KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELİSSEL EĞRİLERİN VE ALTMANİFOLDLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

DOKTORA TEZİ

Günay ÖZTÜRK

Anabilim Dalı: Matematik

I. Danışmanı: Prof. Dr. Servettin BİLİR

II. Danışmanı: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

KOCAELİ 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELİSSEL EĞRİLERİN VE ALTMANİFOLDLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

DOKTORA TEZİ

Günay ÖZTÜRK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30 Nisan 2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 07 Haziran 2007

I. Tez Danışmanı	II. Tez Danışmanı / (Üye)	Üye
Prof.Dr.Servettin BİLİR	Prof.Dr.Kadri ARSLAN	Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU
(..........................)	(..........................)	(..........................)

Üye	Üye
Doç.Dr.Ahmet KÜÇÜK	Yrd.Doç.Dr.Ahmet ZOR
(..........................)	(..........................)

KOCAELİ 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Eğriler, yüzeyler ve altmanifoldlar teorisi diferensiyel geometrinin en temel konularını oluşturur. Özellikle eğriler teorisi uygulamalı alanlarda çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Eğriler arasında yapılan sınıflandırmalarda en ilgi çekici olan ise bu çalışmada da ele aldığımız helissel eğrilerdir. Günümüzde uygulamalı geometri alanında oldukça sık kullanılan bu tip eğriler yeni araştırmaların baş konusu olmuştur. Bu çalışmada helissel eğriler ve altmanifoldlar ile ilgili araştırmalar yapılarak yeni araştırmalar için bazı sonuçlar verilmiştir.

Araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladığım ilk günden bu güne kadar bana destek olarak her konuda yardımlarını esirgemeyen ve bu çalışmayı yöneten I. Danışmanım sayın Prof. Dr. Servettin BİLİR e, bu çalışma konusunu veren ve yöneten, çalışmalarım esnasında her türlü desteği sağlayan ve yardımını esirgemeyen II. Danışmanım sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN a, fikir ve görüşlerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK e ve Yrd. Doç. Dr. Ahmet ZOR a, doktora süresince her kolaylığı sağlayan Matematik Bölümü Başkanları Prof. Haydar SOYSÜREN e ve Prof. Dr. Halis AYGÜN e, birlikte göreve başladığım arkadaşlarım Arş. Gör. İrem ÇİFTÇİ ve Arş. Gör. Evrim GÜVEN e teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışma esnasında beni destekleyen ve moralimi her zaman en üst düzeyde tutmamı sağlayan sevgili eşim Aslıhan ÖZTÜRK e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
SİMGELER iv
ÖZET v
İNGİLİZCE ÖZET vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 2
3. IE^n DE EĞRİLER 10
3.1. Giriş 10
3.2. W-Eğrileri 10
3.3. TC-Eğrileri 16
3.4. Sonlu Tip Eğriler 22
3.5. Genel Helisler 28
3.6. CCR-Eğrileri 31
4. HELİSSEL YÜZEYLER 37
4.1. Giriş 37
4.2. PHG-Özelikli Yüzeyler 38
4.3. PGNS-Özelikli Yüzeyler 48
5. HELİSSEL ALTMANİFOLDLAR 58
5.1. Giriş 58
5.2. Helissel Altmanifoldlar 58
5.3. TC-Altmanifoldları 59
5.4. TC-Yüzeyleri 65
KAYNAKLAR 72
ÖZGEÇMİŞ 75

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Küresel W-eğrisi....16
Şekil 3.2. Model helis....16
Şekil 3.3. $m = 1$ ve $n = 2$ değerleri için TC-eğrisi....18
Şekil 3.4. $x_1^2 + x_2^2 = 1$ birim silindiri üzerinde TC-eğrileri....19
Şekil 3.5. $p = 1$ ve $q = 1$ için tor eğrisi....21
Şekil 3.6. Küresel CCR-eğrisi....32
Şekil 4.1. $k = \theta$ değeri için Blaschke yüzeyi....40
Şekil 4.2. $k = \sin s$ değeri için Blaschke yüzeyi....41
Şekil 4.3. $k = s$ değeri için (4.3) yüzeyi....41

SİMGELER

A_ξ	: Şekil operatörü
C^∞	: Diferensiyellenebilme
$\tilde{d}$	: Darboux vektörü
D	: M^n nin IE^m deki koneksiyonu
IE^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
G	: indirgenmiş metric
H	: İkinci temel form
H	: M^n nin IE^m deki ortalama eğrilik vektörü
M^n	: n-boyutlu manifold
P	: nokta
IR	: Reel sayılar kümesi
S^{m-1}	: IE^m deki (m-1) boyutlu küre
$T(M)$	: Tanjant uzay
$T^\perp(M)$	: Normal uzay
$T_p(M)$	: $p \in M$ deki tanjant uzay
X	: immersiyon
x_*	: x in türev dönüşümü
∇	: Kovaryant türev
$\chi(M^n)$	: M^n nin C^∞ vektör alanları uzayı
$<,>$	: $\chi(M^n)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
∂	: Kısmi türev
Δ	: Laplace operatörü
$N_p^1(M^n)$	: Birinci normal uzay
$\tilde{R}$	: Riemann eğrilik tensörü
$\overline{\nabla}$	: van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu

Kısaltmalar

TC-eğrisi	: Teğetsel Kübik Eğri
CCR-eğrisi	: Eğrilikleri Oranları Sabit Eğri
PHG-yüzey	: Noktasal Helissel Geodezikli Yüzey
PGNS-yüzey	: Noktasal Geodezik Normal Kesitli Yüzey
TC-yüzey	: Teğetsel Kübik Yüzey

HELİSSEL EĞRİLERİN VE ALTMANİFOLDLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

Günay ÖZTÜRK

Anahtar Kelimeler: Frenet Eğrisi, Helis, W-eğrisi, Genel Helis, Sonlu Tip Eğri, Teğetsel Kübik Eğri, Harmonik Eğrilik, Darboux Vektörü, Darboux Köşesi, Eğrilikleri Oranları Sabit Eğri, Helissel Daldırma, Normal Kesit, Blaschke Yüzeyi, Helissel Altmanifold, Teğetsel Kübik Altmanifold.

Özet: Bu çalışmada, helissel eğriler, yüzeyler ve altmanifoldlar incelenmiştir. Öncelikle helissel eğriler ele alınarak bu eğrilerin sınıflandırılması yapılmıştır. Bir eğrinin TC-eğrisi olma şartı verilerek bu eğrilerin sonlu tipte olma koşulları araştırılmıştır. Sabit harmonik eğrilikli eğrilerin Darboux köşeye sahip olduğu gösterilmiştir. Eğrilikleri oranları sabit olan eğrilerin sonlu tip eğri olduğu ispatlanmıştır. PGNS-özelikli yüzeyler ile PHG-özelikli yüzeyler arasında bağıntılar kurulmuştur. PHG-özelikli yüzeylerin AW(3)-tipinde olduğu gösterilmiştir. TC-altmanifoldu olma koşulu verilmiş ve bu koşula göre yüzey örnekleri verilerek bazı yüzeylerin sınıflandırılması yapılmıştır. Son olarak, IE^5 te her bir zayıf PHG-özelikli yüzeyin TC-yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

A CHARACTERIZATION OF HELICAL CURVES AND SUBMANIFOLDS

Günay ÖZTÜRK

Key Words: Frenet Curve, Helix, W-curve, General Helix, Finite Type Curve, Tangentially Cubic Curve, Harmonic Curvature, Darboux Vector, Darboux Vertex, Curve of Constant Curvature Ratios, Helical Immersion, Normal Section, Blaschke Surface, Helical Submanifold, Tangentially Cubic Submanifold.

Abstract: In this thesis, helical curves, surfaces and submanifolds were considered. First, classification of helical curves were given. An equation was given for a curve to be TC-curve and the condition was search for finite type curve to be TC-curve. A curve which has constant harmonic curvatures has the Darboux vertex. It was proved that a curve which has constant curvature ratios are of finite type. The relationship between PGNS-surface and PHG-surface were built. It was showed that the PGH-surfaces are of AW(3)-type. The condition was given for a submanifold to be a TC-submanifold and then a classification of these type of submanifolds were obtained. Finally, it has been shown that every weak PHG-surface is a TC-surface.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, helissel eğrilerin, yüzeylerin ve altmanifoldların bir karakterizasyonunu belirlemektir. Ayrıca bu tip eğrileri ve yüzeyleri sınıflandırmaktır.

Bu çalışma, birinci bölüm giriş olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm ileriki bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir.

Üçüncü bölümde IE^n de eğriler ele alınıp, bu eğrilerin W-eğrisi, sonlu tipten eğri, TC-eğrisi, genel helis ve CCR-eğrisi olma koşulları verilmiştir. Bu eğriler arasında bağıntılar bulunup sınıflandırmalar yapılmıştır. TC-eğrilerinin sonlu tip eğri olma koşulları bulunmuştur. Ayrıca tüm CCR-eğrilerinin sonlu tipten olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde PGNS-özelikli ve PHG-özelikli yüzeylerin sınıflandırması yapılıp bu yüzeyler arasındaki bağıntılar verilmiştir. PHG-özelikli yüzeylerin AW(k)-tipinde olma koşulları incelenmiştir.

Beşinci bölümde TC-altmanifoldları tanımlanarak bu altmanifoldlara örnekler verilmiştir. Sonlu tip altmanifoldların TC-altmanifoldu olma koşulları bulunmuştur. Ayrıca IE^5 de zayıf PHG-özelikli yüzeylerin birer TC-yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teorem ve tanımlarla bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1: M^n, n-boyutlu diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M^n üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve M^n den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M^n, IR)$ olmak üzere, M^n üzerinde

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, IR)$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise M^n ye bir Riemann Manifoldu denir. Burada g ye Riemann metriği (veya metrik tensör) adı verilir [9].

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M^n ye bağlantılı manifold adı verilir.

Tanım 2.2: M^n diferensiyellenebilir manifold ve M^n üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M^n) ; \quad (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall$ f, g $\in C^\infty(M^n, IR)$, $\forall$ $X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

lineerlik özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M^n üzerinde bir Afin koneksiyon adı verilir [23]. Burada ∇_X operatörüne X e göre kovaryant türev denir.

Tanım 2.3: M^n bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall\ X, Y \in \chi(M^n)$ için, ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon özeliği)
ii) $X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$ (koneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu (veya M^n nin Levi-Civita Koneksiyonu) adı verilir [9, 23]. Bu koneksiyon kısaca M^n deki Riemann Koneksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.4: M^n ve $\widetilde{M}^{n+d}$ sırasıyla n ve $n+d$-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere f: $M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+d}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M^n$ için

$$df_p: T_p(M^n) \rightarrow T_{f(p)}(\widetilde{M}^{n+d})$$

dönüşümü birebir ise f ye bir daldırma (imersiyon) denir. Ayrıca, f: $M^n \rightarrow \chi(M^n)$ bir homeomorfizm ise f ye bir gömme (imbedding) denir. Eğer $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ ve $f : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+d}$ dönüşümü bir gömme ise M^n ye $\widetilde{M}^{n+d}$ nin n-boyutlu bir gömülen (immersed) altmanifoldu adı verilir. Bununla beraber f bir daldırma olmak üzere $\forall\ X, Y \in T_p M^n$ için,

$$< df_p(X), df_p(Y) >_{f(p)} = < X, Y >_p$$

şartını sağlıyorsa f ye bir izometrik daldırma adı verilir [9].

Tanım 2.5: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}^{n+d}$ de kovaryant türev olsun. Böylece her $X, Y \in \chi(M^n)$ ve her p için $(\widetilde{\nabla}_X Y)_p$ tanımlıdır.

Ayrıca $(\nabla_X Y)_p \in T_p M^n$ ve $h_p(X, Y) \in T_p^{\perp} M^n$ olmak üzere,

$$(\widetilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \tag{2.1}$$

biçiminde Gauss Denklemi elde edilir. Burada h, M^n nin ikinci temel formudur. Eğer $h = 0$ ise M^n ye toplam (total) geodezik denir [9].

Önerme 2.6: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve g ile $\widetilde{g}$ de sırasıyla M^n ve $\widetilde{M}^{n+d}$ üzerinde tanımlı metrikler olsun. Böylece $h(X, Y)$, M^n üzerinde bir normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. Ayrıca ∇ da M^n üzerinde indirgenmiş $g = f^*(\widetilde{g})$ metriğinin bir Riemann koneksiyonudur [9].

Tanım 2.7: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold olmak üzere M^n ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\widetilde{\nabla}_X \xi$ nın teğet bileşeni $-A_\xi(X)$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere;

$$(\widetilde{\nabla}_X \xi)_X = -(A_\xi(X))_X + (D_X \xi)_X \tag{2.2}$$

şeklinde Weingarten Denklemi elde edilir. Burada A_ξ ya şekil operatörü, D ye de M^n nin NM^n normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir.

Önerme 2.8: i) $A_\xi(X)$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.
ii) M^n nin her bir ξ normal vektörü ve X, Y tanjant vektörleri için

$$g(A_\xi(X), Y) = \widetilde{g}(h(X, Y), \xi) \tag{2.3}$$

dır [9].

Tanım 2.9: $M^n \subset \widetilde{M}^{n+d}$ altmanifoldunun bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Eğer A_ξ daima özdeşlik fonksiyonu ile orantılı ise yani bir ρ fonksiyonu için

$$A = \rho\, I \tag{2.4}$$

oluyorsa ξ ya M^n nin umbilik kesiti (veya M^n, ξ ya göre umbiliktir) denir. Eğer M^n altmanifoldu M^n deki her birim normale göre umbilik ise M^n ye toplam (total) umbiliktir denir [9].

Önerme 2.10: $T^{\perp}M^n$ üzerinde indirgenmiş metrikle $M^n \subset \widetilde{M}^{n+d}$ nin NM^n normal demetinde

$$D : TM^n \times NM^n \to NM^n$$
$$(X, \xi) \to D(X, \xi) = D_X\xi$$

biçiminde tanımlanan D dönüşümü bir metrik koneksiyondur.

İkinci temel form h nın türevi $\overline{\nabla}_X h$;

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\nabla}$ ya M^n nin Van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu adı verilir. Eğer $\overline{\nabla} h = 0$ ise M^n nin ikinci temel formu paraleldir (veya 1-paraleldir) denir.

Böylece M^n nin NM^n normal demetinde tanımlanan $\overline{\nabla}$ normal koneksiyonu;

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)) = (\overline{\nabla}_Z h)(X,Y) \tag{2.6}$$

şeklinde Codazzi Eşitliğini sağlar [9].

$\overline{\nabla}h$ nın kovaryant türevi $\overline{\nabla}\overline{\nabla}h$ ya M^n nin üçüncü temel formu adı verilir ve $\forall\ X, Y, Z,\ W \in \chi(M^n)$ için

$$(\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_W((\overline{\nabla}_X h)(Y,Z)) - (\overline{\nabla}_X h)(\nabla_W Y, Z) \\ - (\overline{\nabla}_X h)(Y, \nabla_W Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(\nabla_W X, Z) \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $\overline{\nabla}\overline{\nabla}h = 0$ ise M^n ye paralel 3. temel formlu veya 2-paraleldir denir [8, 18].

Tanım 2.11: M^n bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Riemann koneksiyonu olsun. Böylece; $\beta : I \subseteq R \to M$ eğrisi için,

$$\nabla_{\beta'(t)}\beta'(t) = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanıyorsa β ya M^n de bir geodezik eğri ve $\forall X \in \chi(M^n)$ için $\beta(0) = p$ ve $\beta'(0) = X_p$ olacak şekilde tanımlanan , $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M^n$ geodeziğine (p, X_p) nin belirlediği geodezik adı verilir [9].

Tanım 2.12: $\beta : I \subseteq R \to M^n$ eğrisi, $\forall\ s \in I$ için $\beta'(s) \neq 0$ şartını sağlıyorsa β ya bir regüler eğri denir [32].

Tanım 2.13: M^n bir Riemann manifoldu ve ξ bir normal vektör alanı olsun. Eğer M^n ye teğet herhangi bir X vektör alanı için $D_X\xi = 0$ ise ξ ya paralel normal vektör alanı denir [9].

Tanım 2.14: M^n , $\widetilde{M}^{n+d}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu ve $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $T_p M^n$ nin $p \in M^n$ noktasındaki dik çatı alanları olsun. Böylece

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanan $H \in N_p M^n$ vektörüne M^n nin ortalama eğrilik vektörü adı verilir.

Eğer $H = 0$ ise M^n altmanifolduna minimaldir denir. Ayrıca $\|H\|$ ya M^n nin ortalama eğriliği adı verilir [9].

M^n üzerinde teğet ve normal vektörler, sırasıyla, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ve $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{n+d}$ olmak üzere, $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{n+d} \}$ M^n nin ortonormal lokal çatısı olsun. Vektör değerli bir V fonksiyonu üzerinde Δ Laplace operatörü,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V - \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} V\right] \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer H vektörü e_{n+1} vektörüne paralel seçilirse, yani $H = \alpha e_{n+1}$, ($\alpha = \|H\|$) ise,

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} (\alpha e_{n+1}) - \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} (\alpha e_{n+1})\right] \tag{2.11}$$

dır. Burada α skalar değerli bir fonksiyon olup

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} (\alpha) - \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} (\alpha)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} (\alpha) - \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} (\alpha)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\nabla_{e_i} e_i (\alpha) - e_i (e_i (\alpha))\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

dır. Eğer $\Delta H = 0$ şartını sağlıyorsa M^n ye harmonik ortalama eğriliklidir (yani, biharmonik altmanifold) denir [26].

