

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ESNEK OLMAYAN ÇUBUĞUN BÜKÜLMESİ İLE İLGİLİ
MONOTON OPERATÖRLÜ TERS KATSAYI PROBLEMİNİN
ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Salih TATAR

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ESNEK OLMAYAN ÇUBUĞUN BÜKÜLMESİ İLE İLGİLİ
MONOTON OPERATÖRLÜ TERS KATSAYI PROBLEMİNİN
ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematikçi Salih TATAR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 4 Haziran 2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 22 Haziran 2007

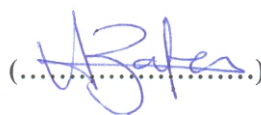
Tez Danışmanı

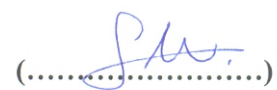
Üye

Üye

Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU Prof. Dr. Ağacık ZAFER Doç. Dr. Serdal PA MUK

(.....)


(.....)


(.....)


KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bükülmenin matematiksel modeli verilmiş, düz ve ters problemler tanımlanmıştır. Düz problem monoton operatörler teorisi kapsamında incelenmiştir ve ters problemin quazi çözümünün varlığı kanıtlanmıştır. Daha sonra ise düz ve ters problemler sayısal olarak çözülmüştür.

Bu çalışmanın, ters problemler ve sayısal yöntemler ile ilgili çalışmalara katkısının olmasını dilerim.

Beni bu konuda çalışmaya sevk eden ve her konuda bana yardımcı olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU' na teşekkürü bir borç bilirim; ayrıca, her zaman ve her konuda bana yardımcı olan hocam sayın Doç. Dr. Zahir MURADOĞLU' na teşekkürlerimi sunarım.

Yine, üzerimde emeği olan ve burada isimlerini saymadığım Kocaeli Üniversitesi Matematik bölümünün değerli hocalarına, arkadaşlarım Dr. Ali DEMİR' e, Arş. Gör. Abdulkadir AYGÜNOĞLU' na, Uzman Arzu ERDEM' e ve hayatım boyunca benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan AİLEME teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
TABLolar DİZİNİ	iv
SİMGELER	v
ÖZET	vi
İNGİLİZCE ÖZET	vii
GİRİŞ	1
1. BÜKÜLMENİN MATEMATİKSEL MODELİ VE TERS PROBLEMİN TANIMI	3
1.1. Esnek (Elastik) Cismin Denge Problemi ile İlgili Matematiksel Modeller	3
1.2. Esnek Olmayan Silindirik Çubuğun Bükülmesinin Matematiksel Modeli	12
1.3. Ters Katsayı Probleminin Tanımı	15
1.4. Düz Problemin Zayıf Çözümü ve Potansiyeli	16
1.5. Ters Katsayı Problemi için Quasi Çözümün Varlığı	22
1.6. Kare Bölgede Esnek Çubuğun Bükülmesi Problemi	26
2. LİNEER OLMAYAN DÜZ PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ	32
2.1. Yaklaşık Çözümün Tanımlanması ve Potansiyeller Dizisi	32
2.2. Yakınsama Teoremi	38
3. DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	48
3.1. Düz Problemin Sonlu Fark Denkleminin Elde Edilmesi, Sonlu Fark Çözümü ve Hata Analizi	48
3.2. Ters Problemin Ayrık Probleme Dönüştürülmesi	54
3.3. Kesin Deneysel Verili Ters Problemin Sayısal Çözümü	56
3.4. Deney Hatalarıyla Verilmiş Ters Problemin Sayısal Çözümü	62
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	66
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Gerilim tensörünün bileşenleri	5
Şekil 1.2. Bir boyutlu elastik çubuğun eğilmesinde simetri eksenini	9
Şekil 1.3. $T = g(\xi^2)\xi$ fonksiyonu	13
Şekil 1.4. Altı sabitlenmiş ve eksenini z 'ye paralel olan çubuğun bükülmesi.....	14
Şekil 3.1. $g(\xi)$ fonksiyonunun $\kappa = 0$ ve $\kappa = 1$ durumu	53
Şekil 3.2. $g(\xi)$ fonksiyonu	54
Şekil 3.3. $g(\xi)$ fonksiyonuna parçalı lineer yaklaşım.....	56
Şekil 3.4. Sert ve yumuşak malzemeler için ters problemin çözümü	61
Şekil 3.5. Sert malzeme için plastiklik durumunda 7 nokta ile ters problemin çözümü.	62
Şekil 3.6. $\gamma = 0.03$ ve $\gamma = 0.05$ deney hatalarıyla verilmiş ters problemin çözümü...65	65

TABLolar DİZİNİ

Tablo3.1. $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ fonksiyonu için (1.30)-(1.31) probleminin 2 farklı başlangıç iterasyonu için bulunan $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi.....	51
Tablo 3.2. Örnek 3.1 deki problemin $N \times M = 20 \times 20$ ve $N \times M = 40 \times 40$ alınarak çözümü sonucu elde edilen mutlak hatalar.....	51
Tablo 3.3. Mühendislik malzemesi için $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi.....	54
Tablo 3.4. Düz problemin θ' nin artan değerleri için çözümüne karşılık gelen M ve ξ değerleri	57
Tablo 3.5. Kesin deneysel verili ters problem için G' nin belirlenmesi	58
Tablo 3.6. Kesin deneysel verili ters problem için β_1' in belirlenmesi	60
Tablo 3.7. Kesin deneysel verili ters problem için β_2' nin belirlenmesi	60
Tablo 3.8. Kesin deneysel verili ters problem için β_3' ün belirlenmesi	60
Tablo 3.9. Kesin deneysel verili ters problem için β_4' ün belirlenmesi	61
Tablo 3.10. $\gamma = 0.03$	63
Tablo 3.11. $\gamma = 0.03$ hata payı sonucu elde edilen M değerleri.....	63
Tablo 3.12. $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_1' in belirlenmesi.....	64
Tablo 3.13. $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_2' nin belirlenmesi ...	64
Tablo 3.14. $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_3' ün belirlenmesi	64
Tablo 3.15. $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_4' ün belirlenmesi	65

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
Ω	: \mathbb{R}^2 'de sınırlı bölge
∇	: Gradyan vektörü
$C^m(\Omega)$: m negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere kendisi ve $ \alpha \leq m$ olmak üzere α . kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C_0^m(\Omega)$: $C^m(\Omega)$ uzayından olan ve Ω bölgesinin sınırında 0'a eşit olan fonksiyonlar uzayı
$L_p(\Omega)$: Ω bölgesinde p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$H^1(\Omega)$: Kendisi ve $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonlar uzayı
$H_0^1(\Omega)$: $H^1(\Omega)$ uzayından olan ve Ω bölgesinin sınırında 0'a eşit olan fonksiyonlar uzayı
$H^0(\Omega)$: $L_2(\Omega)$ uzayı
B	: Banach uzayı
$a(.,.)$: Bilineer form
U^*	: U uzayının dual uzayı
$\ \cdot\ _0$: $L_2(\Omega)$ uzayında norm
$DA(u, v)$: A operatörünün u'da v elemanı yönündeki birinci mertebeden Gateaux türevi
$Df(u, v)$: f fonksiyonelinin u'da v elemanı yönündeki birinci mertebeden Gateaux türevi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Hilbert uzayında iç çarpım
$\ \cdot\ $: Banach uzayında norm
$J(u)$: A operatörünün potansiyeli
$g_h(x)$: Yaklaşık çözüm fonksiyonu
H	: Reel hilbert uzayı

ESNEK OLMAYAN ÇUBUĞUN BÜKÜLMESİ İLE İLGİLİ MONOTON OPERATÖRLÜ TERS KATSAYI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

SALİH TATAR

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Eliptik Denklem, Monoton Operatör, Bükülme, Ters problem, Zayıf Çözüm, Lineerleştirme, Yakınsaklık, İterasyon Algoritması, Esnekliğin Deformasyon Teorisi

Özet: Bu çalışmada, lineer olmayan eliptik denklemdeki bilinmeyen katsayıyı belirleyen ters problem incelenmiştir. Esnekliğin deformasyon teorisi içerisinde lineer olmayan eliptik operatör bir monoton potansiyel operatördür. Bu yüzden, monoton operatör teorisini uygulayarak düz problemin $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uzayında tek çözümünün olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra düz problem için lineerleştirilmiş şema önerilmiş ve yakınsaklık ispatlanmıştır. Bununla birlikte ters problemin quazi çözümünün varlığı kanıtlanmıştır. Son bölümde, düz problemin nümerik çözümü için sonlu fark şeması ve quazi-statik ters problemin nümerik çözümü için bir algoritma çıkarılmıştır. Hatasız ve hatalı giriş verileri için elde edilen sonuçlar ters problemin çözümü için kullanılan yöntemin doğru ve kararlı olduğunu göstermektedir.

**SOLUTION OF THE INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR
MONOTONE OPERATOR, RELATED TO ELASTO-PLASTIC TORGUE OF
A BAR**

SALİH TATAR

Keywords: Nonlinear Elliptic Equation, Monotone Operator, Torgue, Inverse Problem, Weak Solution, Linearization, Convergence, Iteration Algorithm, Deformation Theory of Plasticity.

Abstract: In this study, inverse problem related to determination of unknown coefficient in the nonlinear (monotone) elliptic equation is considered. Within the range of the deformation theory of plasticity, the nonlinear elliptic operator is a monotone potential one. Therefore we apply monotone operator theory and prove that the direct problem has a unique solution in $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. In addition to this, we proved existence of the quazi solution for the inverse coefficient problem. Then we propose a linearization scheme for the direct problem and prove the convergence. In the final chapter 3 we derive the variational finite difference scheme for the numerical solution of the direct problem, and an algorithm for the numerical solution of the quasi-static inverse problem. The result obtained for the noise free and noisy synthetive data show that the presented method of solution of the inverse problem is accurate and stable.

GİRİŞ

Ters katsayı problemleri bilimsel literatürde güncel problemlerdendir. Bunların içinde lineer olmayan operatörlerin katsayısının belirlenmesi ile ilgili olanlar, yeni sınıf ters problemlerdendir. Bu çalışmada esnek olmayan (“elasto-plastik”) çubuğun bükülmesi ile ilgili ters problem incelenmiştir.

Bölüm 1’ de deformasyon teorisi kapsamında bükülmenin matematiksel modeli verilmiş ve buna dayalı ters problem tanımlanmıştır. Bu ters problemin bir ögesi olan düz problem, lineer olmayan eliptik denklem için Dirichlet problemi olarak ortaya çıkmıştır. Bu problemin zayıf çözümü tanımlanmış ve daha sonra diferansiyel operatörün potansiyel operatör olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ters problemin yaklaşık (quazi) çözümü tanımlanmış ve bu çözümün varlığı ispatlanmıştır. Son olarak, esnek çubuğun bükülme problemi değişkenlere ayırma yöntemiyle çözülmüş ve bükülmenin analitik ifadesi elde edilmiştir.

Bölüm 2’ de düz problem monoton potansiyel operatörler teorisi kapsamında ele alınmıştır. Önce bilinen sonuçların kısa tekrarı ve analizi verilmiş, daha sonra da bu sonuçlar bükülme problemine uygulanmıştır. Monoton potansiyel operatörler teorisinde soyut kavram olarak tanımlanan $\Pi(u)$ potansiyelinin yaklaşık çözümler üzerindeki değerinin bükülme ve bükülme açısı üzerinden ifadesi elde edilmiştir. Bu bölümde düz problemin çözümünün varlığı ve tekliği ile, ayrıca yaklaşık çözümün kesin çözüme yakınsaması ile ilgili teoremler kanıtlanmıştır.

Bölüm 3’ de düz ve ters problemlerin sayısal çözüm algoritmaları verilmiştir. Düz problem zayıf çözüme dayalı incelendiğinden dolayı, sonlu fark denklemi de integralleme yoluyla elde edilmiştir. Bu denklemin yakınsama hatasının düşük olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, potansiyeller dizisinin monoton azalan dizi olması, sayısal deneylerle de gözlemlenmiştir. Gerçek mühendislik malzemeleri için ters problem hem hatalı, hem de kesin deney verilerine dayalı çözülmüştür. Her iki

durumda elde edilen sonuçlar, tezde önerilen algoritmanın kararlılığının yüksek, hatasının da düşük olduğunu göstermektedir.

BÖLÜM 1. BÜKÜLMENİN MATEMATİKSEL MODELİ VE TERS PROBLEMİN TANIMI

1.1. Esnek (Elastik) Cismin Denge Problemi ile İlgili Matematiksel Modeller

Dış kuvvetlerin etkisiyle dengede olan ve G bölgesini dolduran B sert cismi çeşitli derecelerde deforme olur, yani hacmini ve şeklini değiştirir. Dış kuvvetlerin etkisiyle ortaya çıkan deformasyon belli değeri aşmazsa, bu kuvvetin etkisi kaldırıldığında, cismin deformasyonu kaybolur ve cisim başlangıç şeklini alır. Böyle özelliği olan bir cisme esnek (elastik) cisim denir. Sert bir cismin deforme olması, her bir $x = (x_1, x_2, x_3)$ noktası için $u = (u_1, u_2, u_3)$ yer değiştirme vektörünün verilmesiyle belirlenir. B sert cisminin herhangi bir noktasının deforme olmadan önceki durumu x , deforme olduktan sonraki durumu x' olursa, yer değiştirme vektörü $u = x - x'$ veya $u_i(x) = x_i - x_i'$, $i = 1, 2, 3$ şeklinde belirlenebilir.

B sert cisminin hacim birimine karşılık gelen kuvvet vektörü $F = (F_1, F_2, F_3)$, bu cismin Γ yüzeyine karşılık gelen kuvvet vektörü de $f = (f_1, f_2, f_3)$ olsun. Sert cismin denge durumunda (Hasanov 2001, Rektorys 1977, Timoshenko ve Goodiyer 1970)

$$\iiint_G F dx + \iint_\Gamma f d\Gamma = 0 \quad (1.1)$$

eşitliği sağlanır. Diverjans teoremine göre, $\iint_\Gamma f_i d\Gamma$ integralini ($i = 1, 2, 3$) bir hacim integrali gibi tanımlayabilecek bir $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ vektörü bulunabilir:

$$\iint_\Gamma f_i d\Gamma = \iiint_G \operatorname{div} \sigma_i dx \quad (1.2)$$

Burada

$$f_i = \sigma_{i1} \cos(n, x_1) + \sigma_{i2} \cos(n, x_2) + \sigma_{i3} \cos(n, x_3), i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

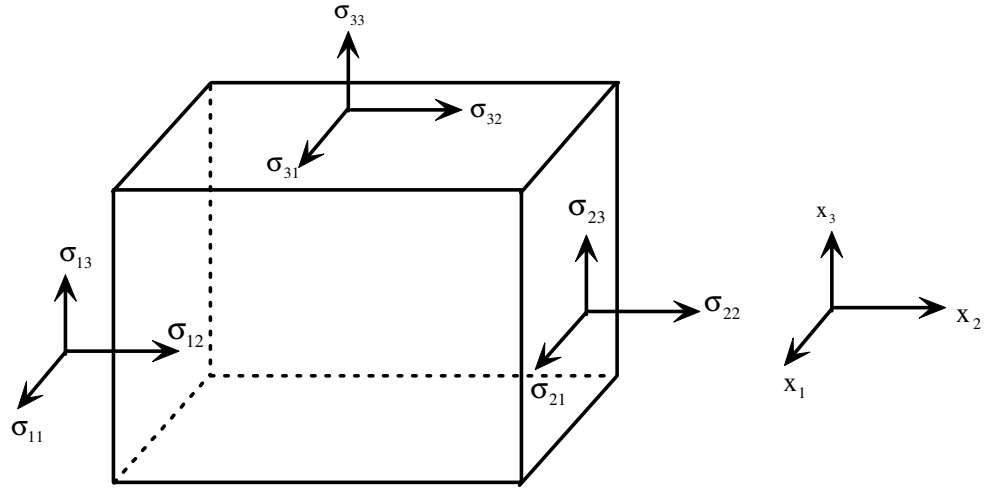
ve n , G bölgesinin yüzeyine yönlendirilmiş dış normaldir. (1.1) formülü ve G bölgesinin keyfi bölge olduğu dikkate alınır, elde etmek istediğimiz denge denklemi,

$$\text{div} \sigma_i + F_i = 0, i = 1, 2, 3, x \in G \subset \mathbb{R}^3$$

veya

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, i = 1, 2, 3, x \in G \quad (1.4)$$

