedir. Dolayısıyla bu üçgenlerin alanlarının oranları olan  $a:b:c$  üçlüsü I noktasının homojen barisantrik koordinatlarıdır[2, s.25].



Şekil 2.3: ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi

### 2.3. Bir üçgene Göre Tam Barisantrik Koordinatlar

ABC referans üçgen düzlemindeki bir P noktasının homojen barisantrik koordinatları  $x : y : z$  olsun.

$$x + y + z \neq 0 \quad (2.19)$$

ise yani, P noktası sonsuzdaki doğru üzerinde değil ise P noktasının tam barisantrik koordinatları

$$P = \frac{xA + yB + zC}{x + y + z} \quad (2.20)$$

biçimindedir. P ve Q gibi iki noktanın tam barisantrik koordinatları verildiğinde [PQ] doğru parçasını

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{p}{q} \quad (2.21)$$

oranında bölen X noktasının tam barisantrik koordinatları

$$\frac{qP + pQ}{p + q} \quad (2.22)$$

biçimindedir. Buna göre homojen barisantrik koordinatlarda  $P = u : v : w$  ve  $Q = u' : v' : w'$  noktaları

$$u + v + w = u' + v' + w' \quad (2.23)$$

koşulunu sağlıyorsa [PQ] doğru parçasını

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{p}{q} \quad (2.24)$$

oranında bölen X noktasının homojen barisantrik koordinatları

$$qu + pu' : qv + pv' : qw + pw' \quad (2.25)$$

olur[2, s. 27].

Örnek 2.3.1: ABC referans üçgeninin yükseklik merkezi olan nokta H ile gösterilirse bu nokta Euler doğrusu üzerindedir ve [OG] doğru parçasını dıştan

$$\frac{OH}{HG} = -\frac{3}{2} \quad (2.26)$$

oranında böler. O zaman, H noktasının homojen barisantrik koordinatları

$$\tan A : \tan B : \tan C \quad (2.27)$$

veya buna denk olarak

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \quad (2.28)$$

olur[2, s. 28].

#### 2.4. Bir Üçgene Göre Trilineer Koordinatlar

ABC üçgen düzlemi ele alınsın. ABC üçgeninin BC kenarı bu düzlemi iki yarı-düzleme ayırır(Şekil 2.4). A köşesinin olduğu taraf BC kenarının pozitif tarafıdır ve diğer yarı-düzlem ise negatif tarafıdır. Bu üçgen düzleminde herhangi bir P noktası verilsin. P noktasının BC kenarına Öklid uzaklığı  $\alpha$  olsun. P noktasının BC kenarına yönlü uzaklığı

$$\delta = \begin{cases} -1, & \text{P, BC kenarının negatif tarafında ise} \\ 1, & \text{P, BC kenarının pozitif tarafında ise} \end{cases} \quad (2.29)$$

olmak üzere  $\delta\alpha$  olur. P noktasının CA ve AB kenarlarına olan yönlü uzaklıkları da benzer şekilde verilir. Bu uzaklıkların biri, ikisi veya üçü de negatif olabilir. Bu uzaklıklar gerçek(actual) trilineer uzaklıklardır. P noktasının BC, CA, AB kenarlarına olan gerçek trilineer uzaklıkları  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  olsun.  $k \neq 0$  olacak şekilde

$$\alpha_1 = k\alpha, \quad \beta_1 = k\beta, \quad \gamma_1 = k\gamma \quad (2.30)$$

eşitliklerini sağlayan  $\alpha:\beta:\gamma$  üçlüsüne P noktasının homojen trilineer koordinatları veya kısaca trilineerleri denir. Bu noktanın trilineer koordinatları  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ile de gösterilebilir. [4, s. 25-26].

P noktası ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun. PBC, PCA, PAB üçgenlerinin alanları sırasıyla  $\Delta_{PBC}, \Delta_{PCA}, \Delta_{PAB}$  ve ABC referans üçgeninin alanı da  $\Delta$  olsun.

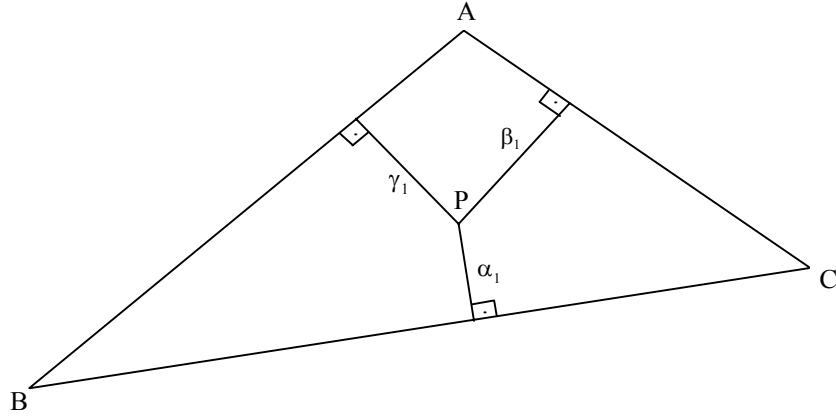
Buna göre P noktasının sırasıyla BC, CA, AB kenarlarına olan gerçek trilineer uzaklıkları olan  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sayıları için  $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma_1 > 0$  dır. P noktasının trilineer koordinatları  $P = \alpha:\beta:\gamma$  olmak üzere

$$\Delta = \Delta_{PBC} + \Delta_{PCA} + \Delta_{PAB} = \frac{1}{2}a\alpha_1 + \frac{1}{2}b\beta_1 + \frac{1}{2}c\gamma_1 = \frac{1}{2}ak\alpha + \frac{1}{2}bk\beta + \frac{1}{2}ck\gamma \quad (2.31)$$

olur. Buradan

$$k = \frac{2\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (2.32)$$

elde edilir[4, s. 27].  $k=1$  alındığı zaman  $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$ , P noktasının tam (exact) trilineer koordinatlarıdır[5].



Şekil 2.4: ABC referans üçgeni düzleminde herhangi bir P noktasının kenar doğrularına gerçek trilineer uzaklıkları ( $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma_1 > 0$ )

## 2.5. Trilineer Koordinatlar ile Homojen Barisantrik Koordinatlar Arasındaki İlişki

ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının trilineer koordinatları  $\alpha : \beta : \gamma$  olsun. P noktasının ABC referans üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenarlarına yönlü uzaklıkları

$$\alpha_1 = k\alpha, \quad \beta_1 = k\beta, \quad \gamma_1 = k\gamma \quad (2.33)$$

şeklindedir. Buna göre PBC, PCA ve PAB üçgenlerinin alanları sırasıyla

$$\frac{ak\alpha}{2}, \quad \frac{bk\beta}{2}, \quad \frac{ck\gamma}{2} \quad (2.34)$$

dır. Buradan P noktasının homojen barisantrik koordinatları

$$a\alpha : b\beta : c\gamma \quad (2.35)$$

olur. Dolayısıyla  $\alpha : \beta : \gamma$  trilineer koordinatlarına karşılık gelen homojen barisantrik koordinatlar  $a\alpha : b\beta : c\gamma$  dir ve tersine olarak  $\alpha : \beta : \gamma$  homojen barisantrik koordinatlarına karşılık gelen trilineer koordinatlar  $\frac{\alpha}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma}{c}$ , dir[5].

## 2.6. Conway Notasyonu

$S = 2\Delta$  olmak üzere bir  $\theta$  gerçel sayısı için

$$S_\theta = S \cot \theta \quad (2.36)$$

ifadesi  $S_\theta$  ile gösterilir. Buradan kosinüs teoreminden faydalanarak bu notasyonun

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \quad (2.37)$$

özel durumları elde edilir. Burada  $\theta$  ve  $\varphi$  keyfi iki gerçel sayı olmak üzere  $S_\theta S_\varphi$  yerine  $S_{\theta\varphi}$  alınarak gösterim kolaylığı sağlanır[2, s. 33].

Lemma 2.6.1:

$$(1) S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2, S_A + S_B = c^2.$$

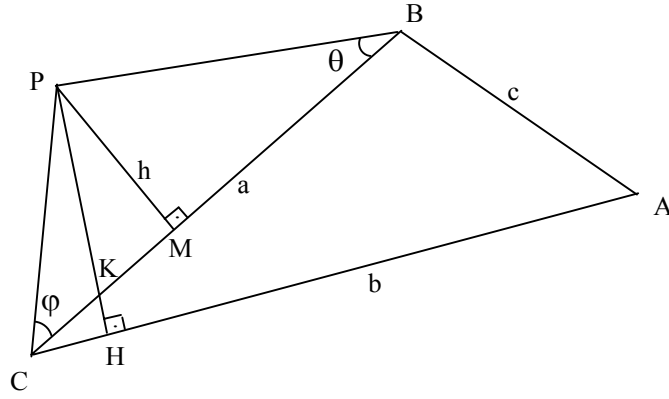
$$(2) S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2 [2, s. 33].$$

Şimdi yukarıdaki notasyonlar altında Conway formülü verilebilir.

ABC üçgeninin BC kenarı ile  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  olmak üzere  $\angle CBP = \theta$  ve  $\angle PCB = \varphi$

açılarını yapacak şekilde BC kenarının üst tarafında bir P noktası alınsın(Şekil 2.5).

$|PM| = h$  ve  $|CM| = x$  olsun. ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarlarının uzunlukları sırasıyla a, b, c olmak üzere  $|MB| = a - x$  olur.



Şekil 2.5: ABC üçgen düzleminde bir P noktası alındığında PCB, PCA, ABP üçgenlerinin alanları

Buradan

$$\cot \varphi = \frac{x}{h} \quad (2.38)$$

ve

$$\cot \theta = \frac{a-x}{h} \quad (2.39)$$

olur. Böylece

$$x = h \cot \varphi \quad (2.40)$$

ve

$$a - x = h \cot \theta \quad (2.41)$$

olduğundan bu iki eşitlikten  $h = \frac{a}{\cot \theta + \cot \varphi}$  elde edilir. Buradan

$$|CH| = |PH| \cot(\varphi + C) \quad (2.42)$$

olur. CHK ile PMK üçgenlerinin benzerliğinden (Açı- Açı- Açı)

$$\frac{|PM|}{|CH|} = \frac{|PK|}{|CK|} \quad (2.43)$$

dır. Buradan

$$\frac{h}{|PH| \cot(\varphi + C)} = \frac{\sqrt{|KM|^2 + |PM|^2}}{|CK|} \quad (2.44)$$

veya

$$\frac{h}{|PH| \cot(\varphi + C)} = \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\cot^2 C} + h^2}}{x - |KM|} \quad (2.45)$$

olur. Ayrıca (2.38)' den  $x - |KM| = h \cot \varphi - \frac{h}{\cot C}$  olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|PH| = h \sin C (\cot \varphi + \cot C) \quad (2.46)$$

olarak elde edilir. Buradan PCA üçgeninin alanı

$$\Delta_{PCA} = \frac{b|PH|}{2} = \frac{bh \sin C (\cot \varphi + \cot C)}{2} \quad (2.47)$$

olarak elde edilir. BPM dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$h^2 + (a - x)^2 = |PB|^2 \quad (2.48)$$

veya



$$h^2 + h^2 \cot^2 \theta = |PB|^2 \quad (2.49)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$|PB| = \frac{h}{\sin \theta} \quad (2.50)$$

elde edilir. Buradan ABP üçgeninin alanı

$$\Delta_{ABP} = \frac{1}{2} |AB| |BP| \sin(B + \theta) = \frac{c h \sin(B + \theta)}{2 \sin \theta} = \frac{c h (\cos B + \cot \theta \sin B)}{2} \quad (2.51)$$

olarak bulunur. Buna göre ABC üçgen düzlemindeki P noktasının homojen barisantrik koordinatları

$$P = \Delta_{PCB} : \Delta_{PCA} : \Delta_{ABP} = \frac{a h}{2} : \frac{b h \sin C (\cot \varphi + \cot C)}{2} : \frac{c h (\cos B + \cot \theta \sin B)}{2} \quad (2.52)$$

veya

$$P = \frac{a}{\sin B} : \frac{b \sin C (\cot \varphi + \cot C)}{\sin B} : \frac{c (\cos B + \cot \theta \sin B)}{\sin B} \quad (2.53)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P = \frac{a}{\sin B} : \frac{b c (\cot \varphi + \cot C)}{b} : c (\cot B + \cot \theta) \quad (2.54)$$

olur ve buradan da

$$P = \frac{a}{S} : c (\cot \varphi + \cot C) : c (\cot B + \cot \theta) \quad (2.55)$$

bulunur. Son olarak bu koordinatlar S ile çarpılırsa ve c çarpanı sadeleştirilirse Conway notasyonundan

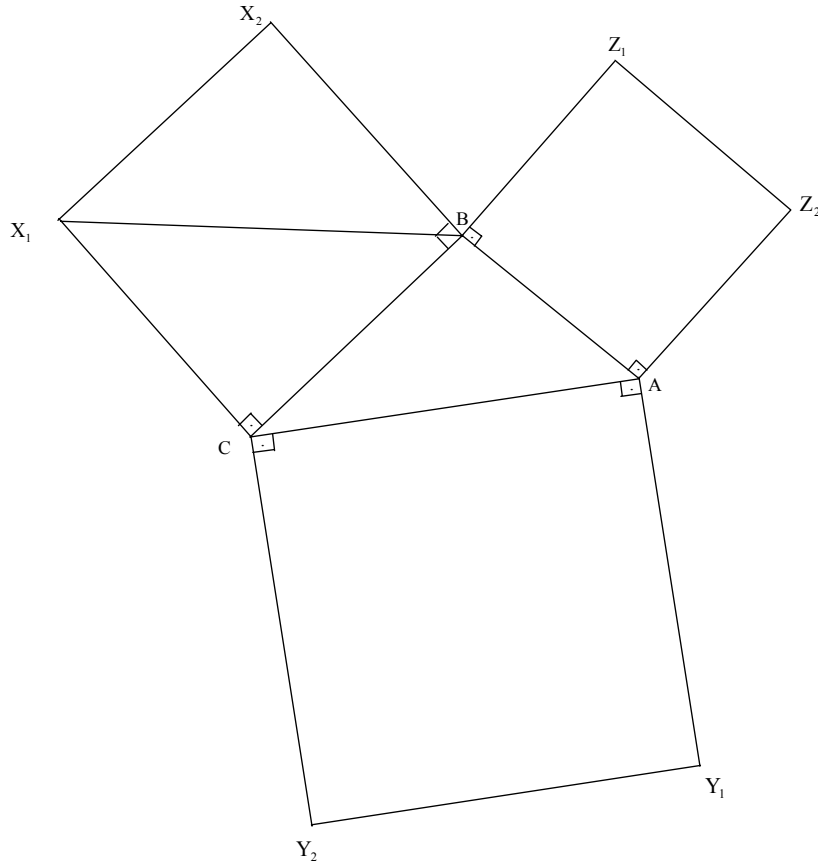
$$P = a^2 : S_{\phi} + S_C : S_B + S_{\theta} \quad (2.56)$$

elde edilir.  $\angle CBP$  ve  $\angle CBA$  açılarının aynı yönlü olmaları durumunda  $\theta$  açısı negatif, farklı yönde olmaları durumunda da pozitiftir[2, s. 34].

Örnek 2.6.1: ABC referans üçgeninin BC kenarı üzerine dıştan yerleştirilen

$BCX_1X_2$  karesi ele alındığında BC kenarına göre  $X_1$  noktası için  $\angle CBX_1 = \frac{\pi}{4}$  ve

$\angle BCX_1 = \frac{\pi}{2}$  olur(Şekil 2.6).



Şekil 2.6: ABC referans üçgeninin kenarları üzerine dıştan yerleştirilen kareler

$\cot \frac{\pi}{4} = 1$  ve  $\cot \frac{\pi}{2} = 0$  olduğundan

$$X_1 = -a^2 : S_C : S_B + S \quad (2.57)$$

ve benzer şekilde

$$X_2 = -a^2 : S_C + S : S_B \quad (2.58)$$

olarak elde edilir[2, s. 35].

## 2.7. İzogonal Eşlenikler

ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktası alınsın. AB, BP ve CP doğrularının sırasıyla A, B ve C açılarının açılımlarına göre yansımaları olan doğrular bir noktada kesişir. Bu nokta P noktasının izogonal eşleniğidir ve  $P^*$  ile gösterilir. P noktasının homojen barisantrik koordinatları  $x : y : z$ , AP doğrusunun BC kenarını kestiği nokta X ve  $\angle BAP = \theta$  olsun(Şekil 2.7). X noktasının koordinatları Conway notasyonu ile

$$X = 0 : y : z = 0 : S_A - S_\theta : -c^2 \quad (2.59)$$

olur. Buradan

$$\frac{S_A - S_\theta}{-c^2} = \frac{y}{z} \quad (2.60)$$

bulunur. A açısının açılımlarına göre AX doğrusunun yansımalarının BC kenarını kestiği nokta  $X'$  ile gösterilirse bu noktanın koordinatları

$$X' = 0 : -b^2 : S_A - S_\theta = 0 : -b^2 c^2 : c^2 (S_A - S_\theta) = 0 : b^2 z : c^2 y = 0 : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \quad (2.61)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde B ve C açılarının açıortaylarına göre sırasıyla

BP ve CP doğrularının yansımaları, CA kenarını  $Y' = \frac{a^2}{x} : 0 : \frac{c^2}{z}$  noktasında ve AB

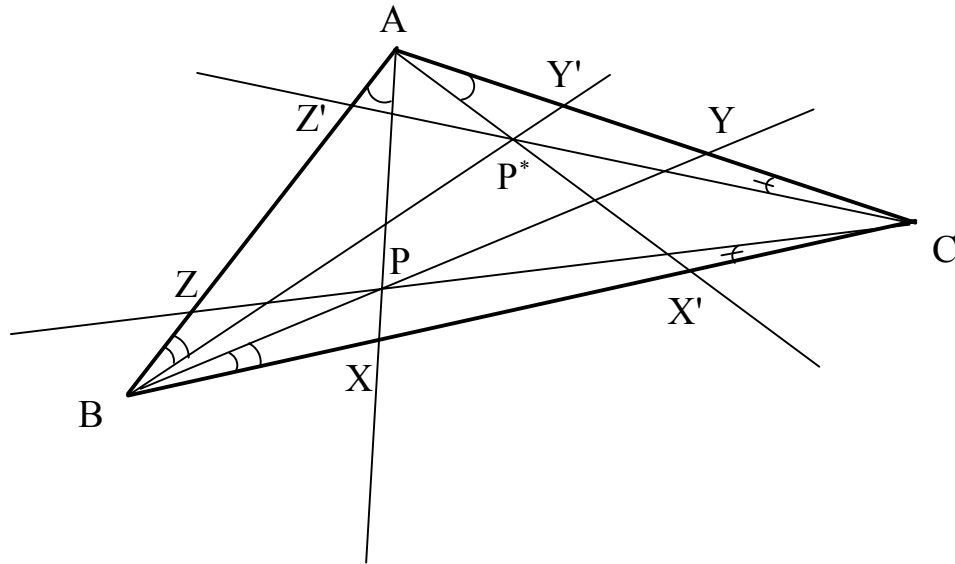
kenarını  $Z' = \frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : 0$  noktasında keser. Buradan  $AX', BY', CZ'$  doğruları

$$P^* = \frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} = a^2yz : b^2zx : c^2xy \quad (2.62)$$

noktasında kesişirler. Buna göre  $P = x : y : z$  noktasının izogonal eşlenik noktası

$$P^* = \frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \quad (2.63)$$

noktasıdır[2, s. 61].



Şekil 2.7: ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktasının izogonal eşleniği

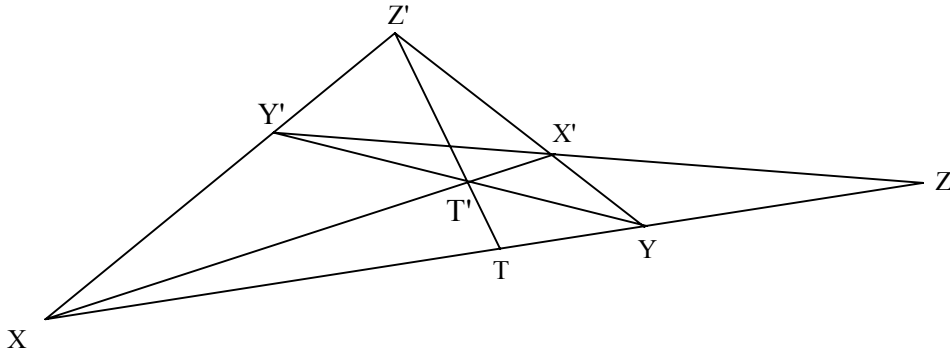
Örnek 2.7.1: ABC referans üçgeninin yükseklik merkezi  $H = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}$  noktasının izogonal eşleniği, ABC üçgeninin çevrelçemberinin merkezi olan  $a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C$  noktasıdır[2, s. 62].

## 2.8. Harmonik Eşlenikler

X,Y,Z,T noktaları ABC üçgen düzleminde doğruduş noktalar olsun(Şekil 2.8). Eğer

$$\frac{XZ}{ZY} = \frac{XT}{TY} \quad (2.64)$$

ise yani Z ve T noktaları  $[XY]$  doğru parçasını içten ve dıştan aynı oranda bölüyorsa o zaman Z ve T noktalarına X ve Y ye göre harmonik eşlenikler denir[6].