Ayrıca D normal koneksiyonuna karşılık gelen D^D operatörü için,

$$D^D H = \sum_{i=1}^{n}\left(D_{\nabla_{e_i}e_i} H - D_{e_i} D_{e_i} H\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[D_{\nabla_{e_i}e_i}(\alpha e_{n+1}) - D_{e_i} D_{e_i}(\alpha e_{n+1})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(\Delta\alpha)e_{n+1} + \alpha D_{\nabla_{e_i}e_i} e_{n+1} - 2(e_i\alpha)D_{e_i} e_{n+1} - \alpha D_{e_i} D_{e_i} e_{n+1}\right]$$

elde edilir [26].

Tanım 2.15: M^n, N nin bir altmanifoldu olsun. Böylece N nin eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca M^n nin eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$\widetilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle \tag{2.14}$$

dir. Bu denklem Gauss denklemi olarak adlandırılır. Bununla beraber $\widetilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşeni,

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{2.15}$$

olup buna Codazzi denklemi adı verilir.

Ayrıca M^n nin normal vektör alanları ξ ve η için M^n nin normal demeti NM^n üzerindeki eğrilik tensörü R^D ise,

$$R^D(X,Y;\xi,\eta) = \widetilde{R}(X,Y;\xi,\eta) + \langle [A_\xi, A_\eta](X), Y\rangle \tag{2.16}$$

biçiminde tanımlanır. Burada [,] Lie parantez operatörü olup,

$$[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi \tag{2.17}$$

dir.

Yukarıdaki (2.16) denklemi Ricci denklemi olarak adlandırılır. Eğer $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

$$R^D(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]} = 0 \tag{2.18}$$

ise M^n altmanifolduna flat normal koneksiyonludur denir [9].

$M^n \subseteq IE^m$ bağlantılı bir yüzey olsun. e_3, H ortalama eğrilik vektörü yönünde bir vektör ve $A_{e_6} = A_{e_7} = \ldots = A_{e_m} = 0$ olmak üzere $\{e_3, e_4, e_5, \ldots, e_m\}$ M^n üzerinde ortalama vektörler olsun. A_{e_3} in karakteristik vektörleri olacak şekilde $T_p M^n$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Lineer dönüşümler ve bunların matrisleri yardımıyla

$$A_1 := A_{e_3} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},\ A_2 := A_{e_4} = \begin{bmatrix} f & a \\ a & -f \end{bmatrix},\ A_3 := A_{e_5} = \begin{bmatrix} g & b \\ b & -g \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

elde edilir. M^n yüzeyi normal flat (yani $R^D = 0$) ise M^n nin şekil operatörü matrisleri köşegenleştirilebilir ve böylece

$$A_1 := A_{e_3} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},\ A_2 := A_{e_4} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & -f \end{bmatrix},\ A_3 := A_{e_5} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

biçimine dönüşür [9].

3. IE^n DE EĞRİLER

3.1. Giriş

Bu bölümde IE^n de W-eğrileri (vida eğrileri ya da helisler), TC-eğrileri (teğetsel kübik eğriler), sonlu tip eğriler, genel helisler ve CCR-eğrileri (eğrilikleri oranları sabit olan eğriler) incelenmiştir.

3.2. W-Eğrileri

Tanım 3.2.1: $I \subset IR$ olmak üzere $\gamma : I \to IE^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için γ nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(s), \gamma''(s), ..., \gamma^{(d)}(s)$ lineer bağımsız olup $\gamma'(s), \gamma''(s), ..., \gamma^{(d+1)}(s)$ vektörleri lineer bağımlı ise γ eğrisine d-mertebeli Frenet eğrisi denir [24].

IE^n nin d-mertebeli her bir γ Frenet eğrisi üzerinde $\{E_1, E_2, ..., E_d\}$ biçiminde oluşturulan ortonormal d-çatısı ve $k_1, ..., k_{d-1} : I \to IR$ Frenet eğrilik fonksiyonları için;

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{d-1}' \\ E_d' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{d-1} \\ E_d \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

dır. Burada v, γ eğrisinin hızıdır. Gram-Schmidt ortonormalleştirme işlemi yardımıyla,

$$v_1 = \gamma' \tag{3.2}$$

$$v_d = \gamma^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} < \gamma^{(k)}, v_i > \frac{v_i}{\|v_i\|} \tag{3.3}$$

$$k_{d-1} = \frac{\|v_k\|}{\|v_{k-1}\|\|v_1\|} \qquad E_d = \frac{v_k}{\|v_k\|} \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada $k \in \{2,3,...,d\}$ ve $k_d = k_{d+1} = ... = k_{n-1} = 0$ dır [22].

Önerme 3.2.2: $\gamma : I \subset IR \to IE^{n-1} \subset IE^n$ bir regüler eğri ve $\{E_2,...,E_n\}$ γ nın, $\gamma(s)$ noktasındaki dik çatı alanı olsun. Bu taktirde,

$$\gamma^{(k)} = \sum_{j=2}^{n} \Delta_{kj} E_j \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

dır. Burada

$$\Delta_{22} = k_1, \quad \Delta_{33} = k_1 k_2, ..., \Delta_{nn} = k_1 k_2 ... k_{n-1}$$

dır. $\Delta_{nj} (2 \le j \le n)$ ler, k_j ler veya k_j lerle bunların s yay parametresine göre türevlerinden oluşur [24].

Tanım 3.2.3: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ d-mertebeli regüler bir eğri ve γ nın Frenet eğrilikleri k_i ler $(1 \le i \le d-1)$ sabit ise, γ ya helis veya vida eğrisi denir [16].

Bu eğriler Öklit dönüşümlerinin 1-parametreli grubunun yörüngeleri olduklarından F. Klein ve S. Lie bunları W-eğrileri olarak adlandırmışlardır [27].

Mertebesi 1 e eşit olan W-eğrisi düz doğru, mertebesi 2 ye eşit olan W-eğrisi çember ve mertebesi 3 e eşit olan W-eğrisi ise dik dairesel helisdir.

Önerme 3.2.4: $\gamma : I \to IE^n$ yay parametresiyle parametrelendirilmiş herhangi bir eğri olsun. γ nın eğrilikleri $k_1,...,k_m$ $m \in \{1.,2,...,n-1\}$ sabit ise o zaman

1) $i \in \{1,2,...,d\}$ için

$$\gamma^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} P_{ij}(k_1, k_2,..., k_{i-2})E_j + (\prod_{j=1}^{i-1} k_j)E_i \tag{3.5}$$

veya

2) $i \in \{d+1, d+2,..., m+1\}$ için

$$\gamma^{(i)} = \sum_{j=1}^{d} P_{ij}(k_1, k_2,..., k_{d-1})E_j \tag{3.6}$$

dır. Burada P_{ij} ler polinomlar ve $d = \min(\{k \in \{1,2,...,m\} : k_k = 0\} \cup \{m+1\})$ dır [15].

Önerme 3.2.5: $\gamma : I \to IE^n$ yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Bu taktirde $m \in \{1.,2,...,n-1\}$ ise $k_1,...,k_m$ eğriliklerinin sabit olması için gerek ve yeter şart $\|\gamma''\|, \|\gamma'''\|,..., \|\gamma^{(m+1)}\|$ lerin sabit olmasıdır [15].

Öklit uzayında birim hızlı ve 2k-mertebeli bir W-eğrisi

$$\gamma(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos \mu_i s + b_i \sin \mu_i s) \tag{3.7}$$

biçiminde, birim hızlı ve (2k+1)-mertebeli bir W-eğrisi ise

$$\gamma(s) = a_0 + b_0 s + \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos \mu_i s + b_i \sin \mu_i s) \tag{3.8}$$

biçiminde parametrelendirilir. Burada $a_0, b_0, a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ lar Öklit uzayında sabit vektörler ve $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_k$ lar pozitif reel sayılardır [21].

Bir W-eğrisinin kapalı olması için gerek ve yeter şart mertebesinin çift ve μ_i lerin reel sayıların rasyonel çarpımları olmasıdır. Bununla beraber Öklit uzayındaki metrikle, mertebesi 2k olan IE^{2k} daki $2\pi r$ uzunluğundaki birim hızlı kapalı bir W-eğrisi

$$\gamma(s) = \frac{r}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{t_1}\cos\frac{t_1 s}{r} - \frac{1}{t_1}\sin\frac{t_1 s}{r}, ..., \frac{1}{t_k}\cos\frac{t_k s}{r} - \frac{1}{t_k}\sin\frac{t_k s}{r}\right) \quad k \in IR^+ \tag{3.9}$$

biçimindedir. Burada $t_1, t_2, ..., t_k$ pozitif tamsayılardır [11].

IE^{2n} nin bir alt kümesi olan ve

$$x(u_1, u_2, ..., u_n) = (r_1 \cos u_1, r_1 \sin u_1, r_2 \cos u_2, r_2 \sin u_2, ..., r_n \cos u_n, r_n \sin u_n) \tag{3.10}$$

şeklinde parametrelendirilmiş yüzeye IE^{2n} de düz tor denir. Burada $u_i \in IR$ dir.

Benzer şekilde, IE^{2n+1} nin bir alt kümesi olan ve

$$x(u_1, u_2, ..., u_n) = (r_1 \cos u_1, r_1 \sin u_1, r_2 \cos u_2, r_2 \sin u_2, ..., r_n \cos u_n, r_n \sin u_n, a) \tag{3.11}$$

şeklinde parametrelendirilmiş yüzeye IE^{2n+1} de düz tor denir. Burada $u_i \in IR$ ve a reel bir sabittir.

Düz tor üzerinde bulunan

$$\beta(t) = x(m_1 t, m_2 t, ..., m_n t) \tag{3.12}$$

tipinde tüm eğriler sabit eğriliklere sahiptir, yani W-eğrisidir [35].

Önerme 3.2.6: $\beta \in IE^m$ bir W-eğrisidir $\Leftrightarrow$

i) $m = 2n$ koşulunda, düz tor üzerinde burulmuş geodezik, ya da

ii) $m = 2n + 1$ koşulunda, düz tor üzerinde burulmuş geodezik ile parametrenin bir lineer fonksiyonu ile çarpımıdır [31].

Örnek 3.2.7: $\beta : I \to IE^4$ Frenet eğrisi

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\left(\frac{r_1}{m_1}\sin(m_1 s), -\frac{r_1}{m_1}\cos(m_1 s), \frac{r_2}{m_2}\sin(m_2 s), \frac{r_2}{m_2}\cos(m_2 s)\right) \tag{3.13}$$

şeklinde parametrelendirilsin. O zaman β eğrisi bir küresel W-eğrisidir. Burada

$$r_1^2 m_2^2 + r_2^2 m_1^2 = m_1^2 m_2^2 (r_1^2 + r_2^2)$$

dır [31]. Bu eğrinin $x_4 = 0$ a izdüşümü Şekil 3.1 de verilmiştir.

Örnek 3.2.8: IE^5 te bir γ eğrisi

$$\gamma_i(t) = A_i \cos t + B_i \sin t, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlansın. Burada A_i, B_i sabitleri

$$\sum A_i^2 = 1, \quad \sum B_i^2 = 1, \quad \sum A_i B_i = 0 \ ,$$

biçiminde verildiğinde γ, 2-mertebeli bir W-eğrisi (çember) dir [7].

Örnek 3.2.9: IE^5 te bir γ eğrisi

$$\gamma_i(t) = A_i \cos t + B_i \sin t + C_i t + D_i, \quad i=1,2,3,4,5 \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlansın. Burada A_i, B_i ve C_i sabitleri

$$\sum A_i^2 = a^2, \quad \sum B_i^2 = a^2, \quad \sum C_i^2 = 1 - a^2 > 0$$
$$\sum A_i B_i = 0, \quad \sum A_i C_i = 0, \quad \sum B_i C_i = 0$$

biçiminde verildiğinde γ 3-mertebeli bir W-eğrisi (helis) dir [7].

Örnek 3.2.10: (S^3 te Helisler) S^3, 4-boyutlu Öklit uzayı IE^4 te gömülmüş bir birim 3-küre olsun. $S^3 \subset IE^4$ te model helis s yay parametresiyle

$$\gamma(s) = \left(\cos\phi\cos(as), \cos\phi\sin(as), \sin\phi\cos(bs), \sin\phi\sin(bs)\right) \tag{3.16}$$

şeklinde verilir ve

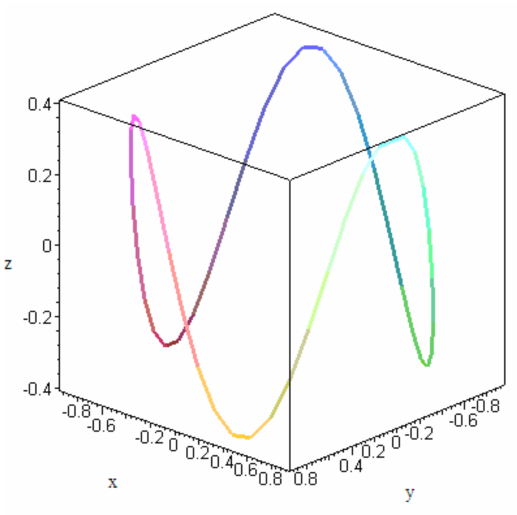
$$a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi = 1$$

dır. γ eğrisi, $x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\phi$, $x_3^2 + x_4^2 = \sin^2\phi$ düz tor yüzeyinde yatar.

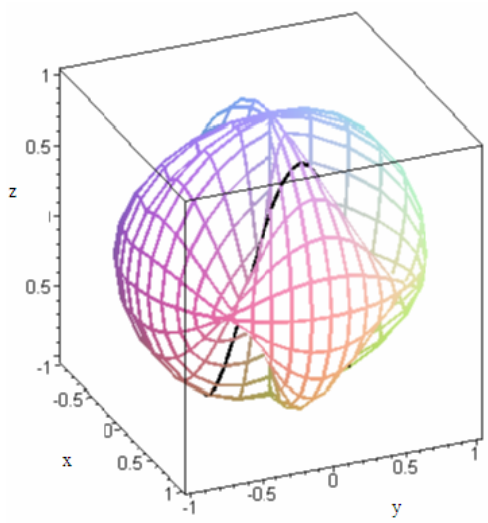
γ eğrisinin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)}, \quad \tau = ab$$

dır. Böylece γ, $S^3 \subset IE^4$ te W-eğrisidir [38]. Bu eğrinin $x_4 = 0$ a izdüşümü Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.1: Küresel W-eğrisi



Şekil 3.2: Model helis

3.3. TC-Eğrileri

$\gamma : I \subset IR \to IE^n$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet çatısı $E_1, E_2, ..., E_n$ ve eğrilikleri de $k_1, ..., k_{n-1}$ ile tanımlandığında

$$\gamma'(s) = E_1(s) \tag{3.17}$$

$$\gamma''(s) = k_1(s)E_2(s) \tag{3.18}$$

$$\gamma'''(s) = -k_1^2(s)E_1(s) + k_1'(s)E_2(s) + k_1(s)k_2(s)E_3(s) \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{(iv)}(s) = &-3k_1(s)k_1'(s)E_1(s) + (-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1(s)k_2^2(s))E_2(s) + (2k_1'(s)k_2(s) \\ &+ k_1(s)k_2'(s))E_3 + k_1(s)k_2(s)k_3(s)E_4(s)\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Tanım 3.3.1: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ bir regüler eğri olsun. Eğer γ eğrisinin dördüncü türevi $\gamma^{(iv)}(s)$, birinci türevi $\gamma'(s)$ ye dik ise, γ eğrisine IE^n nin bir teğetsel kübik eğrisi (TC-eğrisi) denir.

Böylece bir eğrinin TC-eğrisi olma koşulu

$$0 = <\gamma^{(iv)}(s), \gamma'(s)> = -3k_1(s)k_1'(s) \tag{3.21}$$

şeklindedir.

(3.21) eşitliği göz önüne alınırsa yay uzunluğu parametrizasyonuyla verilen bir γ eğrisinin TC-eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin sabit k_1 eğriliğine sahip olmasıdır [34].

Düzlemde sadece çember ve düz doğru TC-eğrisidir.

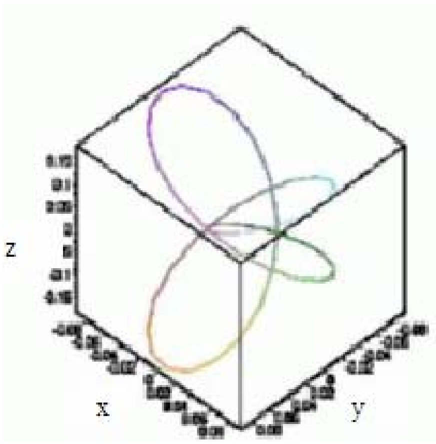
Tüm W-eğrileri birer TC-eğrisidir.

3-boyutlu Öklit uzayı IE^3 de sabit k_1 eğrilikli eğrilerin karakterizasyonu ilk olarak E. Salkowski tarafından verilmiştir [37].