şeklinde olur. Burada $\sigma = \{\{\sigma_{ij}\}\}$ matrisine gerilim tensörü denir. Gerilim tensörünün bileşenlerinin fiziksel anlamını incelemek için x noktasını öyle seçelim ki, bu noktada normal, $0x_1$ eksenine aynı yönde olsun. O halde (1.3)' den $f_i = \sigma_{i1}$ elde edilir. Böylelikle, σ_{i1} bileşeni, $0x_1$ eksenine dik birim yüzeye (düzleme) etkiyen f kuvvetinin $0x_1$ eksenine izdüşümü olur, yani, σ_{i1} bileşeni f kuvvetinin düşey (normal), σ_{i2} ve σ_{i3} ise yatay bileşenleridir. (Şekil 1.1)



Şekil 1.1: Gerilim tensörünün bileşenleri

Kolayca gösterebileceği gibi, gerilim tensörü simetriktir ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) ve (1.3) denklemler sisteminde sadece altı bilinmeyen fonksiyon vardır. Bunun için bileşke kuvvetlerin momentlerinin $0x_1$ eksenine göre sıfıra eşit olması koşulunu yazalım:

$$\iiint_G [x_2 F_3 - x_3 F_2] dx + \iint_{\Gamma} [x_2 f_3 - x_3 f_2] d\Gamma = 0.$$

Birinci integralde (1.4) sistemi, ikinci integralde ise (1.3) ifadesini göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \iiint_G \left[x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \right] dx + \iint_{\Gamma} [x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}] \cos(n, x_j) d\Gamma \right\} = 0 \quad (1.5)$$

ifadesi elde edilir. Son integrale Diverjans teoremi uygulanarak,

$$\iint_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) \cos(n, x_j) d\Gamma = \iiint_G \operatorname{div} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) dx$$

$$\iiint_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 \sigma_{31} - x_3 \sigma_{21}] + \frac{\partial}{\partial x_2} [x_2 \sigma_{32} - x_3 \sigma_{22}] + \frac{\partial}{\partial x_3} [x_2 \sigma_{33} - x_3 \sigma_{23}] \right\} dx =$$

$$\iiint_G \left\{ x_2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \sigma_{32} - \sigma_{23} \right\} dx$$

bulunur. Bu (1.5) eşitliğinde yazılıp G ' nin keyfi bölge olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}$$

eşitliği elde edilir. Benzer biçimde $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ve $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ olduğu ispatlanabilir.

Demek ki gerilim tensörü simetriktir.

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

olarak tanımlanan fonksiyon simetrik tensördür ve cismin deformasyonunu ifade eder. (deformasyon tensörü)

Elastite kuramında gerilim ve deformasyon tensörleri arasındaki bağıntı Hooke yasasıyla verilir. Esnek cisim için Hooke yasası aşağıdaki gibidir: (Timoshenko ve Goodiyer 1970)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda \theta(\mathbf{u}) \delta_{ij}, \quad \theta(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}). \quad (1.7)$$

Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Kronecker sembolü, $\lambda = \lambda(x)$ ve $\mu = \mu(x)$ Lamé katsayılarıdır. Uygulamalarda Lamé katsayılarıyla

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.8)$$

biçiminde ifade edilen E esneklik katsayısı ve ν Poisson katsayısı daha çok kullanılır. (1.6), (1.7) formüllerini (1.4) sisteminde göz önüne alırsak deforme olan türdeş (homojen) sert cisim için denge denklemlerini elde ederiz: $[\theta(u) = \text{div } u]$:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu(x) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda(x) \text{div } u \right\} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Bu sisteme Lamé denklemler sistemi denir. (Timoshenko ve Goodier 1970)

Cisim türdeş olduğu halde Lamé katsayıları x ' e bağlı olamaz. Türdeş cisim için (1.9) sistemi vektör biçiminde aşağıdaki gibi yazılır:

$$-(\lambda + \mu) \text{grad div } u - \mu \Delta u = F. \quad (1.10)$$

Burada $u(x) = [u_1(x), u_2(x), u_3(x)]$ yer değiştirme vektörüdür. Ox_3 eksenine paralel kesitlerde deformasyonlar aynı olursa, yer değiştirme vektörünün bileşenleri x_3 koordinatına bağlı olamaz ve u_3 bileşeni sıfıra eşit olur. Cismin bu biçimdeki deformasyon durumuna ‘‘Düzlem deformasyon hali’’ denir. (Timoshenko ve Goodier 1970)

(1.6) formüllerinden düzlem deformasyon hali için,

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$$

ifadeleri elde edilir. Gerilim tensörünün σ_{33} bileşeni için $\varepsilon_{33} = 0$ olduğu ve (1.7)

Hooke yasası dikkate alınır

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

bulunur. (1.10) sistemi, düzlem deformasyon halinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0 \\ \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + F_2 = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Şimdi bu denklemler sistemi için sınır koşullarını yazalım.

G alanının Γ yüzeyinde yer değiştirme vektörünün verildiği durumda sınır koşulu

$$u_1 = g_1, u_2 = g_2 \quad (1.12)$$

biçiminde, yüzey kuvvetlerinin verildiği durumda ise sınır koşulu

$$\begin{cases} \sigma_{11} \cos(n, x_1) + \sigma_{12} \cos(n, x_2) = f_1 \\ \sigma_{21} \cos(n, x_1) + \sigma_{22} \cos(n, x_2) = f_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

biçiminde ifade edilir. Sınır koşullarının sağ tarafların sıfıra eşit olduğu durumlarda, sınır koşullarına türdeş (homojen) sınır koşulları denir. (1.12) ve (1.13) sınır koşullarından elde edilen türdeş sınır koşullarına, bunların fiziksel anlamına dayanarak "sert kenetlenme" ve "serbest sınır" koşulları da denir.

Şimdi ise bir boyutlu elastik çubuğun eğilmesi problemini inceleyelim. Eğilme kuramında iki hipotez kabul edilmiştir. (Timoshenko ve Goodier 1970) Bunlar, düzlem kesit hipotezi ve Euler-Bernoulli hipotezidir. Düzlem kesit hipotezine göre, çubuğun $0x_3$ eksenine dik düzlemle kesiti, deformasyondan sonrada $0x_3$ eksenine

dik düzlem olarak kalır. Euler-Bernoulli hipotezine göre $\frac{d^2 \omega}{dx_3^2}$ bükülmesi ve M

eğilme momenti arasındaki bağıntı

$$\frac{d^2\omega}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1.14)$$

biçimindedir. Burada $\omega(x_3) = u_3(0,0,x_3)$ eğilme fonksiyonu; I , çubuğun enine kesitinin eylemsizlik momenti, E de elastisite modülüdür.

Enine kesit alanının küçük olması nedeniyle dış kuvvetlerin etkisini yaklaşık olarak kesit bölgeleri üzerindeki $q(x_3)$ toplam kuvveti olarak yazabiliriz.

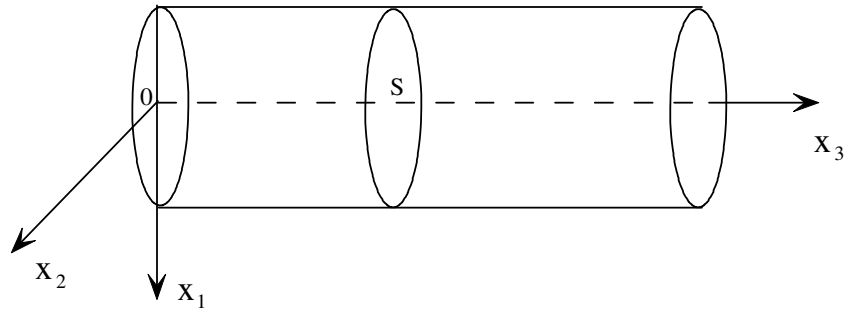
Simetri düzlemi olarak $0x_1x_3$ düzlemini ele alalım. (Şekil 1.2) Bu durumda, çubuğa dik olarak uygulanan kuvvetin simetri düzlemi de aynı olursa, S kesitinde (hacim kuvvetinin sıfır olduğunu varsayarak) sıfırdan farklı sadece

$$Q = \iint_S \sigma_{13} dx_1 dx_2 \quad (1.15)$$

kesme kuvveti ile

$$M = \iint_S \sigma_{33} x_1 dx_1 dx_2 \quad (1.16)$$

eğilme momenti olacaktır.



Şekil 1.2: Bir boyutlu elastik çubuğun eğilmesinde simetri eksenini

Çubuğun eğilmesinin denge denklemini elde etmek için herhangi (a,b) aralığını ele alalım ve bu kısmı etkileyen bileşke kuvvet ile bileşke momentin sıfıra eşit olması koşullarından yararlanalım. $Q(x_3)$ fonksiyonu türevlenebilirse, bileşke kuvvetlerin

$$\int_a^b q(x_3) dx_3 + Q(b) - Q(a) = 0$$

olması koşulunu göz önüne alarak

$$\int_a^b \left[q(x_3) + \frac{dQ}{dx_3} \right] dx_3 = 0$$

ifadesini elde ederiz. (a, b) aralığı keyfi olduğu için, son ifadeden

$$q(x_3) + \frac{dQ}{dx_3} = 0 \quad (1.17)$$

denklemini elde ederiz. Benzer biçimde, bileşke momentin

$$-\int_a^b q(x_3)(x_3 - a) dx_3 - Q(b)(b - a) + M(b) - M(a) = 0$$

denge koşulundan

$$\int_a^b \left[-q(x_3)(x_3 - a) - \frac{d[Q(x_3)(x_3 - a)]}{dx_3} + \frac{dM(x_3)}{dx_3} \right] dx_3 = 0$$

buluruz. (1.17) formülünü göz önüne alırsak, son eşitlikten herhangi (a, b) aralığı için

$$\int_a^b \left[\frac{dM(x_3)}{dx_3} - Q(x_3) \right] dx_3 = 0$$

bağıntısını elde ederiz. Bu durumda,

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} - Q(x_3) = 0, x_3 \in (a, b)$$

olur. Bu denklemde M eğilme momenti için (1.14) formülünü yazarsak,

$$EI \frac{d^3 \omega}{dx_3^3} + Q(x_3) = 0 \quad (1.18)$$

elde ederiz. (1.18) eşitliğinin sol tarafının x_3 değişkenine göre türevini alır ve (1.17) formülünü kullanırsak, bir boyutlu elastik çubuğun eğilmesinin denge denklemini elde ederiz.

$$D \frac{d^4 \omega}{dx_3^4} = q(x_3), x_3 \in (a, b). \quad (1.19)$$

$D = EI$ değerine eğilme sertliği denir.

Çubuk türdeş değilse $I = I(x_3)$ olur ve bu durumda (1.19) denklemi

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(D(x_3) \frac{d^2 \omega}{dx_3^2} \right) = q(x_3), x_3 \in (a, b) \quad (1.20)$$

biçimini alır. Bu durumlar Hasanov (2001)' de elde edilmiştir. Çubuğun uçlarında verilebilecek sınır koşulları aşağıdaki gibi olabilir.

a. "Ucun sadece dayanak üzerinde olması" (simply supported) koşulu. Çubuk sabit Ox_2 eksenini etrafında serbestçe dönebileceği için çubuğun uçlarında eğilme ve eğilme momenti sifira eşit olur:

$$\omega = 0, M = -EI \frac{d^2 \omega}{dx_3^2} = 0. \quad (1.21)$$

b. ‘‘Sert kenetlenmiş u’’ (rigid clamped) koşulu. Çubuğun bir ucu öyle kenetlenmiştir ki, bu noktada eğilme ve dönme sıfıra eşit olur:

$$\omega = 0, \frac{d\omega}{dx_3} = 0. \quad (1.22)$$

c. ‘‘Serbest uçlar’’ (free boundary) koşulu. M eğilme momenti ve Q kuvveti sıfıra eşit olur. (1.14) Euler-Bernoulli koşuluna ve (1.18) formülüne göre serbest uçlar için

$$\frac{d^2\omega}{dx_3^2} = 0, \frac{d^3\omega}{dx_3^3} = 0 \quad (1.23)$$

olmalıdır. Çeşitli problemlerde çubuğun uçlarındaki sınır koşulları, (1.21)-(1.23) koşullarının farklı bileşimleri şeklinde verilebilir.

1.2. Esnek Olmayan Silindirik ubuğun Bükülmesinin Matematiksel Modeli

Matematiksel modellemeye yatkınlığı ile bilinen klasik plastiklik teorilerinden en yaygını deformasyon teorisidir. (Kachanov 1967, Necas ve Hlavacek 1981) Bu teoriye göre, deformasyon $(\epsilon_{i,j})$ ve gerilim $(\sigma_{i,j})$ tensörlerinin bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki Hencky bağıntısı ile verilir:

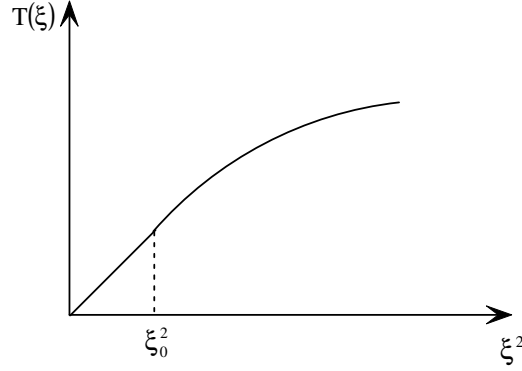
$$\sigma_{i,j} = 2g(\xi^2)\epsilon_{i,j}.$$

Bunun da sonucu olarak deformasyon yoğunluğu $\left(\xi = (2\epsilon_{ij}\epsilon_{ij})^{\frac{1}{2}}\right)$ ve gerilim yoğunluğu $\left(T = (0.5\sigma_{i,j}\sigma_{i,j})^{\frac{1}{2}}\right)$ arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$T = g(\xi^2)\xi. \quad (1.24)$$

$g(\xi^2)$ fonksiyonu malzemenin esneklik özelliklerini tanımlar ve plastiklik fonksiyonu olarak isimlendirilir. Esnek deformasyonlar durumunda $T = G\xi$, $G = \text{sabit} > 0$ dır ve plastiklik fonksiyonu $G > 0$ sabitine eşittir: $g(\xi^2) \equiv G$. G sabitine bazen sertlik katsayısı da denir. Esnek olmayan deformasyonlar durumunda ise (1.24) fonksiyonu doğrusallığını kaybeder. (Şekil 1.3)

(1.24) bağıntısı, bükülmeye maruz kalan malzemenin gerilim durumunu tanımlar. Gerçek malzemeler için $\frac{dT}{d\xi} \geq \text{const} > 0$ ve $T = g(\xi^2)\xi$ fonksiyonu dışbükeydir. (Hasanov 1995)



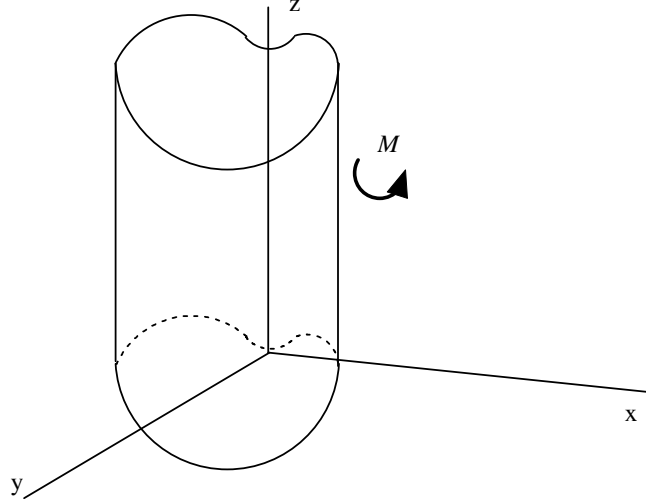
Şekil 1.3. $T = g(\xi^2)\xi$ fonksiyonu

$T = T(\xi)$ fonksiyonunun yukarıda sıraladığımız özellikleri sonucu, $g(\xi^2)$ fonksiyonu da aşağıdaki koşulları sağlar: (Kachanov 1974)

- (1) $c_0 \leq g(\xi^2) \leq c_1$,
- (2) $\gamma_0 \leq g(\xi^2) + 2g'(\xi^2)\xi^2, \xi^2 \in [0, \xi_M^2]$,
- (3) $g'(\xi^2) \leq 0, \xi^2 \in [0, \xi_M^2]$,
- (4) $\exists \xi_0^2 \in [0, \xi_M^2] \quad \forall \xi^2 \in [0, \xi_0^2] \quad g(\xi^2) = \text{sabit}$.