Şekil 2.8: ABC üçgen düzleminde herhangi bir noktanın harmonik eşleniği

X, Y, Z doğruduş noktaları verildiğinde Z noktasının X ve Y noktalarına göre harmonik eşleniği olan T noktasını elde etmek için Y' noktası XY üzerinde olmayan bir nokta ve X' noktası ise,  $[ZY']$  doğru parçası üzerinde Z ile Y' noktaları arasında bir nokta olarak alınsın. Ayrıca  $Z' = XY' \cap YX'$  ve  $T' = XX' \cap YY'$  olsun. O zaman  $T = XY \cap Z'T'$  olur. Z ve T noktalarının X ve Y ye göre harmonik eşlenik olduğunu yani Z ve T noktalarının  $[XY]$  doğru parçasını içten ve dıştan aynı oranda bölen noktalar olduğunu göstermek için önce  $XYZ'$  üçgeni ve  $ZX'Y'$  doğrusuna göre Menelaus teoremi uygulanırsa

$$\frac{ZY}{ZX} \frac{Y'Z'}{Y'X} \frac{X'Y}{X'Z'} = 1 \quad (2.65)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra XYZ' üçgeni ve T' noktasına göre Ceva teoremi uygulanırsa

$$\frac{YT}{TX} \frac{XY'}{Y'Z'} \frac{X'Z'}{X'Y} = -1 \quad (2.66)$$

eşitliği elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{\frac{ZY}{ZX}}{\frac{YT}{TX}} = -1 \quad (2.67)$$

olur. Buradan

$$\frac{XZ}{ZY} = \frac{XT}{TY} \quad (2.68)$$

elde edilir[6]. Böylece Z ve T noktalarının X ve Y noktalarına göre harmonik eşlenik noktalar olduğu görülür. X, Y ve Z (veya T) noktaları verildiğinde T (veya Z) noktasının koordinatlarının elde edilişi şu şekildedir:

$$X = \alpha : \beta : \gamma, \quad Y = \alpha' : \beta' : \gamma' \quad \text{ve} \quad Z = \alpha + \alpha' : \beta + \beta' : \gamma + \gamma' \quad (2.69)$$

noktaları verilsin.  $T = x : y : z$  alınırsa (2.68)' den

$$\frac{x - \alpha}{\alpha' - x} = \frac{\alpha + \alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha - \alpha'} \quad (2.70)$$

olur. Buradan  $x = \alpha - \alpha'$  elde edilir. Benzer şekilde  $y = \beta - \beta'$  ve  $z = \gamma - \gamma'$  bulunur. O halde  $X = \alpha : \beta : \gamma$ ,  $Y = \alpha' : \beta' : \gamma'$ ,  $Z = \alpha + \alpha' : \beta + \beta' : \gamma + \gamma'$  noktaları verildiğinde Z noktasının X ve Y noktalarına harmonik eşleniği olan T noktasının koordinatları

$$T = \alpha - \alpha' : \beta - \beta' : \gamma - \gamma' \quad (2.71)$$

olarak elde edilir[7].

## 2.9. Genel Doğru Denklemi

$x_1 : y_1 : z_1$  ve  $x_2 : y_2 : z_2$  gibi keyfi iki noktadan geçen doğru

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.72)$$

eşitliğini sağlayan  $x : y : z$  noktalar kümesidir ve denklemi

$$\ell = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad m = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad n = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad (2.73)$$

olmak üzere  $\ell x + m y + n z = 0$  dir[4, s. 28].

### 2.9.1. Doğrudaşlık

$P_1 = x_1 : y_1 : z_1$ ,  $P_2 = x_2 : y_2 : z_2$ ,  $P_3 = x_3 : y_3 : z_3$  noktaları verilsin.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

ise bu noktalar aynı doğru üzerindedir[4, s. 28].

## 2.9.2. Noktadaşlık

$\ell_1x + m_1y + n_1z = 0$ ,  $\ell_2x + m_2y + n_2z = 0$ ,  $\ell_3x + m_3y + n_3z = 0$  doğruları verilsin.

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.75)$$

ise bu doğrular noktadaştır. Bu doğruların kesiştiği noktanın koordinatları ise  $m_2n_3 - n_2m_3 : n_2\ell_3 - \ell_2n_3 : \ell_2m_3 - m_2\ell_3$  şeklindedir[4, s. 28-29].

## 2.10. Sonsuzdaki Doğru, Paralel Doğrular ve Dik Doğrular

### 2.10.1. Sonsuzdaki doğru

Bir doğru üzerinde herhangi iki noktanın oluşturduğu doğru parçasının orta noktasının bu iki noktaya göre harmonik eşleniği sonsuzdaki doğru üzerindedir. Örneğin ABC referans üçgeninin B ve C köşe noktalarının oluşturduğu doğru parçasının orta noktasının tam barisantrik koordinatları

$$\frac{B+C}{2} = 0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \quad (2.76)$$

dir. Bu noktanın B ve C noktalarına göre harmonik eşleniği

$$\frac{B-C}{2} = 0 : \frac{1}{2} : -\frac{1}{2} \quad (2.77)$$

noktasıdır. Bu nokta sonsuzdaki doğru üzerindedir ve homojen barisantrik koordinatları  $0:1:-1$  şeklindedir. Dolayısıyla bir L doğrusunun sonsuzdaki noktasının homojen barisantrik koordinatları bu doğru üzerindeki farklı iki noktanın tam barisantrik koordinatlarının farkı alınarak bulunabilir[2, s. 46].



Örnek 2.10.1.1: ABC referans üçgeninin BC, CA, AB kenar doğrularının sonsuzdaki noktaları sırasıyla  $0:-1:1$ ,  $1:0:-1$ ,  $-1:1:0$  dir.  $B=0:1:0$  ve  $C=0:0:1$  olduğundan BC doğrusunun sonsuzdaki noktası

$$C - B = 0:0:1 - 0:1:0 = 0:-1:1 \quad (2.78)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde CA ve AB doğrularının sonsuzdaki noktaları da elde edilir[2, s. 46].

Örnek 2.10.1.2: Genel olarak herhangi bir  $px + qy + rz = 0$  doğrusunun sonsuzdaki noktası

$$q - r : r - p : p - q \quad (2.79)$$

dir. Sonsuzdaki tüm noktalar bir doğru üzerinde kabul edilir. Bu doğruya sonsuzdaki doğru denir ve  $\mathcal{L}_\infty$  ile gösterilir. Denklemi ise aşağıdaki gibidir[2, s.46].

$$x + y + z = 0 \quad (2.80)$$

## 2.10.2. Paralel doğrular

Birbirine paralel doğruların sonsuzdaki noktası aynıdır. Yani paralel doğrular sonsuzdaki doğru üzerindeki bir noktada kesişmektedir.  $P = u : v : w$  noktasından geçen  $L : px + qy + rz = 0$  doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi

$$\begin{vmatrix} q-r & r-p & p-q \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (2.81)$$

şeklindedir[2, s. 47].

### 2.10.3. Dik doğrular

Bir  $L : px + qy + rz = 0$  doğrusu verilsin.  $L$  doğrusuna dik doğruların sonsuzdaki noktası şu şekilde belirlenir:

$L$  doğrusunun  $CA$  ve  $AB$  kenar doğrularını kestiği noktaların koordinatları  $Y = -r:0:p$  ve  $Z = q:-p:0$  dır.  $A$  noktasından geçen ve  $L$  doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulmak için önce  $Y$  noktasından  $AB$  doğrusuna dik çizilen ve  $Z$  noktasından  $CA$  doğrusuna dik çizilen doğrunun denklemi bulunmalıdır.  $C$  noktasından  $AB$  kenarına çizilen yükseklik doğrusunun sonsuzdaki noktası  $S_B : S_A : -c^2$  ve  $B$  noktasından  $CA$  kenarına çizilen yükseklik doğrusunun sonsuzdaki noktası  $S_C : -b^2 : S_A$  dır. Böylece  $Y$  noktasından  $AB$  doğrusuna dik çizilen ve  $Z$  noktasından  $CA$  doğrusuna dik çizilen doğruların denklemleri sırasıyla

$$\begin{vmatrix} S_B & S_A & -c^2 \\ -r & 0 & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ ve } \begin{vmatrix} S_C & -b^2 & S_A \\ q & -p & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (2.82)$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S_A px + (c^2 r - S_B p)y + S_A rz = 0 \quad (2.83)$$

ve

$$S_A px + S_A qy + (b^2 q - S_C p)z = 0 \quad (2.84)$$

olarak bulunur. Bu iki dik doğru  $AYZ$  üçgeninin yükseklik merkezinde kesişirler ve bu noktanın koordinatları

$$X' = S^2 qr - c^2 S_C pr - b^2 S_B pq + p^2 S_B S_C : S_A p(S_A r - b^2 q + S_C p) : S_A p(S_A q + S_B p - c^2 r) \quad (2.85)$$

veya gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X' = S^2qr - c^2S_Cpr - b^2S_Bpq + p^2S_B S_C : S_C(p-q) - S_A(q-r) : S_A(q-r) - S_B(r-p) \quad (2.86)$$

olarak elde edilir.  $AX'$  doğrusu  $A$  noktasından geçer ve  $L$  doğrusuna diktir ve denklemleri de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S^2qr - c^2S_Cpr - b^2S_Bpq + p^2S_B S_C & S_C(p-q) - S_A(q-r) & S_A(q-r) - S_B(r-p) \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (2.87)$$

veya gerekli düzenleme yapılırsa

$$-(S_A(q-r) - S_B(r-p))y + (S_C(p-q) - S_A(q-r))z = 0 \quad (2.88)$$

olarak bulunur. Bu doğru ile sonsuzdaki doğrunun kesişim noktası

$$S_B(r-p) - S_C(p-q) : S_C(p-q) - S_A(q-r) : S_A(q-r) - S_B(r-p) \quad (2.89)$$

dir. Şimdi  $L$  doğrusunun sonsuzdaki noktasının  $q-r : r-p : p-q$  olduğu göz önünde bulundurularak aşağıdaki teorem verilebilir[2, s. 54].

**Teorem 2.10.3.1:** Bir  $L$  doğrusunun sonsuzdaki noktası  $f : g : h$  ise  $L$  doğrusuna dik olan doğruların sonsuzdaki noktası

$$f' : g' : h' = S_B g - S_C h : S_C h - S_A f : S_A f - S_B g \quad (2.90)$$

dir. Buna eş değer olarak sonsuzdaki noktaları  $f : g : h$  ve  $f' : g' : h'$  olan iki doğrunun birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul

$$S_A ff' + S_B gg' + S_C hh' = 0 \quad (2.91)$$

olmasıdır[2, s. 55].

### **BÖLÜM 3. ÜÇGEN DÜZLEMİNDE ÇEMBERLER VE PERSPEKTİVİTELER**

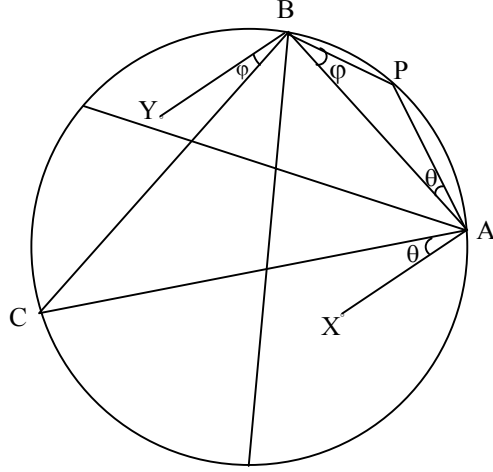
Bu bölümde ABC referans üçgeninin çevrelçemberi ve homoteti kavramı verilerek genel çember denkleminin nasıl elde edileceği gösterilmiş ve bazı çember örnekleri verilmiştir. Daha sonra  $0 \leq \theta, \varphi, \omega \leq \frac{\pi}{2}$  özelliğini sağlayan  $\angle CX_1B = \theta$ ,  $\angle AY_1C = \varphi$  ve  $\angle BZ_1A = \omega$  açıları oluşacak şekilde ABC referans üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerine sırasıyla  $BCX_1X_2$ ,  $CAY_1Y_2$  ve  $ABZ_1Z_2$  dikdörtgenleri yerleştirilmiştir. Daha sonra  $X_1$  noktasından ABC referans üçgeninin CA kenar doğrusuna ve  $X_2$  noktasından AB kenar doğrusuna paralel çizilen doğruların kesişim noktası  $A_1$ ,  $Y_1$  noktasından AB kenar doğrusuna ve  $Y_2$  noktasından BC kenar doğrusuna paralel çizilen doğruların kesişim noktası  $B_1$  olsun. Benzer şekilde  $Z_1$  noktasından BC kenar doğrusuna ve  $Z_2$  noktasından CA kenar doğrusuna paralel çizilen doğruların kesişim noktası  $C_1$  olarak alınsın. O zaman  $A_1B_1C_1$  üçgeni ABC üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektiftir. Ayrıca bu bölümde daha önce [8]' de verilen ve  $AY_1Z_2$ ,  $BZ_1X_2$ ,  $CX_1Y_2$  üçgenlerinin kütle merkezleri  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  olmak üzere  $G_1G_2G_3$  üçgeninin ABC üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektif olduğunu gösteren bir teoremin farklı bir kanıtı verilmiştir.

#### **3.1. Üçgen Düzleminde Çemberler**

##### **3.1.1. Sonsuzdaki doğrunun izogonal eşleniği olarak ABC referans üçgeninin çevrelçemberi**

P, ABC referans üçgeninin çevrelçemberi üzerinde bir nokta olsun. AX ve AP doğruları A açısının iç açıortayına göre, BY ile BP doğruları da B açısının

açıortayına göre simetrik olsunlar(Şekil 3.1). Ayrıca  $\angle PAB = \theta$  ve  $\angle PBA = \varphi$  olarak alınsın. Buradan  $\theta + \varphi = C$  olur[2, s. 63].



Şekil 3.1: ABC referans üçgeninin çevrelçemberi

$\angle XAB = A + \theta$  ve  $\angle YBA = B + \varphi$  olduğundan  $\angle XAB$  açısı ile  $\angle YBA$  açısının ölçüleri toplamı  $180^\circ$  dir ve buradan AX doğrusu BY doğrusuna paraleldir. Benzer şekilde CP doğrusunun C açısının açıortayına göre simetriği CZ doğrusu ise o zaman CZ doğrusu da AX ve BY doğrularına paraleldir. O halde AX, BY, CZ doğrularının kesişim noktası, yani, çevrelçember üzerinde bulunan herhangi bir noktayı temsil eden P noktasının izogonal eşleniği sonsuzdaki doğru üzerindedir. Böylece çevrelçember üzerindeki bir noktanın izogonal eşleniği, sonsuzdaki bir noktadır. Bunun tersi de geçerlidir. Buradan sonsuzdaki doğrunun izogonal eşleniği çevrelçemberdir ve sonsuzdaki doğrunun denklemi

$$x + y + z = 0 \quad (3.1)$$

olduğundan çevrelçemberin denklemi

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 \quad (3.2)$$

olur[2, s. 63].

Tanım 3.1.1.1: Bir  $X$  noktasını  $X'$  noktasına  $\frac{TX'}{TX} = \frac{r}{1}$  bölmesiyle taşıyan  $h(T,r)$  benzerlik dönüşümüne “ $T$  merkezli ve  $r$  oranlı homoteti” denir[2, s. 15].

### 3.1.2. Genel çember denklemi

Tam barisantrik koordinatlarda, herhangi bir  $(C)$  çemberi  $h(T,k)$  homotetisi ile  $ABC$  referans üçgeninin çevrelçemberine homotetiktir.  $(C)$  çemberi ve  $ABC$  referans üçgeninin çevrelçemberinin benzerlik merkezinin koordinatları  $T=u:v:w$  olsun.

$P(x : y : z)$  noktası  $(C)$  çemberi üzerinde ise  $t = \frac{1-k}{k}$  olmak üzere

$$h(T,k)P = kP + (1-k)T = x + tu(x+y+z) : y + tv(x+y+z) : z + tw(x+y+z) \quad (3.3)$$

noktası çevrelçember üzerindedir. Bu nokta çevrelçember üzerinde olduğundan,

$$\sum_{\text{çembersel}} a^2 (yz + t(wy + vz)(x+y+z) + t^2 vw(x+y+z)^2) = 0 \quad (3.4)$$

veya daha açık olarak

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy + t \left( \sum_{\text{çembersel}} a^2 (wy + vz)(x+y+z) \right) + t^2 (a^2 vw + b^2 wu + c^2 uv)(x+y+z)^2 = 0 \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her bir çember

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy + (x+y+z)(px + qy + rz) = 0 \quad (3.6)$$

genel formunda gösterilir. Burada  $px + qy + rz = 0$ ,  $(C)$  çemberi ile  $ABC$  referans üçgeninin çevrelçemberinin kuvvet eksenidir[2, s. 68].

### 3.1.3. Dokuz-nokta çemberinin denklemi

Dokuz-nokta çemberinin denklemi  $h(G, -\frac{1}{2})$  homotetisi uygulanarak ABC referans üçgeninin çevrelçemberinden elde edilir.  $P = x : y : z$  noktası dokuz-nokta çemberi üzerinde bir nokta ise o zaman

$$\begin{aligned} Q = 3G - 2P &= (x + y + z)(1 : 1 : 1) - 2(x : y : z) \\ &= (x + y + z : x + y + z : x + y + z) - (2x : 2y : 2z) \\ &= (y + z - x : z + x - y : x + y - z) \end{aligned} \quad (3.7)$$

noktası çevrelçember üzerindedir. ABC referans üçgeninin çevrelçemberinin denkleminde

$$a^2(z + x - y)(x + y - z) + b^2(x + y - z)(y + z - x) + c^2(y + z - x)(z + x - y) = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa dokuz-nokta çemberinin denklemi

$$\sum_{\text{çembersel}} a^2(x^2 - y^2 + 2yz - z^2) = \sum_{\text{çembersel}} (a^2 - c^2 - b^2)x^2 + 2a^2yz = 0 \quad (3.9)$$

veya

$$\sum_{\text{çembersel}} S_A x^2 - a^2 yz = 0 \quad (3.10)$$

olarak elde edilir[2, s. 67].

### 3.1.4. Miguel bağıntısı

ABC üçgen düzleminde herhangi bir P noktası alınsın. AP, BP ve CP doğrularının ABC üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenarlarını kestiği noktalar bu P noktasının izleridir.

Teorem(Miguel Teoremi) 3.1.4.1: X, Y, Z noktaları ABC üçgen düzleminde bir P noktasının izleri olsun. A, Y, Z; B, Z, X; C, X, Y noktalarından geçen  $C_{AYZ}$ ,  $C_{BZX}$ ,  $C_{CXY}$  çemberleri ortak bir noktadan geçer[2, s. 69].

AYZ çemberinin denklemini bulmak için

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(px + qy + rz) = 0 \quad (3.11)$$

genel çember denklemini ele alınsın. Bu çember  $A = 1 : 0 : 0$  noktasından geçtiği için

$$p = 0, \quad (3.12)$$

$X = u : 0 : w$  noktasından geçtiği için

$$r = -\frac{b^2u}{w + u}, \quad (3.13)$$

ve  $Y = u : v : 0$  noktasından geçtiği için

$$q = -\frac{c^2u}{u + v} \quad (3.14)$$

olur. O halde  $C_{AYZ}$  çemberinin denklemini,

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)\left(\frac{c^2u}{u + v}y + \frac{b^2u}{w + u}z\right) = 0 \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde diğer iki çemberin denklemleri de

$$\begin{aligned} C_{BZX} : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)\left(\frac{c^2v}{u + v}x + \frac{a^2v}{v + w}z\right) &= 0, \\ C_{CXY} : a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)\left(\frac{b^2w}{w + u}x + \frac{a^2w}{v + w}y\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$



olarak elde edilir. Miguel teoreminden bu üç çember bir  $P'$  noktasında kesişir. Bu nokta  $P$  nin “Miguel noktası” olarak adlandırılır ve  $P'$  noktasının koordinatları

$$\frac{c^2u}{u+v}y + \frac{b^2u}{w+u}z = \frac{c^2v}{u+v}x + \frac{a^2v}{v+w}z = \frac{b^2w}{w+u}x + \frac{a^2w}{v+w}y \quad (3.17)$$

eşitliklerini sağlar. O halde bu denklem sistemi çözülerek  $P'$  noktasının koordinatları

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{v+w} \left( -\frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v} \right) &: \frac{b^2}{w+u} \left( \frac{a^2vw}{v+w} - \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v} \right) \\ &: \frac{c^2}{u+v} \left( \frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} - \frac{c^2uv}{u+v} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olarak bulunur[2, s. 69-70].

### 3.1.5. Cevian çevrelçember

$P = u : v : w$  noktasının cevian çevrelçemberi,  $P$  noktasının izlerinden geçen çemberdir. Genel çember denklemi

$$(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + (x + y + z)(px + qy + rz) = 0 \quad (3.19)$$

olduğundan  $P$  noktasının izleri olan  $0 : v : w$ ,  $u : 0 : w$ ,  $u : v : 0$  noktaları bu denklemde yerine konulursa

$$vq + wr = -\frac{a^2vw}{v+w}, \quad up + wr = -\frac{b^2wu}{w+u}, \quad up + vq = -\frac{c^2uv}{u+v} \quad (3.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2u} \left( -\frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v} \right), \\
q &= -\frac{1}{2v} \left( \frac{a^2vw}{v+w} - \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v} \right), \\
r &= -\frac{1}{2w} \left( \frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} - \frac{c^2uv}{u+v} \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. O halde  $P = u : v : w$  noktasının cevian çevrelçemberi,

$$\begin{aligned}
&(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + (x + y + z) \left( \frac{1}{2u} \left( \frac{a^2vw}{v+w} - \frac{b^2wu}{w+u} - \frac{c^2uv}{u+v} \right) \right) x \\
&+ \left( \frac{1}{2v} \left( -\frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} - \frac{c^2uv}{u+v} \right) \right) y + \left( \frac{1}{2w} \left( -\frac{a^2vw}{v+w} - \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v} \right) \right) z = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olarak bulunur[2, s. 70].