Bu eğrilerin parametrik gösterimi

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\sin(1+2n)t + \frac{1+n}{4(1-2n)}\sin(1-2n)t + \frac{1}{2}\sin t\right) \\
y(t) &= \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\cos(1+2n)t + \frac{1+n}{4(1-2n)}\cos(1-2n)t + \frac{1}{2}\cos t\right) \\
z(t) &= \frac{1}{4m\sqrt{1+m^2}}\cos 2nt
\end{aligned} \tag{3.22}$$

biçimindedir. Burada $n \neq \frac{1}{2}$; $m \in IR/\{0\}$ dır. $m = 1$ ve $n = 2$ değerleri için TC-eğrisi Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3: $m = 1$ ve $n = 2$ değerleri için TC-eğrisi

TC-eğrisi

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \subset S$$

için $\gamma^{(iv)}(s)$ dördüncü türevi S yüzeyine ortogonal olmalıdır. Bu ise $\gamma_3^{(iv)}(s) = 0$ ve

$$\gamma_3(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_3 s^3$$

fonksiyonunun kübik olduğunu gösterir.

Diğer iki $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ fonksiyonları S yüzeyinin $(\gamma_1(s), \gamma_2(s), 0)$ parametrizasyonu ile verilen dayanak eğrisine ortogonaldir.

Böylece bu parametrizasyon dayanak eğrisinin teğetsel kübik parametrizasyonudur.

Örnek 3.3.2: TC-eğrilerinin özel aileleri, $x_1^2 + x_2^2 = 1$ birim silindiri üzerinde alınabilir ve bu eğriler,

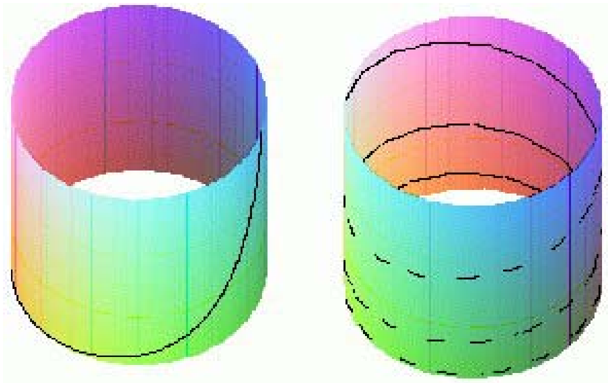
a) yay-uzunluğu parametrizasyonu ile

$$\gamma(t) = \left(\cos(at+b), \sin(at+b), a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right), \tag{3.23}$$

b) çember parametrizasyonu ile

$$\gamma(t) = \left(\cos(\ln|C+t| + D), \sin(\ln|C+t| + D), a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) \tag{3.24}$$

şeklindedir [34]. (Şekil 3.4).



Şekil 3.4: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ birim silindiri üzerinde TC-eğrileri

Tanım 3.3.3: Polinom spirali, eğrilik fonksiyonları, yay-uzunluğu parametresinin polinom fonksiyonları olan bir düzlem eğrisidir. Böylece tüm polinom spiralleri

$$\beta(s) = \left(\int_0^s \cos(P_k(t)dt, \int_0^s \sin(P_k(t)dt\right) \tag{3.25}$$

parametrizasyonu ile verilebilir [18]. Burada eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_\gamma(s) = P_k^{'}(t) \tag{3.26}$$

biçiminde tanımlanan $(k-1)$-dereceli polinom fonksiyonudur.

$$S := x(s,v) = \left(\int_0^s \cos(P_k(t)dt, \int_0^s \sin(P_k(t)dt, v \right) \quad (3.27)$$

parametrizasyonu ile verilmiş S silindir yüzeyi ele alınsın.

Eğer S nin $c(t)$ dayanak eğrisi bir TC-eğrisi ise o zaman (3.21) ve (3.26) eşitliklerinden

$$\kappa_\gamma^{'}(s) = P_k^{''}(t) = 0$$

elde edilir. Böylece $P_k(t) = at + b$ olur. Buna göre S dik dairesel silindire dönüşür ve S üzerindeki TC-eğrileri Örnek 3.3.2 den

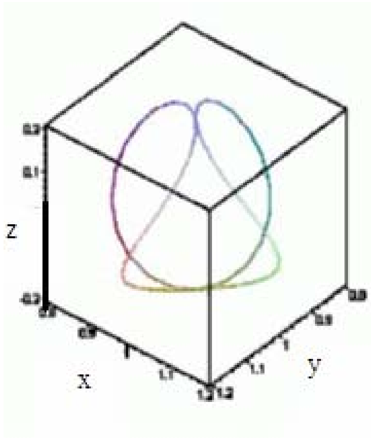
$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(at+b)dt, \int_0^s \sin(at+b)dt, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \right) \quad (3.28)$$

formunda olur.

Örnek 3.3.4: b, $0 < b < 1$, yarıçaplı standart dönel tor yüzeyi üzerinde bir (p,q) tor eğrisi ($p,q \neq 0$)

$$\beta(t) = \left((1 + b\cos(qt)), \cos(pt), (1 + b\cos(qt)\sin(pt), b\sin(qt)\right) \quad (3.29)$$

şeklinde parametrelendirilmiştir [19]. Eğer $b = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$ ise β eğrisi bir TC-eğrisi olur (Şekil 3.5).



Şekil 3.5: $p = 1$ ve $q = 2$ için tor eğrisi

Örnek 3.3.5: Dayanak eğrisi

$$h(s) = \cos h\sqrt{3}s$$

hipersikloidi olan silindir yüzeyi üzerinde

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos h\sqrt{3}s\sin s + \sqrt{3}\sin h\sqrt{3}s\cos s \\ -\cos h\sqrt{3}s\cos s + \sqrt{3}\sin h\sqrt{3}s\sin s \\ a_0 + a_1 s + ... + a_3 s^3 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

parametrelendirilmesiyle verilen eğri TC-eğrisidir [34].

3.4. Sonlu Tip Eğriler

$f = f(s)$, $2\pi r$ periyotlu periyodik bir fonksiyon olmak üzere $f(s)$ nin Fourier serisine açılımı

$$f(s) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{s}{r} + a_2 \cos\frac{2s}{r} + ... + b_1 \sin\frac{s}{r} + b_2 \sin\frac{2s}{r} + ... \tag{3.31}$$

biçimindedir. Burada a_k ve b_k,

$$a_k = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi r}^{\pi r} f(s)\cos\frac{ks}{r}ds, \qquad k = 0,1,2,... \tag{3.32}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi r}^{\pi r} f(s)\sin\frac{ks}{r}ds, \qquad k = 1,2,... \tag{3.33}$$

ile verilen Fourier sabitleridir.

IE^n de $2\pi r$ yay uzunluklu kapalı bir eğri γ olsun. Bu taktirde $x : \gamma \to IE^n$ bir izometrik daldırma ise x in yer vektörünün j-inci türevi

$$x^{(j)} = \frac{d^j x}{ds^j}$$

dır. Böylece x in Laplace operatörü

$\Delta = \frac{-d^2}{ds^2}$ olduğundan

$$\Delta^j H = (-1)^j x^{(2j+2)}, \quad j = 0,1,2,...$$

dır.

Eğer x sonlu tipten ise, x_i koordinat fonksiyonları aşağıdaki sabit katsayılı adi diferensiyel denklemi sistemini sağlar;

$$x_i^{(2k+2)} + c_1 x_i^{(2k)} + \ldots + c_{k-1} x_i^{(4)} + c_k x_i^{(2)} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m\,.$$

Burada $k \geq 1$ tamsayılar ve $c_1,\ldots,c_k$ lar sabitlerdir.

x_i çözümleri $2\pi r$ periyotlu periyodik fonksiyonlar olduğundan her bir x_i aşağıdaki periyodik çözümlerin sonlu bir lineer kombinasyonudur;

$$1, \quad \cos\left(\frac{n_i s}{r}\right), \quad \sin\left(\frac{m_i s}{r}\right), \quad n_i, m_i \in Z$$

bu sebeple her bir x_i koordinat fonksiyonu

$$x_i = c_i + \sum_{t=p_A}^{q_A}\left(a_A(t)\cos\frac{ts}{r} + b_A(t)\sin\frac{ts}{r}\right) \tag{3.34}$$

biçimindedir. Burada c_i, $a_A(t)$, $b_A(t)$ $(A = 1,\ldots,n)$ uygun sabitler ve p_A, q_A tamsayıdır. Böylece her bir x_i koordinat fonksiyonu sonlu Fourier toplamına sahiptir.

Benzer şekilde her bir x_i koordinat fonksiyonu sonlu toplamlı Fourier açılımına sahipse x daldırması sonlu tiptendir [11].

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4.1: γ , IE^n de $2\pi r$ yay uzunluklu kapalı bir eğri olsun. Bu taktirde $x : \gamma \rightarrow IE^n$ izometrik daldırması sonlu tiptendir ancak ve ancak

$$\gamma(s)=a_0+\sum_{t=1}^{\infty}\left(a_t\cos\frac{ts}{r}+b_t\sin\frac{ts}{r}\right) \tag{3.35}$$

eşitliğinin toplam kısmında sadece sonlu sayıda sıfır olmayan terim olmalıdır [10].

Böylece Teorem 3.4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.4.2: IE^n deki her kapalı k-tipindeki γ eğrisi

$$\gamma(s)=a_0+\sum_{i=1}^{k}\left(a_i\cos\lambda_{t_i}s+b_i\sin\lambda_{t_i}s\right) \tag{3.36}$$

formunda yazılabilir. Burada $\{t_1,...,t_k\}$ sıralı indisler ve $a_0,a_1,...,a_k$, $b_1,...,b_k$ lar aynı anda sıfır olmayacak şekilde IE^n de vektörlerdir. Üstelik, eğer $q=t_k$, γ eğrisinin en üst sınırı ise o zaman $|a_q|=|b_q|\neq 0$ dır [12].

Önerme 3.4.3: IE^n deki her null k-tipindeki bir γ eğrisi

$$\gamma(s)=a_0+b_0s+\sum_{i=1}^{k}\left(a_i\cos\lambda_{t_i}s+b_i\sin\lambda_{t_i}s\right) \tag{3.37}$$

formunda yazılabilir. Burada $\{t_1,...,t_k\}$ sıralı indisler ve $a_0,b_0,a_1,...,a_k,b_1,...,b_k$ lar aynı anda sıfır olmayacak ve $b_0\neq 0$ olacak şekilde IE^n de vektörlerdir. Üstelik, eğer $q=t_k$, γ eğrisinin en üst sınırı ise o zaman $|a_q|=|b_q|\neq 0$ dır [12].

Önerme 3.4.4: 1) IE^n nin her k-tipindeki eğrisi, IE^n nin afin 2k alt uzayında yatar [12].

2) IE^n nin her null k-tipindeki eğrisi, IE^n nin afin (2k-1) alt uzayında yatar [12].

Örnek 3.4.5: γ eğrisi 3-tipinde bir eğri olsun ve

$$\gamma(s)=\begin{pmatrix} u\cos(\frac{p_3 s}{r})-v\cos(\frac{p_1 s}{r}+\theta), u\sin(\frac{p_3 s}{r})+v\sin(\frac{p_1 s}{r}+\theta), \\ \frac{2}{p_2}(p_1 p_3 uv)^{1/2}\cos(\frac{p_2 s}{r}+\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

parametrizasyonuyla verilsin. Burada $p_1 < p_2 < p_3$, $2p_2 = p_1 + p_3$, $r = p_3 u + p_1 v$, $u > 0$, $v > 0$ dır. O zaman γ,

$$x^2 + y^2 + \frac{p_2^2}{p_1 p_3} z^2 = (u+v)^2$$

elipsoidi üzerinde yatan 3-tipinde bir eğri olur.

Teorem 3.4.6: 2-tipinde bir eğri

1) kapalı vida (helis) eğrisidir,

2) IE^3 te $(\varepsilon \in IR_0^+)$

$$\gamma_\varepsilon(s)=\frac{12}{\varepsilon^2+36}\left(\varepsilon\sin s, -\frac{\varepsilon^2}{12}\cos s+\cos 3s, -\frac{\varepsilon^2}{12}\sin s+\sin 3s\right) \tag{3.39}$$

1-parametreli eğri ailesinin bir eğrisine eşittir,

3) IE^4 te

$$\begin{aligned}\gamma_{\varphi,\delta,\varepsilon}(s)=\alpha_{\varphi,\delta,\varepsilon}(&\varepsilon\sin s, \varphi\cos s+\delta\sin s, \frac{1}{12}(\varphi^2-\delta^2-\varepsilon^2)\cos s-\frac{\delta\varphi}{6}\sin s+\cos 3s, \\ &\frac{\delta\varphi}{6}\cos s+\frac{1}{12}(\varphi^2-\delta^2-\varepsilon^2)\sin s+\sin 3s)\end{aligned} \tag{3.40}$$

3-parametreli eğri ailesinin bir eğrisine eşittir. Burada

$$\alpha_{\varphi,\delta,\varepsilon}=\frac{12}{\left((\varphi^2+\delta^2+\varepsilon^2+36)^2-4\varphi^2\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\varphi, \delta, \varepsilon \in IR_0^+$ dır [15].

Teorem 3.4.7: $S^2 \subset IE^3$ (2-boyutlu küre) üzerindeki sonlu tipten her kapalı uzay eğrisi 1-tipinde olup çemberdir [15].

Teorem 3.4.8: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ kapalı k-tipinden bir eğri olsun. O zaman γ eğrisinin TC-eğrisi olması için gerek ve yeter şart $|a_i| = |b_i|$ ve $< a_i, b_i >= 0$ olmasıdır.

İspat: $\gamma \subset IR^n$ kapalı k-tipinden bir eğri olsun. Böylece (3.35) denkleminden

$$\gamma'(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s + b_i \lambda_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s\right), \tag{3.41}$$

$$\gamma''(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda^2{}_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s - b_i \lambda^2{}_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s\right),$$

$$\gamma'''(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^3{}_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s - b_i \lambda^3{}_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s\right),$$

ve

$$\gamma^{(iv)}(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4{}_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4{}_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s\right), \tag{3.42}$$

elde edilir. Ayrıca (3.40) ve (3.41) kullanılırsa

$$< \gamma^{(iv)}, \gamma' >=< \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4{}_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4{}_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s\right), \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s + b_i \lambda_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s\right) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} < \left(a_i \lambda^4{}_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4{}_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s\right), \left(-a_j \lambda_{t_j} \sin \lambda_{t_j} s + b_j \lambda_{t_j} \cos \lambda_{t_j} s\right) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda^4{}_{t_i} \lambda_{t_j} < \left(a_i \cos \lambda_{t_i} s + b_i \sin \lambda_{t_i} s\right), \left(-a_j \sin \lambda_{t_j} s + b_j \cos \lambda_{t_j} s\right) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda^4{}_{t_i} \lambda_{t_j} \begin{Bmatrix} < a_i, -a_j > \cos(\lambda_{t_i} s) \sin(\lambda_{t_j} s) + < a_i, b_j > \cos(\lambda_{t_i} s) \cos(\lambda_{t_j} s) + \\ < b_i, -a_j > \sin(\lambda_{t_i} s) \sin(\lambda_{t_j} s) + < b_i, b_j > \sin(\lambda_{t_i} s) \cos(\lambda_{t_j} s) \end{Bmatrix}$$

dır. Eğer $i = j$ ise

$$< \gamma^{(iv)}, \gamma' >= \sum_{i=1}^{k} \lambda^5_{t_i} \left\{ \frac{\sin 2\lambda_{t_i} s}{2} (\|b_i\|^2 - \|a_i\|^2 + \cos 2\lambda_{t_i} s < a_i, b_i > \right\}$$

bulunur. Ayrıca $< \gamma^{(iv)}, \gamma' >= 0$ göz önüne alınırsa $|a_i| = |b_i|$ ve $< a_i, b_i >= 0$ elde edilir.

Teorem 3.4.9: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ eğrisi null k-tipinde bir eğri olsun. Bu taktirde γ eğrisinin TC-eğrisi olması için gerek ve yeter şart $|a_i| = |b_i|$, $< a_i, b_i >= 0$ ve $< a_i + b_i, b_0 >= 0$ olmasıdır.