Burada $c_i, \gamma_i > 0$ birer sabitlerdir, ξ_0^2 sabiti de malzemenin esneklik limiti olarak tanımlanır.

(1)-(4) koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfını \mathcal{G} ile gösterelim. $\mathcal{G} \subset C^1[0, \xi_M^2]$ olduğu açıktır. \mathcal{G} kümesine ters problemler ve optimal kontrol teorisinde kabul edilebilir katsayılar kümesi denir. (Hasanov 1998, Hasanov ve Seyidmamedov 1998) Altı sabitlenmiş ve eksenini z ' ye paralel olan çubuğun bükülmesini ele alalım. (Şekil 1.4)



Şekil 1.4. Altı sabitlenmiş ve eksenini z ' ye paralel olan çubuğun bükülmesi

Bir silindirik çubuğun bükülmesinin matematiksel modeli aşağıdaki denklemlerle ifade edilir: (Kachanov 1967, Payne ve Philippin 1977)

$$Au \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \left[g(\xi^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[g(\xi^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] = -2\theta, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1.25)$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ çubuğun kesitidir, θ birim uzunluğun bükülme açısıdır, $u(x_1, x_2)$

Prandtl'in baskı (veya eğilme) fonksiyonudur ve $\xi = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{1/2}$ gradyanı

baskı yoğunluğunu ifade eder.

Kesitin $S = \partial\Omega$ sınırında sert kenetlenme koşulunun verildiğini varsayalım. Bunun anlamı

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.26)$$

türdeş Dirichlet sınır koşulunun sağlanmasıdır.

Buradaki matematiksel model, θ bükülme açısının artan değerlerine bağlı olarak bir süreç içinde ele alınır. Bu modele literatürde “quazi-statik” model de denir. (Kachanov 1974) Böylece bükülmenin matematiksel modeli lineer olmayan (1.25) eliptik denklemi için (1.25)-(1.26) Dirichlet problemi ile ifade edilir. Bu modelin temel özelliği $g = g(T^2)$ katsayısının $u = u(x)$ çözümünün gradyanına bağlı olmasıdır.

1.3. Ters Katsayı Probleminin Tanımı

Eğer yukarıda tanımladığımız (1.25)-(1.26) problemini belirli bir kümeden olan çeşitli $g = g(\xi^2)$ fonksiyonları için ele alırsak, o halde bu problemin tek çözümü olan $u(x)$ fonksiyonu da buna bağlı olarak değişecektir. Bu fonksiyonel bağımlılığı $u = u(x; g)$ olarak gösterelim. Buna karşılık gelen bükülme de

$$M[g] = M(u(x; g)) = 2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \quad (1.27)$$

olarak tanımlanır. (Bertola ve Cafaro 2003) Böylece, eğer malzeme belli ise, yani $g = g(T^2)$ fonksiyonu verilmiş ise, teorik olarak bükülme, (1.25)-(1.26) probleminin $u = u(x; g)$ çözümü üzerinden (1.27) formülü ile belirlenebilir.

Bükülmenin deneysel olarak verildiği durumlarda, malzemenin özelliğinin, yani, $g = g(T^2)$ fonksiyonunun aranması problemine, çubuğun bükülmesi ile ilgili ters katsayı problemi denir. Matematiksel olarak bu problemi ifade etmek için, bükülmenin $\theta \in (\theta_*, \theta^*)$ açısının herhangi bir değerine karşılık gelen deneysel değerini \mathcal{M} ile gösterelim. \mathcal{G} katsayılar kümesinden $\forall g \in \mathcal{G}$ alalım. O halde

bükülmenin buna karşılık gelen ve (1.27) ile hesaplanan $M[g]$ teorik değerini hesaplayarak, bunu \mathcal{M} deneysel değeri ile karşılaştırmak gerekir.

Dolayısı ile \mathcal{M} deneysel verisine dayalı ters katsayı problemi

$$M[g] = \mathcal{M}, g \in \mathcal{G} \quad (1.28)$$

operatör denklemi ile ifade edilir. Buradan, $M[g]$ operatörünü (1.27)' nin sağ tarafında verilmiş integral operatörü olduğunu dikkate alırsak, (1.28) soyut operatör denklemini

$$2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 = \mathcal{M} \quad (1.29)$$

lineer olmayan integral denklemi ile ifade edebiliriz. Burada $u = u(x; g)$ fonksiyonu, (1.25)-(1.26) probleminin çözümüdür. Ters problem kavramı kapsamında, $g \in \mathcal{G}$ katsayısı verildiği durumda, (1.25)-(1.26) sınır değer problemine düz problem denir.

1.4. Düz Problemin Zayıf Çözümü ve Potansiyeli

$$Au := -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = F(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1.30)$$

$$u(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in \partial\Omega \quad (1.31)$$

sınır-değer problemini ele alalım. Burada $g \in \mathcal{G}$ katsayısı u fonksiyonunun türevlerine bağlı olduğundan bu operatör lineer olmayan operatördür.

Aslında bizim ilgilendiğimiz problem (1.25)-(1.26) problemidir. Burada (1.30) denkleminin sağ tarafını genel olarak alıp zayıf çözümü ve potansiyeli tanımlayacağız. Bundan da yararlanarak çözümün varlığını ve tekliğini kanıtlayacağız.

Ω bölgesinde, (1.30) denklemini ve (1.31) sınır koşulunu sağlayan klasik çözüm $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sınıfında tanımlanır. Burada ve ileride $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ bölgesinin S sınırının sonlu sayıda pürüzsüz eğrilerden oluştuğu varsayılmaktadır.

Pratik problemlerin çözümünde klasik çözüm kavramı yetersiz kaldığından, (1.30)-(1.31) probleminin zayıf (genelleşmiş) çözümünü tanımlamamız gerekir. Bunun için (1.30) denkleminin her iki tarafını $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ile çarpıp, Ω bölgesinde integralleyelim.

$$\iint_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2. \quad (1.32)$$

Bu eşitliğin sol tarafına Green formülünü uygularsak ve $v(x_1, x_2)$ fonksiyonunun da sınırdaki $v(x_1, x_2) = 0$ koşulunu sağladığını varsayarsak, aşağıdaki özdeşliği elde ederiz:

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx_1 dx_2 := \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.33)$$

Bu integral özdeşliği sağlayan her bir $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonuna (1.30)-(1.31) probleminin zayıf (genelleşmiş) çözümü denir.

Hem bu bölümde, hem de diğer bölümlerde sık kullanacağımız $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ ve $H_0^1(\Omega)$, $C_0^1(\Omega)$ uzaylarının tanımlarını verelim. (Rektorys 1977)

$$L_2(\Omega) := \left\{ u(x) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \int_{\Omega} u^2(x) dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) := \left\{ u(x), x \in \Omega : u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = \overline{1, n} \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(x) = 0, x \in S\}, S = \partial\Omega$$

$$C_0^1(\Omega) = \{v \in C(\Omega) : v(x) = 0, x \in S\}$$

(1.32) denkleminde $F = 2\theta$ alınır ve (1.27) tanımı göz önünde bulundurulursa bükülme probleminin zayıf çözümü

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v \, dx_1 dx_2 = \theta M(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.34)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.1. Eğer, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ fonksiyonu (1.30)-(1.31) probleminin klasik çözümü ise, aynı zamanda zayıf çözümdür. Tersine, eğer, $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu, (1.30)-(1.31) probleminin zayıf çözümü ise ve ayrıca $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon aynı zamanda bu problemin klasik çözümüdür.

İspat. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ fonksiyonu (1.30)-(1.31) probleminin klasik çözümü olsun. $\forall v \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için (1.32) eşitliği sağlandığında (1.33) integral özdeşliği elde edilir. O halde (1.33) integral özdeşliğini sağlayan u fonksiyonu, zayıf çözümdür.

Tersine, u fonksiyonu (1.33) integral özdeşliğini sağlasın ve $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olsun. (1.33) integral özdeşliğinin sol tarafına Green teoremini tersten uygularsak ve $u(x) = 0, x \in S$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] \times v \, dx_1 dx_2 \quad (1.35)$$

elde ederiz. (1.35) integral eşitliğinin sağ tarafını, (1.33) özdeşliğinin sağ tarafına eşitlersek,

$$-\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2, \quad (1.36)$$

$$\forall v \in C_0^1(\Omega)$$

olur. Buradan da, (1.30) denklemini elde ederiz. Sonuç olarak, $H_0^1(\Omega)$ alt uzayında (1.33) ile tanımlı zayıf çözüm

$$a(u; u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.37)$$

denkleminde $u \in H_0^1(\Omega)$ ' yı bulma problemine denktir. Burada $a(u; v, w)$ lineer olmayan fonksiyoneli ve $l(v)$ lineer fonksiyoneli

$$a(u; v, w) = \iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla w dx_1 dx_2 \quad (1.38)$$

$$l(v) = \iint_{\Omega} F v dx_1 dx_2 \quad (1.39)$$

olarak tanımlanır. Burada $g \in \mathcal{G} \subset C^1$ ve $F \in L_2(\Omega)$. Aslında lineer eliptik operatörler için $g \in C$ durumunda da $u \in H_0^1(\Omega)$ zayıf çözümünün varlığı bilinmektedir. (Rektorys 1977) Fakat buradaki hedefimiz ters problem olduğu için, biz her zaman $g \in \mathcal{G}$ olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca, ileride lineer olmayan eliptik operatörün lineerleştirilmesi sonucu elde edilen $\{u_n\}$ çözümler dizisinin (1.36) lineer olmayan probleminin çözümüne yakınsaması için $g'(\xi) \leq 0$, $\xi = |\nabla u|^2$ koşulunun sağlanması gerekecektir. Bu da bir daha $\mathcal{G} \subset C^1$ koşulunu gerektirir.

Şimdi ise operatörler ve fonksiyoneller için türev kavramı ele alınacaktır.

B Banach uzayında her yerde yoğun B_1 lineer uzayında tanımlı lineer olmayan $A : B_1 \rightarrow B_1^*$ operatörünü ele alalım. Burada, B_1^* uzayı B_1 uzayının dual uzayıdır.

Tanım 1.1. Vainberg (1972) $u \in B_1$ olsun. $\forall v \in B_1$ için,

$$\frac{d}{dt} A(u + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(u + tv) - A(u)}{t} = VA(u, v) \quad (1.40)$$

limiti var ise, $VA(u, v)$ ' ye $A(u)$ operatörünün $u \in B_1$ noktasında ve $v \in B_1$ yönünde Gateaux varyasyonu veya Gateaux türevi denir.

$VA(u, v)$ Gateaux türevi $v \in B_1$ elemanına göre türdeşdir ama lineer değildir, yani

$$VA(u, \alpha v) = \alpha VA(u, v), \alpha \in \mathbb{R},$$

$$VA(u, v_1 + v_2) \neq VA(u, v_1) + VA(u, v_2).$$

Eğer verilen $u \in B_1$ için, $VA(u, v)$ Gateaux türevi $v \in B_1$ elemanına göre lineer ise, bu durum

$$VA(u, v) = DA(u, v) = A'(u)v = (A(u), v) = A'(u; v)$$

şeklinde gösterilir.

$A'(\cdot)$ ' ya $A(\cdot)$ operatörünün $u \in B_1$ noktasında ve $v \in B_1$ yönünde Gateaux türevi denir.

Herhangi $u \in B_1$ için $A'(\cdot)$ operatörü sınırlı ise bu operatör B_1 den B' ye sürekli operatör olarak genişletilebilir. Böylece $A'(\cdot)$ operatörü tüm B' de tanımlanmış olur. Şimdi $J(u): B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli için Gateaux türevinin tanımını verelim.

Tanım 1.2. $\forall v \in B_1$ için

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = VJ(u, v) \quad (1.41)$$

limiti var ve sonlu ise $VJ(u, v)$ 'ye $J(u)$ fonksiyonelinin $u \in B_1$ noktasında ve $v \in B_1$ yönünde Gateaux varyasyonu veya Gateaux türevi denir.

Eğer verilen $u \in B_1$ için $v \in B_1$ elemanına göre $VJ(u, v)$ lineer ise

$$VJ(u, v) = DJ(u, v) = J'(u, v) = (J(u), v) = J'(u; v)$$

olarak gösterilir. $J'(\cdot)$ lineer fonksiyoneline $J(\cdot)$ fonksiyonelinin $u \in B_1$ noktasındaki Gateaux türevi denir. $u \in B_1$ için, $J'(\cdot)$ lineer fonksiyoneli sınırlı ise bu fonksiyonel süreklidir ve sürekli olarak, tüm B uzayına genişletilebilir. Bu genişletilmiş fonksiyonele, $J(u)$ fonksiyonelinin $u \in B$ noktasındaki gradyanı denir ve $J'(u) = \text{grad}J(u)$, $u \in B$ ile gösterilir.

Tanım 1.3. Zeidler (1990) $\forall v \in B$ için,

$$\langle \text{grad}J(u), v \rangle = \langle Au, v \rangle, u \in B \quad (1.42)$$

olacak şekilde bir $A : B \rightarrow B^*$ operatörü varsa, o halde J fonksiyoneline, A operatörünün potansiyeli, A operatörünede J fonksiyonelinin gradyanı denir. Bu durumda A operatörüne potansiyel operatör denir.

$a(u; \dots)$ fonksiyoneli $H \times H$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış olan sınırlı, sürekli, simetrik ve pozitif tanımlı bilinear form ve A operatörü de $a(u; v, h)$ lineer olmayan fonksiyoneline karşılık gelen güçlü monoton potansiyel operatör olsun. Bu durumda, (1.33)'ün sol tarafını

$$\langle Au, v \rangle = a(u; u, v), u, v \in H$$

şeklinde gösterebiliriz.

Lemma 1.1. Hasanov (1998) (1.30) ile tanımlanmış A operatörünün potansiyeli

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 \quad (1.43)$$

olarak tanımlanan fonksiyoneldir.

İspat. Gerçekten de

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2g(|\nabla(u + tv)|^2) (\nabla(u + tv)) \nabla v dx_1 dx_2 \right\} \Big|_{t=0}$$

olur. Parantez içindeki ifadenin t ' ye göre tek değişkenli fonksiyon gibi türevi alınıp, daha sonra $t = 0$ yazılırsa

$$\langle J'(u), v \rangle = \iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx_1 dx_2$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafının $\langle Au, v \rangle$ olduğunu dikkate alırsak,

$\langle J'(u), v \rangle = \langle Au, v \rangle$ olduğunu görürüz. Bu ise lemmayı kanıtlar.

1.5. Ters Katsayı Problemi için yaklaşık çözümün varlığı

Önce ters problem için yaklaşık çözümün (veya quazi-çözümün) tanımını verelim.

$$\text{Tanım 1.4. } J(g) = \left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 - \mathcal{M} \right|, g \in \mathcal{G} \quad (1.44)$$

fonksiyoneli için

$$J(\tilde{g}) = \min J(g), g \in \mathcal{G} \quad (1.45)$$

minimum probleminin çözümüne, ters katsayı probleminin yaklaşık çözümü veya quazi çözümü denir.

Bölüm 1.2' de tanımladığımız \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar sınıfını ele alalım. Tikhonov Lemmasına göre, monoton azalan ve düzgün sınırlı fonksiyonlar sınıfı H^0 uzayında kompakttır. (1) ve (3) koşullarından dolayı \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar sınıfı H^0 uzayında kompakttır. Bu kümeyi $G_0 \subset H^0[\xi_*, \xi^*]$ ile gösterelim. $\{g_m(\xi^2)\} \subset G_0$ dizisi H^0 normunda $g_0(\xi^2) \subset G_0$ fonksiyonuna yakınsayan bir dizi olsun. Açıktır ki, $g_0(\xi^2)$ limit fonksiyonu (2) koşulunu sağlamayabilir, yani $g_0(\xi^2)$ limit fonksiyonu \mathcal{G} ' ye ait olmayabilir. (2) koşulunda $g'(\xi^2) \leq 0$ ve $\xi \leq \xi_*$ olduğunu dikkate alırsak,

$$g(\xi^2) + 2g'(\xi^2)\xi_*^2 \geq g(\xi^2) + 2g'(\xi^2)\xi^2 \geq \gamma_0, \xi_* > 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $g'(\xi^2) \leq c_1$ olduğunu dikkate alırsak

$$0 \geq g'(\xi^2) \geq -\frac{c_1 - \gamma_0}{2\xi_*^2}, \xi_* > 0 \quad (1.46)$$

değerlendirmesini elde ederiz.