### 3.1.6. Cyclocevian eşlenik

$P = u : v : w$  noktasının ABC referans üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerinde bulunan izleri, sırasıyla  $X = 0 : v : w$ ,  $Y = u : 0 : w$  ve  $Z = u : v : 0$  dir. P noktasının cevian çevrelçemberinin BC, CA, AB kenarları ile ikinci kesişim noktaları sırasıyla  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  olsun. Cevian çevrelçemberin BC doğrusunu kestiği noktaların ilk koordinatları sıfırdır. Genel çember denkleminde  $x = 0$  alınırsa bu noktalar

$$a^2yz + (y + z)(qy + rz) = 0 \tag{3.23}$$

denklemini sağlar. Bu denklem düzenlenirse,

$$qy^2 + (q + r + a^2)yz + rz^2 = 0 \tag{3.24}$$

olur. Her iki taraf  $z^2$ 'ye bölünürse

$$q\left(\frac{y}{z}\right)^2 + (q + r + a^2)\frac{y}{z} + r = 0 \tag{3.25}$$

elde edilir. Bu denklemin köklerinin çarpımı  $\frac{r}{q}$  olur. Denklemin köklerinden biri

$\frac{v}{w}$  dir. Çünkü cevian çevrelçemberin BC doğrusunu kestiği noktalardan biri

$X = 0 : v : w$  olduğundan diğer kök  $\frac{rw}{qv}$  dir. Böylece, ikinci kesişim noktası

$$X' = 0 : rw : qv = 0 : \frac{1}{qv} : \frac{1}{rw} \quad (3.26)$$

dir. Benzer şekilde XYZ cevian çevrelçemberinin diğer iki kenarla ikinci kesişim noktaları da bulunabilir. AX', BY' ve CZ' cevianları  $\frac{1}{pu} : \frac{1}{qv} : \frac{1}{rw}$  noktasında kesişir.

Bu kesişim noktası P noktasının Cyclocevian eşleniği olarak adlandırılır ve c(P) ile gösterilir. O halde c(P)' nin koordinatları

$$\frac{1}{-\frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v}} : \frac{1}{\frac{a^2vw}{v+w} - \frac{b^2wu}{w+u} + \frac{c^2uv}{u+v}} : \frac{1}{\frac{a^2vw}{v+w} + \frac{b^2wu}{w+u} - \frac{c^2uv}{u+v}} \quad (3.27)$$

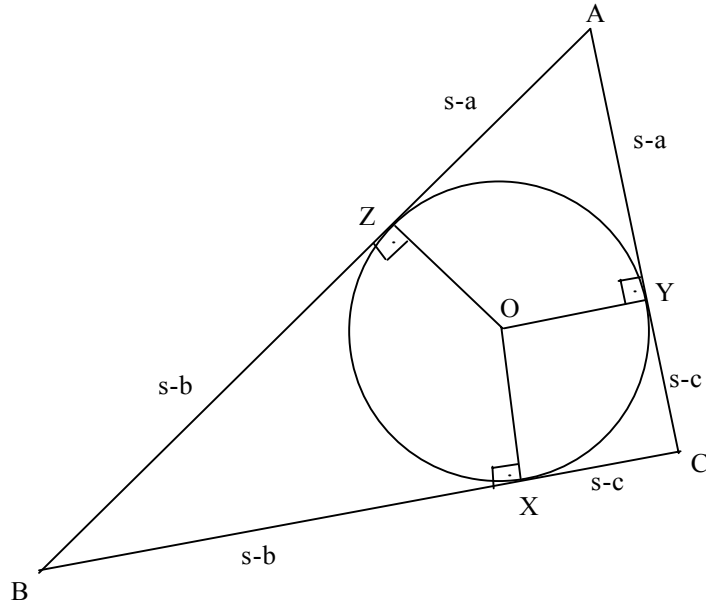
dir[2, s. 71].

### 3.1.7. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin denklemi

ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin BC, CA, AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla X, Y, Z olsun(Şekil 3.2). ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin BC kenarına değme noktasının ilk koordinatı sıfır olacağı için genel çember denkleminde  $x = 0$  yazılırsa

$$a^2yz + (y+z)(qy+rz) = 0 \quad (3.28)$$

şeklini alır[2, s. 73].



Şekil 3.2: ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin kenar doğrularına değme noktalarının homojen barisantrik koordinatları

s, ABC referans üçgeninin çevre uzunluğunun yarısı olmak üzere iç teğet çember BC

kenarına  $X = 0 : s - c : s - b$  noktasında değdiğinden  $\frac{y}{z} = \frac{s - c}{s - b}$ ,

$$a^2 yz + (y + z)(qy + rz) = 0 \quad (3.29)$$

denkleminin tek köküdür. Buradan k bir skaler olmak üzere

$$qy^2 + (q + r + a^2)yz + rz^2 = k((s - b)y - (s - c)z)^2 \quad (3.30)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikten

$$k = 1, \quad q = -(s - b)^2, \quad r = -(s - c)^2 \quad (3.31)$$

bulunur. Benzer şekilde, çemberin CA doğrusuna teğet olduğu düşünülürse

$$p = -(s - a)^2 \text{ ve } r = -(s - c)^2 \text{ (sabit olarak)} \quad (3.32)$$

elde edilir. O halde iç teğet çemberin denklemi,

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - a)^2x + (s - b)^2y + (s - c)^2z) = 0 \quad (3.33)$$

olur[2, s. 73-74].

### 3.1.8. ABC referans üçgeninin dış teğet çemberleri

ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin denklemini elde etmek için kullanılan yöntem dış teğet çemberlerin denklemlerini elde etmek için de kullanılır.  $X', Y', Z'$  noktaları A- dış teğet çemberinin sırasıyla BC, CA ve AB kenarlarına değme noktaları olsun(Şekil 3.3).  $s$ , ABC referans üçgeninin çevre uzunluğunun yarısı olmak üzere  $|AZ'| = s$ ,  $|AY'| = s$ ,  $|BZ'| = s - c$ ,  $|BX'| = s - c$ ,  $|CY'| = s - b$ ,  $|CX'| = s - b$  dir. Buna göre  $X', Y', Z'$  noktalarının homojen barisantrik koordinatları sırasıyla  $0 : s - b : s - c$ ,  $-(s - b) : 0 : s$ ,  $-(s - c) : s : 0$  dir. Buradan, A- dış teğet çemberinin denklemi

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(s^2x + (s - c)^2y + (s - b)^2z) = 0 \quad (3.34)$$

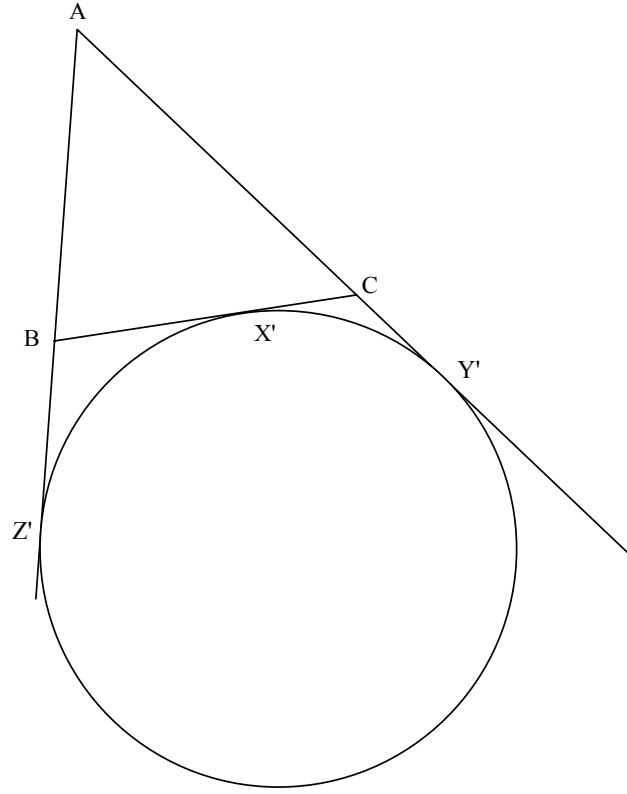
olarak elde edilir. Benzer şekilde B-dış teğet ve C-dış teğet çemberlerinin denklemleri de

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - c)^2x + s^2y + (s - a)^2z) = 0 \quad (3.35)$$

ve

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - b)^2x + (s - a)^2y + s^2z) = 0 \quad (3.36)$$

olarak bulunur[2, s. 74].



Şekil 3.3: ABC referans üçgeninin A-dış teğet çemberinin ABC üçgeninin kenar doğrularına değme noktaları

Buradan ABC referans üçgeninin çevrelçemberi ile dış teğet çemberlerinin kuvvet eksenleri

$$\begin{aligned}
 s^2x + (s-c)^2y + (s-b)^2z &= 0 \\
 (s-c)^2x + s^2y + (s-a)^2z &= 0 \\
 (s-b)^2x + (s-a)^2y + s^2z &= 0
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

dir.

Bu üç doğru, köşe noktaları

$$\begin{aligned}
 A' &= -(b+c)(a^2 + (b+c)^2) : b(a^2 + b^2 - c^2) : c(c^2 + a^2 - b^2) \\
 B' &= a(a^2 + b^2 - c^2) : -(c+a)(b^2 + (c+a)^2) : c(b^2 + c^2 - a^2) \\
 C' &= a(a^2 + c^2 - b^2) : b(a^2 + b^2 - c^2) : -(a+b)(c^2 + (a+b)^2)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

olan bir üçgen belirtir. A'B'C' üçgeni Clawson noktası olarak bilinen  $\frac{a}{S_A} : \frac{b}{S_B} : \frac{c}{S_C}$  noktasında ABC referans üçgenine perspektiftir[2, s. 78].

### 3.1.9. Kuvvet merkezi

Denklemleri

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(p_1x + q_1y + r_1z) = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (3.39)$$

olan  $C_i$  çemberleri ele alınsın. Bu çemberlerin kuvvet merkezi, üç çembere göre eşit kuvvetli olan noktadır. Bu noktanın koordinatları  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} p_1x + q_1y + r_1z &= a \\ p_2x + q_2y + r_2z &= a \\ p_3x + q_3y + r_3z &= a \end{aligned} \quad (3.40)$$

denklem sisteminin çözümüdür. Kuvvet merkezinin koordinatları  $P = u : v : w$  olarak alınsın. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

olmak üzere P noktasının koordinatları sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 & r_1 \\ 1 & q_2 & r_2 \\ 1 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & 1 & r_1 \\ p_2 & 1 & r_2 \\ p_3 & 1 & r_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

matrislerinin determinantlarıdır[2, s. 90].

### 3.1.10. ABC referans üçgeninin iç teğet çember ile dokuz-nokta çemberinin kuvvet eksenini(Feuerbach teğeti)

ABC referans üçgeninin iç teğet çemberi ile dokuz- nokta çemberinin denklemleri daha önce sırasıyla

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - a)^2x + (s - b)^2y + (s - c)^2z) = 0 \quad (3.43)$$

ve

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{2}(x + y + z)(S_Ax + S_By + S_Cz) = 0 \quad (3.44)$$

olarak elde edilmiştir. Bu çemberlerin kuvvet ekseninin denklemini bulmak için (3.43) ile (3.44) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$((s - a)^2 - \frac{1}{2}S_A)x + ((s - b)^2 - \frac{1}{2}S_B)y + ((s - c)^2 - \frac{1}{2}S_C)z = 0 \quad (3.45)$$

olur. Bu son eşitlikte x' in katsayısı

$$(s - a)^2 - \frac{1}{2}S_A = \frac{1}{4}((b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)) = \frac{1}{2}(a^2 - a(b + c) + bc) = \frac{1}{2}(a - b)(a - c) \quad (3.46)$$

dir. Benzer şekilde y' nin ve z' nin katsayıları sırasıyla

$$(s - b)^2 - \frac{1}{2}S_B = \frac{1}{2}(b - a)(b - c) \quad (3.47)$$

ve

$$(s - c)^2 - \frac{1}{2}S_C = \frac{1}{2}(c - a)(c - b) \quad (3.48)$$



olur. Buradan, bu iki çemberin kuvvet ekseninin denklemi

$$L:(a-b)(a-c)x + (b-a)(b-c)y + (c-a)(c-b)z = 0 \quad (3.49)$$

veya

$$\frac{x}{b-c} + \frac{y}{c-a} + \frac{z}{a-b} = 0 \quad (3.50)$$

elde edilir.  $P = (b-c)^2 : (c-a)^2 : (a-b)^2$  ve  $Q = a(b-c)^2 : b(c-a)^2 : c(a-b)^2$  noktaları L doğrusu üzerindedir. Bu noktaları kullanarak, L kuvvet ekseninde bulunan P dışındaki noktaların bir parametrik ifadesi bazı t değerleri için

$$x : y : z = (a+t)(b-c)^2 : (b+t)(c-a)^2 : (c+t)(a-b)^2 \quad (3.51)$$

olarak bulunur[2, s. 75].

### **3.1.11. ABC referans üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi ve dokuz-nokta çemberinin merkezinden geçen doğru**

İlk olarak ABC referans üçgeninin iç teğet çemberi ile dokuz- nokta çemberinin kuvvet eksenini olan L doğrusu ile I ve N merkezlerinden geçen doğrunun kesişim noktası elde edilsin. Dokuz-nokta çemberinin merkezinin koordinatları, koordinat toplamı  $8S^2$  olmak üzere

$$N = a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 : b^2(c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2 : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 \quad (3.52)$$

noktasıdır. NI doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta k bir gerçel sayı olmak üzere  $N+kI$  biçimindedir. Bu nokta daha açık olarak

$$\begin{aligned} a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 + ka : b^2(c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2 + kb \\ : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 + kc \end{aligned} \quad (3.53)$$

biçiminde yazılabilir. Bu noktanın hem IN üzerinde hem de L kuvvet eksenini üzerinde olması için gerekli k gerçel sayısı  $k = -2abc$  olarak elde edilir. Buradan NI doğrusu ile L kuvvet ekseninin kesişim noktasının ilk koordinatı

$$\begin{aligned} a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 - 2a^2bc &= a^2(b - c)^2 - (b^2 - c^2)^2 \\ &= (b - c)^2(a^2 - (b + c)^2) \\ &= 4s(a - s)(b - c)^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

olur ve benzer şekilde a,b,c çembersel permütasyonuyla diğer iki koordinat da bulunur. O halde bu noktanın koordinatları

$$F = (s - a)(b - c)^2 : (s - b)(c - a)^2 : (s - c)(a - b)^2 \quad (3.55)$$

dir. Eğer  $t = -s$  alınırsa L doğrusu üzerinde yine F noktası elde edilir. Bu nokta Feuerbach noktası olarak adlandırılır. F noktası [IN] doğru parçasını bölme oranı  $\frac{NF}{FI}$  dır. O zaman

$$F \sim 8S^2N + 2skI = 8S^2N - 4sabcI \quad (3.56)$$

dır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa R, ABC referans üçgeninin çevrelçemberinin yarıçapı ve r iç teğet çemberin yarıçapı olmak üzere

$$\frac{NF}{FI} = \frac{-4sabc}{8S^2} = \frac{-8sRS}{8S^2} = \frac{-sR}{S} = \frac{R}{-2r} = \frac{R}{2} : -r \quad (3.57)$$

olur[2, s. 75-76].

### 3.1.12. Feuerbach teoremi

Dokuz-nokta çemberi ve iç teğet çember F Feuerbach noktasında birbirine içten teğettir. F Feuerbach noktasını üzerinde bulunduran doğrunun denklemi

$$\frac{x}{b-c} + \frac{y}{c-a} + \frac{z}{a-b} = 0 \quad (3.58)$$

olur. Ayrıca dokuz-nokta çemberi ABC referans üçgeninin dış teğet çemberlerinin her birine dıştan teğettir[2, s. 77].

Teorem (Feuerbach teoremi)3.1.12.1: Dokuz- nokta çemberinin ABC referans üçgeninin üç dış teğet çemberine teğet olduğu noktalar,

$$F' = \frac{(b+c)^2}{s-a} : \frac{(c+a)^2}{s-b} : \frac{(a+b)^2}{s-c} \quad (3.59)$$

noktasında ABC üçgenine perspektif olan bir üçgen oluştururlar[2, s. 77].

### 3.1.13. Brocard noktaları

ABC referans üçgeninin A ve B noktalarından geçen ve A noktasında AC kenarına teğet olan çember ele alınsın. Bu çember A ve B noktalarından geçtiği için denklemi bazı r sabitleri için

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - rz(x + y + z) = 0 \quad (3.60)$$

biçimindedir. Bu çember AC doğrusuna A noktasında teğet olduğu için bu denklemde  $y = 0$  değeri yerine konulursa denklem

$$z^2 = 0 \quad (3.61)$$

halini alır. Buradan  $r = b^2$  bulunur ve çemberin denklemi

$$C_{AAB} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - b^2 z(x + y + z) = 0 \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$C_{BBC} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - c^2 x(x + y + z) = 0 \quad (3.63)$$

ve

$$C_{CCA} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - a^2 y(x + y + z) = 0 \quad (3.64)$$

çemberleri elde edilir. Bu üç çemberin kesişim noktası

$$\Omega = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} \quad (3.65)$$

noktasıdır[2, s. 80-81]. Bu noktaya ABC referans üçgeninin birinci Brocard noktası denir. Bu nokta

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA \quad (3.66)$$

eşitliğini sağlar[9].

Tersine olarak  $C_{ABB}$ ,  $C_{BCC}$  ve  $C_{CAA}$  çemberlerinin denklemleri sırasıyla

$$C_{ABB} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - b^2 x(x + y + z) = 0, \quad (3.67)$$

$$C_{BCC} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - c^2 y(x + y + z) = 0 \quad (3.68)$$

ve

$$C_{CAA} : a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - a^2 z(x + y + z) = 0 \quad (3.69)$$

şeklindedir ve bu çemberlerin kesişim noktası

$$\Omega' = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} \quad (3.70)$$

noktasıdır[2, s. 81]. Bu nokta ABC referans üçgeninin ikinci Brocard noktasıdır ve

$$\angle \Omega' AC = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' BA \quad (3.71)$$

eşitliğini sağlar[9]. Bu iki Brocard noktası birbirinin izogonal eşleniğidir. O halde

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \angle \Omega' AC = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' BA \quad (3.72)$$

olur. Bu ortak açı değerine ABC referans üçgeninin Brocard açısı denir ve  $\omega$  ile gösterilir[2, s. 81].

### 3.1.14. Conway notasyonundan yararlanılarak elde edilen üçüncü Brocard noktası

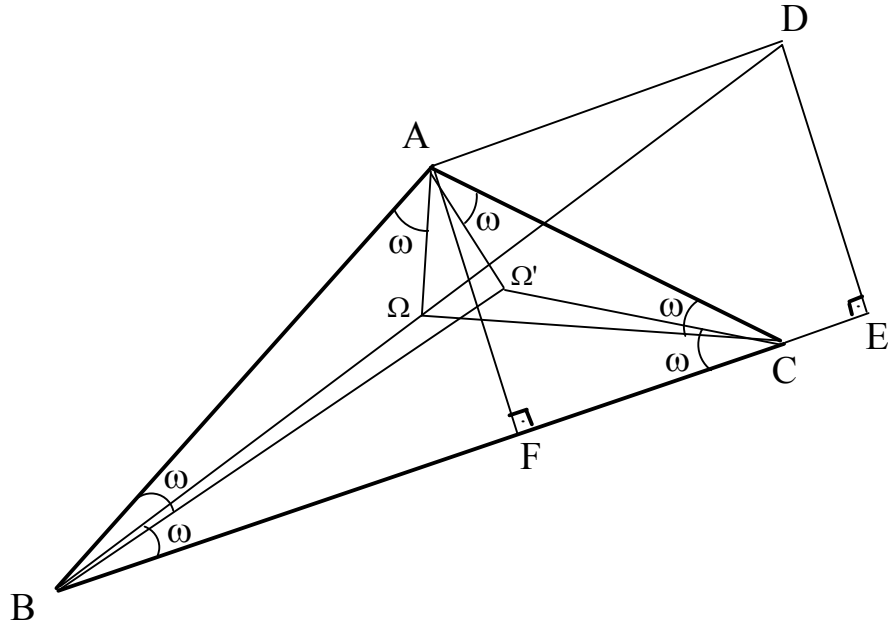
A noktasından BC kenarına paralel bir doğru çizilsin ve bu doğru ile B $\Omega$  doğrusu D noktasında kesişsin. A ve D noktalarından BC kenarına inilen dik doğrular bu kenarı sırasıyla F ve E noktalarında kessin(Şekil 3.4). Buna göre

$$\cot \omega = \frac{|BE|}{|ED|} = \frac{|BF| + |FC| + |CE|}{|FA|} \quad (3.73)$$

dır. Bununla birlikte  $|FA| = |ED|$  olduğundan

$$\cot \omega = \frac{|BF|}{|FA|} + \frac{|FC|}{|FA|} + \frac{|CE|}{|ED|} = \cot A + \cot B + \cot C \quad (3.74)$$

olur[10, s. 61].



Şekil 3.4: ABC referans üçgeninin Brocard açısı ile birinci ve ikinci Brocard noktası

Buna göre bölüm 2’ de bahsedilen Conway notasyonunun bazı özel durumları

$$\begin{aligned}
 S_A &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\
 &= S_\omega - a^2,
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
 S_B &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \\
 &= S_\omega - b^2,
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
 S_C &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\
 &= S_\omega - c^2
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

olarak bulunur[11].  $B\Omega$  ve  $C\Omega'$  doğrularının kesişim noktası  $A_{-\omega}$  olsun. Benzer şekilde

$$B_{-\omega} = C\Omega \cap A\Omega' \text{ ve } C_{-\omega} = A\Omega \cap B\Omega' \tag{3.78}$$

noktaları verilsin. Köşe noktaları  $A_{-\omega}, B_{-\omega}, C_{-\omega}$  olan  $A_{-\omega}B_{-\omega}C_{-\omega}$  üçgeni

$$K(-\omega) = \frac{1}{S_A - S_\omega} : \frac{1}{S_B - S_\omega} : \frac{1}{S_C - S_\omega} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} \quad (3.79)$$

noktasından ABC referans üçgenine perspektiftir[2, s. 81].  $K(-\omega)$  noktası üçüncü Brocard noktası olarak bilinir[9].