İspat: $\gamma \subset IE^n$ null k-tipinde bir eğri olduğundan (3.36) denkleminden

$$\gamma'(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s + b_i \lambda_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s \right), \tag{3.43}$$

$$\gamma''(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda^2_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s - b_i \lambda^2_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s \right),$$

$$\gamma'''(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^3_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s - b_i \lambda^3_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s \right),$$

ve

$$\gamma^{(iv)}(s) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s \right), \tag{3.44}$$

elde edilir. Bununla birlikte (3.42) ve (3.43) kullanılırsa

$$< \gamma^{(iv)}, \gamma' >=< \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s \right), b_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s + b_i \lambda_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s \right) >$$

$$=< \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s \right), b_0 > +$$
$$+ < \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \lambda^4_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s + b_i \lambda^4_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s \right), \sum_{i=1}^{k} \left(-a_i \lambda_{t_i} \sin \lambda_{t_i} s + b_i \lambda_{t_i} \cos \lambda_{t_i} s \right) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda^4_{t_i} \left(a_i \cos \lambda_{t_i} s + b_i \sin \lambda_{t_i} s \right), b_0 >$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda^4_{t_i} \lambda_{t_j} < \left(a_i \cos \lambda_{t_i} s + b_i \sin \lambda_{t_i} s \right), \left(-a_j \sin \lambda_{t_j} s + b_j \cos \lambda_{t_j} s \right) >$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda^4_{t_i} \left\{ \cos \lambda_{t_i} s < a_i, b_0 > + \sin \lambda_{t_i} s < b_i, b_0 > \right\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda^4_{t_i} \lambda_{t_j} \left\{ \begin{array}{l} < a_i, -a_j > \cos(\lambda_{t_i} s) \sin(\lambda_{t_j} s) + < a_i, b_j > \cos(\lambda_{t_i} s) \cos(\lambda_{t_j} s) + \\ < b_i, -a_j > \sin(\lambda_{t_i} s) \sin(\lambda_{t_j} s) + < b_i, b_j > \sin(\lambda_{t_i} s) \cos(\lambda_{t_j} s) \end{array} \right\}$$

dır. Eğer $i = j$ ise

$$< \gamma^{(iv)}, \gamma' >= \sum_{i=1}^{k} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{t_i}^4 \left\{ \cos\lambda_{t_i} s < a_i, b_0 > + \sin\lambda_{t_i} s < b_i, b_0 > \right\} + \\ + \lambda_{t_i}^5 \left\{ \dfrac{\sin 2\lambda_{t_i} s}{2} (\|b_i\|^2 - \|a_i\|^2 + \cos 2\lambda_{t_i} s < a_i, b_i > \right\} \end{array} \right\}$$

bulunur. Ayrıca $< \gamma^{(iv)}, \gamma' >= 0$ göz önüne alınırsa $|a_i| = |b_i|$, $< a_i, b_i >= 0$ ve $< a_i + b_i, b_0 >= 0$ elde edilir.

3.5. Genel Helisler

Tanım 3.5.1: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ d-mertebeli birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin teğet vektörü, IE^n de verilen bir sabit v_1 vektörü ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine genel helis denir [32].

Tanım 3.5.2: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ d-mertebeli birim hızlı regüler bir eğri olsun. Böylece, $H_j : I \to IE;\ 2 \le j \le d-2$,

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2} \quad , \quad H_j = \left\{ \nabla_{v_1} H_{j-1} + H_{j-2} k_j \right\} \frac{1}{k_{j+1}} \tag{3.45}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara γ eğrisinin harmonik eğrilikleri denir. Burada $k_1, ..., k_{d-1}$ Frenet eğrilikleri olup sabit olmaları gerekmez [33].

Tanım 3.5.3: Eğer d-mertebeli bir Frenet eğrisi, herhangi bir c sabiti için

$$\sum_{i=1}^{d-2} H_i^2 = c, \tag{3.46}$$

şartını sağlıyorsa (d-2)-mertebeli genel helis (eğilim çizgisi) olarak adlandırılır [33].

Böylece (3.45) ve (3.46) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.4: $\gamma : I \subset IR \to IE^{2n+1}$ r-mertebeli, birim hızlı bir regüler eğri olsun. Eğer γ sabit harmonik eğriliklere sahip ise

$$
\begin{aligned}
&H_{2r} = 0, \qquad 1 \le r \le n, \\
&H_{2r-1} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{k_4} \cdot \ldots \cdot \frac{k_{2r-1}}{k_{2r}}; \qquad 1 \le r \le n,
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

dır.

Tanım 3.5.5: γ , IE^{2n+1} de gömülmüş bir eğri ve eğrilikleri $k_1, \ldots, k_{2n-1}, k_{2n}$ olsun.

$$
\begin{aligned}
&a_0 = k_2 k_4 \ldots k_{2n}, \\
&a_1 = \frac{k_1}{k_2} a_0, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&a_j = \frac{k_{2j-1}}{k_{2j}} a_{j-1}, \\
&a_k = \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} a_{n-1} = k_1 k_3 \ldots k_{2n-1},
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

tanımlansın. IE^{2n+1} de Darboux vektörü

$$
\widetilde{d}(s) = a_0 t + a_1 v_2 + \ldots + a_n v_{2n} \tag{3.49}
$$

şeklinde tanımlanır. Burada $t = \gamma'(s)$ dir [40].

Önerme 3.5.6: $\widetilde{d}(s)$ nin türevi

$$
\widetilde{d}'(s) = a_0' \, t + a_1' \, v_2 + \ldots + a_n' \, v_{2n} \tag{3.50}
$$

dır [40].

Tanım 3.5.7: (Darboux köşe): Eğer $\widetilde{d}(s)$ Darboux vektörünün türevi bir $\gamma(s_0)$ noktasında sıfır oluyorsa bu $\gamma(s_0)$ noktasına Darboux köşesi denir [40].

Teorem 3.5.8: γ , IE^{2n+1} de gömülmüş bir eğri ve eğrilikleri $k_1,...,k_{2n-1},k_{2n}$ olsun. γ eğrisi, $\gamma(s_0)$ noktasında Darboux köşeye sahiptir ancak ve ancak

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0, \left(\frac{k_3}{k_4}\right)' = 0, ..., \left(\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}}\right)' = 0, \qquad (3.51)$$

dır [40].

Önerme 3.5.4 ve Teorem 3.5.8 den aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.5.9: $\gamma : I \subset IR \to IE^{2n+1}$ 2n-mertebeli, birim hızlı bir regüler eğri olsun. Eğer $\gamma(s_0)$ noktasında H_i harmonik eğrilikleri sabit ise bu noktada γ eğrisi, Darboux köşeye sahiptir.

İspat: Eğer $\gamma(s_0)$ noktasında H_i harmonik eğrilikleri sabit ise $\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_4}, ..., \frac{k_{2r-1}}{k_{2r}}$ oranları sabittir. Bu oranların, sırasıyla, türevleri alınırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0, \left(\frac{k_3}{k_4}\right)' = 0, ..., \left(\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}}\right)' = 0,$$

elde edilir.

Sonuç 3.5.10: Eğer $\gamma : I \subset IR \to IE^{2n+1}$ eğrisi $\gamma(s_0)$ noktasında Darboux köşeye sahip ise γ eğrisi, (2n-1)-mertebeli genel helistir.

İspat: Eğer $\gamma : I \subset IR \to IE^{2n+1}$ eğrisi $\gamma(s_0)$ noktasında Darboux köşeye sahip ise

$$H_{2r} = 0, \qquad 1 \le r \le n$$
$$H_{2r-1} = sbt, \qquad 1 \le r \le n$$

dır. Tanım 3.5.3 gereği, γ eğrisi, (2n-1)-mertebeli genel helistir.

3.6. CCR-Eğrileri

Tanım 3.6.1: $\gamma = \gamma(s) : I \to IE^m$ eğrisinin eğrilikleri $k_1, ..., k_{m-1}$ olmak üzere, tüm $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ oranları sabit ise bu eğriye eğrilikleri oranları sabit eğri (CCR-eğrisi) denir [31].

IE^3 te genel helisler $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması ile karakterize edilir. Bu tanımın ışığında CCR-eğrileri, IE^3 teki genel helislerin IE^n ye bir genelleştirilmesidir. O zaman CCR-eğrileri, genel helislerin bir alt kümesidir.

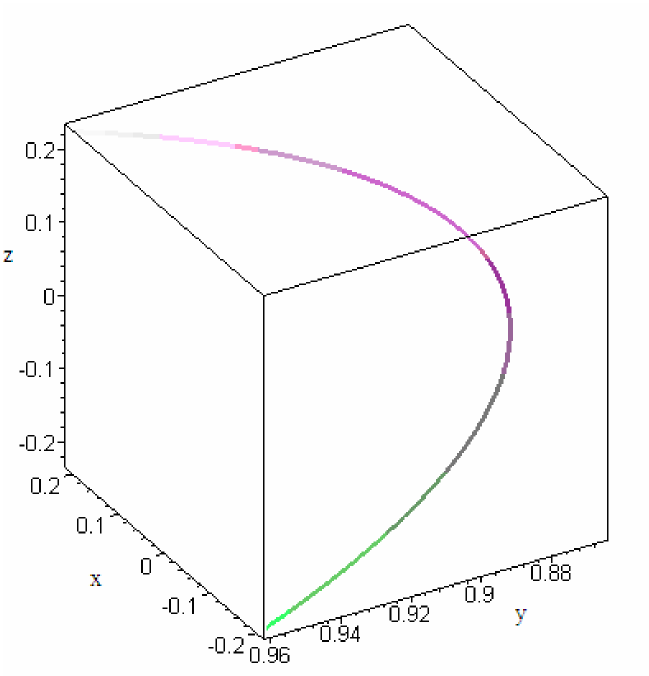
Örnek 3.6.2: $\beta : I \to IE^4$ Frenet eğrisi

$$\beta(s) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}) + \int_0^s E_1(\arcsin(2u))du\,, \qquad s \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\tag{3.52}$$

şeklinde parametrelendirilsin. O zaman β eğrisi bir küresel CCR-eğrisidir ve eğrilikleri sabit değildir. Burada

$$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{\frac{3}{2}}t), \sin(\sqrt{\frac{3}{2}}t), \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t), \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t))$$

dır [31]. (Şekil 3.6).



Şekil 3.6: Küresel CCR-eğrisi

Sonuç 3.6.3: CCR-eğrileri sabit harmonik eğrilikli olup

$$H_{2r} = 0; \qquad 1 \leq r \leq n,$$
$$H_{2r-1} = \text{sbt}; \qquad 1 \leq r \leq n,$$

dır.

Teorem 3.6.4: $\dfrac{dx}{dt} = Ax(t)$ sabit katsayılı birinci dereceden lineer diferensiyel denklem sistemi olsun. O zaman bu sistemin homogen çözümü

$$x = \sum_{i=1}^{n} d_i u_i e^{\lambda_i t} \qquad (3.53)$$

şeklindedir. Burada u_i ler sistemin sabit katsayılar matrisinin özvektörleri, λ_i ler özdeğerleridir ve d_i ler de keyfi sabitlerdir [42].

Teorem 3.6.5: IE^n deki tüm CCR-eğrileri sonlu tiptendir.

İspat: $k(s)$ pozitif bir fonksiyon olmak üzere $g(s)=\int_0^s k(u)du$ fonksiyonu tanımlansın. $\alpha(s)$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir eğri ve eğrilikleri $a_1,...,a_{n-1}$ ler sabit olmak üzere,

$$\beta(s)=\int_0^s E_1^{\alpha}(g(u))du \tag{3.54}$$

eğrisi ele alınsın. $\dot{\beta}(s)=E_1^{\alpha}(g(s))$ ve $\dot{g}(s)=k(s)$ olduğundan

$$E_1^{\beta}(s)=E_1^{\alpha}(g(s))$$

elde edilir. Buradan

$$\ddot{\beta}(s)=\dot{E}_1^{\alpha}(g(s))\dot{g}(s)=\dot{E}_1^{\beta}(s)=k_1^{\beta}(s).E_2^{\beta}(s)$$

bulunur. Buna göre $a_1E_2^{\alpha}(g(s))k(s)=k_1^{\beta}(s)E_2^{\beta}(s)$ ve $E_2^{\alpha}(g(s))=E_2^{\beta}(s)$ alınırsa

$$k_1^{\beta}(s)=a_1k(s)$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla i=1,2,…,n-1 için β eğrisinin eğrilikleri

$$k_i^{\beta}(s)=a_ik(s)$$

şeklinde hesaplanır. O zaman

$$\frac{k_{i+1}^{\beta}}{k_i^{\beta}}=\frac{a_{i+1}k(s)}{a_ik(s)}=\text{sabit}$$

bulunur. Buna göre β eğrisi için Frenet formülleri $c_2,c_3,...,c_{n-1}$ sabitler olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1(s) \\ \dot{E}_2(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{E}_{n-1}(s) \\ \dot{E}_n(s) \end{pmatrix} = k_1(s) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1}(s) \\ E_n(s) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

şeklinde verilebilir. Böylece

$$g(s) = \int_0^s k_1(u)du$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu için bir parametre değişimi uygulanabilir. Ayrıca $k_1(s)$ pozitif fonksiyon olduğundan $t = g(s)$ bir parametre değişimidir. Bunun için

$$s = g^{-1}(t)$$

ters fonksiyonuna ihtiyaç olur. Böylece t parametresine göre Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} E'_1(t) \\ E'_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ E'_{n-1}(t) \\ E'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1}(t) \\ E_n(t) \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

şeklinde sabit katsayılı 1. dereceden lineer diferensiyel denklem sistemine dönüşür [31].

Bu sistemin sabit katsayılar matrisi A olsun. Matris ters-simetrik olduğundan özdeğerleri reel değildir. Tek boyutlar için 0 bir özdeğer olur. Çift boyutlar için 0 ın özdeğer olması sadece $k_{n-1} = 0$ durumunda sağlanır. O zaman tüm özdeğerler tek katlıdır (multiplicity of 1).

Buna göre A matrisinin özdeğerleri $\lambda_l = a_l + ib_l \neq 0$ $(a, b \in IR\ ,\ l = 1,2,..., \frac{n}{2})$ olmak üzere, Teorem 3.6.4 den, $n = 2k$ için sistemin genel çözümü birinci vektör için

$$E_1(u) = \sum_{l=1}^{k} (d_l u_l e^{a_l u} \cos(b_l u) + f_l u_l e^{a_l u} \sin(b_l u)) \tag{3.57}$$

bulunur. Benzer biçimde $n = 2k + 1$ için sistemin genel çözümü birinci vektör için

$$E_1(u) = a_0 + \sum_{l=1}^{k} (d_l u_l e^{a_l u} \cos(b_l u) + f_l u_l e^{a_l u} \sin(b_l u)) \tag{3.58}$$

dır. Burada $a_0, u_1, ..., u_k$ lar IR^n de vektörler ve d_l, f_l keyfi sabitlerdir.

Ayrıca β birim hızlı bir eğri ise, özdeğerlerinin reel kısmı 0 olur. Buna göre (3.57) ve (3.58) eşitlikleri, sırasıyla,

$$E_1(u) = \sum_{l=1}^{k} (d_l u_l \cos(b_l u) + f_l u_l \sin(b_l u)) \tag{3.59}$$

ve

$$E_1(u) = a_0 + \sum_{l=1}^{k} (d_l u_l \cos(b_l u) + f_l u_l \sin(b_l u)) \tag{3.60}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $a_0, u_1, ..., u_k$ lar IE^n de vektörler ve d_l, f_l keyfi sabitlerdir. $\dot{\beta}(u) = E_1(u)$ olduğundan $n = 2k$ için

$$\beta(u) = a_0 + \sum_{l=1}^{k} (D_l \cos(b_l u) + F_l \sin(b_l u)) \tag{3.61}$$

bulunur. Benzer şekilde $n = 2k + 1$ için

$$\beta(u) = a_0 + b_0 s + \sum_{l=1}^{k} (D_l \cos(b_l u) + F_l \sin(b_l u)) \tag{3.62}$$

elde edilir. Burada $F_l = \dfrac{d_l}{b_l} u_l$, $D_l = -\dfrac{f_l}{b_l} u_l$ sabit olması gerekmeyen vektörlerdir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.6: Eğer $\gamma = \gamma(s) : I \to IE^n$ TC-eğrisi aynı zamanda CCR-eğrisi ise γ eğrisi, bir W-eğrisidir.

4. HELİSSEL YÜZEYLER

4.1. Giriş:

Bu bölümde PHG-özelikli yüzeyler, PGNS-özelikli yüzeyler ve 2-PGNS-özelikli yüzeyler incelenmiştir. Bu yüzeyler arasındaki bağıntılar bulunmuştur ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.1.1: $\gamma : I \to M^n$, M^n de keyfi bir geodezik olsun. Eğer IE^m deki $\alpha = f \circ \gamma$ eğrisi, d-yinci mertebeden bir eğri ve $k_1,...,k_{d-1}(\neq 0), k_d = 0$ Frenet eğrilikleri sabit ise $f : M^n \to IE^m$ dönüşümüne d-yinci mertebeden helissel daldırma, M^n ye de IE^m nin helissel altmanifoldu denir.

Tanım 4.1.2: Eğer, $\lambda = \|h(X,X)\|$, p noktasındaki M^n nin birim teğet vektörü X in seçiminden bağımsız ise $x : M^n \to IE^m$ izometrik daldırmasına, p noktasında λ -izotropiktir denir. Ayrıca λ noktanın seçiminden de bağımsız ise x daldırmasına sabit izotropiktir denir.

Buna göre M^n yüzeyi p noktasında λ-izotropiktir ancak ve ancak tüm $X, Y, Z \in T_pM^n$ için

$$\sum A_{h(X,Y)} Z = \lambda^2 \sum < X, Y > Z$$

dir. Burada $\sum X, Y, Z$ ye bağlı çembersel toplamı gösterir.

Ayrıca M^n yüzeyi p noktasında λ-izotropiktir ancak ve ancak ortonormal vektörler $X,Y \in T_pM$ için

$$< h(X,X), h(X,Y) >= 0 \tag{4.1}$$

dır.

Her bir helissel daldırma λ-izotropiktir [29].

4.2. PHG-Özelikli yüzeyler

Teorem 4.2.1: $M^n \subset IE^5$ tıkız (kompakt), bağlantılı bir yüzey olsun. M^n basit geodeziklere sahiptir $\Leftrightarrow$ M^n aşağıdaki yüzeylerden biridir:

1) $S^2(r) \subset IE^3$, ya da,
2) $S^1(a) \times S^1(b) \subset IE^4$, ya da,
3) $V^2 \subset IE^5$ Veroneze yüzeyi olup bu yüzey, $S^4(r) \subset IE^5$ de minimaldir [28].

Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

I. durum : M^n nin geodezikleri periyodik değil ise, $M^n = S^1(a) \times S^1(b)$ dır.
II. durum : M^n nin geodezikleri periyodik ve rank 2 ise $M^n = S^2(r)$ ya da $M^n = V^2$ dır.

Tanım 4.2.2: Eğer $p \in M^n$ noktasından geçen M^n nin her bir geodeziği IE^m de bir W-eğrisi (helis) ise M^n ye Noktasal Helissel Geodezikli (PHG-özelikli) bir yüzey adı verilir.

Teorem 4.2.3: $M^n \subset IE^4$ tam ve bağlantılı bir yüzey olsun. Bu taktirde M^n yüzeyi, PHG-özeliklidir $\Leftrightarrow$ M^n aşağıdaki yüzeylerden biridir;

1) IE^2 düzlemi,

2) $S^2(a) \subset IE^3$ standart küresi,

3) $S^1(a) \times IR \subset IE^3$ dairesel silindir,

4) $S^1(a) \times S^1(b) \subset IE^4$ standart tor, ya da,

5) $$x(s,\theta) = (\frac{1}{k}\sin ks \cos\theta, \frac{1}{k}\sin ks \sin\theta, \frac{1}{k}(1-\cos ks)\cos 2\theta, \frac{1}{k}(1-\cos ks)\sin 2\theta) \qquad (4.2)$$

parametrizasyonu ile verilen Blaschke yüzeyidir [29]. Burada k birinci Frenet eğriliğidir. Bu yüzeyin $k=\theta$ değeri için $x_4 = 0$ a izdüşümü Şekil 4.1 de ve $k = \sin s$ değeri için $x_2 = 0$ a izdüşümü Şekil 4.2 de verilmiştir.

Teorem 4.2.4: $M^n \subset IE^5$ tıkız ve bağlantılı bir yüzey olsun. M^n yüzeyi PHG-özelikli bir yüzeydir $\Leftrightarrow$ M^n aşağıdaki yüzeylerden birisidir:

1) $S^2(a) \subset IE^3$,

2) $S^1(a) \times S^1(b) \subset IE^4$,

3) (4.2) parametrizasyonu ile verilen Blaschke yüzeyi,

4) $$x(s,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\sin ks\cos\theta, \frac{1}{k}\sin ks \sin\theta, \frac{1}{k^2}(1-\cos ks)(k - \frac{2a^2}{k}\sin^2\theta), \\ \frac{a}{k^2}(1-\cos ks)\sin 2\theta, \frac{b}{k^2}(1-\cos ks)\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

yüzeyi, (Bu yüzeyin $k = s$ değeri için $x_4 = 0$ ve $x_5 = 0$ a izdüşümü Şekil 4.3 de verilmiştir) ya da,

5) $$x(s,\theta) = \begin{pmatrix} r_1(\cos\alpha s - 1), r_1\sin\alpha s - r_1\alpha(1-\cos\theta)(r_1^2\alpha\sin\alpha s + r_2^2\beta\sin\beta s), \\ r_2(\cos\beta s - 1), r_2\sin\beta s - r_2\beta(1-\cos\theta)(r_1^2\alpha\sin\alpha s + r_2^2\beta\sin\beta s), \\ (r_1^2\alpha\sin\alpha s + r_2^2\beta\sin\beta s)\sin\theta \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

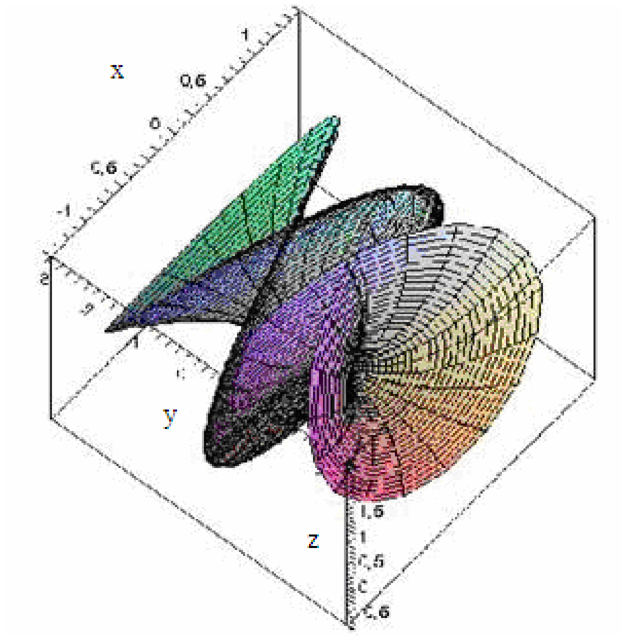
yüzeyidir [39]. Burada $a = \|h(e_1, e_2)\|$, $b^2 = k^2 - \frac{(k^2 - 2a^2)^2}{k^2}$, r_1, r_2, α, β bazı sabitlerdir.

Tanım 4.2.5: $M^n \subset IE^m$ $(m \geq 3)$ bağlantılı ve tıkız bir yüzey olsun. Eğer bir $p \in M^n$ noktasından geçen M^n nin her bir geodeziği IE^m de aynı sabit Frenet eğrilikli helis eğrisi ise M^n yüzeyine zayıf PHG-özelikli yüzey adı verilir.

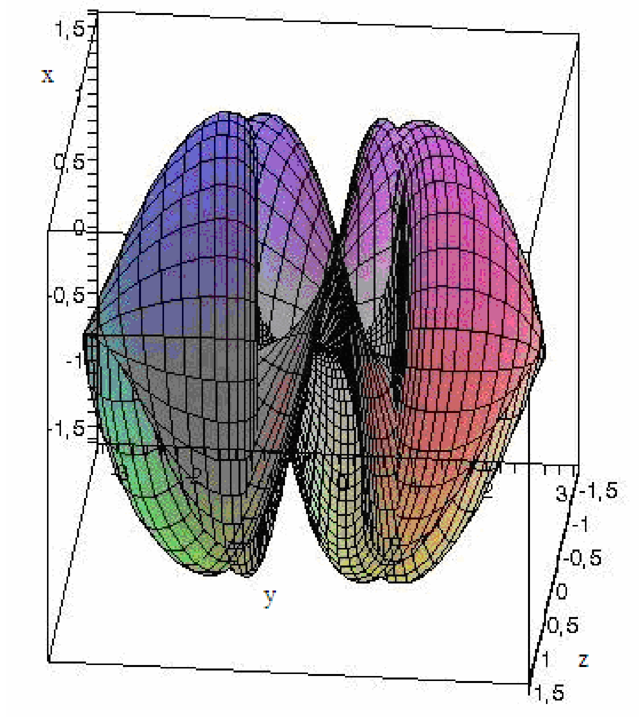
Her bir helissel daldırma zayıf PHG-özeliklidir [29].

Teorem 4.2.6: $M^n \subset IE^5$ tıkız, bağlantılı bir yüzey olsun. M^n yüzeyi zayıf PHG-özelikli bir yüzeydir $\Leftrightarrow$ M^n aşağıdaki yüzeylerden birisidir:

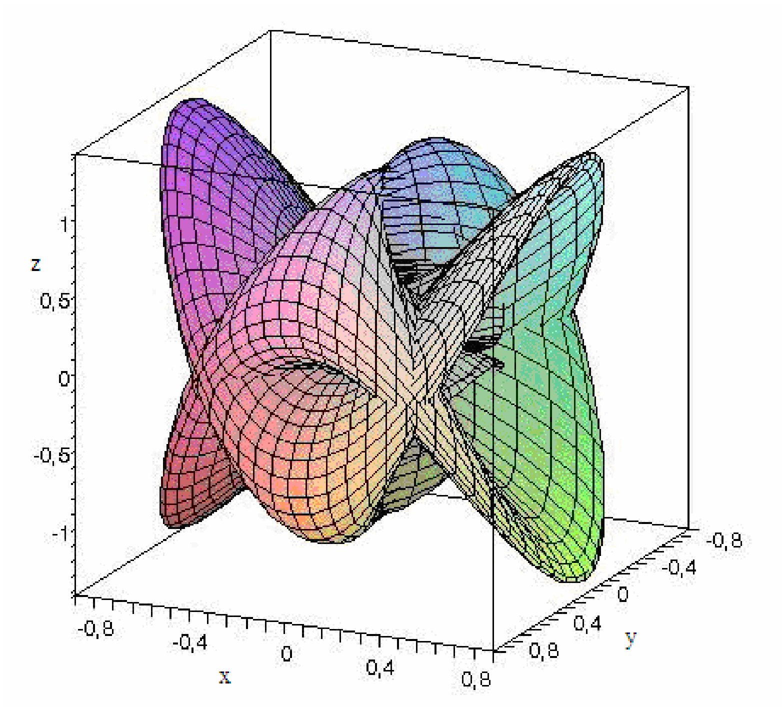
1) $S^2(a) \subset IE^3$,
2) (4.2) Blaschke yüzeyi,
3) IE^5 yatan (4.3) yüzeyi (Veroneze yüzeyi), ya da,
4) (4.4) yüzeyidir [29].



Şekil 4.1: $k = \theta$ değeri için Blaschke yüzeyi.



Şekil 4.2: $k = \sin s$ değeri için Blaschke yüzeyi.



Şekil 4.3: $k = s$ değeri için (4.3) yüzeyi.

Teorem 4.2.7: $M^n \subset IE^m$ $(m \geq 3)$ yüzeyi zayıf PHG-özelikli ise bu taktirde M^n yüzeyi $p \in M^n$ noktasında izotropiktir [29].

Teorem 4.2.8: $M^n \subset IE^m$ $(m \geq 3)$ yüzeyi $p \in M^n$ noktasında izotropik ise

$$\|h(e_1, e_1)\|^2 =< h(e_1, e_1), h(e_2, e_2) > +2\|h(e_1, e_2)\|^2, \tag{4.5}$$

dır.

İspat: T_pM^n nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun.

$$X = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}, \tag{4.6}$$

vektörleri seçildiğinde $\{X, Y\}$ de T_pM^n nin ortonormal bir bazıdır. Böylece M^n, p noktasında izotropik olduğundan

$$< h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) >=< h(X, X), h(X, X) >$$

dır. O zaman

$$< h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) > = < h(\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}), h(\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}) >,$$

ve

$$\begin{aligned} 4 < h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) > =& < h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) > + 2 < h(e_1, e_1), h(e_2, e_2) > \\ &+4 < h(e_1, e_2), h(e_1, e_2) > + < h(e_2, e_2), h(e_2, e_2) > \\ &+4 < h(e_1, e_1), h(e_1, e_2) > + 4 < h(e_2, e_2), h(e_1, e_2) > \end{aligned} \tag{4.7}$$

bulunur. Ayrıca $< h(X, X), h(X, Y) >= 0$ göz önüne alınırsa

$$< h(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}), h(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}}) >= 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$< h(e_1,e_1), h(e_1,e_1) > +2 < h(e_1,e_1), h(e_1,e_2) >$$

$$-2 < h(e_2,e_2), h(e_1,e_2) > - < h(e_2,e_2), h(e_2,e_2) > =0 \tag{4.8}$$

bulunur. M^n izotropik olduğundan (4.8) eşitliği

$$< h(e_1,e_1), h(e_1,e_1) > = < h(e_2,e_2), h(e_2,e_2) > \tag{4.9}$$

şeklinde yazılır. Böylece (4.9) denklemi (4.7) denkleminde yerine yazılırsa (4.5) denklemi elde edilir.

Teorem 4.2.9: $M^n \subset IE^m$ $(m \geq 3)$ bağlantılı ve tıkız bir yüzey olsun. Bu takdirde M^n zayıf PHG-özeliklidir $\Leftrightarrow$ M^n yüzeyi standart küre ya da IE^2 düzlemidir [29].

İspat: Teorem 4.2.7 den dolayı M^n yüzeyi $p \in M^n$ noktasında izotropiktir. O zaman (4.6) ve (4.1) denklemlerinden

$$< h(e_1,e_1), h(e_1,e_1) > = < h(e_2,e_2), h(e_2,e_2) >$$

$$\|h(e_1,e_1)\|^2 = \|h(e_2,e_2)\|^2$$

elde edilir. Böylece $p \in M^n$ noktasından geçen γ geodeziği ele alındığında 3 durum söz konusudur;

i) γ nın mertebesi 1 olsun. Bu taktirde γ bir doğru olup M^n yüzeyi IE^2 düzlemi olur.ii) γ nın mertebesi 2 olsun. Bu taktirde γ geodeziği $p \in M^n$ noktasından geçen aynı merkezli ve aynı yarıçaplı büyük çemberler olacaktır. Böylece M^n bir küre olur.

iii) γ nın mertebesi 3 olsun. γ geodeziğini birim hızlı alalım. Bu taktirde

$$\gamma^{'}(s) = T$$
$$\gamma^{''}(s) = \widetilde{\nabla}_T T + \nabla_T T + h(T,T)$$

dır. Bununla beraber γ geodezik olduğundan

$$\gamma^{''}(s) = h(T,T)$$

elde edilir. Böylece

$$\gamma^{'''} = -A_{h(T,T)}T + D_T h(T,T)$$

dır. Ayrıca $(\overline{\nabla}_T h)(T,T) = D_T h(T,T)$ olduğundan

$$\gamma^{'''} = -A_{h(T,T)}T + (\overline{\nabla}_T h)(T,T)$$

bulunur. γ nın mertebesi 3 olduğundan $\gamma^{'} \wedge \gamma^{''} \wedge \gamma^{'''} \neq 0$ olmalıdır. Bu nedenle

$$T \wedge h(T,T) \wedge (-A_{h(T,T)}T + (\overline{\nabla}_T h)(T,T)) \neq 0$$

olduğundan teğetsel bileşenler

$$T \wedge (-A_{h(T,T)}T) \neq 0 \tag{4.10}$$

ve benzer şekilde normal bileşenler $h(T,T) \wedge (\overline{\nabla}_T h)(T,T) \neq 0$ dır. Ayrıca M^n yüzeyi $p \in M^n$ noktasında izotropik olduğundan $\gamma(0) = P_0$, $\gamma^{'}(0) = T_0$ noktasında

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h(T_0,T_0), h(T_0,T_0^{\perp}) \rangle \\ &= \langle A_{h(T_0,T_0)}T_0, T_0^{\perp} \rangle \end{aligned}$$

dır. Buradan

$A_{h(T_0,T_0)}T_0 \perp T_0^{\perp}$ olduğu görülür. O halde $A_{h(T_0,T_0)}T_0$, T_0 a paralel olur. Yani

$$A_{h(T_0,T_0)}T_0 \wedge T_0 = 0$$

olmalıdır. Bu da (4.10) eşitliğiyle çelişki oluşturur. O halde bu durum söz konusu değildir.

Tanım 4.2.10: $p \in M^n$ noktasında M^n nin 1. normal uzayı

$$N_p^1 = Sp\{h(X,Y) : X, Y \in T_p(M^n)\} \tag{4.11}$$

biçiminde tanımlanır [9].

Açıklama: Her $e_1, e_2 \in T_p(M^n)$ ortonormal vektörleri için

i) $h(e_1,e_2) = 0$ ise boy $N_p^1 = 1$ dir,

ii) $h(e_1,e_2) \neq 0$ ise boy $N_p^1 \geq 2$ dir.

Sonuç 4.2.11: $M^2 \subset IE^3$ zayıf PHG-özelikli, tıkız ve bağlantılı bir yüzey olsun. Bu taktirde γ eğrisi, M^2 nin bir geodeziği olmak üzere;

i) boy $N_p^1 = 0$ ise γ nın mertebesi 1 olup M^2, IE^2 düzlemidir.

ii) boy $N_p^1 = 1$ ise γ nın mertebesi 2 olup M^2, S^2 küresidir.

Teorem 4.2.12: $M^n \subset IE^4$ yüzeyi zayıf PHG-özelikli tıkız ve bağlantılı bir yüzey olsun. Eğer boy $N_p^1 = 1$ ise, M^n, IE^3 de yatan bir küredir [29].

İspat: boy $N_p^1 = 1$ olduğundan γ nın mertebesi 2 ya da 3 dür.

i) γ nın mertebesi 2 ise

$\gamma^{!} \wedge \gamma^{"} \wedge \gamma^{'''} = 0$

dır. Ayrıca

$$\gamma^{'}(s) = T$$

$$\gamma^{"}(s) = h(T,T)$$

$$\gamma^{'''} = -A_{h(T,T)}T + (\overline{\nabla}_T h)(T,T) \qquad (4.12)$$

yardımıyla

$$h(T,T) \wedge (\overline{\nabla}_T h)(T,T) = 0 \qquad (4.13)$$

elde edilir. Bununla beraber γ nın Frenet çatısı yardımıyla

$$\gamma^{"} = k_1 v_2$$

$$\gamma^{'''} = k_1 k_2 v_3 \qquad (4.14)$$

dır. Böylece (4.13) den $\gamma^{"} \wedge \gamma^{'''\perp} = 0$ olup $v_3 = 0$ bulunur. Yani γ düzlemsel bir eğridir. Buna göre (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$(\overline{\nabla}_T h)(T,T) = 0$$

dır. Buradan N_p^1 in paralel olduğu görülür. Böylece J. Erbacher in teoreminden M^n, IE^4 de yatan bir hiperyüzeydir [20]. Böylece Sonuç 4.2.11 ii) den dolayı M^n standart küredir.