Bu da bize $\{g'(\xi^2)\}$ kümesinin düzgün sınırlılığını ifade eder. Ek koşul olarak, $g'(\xi^2)$ fonksiyonunun monoton azalan olduğunu kabul edelim. Bu ek koşulla beraber $\{g'(\xi^2)\}$ kümesini \mathcal{G}_1 ile gösterelim. $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, \mathcal{G}_1 kümesinin $H^1[\xi_*, \xi^*]$ ' de kompaktlığı, $J(g)$ fonksiyonelinin sürekliliği, böylece de quazi çözümün varlığı Hasanov (1995) ve Hasanov (1997)' de gösterilmiştir.

Bundan farklı olarak, ek koşulu kullanmadan (1.46) değerlendirmesinden yola çıkarak quazi çözümün varlığını kanıtlayalım.

Lemma1.2. Hasanov ve Erdem (2007) (2)-(3) koşulları sağlandığında $g(\xi^2)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$[g(\xi^2)\xi - g(\tilde{\xi}^2)\tilde{\xi}](\xi - \tilde{\xi}) \geq \gamma_0 |\xi - \tilde{\xi}|^2, \forall \xi, \tilde{\xi} \in [\xi_*, \xi^*]$$

Lemma1.3. Hasanov ve Erdem (2007) $\{g_n(\xi^2)\} \in \mathcal{G}$ olsun. Bu takdirde $\exists \{g_m(\xi^2)\} \subset (g_n(\xi^2))$ vardır ki $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(\xi^2) = g(\xi^2), \forall \xi \in [\xi_*, \xi^*]$

sağlanır. Ayrıca $g \in \mathcal{G}$ 'dir.

Teorem1.2. \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar sınıfı ve $(g_m(\xi^2)) \subset \mathcal{G}$ kabul edilebilir katsayılar dizisi olsun. Düz problemin verilen kabul edilebilir katsayılar dizisine karşılık gelen çözümlerini ise $u_m := u(x; g_m) \in H_0^1(\Omega), m = 1, 2, 3, \dots$ olarak gösterelim. Eğer $g_m(\xi^2) \rightarrow g(\xi^2), m \rightarrow \infty$ ise $\|\nabla(u - u_m)\|_0 \rightarrow 0$. Burada, $u(x; g) \in H_0^1(\Omega)$ düz problemin $g(\xi^2)$ limit fonksiyonuna karşılık gelen çözümdür.

İspat. Zayıf çözüm kavramından bilindiği gibi $u(x; g), u(x; g_m)$ zayıf çözümleri sırası ile aşağıdaki integral özdeşlikleri sağlar:

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v dx_1 dx_2,$$

$$\iint_{\Omega} g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m \nabla v dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v dx_1 dx_2, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

İlk integral özdeşlikte $v = u_m - u$, ikinci integral özdeşlikte ise $v = u - u_m$ yazıp bu iki integral özdeşliği taraf tarafa toplarsak

$$\iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m - g(|\nabla u|^2) \nabla u] \nabla(u_m - u) dx_1 dx_2 = 0$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Bu integral özdeşliğe

$$\iint_{\Omega} g_m(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla(u_m - u) dx_1 dx_2$$

terimini ekleyip çıkarırsak aşağıdaki integral özdeşliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m - g_m(|\nabla u|^2) \nabla u] \nabla(u_m - u) dx_1 dx_2 = \\ & = \iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)] \nabla u \nabla(u - u_m) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Bu integral özdeşliğin sol tarafında Lemma 1.2' yi dikkate alırsak ve sağ tarafına Cauchy eşitsizliğini uygularsak

$$\gamma_0 \|\nabla(u - u_m)\|_0 \leq \left(\iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)] |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.47)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte integral içindeki ifadede (1) koşulunu dikkate alırsak, bu integral içindeki ifade için

$$[g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)] |\nabla u|^2 \leq (c_1 - c_0)^2 |\nabla u|^2$$

değerlendirmesi elde edilir. Lebesgue yakınsaklık teoremine göre (1.47) eşitsizliğinin sağ tarafı 0' a gider. Böylece ispat tamamlanır.

\mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar kümesi C -normunda kompakt olduğundan dolayı, ters katsayı problemine quazi çözüm yaklaşımını uygulayabiliriz.

Teorem 1.3. Ters katsayı probleminin \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar kümesine en az bir quazi çözümü vardır.

İspat. (1) ile tanımlı $J(g)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. $\{g_m(\xi^2)\} \subset \mathcal{G}$ kabul edilebilir katsayılar dizisi olsun. Bu takdirde $\exists \{g_n\} \subset \{g_m\}$ dizisi bulunabilir ki $\|g_n - g\|_C \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olur. Teorem 1.2' den ve Poincare eşitsizliğinden dolayı H^1 normunda $u(x; g_n) \rightarrow u(x; g)$ sağlanır.

$$\begin{aligned} |J(g_n) - J(g)| &= \left| \left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \mathcal{M} \right| - \left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 - \mathcal{M} \right| \right| \\ &\leq 2 \left| \iint_{\Omega} [u(x; g_n) - u(x; g)] dx_1 dx_2 \right|. \end{aligned}$$

Elde edilen eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $J(g_n) \rightarrow J(g)$ sağlanır. \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar kümesi C -normunda kompakt olduğundan ve $J(g)$ fonksiyoneli sürekli olduğundan Weierstrass teoremine göre (1.45) minimum probleminin çözümü vardır. Böylece ters problemin yaklaşık (quazi) çözümünün varlığı ispatlandı.

1.6. Kare Bölgede Esnek Çubuğun Bükülmesi Problemi

$$\begin{cases} -u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} = 2, & (x_1, x_2) \in \Omega = (0, a) \times (0, a) \\ u(x_1, x_2) = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.48)$$

problemini ele alalım.

Bu problem (1.25)-(1.26) lineer olmayan probleminin $g(T^2) \equiv 1, \theta = 1$ özel durumuna karşılık gelir. (1.27) ile verilen bükülmeyi,

$$M := 2 \int_0^a \int_0^a u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.49)$$

olarak hesaplamak için, (1.48) problemine değişkenlere ayırma yöntemini uygulayalım. (1.48) probleminde

$$v(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + x_1^2 \quad (1.50)$$

dönüşümünü yapıp bu problemi $v(x_1, x_2)$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} = 0, & (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, a), \\ v(x_1, 0) = x_1^2, & x_1 \in (0, a), \\ v(x_1, a) = x_1^2, & x_1 \in (0, a), \\ v(0, x_2) = 0, & x_2 \in (0, a), \\ v(a, x_2) = a^2, & x_2 \in (0, a), \end{cases} \quad (1.51)$$

olarak elde ederiz.

(1.51) probleminin çözümü Değişkenlere Ayırma yöntemi ile şöyle tanımlanır.

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi(a-x_1)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-x_2)}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Burada, $\lambda_n = a \sinh(n\pi)$ ve $v(x_1, 0) = f_1(x_1)$, $v(x_1, a) = f_2(x_1)$, $v(0, x_2) = f_3(x_2)$,

$v(a, x_2) = f_4(x_2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^a f_1(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \\ B_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^a f_2(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \\ C_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^a f_3(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \\ D_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^a f_4(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi \end{aligned} \quad (1.53)$$

olarak tanımlanır. Bu katsayılar aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
A_n &= 0, \\
B_n &= \left(-\frac{2a^2}{n\pi \sinh(n\pi)} \right) [(-1)^n - 1], \\
C_n = D_n &= \left(-\frac{2a^2}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) [n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2].
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Bulduğumuz bu katsayıları (1.52) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
v(x_1, x_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2a^2}{n\pi \sinh(n\pi)} \right) [(-1)^n - 1] \sinh\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-x_2)}{a}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

çözümünü elde ederiz.

(1.55) çözümünün (1.51) problemindeki sınır koşullarını sağladığı gösterilebilir.

Örneğin (1.55)' te $x_2 = 0$ yazılırsa elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3} \right) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right)$$

serisi x_1^2 fonksiyonunun $(0, a)$ aralığında Fourier serisidir.

(1.49)' da (1.50)' yi göz önüne alalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
M &= 2 \int_0^a \int_0^a u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 2 \int_0^a \int_0^a (v(x_1, x_2) - x_1^2) dx_1 dx_2 \\
&= 2 \int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{2}{3} a^4.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2a^2}{n\pi \sinh(n\pi)} \right) [(-1)^n - 1] \\
&\times \int_0^a \sinh\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) dx_1 \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) dx_2 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) \\
&\times \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) dx_1 \int_0^a \sinh\left(\frac{n\pi(a-x_2)}{a}\right) dx_2 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) dx_1 \int_0^a \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) dx_2
\end{aligned} \tag{1.57}$$

olur. Burada gerekli integraller hesaplanıp yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2a^2}{n\pi \sinh(n\pi)} \right) [(-1)^n - 1] \left(\frac{a}{n\pi} [\cosh(n\pi) - 1] \right) \\
&\times \left(-\frac{a}{n\pi} [(-1)^n - 1] \right) \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \frac{a^2 (n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \right) \left(-\frac{a}{n\pi} [(-1)^n - 1] \right) \left(\frac{a}{n\pi} [\cosh(n\pi) - 1] \right)
\end{aligned} \tag{1.58}$$

elde edilir. (1.58) ifadesini yeniden düzenleyerek şöyle yazalım:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{2a^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\cosh(n\pi) - 1] [(-1)^n - 1]^2}{n^3 \sinh(n\pi)} \\
&+ \frac{4a^4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 \pi^2 (-1)^n - 2(-1)^n + 2) [(-1)^n - 1] (\cosh(n\pi) - 1)}{n^5 \sinh(n\pi)}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Sağ taraftaki birinci serinin toplamını 3.8758, ikinci serinin toplamını ise 11.753 olarak MATLAB yardımı ile yaklaşık olarak buluruz. O halde (1.59) integrali

$$\int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \frac{2a^4}{\pi^3} 3.8758 + \frac{4a^4}{\pi^5} 11.753 = 0.4036a^4$$

olarak ve bükülme ise

$$M = 2 \int_0^a \int_0^a v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{2}{3} a^4 \cong 0.1406a^4 \quad (1.60)$$

olarak hesaplanır. Bükülmenin esnek malzemeler için elde edilen (1.60) formülü, Literatürde verilen Bertola ve Cafaro (2003) formülün aynısıdır. Fakat burada daha basit bir yöntemle elde edilmiştir.

Sonuç olarak kare bölgede tanımlanmış (1.48) problemi için bükülmeyi analitik olarak elde ettik. Bu bükülmeyi şimdi sayısal olarak hesaplayalım ve bağıl hatayı değerlendirelim. Bunun için önce iki katlı integral için yamuk formülünü yazalım:

$$\int_0^a \int_0^a u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \frac{h_{x_1} h_{x_2}}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i+1,j+1})$$

(1.48) problemini sonlu farklar ile çözerek, $\tilde{u}_{i,j} = u_h(x(i), y(j))$ yaklaşık çözümünü bulunabilir. Burada n ve m sırası ile x_1 ve x_2 yönündeki nokta sayıları h_{x_1} ve h_{x_2} sırasıyla $h_{x_1} = 1/n$, $h_{x_2} = 1/m$ olarak tanımlanan x_1 ve x_2 yönündeki adımlardır. Burada $n = m = 30$ olarak alınmıştır, yani problem düzgün şebekede çözülmüştür.

Birim karede bükülme sayısal olarak hesaplandığında $M_h = 0.1403$ bulunur. (1.60)' da $a = 1$ yazarak $M = 0.1406$ olarak bulunur. Bağıl hata ise,

$$\xi_M = \frac{|M - M_h|}{M} \times 100\% = 0.21\%$$

olarak hesaplanır. Bağıl hatanın çok düşük olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi ise genel durumu ele alalım. Bunun için (1.48) denkleminde sağ tarafı $\theta > 0$ bükülme açısını da dikkate alarak 2θ alalım ve bu durum için bükülmeyi analitik olarak bu açı cinsinden elde edelim.

$$\begin{cases} -u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 2\theta, & (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, a), \alpha \in \mathbb{R} \\ u(x_1, x_2) = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.61)$$

Burada,

$$v(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + \theta x_1^2 \quad (1.62)$$

dönüşümünü yapalım ve (1.61) problemini $v(x_1, x_2)$ fonksiyonu için yazalım:

$$\begin{cases} v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} = 0, & (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, a), \\ v(x_1, 0) = \theta x_1^2, & x_1 \in (0, a), \\ v(x_1, a) = \theta x_1^2, & x_1 \in (0, a), \\ v(0, x_2) = 0, & x_2 \in (0, a), \\ v(a, x_2) = \theta a^2, & x_2 \in (0, a). \end{cases} \quad (1.63)$$

Yukarıdaki (1.51) probleminin çözümü için yaptığımız işlemleri (1.59) problemi için de tekrarlayıp (1.49)' da (1.62) dönüşümünü göz önüne alırsak, bükülme

$$M = 0.1406 \theta a^4 \quad (1.64)$$

olarak elde edilir.

Böylece, esnek malzemeler için bükülme ile bükülme açısı ve bükülen çubuğun kesitinin geometrisi arasında aşkar formül elde edildi. Bu formülün, klasik bir problemin Timoshenko ve Goodier (1970) çözümü olmanın dışında, ters problemlerin sayısal çözümünde bir test olarak yararlı olduğunu ileride göreceğiz.

BÖLÜM 2. LİNEER OLMAYAN DÜZ PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ

2.1. Yaklaşık Çözümün Tanımlanması ve Potansiyeller Dizisi

Öncelikle monoton operatörler ile ilgili bazı tanımları verelim.

Tanım 2.1. Zeidler (1990) U gerçel sayılar üzerinde tanımlanmış Banach uzayı, U^* 'da onun eşlenik uzayı olmak üzere

(i) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in U$ ise $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne monoton operatör denir;

(ii) $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \forall u, v \in U, u \neq v$ ise $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne kesin monoton operatör denir;

(iii) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2, \forall u, v \in U, u \neq v$ olacak şekilde $\exists c > 0$ sayısı var ise $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne güçlü monoton operatör denir;

(iv) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq g(\|u - v\|)\|u - v\|, \forall u, v \in U$ olacak şekilde monoton artan ve $g(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$ koşullarını sağlayan $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa, $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne düzgün monoton operatör denir;

(v) $\|u\| \rightarrow \infty$ olduğunda $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty$ oluyorsa $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne koersiv operatör denir;

(vi) $\forall u \in U$ için $\langle Au, u \rangle \geq 0$ koşulu sağlanıyorsa $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne pozitif operatör denir;

(vii) $\forall u \in U, u \neq 0$ için $\langle Au, u \rangle > 0$ koşulu sağlanıyorsa, $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne kesin pozitif operatör denir;

(viii) $\forall u \in U$ için $\langle Au, u \rangle > c\|u\|^2$ olacak şekilde $\exists c > 0$ sayısı var ise $A : U \rightarrow U^*$ operatörüne güçlü pozitif operatör denir.

Monoton operatörün (i) ile verilen tanımı, aslında fonksiyonların monotonluk tanımının bir genelleşmesidir. Gerçekten de, $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, monoton artan (azalan) ise,

$$x_1 < x_2 \text{ ise } f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)), \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

koşulları sağlanır. Bu tanım,

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece bu son yazılan eşitsizlik, monoton operatörün tanımında verilen eşitsizliğe benzer.

Önerme 2.1. Zeidler (1990)

(i) A operatörü güçlü monoton \Rightarrow A operatörü düzgün monoton \Rightarrow A operatörü kesin monoton \Rightarrow A operatörü monoton.

(ii) A operatörü düzgün monoton ise koersivdir.

(iii) A operatörü monotondur \Leftrightarrow A operatörü pozitifdir.

(iv) A operatörü kesin monotondur $\Leftrightarrow A$ operatörü kesin pozitifdir.

(v) A operatörü güçlü monotondur $\Leftrightarrow A$ operatörü güçlü pozitifdir.