### 3.1.15. (A(a),B(b),C(c)) çember üçlüsü

İlk olarak ABC referans üçgeninin köşe noktası A merkezli a yarıçaplı A(a) çemberi ele alınsın. Bu çember AB doğrusunu  $c+a:-a:0$  ve  $c-a:a:0$  noktalarında keser. Aynı şekilde AC kenarını  $a+b:0:-a$  ve  $b-a:0:a$  noktalarında keser. O zaman bu çemberin denklemi

$$C_a : a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(a^2x + (a^2 - c^2)y + (a^2 - b^2)z) = 0 \quad (3.80)$$

dır. Benzer şekilde B(b) ve C(c) çemberlerinin denklemleri

$$C_b = a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)((b^2 - c^2)x + b^2y + (b^2 - a^2)z) = 0 \quad (3.81)$$

ve

$$C_c = a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)((c^2 - b^2)x + (c^2 - a^2)y + c^2z) = 0 \quad (3.82)$$

olur. Bu çemberler ABC referans üçgeninin Longchamps çemberleri olarak adlandırılır. Bu çemberlerin kuvvet merkezi,

$$a^2x + (a^2 - c^2)y + (a^2 - b^2)z = (b^2 - c^2)x + b^2y + (b^2 - a^2)z = (c^2 - b^2)x + (c^2 - a^2)y + c^2z \quad (3.83)$$

denkleminin çözüm kümesi olan  $x:y:z$  noktasıdır. Bu noktanın koordinatlarını elde etmek için (3.83)' te ilk iki ifade toplanıp, ikinci ifade ile üçüncü ifadenin toplamına eşitlenirse

$$S_A (y + z) = S_C (x + y) \quad (3.84)$$

elde edilir. Benzer şekilde ilk iki ifade toplanıp, birinci ifade ile üçüncü ifadenin toplamına eşitlenirse

$$S_C (x + y) = S_B (z + x) \quad (3.85)$$

elde edilir. Buradan

$$y + z : z + x : x + y = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} = S_{BC} : S_{CA} : S_{AB} \quad (3.86)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa kuvvet merkezi

$$x : y : z = S_{CA} + S_{AB} - S_{BC} : S_{AB} + S_{BC} - S_{CA} : S_{BC} + S_{CA} - S_{AB} \quad (3.87)$$

olur. Bu nokta ABC referans üçgeninin Longchamps noktası olarak adlandırılır. Aynı zamanda bu nokta ABC referans üçgeninin çevrelçemberinin merkezine göre yükseklik merkezinin yansımasıdır. Yani,

$$L = 2.O - H \quad (3.88)$$

dır[2, s. 83].

### 3.1.15.1. Steiner noktası

ABC referans üçgeninin çevrelçemberi ile denklemi (3.80) ile verilen  $C_a$  çemberinin kuvvet eksenini



$$a^2x + (a^2 - c^2)y + (a^2 - b^2)z = 0 \quad (3.89)$$

doğrusudur. BC kenar doğrusu ile bu doğrunun kesişim noktası

$$A' = 0 : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2} \quad (3.90)$$

noktasıdır. Benzer şekilde  $C_b$  çemberinin kuvvet eksenini CA kenarını

$$B' = \frac{1}{b^2 - c^2} : 0 : \frac{1}{a^2 - b^2} \quad (3.91)$$

noktasında ve  $C_c$  çemberinin kuvvet eksenini AB kenarını

$$C' = \frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : 0 \quad (3.92)$$

noktasında keser. Bu  $A', B', C'$  noktaları, koordinatları

$$\frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2} \quad (3.93)$$

olan noktanın izleridir. Bu nokta çevrelçember üzerindedir ve Steiner noktası olarak adlandırılır[2, s. 84].

### 3.1.16. Lucas çemberleri

ABC referans üçgeninin BC kenarı üzerine dıştan yerleştirilen CBXY karesinin X ve Y köşeleri ABC referans üçgeninin A köşesine birleştirilsin. AX ve AY doğrularının BC kenar doğrusu ile kesişim noktaları sırasıyla K ve L olsun. K noktasından geçen ve BC kenarına dik olan doğru AB kenarını N noktasında kessin. L noktasından geçen ve BC kenarına dik olan doğru AC kenarını M noktasında



ve

$$C_c : a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{c^2}{c^2 + S}(x + y + z)(b^2x + a^2y) = 0 \quad (3.96)$$

dir. Bu üç çemberin kuvvet merkezinin koordinatları

$$\frac{a^2(c^2y + b^2z)}{a^2 + S} = \frac{b^2(a^2z + c^2x)}{b^2 + S} = \frac{c^2(b^2x + a^2y)}{c^2 + S} \quad (3.97)$$

denklemlerini sağlar. Bu eşitlikteki ifadeler  $a^2b^2c^2$ 'ye bölünürse

$$\frac{\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}}{a^2 + S} = \frac{\frac{z}{c^2} + \frac{x}{a^2}}{b^2 + S} = \frac{\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}}{c^2 + S} \quad (3.98)$$

olur. Burada

$$\frac{\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}}{a^2 + S} = \frac{\frac{z}{c^2} + \frac{x}{a^2}}{b^2 + S} = \frac{\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}}{c^2 + S} = k, \quad (k \in \mathbf{R}) \quad (3.99)$$

veya

$$\frac{\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}}{a^2 + S} = k, \quad \frac{\frac{z}{c^2} + \frac{x}{a^2}}{b^2 + S} = k, \quad \frac{\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}}{c^2 + S} = k, \quad (k \in \mathbf{R}) \quad (3.100)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = k(a^2 + S), \quad \frac{z}{c^2} + \frac{x}{a^2} = k(b^2 + S), \quad \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = k(c^2 + S) \quad (3.101)$$

veya

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} : \frac{z}{c^2} + \frac{x}{a^2} : \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = k(a^2 + S) : k(b^2 + S) : k(c^2 + S) \quad (3.102)$$

olur. Böylece

$$\frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2} = \frac{k}{2}(b^2 + c^2 - a^2 + S) : \frac{k}{2}(c^2 + a^2 - b^2 + S) : \frac{k}{2}(a^2 + b^2 - c^2 + S) \quad (3.103)$$

elde edilir ve buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa kuvvet merkezi,

$$x : y : z = a^2(2S_A + S) : b^2(2S_B + S) : c^2(2S_C + S) \quad (3.104)$$

olarak bulunur. Üç Lucas çemberi birbirine ikişer ikişer teğettir. Teğet noktaları sırasıyla

$$\begin{aligned} A' &= a^2 S_A : b^2(S_B + S) : c^2(S_C + S) \\ B' &= a^2(S_A + S) : b^2 S_B : c^2(S_C + S) \\ C' &= a^2(S_A + S) : b^2(S_B + S) : c^2 S_C \end{aligned} \quad (3.105)$$

dir[2, s. 93-94].

## 3.2. ABC Referans Üçgeninin Kenarları Üzerine Yerleştirilen Dikdörtgenler ile Elde Edilen Perspektiviter

### 3.2.1. ABC referans üçgeninin kenarlarına yerleştirilen dikdörtgenler

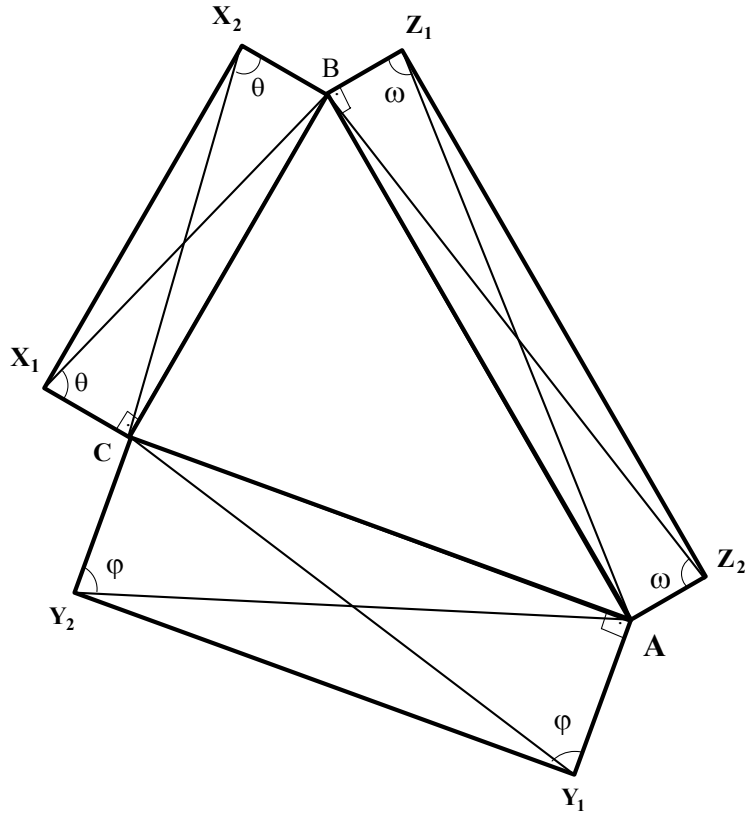
ABC referans üçgeni alınsın(Şekil 3.6). Bu üçgenin BC kenarının üstünde  $\angle CX_1B = \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) olacak şekilde bir dikdörtgenin bir köşe noktası  $X_1$  olarak alınrsa Conway formülünden  $X_1$  noktasının koordinatlarının

$$-a^2 : S_C : S_B + S_0 \quad (3.106)$$

olduğu görülür. Böylece  $[BX_1]$  doğru parçası köşegen olacak şekilde  $BCX_1X_2$  dikdörtgeni çizilirse  $X_2$  noktasının koordinatları da

$$-a^2 : S_C + S_\theta : S_B \quad (3.107)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.6: ABC referans üçgeninin kenarları üzerine yerleştirilen dikdörtgenler

Benzer şekilde, ABC referans üçgeninin AC kenarının alt tarafında ve AB kenarının üst tarafında sırasıyla  $\angle AY_1C = \varphi$  ve  $\angle BZ_1A = \omega$  ( $0 \leq \varphi, \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ) olacak şekilde  $Y_1$  ve  $Z_1$  noktaları alınır ve  $[CY_1]$  ve  $[AZ_1]$  doğru parçaları köşegenler olacak şekilde  $CAY_1Y_2$  ve  $ABZ_1Z_2$  dikdörtgenleri çizilirse

$$\begin{aligned}
Y_1 &= S_C + S_\varphi : -b^2 : S_A, \\
Y_2 &= S_C : -b^2 : S_A + S_\varphi, \\
Z_1 &= S_B : S_A + S_\omega : -c^2 \\
Z_2 &= S_B + S_\omega : S_A : -c^2
\end{aligned} \tag{3.108}$$

elde edilir.

Teorem(Desargues Teoremi) 3.2.1.1: İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaş ise bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudadır[13].

Tanım 3.2.1.1: ABC ve A'B'C' herhangi iki üçgen olsun. P,A,A'; P,B,B'; P,C,C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak şekilde bir P noktası varsa bu üçgenlere P noktasından “perspektif” ve buradaki P noktasına da “perspektiflik merkezi” denir[4, s. 51].

Desargues teoremine göre  $BC \cap B'C'$ ,  $CA \cap C'A'$ ,  $AB \cap A'B'$  noktaları doğrudadır ve bu noktalardan geçen doğru perspektiflik eksenidir[3,syf.51]. Eğer BC ve B'C' kenar doğruları paralel ve diğer karşılıklı iki kenar çifti de paralel ise bu üçgenler sadece perspektif değil aynı zamanda homotetiktir ve bu durumda perspektiflik merkezi homoteti merkezi olarak adlandırılır. Burada perspektiflik eksenini sonsuzdaki doğrudur[4, s. 51-52].

### 3.2.2. ABC referans üçgeninin köşe noktalarına bağlı $AY_1Z_2, BZ_1X_2$ ve $CX_1Y_2$ üçgenlerinin kütle merkezleri

Yukarıda tanımlanan  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2$  ve  $Z_2$  noktalarının oluşturduğu  $AY_1Z_2, BZ_1X_2$  ve  $CX_1Y_2$  üçgenlerinin kütle merkezleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
G_1 &= S_C + S_B + S_\varphi + S_\omega + 1 : -S_C : -S_B \\
G_2 &= -S_C : S_A + S_\omega + S_C + S_\theta + 1 : -S_A \\
G_3 &= -S_B : -S_A : S_A + S_B + S_\theta + S_\varphi + 1
\end{aligned} \tag{3.109}$$

olur(Şekil 3.7). Şimdi daha önce [8]' de bir sonuç olarak ifade edilen  $G_1G_2G_3$  üçgeni ABC referans üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektifliği kanıtlanacaktır.

**Teorem 3.2.2.1:**  $G_1G_2G_3$  üçgeni ABC referans üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektiftir.

**Kanıt:**  $Y_1Z_2A$  üçgeninin kütle merkezi

$$Y_1 = S_C + S_\varphi : -b^2 : S_A, Z_2 = S_B + S_\omega : S_A : -c^2, A = 1 : 0 : 0 \quad (3.110)$$

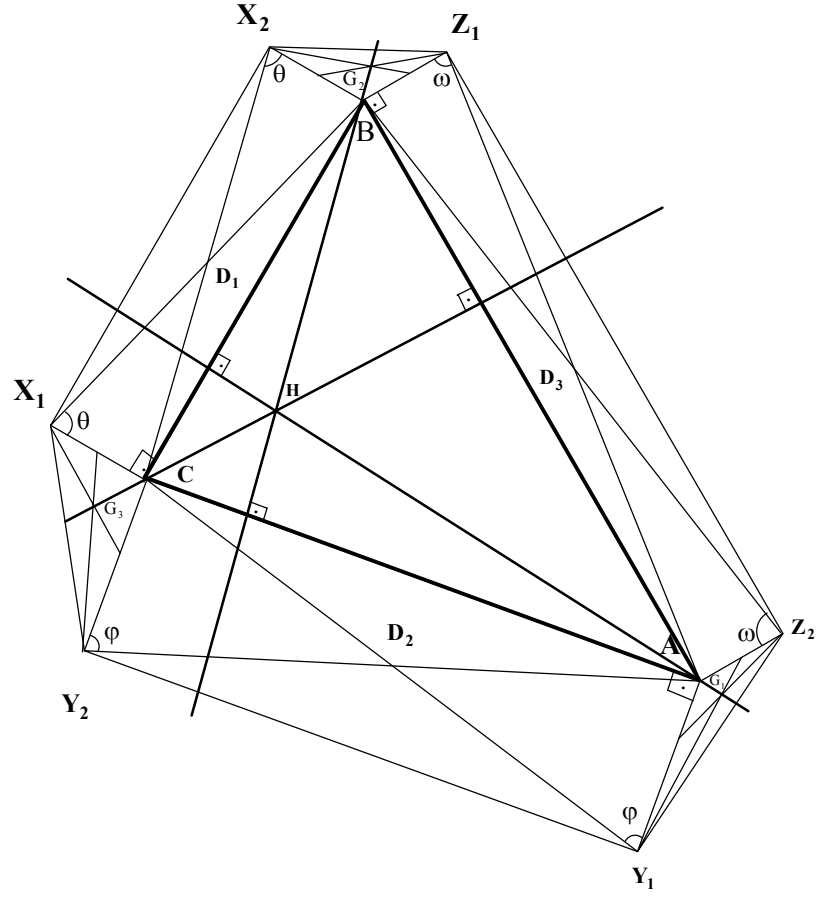
olduğundan

$$Y_1 + Z_2 + A = S_C + S_\varphi + S_B + S_\omega + 1 : -b^2 + S_A : S_A - c^2 \quad (3.111)$$

ve buradan

$$G_1 = S_C + S_B + S_\varphi + S_\omega + 1 : -S_C : -S_B \quad (3.112)$$

bulunur.



Şekil 3.7:  $G_1G_2G_3$  üçgeni  $ABC$  üçgeninin perspektiflik merkezi

Benzer şekilde  $Z_1X_2B$  üçgeninin kütle merkezi

$$Z_1 = S_B : S_A + S_\omega : -c^2, X_2 = -a^2 : S_C + S_\theta : S_B, B = 0 : 1 : 0 \quad (3.113)$$

olduğundan

$$G_2 = -S_C : S_A + S_\omega + S_C + S_\theta + 1 : -S_A \quad (3.114)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $X_1Y_2C$  üçgeninin kütle merkezinin koordinatları

$$X_1 = -a^2 : S_C : S_B + S_\theta, Y_2 = S_C : -b^2 : S_A + S_\phi, C = 0 : 0 : 1 \quad (3.115)$$



olduğundan

$$G_3 = -S_B : -S_A : S_A + S_B + S_\theta + S_\varphi + 1 \quad (3.116)$$

elde edilir.

$G_1G_2G_3$  üçgeni ile ABC referans üçgeninin perspektif olup olmadığını incelemek için  $G_1A$ ,  $G_2B$ ,  $G_3C$  doğrularının denklemleri bulunur.  $G_1A$  doğrusunun denklemi,  $G_1 = S_C + S_B + S_\varphi + S_\omega + 1 : -S_C : -S_B$ ,  $A = 1 : 0 : 0$  noktalarından geçen doğru denkleminde

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ S_C + S_B + S_\varphi + S_\omega + 1 & -S_C & -S_B \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.117)$$

determinantından gerekli düzenlemeler yapılarak

$$-S_B y + S_C z = 0 \quad (3.118)$$

olarak bulunur.

$G_2B$  doğrusunun denklemi,  $G_2 = -S_C : S_A + S_C + S_\omega + S_\theta + 1 : -S_A$ ,  $B = 0 : 1 : 0$

olduğundan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -S_C & S_A + S_C + S_\omega + S_\theta + 1 & -S_A \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.119)$$

determinantında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S_A x - S_C z = 0 \quad (3.120)$$

ve  $G_3C$  doğrusunun denklemi,  $G_3 = -S_B : -S_A : S_A + S_B + S_\theta + S_\varphi + 1$ ,  $C = 0 : 0 : 1$  olduğundan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -S_B & -S_A & S_A + S_B + S_\theta + S_\varphi + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.121)$$

determinantında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-S_A x + S_B y = 0 \quad (3.122)$$

olur. Buradan

$$\begin{vmatrix} 0 & -S_B & S_C \\ S_A & 0 & -S_C \\ -S_A & S_B & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.123)$$

olduğundan  $G_1G_2G_3$  üçgeni ABC referans üçgenine perspektiftir. Bu üçgenlerin perspektivite merkezi ise

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ S_A & 0 & -S_C \\ -S_A & S_B & 0 \end{vmatrix} = S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \quad (3.124)$$

veya gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{1}{\text{Scot A}} : \frac{1}{\text{Scot B}} : \frac{1}{\text{Scot C}} \quad (3.125)$$

olarak elde edilir. Bu nokta ise ABC referans üçgeninin yükseklik merkezi  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  noktasıdır.

Sonuç 3.2.2.1:  $A_1B_1C_1$  üçgeni  $G_1G_2G_3$  üçgenine  $H = \tan A : \tan B : \tan C$  yükseklik merkezinden perspektiftir.

Sonuç 3.2.2.2:  $\Delta$ , ABC referans üçgeninin alanı olmak üzere  $AY_1Z_2, BZ_1X_2,$  ve  $CX_1Y_2$  üçgenlerinin alanları sırasıyla

$$\frac{S^2\Delta}{S_\varphi S_\omega}, \frac{S^2\Delta}{S_\omega S_\theta}, \frac{S^2\Delta}{S_\theta S_\varphi} \quad (3.126)$$

şeklindedir. Bu durumda

$$S_\varphi S_\omega \Delta_{AY_1Z_2} = S_\omega S_\theta \Delta_{BZ_1X_2} = S_\theta S_\varphi \Delta_{CX_1Y_2} \quad (3.127)$$

eşitliği yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa bu eşitlik

$$\frac{\Delta_{AY_1Z_2}}{S_\theta^2 S_\varphi S_\omega} = \frac{\Delta_{BZ_1X_2}}{S_\theta S_\varphi^2 S_\omega} = \frac{\Delta_{CX_1Y_2}}{S_\theta S_\varphi S_\omega^2} \quad (3.128)$$

şeklini alır. Daha sonra sadeleştirme yapılarak

$$\frac{\Delta_{AY_1Z_2}}{S_\theta} = \frac{\Delta_{BZ_1X_2}}{S_\varphi} = \frac{\Delta_{CX_1Y_2}}{S_\omega} \quad (3.129)$$

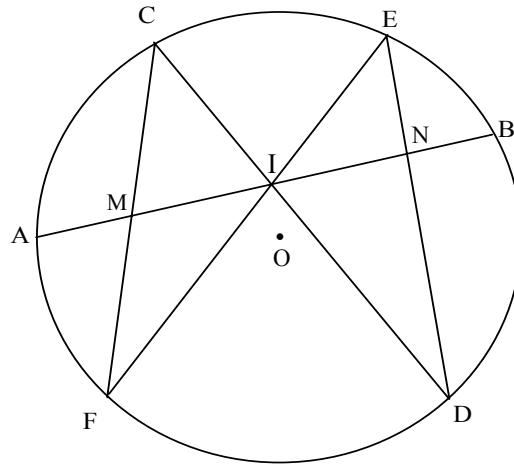
olur.

## BÖLÜM 4. KELEBEK TEOREMİ

Düzlem Geometride ilgi çekici pek çok teoremden biri kelebek teoremidir. Bu teorem ilk kez 1815 yılında Gentleman's Diary' de bir problem olarak yayınlanmıştır[14]. O zamandan beri pek çok matematik hayranını etkilemiştir. Bunların bir kısmı bu teorem için basit ve şık kanıtlar verirken diğerleri çeşitli genellemeler elde etmiştir[15].

### 4.1. Kelebek Teoremi ve Bu Teoremin Bazı Kanıtları

Bankoff, kelebek teoremini çemberler ve bazı değişik durumlar için incelemiştir. Klasik kelebek teoremi şu şekildedir: Bir çemberin herhangi bir AB kirişi alınsın. Bu kirişin orta noktası I olsun. I noktasından geçen farklı CD ve EF kirişleri alınsın. CF ve ED kirişlerinin AB kirişini kestiği noktalar sırasıyla M ve N olsun(Şekil 4.1). Bu durumda  $|MI| = |IN|$  eşitliği geçerlidir[15].