Açıklama: Yukarıda tanımlanan 2 mertebeli geodezikler $\dfrac{1}{k_1}$ yarıçaplı ve $p - (\dfrac{1}{k_1})\xi$ merkezli çemberler olup küre yüzeyi $S^2(\dfrac{1}{k_1})$ biçimindedir.

Önerme 4.2.13: $M^n \subset IE^4$ yüzeyi bağlantılı ve tıkız bir yüzey olsun. Eğer M^n yüzeyi zayıf PHG-özelikli ve boy $N_p^1 = 2$ ise, M^n yüzeyi, $p \in M^n$ noktasında minimaldir.

İspat: $T_p(M^n)$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Böylece $M^n \subset IE^4$ yüzeyi zayıf PHG-özelikli olduğundan $p \in M^n$ noktasında izotropiktir. Bu nedenle $p \in M^n$ noktasında

$$< h(e_1,e_1), h(e_1,e_2) >= 0$$
$$< h(e_2,e_2), h(e_1,e_2) >= 0$$

dır. Buradan $h(e_1,e_1) \perp h(e_1,e_2)$ ve $h(e_2,e_2) \perp h(e_1,e_2)$ olacaktır.

Ayrıca boy $N_p^1 = 2$ olduğundan $h(e_1,e_2) \neq 0$ ve $h(e_1,e_1) \wedge h(e_2,e_2) = 0$ dır. Bununla beraber $p \in M^n$ den geçen geodezikler aynı sabit eğriliklere sahip olduğundan

$$\|h(e_1,e_1)\| = \|h(e_2,e_2)\|$$

dır. Böylece $h(e_1,e_1) = \pm h(e_2,e_2)$ olmalıdır. O halde (4.5) eşitliği yardımıyla

$$h(e_1,e_1) + h(e_2,e_2) = 0$$

bulunur. Bu da bizi $p \in M^n$ noktasında M^n nin ortalama eğrilik vektörü $H = 0$ olduğu sonucuna götürür.

Sonuç 4.2.14: $M^n \subset IE^4$ yüzeyi tıkız ve bağlantılı bir yüzey olsun. Eğer boy $N_p^1 = 2$ ve M^n yüzeyi zayıf PHG-özelikli ise bu taktirde M^n, (4.1) parametrizasyonu ile verilmiş bir yüzey (Blaschke yüzeyi) dir [29].

Sonuç 4.2.15: $M^n \subset IE^4$ yüzeyi $0 \in M^n$ noktasında zayıf PHG-özelikli ise $0 \in M^n$ den geçen tüm geodezikler düzlemseldir [39].

4.3. PGNS-Özelikli Yüzeyler

Tanım 4.3.1: $M^n \subset IE^m$ yüzeyinin, bir p noktasındaki, birim teğet vektörü t, birim normal vektörü de U olsun. p noktasından geçen, t ve U vektörlerini kapsayan hiperdüzlemi, yüzey ile bir α eğrisi boyunca kesişir. Bu α eğrisine, M^n nin p noktasındaki t doğrultusundaki normal kesiti denir.

Tanım 4.3.2: $M^n \subset IE^m$ bir yüzey olsun. M^n nin bir p noktasından geçen geodeziği M^n nin bir normal kesiti ise M^n ye PGNS-özeliklidir denir.

Teorem 4.3.3: (Lokal sınıflandırma Teoremi) $M^n \subset IE^3$ bir yüzey olsun. Bu taktirde, M^n yüzeyi p köşeli (p nin bir komşuluğunda) bir dönel yüzeydir $\Leftrightarrow$ M^n yüzeyi PGNS-özeliklidir [29].

Sonuç 4.3.4: Eğer $M^n \subset IE^3$ paralel ikinci temel formlu bir yüzey ise M^n, bir düzlem, küre ya da silindirdir [29].

Tanım 4.3.5: $M^n \subset IE^m$ bir yüzey olsun. M^n nin bir p noktasından geçen geodeziği 2-düzlemsel ise, M^n ye 2-PGNS-özeliklidir denir.

Teorem 4.3.6: $M^n \subset IE^m$ yüzeyinin p noktasından geçen geodeziği γ, 2-düzlemsel ise γ, M^n nin p den geçen bir normal kesit eğrisidir.

İspat: γ eğrisi M^n nin birim hızlı ve $\gamma(0) = p$ şartını sağlayan bir eğrisi olsun.

$\gamma'(s) = T$

$\gamma''(s) = h(T,T)$

$$\gamma''' = -A_{h(T,T)}T + (\overline{\nabla}_T h)(T,T)$$

dır. Ayrıca γ eğrisi 2-düzlemsel olduğundan γ boyunca

$$\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) = 0$$

dır. Böylece

$$T \wedge h(T,T) \wedge (-A_{h(T,T)}T + (\overline{\nabla}_T h)(T,T)) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$T \wedge A_{h(T,T)}T = 0$$

ve

$$h(T,T) \wedge (\overline{\nabla}_T h)(T,T) = 0$$

dır. Böylece iki durum söz konusudur:

i) Öncelikle, $t = T(0)$ olmak üzere $h(t,t) \neq 0$ farz edilsin. Buna göre $q \in U$ ve $u \neq 0 \in T_q M^n$ için, $h(u,u) \neq 0$ olacak şekilde bir U komşuluğu seçilebilir. Böylece γ eğrisi, $p + \mathrm{Span}\{t, h(t,t), (\overline{\nabla}_t h)(t,t)\}$ içinde yatar ve p noktasında γ eğrisi normal kesit olur.

ii) $h(t,t) = 0$ olsun. Bu taktirde, $s > 0$ için, N, M^n yüzeyinin normal vektörü ve γ eğrisi boyunca $h(T,T)$ ye paralel olsun. Buna göre, γ eğrisi boyunca M^n ye teğet $T^{\perp}$ vektör alanı seçilebilir ve bu vektör alanı $\{T(s), N(s)\}$ ile gerilen π düzlemine diktir. $T^{\perp}(s)$ vektör alanı p noktasına uzatılsın ve aynı $T^{\perp}$ notasyonu ile gösterilsin. Böylece $\{t, T^{\perp}(0)\}$, $T_p M^n$ için ortonormal bir baz olup $T^{\perp}(0)$ da π düzlemine diktir. Buna göre

$N(0)$ da p noktasında M^n yüzeyinin normal vektörüdür. γ eğrisi $p+\mathrm{Span}\{t, N(0)\}$ içinde yatar ve böylece γ eğrisi p noktasında, t doğrultusunda bir normal kesit eğrisidir.

Tanım 4.3.7: $p \in M^n$ noktası M^n nin izole edilmiş düz (flat) noktası olsun. Bu taktirde $\gamma(0)=p$ den geçen her bir γ geodeziğinin eğriliği, $k_\gamma(0)=0$ ve $k_\gamma(s)\neq 0$ şartını sağlar. Ayrıca

$$d(p)=\inf\left\{n \in Z^{+} \middle| k_\gamma^n \neq 0\right\}$$

ise $1 \leq d(p) \in Z$ iyi tanımlı olup, buna izole edilmiş p noktasının derecesi denir.

Teorem 4.3.8: $M^n \subset IE^4$ izole edilmiş düz noktası olmayan bir yüzey olsun. Bu taktirde M^n yüzeyi 2-PGNS-özeliklidir $\Leftrightarrow$ $M^n \subset IE^3$ te yatan bir dönel yüzeydir ya da M^n yüzeyi

$$x(s,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta\int\limits_0^s \cos f(t)dt, \sin\theta\int\limits_0^s \cos f(t)dt, \\ \mp\cos 2\theta\int\limits_0^s \sin f(t)dt, \mp\sin 2\theta\int\limits_0^s \sin f(t)dt \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

formundadır [29]. Burada $f(s)=\mp\int\limits_0^s k(t)dt$ dır.

Açıklama: (4.15) denklemi ile verilen yüzey için 1. normal uzayın boyutu 2 dir. Yani $\mathrm{boy}\, N_p^1 = 2$ dir.

Teorem 4.3.9: $M^n \subset IE^5$, izole edilmiş düz noktası olmayan bir yüzey olsun. Bu taktirde M^n yüzeyi PGNS-özeliklidir $\Leftrightarrow$ M^n aşağıdaki yüzeylerden biridir:

1) IE^3 de bir dönel yüzey,

2) (4.15) lokal parametrizasyonu ile verilen bir yüzey, ya da,

$$3)\ x(s,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\int_0^s\cos f(t)dt, \sin\theta\int_0^s\cos f(t)dt, \mp\left(\cos^2\theta-\dfrac{k(0)^2-2b^2}{k(0)^2}\right)\int_0^s\sin f(t)dt,\\ \mp\dfrac{a}{k(0)}\sin 2\theta\int_0^s\sin f(t)dt, \mp\dfrac{b}{k(0)}\sin^2\theta\int_0^s\sin f(t)dt\end{pmatrix} \quad (4.16)$$

lokal parametrizasyonu ile verilen bir yüzeydir [29]. Burada $f(s)=\mp\int_0^s k(t)dt$,

$a=\|h(e_1,e_2)\|$, $b=\|\tilde{N}_3\|$, $\tilde{N}_3=h(e_2,e_2)-<h(e_1,e_1),N_1>N_1$ ve $N_1=\dfrac{h(e_1,e_1)}{k(0)}$ dır.

Teorem 4.3.10: (Sınıflandırma Teoremi): $M^n\subset IE^m$ analitik yüzey olsun. M^n yüzeyi PGNS-özelikli ise M^n aşağıdaki yüzeylerden biridir:

1) Lokal olarak M^n, IE^3 te yatan bir dönel yüzeydir,

2) IE^4 yatan (4.15) yüzeyidir,

3) IE^4 yatan (4.16) yüzeyidir, ya da,

$$4)\ x(s,\theta)=\left(\int_0^s\cos f(t)dt\right)(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)+\left(\int_0^s\sin f(t)dt\right)N(\theta) \quad (4.17)$$

yüzeyidir [29]. Burada

$$\begin{aligned}N(\theta)&=\frac{1}{\|(\overline{\nabla}^p h)(e_1^{p+2})\|}(\overline{\nabla}^p h)(e(\theta)_1^{p+2})\\ &=\frac{1}{\|(\overline{\nabla}^p h)(e_1^{p+2})\|}\sum_{r=0}^{p+2}\binom{p+2}{r}\cos^{p+2-r}\theta\sin^r\theta(\overline{\nabla}^p h)(e_1^{p+2-r},e_2^r)\end{aligned}, \quad (4.18)$$

ve $f(s)=\mp\int_0^s k(t)dt$ dır. Ayrıca izole edilmiş noktaların derecesi $p-1$ dir.

Sonuç 4.3.11: (4.15) denkleminde $k = \text{sabit}$ alınırsa (4.2) denklemi ile verilen Blaschke Yüzeyi elde edilir. Bu yüzey zayıf PHG-özeliklidir.

Önerme 4.3.12: $f : M^2 \to IE^m$ bir izometrik daldırma olsun. M^2 üzerinde tüm γ geodezikleri için, $\sigma = f \circ \gamma$ nın k_1, k_2 eğrilikleri sabit, yani γ eğrisi, 3-mertebeli ise

$$\sigma^{(1)} = X$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{k_1} h(X,X); \quad \gamma'(s) = X,$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{1}{k_1 k_2} (\overline{\nabla}_X h)(X,X)$$

dır [25].

Teorem 4.3.13: $f : M^2 \to IE^m$, 3-mertebeli bir helissel daldırma olsun. $T_x M^2$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2\}$ ise

$$(\overline{\nabla}^2 h)(e_1^4) = -k_2^2 h(e_1, e_2)$$

$$(\overline{\nabla}^2 h)(e_1^3, e_2) = \frac{1}{2}(k_1^2 - k_2^2 + 4a^2) h(e_1, e_2)$$

$$(\overline{\nabla}^2 h)(e_2, e_1^3) = (-\frac{1}{2})(3k_1^2 + k_2^2 - 12a^2) h(e_1, e_2)$$

$$(\overline{\nabla}^2 h)(e_1^2, e_2^2) = (-\frac{1}{6}k_2^2 - \frac{1}{2}k_1^2 + 2a^2) h(e_1, e_1) + (-\frac{1}{6}k_2^2 + \frac{1}{2}k_1^2 - 2a^2) h(e_2, e_2)$$

dır. Burada $a = \|h(e_1, e_2)\|$ dır [25].

Tanım 4.3.14: $M^n \subset IE^m$ altmanifoldu için

$$J(X) = (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_X h)(X,X) + 3h(A_{h(X,X)} X, X) \qquad (4.19)$$

vektörü ile $h(X,X)$ vektörü lineer bağımlı ise M^n altmanifolduna AW(3)-tipindendir denir [3].

Önerme 4.3.15: $f : M^2 \to IE^m$, 3-mertebeli bir helissel daldırma olsun. O zaman

$$J(X) = (A + 3k_1)h(e_1, e_2) + (B - \frac{3}{2}k_1)h(e_1, e_1) + (C - \frac{3}{2}k_1)h(e_2, e_2) \tag{4.20}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} A &= (-\frac{1}{2}k_2^2 - 8a^2), \\ B &= (\frac{1}{4}k_2^2 + \frac{3}{4}k_1^2 - 3a^2), \\ C &= (\frac{1}{4}k_2^2 - \frac{3}{4}k_1^2 + 3a^2), \end{aligned} \tag{4.21}$$

dır.

İspat: $X = xe_1 + ye_2$ için

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_X h)(X,X) = {} & x^4 (\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_1, e_1) + 3x^3 y(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_1) \\ & + y^3 x(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_2) + 3x^2 y^2 (\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_2) \\ & + y^4 (\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_2) + 3xy^3 (\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_2) \\ & + x^3 y(\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_1, e_1) + 3x^2 y^2 (\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_1) \end{aligned}$$

olup $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ değerleri göz önüne alınırsa, X birim vektör olacaktır ve

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_X h)(X,X) = {} & \frac{1}{4}(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_1, e_1) - \frac{3}{4}(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_1) \\ & - \frac{1}{4}(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_2) + \frac{3}{4}(\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_2) \\ & + \frac{1}{4}(\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_2) - \frac{3}{4}(\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_2) \\ & - \frac{1}{4} y(\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_1} h)(e_1, e_1) + \frac{3}{4}(\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_1) \end{aligned}$$

elde edilir [1]. Ayrıca Codazzi denklemi yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}_{e_2}h)(e_1,e_1)=(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}_{e_1}h)(e_1,e_2)$$
$$(\overline{\nabla}_{e_2}\overline{\nabla}_{e_1}h)(e_2,e_2)=(\overline{\nabla}_{e_2}\overline{\nabla}_{e_2}h)(e_1,e_2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X h)(X,X)=&\frac{1}{4}(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}_{e_1}h)(e_1,e_1)+\frac{1}{4}(\overline{\nabla}_{e_2}\overline{\nabla}_{e_2}h)(e_2,e_2)\\&-(\overline{\nabla}_{e_2}\overline{\nabla}_{e_2}h)(e_1,e_2)-(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}_{e_1}h)(e_2,e_1)\\&+\frac{3}{2}(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}_{e_1}h)(e_2,e_2)\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. Teorem 4.3.13 deki değerler (4.22) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X h)(X,X)=&-\frac{1}{4}k_2^2h(e_1,e_2)-\frac{1}{4}k_2^2h(e_1,e_2)\\&-\frac{3}{2}(-\frac{1}{6}k_2^2-\frac{1}{2}k_1^2+2a^2)h(e_1,e_1)-\frac{3}{2}(-\frac{1}{6}k_2^2+\frac{1}{2}k_1^2-2a^2)h(e_2,e_2)\\&-\frac{1}{2}(k_1^2-k_2^2+4a^2)h(e_1,e_2)+\frac{1}{2}(3k_1^2+k_2^2-12a^2)h(e_1,e_2)\end{aligned}$$

ya da basitçe

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X h)(X,X)=&(-\frac{1}{2}k_2^2-8a^2)h(e_1,e_2)+(\frac{1}{4}k_2^2+\frac{3}{4}k_1^2-3a^2)h(e_1,e_1)\\&(\frac{1}{4}k_2^2-\frac{3}{4}k_1^2+3a^2)h(e_2,e_2)\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Ayrıca (4.21) eşitliği yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X h)(X,X)=Ah(e_1,e_2)+Bh(e_1,e_1)+Ch(e_2,e_2) \tag{4.24}$$

elde edilir. Bununla beraber $A_{h(X,X)}X=-k_1h(X,X)$ olduğundan

$$h(A_{h(X,X)}X,X) = -k_1 h(X,X)$$
$$= -\frac{k_1}{2}h(e_1,e_1) - \frac{k_1}{2}h(e_2,e_2) + k_1 h(e_1,e_2) \tag{4.25}$$

bulunur. Böylece (4.21), (4.23)-(4.25) eşitliklerinden (4.20) eşitliği elde edilir.

Önerme 4.3.16: $f : M^2 \rightarrow IE^m$, 3-mertebeli bir helissel daldırma olsun. O zaman

$$h(e_1,e_1) = a\xi_4 + \alpha\xi_3 \tag{4.26}$$

$$h(e_1,e_2) = a\xi_5 \tag{4.27}$$

$$h(e_2,e_2) = -a\xi_4 + \alpha\xi_3 \tag{4.28}$$

dır. Burada $a = \|h(e_1,e_2)\|$ ve $\alpha = \|H\|$ dır.

