

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE
KİNEMATİK VE DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS

Yavuz AYDIN

Anabilim Dalı: Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serdar KÜÇÜK

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE
KİNEMATİK VE DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yavuz AYDIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 4 Haziran 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Temmuz 2007

Tez Danışmanı

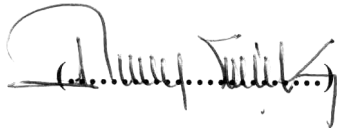
Üye

Üye

Yrd. Doç. Dr. Serdar KÜÇÜK

Doç. Dr.Zafer BİNGÜL

Doç. Dr.Raşit KÖKER


(.....)


(.....)


(.....)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Hızla gelişen dünyamızda insanların ihtiyaçlarını karşılayabilmek için üretim tesislerinde hatasız, kaliteli ve çabuk üretim yapmak işletmeciler için ön şart olmuştur. Teknolojinin gelişmesiyle bu tesislerde endüstriyel robotların kullanım alanları da artmıştır. Bu tez çalışmasında, robotiğin temel konularından olan endüstriyel robotların kinematiği ve dinamiği Quaternion yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Türkçe kaynak bulmanın zor olduğu ülkemizde bundan sonra bu konularla ilgilenenler için başvurulacak bir çalışma olacağını ümit ediyorum

Bu tez konusunun belirlenmesinde ve ilerleyen aşamalarında bana her konuda yardım eden, bilimsel çalışma disiplini öğreten ve deneyimlerini benimle paylaşan Yrd. Doç Dr. Serdar KÜÇÜK'e, tezin incelenmesinde ve düzenlenmesinde emeği geçen Doç Dr. Zafer BİNGÜL ve Doç Dr. İsmail Ertürk'e çok teşekkür ederim. Ayrıca, Hakan Selen'e ve tezi hazırlama sürecinde göstermiş oldukları iyi niyet ve anlayışlarından ötürü başta Bilecik Endüstri Meslek Lisesi okul müdürü Hüseyin Gözüyılmaz'a ve tüm bölüm öğretmenlerime çok teşekkür ederim. Hayatım boyunca beni destekleyen ve bugünlere getiren annem Melek AYDIN'a ve babam Ahmet AYDIN'a da sonsuz minnet duygularımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-----|
| ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR..... | i |
| İÇİNDEKİLER | ii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | iv |
| TABLolar DİZİNİ | vi |
| SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR | vii |
| ÖZET..... | ix |
| İNGİLİZCE ÖZET..... | ix |
| BÖLÜM 1. ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ..... | 1 |
| 1.1. Giriş..... | 1 |
| 1.2. Robotların Kinematik Analizi | 1 |
| 1.3. Robotların Kinematik Modelinin Çıkarılması | 2 |
| 1.3.1. Kartezyen uzayda kinematik model çıkarılması | 2 |
| 1.3.2. Quaternion uzayında kinematik model çıkarılması..... | 4 |
| 1.3.2.1. Robot kinematığında kullanılan quaternion tanımlamaları..... | 6 |
| 1.3.2.2. Quaternion yöntemiyle ileri kinematik | 8 |
| 1.3.2.3. Quaternion yöntemiyle ters kinematik..... | 11 |
| BÖLÜM 2. İKİLİ HARF KODUNUN KULLANILMASIYLA YAPILAN SINIFLANDIRMA | 12 |
| 2.1. Giriş..... | 12 |
| BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE İLERİ KİNEMATİĞİNİN ÇIKARILMASI | 22 |
| 3.1. Giriş..... | 22 |
| 3.1.1. SS robotunun ileri kinematığı | 22 |
| 3.1.2. SC robotunun ileri kinematığı..... | 24 |
| 3.1.3. SN robotunun ileri kinematığı..... | 25 |
| 3.1.4. CS robotunun ileri kinematığı..... | 27 |
| 3.1.5. CC robotunun ileri kinematığı | 29 |
| 3.1.6. CR robotunun ileri kinematığı | 31 |
| 3.1.7. NS robotunun ileri kinematığı..... | 33 |
| 3.1.8. NN robotunun ileri kinematığı | 35 |
| 3.1.9. NR robotunun ileri kinematığı | 37 |
| 3.1.10. RC robotunun ileri kinematığı | 39 |
| 3.1.11. RN robotunun ileri kinematığı | 42 |
| 3.1.12. RR robotunun ileri kinematığı | 44 |
| 3.1.13. RS robotunun ileri kinematığı..... | 46 |
| 3.1.14. SR robotunun ileri kinematığı..... | 48 |
| 3.1.15. CN robotunun ileri kinematığı | 50 |
| 3.1.16. NC robotunun ileri kinematığı | 52 |
| 3.2. Robot Manipülatörlerinin Çalışma Uzaylarının Sınıflandırılması..... | 54 |
| 3.3. Quaternion Yöntemiyle DH Yönteminin Bilgisayar Ortamında Karşılaştırılması | 55 |