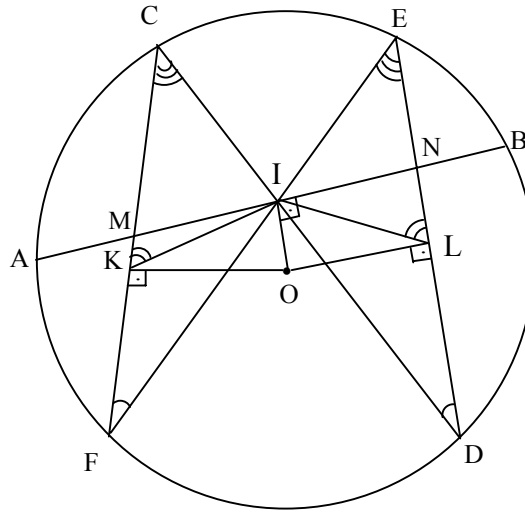
Şekil 4.1: Bir çemberin herhangi bir kirişinin orta noktasından geçen farklı iki kirişin oluşturduğu kelebek



açılarının ölçüleri eşittir ve MIC ve ING üçgenleri eşit.(açı-kenar-açı) Buradan  $|MI| = |IN|$  olur[16].

1815’ te Gentleman’s Diary’ de 39. sayfada kelebek teoremi için iki kanıt verilmiştir. Bunlardan biri Horner tarafından diğeri Richard Taylor tarafından verilmiştir. Şimdi Horner’ in kanıtı verilecektir.

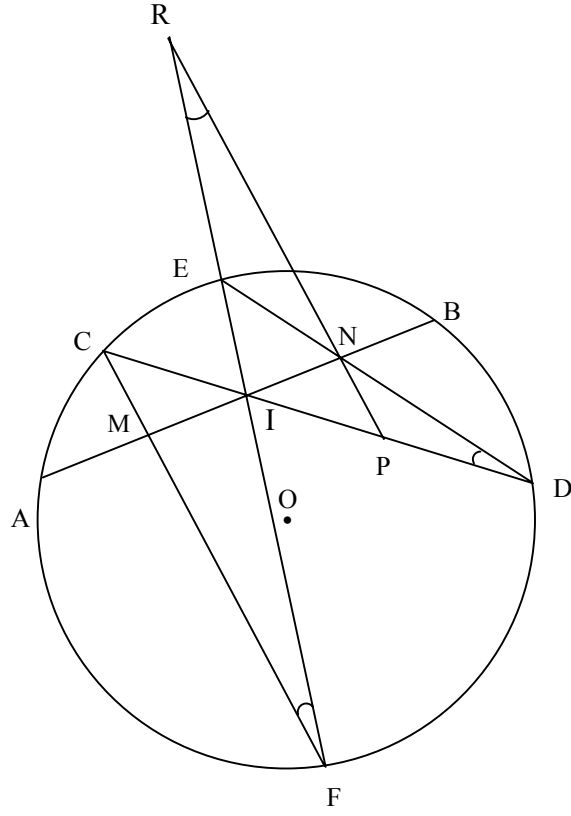
Kanıt 2: K ve L noktaları CF ve ED kirişlerinin orta noktaları olsun(Şekil 4.3). IK ve IL doğruları sırasıyla CFI ve EDI benzer üçgenlerinin(açı-açı-açı) kenarortayları olduğundan ICK ve IEL üçgenleri benzerdir(kenar-açı-kenar) ve buradan  $\angle MKI = \angle NLI$  olur. KOIM ve IOLN dörtgenlerinin her biri çemberseldir ve böylece  $\angle NLI = \angle NOI$  ve  $\angle MKI = \angle MOI$  elde edilir. Buradan  $\angle MOI = \angle ION$  olur. Sonuç olarak IOM ve ION dik üçgenleri eşit(açı-kenar-açı) ve buradan  $|MI| = |IN|$  elde edilir(Şekil 4.3.)[14].



Şekil 4.3: Birbirini kesmeyen CF ve ED kirişleri ile oluşturulan kelebek

Klasik kelebek teoremine verilen ilk kanıtlardan biri Miles Bland’ ın “Geometrical Problems” adlı kitabında yayınlanan kanıttır. Şimdi bu kanıt verilecektir.

Kanıt 3: N noktasından CF kirişine çizilen paralel doğru CD doğrusunu P noktasında, EF doğrusunu R noktasında kessin(Şekil 4.4)[17].



Şekil 4.4: Bir çemberin kirişlerinden birine çizilen paralel doğru

$\angle NRE$ ,  $\angle IFM$  ve  $\angle NDP$  açılarının ölçüleri eşit olduğundan  $REN$  ve  $DPN$  üçgenleri eş açılı ve

$$\frac{|RN|}{|NE|} = \frac{|ND|}{|NP|} \quad (4.1)$$

oranı vardır. Böylece  $|AI| = |IB|$  olduğundan

$$|NE||ND| = |RN||NP| = |AN||NB| = (|AI| + |IN|)(|AI| - |IN|) \quad (4.2)$$

olur. Benzer şekilde  $IMD$  ve  $INP$  üçgenleri eş açılı ve  $INR$  ve  $IMF$  üçgenleri de eş açılıdır. Buradan,

$$\frac{|PN|}{|NI|} = \frac{|CM|}{|MI|} \quad (4.3)$$

ve

$$\frac{|RN|}{|NI|} = \frac{|FM|}{|MI|} \quad (4.4)$$

olur. Bu durumda

$$\frac{|PN||RN|}{|NI|^2} = \frac{|CM||FM|}{|MI|^2} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.2) eşitliğinden

$$|PN||RN| = |AI|^2 - |NI|^2 \text{ ve } |CM||FM| = |AI|^2 - |MI|^2 \quad (4.6)$$

olduğundan

$$\frac{|AI|^2 - |NI|^2}{|NI|^2} = \frac{|AI|^2 - |MI|^2}{|MI|^2} \quad (4.7)$$

olur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$|MI| = |NI| \quad (4.8)$$

elde edilir[17].

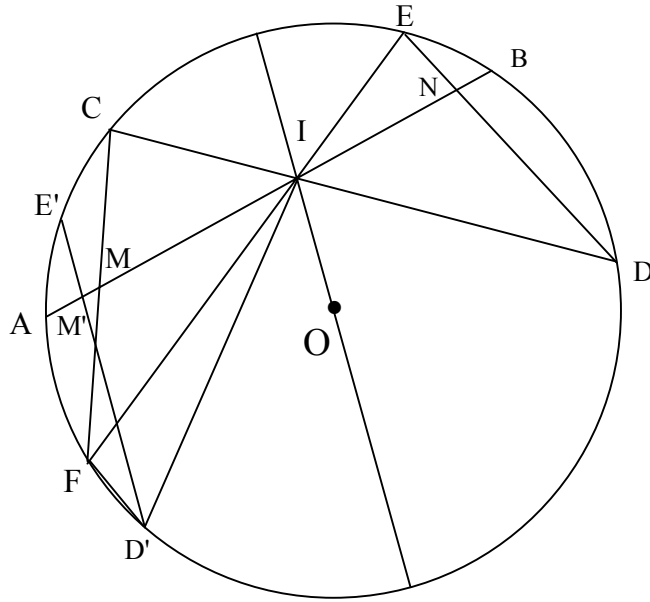
Notasyonlardaki bazı farklılıklar hariç bu kanıtın aynısı şubat 1944' te American Mathematical Monthly' de E571 probleminin ikinci kanıtı olarak W. E. Buker



tarafından verilmiştir[18]. Ayrıca Coxeter ve Greitzer tarafından da 'Geometry Revisited' de verilmiştir[19].

Yukarıdaki 4 numaralı kanıtta bahsedilen Buker' in 'American Mathematical Monthly' de yayınlanan kanıtının olduğu kısımda Joseph Rosenbaum' un kanıtı da yayınlanmıştır. Şimdi bu kanıt verilecektir.

Kanıt 4: ED kirişinin I noktasından geçen çapa göre yansıması E'D' kirişi olsun Bu kiriş AB kirişini bir M' noktasında kessin. M ile M' noktasının çakışık olduğu kanıtlanacaktır(Şekil 4.5)[18].

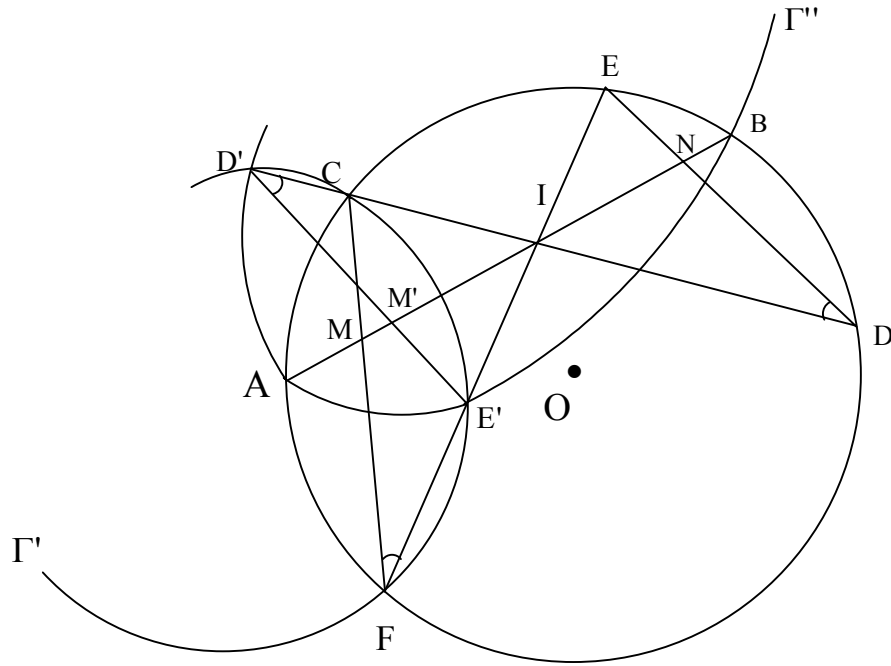


Şekil 4.5: Bir kirişin AB kirişinin orta noktasından geçen çapa göre yansıması

Rosenbaum bu kanıtı Johnson' un[20] yaptığı gibi yönlü açıları kullanarak vermiştir. Ters açılar ve simetriden dolayı  $\angle CIB$ ,  $\angle DIA$  ve  $\angle BID'$  açılarının ölçüleri eşittir. Ayrıca  $\angle CFD'$  ve  $\angle CIB$  açılarının ölçüleri eşittir. Böylece  $\angle CFD' = \angle BID'$  olur. Buradan I, M, F, D' noktaları çembersel ve  $\angle ID'M$ ,  $\angle IFM$ ,  $\angle EFC$ ,  $\angle EDI$  ve  $\angle ID'E'$  açılarının ölçüleri eşittir. Böylece, M noktası E'D' doğrusu üzerindedir ve N noktasının I noktasına göre yansımasıdır.

Mannish Charosh[21], kuvvet eksenlerini içeren bir yaklaşım önermiştir. Şimdi bu kanıt verilecektir.

Kanıt 5: AB doğrusu üzerinde  $|M'I| = |IN|$  olacak şekilde bir  $M'$  noktası alınsın. Buna göre CD kirişinin  $M'$  noktasından geçtiği ve böylece M ile  $M'$  noktalarının çakışık olduğu kanıtlanacaktır(Şekil 4.6).



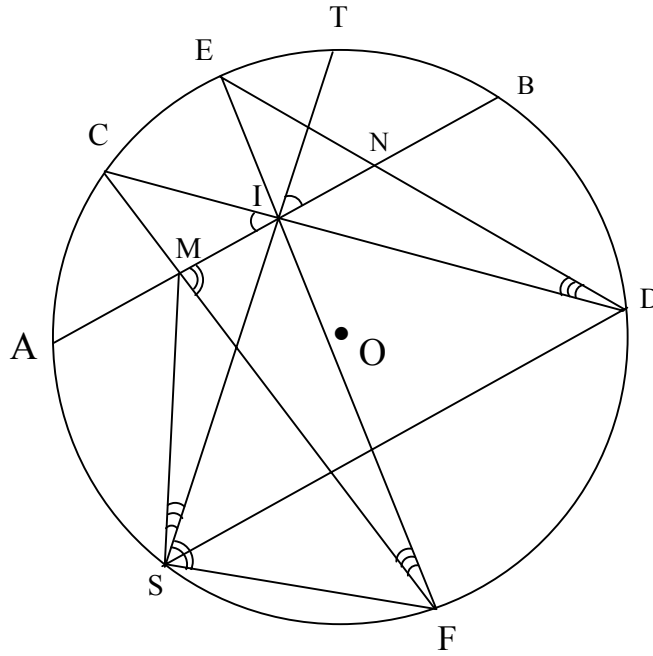
Şekil 4.6: Eş üçgenler

Bunu kanıtlamak için  $|IE'| = |IE|$  olacak şekilde EF doğrusu üzerinde bir  $E'$  noktası ve  $|ID| = |ID'|$  olacak şekilde CD doğrusu üzerinde bir  $D'$  noktası alınsın. Bu durumda  $E'D'I$  ve  $IDE$  üçgenleri eş üçgenlerdir.(kenar-açı-kenar) Bu eş üçgenlerin içindeki  $M'D'I$  ve  $NDI$  üçgenleri de eştir.( kenar-açı-kenar)  $E'D'I$  ve  $IDE$  üçgenlerinin eş üçgenler olması dolayısıyla  $\angle CFE, \angle CDE, \angle E'D'I$  açılarının ölçüleri eşit olduğundan  $CD'FE'$  çembersel bir dörtgendir. Bu dörtgeni çevreleyen çember  $\Gamma'$  ile gösterilsin. ( $\Gamma$ ) çemberinde A, E, B, D noktaları bir çember üzerindedir. Böylece, B,  $E'$ , A,  $D'$  noktaları I noktasına göre A, E, B, D noktalarının simetrikleridir ve bu noktalar da bir çember üzerindedir. Bu çember  $\Gamma''$  ile gösterilsin. ( $\Gamma$ ), ( $\Gamma'$ ) ve ( $\Gamma''$ ) çemberlerinin kuvvet eksenleri olan AB,  $D'E'$  ve CF

doğruları noktadaştır. Sonuç olarak AB ve D'E' doğruları M noktasından geçtiği için PS doğrusu da M noktasından geçer ve böylece  $|MI| = |IN|$  olur[21].

1955 yılı ocak ayında School Science and Mathematics' te Eilberg' in bir kanıtı yayınlanmıştır[22]. Şimdi bu kanıt verilecektir.

Kanıt 6: D noktasından AB kirişine paralel bir doğru çizilsin. Bu doğru çemberi birS noktasında kessin. SI doğrusunun çemberi kestiği diğer nokta T ile gösterilsin. (Şekil 4.7).



Şekil 4.7: Paralel kirişler ve eşit yaylar

Paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılardan  $\angle AIC = \angle BIT$  dir. Buradan AC ile BT yaylarının ölçüsü aynıdır. Buna göre  $\angle ISF$  açısının ölçüsü AC, BD, DF yaylarının ölçüleri toplamının yarısına eşittir ve IMF açısı da aynı yaylar ile ölçülür. Böylece  $\angle IMF = \angle ISF$  olur ve MIFS dörtgeni bir çember tarafından çevrelenmektedir. Buradan

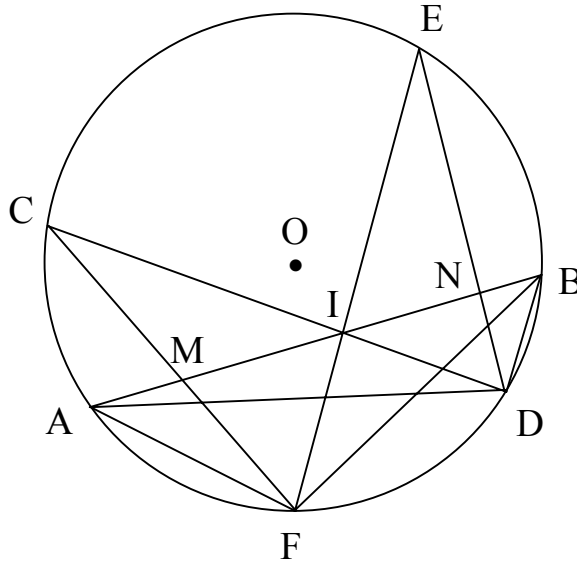
$$\angle NDI = \angle MFI = \angle MSI \quad (4.9)$$

olur. Ayrıca  $|IS| = |ID|$  ve  $\angle AIS = \angle NID$  olduğundan açı-kenar-açı eşlik teoreminden ISM ve IDN üçgenleri eştir. Buna göre  $|MI| = |NI|$  elde edilir[22].

Doğrudaş X, Y, Z, T noktaları verilsin. Bu dört noktanın çifte oranı  $\frac{ZX}{ZY} / \frac{TX}{TY}$  veya  $\frac{ZX.TY}{TX.ZY}$  ile ifade edilir ve bu oran  $[X, Y, Z, T]$  veya  $\{XY, ZT\}$  ile gösterilir[23].

Şimdi klasik kelebek teoreminin trigonometrik bir kanıtı verilecektir.

Kanıt 8:



Şekil 4.8: A, M, I, B noktalarının çifte oranı

Bir üçgenin iç açılarının sinüsleri ile o açılar karşısındaki kenarların uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade eden sinüs teoreminden

$$\frac{IA}{IM} = \frac{IA}{AM} / \frac{IM}{AM} = \frac{\sin \angle AFI}{\sin \angle IAF} / \frac{\sin \angle MFI}{\sin \angle IMF} \quad (4.10)$$

yazılabilir. Benzer eşitlik  $\frac{BA}{BM}$  oranı için de yazılarak

$$[A, M, I, B] = \frac{\sin \angle AFE}{\sin \angle EFC} / \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle BFC} \quad (4.11)$$

ve

$$[A, I, N, B] = \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle EDC} / \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BDC} \quad (4.12)$$

elde edilir. Aynı yayı gören açılar eş olduğundan(Şekil 4.8)  $[A, M, I, B] = [A, I, N, B]$  olur ve bu eşitlik

$$\frac{AI \cdot BM}{IM \cdot AB} = \frac{AN \cdot BI}{NI \cdot AB} \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir.  $AI = IB$  olduğundan

$$MB \cdot IN = MI \cdot AN \quad (4.14)$$

veya

$$(MI + IB) \cdot IN = (AI + IN) \cdot MI \quad (4.15)$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$MB \cdot IN = AN \cdot MI \quad (4.16)$$

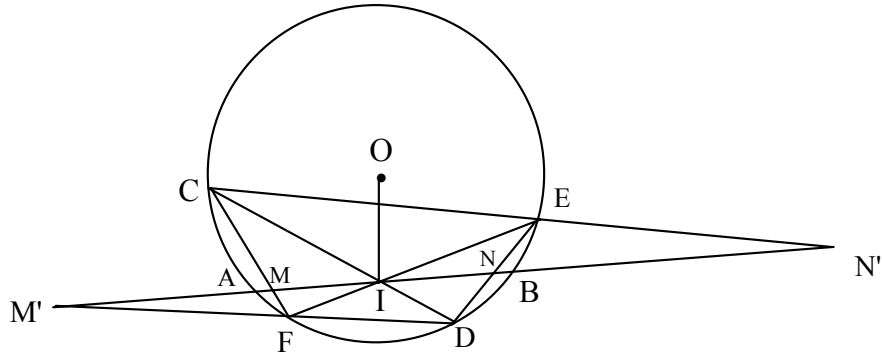
veya

$$IB \cdot IN = AI \cdot MI \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece  $AI = IB$  olduğundan  $MI = IN$  olur[24]. Bu kanıt Dixon Jones' un makalesinde de vardır[25].

K. Satyanarayana' nın bir makalesinde kelebek teoreminin kanıtı analitik geometri ile verilmiştir[26]. Şimdi kanıt 9' da bu kanıt verilecektir.

Kanıt 9: DF ve CE doğrularının AB doğrusu ile kesişim noktaları sırasıyla M' ve N' olsun(Şekil 4.9). Orijini I noktası, x-ekseni AB doğrusu ve y-ekseni IO doğrusu olan bir dikdörtgensel koordinat sistemi ele alınsın[26].



Şekil 4.9: Dikdörtgensel koordinat sistemi

$\Gamma_1$  çemberinin merkezi  $O(0, d)$  noktası olsun. Eğer çemberin yarıçapı  $r$  ise denklemi

$$\Sigma_1 \equiv x^2 + (y - d)^2 - r^2 = 0 \quad (4.18)$$

dır. CD ve EF doğruları orijinden geçtiğinden bu doğrular denklemi

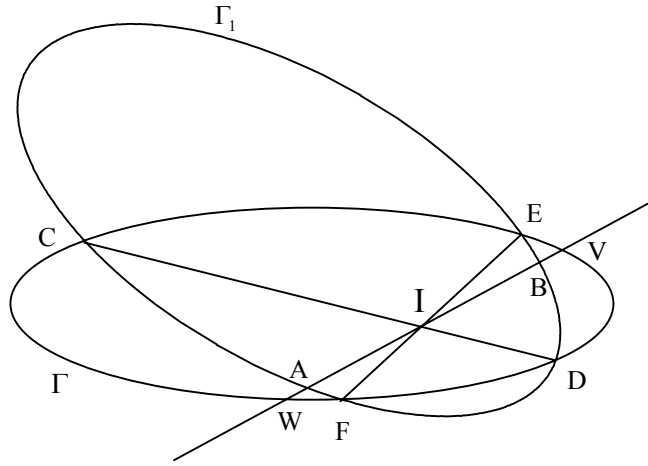
$$\Sigma_2 \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (4.19)$$

olan dejenere bir konik oluşturur. Bu konik  $\Gamma_2$  ile gösterilsin. Herhangi  $k, \ell \in \mathbb{R}$  sayıları için

$$\Sigma \equiv k\Sigma_1 + \ell\Sigma_2 = 0 \quad (4.20)$$

denklemleri  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  koniklerinin ortak noktalarından geçen bir koniktir. Yani,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  konikleri eğer C, D, E, F noktalarında kesişiyorsa bu noktalardan geçen her konik bu formda gösterilebilir[26].