Monoton operatörle monoton fonksiyon arasındaki ilişkiyi incelemek için $u, v \in U$ olmak üzere,

$$\varphi_{u,v}(t) = \langle A(u + tv), v \rangle, t \in [a, b]$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Lemma 2.1. $A : U \rightarrow U^*$ operatörünün monoton olması için gerek ve yeter koşul, $\varphi_{u,v}(t)$ reel değerli fonksiyonunun, $[0,1]$ aralığında monoton artan olmasıdır.

İspat. A operatörü monoton olsun. O halde, $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $t_2 > t_1$ için,

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v}(t_2) - \varphi_{u,v}(t_1) &= \langle A(u + t_2 v), v \rangle - \langle A(u + t_1 v), v \rangle \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \langle A(u + t_2 v) - A(u + t_1 v), u + t_2 v - (u + t_1 v) \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall t_2 > t_1$ için $\varphi_{u,v}(t_2) \geq \varphi_{u,v}(t_1)$ olur.

Şimdi, $\varphi_{u,v}(t)$ fonksiyonu monoton artan olsun. Buna göre $\varphi(1) - \varphi(0) \geq 0$ sağlanır.

$\varphi_{u,v}(t)$ fonksiyonunun tanımından yararlanılarak

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \langle A(u + tv), v \rangle - \langle Au, v \rangle = \langle Av, v \rangle \geq 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, $v = w - u$, $w \in U$ alınırsa,

$$\langle Aw - Au, w - u \rangle \geq 0$$

olur. $w \in U$ elemanı keyfi olduğundan, A operatörü monotondur.

Monoton operatörlü diferansiyel problemlerin çözümünde, bu operatörlerin kendilerinin oluşturduğu $\langle Au, v \rangle = a(u; u, v)$ lineer olmayan fonksiyoneli ve A operatörünün $J(u)$ potansiyeli arasındaki ilişkiden oluşan eşitsizlik önemli rol oynar.

Tanım 2.2. Hasanov (2000)

$$0.5a(u; v, v) - 0.5a(u; u, u) - J(v) + J(u) \geq 0, u, v \in U \quad (2.1)$$

ise, A operatörü için 'dışbükeylik prensibi' sağlanır denir.

Tanım 2.3. Hasanov (2000)

$$\Pi(u) = J(u) - I(u), u \in U \quad (2.2)$$

fonksiyoneline, (1.30)-(1.31) lineer olmayan probleminin potansiyeli denir.

(1.30)-(1.31) lineer olmayan probleminin zayıf çözümü (1.37) problemi olarak yukarıda tanımlandı. Bu problemin yaklaşık çözümünü,

$$a(u_{n-1}; u_n, v) = I(v), u, v \in H_0^1(\Omega), n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

olarak tanımlayalım. Burada $a(u_{n-1}; u_n, v) = \iint_{\Omega} g(|\nabla u_{(n-1)}|^2) \nabla u_{(n)} \nabla v dx_1 dx_2$

fonksiyoneli $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ üzerinde tanımlanmış simetrik bilineer fonksiyoneldir ve $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ başlangıç iterasyonudur.

(2.3) iterasyon şeması (1.30) lineer olmayan diferansiyel denklemi için bir lineerleştirme olarak tanımlanır. (2.3) lineerleştirilmiş problemin potansiyeli

$$\Pi(u_n) = 0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n), n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2. Hasanov (2000) A monoton potansiyel operatörü için dışbükeylik prensibi sağlansın ve $\{u_n\}$ yaklaşık çözümler dizisi olsun. O halde, (2.4) ile tanımlanan $\{\Pi(u_n)\}$ sayısal dizisi monoton azalandır.

İspat. (2.1) eşitsizliğinde u yerine u_{n-1} , v yerine de u_n yazılırsa

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - 0.5a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - J(u_n) + J(u_{n-1}) \geq 0 \quad (2.5)$$

elde edilir.

$u_{n-1} \in U$ verilen bir fonksiyon $a(u_{n-1}; \dots)$ ise simetrik ve bilineer form olduğu için, (2.3) lineerleştirilmiş probleminin çözümü aynı zamanda

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n) = \inf \{0.5a(u_{n-1}; v, v) - l(v)\}, v \in U \quad (2.6)$$

en küçük değer probleminin çözümüdür. Burada $v \in U$ keyfi olduğundan $v = u_{n-1} \in U$ alınırsa

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_{n-1}) - [0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n)] \geq 0 \quad (2.7)$$

olur. (2.5) ve (2.7) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$J(u_{n-1}) - l(u_{n-1}) - [J(u_n) - l(u_n)] \geq 0 \quad (2.8)$$

elde edilir. Buradan,

$$\Pi(u_{n-1}) \geq \Pi(u_n), n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

sonucuna varılır. Bu da $\{\Pi(u_n)\}$ dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir. Ayrıca, $g(\xi)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu durumda (1.30)-(1.31) ile tanımlanmış lineer olmayan probleminin $\Pi(u)$ potansiyelinin alttan sınırlı olduğunu kanıtlayalım.

Lemma 2.3. Eğer $c_1 \geq g(\xi) \geq c_0 > 0$ ise o halde (1.30) ile tanımlanmış lineer olmayan problemin

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} F u dx_1 dx_2$$

potansiyeli alttan sınırlıdır.

İspat. Gerçekten

$$\Pi(u) \geq \frac{1}{2} c_0 \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} F u dx_1 dx_2.$$

Sağ tarafa Cauchy eşitsizliğini uygularsak

$$\Pi(u) \geq \frac{1}{2} c_0 \|\nabla u\|_0^2 - \|F\|_0 \|u\|_0, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

değerlendirmesi elde edilir. $F \in L_2(\Omega)$ olduğundan dolayı (bükülme probleminde $F = 2\theta$) bu eşitsizliğin sağ tarafı sonludur. Bu ise $\Pi(u)$ fonksiyonelinin alttan sınırlı olması anlamına gelir.

Lemma 2.2 ve Lemma 2.3' ü birlikte (1.30)-(1.31) problemine uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 2.4. Bükülme problemi için, (2.4) olarak tanımlanmış $\{\Pi(u_n)\}$ sayısal dizisi yakınsak dizidir.

2.2. Yakınsama Teoremi

Potansiyeller dizisinin yakınsamasından yararlanarak $u_n \in H_0^1(\Omega)$ yaklaşık çözümler dizisinin H^1 -normunda kesin çözüme yakınsadığını kanıtlayalım.

Lemma 2.5. Hasanov (2000) Eğer A güçlü monoton potansiyel operatörü için dışbükeylik prensibi sağlanırsa

$$\|u_n - u_{n-1}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

koşulu sağlanır.

İspat. $a(u_{n-1}; u, u)$ bilineer formunun pozitif tanımlılığını kullanırsak ve u yerine $u_n - u_{n-1}$ yazarsak

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|u_n - u_{n-1}\|^2 &\leq a(u_{n-1}; u_n - u_{n-1}, u_n - u_{n-1}) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_n) + l(u_n - u_{n-1}), \alpha_0 > 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için simetriklik koşulu ve (2.3) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_n) &= a(u_{n-1}; u_n, u_{n-1} - u_n) + a(u_{n-1}; u_n, u_n) \\ &= l(u_{n-1} - u_n) + a(u_{n-1}; u_n, u_n) \end{aligned} \quad (2.12)$$

olur. Elde edilen eşitlik (2.11)' de yazılırsa ve (2.5) eşitsizliği dikkate alınır

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|u_n - u_{n-1}\|^2 &\leq a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - a(u_{n-1}; u_n, u_n) - 2l(u_{n-1}) + 2l(u_n) \\ &\leq 2[\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. Buradan,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}} [\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)]^{1/2}, \alpha_0 > 0 \quad (2.14)$$

eşitsizliği bulunur. Lemma 2.2 dikkate alınır,

$$\|u_n - u_{n-1}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

olduğu sonucuna varılarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.1. Hasanov (2000) A güçlü monoton operatör ise (2.3) soyut iterasyon şeması ile tanımlı $\{u_n\}$ yaklaşık çözümler dizisi (1.37) lineer olmayan probleminin $u \in H$ çözümüne H^1 normunda yakınsar.

İspat. A güçlü monoton operatör olsun. u yerine u_{n-1} , v yerine u alınır

$$\langle Au_{n-1} - Au, u_{n-1} - u \rangle \geq \gamma_0 \|u_{n-1} - u\|^2, \gamma_0 > 0 \quad (2.16)$$

olur.

Ayrıca (1.37) ve (2.3) problemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \langle Au_{n-1} - Au, u_{n-1} - u \rangle &= a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1} - u) - a(u; u, u_{n-1} - u) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) - l(u_{n-1} - u) + l(u_{n-1} - u) \\ &= a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (2.16)' da dikkate alınır

$$\gamma_0 \|u_{n-1} - u\|^2 \leq a(u_{n-1}; u_{n-1} - u_n, u_{n-1} - u) \leq \alpha_1 \|u_{n-1} - u_n\| \|u_{n-1} - u\|, \alpha_1 > 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\|u_{n-1} - u\| \leq \frac{\alpha_1}{\gamma_0} \|u_{n-1} - u_n\| \quad (2.18)$$

eşitsizliği bulunur. Lemma 2.5 dikkate alınarak ispat tamamlanır. Ayrıca, (2.18) eşitsizliğinde (2.14)' ü dikkate alırsak,

$$\|u_{n-1} - u\| \leq \frac{\alpha_1}{\gamma_0} \frac{\sqrt{2}}{\alpha_0} [\Pi(u_{n-1}) - \Pi(u_n)]^{1/2} \quad (2.19)$$

değerlendirmesini elde ederiz.

Burada, (2.3) lineerleştirilmiş probleminin (2.4) ile tanımlı $\Pi(u_n)$ potansiyeli ile M bükülmesi arasındaki ilişkiyi inceleyelim. (2.3) yaklaşık çözümünü bükülme problemi için şöyle yazabiliriz:

$$a(u_{n-1}; u_n, v) = \theta M(v).$$

Bu ifadeyi (2.4)'te göz önüne alırsak, bükülme probleminin potansiyelinin yaklaşık çözüm üzerindeki değerini

$$\Pi(u_n) = -0.5\theta M(u_n) \quad (2.20)$$

olarak elde ederiz. Burada $M(u_n) = 2 \iint_{\Omega} u_n(x) dx_1 dx_2$, bükülmenin $u_n(x)$ yaklaşık çözümüne karşılık gelen değeridir.

Şimdi de $Au = F, u \in U, F \in U^*$ operatör denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim.

Tanım 2.4. (Zeidler 1990) U Banach uzayı ve $A : U \rightarrow U^*$ operatör olsun.

$$t \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle, t \in [0,1]$$

dönüşümü $\forall u, v, w \in U$ için sürekli ise A operatörüne h -sürekli denir.

Teorem 2.2. (Browder-Minty teoremi) Zeidler (1990)

$A : U \rightarrow U^*$ operatörü monoton, koersiv ve h -sürekli operatör ise, $\forall F \in U^*$ için $Au = F, u \in U, F \in U^*$ operatör denkleminin çözümü vardır, eğer A operatörü kesin monoton ise bu çözüm tektir.

(1.30) ile tanımlı A operatörünün, (1.43) ile tanımlanmış $J(u)$ potansiyelinin ikinci mertebeden Gateaux türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} J''(u;v,h) &= \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} [g(|\nabla u + t\nabla h|^2) |\nabla u + t\nabla h| \nabla v] dx_1 dx_2 \Big|_{t=0} \\ &= \iint_{\Omega} [2g'(|\nabla u + t\nabla h|^2) |\nabla u + t\nabla h| \nabla h |\nabla u + t\nabla h| \nabla v + g(|\nabla u + t\nabla h|^2) \nabla h \nabla v] dx_1 dx_2 \Big|_{t=0} \\ &= \iint_{\Omega} [g'(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla h + 2g''(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla h \nabla u \nabla v] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. (2.21)' de $h = v$ alırsak,

$$J''(u;v,v) = \iint_{\Omega} [g'(|\nabla u|^2) |\nabla v|^2 + 2g''(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v]^2 dx_1 dx_2 \quad (2.22)$$

elde edilir. Ayrıca $g = g(\xi^2)$ fonksiyonu

$$g(\xi^2) + 2g'(\xi^2) \xi^2 \geq \gamma_0 > 0, \xi \in (0, \xi^*) \quad (2.23)$$

koşulunu sağladığı için

$$J''(u;v,v) \geq \gamma_0 \|\nabla v\|_0^2, \gamma_0 > 0 \quad (2.24)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\|v\|_0^2 \leq c_\Omega^2 \|\nabla v\|_0^2, c_\Omega > 0, v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.25)$$

Poincare eşitsizliğini kullanarak

$$\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1 - \sigma) \|\nabla v\|_0^2 \geq \sigma \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1 - \sigma}{c_\Omega^2} \|v\|_0^2 = \frac{1}{1 + c_\Omega^2} \|v\|_1^2, \sigma \in [0,1]$$

yazılabilir. Burada $\|v\|_1^2$ normunu elde etmek için, $\|\nabla v\|_0^2$ ve $\|v\|_0^2$ normlarının katsayılarını eşitlememiz gerekir.

$$\sigma = \frac{1 - \sigma}{c_\Omega^2}$$

denklemden $\sigma = \frac{1}{1 + c_\Omega^2}$ elde edilir. σ son yazılan eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1 - \sigma) \|\nabla v\|_0^2 \geq \sigma \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1 - \sigma}{c_\Omega^2} \|v\|_0^2 = \frac{1}{1 + c_\Omega^2} \|v\|_1^2, \sigma \in [0,1] \quad (2.26)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan,

$$J''(u; v, v) \geq \frac{\gamma_0}{1 + c_\Omega^2} \|v\|_1^2, \frac{\gamma_0}{1 + c_\Omega^2} > 0 \quad (2.27)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $J(u)$ fonksiyonelinin güçlü dışbükeyliği anlamına gelir, çünkü bir A potansiyel operatörünün güçlü monoton olması için gerek ve yeter koşul, onun potansiyelini ifade eden J fonksiyonelinin güçlü dışbükey olmasıdır. (Vainberg 1972) Bu nedenle (1.30) ile tanımlı A operatörü güçlü monotondur, dolayısı ile koersivdir. (Bkz. Önerme 2.1) Buradan

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \frac{\gamma_0}{1 + c_\Omega} \|u - v\|_1^2, \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \quad \gamma_0, c_\Omega > 0 \quad (2.28)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

A operatörünün h-sürekli olduğunu göstermek için $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ alalım ve $t_n \rightarrow t, n \rightarrow \infty$ olsun. Basitlik için $z_n = u + t_n v, z = u + tv$ diyelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \langle Az_n, w \rangle &= \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha_n|^2) \nabla \alpha_n \nabla w dx_1 dx_2 = \underbrace{\iint_{\Omega} g(|\nabla z|^2) \nabla z \nabla w dx_1 dx_2}_{\langle Az, w \rangle} \\ &\quad + \iint_{\Omega} g(|\nabla z_n|^2) \nabla z_n \nabla w dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} g(|\nabla z|^2) \nabla z \nabla w dx_1 dx_2 \\ &\quad + \iint_{\Omega} g(|\nabla z_n|^2) \nabla z \nabla w dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} g(|\nabla z_n|^2) \nabla z_n \nabla w dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$\begin{aligned} \langle Az_n, w \rangle &= \langle Az, w \rangle + \iint_{\Omega} g(|\nabla z_n|^2) (\nabla z_n - \nabla z) \nabla w dx_1 dx_2 \\ &\quad + \iint_{\Omega} (g(|\nabla z_n|^2) - g(|\nabla z|^2)) \nabla z \nabla w dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse ve g fonksiyonunun sürekliliği dikkate alınırsa $\langle A(u + t_n v), w \rangle \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle$ elde edilir, böylece A operatörünün h-sürekli olduğu ispatlandı.

$g = g(\xi)$ fonksiyonu,

$$c_1 \geq g(\xi) \geq c_0 > 0 \quad (2.29)$$

koşulunu sağladığından ve yukarıdaki ifadeler göz önünde bulundurularak, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3. Hasanov (2000) $g = g(\xi)$ katsayısı (2.23) ve (2.29) eşitsizliklerini sağlasın. Aynı zamanda $F \in L_2(\Omega)$ olsun. O halde, (1.37) lineer olmayan problemi $H^1(\Omega)$ da tek çözüme sahiptir.

Teorem 2.4. Hasanov (2000) Eğer, $g = g(\xi)$, $\xi \in (0, \xi^*)$ katsayısı

$$g'(\xi) \leq 0 \quad (2.30)$$

koşulunu sağlarsa (1.30) ile tanımlı A lineer olmayan operatörü için, (2.1) dışbükeylik prensibi sağlanır.