| | |
|--|------------|
| BÖLÜM 4. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE TERS KİNEMATİĞİNİN ÇIKARILMASI..... | 57 |
| 4.1. Giriş..... | 57 |
| 4.1.1 SS robotunun ters kinematığı..... | 57 |
| 4.1.2. SC robotunun ters kinematığı..... | 61 |
| 4.1.3 SN robotunun ters kinematığı..... | 63 |
| 4.1.4. CS robotunun ters kinematığı..... | 65 |
| 4.1.5. CC robotunun ters kinematığı..... | 67 |
| 4.1.6. CR robotunun ters kinematığı..... | 69 |
| 4.1.7. NS robotunun ters kinematığı..... | 71 |
| 4.1.8. NN robotunun ters kinematığı..... | 74 |
| 4.1.9. NR robotunun ters kinematığı..... | 76 |
| 4.1.10. RC robotunun ters kinematığı..... | 79 |
| 4.1.11. RN robotunun ters kinematığı..... | 81 |
| 4.1.12. RR robotunun ters kinematığı..... | 84 |
| 4.1.13. RS robotunun ters kinematığı..... | 86 |
| 4.1.14. SR robotunun ters kinematığı..... | 88 |
| 4.1.15. CN robotunun ters kinematığı..... | 90 |
| 4.1.16. NC robotunun ters kinematığı..... | 93 |
| BÖLÜM 5. QUATERNION YÖNTEMİYLE ROBOT DİNAMİĞİNİN ÇIKARILMASI..... | 96 |
| 5.1. Giriş..... | 96 |
| 5.2. Newton-Euler Yöntemi..... | 96 |
| 5.2.1. Dışa dönük ardışık denklemler..... | 97 |
| 5.2.2. İçe dönük ardışık denklemler ile kuvvet ve torkun hesaplanması..... | 99 |
| 5.2.3. Yerçekimi kuvveti..... | 100 |
| 5.3. NS Robotunun Quaternion Yöntemi Kullanılarak Dinamik Modelinin Çıkarılması..... | 100 |
| BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER..... | 110 |
| KAYNAKLAR..... | 111 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 113 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Şekil 1.1: a) Bağıın bulunduğu eksene göre diğer eksenlerin hareket yönü b) Bağıın bulunduğu eksen ters yöndeysel, diğer eksenlerin hareket yönü | 9 |
| Şekil 1.2: a) 3 DOF seri robot manipulator, b) l_1 bağıının xy düzlemindeki hareketi, c) l_2 bağıının xz düzlemindeki hareketi. | 9 |
| Şekil 2.1: Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma. | 12 |
| Şekil 2.2: SS (PPP) prizmatik robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 13 |
| Şekil 2.3: SC (PPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 14 |
| Şekil 2.4: SN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 14 |
| Şekil 2.5: CS (RPP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 15 |
| Şekil 2.6: CC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 15 |
| Şekil 2.7: CR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 16 |
| Şekil 2.8: NS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 16 |
| Şekil 2.9: NN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 17 |
| Şekil 2.10: NR (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 17 |
| Şekil 2.11: RC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 18 |
| Şekil 2.12: RN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 18 |
| Şekil 2.13: RR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 19 |
| Şekil 2.14: RS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 20 |
| Şekil 2.15: SR (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 20 |
| Şekil 2.16: CN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 21 |
| Şekil 2.17: NC (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı. | 21 |
| Şekil 3.1: SS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 22 |
| Şekil 3.2: SC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 24 |
| Şekil 3.3: SN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 26 |
| Şekil 3.4: CS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 28 |
| Şekil 3.5: CC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 29 |
| Şekil 3.6: CR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 31 |

| | |
|--|-----|
| Şekil 3.7: NS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 33 |
| Şekil 3.8: NN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 35 |
| Şekil 3.9: NR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 37 |
| Şekil 3.10: RC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 40 |
| Şekil 3.11: RN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 42 |
| Şekil 3.12: RR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 44 |
| Şekil 3.13: RS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 46 |
| Şekil 3.14: SR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. | 48 |
| Şekil 3.15: CN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 50 |
| Şekil 3.16: NC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi..... | 52 |
| Şekil 5.1: i. bağı etkileyen kuvvet ve momentler. | 96 |
| Şekil 5.2: NS robotunun katı gövde yapısı ve dinamik düzenleşimi. | 101 |

TABLolar DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Tablo 3.1: SS robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 22 |
| Tablo 3.2: SC robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 24 |
| Tablo 3.3: SN robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 26 |
| Tablo 3.4: CS robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 28 |
| Tablo 3.5: CC robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 30 |
| Tablo 3.6: CR robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 31 |
| Tablo 3.7: NS robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 33 |
| Tablo 3.8: NN robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 35 |
| Tablo 3.9: NR robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 38 |
| Tablo 3.10: RC robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 40 |
| Tablo 3.11: RN robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 42 |
| Tablo 3.12: RR robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 44 |
| Tablo 3.13: RS robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 46 |
| Tablo 3.14: SR robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 48 |
| Tablo 3.15: CN robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 50 |
| Tablo 3.16: NC robotunun yönelim ve konum bilgileri..... | 52 |
| Tablo 3.17: Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması..... | 54 |
| Tablo 3.18: Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması..... | 55 |