$\Sigma = 0$  koniği AB doğrusunu V ve W noktalarında kessin(Şekil 4.10).



Şekil 4.10: Kesişen iki doğrunun oluşturduğu dejenere konik

AB doğrusunun denklemi  $y = 0$  olduğundan

$$\Sigma_1(x,0) = x^2 + d^2 - r^2 \text{ ve } \Sigma_2(x,0) = ax^2 \quad (4.21)$$

olur. Böylece V ve W noktalarının apsisi  $\Sigma(x,0) = 0$  denkleminin yani,

$$k(x^2 + d^2 - r^2) + \ell ax^2 = 0 \quad (4.22)$$

denkleminin kökleridir. Bu denklem birinci dereceden terim içermediğinden köklerinin toplamı sıfırdır. Böylece

$$\vec{IV} + \vec{IW} = 0 \quad (4.23)$$

ve

$$|VI| = |IW| \quad (4.24)$$

olur. Bu eşitlik C, D, E, F noktalarından geçen her konik için geçerlidir ve ED, CF doğru ikilisi böyle bir koniktir, dolayısıyla (4.24)' den

$$|MI| = |IN| \quad (4.25)$$

olur[26].

DF, CE doğru ikilisi de C, D, E, F noktalarından geçen bir koniktir. Eğer bu doğrular AB doğrusunu şekil 4.9' da görüldüğü gibi M' ve N' noktalarında keserse (4.24) eşitliğinden dolayı

$$|M'I| = |IN'| \quad (4.26)$$

elde edilir.

$\Gamma_1$ , denklemi

$$\Sigma_1 \equiv Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0 \quad (4.27)$$

olan herhangi bir düzgün konik olsun. Yukarıda kullanılan notasyon kullanılarak

$$\Sigma(x,0) = k(Ax^2 + 2Gx + C) + \ell ax^2 = 0 \quad (4.28)$$

elde edilir. A ve B noktalarının koordinatları sırasıyla  $(-\alpha,0)$  ve  $(\alpha,0)$  ise

$$\Sigma_1(-\alpha,0) = \Sigma_1(\alpha,0) = 0 \quad (4.29)$$

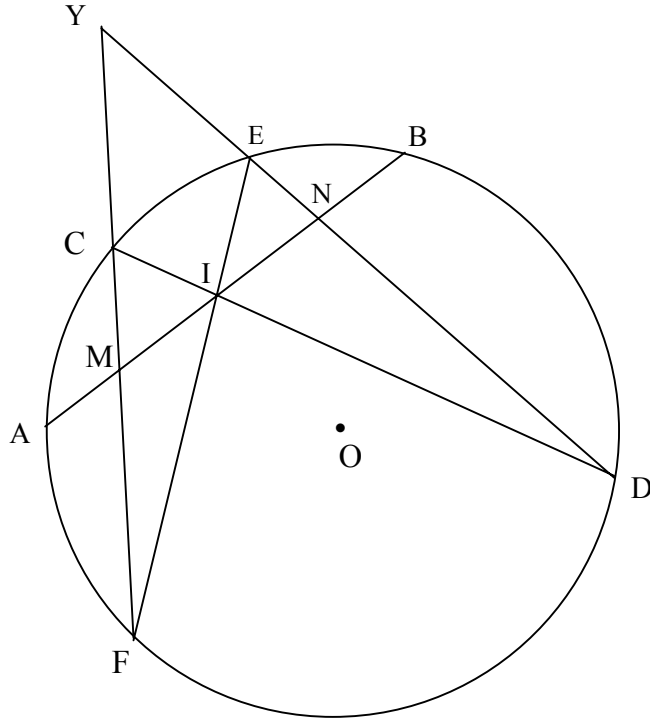


olur. Buradan  $G = 0$  dır. Böylece

$$\Sigma(x,0) = 0 \quad (4.30)$$

denklemini birinci dereceden terim içermez ve kanıt yukarıdaki gibi yapılır[26].

Kanıt 10: DE ve FC doğrularının kesişim noktası Y olsun(Şekil 4.11).



Şekil 4.11: Çapraz doğrular

NYM üçgeni ile FIE doğrusuna ve NYM üçgeni ile DIC doğrusuna Menelaus teoremi uygulanırsa sırasıyla

$$\frac{IN}{IM} \frac{FM}{FY} \frac{EY}{EN} = 1, \quad \frac{IN}{IM} \frac{CM}{CY} \frac{DY}{DN} = 1 \quad (4.31)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{IN^2.FM.CM.EY.DY}{IM^2.EN.DN.FY.CY} = 1 \quad (4.32)$$

olur. Ayrıca bir noktanın bir çembere göre kuvveti tanımından

$$EY.DY = FY.CY \quad (4.33)$$

olduğundan

$$\frac{IN^2}{IM^2} = \frac{EN.DN}{FM.CM} = \frac{AN.BN}{AM.BM} = \frac{(AI+IN)(AI-IN)}{(AI+IM)(AI-IM)} = \frac{AI^2 - IN^2}{AI^2 - IM^2} = 1 \quad (4.34)$$

ve buradan

$$MI = IN \quad (4.35)$$

elde edilir[27].

John Casey' in 1892 yılında yayınlanan "A Sequel to Euclid" isimli kitabında Çifte oranlar kullanılarak klasik kelebek teoreminin zarif bir kanıtı verilmiştir[28].

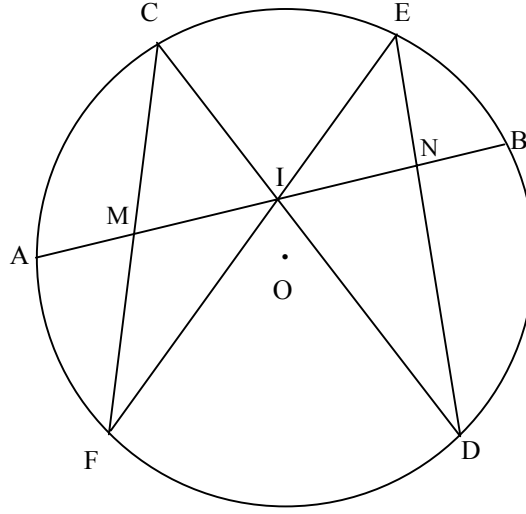
Kanıt 11: A, N, I, B noktalarının çifte oranı(Şekil 4.12)

$$[A, N, I, B] = \frac{IA}{IN} / \frac{BA}{BN} \quad (4.36)$$

ve A, I, M, B noktalarının çifte oranı

$$[A, I, M, B] = \frac{MA}{MI} / \frac{BA}{BI} \quad (4.37)$$

dır.



Şekil 4.12: A, N, I, B noktalarının çifte oranı

E, A, D, C, B noktalarının oluşturduğu demet ile F, A, D, C, H noktalarının oluşturduğu demetlerdeki açılar aynı yayları gördüğü için bu oranlar eşittir ve  $AI = IB$  olduğundan

$$MI = IN \quad (4.38)$$

elde edilir[28]. O halde kelebek teoremi sadece çemberler için değil daha genel olarak konik kesitleri için de geçerlidir.

Steven R. Conrad[29], klasik kelebek teoreminin farklı bir kanıtını vermiştir. Bu kanıtı vermenin amacı herkes tarafından daha rahat anlaşılabilir, o güne kadar verilenlerden daha basit ve şık bir kanıt yolu sunmaktır. Şimdi bu kanıt verilecektir.

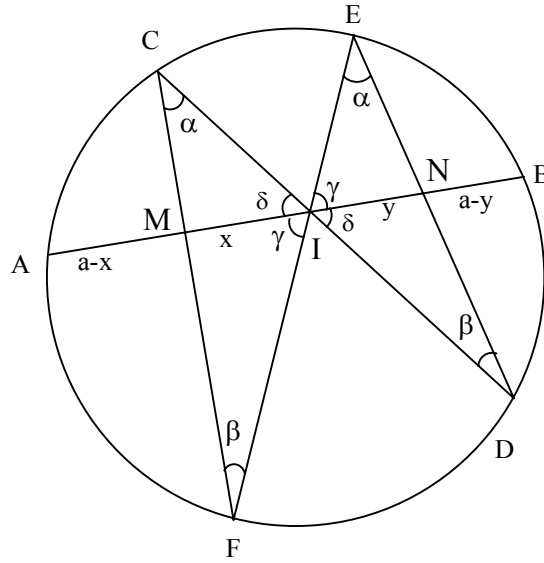
Kanıt 12:  $\angle FCD = \angle DEF = \alpha$ ,  $\angle CFE = \angle EDC = \beta$ ,  $\angle MIF = \angle EIN = \gamma$ ,  
 $\angle CIM = \angle DIN = \delta$ ,  $|AI| = |IB| = a$ ,  $|MI| = x$ ,  $|NI| = y$  olsun(Şekil4.13). Buradan  $|AM| = a - x$  ve  $|BN| = a - y$  olur. Üçgenlerin yönlü alanlarının oranları

$$\frac{\Delta_{MIC}}{\Delta_{INE}} \frac{\Delta_{INE}}{\Delta_{MFI}} \frac{\Delta_{MFI}}{\Delta_{IDN}} \frac{\Delta_{IDN}}{\Delta_{MIC}} = 1 \quad (4.39)$$

alnırsa

$$\frac{|CI||CM|\sin\alpha}{|EI||EN|\sin\alpha} \frac{|EI||IN|\sin\gamma}{|FI||IM|\sin\gamma} \frac{|FI||FM|\sin\beta}{|ID||DN|\sin\beta} \frac{|ID||IN|\sin\delta}{|CI||IM|\sin\delta} = 1 \quad (4.40)$$

yazılabilir[29].



Şekil 4.13: Eşit açılar ve üçgenlerin alanları

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|CM||FM||IN|^2 = |EN||DN||IM|^2 \quad (4.41)$$

olur. Bununla birlikte

$$|CM||FM| = |AM||BM| \quad (4.42)$$

ve

$$|EN||DN| = |BN||AN| \quad (4.43)$$

olduğundan

$$|AM||BM||IN|^2 = |BN||AN||IM|^2 \quad (4.44)$$

veya

$$(a^2 - x^2)y^2 = (a^2 - y^2)x^2 \quad (4.45)$$

olur. Son denklemin tek kökü  $x = y$  'dir. O halde  $|MI| = |IN|$  dir[29].

## 4.2. Klasik Kelebek Teoreminin Bir Genellemesi

Roger Johnson' un Modern Geometri[20] kitabındaki bir dipnot 1896 yılında Annals of Mathematics isimli dergide yayınlanan A Candy' e ait bir makaleye[30] dikkati çeker. Bu yayına erişilemediğinden kolay kavramayı sağlamak açısından bu yayında kullanılan materyal burada verilen kelebeğin ana temasına uygun olarak anlatılacaktır[15].

I noktası bir çemberin AB kirişi üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu I noktasından geçen farklı CD ve EF kirişleri çizilsin(Şekil 4.14). CF ve ED kirişleri AB kirişini sırasıyla M ve N noktalarında kessin[30].  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  sırasıyla CMI, EIN, MIF ve IDN üçgenlerinin alanları olmak üzere  $|IB| = m, |IA| = n, |IN| = p, |IM| = q, |IE| = a, |IF| = b, |IC| = c, |ID| = d, |CM| = x, |MF| = y, |EN| = v$  ve  $|ND| = z$  olsun. Buradan  $\angle MCI = \angle IEN$  ve  $\angle MFI = \angle IDE$  olduğundan

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\frac{1}{2} cx \sin \angle MCI}{\frac{1}{2} av \sin \angle IEN} = \frac{cx}{av}, \quad (4.46)$$

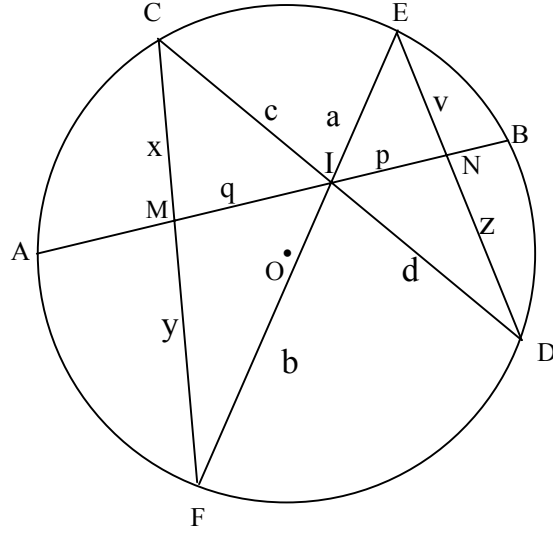
$$\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{\frac{1}{2} by \sin \angle MFI}{\frac{1}{2} dz \sin \angle IDE} = \frac{by}{dz}, \quad (4.47)$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{\frac{1}{2}bq \sin \angle CIM}{\frac{1}{2}dp \sin \angle BID} = \frac{cq}{dp} \quad (4.48)$$

ve

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\frac{1}{2}bq \sin \angle MIF}{\frac{1}{2}ap \sin \angle EIB} \quad (4.49)$$

olur.



Şekil 4.14: AB kirişinin herhangi bir noktasından geçen farklı iki kiriş

Böylece

$$\frac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta_2 \Delta_4} = \frac{bcq^2}{adp^2} = \frac{bcxy}{advz} \quad (4.50)$$

ve bunun sonucu olarak

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{xy}{vz} = \frac{|AM||MB|}{|AN||NB|} = \frac{(n-q)(m+q)}{(n+p)(m-p)} = \frac{mn - q(m-n) - q^2}{mn - p(m-n) - p^2} \quad (4.51)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$mn(p-q) = pq(m-n) \quad (4.52)$$

veya

$$\frac{mn}{pq} = \frac{m-n}{p-q} \quad (4.53)$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \quad (4.54)$$

elde edilir. Özel olarak I noktası AB kirişinin orta noktası olduğu zaman

$$m-n=0 \quad (4.55)$$

olur ve (4.52)' den

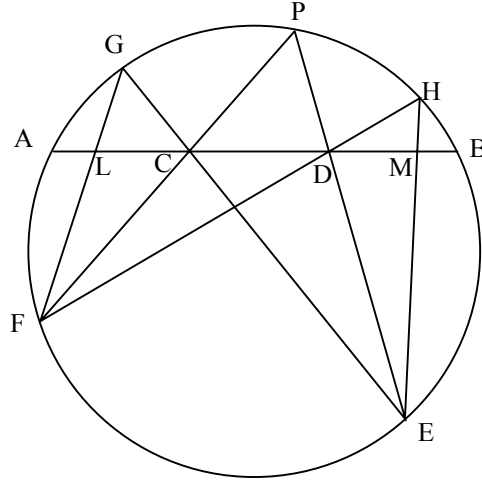
$$mn(p-q) = 0 \quad (4.56)$$

elde edilir. Burada  $mn \neq 0$  olduğundan  $p = q$  bulunur[30].

### 4.3. Üç Kanatlı Kelebek Problemi

Bu problem 1984 yılı mart ayında R. S. Luthar tarafından ortaya atılmıştır[31]. Bu problem aşağıdaki gibidir.

C ve D noktaları bir  $\Gamma$  çemberini herhangi bir AB kirişini üç eşit parçaya bölsün ve P, bu çember üzerinde A ve B noktalarından farklı bir nokta olsun. PD ve PC doğruları çemberi sırasıyla E ve F noktalarında; EC ve FD doğruları ise çemberi sırasıyla G ve H noktalarında kessin. Ayrıca GF ve HE doğruları AB kirişini L ve M noktalarında kessin. O zaman  $|AL| = |BM|$  olur(Şekil 4.15)[31].



Şekil 4.15: Üç kanatlı kelebek

Çözüm: Candy' nin teoreminin kanıtındaki notasyon ve bağıntıları kullanarak (4.54)'de

$$|AC| = n = 1, |CB| = m = 2, |CD| = p = 1 \quad (4.57)$$

alınarak

$$\frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (4.58)$$

ve buradan

$$|LC| = q = \frac{2}{3} \quad (4.59)$$



olur. Aynı uygulama PFHE dörtgenine yapılırsa bu kez  $|AD| = m = 2$ ,  $|DB| = n = 1$ ,  
 $|DM| = p$  alınarak

$$|DM| = \frac{2}{3} \quad (4.60)$$

olur. Buradan  $|AC| = |DB|$  olduğundan

$$|AL| = |MB| \quad (4.61)$$

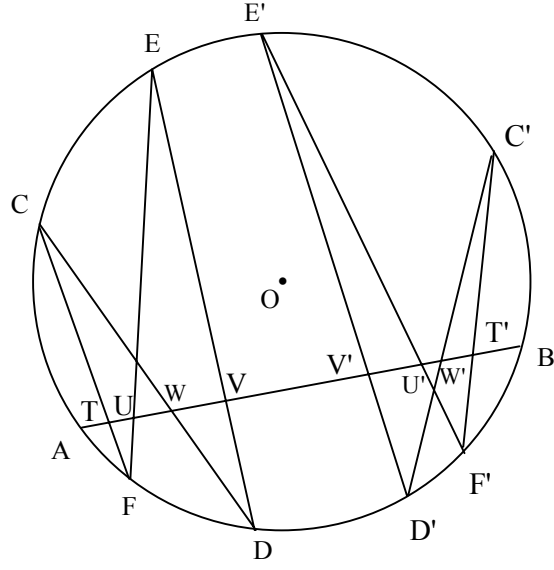
elde edilir[15].

#### 4.4. Çift Kelebek Teoremi

Dixon Jones[32], klasik kelebek teoreminde bazı değişiklikler yaparak “Çift Kelebek Teoremi” adı verilen yeni bir teorem ortaya atmış ve bu teoremin kanıtını vermiştir.

Teorem4.4.1: AB, bir çemberin herhangi bir kirişi olsun. )R( ve )S( bu kirişi soldan sağa sırasıyla T, U, W, V ve V', U', W', T' noktalarında kesen ve bu çemberin çevrelediği iki kelebeği göstermek üzere eğer  $AV = BV'$ ,  $AW = BU'$  ve  $AU = BW'$  eşitlikleri var ise  $AT = BT'$  olur(Şekil 4.16).

Kanıt: )R( kelebeğinde doğrudan A, T, U, B noktalarına ve A, W, V noktalarına sırasıyla çifte oran uygulanırsa



Şekil 4.16: Aynı çember ile çevrelenen bir çift kelebek

$$[A, T, U, B] = \frac{AU}{TU} \cdot \frac{AB}{BT} = \frac{\sin \angle AFE}{\sin \angle EFC} \cdot \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle BFC} \quad (4.62)$$

ve

$$[A, W, V, B] = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle EDC} \cdot \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle BDC} \quad (4.63)$$

olur. Aynı yayı gören açılar eşit olduğundan

$$[A, T, U, B] = [A, W, V, B] \quad (4.64)$$

veya

$$\frac{AU}{TU} \cdot \frac{AB}{BT} = \frac{AV}{WV} \cdot \frac{AB}{BW} \quad (4.65)$$

olur. Sadeleştirme yapılarak

$$\frac{AU.BT}{TU} = \frac{AV.BW}{VW} \quad (4.66)$$

elde edilir. Benzer şekilde )S( kelebeği için de

$$\frac{BW'.AT'}{W'T'} = \frac{BV'.AU'}{V'U'} \quad (4.67)$$

elde edilir. Teoremin ifadesinde verilen koşullardan  $AV = BV'$ ,  $AU' = BW$ ,  $VW = V'U'$  eşitlikleri sağlandığından bu eşitlikler (4.67)' de yerine yazılırsa

$$\frac{BW'.AT'}{W'T'} = \frac{AV.BW}{VW} \quad (4.68)$$

olur. (4.66)' deki eşitlikten dolayı (4.68)' deki eşitlik

$$\frac{BW'.AT'}{W'T'} = \frac{AU.BT}{TU} \quad (4.69)$$

olur. Buradan  $AU = BW'$  olduğundan

$$AT'.TU = BT.W'T' \quad (4.70)$$

elde edilir. Bununla birlikte  $AT' = AW' + W'T'$  ve  $BT = BU + UT$  ifadeleri (4.69)' deki eşitlikte yerine konursa

$$AW'.UT + W'T'.UT = BU.W'T' + UT.W'T' \quad (4.71)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa bu eşitlik

$$AW'.UT = BU.W'T' \quad (4.72)$$

olur. Teoremin ifadesinde verilen koşullardan  $AW' = BU$  olduğundan

$$UT = W'T' \quad (4.73)$$

olur ve buradan

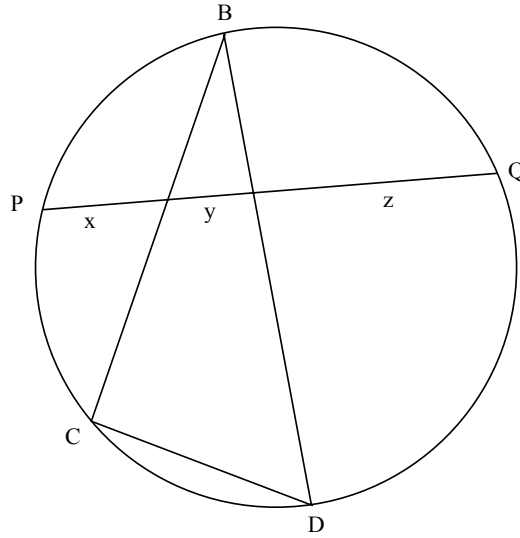
$$AT = BT' \quad (4.74)$$

elde edilir[32].

#### 4.4.1. Çift kelebek teoreminin farklı bir kanıtı

Larry Hoehn[33], Çift Kelebek Teoreminin farklı bir kanıtını vermiştir. Bu kanıt verilirken Hiroshi Haruki' ye atfen bir lemma[34] kullanılmıştır[33].