İspat.

$$\phi(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi \quad (2.31)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\phi''(t) = g'(\xi)$ olduğundan (2.30) koşulu kullanılarak, $\phi''(t) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Yani $\phi(t)$ fonksiyonu dışbükey fonksiyondur. Dışbükey ve monoton azalan fonksiyon için bilinen

$$\phi'(t_1)(t_2 - t_1) - \phi(t_2) + \phi(t_1) \geq 0, t_2 > t_1 > 0 \quad (2.32)$$

eşitsizliğinde t_1 yerine $|\nabla u|^2$, t_2 yerine $|\nabla v|^2$ yazılarak

$$g(|\nabla u|^2)(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) + \int_{|\nabla v|^2}^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \geq 0 \quad (2.33)$$

elde edilir. Diğer bir ifade ile (1.38) ve (1.43) eşitlikleri ile (2.1) eşitsizliğinin sol tarafını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
& 0.5a(u; v, v) - 0.5a(u; u, u) - J(v) + J(u) \\
&= 0.5 \iint_{\Omega} \left\{ g(|\nabla u|^2) (|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) + \int_{|\nabla v|^2}^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.34}$$

bulunur. (2.33) göz önüne alınarak dışbükeylik prensibinin sağlandığı görülür.

(2.3) soyut iterasyon şemasını kullanarak, (1.37) lineer olmayan probleminin $u_n \in H_0^1(\Omega)$ yaklaşık çözümünü tanımlayalım. Teorem 2.1 ve Teorem 2.3' ü kullanarak, (1.30)-(1.31) karışık sınır değer problemi için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.5. Hasanov (2000) $g = g(\xi)$ katsayısı (2.23), (2.29), (2.30) koşullarını sağlasın ve $F \in L_2(\Omega)$ olsun. Buna göre (1.36) lineer olmayan probleminin (2.3) iterasyon şeması ile tanımlı $u_n \in H_0^1(\Omega)$ yaklaşık çözümü, $n \rightarrow \infty$ olması durumunda H^1 normunda (1.36) probleminin $u \in H_0^1(\Omega)$ tek çözümüne yakınsar.

Ayrıca, yakınsaklık hatası için

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{\sqrt{2}c_1}{\sqrt{c_0}\gamma_0} (1 + c_{\Omega}^2)^{3/2} [\Pi(u_n) - \Pi(u_{n+1})]^{1/2} \tag{2.35}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat. Teoremin yakınsama ile ilgili olan kısmı, Teorem (2.1)-(2.4)' ten yararlanılarak ispatlanabilir. Yakınsaklık hatasını değerlendirmek için, (2.14) ve (2.16) eşitsizliklerini kullanalım. (2.29) koşulundan

$$|a(u; v, h)| \leq c_1 \|v\|_1 \|h\|_1 \tag{2.36}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca Poincare eşitsizliğini kullanarak

$$a(u; v, v) \geq \frac{c_0}{1 + c_{\Omega}^2} \|v\|_1^2 \tag{2.37}$$

elde edilir. (2.28) ve (2.36)' dan

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_0}{1+c_\Omega^2} \|u_n - u\|^2 &\leq \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \\
&= a(u_n; u_{n+1} - u_n, u_n - u) \\
&\leq c_1 \|u_{n+1} - u_n\|_1 \|u_n - u\|_1
\end{aligned} \tag{2.38}$$

yazılır. Buradan,

$$\|u_n - u\|_1 \leq \frac{c_1(1+c_\Omega^2)}{\gamma_0} \|u_{n+1} - u_n\|_1 \tag{2.39}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan (2.37) eşitsizliğinde $u = u_n, v = u_{n+1} - u_n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{c_0}{1+c_\Omega^2} \|u_n - u_{n+1}\|^2 &\leq a(u_n; u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - u_n) = a(u_n; u_{n+1}, u_{n+1} - u_n) - a(u_n; u_{n+1}, u_n) \\
&\quad + a(u_n; u_n, u_n)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında $a(u_{n+1}; u_n, v) = l(v)$ olmasından yararlanılırsa ve $a(u_n; u_{n+1}, u_{n+1})$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\frac{c_0}{1+c_\Omega^2} \|u_n - u_{n+1}\|^2 \leq l(u_{n+1} - u_n) - a(u_n; u_{n+1}, u_n - u_{n+1}) - a(u_n; u_{n+1}, u_{n+1}) + a(u_n; u_n, u_n)$$

elde edilir. Burada l ' nin lineerliğinden ve (2.4)' ten yararlanılarak

$$\|u_{n+1} - u_n\|_1 \leq \sqrt{\frac{2(1+c_\Omega^2)}{c_0}} [\Pi(u_n - \Pi(u_{n+1}))]^{1/2} \tag{2.40}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.40) eşitsizliğini (2.39)' da dikkate alırsak, (2.35) elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 2.5'te elde edilen sonucu bükülme problemine uygulayalım. Bunun için, (2.20) uyarınca $\Pi(u_n) = -0.5\theta M(u_n)$ olduğunu dikkate alalım. O halde, (2.35) değerlendirmesini bükülme problemi için

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{c_1 \sqrt{\theta}}{\sqrt{c_0} \gamma_0} (1 + c_{\Omega}^2)^{3/2} [M(u_{n+1}) - M(u_n)]^{1/2} \quad (2.41)$$

olarak elde ederiz. Bu değerlendirme, (1.34) ile verilmiş bükülme problemine uygulanan lineerleşme sonucu elde edilen u_n yaklaşık çözümü için temel hata değerlendirmesidir.

BÖLÜM 3. DÜZ ve TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

3.1. Düz Problemin Sonlu Fark Denkleminin elde edilmesi, Sonlu Fark Çözümü ve Hata Analizi

Öncelikle, (1.30) denkleminin sonlu fark yaklaşımını elde edelim. (Samarskii, 2001)

Bu bölümde x_1 ve x_2 değişkenlerini sırası ile x , y değişkenleri ile göstereyim.

Sonlu fark denklemini elde etmek için, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h_x$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0.5h_x$,

$y_{j-\frac{1}{2}} = y_j - 0.5h_y$, $y_{j+\frac{1}{2}} = y_j + 0.5h_y$ ek noktalarını tanımlayalım. Şimdi, (1.30)

denklemini önce $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ aralığında, daha sonra $\left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right]$ aralığında

integralleyelim.

$$-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \left(|\nabla u|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(g \left(|\nabla u|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F(x, y) dx dy \quad (3.1)$$

Bu ifadede gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_y} \left[-g \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + g \left(\left| \nabla u_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\ & + \frac{1}{h_x} \left[-g \left(\left| \nabla u_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + g \left(\left| \nabla u_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = F_{i,j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2)'de türevlerin bilinen sonlu fark ifadelerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& \frac{h_y \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}}{h_x} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}}{h_x} \right]}{h_x} \\
& + \frac{h_x \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}}{h_y} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j-1}}{h_y} \right]}{h_y} = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

denklemini elde ederiz. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$\begin{aligned}
& -\frac{h_y}{h_x} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}}{h_x} - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}}{h_x} \right] \\
& -\frac{h_x}{h_y} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}}{h_y} - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j-1}}{h_y} \right] = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.

Sonlu fark denkleminin bu şekilde integralleme yöntemiyle elde edilmesi, bir önceki bölümde verdiğimiz zayıf çözüm kavramıyla uyumludur. Benzer sonlu fark denklemi Sonlu Elemanlar Yöntemi ile de elde edilebilir, fakat buradaki temel hedef ters problemin çözümü olduğu için, bu konu ayrıca incelenmeye gerek duyulmamıştır.

Bu lineer olmayan denklemi lineerleştirmek için, aşağıdaki şemayı uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned}
& -\frac{h_y}{h_x} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^n - \mathbf{u}_{i,j}^n}{h_x} - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n-1} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j}^n - \mathbf{u}_{i-1,j}^n}{h_x} \right] \\
& -\frac{h_x}{h_y} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j+1}^n - \mathbf{u}_{i,j}^n}{h_y} - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j}^n - \mathbf{u}_{i,j-1}^n}{h_y} \right] = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Burada, $u_{i,j}^n = u^n(x_i, y_j)$ n. iterasyonda elde edilen yaklaşık çözümün (x_i, y_j) noktasındaki değeridir. Bu sonlu fark şemasının ve lineerleştirme yönteminin kesinlik derecesini görmek için aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek3.1.

(1.30) denkleminde $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, $(\xi = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2)$ alalım ve bu problemi

$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kare bölgesinde sonlu farklar ile çözelim. $g(\xi)$

fonksiyonunun $g'(\xi) \leq 0$ ve sınırlılık koşullarını sağladığı açıktır. Yaklaşık çözüm

$\varepsilon = 0.0001$ ve $N \times M = 30 \times 30$ alınarak $\max |u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}| < \varepsilon$ koşulu ile çözülmüştür.

Her iterasyonda problemin $\{\Pi(U_n)\}$ potansiyeller dizisi hesaplanmıştır ve problem 2

farklı başlangıç iterasyonu ile çözülmüştür. Bu örnekte gerçek çözüm

$u(x, y) = x^2 \times y^2 - 0.5$ olarak alınmıştır ve sağ taraf $F(x)$ buna göre ayarlanmıştır.

Sağ tarafı hesaplamak için öncelikle $\xi = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2$ ifadesini

hesaplayalım, $u_x = 2xy^2$, $u_y = 2yx^2$ olarak hesaplandıktan sonra $\xi = 4x^2y^2(x^2 + y^2)$

olarak bulunur. Bu ifadeyi $g(\xi)$ fonksiyonun da yerine yazıp, (1.30)' da bunu dikkate

alırsak $F(x, y) = 2 \times \frac{8x^4y^4 - x^2 - y^2}{[1 + 4(x^4y^2 + x^2y^4)]^{3/2}}$ olarak bulunur. Bölgenin sınırında ise,

(1.31) koşulu yerine, $u(x, y) = x^2 \times y^2 - 0.5$ fonksiyonunun Ω bölgesinin

sınırlarındaki izdüşümü alınmıştır. Başlangıç iterasyonu sırası ile $u_0(x, y) = x^2 + y^2$

olarak ve $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ olarak alınmış ve Tablo 1.1' den görüldüğü

gibi çözüme 7 iterasyonda yakınsama sağlanmıştır. Tablo 1.2' de ise problemin

$u_0(x, y) = x^2 + y^2$ başlangıç iterasyonu ile iki farklı şebekede çözümü ve mutlak

hatası verilmiştir. Birinci veya ikinci iterasyondan başlayarak $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller

dizisinin monoton azalan sayısal dizi olduğu tablodan görülmektedir. Bu sonuç bir

yandan Lemma 2.2' yi sayısal olarak onaylar, diğer yandan da sonlu fark şemasının

yaklaşımının düzeyini ifade eder.

Tablo 3.1: $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ fonksiyonu için (1.30)-(1.31) probleminin 2 farklı başlangıç

iterasyonu için bulunan $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi

$u(x, y) = x^2 \times y^2 - 0.5$			
$u_0(x, y) = x^2 + y^2$		$u_0(x, y) = \sin(x + y)$	
İterasyon	$\Pi(U_n)$	İterasyon	$\Pi(U_n)$
1	-1.38551	1	-1.25992
2	-1.39523	2	-1.38343
3	-1.39530	3	-1.39335
4	-1.39555	4	-1.39508
5	-1.39564	5	-1.39549
6	-1.39567	6	-1.39561
7	-1.39568	7	-1.39565

Tablo 3.2: Örnek 3.1' deki problemin $N \times M = 20 \times 20$ ve $N \times M = 40 \times 40$ alınarak çözümü sonucu elde edilen mutlak hatalar

$N \times M$	Mutlak hata
20×20	1.1×10^{-4}
40×40	2.3×10^{-5}

Şimdi yaklaşım hatası kavramını tanımlayalım. Problemin $N_1 \times N_1$ ve $N_2 \times N_2$ gibi iki farklı şebekede çözümlerinin mutlak hatasını sırası ile γ_1 ve γ_2 ile gösterelim, problemin yaklaşım hatası da γ olsun. $h_1 = \frac{1}{N_1}$, $h_2 = \frac{1}{N_2}$ olmak üzere mutlak

hatalar için sırası ile $\gamma_1 = h_1^\gamma$, $\gamma_2 = h_2^\gamma$ yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa oranlanıp her iki tarafın logaritması alınırsa yaklaşım hatası için

$$\gamma = \frac{\log(\gamma_1 / \gamma_2)}{\log(N_2 / N_1)} \quad (3.6)$$

formülü elde edilir.

Tablo 1.2.' ye göre $\gamma_1 = 1.1 \times 10^{-4}$, $\gamma_2 = 2.3 \times 10^{-5}$ ' dir. Bu veriler (3.6)' da yazılırsa problemin yaklaşım hatası,

$$\gamma = \frac{\log(1.1 \times 10^{-4} / 2.3 \times 10^{-5})}{\log(40 / 20)} \approx 2.3$$

olarak hesaplanır. Bunun da anlamı $\|u - u_h\| = O(h^n)$ yaklaşım hatasında $n = 2.3$ olmasıdır.

Örnek 3.2.

Bu örnekte $g(\xi)$ fonksiyonunu mühendislik malzemeleri olarak tanımlanan ve malzemelerin elastoplastik özelliklerini ifade eden Hasanov (2005) aşağıdaki fonksiyon gibi alalım:

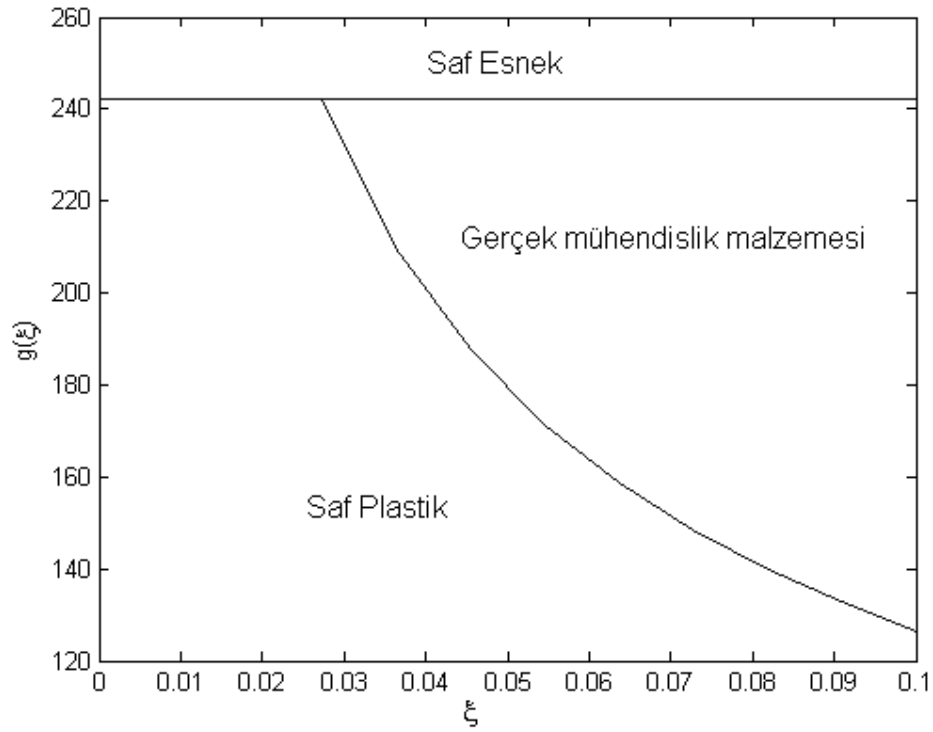
$$g(\xi) = \begin{cases} 3G, & \xi \leq \xi_0 \\ 3G \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{0.5(\kappa-1)}, & \xi > \xi_0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

Burada, G malzemenin sertlik katsayısı, $\xi_0^2 = \max_{\Omega} |\nabla u|^2$ olarak tanımlanan malzemenin esneklik limiti, $\kappa \in [0,1]$ ise sertlik parametresidir. $\kappa = 1$ durumu esnek duruma, $\kappa = 0$ durumu ise plastik duruma karşılık gelir. (Şekil 3.1) E malzemenin plastiklik limiti, ν ise Poisson katsayısı olmak üzere

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.