İspat: [14] teki Lemma 3 teki

$$h(e_1,e_2) = a\xi_5,$$
$$h(e_1,e_1) - h(e_2,e_2) = 2a\xi_4,$$
$$H = h(e_1,e_1) + h(e_2,e_2) = 2\alpha\xi_3,$$

vektörleri yardımıyla gerekli hesaplamalar yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.15 ve Önerme 4.3.16 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.17: $f : M^2 \rightarrow IE^m$, 3-mertebeli bir helissel daldırma olsun. O zaman

$$J(X) = \alpha(E+F)\xi_3 + a(E-F)\xi_4 + Da\xi_5 \tag{4.29}$$

dır. Burada $D = A + 3k_1$, $E = B - \frac{3}{2}k_1$, $F = C - \frac{3}{2}k_1$ dır.

Sonuç 4.3.18: $f : M^2 \to IE^m$, 3-mertebeli bir helissel daldırma olsun. O zaman

$$h(X,X) = \alpha\xi_3 - a\xi_5 \tag{4.30}$$

dır.

İspat: $X = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$ birim vektör alanı yardımıyla

$$\begin{aligned} h(X,X) &= h(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2) \\ &= \frac{1}{2}h(e_1,e_1) + \frac{1}{2}h(e_2,e_2) - h(e_1,e_2) \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. Ayrıca (4.26)-(4.28) eşitlikleri (4.31) eşitliğinde yerlerine yazılırsa (4.30) eşitliği bulunur.

Sonuç 4.3.19: $f : M^2 \to IE^m$, 3-mertebeli minimal olmayan izotropik bir helissel daldırma olsun. O zaman M^2 yüzeyi, AW(3)-tipindedir.

İspat: $M^2 \subset IE^m$ minimal olmadığından $\alpha \neq 0$ dır. Ayrıca M^2 izotropik ise $a = 0$ dır. Böylece (4.29) ve (4.31) eşitlikleri, sırasıyla,

$$J(X) = \alpha(E+F)\xi_3$$

ve

$$h(X,X) = \alpha\xi_3$$

halini alır. Sonuç olarak $J(X)$ ile $h(X,X)$ lineer bağımlı olduklarından Tanım 4.3.14 yardımıyla M^2 yüzeyi AW(3)-tipindedir.

5. HELİSSEL ALTMANİFOLDLAR

5.1. Giriş

Bu bölümde helissel altmanifoldlar incelenmiştir. Ayrıca TC-altmanifoldları tanımlanarak tüm helissel altmanifoldların aynı zamanda birer TC-altmanifoldu olduğu gösterilmiştir.

5.2. Helissel Altmanifoldlar

Helissel altmanifoldlar diferensiyel geometrinin en önemli konularından biridir.

Teorem 5.2.1: $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+d}(c)$ bir izometrik daldırma olsun. M^n üzerindeki tüm γ geodezikleri için $\sigma = f \circ \gamma$, sabit $k_1, k_2, ..., k_j$ $(j \leq d-1,\ \ \sigma$, d mertebeli) Frenet eğriliklerine sahip ise,

$$\sigma^{(1)} = X$$

$$\sigma^{(i)} = (k_1 \cdots k_{i-1})^{-1} \sum_{l=0}^{[i/2]-1} a_{i,i-2l} (\overline{\nabla}^{i-2l-2} h)(X^{i-2l}),\ 2 \leq i \leq j+1$$

Frenet çatısı elde edilir. Burada $X = \dot{\gamma}$, $a_{i,i} = 1$, $a_{i,i-2l} = \sum_{i_1,...,i_l \in A_i} k_{i_1}^2 k_{i_2}^2 ... k_{i_l}^2$ $(l > 0)$ ve A_i, $\{2,3,...,i-2\}$ kümesinin alt kümelerinin bir koleksiyonudur. Ayrıca $x \in M^n$ noktasındaki birim teğet küresi $U_x M^n$ olmak üzere, $2 \leq k$, $l \leq 2j+1$, $0 \leq r \leq k-1$, $k + l \leq 2j+3$ ve $X, Y \in U_x M^n$ için,

$$< (\overline{\nabla}^{k-2}h)(X^r, Y, X^{k-r-1}), (\overline{\nabla}^{l-2}h)(X^l) >= \begin{cases} (-1)^{(k-1)/2} v_{(k+1)/2} < X, Y >, & k+1 = \text{çift} \\ 0 & , \quad k+1 = \text{tek} \end{cases} \quad (5.1)$$

dir. Burada $v_i = \left\|(\overline{\nabla}^{i-2}h)(X^i)\right\|^2$ sadece $k_1, k_2, ..., k_{i-1}$ e bağlıdır. $k \leq 2j+1$ için,

$$A_{(\overline{\nabla}^{k-2}h)(X^k)} X = \begin{cases} (-1)^{k/2-1} v_{k/2+1} X, & k = \text{çift} \\ 0 & , \quad k = \text{tek} \end{cases} \quad (5.2)$$

dır [25].

Önerme 5.2.2: Eğer tüm γ geodezikleri için $\sigma = f \circ \gamma$ nın $k_1, k_2, ..., k_j$ Frenet eğrilikleri sabit ise $\sigma^{(2)}, ..., \sigma^{(j+1)} \in N_x M^n$ dir. Özelikle eğer $k_1, k_2, ..., k_{d-1}$ ler sabit ise, f, geodezik normal kesitli bir daldırmadır [25].

Teorem 5.2.3: $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+d}(c)$ bir izometrik daldırma olsun. Eğer her bir $x \in M^n$ noktasında, her $X \in U_x M^n$ birim vektörü için, $A_{(D^{k-2}h)(X^k)} X \wedge X = 0 \quad (2 \leq k \leq 2j+1)$ oluyorsa, o zaman $k_1, k_2, ..., k_j$ Frenet eğrilikleri sabit olur ve böylece (5.1) ve (5.2) eşitlikleri sağlanır [25].

Teorem 5.2.4: $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+d}(c)$ izometrik daldırması bir helissel daldırmadır ancak ve ancak M^n geodezik normal kesitlere sahiptir [25].

Teorem 5.2.5. $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+d}(c)$ tüm geodezikleri d-yinci mertebeden olan bir daldırma olsun. O zaman

(a) Eğer d çift ve $k_1, k_2, ..., k_{(d/2)-1}$ Frenet eğrilikleri sabit ise, f helisseldir yani $k_1, k_2, ..., k_{d-1}$ ler sabittir.

(b) Eğer d tek , $k_1, k_2, ..., k_{(d-3)/2}$ Frenet eğrilikleri sabit ve $k_{(d-1)/2}$, tüm $U_x M^n$ birim küresi üzerinde sabit ise, f helisseldir [25].

Teorem 5.2.6: M^n, IE^m de geodezik normal kesitlere sahip bir küresel altmanifold olsun. O zaman M^n nin mertebesi çifttir [25].

Teorem 5.2.7: M^n, IE^{n+d} de geodezik normal kesitlere sahip bir tıkız altmanifold olsun. O zaman M^n nin mertebesi çifttir [25].

Teorem 5.2.8: M^n, IE^{n+d} de geodezik normal kesitlere sahip bir altmanifold ise, M^n sabit izotropiktir [14].

5.3. TC-Altmanifoldları

Tanım 5.3.1: $x : M^n \to IE^{n+d}$ fonksiyonu n-boyutlu Riemann manifoldu M den (n+d)-boyutlu Öklit uzayı IE^{n+d} ye bir izometrik daldırma olsun. M^n üzerindeki lokal koordinatlar $u_1, u_2, ..., u_n$ verildiğinde IE^{n+d} den indirgenen metrik

$$g_{ij} = < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > \quad , \quad 1 \le i, j \le n$$

şeklinde tanımlansın. Böylece

$$G = \det(g_{ij}) \text{ ve } (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

olmak üzere M^n nin IE^{n+d} den indirgenmiş metriğine göre Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j}) \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanır [41].

M^n nin IE^{n+d} den indirgenmiş metriğine göre Laplace operatörü Δ olmak üzere M^n nin ortalama eğrilik vektörü H,

$$\Delta x = -nH$$

Bertrami formülünü sağlar [14].

(2.11) denkleminde ΔH hesaplanırsa

$$\Delta H = 2A_N \operatorname{grad}\alpha + n\alpha \operatorname{grad}\alpha + (\Delta\alpha + S\alpha)N \tag{5.4}$$

elde edilir. Burada $\alpha = \|H\|$, S ikinci temel formun uzunluğunun karesi ve N de, M^n nin birim normal vektörüdür [14].

Tanım 5.3.2: M^n, IE^m de, n-boyutlu bir altmanifold olsun. Eğer

$$< \Delta H, e_i >= 0 \tag{5.5}$$

sağlanıyorsa, M^n ye Teğetsel Kübik Altmanifold (TC-altmanifoldu) denir.

Önerme 5.3.3: Tüm biharmonik ve minimal altmanifoldlar TC-altmanifoldudur.

Tanım 5.3.4: Eğer x pozisyon vektörlerinin her bir bileşeni

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_k,$$

sonlu spektral ayrışımına sahip ise, M^n ye sonlu tiptendir denir. Burada x_0, IE^m de sabit bir vektör ve $x_1, x_2, ..., x_k$ ler, $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, $1 \le i \le k$, $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k$ olacak biçimdeki sabit olmayan dönüşümlerdir.

Eğer tüm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerleri birbirinden farklı ise, x daldırması (ya da M^n manifoldu) k-tipindendir denir. Δ nın özdeğerlerinin kümesine M^n nin spekturumu denir ve Spec(M) ile gösterilir. Özel olarak, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerlerinden bir tanesi 0 ise, M^n ye null k-tipindendir denir.

M^n altmanifoldunun yer vektörü

$$x = x_0 + x_1 \ , \ \Delta x_0 = 0 \ , \ \Delta x_1 = c x_1 \tag{5.6}$$

ayrışımına sahip ise M^n ye null 2-tipindendir denir. Burada x_0 ve x_1, M^n üzerinde sabit olmayan vektörler ve c de sıfır olmayan bir sabittir.

$\Delta x = -nH$ olduğundan (5.6) denkleminden

$$\Delta H = cH \tag{5.7}$$

elde edilir.

Lemma 5.3.5: M^n, IE^m nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer $\Delta H = cH$ olacak şekilde bir $c \neq 0$ sabiti varsa, M^n altmanifoldu 1-tipinden ya da null 2-tipindendir [13].

Tanım 5.3.6: M^n, IE^m nin n-boyutlu altmanifoldu olsun. M^n nin ortogonal birim vektör alanları $e_{n+1}, ..., e_m$ ve e_{n+1} vektörü M^n nin H ortalama eğrilik vektörüne paralel olacak şekilde seçilsin. $A_r = A_{e_r}$ ve $n + 2 \leq r \leq m$ olmak üzere,

$$a(H) = \sum_{r=n+2}^{m} tr(A_H A_r) e_r \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlanan normal vektöre IE^m de M^n nin bağlaşık ortalama eğrilik vektörü denir. $a(H)$ vektörü, H ye diktir.

Eğer M^n nin bağlaşık ortalama eğrilik vektörü sıfır ise, M^n altmanifolduna IE^m nin bir A-altmanifoldu denir.

[12] de

$$\Delta H = \Delta^D H + \|A_{n+1}\|^2 H + a(H) + tr(\overline{\nabla} A_H) \tag{5.9}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $\Delta^D H$, D normal koneksiyonuna bağlı H nin Laplace operatörü,

$$\|A_{n+1}\|^2 = tr(A_{n+1}, A_{n+1}) \tag{5.10}$$

ve

$$tr(\overline{\nabla} A_H) = \sum_{i=1}^{n} \left[(\nabla_{e_i} A_H) e_i + A_{D_{e_i} H} e_i \right] \tag{5.11}$$

dır.

Lemma 5.3.7: M^n , IE^m nin 1-tipinden olmayan n-boyutlu altmanifoldu olsun. O zaman M^n null 2-tipindendir ancak ve ancak c sabiti için

$$tr(\overline{\nabla} A_H) = 0 \tag{5.12}$$

ve

$$\Delta^D H + \|A_{n+1}\|^2 H + a(H) = cH \tag{5.13}$$

sağlanır [13].

Önerme 5.3.8: Tüm 1-tipinden ve null 2-tipinden altmanifoldlar TC-altmanifoldlarıdır.

İspat: $M^n \subset IE^{n+d}$ altmanifoldu 1-tipinden ya da null 2-tipinden ise Lemma 5.3.5 den $\Delta H = cH$, $c \in IR$ dir. Böylece $< \Delta H, e_i >= 0$ bulunur.

Tanım 5.3.9: $f_1 : M_1^{m_1} \rightarrow IE^{m_1+d_1}$ ve $f_2 : M_2^{m_2} \rightarrow IE^{m_2+d_2}$ izometrik daldırmaları verilsin. $p \in M_1^{m_1}$ ve $q \in M_2^{m_2}$ için

$$(f_1, f_2) : M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2} \rightarrow IE^{m+d}, \quad m = m_1 + m_2, \quad d = d_1 + d_2$$
$$(f_1, f_2)(p, q) = (x_1, x_2, ..., x_{m_1}, y_1, y_2, ..., y_{m_2})$$

biçiminde tanımlanan daldırmaya f_1 ile f_2 nin çarpım daldırması adı verilir. $M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ manifolduna da $M_1^{m_1}$ ve $M_2^{m_2}$ nin Riemann çarpımı denir [30].

Teorem 5.3.10: $f_1 : M_1^{m_1} \rightarrow IE^{m_1+d_1}$ ve $f_2 : M_2^{m_2} \rightarrow IE^{m_2+d_2}$, kapalı altmanifoldlarının iki izometrik daldırması ve Δ, Δ_1 ve Δ_2, sırasıyla, $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$, $M_1^{m_1}$ ve $M_2^{m_2}$ nin Laplace operatörleri olsun. O zaman

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \tag{5.14}$$

dır [5].

Teorem 5.3.11: $\gamma : I \subset IR \rightarrow IE^m$, diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer γ, TC-eğrisi ise, γ üzerinde kurulan silindir bir TC-yüzeyidir.

İspat: $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), ..., \gamma_n(s))$, IE^m de bir eğri olsun. γ üzerindeki silindirin denklemi

$$x(s, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) = (\gamma(s), u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \tag{5.15}$$

şeklindedir.

$\gamma'(s) = v_1, v_1, ..., v_n$, γ nın yönlendirilmiş çatı alanı olsun.

$x_s = (v_1, 0, ..., 0)$ ve $x_{u_j} = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere, silindirin, $\{x_s, x_{u_1}, x_{u_2}, ..., x_{u_{n-1}}\}$ ortonormal teğetsel çatısı seçilsin. Buna göre

$$\nabla_{x_s} x_s = 0, \quad \nabla_{x_s} x_{u_j} = \nabla_{x_{u_j}} x_s = 0, \quad \nabla_{x_{u_j}} x_{u_k} = 0$$

ve

$$h(x_s, x_{u_j}) = h(x_{u_j}, x_{u_k}) = 0 \ , \ 1 \leq j,k \leq n-1$$

elde edilir. Böylece silindirin ortalama eğrilik vektörü, γ nın ikinci türevine $n-1$ tane sıfır eklenmiş

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{h(x_s, x_s), h(x_{u_i}, x_{u_i})\right\} \\ &= h(x_s, x_s) = (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \ldots, \gamma_n''(s), 0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

şeklinde bulunacaktır.

Örnek 5.3.12: Örnek 3.2.10 de verilen helis eğrisi TC-eğrisi olup bu eğri üzerinde kurulan

$$x(s,t) = (\cos\phi\cos(as), \cos\phi\sin(as), \sin\phi\cos(bs), \sin\phi\sin(bs), t)$$

silindiri bir TC-yüzeyidir.

Örnek 5.3.13: $x(s, u_1, u_2) = (b\cos s, b\sin s, a\cosh u_1 \cos u_2, a\cosh u_1 \sin u_2, au_1)$ parametrizasyonuyla verilen Katenoid ile $S^1(b)$ çemberinin çarpım manifoldu 2-tipindendir [6]. Buna göre Teorem 5.3.10 dan bu altmanifold bir TC-altmanifoldudur.

Teorem 5.3.14: (Karakterizasyon Teoremi) $M^2 \subset IE^m$ altmanifoldu olsun. Eğer M^2, PGNS-özelikli ise M^2 nin tüm normal kesitleri birer TC-eğrileridir.

İspat: γ , M^2 nin $\gamma(0) = p$ noktasındaki $\gamma'(0)$ doğrultusundaki normal kesiti olsun. Böylece $T = \gamma'$ olmak üzere

$$\gamma'' = \overline{\nabla}_T T = \nabla_T T + h(T,T) \quad (5.16)$$

elde edilir. $\nabla_T T$, T ye dik olduğundan ve γ p noktasında normal kesit olduğundan (5.16) denkleminden $\nabla_t T = 0$ bulunur. Buna göre, γ nın birinci eğriliği $k_1 = \|\gamma''\|$ için,

$$k_1(0) = \|h(t,t)\| \quad (5.17)$$

sağlanır. Eğer M^2 geodezik normal kesitlere sahip ise, Teorem 5.2.8 ve (5.17) eşitliğinden tüm normal kesitler aynı sabit birinci eğriliğe sahiptir. Böylece Tanım 3.3.1 e göre bu eğriler birer TC-eğrisidir.