Lemma 4.4.1.1: PQ ve CD bir çemberin birbirini kesmeyen kirişleri ve B noktası bu çember üzerinde PQ kirişine göre C ve D noktaları ile ters tarafta bulunan bir nokta olsun(Şekil 4.17). Bu durumda B noktasının her konumu için BC ve BD doğruları PQ kirişini  $\frac{xz}{y} = a$  (a, sabit) olmak üzere x, y, z uzunluklu doğru parçaları oluşacak şekilde keserler.



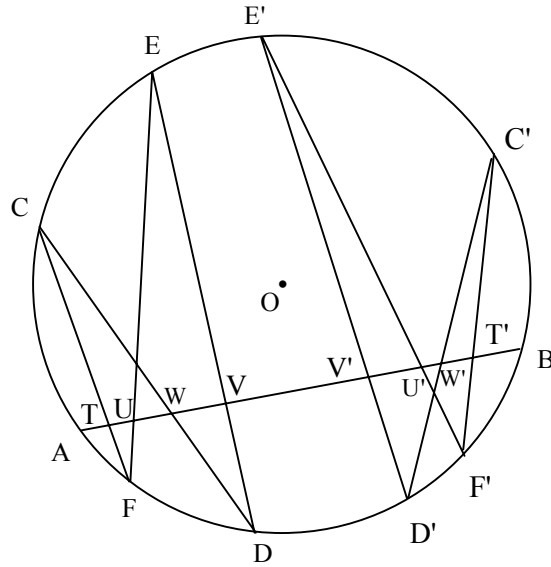
Şekil 4.17: PQ kirişini  $\frac{xz}{y} = a$  (sabit) olacak şekilde bölen kirişler

Şimdi çift kelebek teoremine Hoehn' in ortaya koyduğu kanıt verilecektir.  
 $m = |AT|$ ,  $n = |BT'|$ ,  $a = |AU| = |BW'|$ ,  $b = |UW| = |W'U'|$ ,  $c = |WV| = |U'W'|$ ,  $d = |VV'|$   
ve  $e = a + b + c + d$  olsun(Şekil 4.18).

Yukarıda verilen lemma 4.4.1.1 A ve B noktalarına ve )R( kelebeğinin keyfi PQ ve CD kirişlerine iki kere uygulanırsa

$$\frac{m(b + c + e)}{a - m} = \frac{(a + b)e}{c} = k \text{ (k, sabit)} \quad (4.75)$$

elde edilir[33].



Şekil 4.18: Bir çift kelebek

Benzer şekilde )S( kelebeği için

$$\frac{n(b + c + e)}{a - n} = \frac{(a + b)e}{c} \quad (4.76)$$

elde edilir. Bu iki denklem birlikte çözülerek

$$\frac{m(b+c+e)}{a-m} = \frac{n(b+c+e)}{a-n} \quad (4.77)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa  $m = n$  elde edilir[33].

#### 4.5. Dörtgenler İçin Kelebek Teoremi

Bankoff[15]'un çalışmasına göre I noktası bir çemberin herhangi bir AC kirişi üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu noktadan geçen DE ve FG kirişleri çizilsin. FE ve DG kirişleri AC kirişini sırasıyla M ve N noktalarında kessin.  $|IA| = a$  ,  $|IC| = c$  ,  $|IM| = m$  ,  $|IN| = n$  ise

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \quad (4.78)$$

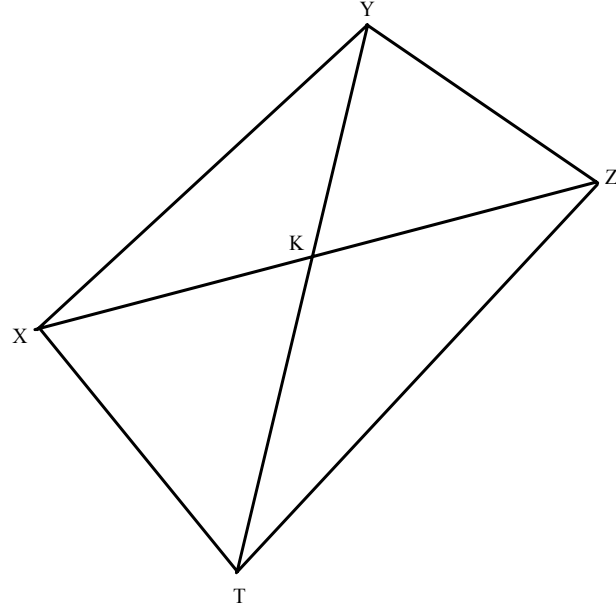
elde edilir[35].

Şimdi, kelebek teoreminin dörtgenler için benzer bir kanıtı verilecektir. Bu kanıt için üçgenlerin alanlarıyla ilgili aşağıdaki özellikler kullanılmıştır.

1) XYZ ve XZT üçgenleri için K noktası XZ doğrusu ile YT doğrusunun kesişimi olmak üzere(Şekil 4.19)

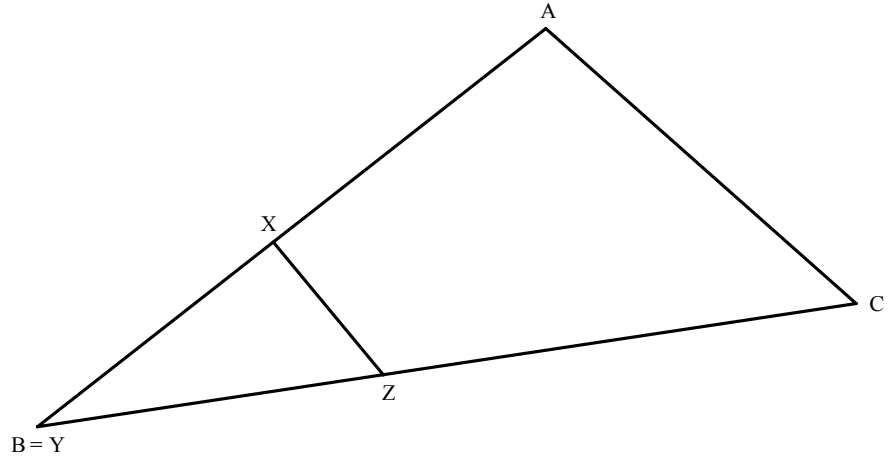
$$\frac{\Delta_{XYZ}}{\Delta_{XZT}} = \frac{|YK|}{|TK|} \quad (4.79)$$

dir[35].



Şekil 4.19:  $YXZ$  ve  $TZX$  üçgenlerinin alanlarının oranları

2)  $ABC$  ve  $XYZ$  üçgenleri aşağıdaki gibi verilsin(Şekil 4.20 ve Şekil 4.21).



Şekil 4.20:  $ABC$  ve  $XYZ$  üçgenlerinin  $Z$  noktası  $BC$  doğrusu üzerinde  $B$  ile  $C$  noktasının arasında iken orantılı alanları





$$\begin{aligned}
\frac{|AM|}{|IM|} \frac{|IN|}{|CN|} &= \frac{\Delta_{AEG}}{\Delta_{IEG}} \frac{\Delta_{IFH}}{\Delta_{CHF}} \\
&= \frac{\Delta_{IFH}}{\Delta_{IEG}} \frac{\Delta_{CBD}}{\Delta_{CHF}} \frac{\Delta_{ABD}}{\Delta_{CBD}} \frac{\Delta_{AEG}}{\Delta_{ABD}} \\
&= \frac{|IF||IH|}{|IE||IG|} \frac{|CD||CB|}{|CF||CH|} \frac{|IA|}{|IC|} \frac{|AE||AG|}{|AB||AD|} \\
&= \frac{\Delta_{FAC}}{\Delta_{EAC}} \frac{\Delta_{HAC}}{\Delta_{GAC}} \frac{\Delta_{DAC}}{\Delta_{FAC}} \frac{\Delta_{BAC}}{\Delta_{HAC}} \frac{|IA|}{|IC|} \frac{\Delta_{EAC}}{\Delta_{BAC}} \frac{\Delta_{GAC}}{\Delta_{DAC}} \\
&= \frac{|IA|}{|IC|}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir.  $|IA| = a, |IC| = c, |IM| = m, |IN| = n$  alınırsa

$$\frac{a - m}{m} \frac{n}{c - n} = \frac{a}{c} \tag{4.83}$$

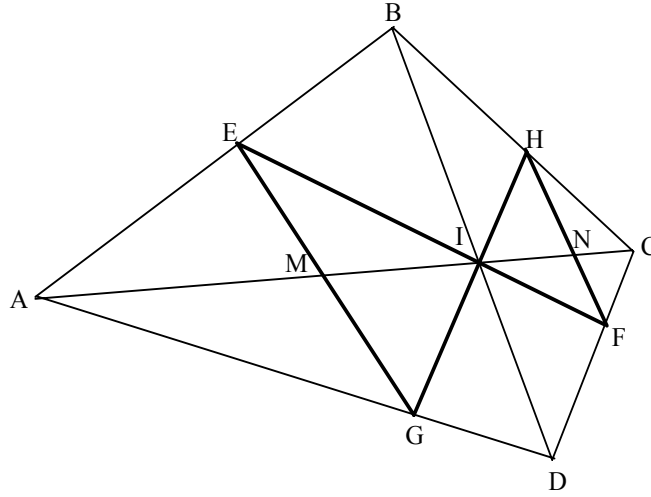
olur. Buradan

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \tag{4.84}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\frac{|AM|}{|IM|}}{\frac{|CN|}{|IN|}} = \frac{|IA|}{|IC|} \tag{4.85}$$

olur. (4.82)' deki eşitlikten  $|IA| = |IC|$  olur[35].



Şekil 4.22: ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktalarından geçen doğruların oluşturduğu kelebek

#### 4.6. İç İçe Girmiş Dörtgenler İçin Kelebek Teoremi

Zvonko Čerin[1], “Bir Dörtgen Tarafından Çevrelenen Kelebekler Üzerine” isimli çalışmasında köşeleri  $A(0,0), B(f, g), C(1,0), D(p, q)$  ( $f, g, p, q \in \mathbb{R}$ ) olan bir ABCD dörtgeni üzerinde “Genelleştirilmiş Kelebek Teoremi” ni ve bu dörtgenle ilgili başka bazı bağıntıları göstermiştir. Bu bölümde ise Genelleştirilmiş Kelebek Teoremi 7 farklı şekilde gösterilmiştir. Zvonko Čerin’in çalışmasına ek olarak burada aşağıdaki noktaları köşe noktaları olarak kabul eden konveks dörtgenlerden yararlanılarak kelebekler oluşturulmuştur(Şekil 4.23). Bu 7 kelebeği oluşturmakta kullanılan konveks dörtgenlerin köşe noktaları

$$A(0,0), B \in \{(x, y) | x + y > 0, x - y > 0\}, C(1,1), D \in \{(x, y) | x + y > 0, x - y < 0\}$$

$$A(0,0), B \in \{(x, y) | x > 0, y > 0\}, C(0,1), D \in \{(x, y) | x < 0, y > 0\}$$

$$A(0,0), B \in \{(x, y) | x + y > 0, x - y < 0\}, C(-1,1), D \in \{(x, y) | x + y < 0, x - y < 0\}$$

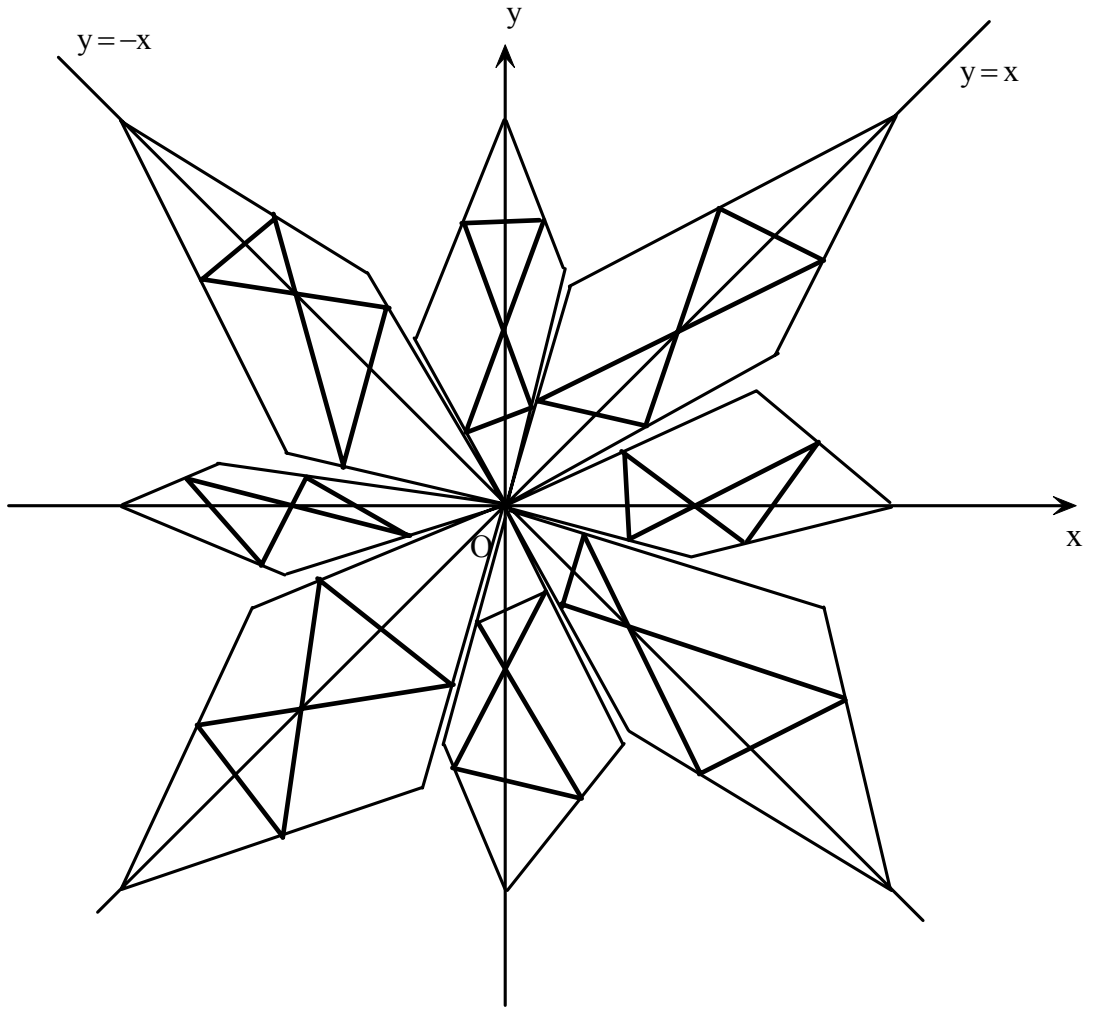
$$A(0,0), B \in \{(x, y) | x < 0, y > 0\}, C(-1,0), D \in \{(x, y) | x < 0, y < 0\}$$

$$A(0,0), B \in \{(x,y)|x+y < 0, x-y < 0\}, C(-1,-1), D \in \{(x,y)|x+y < 0, x-y > 0\}$$

$$A(0,0), B \in \{(x,y)|x < 0, y < 0\}, C(0,-1), D \in \{(x,y)|x > 0, y < 0\}$$

$$A(0,0), B \in \{(x,y)|x+y < 0, x-y > 0\}, C(1,-1), D \in \{(x,y)|x+y > 0, x-y > 0\}$$

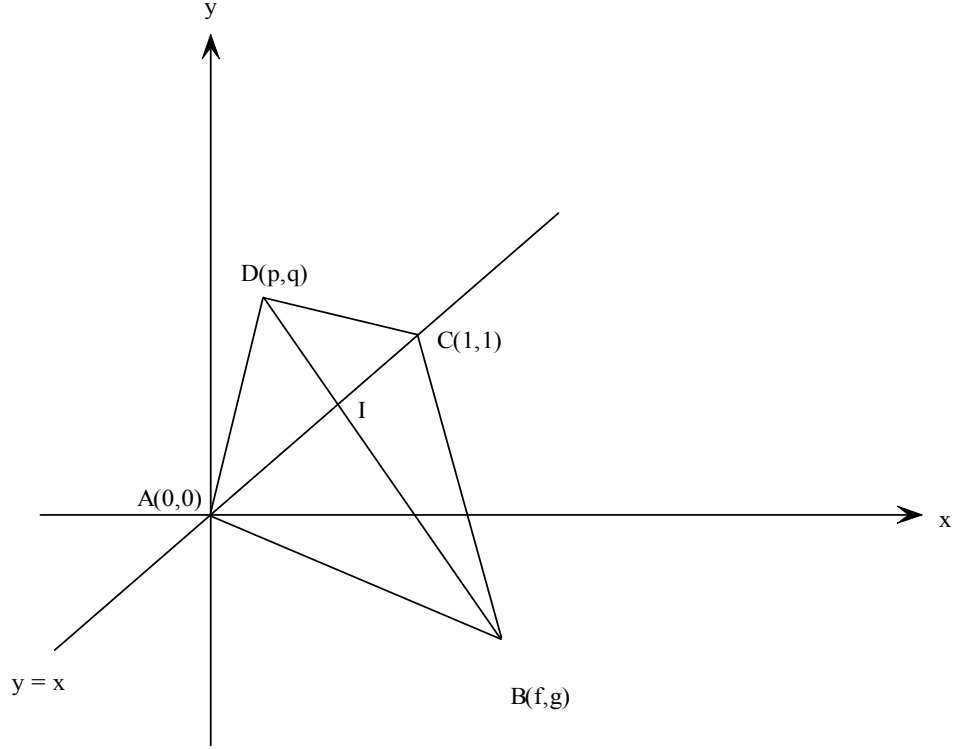
noktalarıdır.



Şekil 4.23: Düzlemde sekiz kelebek

İlk olarak köşeleri  $A(0,0), B(f,g), C(1,1), D(p,q)$  olan ABCD dörtgeni ele alınsın. ABCD dörtgeninin AB ve BC kenarlarını sırasıyla  $u, v$  ( $u, v \neq -1, 0, 1$ ) oranlarında bölen noktalar  $A'$  ve  $B'$  olsun. I, ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası

ve  $E(h,h)$  ( $0 < h < 1$ ) noktası AC köşegeni üzerinde I dan farklı bir nokta olsun(Şekil 4.24).



Şekil 4.24: Köşeleri  $A(0,0)$ ,  $B(f,g)$ ,  $C(1,1)$ ,  $D(p,q)$  ( $f, g, p, q \in \mathbb{R}$ ) olan ABCD dörtgeni

AB kenarını  $u$  oranında bölen nokta  $A'$  olarak alınırsa  $u$  oranı için

$$u = -\frac{A'A}{A'B} \quad (4.86)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten

$$uB - uA' = A' - A \quad (4.87)$$

elde edilir. Buradan

$$(u + 1)A' = A + uB \quad (4.88)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A' \left( \frac{fu}{u+1}, \frac{gu}{u+1} \right) \quad (4.89)$$

noktası elde edilir. BC kenarını v oranında bölen nokta B' ise

$$v = - \frac{B'B}{B'C} \quad (4.90)$$

olacağından

$$vC - vB' = B' - B \quad (4.91)$$

ve buradan

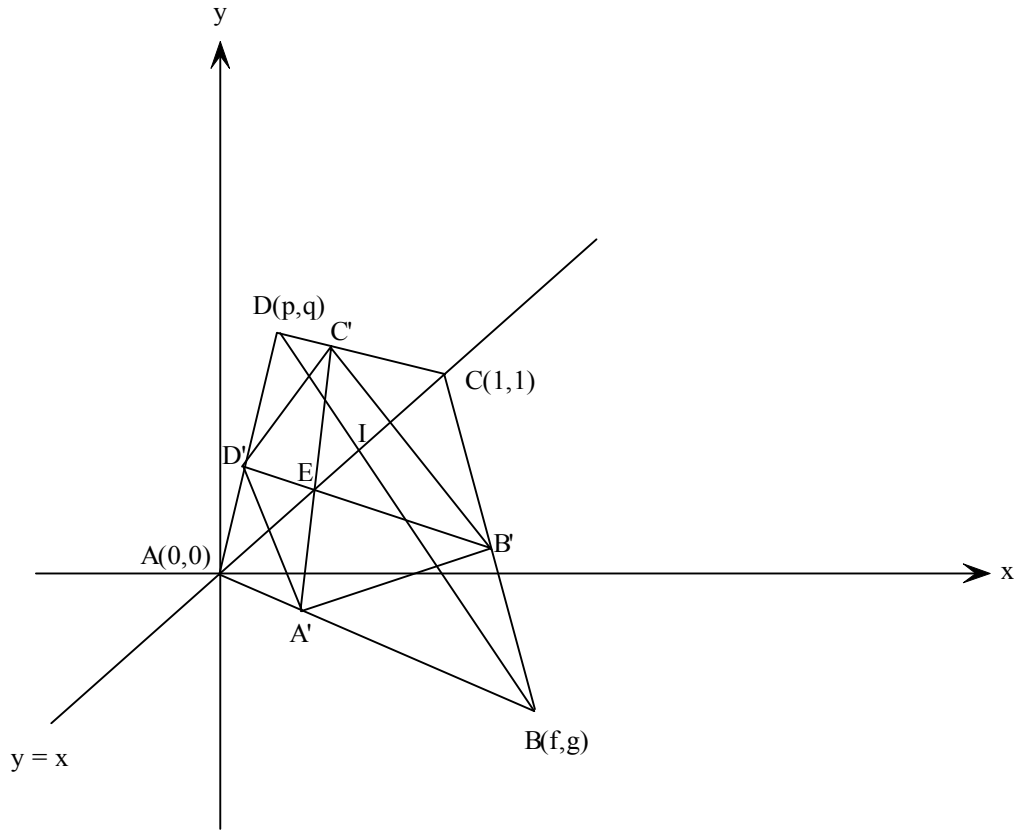
$$(v+1)B' = B + vC \quad (4.92)$$

olur.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$B' \left( \frac{f+v}{v+1}, \frac{g+v}{v+1} \right) \quad (4.93)$$

noktası elde edilir. C' noktası A'E ile CD doğrularının kesişim noktası, D' noktası da B'E ile DA doğrularının kesişim noktası olsun. Bu şekilde oluşturulan A'B'C'D' dörtgeni ABCD dörtgeni tarafından çevrelenmektedir(Şekil 4.25).