$g(\xi)$ fonksiyonu (3.7) ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere, $\theta=1$ için $F=2$ sağ taraf fonksiyonu ile (1.25)-(1.26) problemini ele alalım. Bu problemin $u_0(x,y) = e^{x^2} + e^{y^2}$ başlangıç iterasyonu altında problemin $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi Tablo 3.3' de verilmiştir. Burada, plastiklik limiti $E = 210$ GPa, esneklik limiti $\xi_0 = 0.027$ ve $\kappa = 0.5$ alınmıştır. Tablodan görüldüğü $\{\Pi(u_n)\}$ dizisi monoton azalan sayısal dizidir.



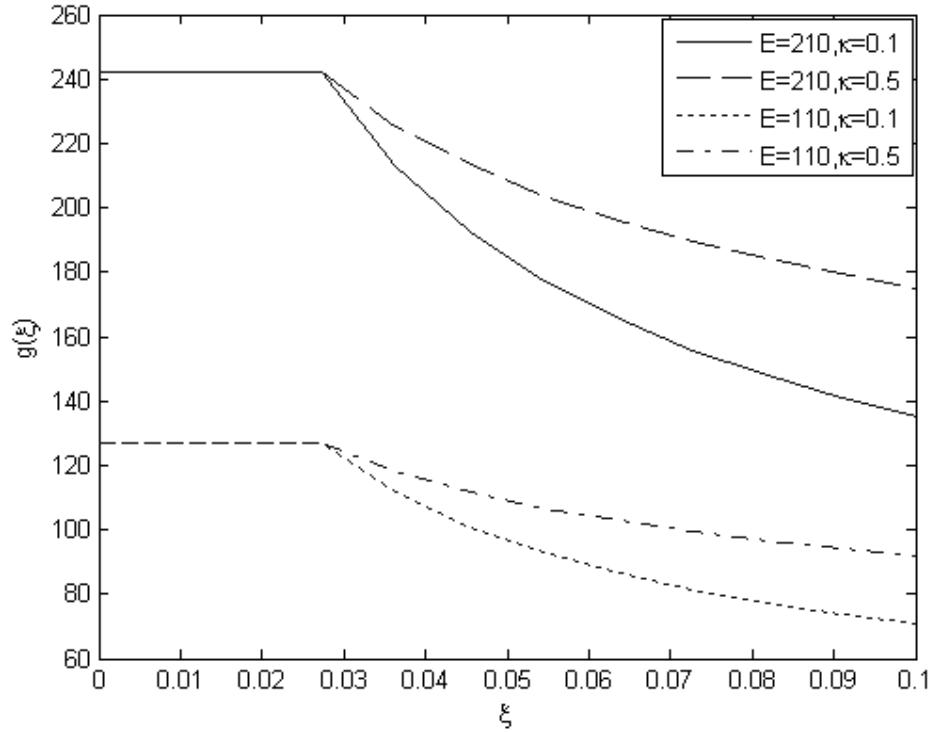
Şekil 3.1: $g(\xi)$ fonksiyonunun $\kappa = 0$ ve $\kappa = 1$ durumu

Tablo 3.3: Mühendislik malzemesi için $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi

İterasyon	$\Pi(u_n)$
1	5.6179×10^{-3}
2	5.6172×10^{-3}
3	5.6169×10^{-3}
4	5.6166×10^{-3}
5	5.6156×10^{-3}

3.2. Ters Problemin Ayrık Probleme Dönüştürülmesi

Ters problemin daha önce verdiğimiz tanımında belirtildiği üzere, amacımız deneysel olarak verilmiş bükülmeden yola çıkarak, malzemenin özelliğini belirten $g(\xi)$ fonksiyonunu belirlemektir. (3.7) ile tanımlanan $g(\xi)$ fonksiyonları sınıfını ele alalım. Çeşitli E, κ değerleri için $g(\xi)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 3.2' de verilmiştir.



Şekil 3.2: $g(\xi)$ fonksiyonu

Ters problemi çözmek için önce ters problemi ayrık probleme dönüştürmek gerekir. Yani, aradığımız $g(\xi)$ fonksiyonuna parçalı lineer yaklaşım söz konusudur. Bunun için, ele alınan nokta sayısı n olmak üzere, Şekil 3.3' de gözüken $g_i(\xi)$, $i = \overline{0, n-1}$ doğrularının denklemlerini yazmamız gerekir. Bu doğruların denklemlerini şöyle yazabiliriz:

$$g_0(\xi) = \beta_0, \beta_0 = 3G, \xi \in (0, \xi_0]$$

$$g_1(\xi) = \beta_0 - \beta_1(\xi - \xi_0), \xi \in (\xi_0, \xi_1]$$

$$g_2(\xi) = \beta_0 - \beta_1(\xi_1 - \xi_0) - \beta_2(\xi - \xi_1), \xi \in (\xi_1, \xi_2]$$

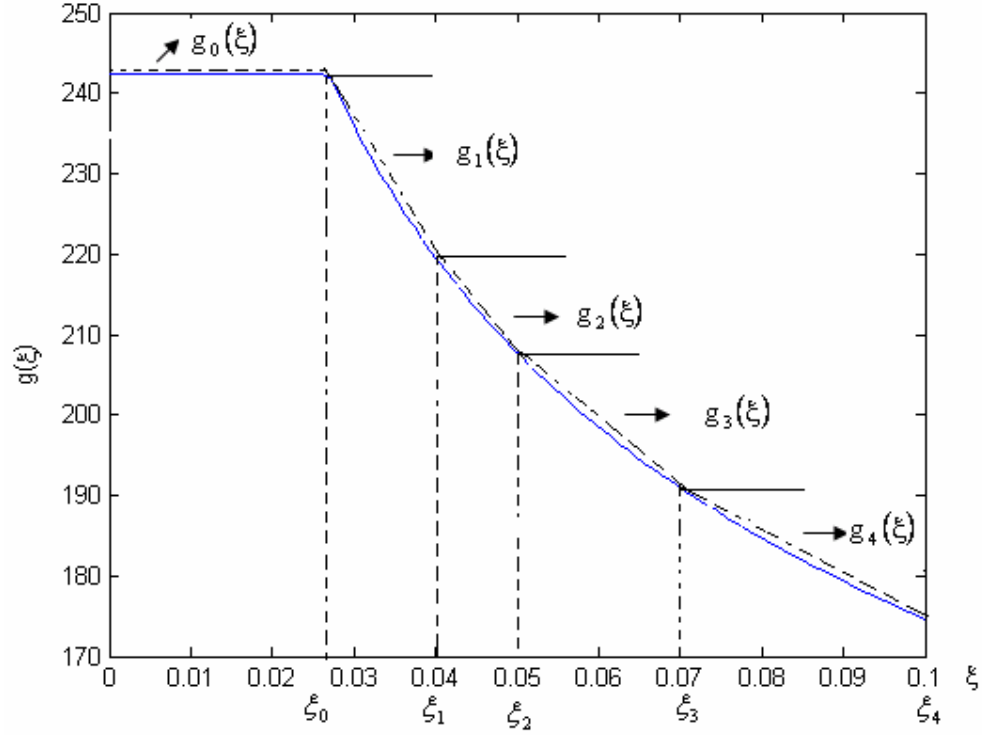
$$g_3(\xi) = \beta_0 - \beta_1(\xi_1 - \xi_0) - \beta_2(\xi_2 - \xi_1) - \beta_3(\xi - \xi_2), \xi \in (\xi_2, \xi_3]$$

$$g_4(\xi) = \beta_0 - \beta_1(\xi_1 - \xi_0) - \beta_2(\xi_2 - \xi_1) - \beta_3(\xi_3 - \xi_2) - \beta_4(\xi - \xi_3), \xi \in (\xi_3, \xi_4].$$

Bu ifadeleri genel olarak $n \geq 2$ için

$$g_n(\xi) = \beta_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(\xi_i - \xi_{i-1}) - \beta_n(\xi - \xi_{n-1}), \xi \in (\xi_{n-1}, \xi_n]$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, ξ_i noktaları belli olduğundan dolayı β_i , $i = \overline{0, n-1}$ sabitlerini belirlersek, doğruların denklemlerini bulmuş oluruz. Böylelikle, ters problem ayrık probleme dönüştürülür ve $g(\xi)$ fonksiyonunun parçalı lineer yaklaşımı bulunmuş olur. Bu yaklaşıma bazen ters problemin parametrizasyonu denir ve β_i parametreleri ters problemin arananları sayılır.



Şekil 3.3: $g(\xi)$ fonksiyonuna parçalı lineer yaklaşım

3.3. Kesin Deneysel Verili Ters Problemin Sayısal Çözümü

Bu bölümde kesin deneysel verili ters problemi çözülecektir. Bunun anlamı şudur: Deneysel olarak verilen bükülme değerleri doğal olarak belirli hatalar içerir. Ancak burada düz problem çözülerek bükülmeler hesaplanmış, daha sonra bunlar ters problemde giriş verisi olarak kullanılmıştır. Bu tür ters probleme kesin deneysel verili ters problem denir. Deneysel hatalarıyla verilmiş problemin çözümü ise bir sonraki bölümde yapılacaktır. Aşağıdaki tabloda düz problemin çözülmesi sonucu elde edilen veriler görülmektedir. (1.25)-(1.26) probleminde θ 'nın artan değerlerine karşılık gelen \mathcal{M} bükülmeleri ve ξ değerleri hesaplanmıştır. Burada bulunan \mathcal{M} değerleri, Bölüm 1' de bulduğumuz (1.64) formülü ile de hesaplanabilir. Tablo 3.2' de * ile gösterilen θ değerlerine karşılık gelen \mathcal{M} ve ξ değerleri ters problemin çözümünde giriş verisi olarak kullanılmıştır, yani plastiklik durumunda şimdilik 4 nokta ele alınmıştır. Bu noktalar Tablo 3.2' den görüldüğü gibi sırası ile 0.04, 0.05, 0.07, 0.1 noktalarıdır.

Tablo 3.4: Düz problemin θ 'nın artan değerleri için çözümüne karşılık gelen \mathcal{M} ve ξ değerleri

θ	$\xi \times 10^{-2}$	$\mathcal{M} \times 10^{-2}$
60	2.582667	3.458141
*61.346	2.7	3.535717
64	3.098201	3.693764
68	3.838290	3.942953
*68.8294	4.0	3.997549
70	4.239068	4.075961
72	4.676374	4.2133
73	4.909997	4.283367
*73.373	5.0	4.309889
75	5.389217	4.427973
79	6.452639	4.732916
*80.84775	7.0	4.879536
85	8.328589	5.226391
88	9.411316	5.490118
*89.5154	10	5.627085

Ters problemi çözmek için bir önceki bölümde tanımlanan $g_i(\xi)$ doğrularının denklemlerini bulmamız gerekir, yani β_i sabitlerini belirlemeliyiz. İlk olarak $g_0(\xi) = 3G$ fonksiyonunu, yani G ' yi belirleyelim. ($\beta_0 = 3G$) Öncelikle $G_1 > G_2$ alalım, bunlara karşılık gelen bükülmeleri de sırası ile $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ olarak gösterelim. Bu durumda bükülmeler arasında $\mathcal{M}_1 < \mathcal{M}_2$ ilişkisinin olduğu Maksimum prensibinden bellidir. Bundan yararlanarak aşağıdaki algoritma oluşturulabilir.

Algoritma 1:

- 1) $G_1, G_2, \Delta G$ belirlenir.
- 2) G_1, G_2 'ye karşılık gelen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ bükülmeleri hesaplanır.
- 3) $\mathcal{M}_1 - M = \varepsilon_1$ değeri hesaplanır.
 - a) $\varepsilon_1 > 0$ ise $\mathcal{M}_1 > M$ olur, yani $G_1 < G$. Bu durumda $G_1 = G_1 + \Delta G$ alınır.

b) $\varepsilon_1 < 0$ ise $\mathcal{M}_1 < M$ olur, yani $G_1 > G$.

4) $\mathcal{M}_2 - M = \varepsilon_2$ değeri hesaplanır.

a) $\varepsilon_2 > 0$ ise $\mathcal{M}_2 > M$ olur, yani $G_2 < G$.

b) $\varepsilon_2 < 0$ ise $\mathcal{M}_2 < M$ olur, yani $G_2 > G$. Bu durumda $G_2 = G_2 - \Delta G$ alınır.

Böylelikle öyle G_1, G_2 belirlenebilir ki G değeri bu iki değer arasında kalır.

Örneğin, $G_1 = 122.75, G_2 = 98.75, \Delta G = 40$ olarak alalım. G_1, G_2 ' ye karşılık gelen bükülmeler sırası ile $\mathcal{M}_1 = 2.326533 \times 10^{-2}, \mathcal{M}_2 = 2.891986 \times 10^{-2}$ olarak hesaplanır.

$\mathcal{M}_1 - M = \varepsilon_1 < 0$ olduğundan $G_1 > G$ olacaktır. $\mathcal{M}_2 - M = \varepsilon_2 < 0$ olduğundan

$G_2 = G_2 - \Delta G = 98.75 - 40 = 58.75$ olarak alınacaktır. Bu işlemden sonra

$G \in (G_2, G_1)$ olduğu göz önüne alınarak ikiye bölme yöntemi ile G ' ye yaklaştırmaya

çalışılmıştır. Ters problemin tanımına göre, $|\mathcal{M}_i - M| < \varepsilon$ olana kadar bu ikiye bölme

işlemi devam edecektir, burada $\varepsilon = 10^{-5}$ olarak alınmıştır.

Tablo 3.5: Kesin deneysel verili ters problem için G ' nin belirlenmesi

i	G_i	$\mathcal{M}_i \times 10^{-2}$	$ M - \mathcal{M}_i $
1	122.75	2.326533	1.209184×10^{-2}
2	58.75	4.860968	1.325251×10^{-2}
3	90.75	3.146891	3.888257×10^{-3}
4	74.75	3.820476	2.847590×10^{-3}
5	82.75	3.451131	8.458607×10^{-3}
6	78.75	3.626425	9.070821×10^{-4}
7	80.75	3.536604	8.869916×10^{-6}

Tablo 3.5' e göre G değeri 7. iterasyonda $G = 80.75$ olarak bulunmuştur. Şimdi ise

β_i sabitlerini belirleyelim. Bilindiği gibi $\kappa = 1$ ve $\kappa = 0$ durumları sırası ile saf esnek ve saf plastik durumlara karşılık geliyor. Bunun da anlamı şudur:

$g(\xi) = 3G \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{0.5(\kappa-1)}$ ile verilen malzemeler için, $\kappa \in [0,1]$ parametresinin azalması,

malzemenin esnekliğinin azalması anlamına geliyor. M & β_i ilişkisinin monoton

artan olması şunu gösteriyor: Daha sert malzemelerin aynı açı kadar bükülmesi için daha fazla kuvvet gerekiyor. M & β_1 ilişkisinin monoton artan olduğunu göz önüne alarak aşağıdaki algoritma oluşturulabilir. $\beta_1 < \beta_2$ olsun. ($\beta_1 > \beta_2$ durumunda da benzer algoritma oluşturulabilir.)

Algoritma 2:

- 1) $\beta_1, \beta_2, \Delta\beta$ belirlenir.
- 2) β_1, β_2 'ye karşılık gelen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ bükülmeleri hesaplanır.
- 3) $\mathcal{M}_1 - M = \varepsilon_1$ değeri hesaplanır.
 - a) $\varepsilon_1 > 0$ ise $\mathcal{M}_1 > M$ olur, yani $\beta_1 > \beta$. Bu durumda $\beta_1 = \beta_1 - \Delta\beta$ alınır.
 - b) $\varepsilon_1 < 0$ ise $\mathcal{M}_1 < M$ olur, yani $\beta_1 < \beta$.
- 4) $\mathcal{M}_2 - M = \varepsilon_2$ değeri hesaplanır.
 - a) $\varepsilon_2 > 0$ ise $\mathcal{M}_2 > M$ olur, yani $\beta_2 > \beta$.
 - b) $\varepsilon_2 < 0$ ise $\mathcal{M}_2 < M$ olur, yani $\beta_2 < \beta$. Bu durumda $\beta_2 = \beta_2 + \Delta\beta$ alınır.