5.4. TC-Yüzeyleri

Bu bölümde TC-yüzeyleri için örnekler verilmiştir. Ayrıca TC-yüzeyleriyle ilgili bazı sonuçlar bulunmuştur.

Örnek 5.4.1: IE^3 te b yarıçaplı $S^2(b)$ küresi

$$x(u,v) = (b\cos u\cos v, b\cos u\sin v, b\sin u)$$

biçiminde izometrik gömme olarak tanımlanır. Buna göre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (-b\cos u\sin v, -b\cos u\cos v, 0)$$

dir. Böylece $e_1 = \dfrac{\partial x / \partial u}{\left\| \partial x / \partial u \right\|}$, $e_2 = \dfrac{\partial x / \partial v}{\left\| \partial x / \partial v \right\|}$ elde edilir. Bununla beraber

$$\Delta H = -\frac{2}{b^3}(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

dır. Buradan $< \Delta H, e_1 >= 0$ ve $< \Delta H, e_2 >= 0$ bulunur. IE^3 te b yarıçaplı $S^2(b)$ küresi bir TC-yüzeyidir.

Örnek 5.4.2: IE^4 de T^2 tor yüzeyi

$$x(u,v) = (a\cos\frac{u}{a}, a\sin\frac{u}{a}, b\cos\frac{v}{b}, b\sin\frac{v}{b})$$

biçiminde izometrik gömme olarak tanımlanır. Buna göre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (-\sin\frac{u}{a}, \cos\frac{u}{a}, 0, 0)$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (0, 0, -\sin\frac{v}{b}, \cos\frac{v}{b})$$

dir. Böylece $e_1 = \dfrac{\partial x / \partial u}{\left\| \partial x / \partial u \right\|}$, $e_2 = \dfrac{\partial x / \partial v}{\left\| \partial x / \partial v \right\|}$ elde edilir. Bununla beraber

$$\Delta H = -\frac{1}{2}(\frac{1}{a^5}\cos\frac{u}{a}, \frac{1}{a^5}\sin\frac{u}{a}, \frac{1}{b^5}\cos\frac{v}{b}, \frac{1}{b^5}\sin\frac{v}{b})$$

dır. Buradan $< \Delta H, e_1 >= 0$ ve $< \Delta H, e_2 >= 0$ bulunur. IE^4 de T^2 tor yüzeyi bir TC-yüzeyidir.

Örnek 5.4.3: IE^4 de IH^2 helissel silindiri

$$x(u.v) = (u, a\cos v, a\sin v, bv)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (1,0,0,0)$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (0,-a\sin v, a\cos v, b)$$

dir. Böylece $e_1 = \dfrac{\partial x/\partial u}{\left\|\partial x/\partial u\right\|}$, $e_2 = \dfrac{\partial x/\partial v}{\left\|\partial x/\partial v\right\|}$ elde edilir. Bununla beraber

$$\Delta H = -\frac{1}{2(a^2+b^2)^2}(0, a\cos v, a\sin v, 0)$$

dır. Buradan $<\Delta H, e_1> = 0$ ve $<\Delta H, e_2> = 0$ bulunur. IE^4 de IH^2 helissel silindiri bir TC-yüzeyidir.

Örnek 5.4.4: IE^4 de

$$x(u,v) = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\cos v, \sin u\sin v)$$

biçiminde tanımlanan yüzey $S^3(1)$ in bir minimal yüzeyidir. Buna göre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u\cos v, \cos u\sin v)$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (-\cos u\sin v, \cos u\cos v, -\sin u\sin v, \sin u\cos v)$$

dir. Böylece $e_1 = \dfrac{\partial x / \partial u}{\left\| \partial x / \partial u \right\|}$, $e_2 = \dfrac{\partial x / \partial v}{\left\| \partial x / \partial v \right\|}$ elde edilir. Bununla beraber

$$\Delta H = -2(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$$

dır. Buradan $<\Delta H, e_1> = 0$ ve $<\Delta H, e_2> = 0$ bulunur. IE^4 de, $S^3(1)$ in minimal yüzeyi bir TC-yüzeyidir.

Örnek 5.4.5: IE^6 da $\overline{T}^2$ tor yüzeyi,

$$x(u,v) = (a\sin u, b\sin u \sin\frac{v}{b}, b\sin u\cos\frac{v}{b}, a\cos u, b\cos u\sin\frac{v}{b}, b\cos u\cos\frac{v}{b})$$

biçimindeki gömme olarak tanımlanır. Buna göre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (a\cos u, b\cos u\sin\frac{v}{b}, b\cos u\cos\frac{v}{b}, -a\sin u, -b\sin u\sin\frac{v}{b}, -b\sin u\cos\frac{v}{b})$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (0, \sin u\cos\frac{v}{b}, -\sin u\sin\frac{v}{b}, 0, \cos u\cos\frac{v}{b}, -\cos u\sin\frac{v}{b})$$

dir. Böylece $e_1 = \dfrac{\partial x / \partial u}{\left\| \partial x / \partial u \right\|}$, $e_2 = \dfrac{\partial x / \partial v}{\left\| \partial x / \partial v \right\|}$ elde edilir. Bununla beraber, $a^2 + b^2 = c^2$ olmak üzere,

$$\Delta H = -\frac{1}{2}(\frac{a}{c^4}\sin u, \frac{(b^2+c^2)^2}{b^3c^4}\sin u\sin\frac{v}{b}, \frac{(b^2+c^2)^2}{b^3c^4}\sin u\cos\frac{v}{b},$$
$$\frac{a}{c^4}\cos u, \frac{(b^2+c^2)^2}{b^3c^4}\cos u\sin\frac{v}{b}, \frac{(b^2+c^2)^2}{b^3c^4}\cos u\cos\frac{v}{b})$$

dır. Buradan $<\Delta H, e_1>=0$ ve $<\Delta H, e_2>=0$ bulunur. IE^6 da $\overline{T}^2$ tor yüzeyi bir TC-yüzeyidir.

M^n hiperyüzeyi biharmonik ise (5.4) denkleminden

$$2A_N \text{grad}\alpha + n\text{grad}\alpha = 0 \qquad (5.18)$$

ve

$$(\Delta\alpha + S\alpha) = 0 \qquad (5.19)$$

bulunur. Buna göre (5.18) ve (5.19) eşitlikleri M^n yüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şarttır [9].

Tanım 5.4.6: (5.18) denklemini sağlayan hiperyüzeylere H-hiperyüzeyleri denir.

Önerme 5.4.7: Tüm H-hiperyüzeleri TC-hiperyüzeyleridir.

İspat: $M^n \subset IE^{n+1}$ hiperyüzeyi H-hiperyüzeyi ise (5.18) eşitliğinden

$$2A_N \text{grad}\alpha + n\alpha\text{grad}\alpha = 0$$

dır. Böylece (5.4) eşitliği

$$\Delta H = (\Delta\alpha + S\alpha)N$$

biçimine dönüşür. Buradan $<\Delta H, e_i>=0$ elde edilir.

Teorem 5.4.9: Eğer $M^n \subset IE^{n+1}$ minimal olmayan bir TC-hiperyüzeyi ise, M^n yüzeyi en çok birbirinden farklı iki asli eğriliğe sahiptir (yani yarı-umbiliktir).

İspat: $M^n \subset IE^{n+1}$ minimal olmayan TC-hiperyüzeyi olsun. (5.4) eşitliği, (5.5) eşitliğinde ele alınırsa

$$< 2A_N \mathrm{grad}\alpha + n\alpha \mathrm{grad}\alpha + (\Delta\alpha + S\alpha)N, e_i >= 0$$

$$< 2A_N \mathrm{grad}\alpha + n\alpha \mathrm{grad}\alpha, e_i >= 0$$

$$< 2A_N \mathrm{grad}\alpha, e_i > + n\alpha < \mathrm{grad}\alpha, e_i >= 0$$

$$2\|\mathrm{grad}\alpha\| < A_{n+1} e_n, e_i > + n\alpha \|\mathrm{grad}\alpha\| < e_n, e_i >= 0$$

$$\|\mathrm{grad}\alpha\| \{2 < A_{n+1} e_n, e_i > + n\alpha < e_n, e_i >\} = 0$$

$$\|\mathrm{grad}\alpha\| \{2\lambda_n < e_n, e_i > + n\alpha < e_n, e_i >\} = 0$$

$$\|\mathrm{grad}\alpha\| < e_n, e_i > (2\lambda_n + n\alpha) = 0$$

bulunur. Burada $e_n = \dfrac{\mathrm{grad}\alpha}{\|\mathrm{grad}\alpha\|}$ dır. $\mathrm{grad}\alpha$ sıfırdan farklı olduğundan, $i = n$ için,

$$2\lambda_n + n\alpha = 0$$

$$\lambda_n = -\frac{n\alpha}{2}$$

elde edilir. Böylece

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & -\frac{n\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan M^n yüzeyinin yarı-umbilik olduğu görülür.

Önerme 5.4.10: $M^n \subset IE^5$ zayıf PHG-özelikli bir yüzey olsun. M^n yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial s^2} \tag{5.20}$$

biçimindedir. Burada $G = (1/k^2)\sin^2 ks + (4a^2/k^4)(1-\cos ks)^2$ dır. Eğer Gauss eğriliği sabit ise (5.20) eşitliği

$$2G\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2 + 4KG^2 = 0$$

şeklinde verilir [28].

Önerme 5.4.11: IE^5 te, her bir sabit Gauss eğrilikli zayıf PHG-özelikli yüzey bir TC-yüzeyidir.

İspat: $M^n \subset IE^5$ zayıf PHG-özelikli bir yüzey olsun. O zaman Teorem 4.2.4 yardımıyla bu yüzey (4.3) parametrizasyonuyla verilir. Eğer M^n yüzeyinin Gauss Eğriliği sabit ise [28] deki Lemma 2.14 ten, M^n nin Laplace operatörü

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(\log G)\frac{\partial}{\partial s} \tag{5.21}$$

şeklindedir. Burada $G = (1/k^2)\sin^2 ks + (1/k^2)(1-\cos ks)^2$ dır. Ayrıca, M^n nin ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere

$$\Delta x = -2H \tag{5.22}$$

dır. Böylece (5.22) kullanılarak (5.21) denkleminden ΔH hesaplanırsa

$$\Delta H - \frac{3}{2}k^2 H = 0$$

elde edilir. Buradan M^n yüzeyinin 1-tipinde olduğu görülür. Böylece Önerme 5.3.8 den M^n yüzeyi bir TC-yüzeyidir.

KAYNAKLAR

1. Arslan, K., Isoparametric Submanifolds with Pk-PNS. Ph D. Thesis, ***Leeds University,*** (1993).

2. Arslan, K., West, A., Product Submanifolds With Pointwise 3-Planar Normal Sections, ***Glasgow Math. J.***, 37, 73-81, (1995).

3. Arslan, K., West, A., Non-Spherical Submanifolds With Pointwise 2-Planar Normal Sections, ***Bull. London Math. Soc.***, 28, 88-92, (1996).

4. Arslan, K., West, A., Submanifolds and Their k-Planar Number, ***Journal of Geomerty***, Vol. 55, 23-30, (1996).

5. Arslan, K. and Kilic, B., Product Submanifolds and their types, ***Far East Journal of Mathematical Sciences,*** Volume 6, 125-134, (1998).

6. Arslan, K. and Kilic, B., Rotational surfaces of revolution and their types, ***Far East Journal of Mathematical Sciences*** Special Voloume, Part III., 273-280, (1999).

7. Arslan, K., Çelik, Y., Hacısalihoğlu, H.H., On Harmonic Curvatures of A Frenet Curve, ***Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.*** Series A1 V.49.pp15-23, (2000).

8. Arslan, K., Lümiste, U., Murathan, C., 2-Semiparallel surfaces in space forms I: Two particular cases, ***Proc.Est.Ac.***,49(3), 139-148, (2000).

9. Chen, B.Y., Geometry of Submanifolds, ***Dekker, New York,*** (1973).

10. Chen, B.Y., On Submanifolds of Finite Type, ***Soochow Journal of Math***. 9, 65-81, (1983).

11. Chen, B.Y., On the total curvature of immersed manifolds, VI: Submanifols of finite type and their applications, ***Bull.Inst.Math.Acad.Sinica*** 11, 309-328 , (1983).

12. Chen, B.Y., Total mean curvature and submanifolds of finite type, ***World Scientific***, Singapore, (1984).

13. Chen, B.Y., Null 2-type surfaces in Euclidean space , ***in Algebra, Analysis and Geometry***, (Taipei , 1988) 1-18, ***World Sci.Publishing,*** Teaneck , NJ, (1989).

14. Chen, B.Y., Verheyen, P., Submanifolds with Geodesic Normal Sections, ***Math. Ann.***, 269, 417-429, (1984).

15. Chen, B.Y., Deprez, J., Dillen, F., Verstraelen, L. and Vrancken, L., Finite type curves , ***Geometry and topology of submanifolds II***, France , 76-110, (1990).

16. Chen, B.Y., Deprez, J., Verheyen, P., Immersion with geodesics of 2-type, ***Geometry and Topology of Submanifolds***, 4 , 87-110, (1992).

17. Deprez, J., Dillen, F. and Verstraelen , L., Finite type space curves, ***Soochow J. Math.*** 12, 1-10, (1986).

18. Dillen, F., The classification of hypersurfaces of an Euclidean space with paralel higher order fundamental form, ***Math.Z.***, 203, 635-643, (1990).

19. Edgar, J. and Fuller , JR., Torus curves with vanishing curvature, arXiv.math.DG/9803021 v1 6 march (1998).

20. Erbacher J., Reduction of codimension of isometric immersion, ***J. Diff. Geometry***, 5, pp. 333-340,(1971).

21. Ferus, D., Schirrmacher, S., Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics, Math. Ann., 260, 57-62, (1982).

22. Gluck, H., Higher curvatures of curves in Euclidean space, ***Am. Math. Monthly*** 73, 699-704, (1966).

23. Hacısalihoğlu, H.H., Diferansiyel Geometri, **İnönü Üniversitesi**, 895p, (1980).

24. Hacısalihoğlu,H.H., ,Diferansiyel Geometri, ***Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi*** (1993).

25. Hong, Y.,Houh, C.-S., Helical Immersions and Normal Sections, ***Kodai Math. J.***, 8, 171-192, (1985).

26. Kılıç, B., Sonlu Tipte Eğriler ve Yüzeyler, Doktora Tezi, ***Hacettepe Ünv.***, (2002)

27. Klein, F. and S. Lie, Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, ***Math. Ann***. vol 4, 50-84, (1871).

28. Kim, Y. H., Surface with Simple Geodesics, ***J.Korean Math. Soc.***, 30,361-369, (1993).

29. Kim, Y. H., Surfaces of Euclidean Space with Helical or Planar Geodesics Through a Point, ***Ann. Mat. Pura App***., Vol. 164, 1-35, (1993).

30. Moore, T. D. , Isometric immersions of Riemannian products, ***Jour. of Geom.*** 5, 159-168, (1971).

31. Monterde, J. , Curves With Constant Curvature Ratios, ***to appear in the Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana 3a***. Serie Volumen 13 Número 1, , Preprint, (2007).

32. O'Neill, B., Elemantary Differantial Geometry, ***Academic Press***, (1966).

33. Özdamar, E, Hacısalihoğlu H, H., A Characterization of inclined Curves in Euclidean n-space. ***Comm. Fac. Sci-Univ***. Ankara, Ser.Al. Math. 24, (1975).

34. Pottman, H., and Hofer, M., A variational approach to spline curves on Surfaces, ***Computer Aided Geometric Design***, 22, 693-709, (2005).

35. Rodrigues Costa, S. , On closed twisted curves, ***Proceedings of the Am. Math.*** **Soc.**, vol. 109, 205-214, (1990).

36. Romero-Fuster, M.C. ,Sanabria-Codesal , E., Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n-space, ***Matematica Contemporanea***, vol. 17, 267-280, (1999).

37. Salkowski, E., Zur Transformation von Raumkurven, ***Math. Ann.*** 66, 517-557, (1909).

38. Tamura, M., Surfaces Which Contain Helical Geodesics in the 3-Sphere, ***Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ.*** Series B:Mathematical Science 37, pp. 59-65, (2004).

39. U-Hang K., Kim, Y, H,, Surface With Simple Geodesics Through a Point, ***Journal of Geometry***, 51, 67-78, (1994).

40. Uribe-Vargas, R., On Singularites, "Perestroikas" and Differential Geometry of Space Curve, ***L'Enseignement Mathématique,*** t. 50, 69-101, (2004).

41. Zafindratafa, G., Hypersurfaces whose mean curvature function is of finite type, ***Journal of Geometry***. Vol 5, No 1-2, , 182-191, (1996).

42. Weisstein, Eric W. "Ordinary Differential Equation--System with Constant Coefficients." From MathWorld--A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/OrdinaryDifferentialEquationSystemwithConstantCoefficients.htm (**Ziyaret Tarihi: 03 Şubat 2006).**

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Bulgaristan'ın Razgrad kentinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmit'te tamamladı. 1994 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden Matematikçi olarak mezun oldu. 2003 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2004 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı.

1999 yılından beri Kocaeli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olup evli ve bir kız çocuk babasıdır.