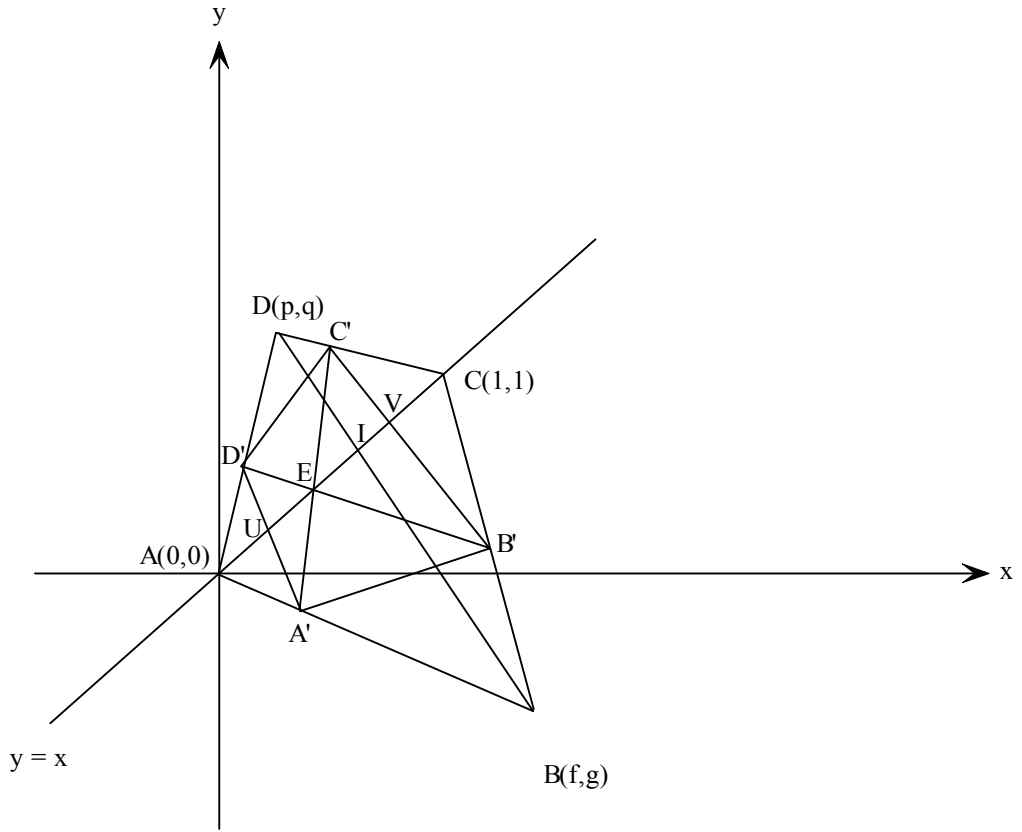


Şekil 4.25: ABCD dörtgeni ile çevrelenen A'B'C'D' dörtgeni

Teorem 4.6.1: Yukarıda tanımlanan ABCD ve A'B'C'D' dörtgenleri alınsın. U noktası AC ile A'D' doğrularının kesişim noktası, V de AC ile B'C' doğrularının kesişim noktası olsun(Şekil 4.26). O zaman

$$\frac{|AU|}{|UE|} \frac{|EV|}{|VC|} = \frac{|AI|}{|IC|} \quad (4.94)$$

olur.



Şekil 4.26: D'AA', D'A'E, EB'C', CC'B', ABD, CDB üçgenleri

Kanıt:  $|AU|, |UE|, |EV|, |VC|, |AI|, |IC|$  uzaklıklarının kareleri Matlab programı yardımıyla

$$|AU|^2 = \frac{2u^2h^2(gp - fq)^2}{(fuq + hq - hp + vhup - gup - puv - vhuq + vuq)^2}, \quad (4.95)$$

$$|UE|^2 = \frac{2h^2(p - q)^2(-h + huv - uv)^2}{(fuq + hq - hp + vhup - gup - puv - vhuq + vuq)^2}, \quad (4.96)$$

$$|EV|^2 = \frac{2(h-1)^2(p-q)^2(-h+huv-uv)^2}{(fu - fuq + uq - pu - gu - hp + vuq - puv + vhup + gup + hq - vhuq)^2}, \quad (4.97)$$

$$|VC|^2 = \frac{2u^2(h-1)^2(-fq + f + q - g + gp - p)^2}{(fu - fuq + uq - pu - gu - hp + vuq - puv + vhup + gup + hq - vhuq)^2} \quad (4.98)$$

$$|AI|^2 = \frac{2(gp - fq)^2}{(g + p - f - q)^2} \quad (4.99)$$

ve

$$|IC|^2 = \frac{2(f + q - fq - g + gp - p)^2}{(g + p - f - q)^2} \quad (4.100)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|AU|^2 |EV|^2}{|UE|^2 |VC|^2} = \frac{(gp - fq)^2}{(f + q - fq - g + gp - p)^2} \quad (4.101)$$

ve

$$\frac{|AI|^2}{|IC|^2} = \frac{(gp - fq)^2}{(f + q - fq - g + gp - p)^2} \quad (4.102)$$

elde edilir. O halde

$$\frac{|AU|^2 |EV|^2}{|UE|^2 |VC|^2} = \frac{|AI|^2}{|IC|^2} \quad (4.103)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\frac{|AU| |EV|}{|UE| |VC|} = \frac{|AI|}{|IC|} \quad (4.104)$$

elde edilir.



Teorem4.6.2:  $t_1 = D'AA'$ ,  $t_2 = D'A'E$ ,  $t_3 = EB'C'$ ,  $t_4 = CC'B'$ ,  $t_5 = ABD$ ,  $t_6 = CDB$  üçgenleri ele alınsın. (4.94) bağıntısına benzer bir bağıntı  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  üçgenlerinin alanları için de geçerlidir, yani

$$\frac{\Delta_{t_1} \Delta_{t_3}}{\Delta_{t_2} \Delta_{t_4}} = \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} \quad (4.105)$$

dır.

Kanıt: Herhangi bir XYZ üçgeni ele alınsın. Köşe noktaları  $X(x_1, x_2)$ ,  $Y(y_1, y_2)$ ,  $Z(z_1, z_2)$  olmak üzere bu üçgenin alanı

$$\Delta_{XYZ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \quad (4.106)$$

formülüyle hesaplanabilir. Buradaki  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  üçgenlerinin alanları da bu (4.106)'daki formülü kullanarak Matlab programı yardımıyla

$$\Delta_{t_1} = -\frac{hu(f-g)(gp-fq)}{2(u+1)(hp+vhp-gp-pv-hq-vhq+fu+vq)}, \quad (4.107)$$

$$\Delta_{t_2} = \frac{h(f-g)(p-q)(-h+huv-uv)}{2(u+1)(-hup-hp-gu+gup+huq+hq+fu-fuq)}, \quad (4.108)$$

$$\Delta_{t_3} = -\frac{(h-1)(f-g)(p-q)(-h+hvu-uv)}{2(v+1)(-hup-hp-gu+gup+huq+hq+fu-fuq)}, \quad (4.109)$$

$$\Delta_{t_4} = -\frac{u(h-1)(f-g)(f+g-fq-g+gp-p)}{2(v+1)(-hup-hp-gu+gup+huq+hq+fu-fuq)}, \quad (4.110)$$

$$\Delta_{t_5} = \frac{1}{2}(fq - gp) \quad (4.111)$$

ve

$$\Delta_{t_6} = \frac{1}{2}(f + q - fq - g + gp - p) \quad (4.112)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} = -\frac{gp - fq}{f + q - fq - g + gp - p} \quad (4.113)$$

ve

$$\frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} = -\frac{gp - fq}{f + q - fq - g + gp - p} \quad (4.114)$$

olduğundan

$$\frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} = \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} \quad (4.115)$$

elde edilir.

#### 4.7. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Yükseklikleri

$t_1$  ve  $t_2$  üçgenlerinin A'D' kenarına ait yükseklikleri sırasıyla  $h_1, h_2$ ;  $t_3$  ve  $t_4$  üçgenlerinin B'C' kenarına ait yükseklikleri sırasıyla  $h_3, h_4$ ;  $t_5, t_6$  üçgenlerinin BD kenarına yükseklikleri sırasıyla  $h_5, h_6$  olsun. Herhangi bir XYZ üçgeninin yüksekliği h ile gösterilirse üçgenin alan formülünden

$$h = \frac{2\Delta_{XYZ}}{|YZ|} \quad (4.116)$$

şeklinde yazılır. Buradan  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$  yükseklikleri de benzer şekilde yazılabilir. Böylece bu üçgenlerin alanları için geçerli olan (4.115) bağıntısının yükseklikler için de geçerli olduğu görülür. Yani

$$\frac{h_1}{h_2} \frac{h_3}{h_4} = \frac{\frac{2\Delta_{t_1}}{|A'D'|} \frac{2\Delta_{t_3}}{|B'C'|}}{\frac{2\Delta_{t_2}}{|A'D'|} \frac{2\Delta_{t_4}}{|B'C'|}} \quad (4.117)$$

ve buradan gerekli düzenlemeleri yapılarak

$$\frac{h_1}{h_2} \frac{h_3}{h_4} = \frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} \quad (4.118)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{h_5}{h_6} = \frac{\frac{2\Delta_{t_5}}{BD}}{\frac{2\Delta_{t_6}}{BD}} \quad (4.119)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\frac{h_5}{h_6} = \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}}$  olur. Teorem 4.6.2.' den

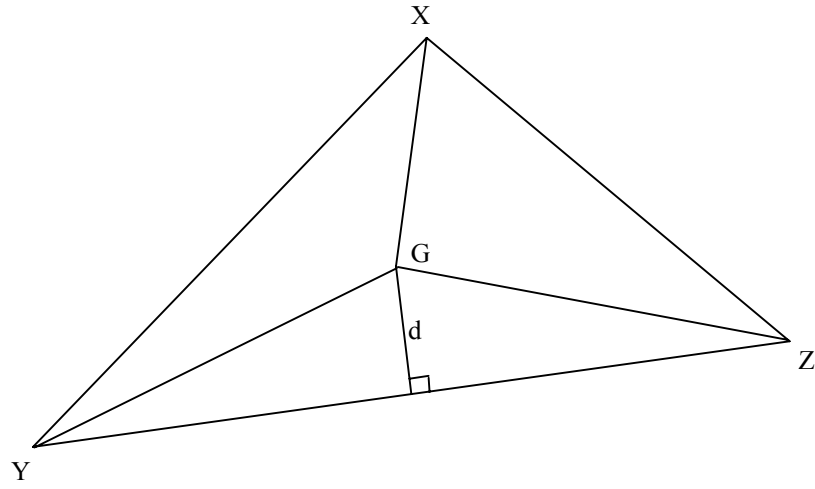
$$\frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} - \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{h_1}{h_2} \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_5}{h_6} \quad (4.120)$$

elde edilir.

#### 4.8. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Kütle Merkezleri

$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  üçgenlerinin kütle merkezleri sırasıyla  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$  olsun.  $G_1$  ve  $G_2$  merkezlerinin D'A' kenarına,  $G_3$  ve  $G_4$  merkezlerinin B'C' kenarına,  $G_5$  ve  $G_6$  merkezlerinin BD kenarına dik uzaklıkları sırasıyla  $d_1, d_2; d_3, d_4; d_5, d_6$  olsun. Bir XYZ üçgeninin G kütle merkezinden YZ kenarına inilen dikmenin uzunluğu d olsun. d uzunluğu GYZ üçgeninin bir yüksekliğidir. (şekil4.27)



Şekil 4.27: XYZ üçgeninin kütle merkezinin YZ kenarına dik uzaklığı

XYZ üçgeninin içinde oluşan GYZ , GZX , GXY üçgenlerinin alanları birbirine eşittir ve bu üç üçgenin alanlarının toplamı da XYZ üçgeninin alanını verir. O halde

$$\Delta_{GZX} = \Delta_{GXY} = \Delta_{GYZ} = \frac{d|YZ|}{2} \quad (4.121)$$

dir. Buradan

$$\Delta_{XYZ} = \frac{3}{2}d|YZ| \quad (4.122)$$

olur. Böylece

$$d = \frac{2 \Delta_{XYZ}}{3|YZ|} \quad (4.123)$$

olur. (4.123) eşitliği  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$  uzunlukları için

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2 \Delta_{t_1}}{3|D'A'|}, & d_2 &= \frac{2 \Delta_{t_2}}{3|D'A'|}, \\ d_3 &= \frac{2 \Delta_{t_3}}{3|B'C'|}, & d_4 &= \frac{2 \Delta_{t_4}}{3|B'C'|}, \\ d_5 &= \frac{2 \Delta_{t_5}}{|BD|}, & d_6 &= \frac{2 \Delta_{t_6}}{3|BD|} \end{aligned} \quad (4.124)$$

olarak yazılır. Buradan

$$\frac{d_1}{d_2} \frac{d_3}{d_4} = \frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} \quad (4.125)$$

ve

$$\frac{d_5}{d_6} = \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} \quad (4.126)$$

olur. Böylece

$$\frac{d_1}{d_2} \frac{d_3}{d_4} = \frac{d_5}{d_6} \quad (4.127)$$

olduğu görülür.

#### 4.9. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ Üçgenlerinin Çevrelçemberlerin Yarıçapları

Teorem 4.9.1:  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  ve  $t_6$  üçgenlerinin çevrelçemberlerinin yarıçapları sırasıyla  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  olsun. Bu yarıçaplar için

$$\frac{R_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6} \quad (4.128)$$

eşitliği vardır.

Kanıt: Bir XYZ üçgeninin çevrelçemberinin yarıçapı R olmak üzere bu üçgenin alanı

$$\Delta_{XYZ} = \frac{|XY||YZ||ZX|}{4R} \quad (4.129)$$

olarak yazılabilir. Buradan R yarıçapı

$$R = \frac{|XY||YZ||ZX|}{4\Delta_{XYZ}} \quad (4.130)$$

dir. (4.130) eşitliğinden  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  yarıçaplarının kareleri Matlab programı yardımıyla

$$R_1^2 = \frac{h^2 u^2 (f-g)^2 (p^2 + q^2) (f^2 + g^2)}{16(u+1)^2 (hp + fq - gp - pv + vph - hq - vhq + vq)^2 (\Delta_{t_1})^2} \quad (4.131)$$

$$R_2^2 = \frac{h^2 (p-q)^2 (2h^2 + 4uh^2 - 2hfu + 2h^2 u^2 - 2hu^2 f + f^2 u^2 - 2hgu - 2hu^2 g + g^2 u^2) (-2hg + 4h^2 v - 4hv - 2hf + 2v^2 h^2 - 4hv^2 + 2vf + 2h^2 + 2v^2 + f^2 + g^2 + 2gv - 2gvh - 2vhf)}{16(u+1)^2 (hp + vhp - gp - pv - hq - vhq + fq + vq)^2 (\Delta_{t_2})^2} \quad (4.132)$$

$$R_3^2 = \frac{(h-1)^2(p-q)^2(2h^2+4uh^2-2hfu+2h^2u^2-2hu^2f+f^2u^2-2hgu-2hu^2g+g^2u^2) (-2hg+4h^2v-4hv-2hf+2v^2h^2-4hv^2+2vf+2h^2+2v^2+f^2+g^2+2gv-2gvh-2vhf)}{16(v+1)^2(-hup-hp-gu+gup+huq+hq+fu-fuq)^2(\Delta_{t_3})^2} \quad (4.133)$$

$$R_4^2 = \frac{u^2(h-1)^2(f-g)^2(p^2+q^2+2-2p-2q)(f^2+g^2-2f-2g+2)}{16(v+1)^2(-hup-hp-gu+gup+huq+hq+fu-fuq)^2(\Delta_{t_4})^2} \quad (4.134)$$

$$R_5^2 = \frac{(p^2+q^2)(f^2+g^2)}{16(\Delta_{t_5})^2} \quad (4.135)$$

$$R_6^2 = \frac{(p^2+q^2+2-2p-2q)(f^2+g^2-2f-2g+2)}{16(\Delta_{t_6})^2} \quad (4.136)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\frac{R_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4} = \frac{\Delta_{t_1}}{\Delta_{t_2}} \frac{\Delta_{t_3}}{\Delta_{t_4}} \quad (4.137)$$

ve

$$\frac{R_5}{R_6} = \frac{\Delta_{t_5}}{\Delta_{t_6}} \quad (4.138)$$

elde edilir. Böylece teorem 4.6.2' den

$$\frac{R_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6} \quad (4.139)$$

olur.

Benzer şekilde, diğer 6 dörtgen için de bu özellikler geçerlidir. O zaman düzlemde Zvonko Cerin'in çalışmasındaki kelebek ile toplam 8 tane kelebek elde edilmiş olur.



## KAYNAKLAR

[1] Čerin, Z., "On butterflies inscribed in a quadrilateral", *Forum Geometricorum*, 6, 241-246 (2006)

[2] Yiu, P., "An Introduction to the Triangle of Geometry", *Department of Mathematics Florida Atlantic University*, version 2.0402, 1-146 (2002)

[3] Weisstein, Eric W. Weisstein, Eric W., 2003, "Barycentric Coordinates." From MathWorld-- A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html> ( **Ziyaret tarihi: 19 Nisan 2007**)

[4] Kimberling, C. "Triangle Centers and Central Triangles.", *Congressus. Numerantium*, 129, 1- 295, (1998).

[5] Weisstein, Eric W., 2005, "Trilinear Coordinates." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html> ( **Ziyaret tarihi: 19 Nisan 2007**)

[6] [www.math.uoc.gr](http://www.math.uoc.gr) internet sitesi, "harmonic conjugate points", <http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Harmonic.html> (**Ziyaret tarihi: 15 Mayıs 2007**)

[7] Kimberling, C., "Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle", *Mathematics Magazine*, 67, 3, 163-186,(1994).

[8] Dergiades, N., van Lamoen, F., "Rectangles Attached to Sides of a Triangle", *Forum Geometricorum*, 3, 145-159(2003).

[9] Weisstein, Eric W., 2005, "Brocard Points." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/BrocardPoints.html> (**Ziyaret tarihi: 15 Mayıs 2007**)

[10] Shively, L., S., "An Introduction to Modern Geometry", *John Wiley & Sons, Inc.*, 61, (1939)

[11] Weisstein, Eric W., 2005, "Conway Triangle Notation." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ConwayTriangleNotation.html> (**Ziyaret tarihi: 16 Mayıs 2007**)

[12] Weisstein, Eric W., 2005, "Lucas Circles." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/LucasCircles.html> (**Ziyaret tarihi: 15 Mayıs 2007**)

- [13] Coxeter, H., S., M., “Real Projective Plane”, Third edition, *Springer- Verlag*, New York, 6, (1993)
- [14] Question 1029”, *Gentleman’s Diary*, 39-40, (1815)
- [15] Bankoff, L., “The metamorphosis of the butterfly problem”, *Mathematics Magazine*, 60, 195-210, (1987)
- [16] Bankoff, L., “Solution of problem 2426”, *School Science and Mathematics*, 55, 156 (1955)
- [17] Bland, M., “Geometrical Problems”, *Cambridge*, 228-229, (1819); 3. basım sayfa 228 (1827)
- [18] Rosenbaum, J., Buker, W., E., Steinberg, R., Starke, E., P., Butchert, J., H., “Solution of Problem E 571”, *American Mathematical Monthly*, 51, 91, (1944)
- [19] Coxeter, H., S., M., Greitzer, “Geometry Revisited”, MAA, 45-47, (1967)
- [20] Johnson, R., A., “Modern Geometry”, Houghton Mifflin, syf 78, (1929)
- [21] Charosh, M., “Solution of Problem 1713”, *School Science and Mathematics*, 41, 684-685, (1941)
- [22] Eilberg, A., “Solution of Problem 2419”, *School Science and Mathematics*, 55, 70-71 (1955)
- [23] Weisstein, Eric W., 2005 "Cross Ratio." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/CrossRatio.html>, (**Ziyaret tarihi: 20 Nisan 2007**)
- [24] Miller, L., H., “College Geometry”, *Appleton-Century-Crofts*, New York, 124-125, (1957)
- [25] Jones, D., “A double butterfly theorem”, *Mathematics Magazine*, 49, 2, 86-87, (1976)
- [26] Satyanarayana, K., “A Simple Proof of the butterfly problem”, *Crux Mathematicorum*, 7, 292, (1981)
- [27] Philomathe, “Solution of problem 590”, *School Science and Mathematics*, 19 (1919), 279
- [28] Casey, J., “A Sequel to Euclid” 6. edition, revised, 129, (1892).
- [29] Conrad S., R., “Another simple solution of the butterfly problem”, *Mathematics Magazine*, 46, 278-280, (1973)

- [30] Candy, A., L., “A general theorem relating to transversals and its consequences”, *Annals of Mathematics*, 175-176, (1896).
- [31] Luthar, R. S., “The three-Winged Butterfly Problem”, *Mathematics Magazine*, (1984).
- [32] Jones, D., “A double butterfly theorem” *Mathematics Magazine*, 86-87, (1976).
- [33] Hoehn, L., “A new Proof of Double Butterfly Theorem”, *Mathematics Magazine*, 63, 4, 256-257, (1990).
- [34] Honsberger, R., “The butterfly problem and other delicacies from the noble art of Euclidean geometry, Part I, *The Two-Year College Math. J*, 14, 2-5, (1983); Part 2, *The Two-Year College Math. J*, 14, 154-158, (1983).
- [35] Kung, S., “A Butterfly Theorem for Quadrilaterals”, *Mathematics Magazine*, 78, 4, 314-315, (2005).

## **ÖZGEÇMİŞ**

1980 yılında Balıkesir’ de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Balıkesir’ de tamamladı. 1996 yılında Balıkesir Lisesi’ nden mezun oldu. 2002 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nü bitirdi. 2002 yılında Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü’ nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2004 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü’ nde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.