Örneğin, $B_1^1 = 1250, B_1^2 = 1750, \Delta\beta = 300$ olarak alalım, B_1^1, B_1^2 değerlerine karşılık gelen bükülmeler sırası ile $\mathcal{M}_1^1 = 3.983385 \times 10^{-2}, \mathcal{M}_1^2 = 3.99512 \times 10^{-2}$ olarak bulunmuştur. $\mathcal{M}_1 - M = \varepsilon_1 < 0$ olduğundan B_1^1 değeri aynı kalır, $\mathcal{M}_2 - M = \varepsilon_2 < 0$ olduğundan $\beta_1^2 = \beta_1^2 + \Delta\beta = 1750 + 300 = 2050$ olarak alınır, daha sonra ise ikiye bölme yöntemi ile istenen kesinlik sağlanana kadar işlemlere devam edilir. Tablo 3.4' de β_1 ' i, Tablo 3.5' de β_2 ' yi, Tablo 3.6' da β_3 ' ü, Tablo 3.7' de β_4 ' ü belirleme işlemleri yapılmıştır. Bunların sonucunda elde edilen $g_h(\xi)$ yaklaşım fonksiyonunun ve gerçek $g(\xi)$ fonksiyonun grafiği ise Şekil 3.4' de gösterilmiştir. Aynı şekilde, bu defa $E = 110$ (yumuşak malzeme) için ters problemin çözümü verilmiştir. Şekil 3.5' de plastiklik durumunda 4 yerine ise 7 nokta alınarak ters problem çözülmüştür. Bu noktalar 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1 noktalarıdır.

Tablo 3.6: Kesin deneysel verili ters problem için β_1 ' in belirlenmesi

i	β_i^1	$\mathcal{M}_i^1 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^1 $
1	1250	3.983385	1.416393×10^{-4}
2	2050	4.007300	9.750575×10^{-5}
3	1650	3.992194	3.992194×10^{-5}
4	1850	3.998826	3.998826×10^{-5}
5	1750	3.995120	3.995120×10^{-5}
6	1800	3.996757	3.996757×10^{-6}

Tablo 3.7: Kesin deneysel verili ters problem için β_2 ' nin belirlenmesi

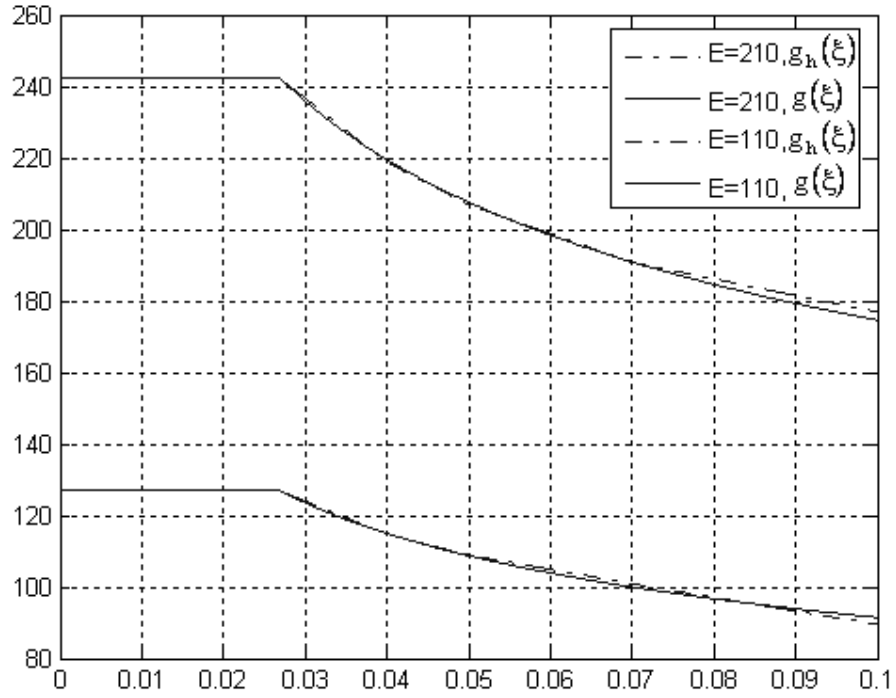
i	β_i^2	$\mathcal{M}_i^2 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^2 $
1	1485	4.317619	7.730350×10^{-5}
2	1085	4.306945	2.944097×10^{-5}
3	1285	4.311207	1.317635×10^{-5}
4	1185	4.308902	9.868294×10^{-6}

Tablo 3.8: Kesin deneysel verili ters problem için β_3 ' ün belirlenmesi

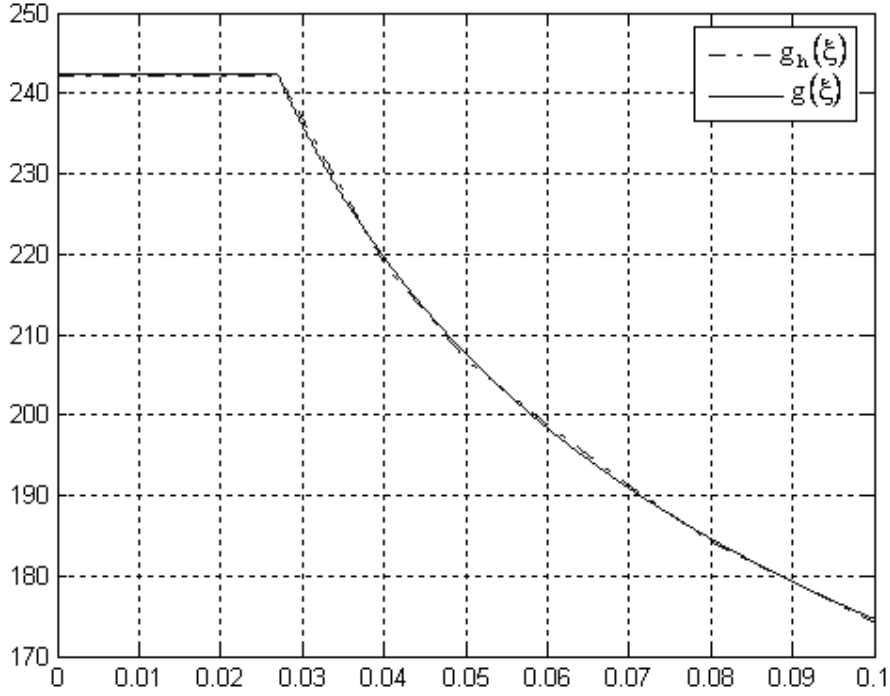
i	β_i^3	$\mathcal{M}_i^3 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^3 $
1	1050	4.903295	2.375841×10^{-4}
2	730	4.874456	5.080551×10^{-5}
3	890	4.884670	5.133823×10^{-5}
4	810	4.879028	5.085021×10^{-6}

Tablo 3.9: Kesin deneysel verili ters problem için β_4 'ün belirlenmesi

i	β_i^4	$\mathcal{M}_i^4 \times 10^{-2}$	$ M - \mathcal{M}_i^4 $
1	560	5.635591	8.506328×10^{-5}
2	400	5.623122	3.963336×10^{-5}
3	480	5.628287	1.201779×10^{-5}
4	440	5.625511	1.573563×10^{-5}
5	460	5.626848	2.365559×10^{-6}



Şekil 3.4: Sert ve yumuşak malzemeler için ters problemin çözümü



Şekil 3.5: Sert malzeme için plastiklik durumunda 7 nokta ile ters problemin çözümü

3.4. Deney Hatalarıyla Verilmiş Ters Problemin Sayısal Çözümü

Bu bölümde deney hatalarıyla verilmiş ters problem çözülecektir. Ters problemin çözümünde verilen \mathcal{M}_i bükülme değerleri her zaman gerçeği yansıtmayabilir, yani gerçeğinden farklı verilebilir ve belirli bir hata içerir. Önceki bölümde bükülme değerleri düz problem çözülerek alındığından hatalı değildir, yani kesin değerlerdir. Bu bölümde, bir önceki bölümdeki bükülme değerlerine belirli bir hata payı katarak ters problem çözülecektir. Hata payını γ ile gösterelim. Aşağıdaki tabloda, bir önceki bölümde Tablo 3.4' deki \mathcal{M}_i bükülme değerlerini $\gamma = 0.03$ hata payı ile gerçeğinden daha fazla verelim. Hatalı \mathcal{M}_i değerleri Tablo 3.10' da gösterilmiştir.

Tablo 3.10: $\gamma = 0.03$ hata payı sonucu elde edilen \mathcal{M} değerleri

i	$\mathcal{M}_i \times 10^{-2}$	i	$\mathcal{M}_i \times 10^{-2}$	i	$\mathcal{M}_i \times 10^{-2}$
1	3.561885	6	4.198240	11	4.874904
2	*3.641788	7	4.339699	12	*5.025922
3	3.804577	8	4.411868	13	5.383183
4	4.061242	9	*4.439186	14	5.654821
5	*4.117476	10	4.560812	15	*5.795897

Bir önceki bölümde olduğu gibi G ve β_i sabitleri belirlenmelidir. Bu işlemler Tablo3.9, Tablo 3.10, Tablo 3.11, Tablo 3.12, Tablo 3.13' te verilmiştir. Şekil 3.6' da ise gerçek $g(\xi)$ fonksiyonu ve sırası ile $\gamma = 0.03$ ve $\gamma = 0.05$ hata payı ile problemin çözümü sonucu elde edilen $g_h(\xi)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Tablo 3.11: $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için G ' nin belirlenmesi

i	G_i	$\mathcal{M}_i \times 10^{-2}$	$ M - \mathcal{M}_i $
1	32.4	8.814144	5.172356×10^{-2}
2	96.4	2.962466	6.793216×10^{-3}
3	68.4	4.175146	5.333584×10^{-3}
4	84.4	3.383671	2.581168×10^{-3}
5	76.4	3.737959	9.617098×10^{-4}
6	80.4	3.551990	8.979775×10^{-4}
7	78.4	3.642602	8.136034×10^{-6}

Tablo 3.12: $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_1 ' in belirlenmesi

i	β_i^1	$\mathcal{M}_i^1 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^1 $
1	900	4.104350	1.312569×10^{-4}
2	1540	4.127221	9.745359×10^{-5}
3	1220	4.113872	3.603846×10^{-5}
4	1380	4.119872	2.395734×10^{-5}
5	1300	4.116713	7.629395×10^{-6}

Tablo 3.13: $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_2 ' nin belirlenmesi

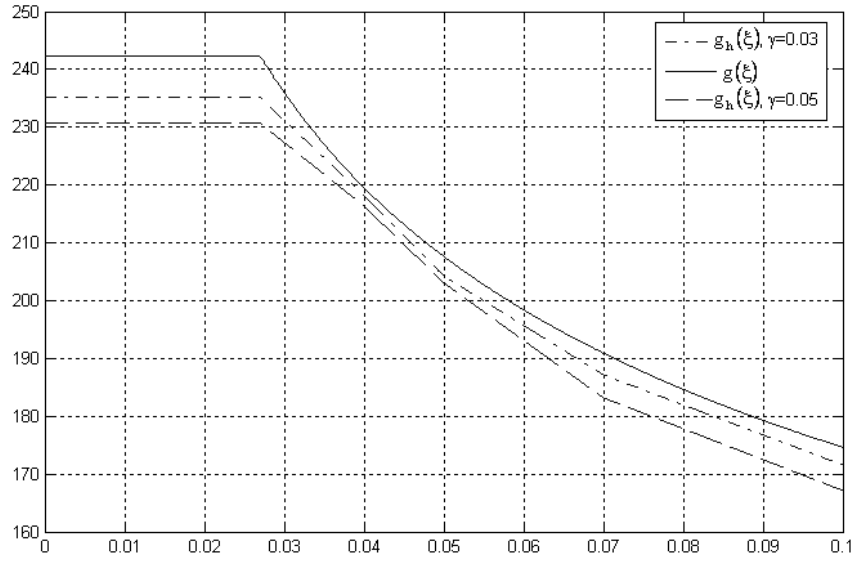
i	β_i^2	$\mathcal{M}_i^2 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^2 $
1	1150	4.430720	8.465722×10^{-5}
2	1550	4.446274	7.087737×10^{-5}
3	1350	4.436533	2.653152×10^{-5}
4	1450	4.440600	1.413748×10^{-5}
5	1400	4.438407	7.793307×10^{-6}

Tablo 3.14: $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_3 ' ün belirlenmesi

i	β_i^3	$\mathcal{M}_i^3 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^3 $
1	875	5.028741	2.818927×10^{-5}
2	835	5.023995	1.927093×10^{-5}
3	855	5.026297	3.743917×10^{-6}

Tablo 3.15: $\gamma = 0.03$ hata payı ile verilen ters problem için β_4 ' ün belirlenmesi

i	β_i^4	$\mathcal{M}_i^4 \times 10^{-2}$	$ \mathbf{M} - \mathcal{M}_i^4 $
1	620	5.829379	3.348216×10^{-4}
2	460	5.785326	1.057163×10^{-4}
3	540	5.801485	5.587563×10^{-5}
4	500	5.792573	3.323704×10^{-5}
5	520	5.796783	8.855015×10^{-6}



Şekil 3.6: $\gamma = 0.03$ ve $\gamma = 0.05$ deney hatalarıyla verilmiş ters problemin çözümü.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Sonuçlar:

1. Esnek olmayan çubuğun bükülmesinin matematiksel modeli monoton ve potansiyel operatörler teorisi çerçevesinde incelenmiştir.
2. Elde edilen sınır değer problemin lineerleştirilmesi şeması verilmiş ve bilinen yakınsama teoremleri bu probleme uygulanmıştır.
3. Zayıf çözüme dayalı sonlu fark şeması verilmiş, somut problemler sayısal olarak çözülmüştür.
4. Çeşitli mühendislik malzemelerinin bulunması ile ilgili ters problemin çözüm algoritması verilmiş ve bu algoritmayla çeşitli problemler çözülmüştür.

Öneriler:

1. Tezdeki sonuçlar fizik ve matematikte çeşitli problemlere uygulanabilir.
2. Verilen iterasyon yönteminden yararlanarak lineer olmayan eliptik denklemlerle ilgili problemlerin sayısal çözümü elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Bertola, V., Cafaro, E., “Geometric Approach to Laminar Convection”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol: 19, No: 4, (2005).

Hasanov, A., “An Inverse Problem for an Elastoplastic Medium”, *SIAM J. Appl. Math.*, 55, 1736-1752, (1995).

Hasanov, A., “Inverse Coefficient Problems for Monotone Potential Operators”, *Inverse Problems*, 13, 1265-1278, (1997).

Hasanov, A., “Inverse Coefficient Problems for Elliptic Variational Inequalities with a Nonlinear Monotone Operator”, *Inverse Problems*, 14, 1151-1169, (1998).

Hasanov, A., Seyidmamedov, Z., “Determination of Unknown Elastoplastic Properties in Signorini Problem”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 33, 979-991, (1998).

Hasanov, A., “Convexity Argument for Monotone Potential Operators and its Application”, *Nonlinear Analysis* 41, 907-919, (2000).

Hasanoğlu (Hasanov), A., “Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi”, *Literatür, İstanbul*, (2001).

Hasanov, A., 2005. Monotonicity of Nonlinear Boundary Value Problems Related to Deformation Theory of Plasticity, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2006, 1-18.

Hasanov, A., Erdem, A., “Determination of unknown coefficient in a nonlinear elliptic problem related to the elasto-plastic torsion of a bar”, *IMA Journal of Applied Mathematics* (2007) (Basım aşamasında).

Kachanov, L. M., “The Theory of Creep, National Lending Library for Sciences and Technology”, *Boston Spa, Yarkshire, England*, (1967).

Kachanov, L. M., “Fundamentals of the Theory of Plasticity”, *Mir Publishers, Moscow*, English translation (1974).

Necas, J., Hlavacek, I., “Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction”, *Elsevier, Amsterdam*, (1981).

Payne, L. E., Philippin, G.A., “Some Applications of The Maximum Principle in the Problem of Torsional Creep”, *Siam J. Appl. Math* Vol: 33, No: 3, (1977).

Rektorys, K., "Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering", *Reidel, Boston*, (1977).

Samarskii, A.A., "The Theory of Difference Scheme and Mathematical Society", *U.S.A*, (2001).

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., "Theory of Elasticity (3th ed.)", *McGraw Hill, New York*, (1970).

Zeidler, E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II: Nonlinear Monotone Operators", *Springer Verlag, New York*, (1990).

Vainberg, M.M., "Variational Method and Method of Monotone Operators in Theory of Nonlinear Equations", *John Wiley & Sons, Inc., New York*, (1972).

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Gaziantep' te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. 1999 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2006 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.