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

| | |
|------------------|--|
| a_{i-1} | : bağ uzunluğu |
| α_{i-1} | : bağ açısı |
| d_i | : eklem kaçıklılığı |
| θ_i | : eklem açısı |
| u_{i0} | : SRK yönteminde robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları |
| Q_{i0} | : SRK yönteminde robotun geometrisini tanımlayan bağ yerleşimleri |
| s_j | : SRK yönteminde prizmatik eklem |
| q | : quaternion ifadesi |
| s | : quaternion ifadesinde gerçek yarım dönme açısı |
| v | : quaternion ifadesinde eksenlerin yönelimini belirten yarım açı vektörü |
| k_x | : k birim vektörünün x doğrultusundaki bileşeni |
| k_y | : k birim vektörünün y doğrultusundaki bileşeni |
| k_z | : k birim vektörünün z doğrultusundaki bileşeni |
| $Q(q, p)$ | : Quaternion/vektör çifti |
| $\bar{\theta}_i$ | : $\theta_i / 2$ |
| p | : Konum vektörü |
| R_w | : Quaternion gösteriminde yönelim |
| T_w | : Quaternion gösteriminde konum |
| M_i | : Ters kinematik yöntemde işlenmiş Quaternion/vektör çiftleri |
| N_i | : Ters kinematik yöntemde işlenmiş ters Quaternion/vektör çiftleri |
| S | : Prizmatik eklem |
| C | : Kayma eksenine dik dönme |
| N | : Dönme eksenine dik dönme |
| R | : Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme. |
| \dot{v}_i | : i. bağıın doğrusal ivmesi |
| \dot{v}_{Ci} | : i. bağıın kütle merkezinin doğrusal ivmesi. |
| ω_i | : i. bağıın açısal hızı. |
| $\dot{\omega}_i$ | : i. bağıın açısal ivmesi. |
| m_i | : i. bağıın kütlesi. |
| g_i | : i. bağıın yerçekimi ivmesi. |
| q_i | : i ile i+1. bağlar arasındaki dönme vektörü. |
| $c_i I$ | : i. bağıın kendi kütle merkezine göre atalet tensörü. |

| | |
|----------------|---|
| ${}^i P_{C_i}$ | : i. bağın kütle merkezine konumu. |
| ${}^i P_{i+1}$ | : i. bağın i+1. bağa göre konumu. |
| F_i | : i. bağın kütle merkezine etkiyen kuvvet. |
| N_i | : i. bağın kütle merkezine etkiyen tork. |
| f_i | : i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan kuvvet. |
| n_i | : i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan tork. |
| τ | : Eyleyicilere etki eden tork ifadesi |
| D-H | : Denavit-Hartenberg yöntemi |
| SRK | : Sıfır Referans Konum yöntemi |
| TPS | : Tam ve Parametrik Sürekli Kinematik yöntem |
| N-E | : Newton-Euler yöntemi |

ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE KİNEMATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

Yavuz AYDIN

Anahtar Kelimeler: Robotların kinematik modelleri, Endüstriyel robot manipülatörleri, Quaternion yöntemi, İleri ve ters kinematik, Dinamik

Özet: Robot kinematiği ve modellenmesi robot manipülatörlerinin en temel konularından birini oluşturmaktadır. Endüstriyel robotların kinematik modellerini çıkartmak için Kartezyen ve Quaternion olmak üzere iki farklı uzayda birçok yöntem geliştirilmiştir. Kartezyen uzayda kullanılan bu yöntemlerin bazıları, Denavit-Hartenberg yöntemi, Üstel yöntem, Sıfır Referans Konum yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve Tam ve Parametrik Olarak Sürekli Kinematik yöntemi şeklinde sıralanabilir. Sunulan tez çalışmasında bu yöntemler kısaca anlatılırken Quaternion yöntemiyle seri robot manipülatörlerinin kinematik modellenmesi detaylı bir şekilde açıklanmaktadır. Daha sonra Huang ve Milenkovic tarafından sınıflandırılan on altı adet temel endüstriyel robotun düzenleşimi ve katı gövde yapıları verilmektedir.

Son olarak bu on altı adet temel endüstriyel robot manipülatörünün Quaternion yöntemi kullanılarak sırasıyla ileri ve ters kinematik çözümleri sunulurken RRP eklem yapısına sahip olan NS robotunun dinamik denklemleri bu yöntem ile elde edilmiştir. Endüstriyel robot manipülatörlerinin DH ve Quaternion yöntemiyle elde edilen ileri kinematik denklemlerinin bilgisayar ortamındaki çalışma hızları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda quaternion yönteminin özellikle küresel çalışma uzayına sahip robotlarda daha hızlı çalıştığı kaydedilmiştir.

THE KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF INDUSTRIAL ROBOT MANIPULATORS USING QUATERNION MODELING CONVENTION

Yavuz AYDIN

Keywords: Kinematics model of robot, Industrial robots, Quaternion method, Forward kinematics, Inverse kinematics, Dynamic.

Abstract: Robot kinematics modeling is one of the most fundamental topics of robot manipulators. Several methods have been developed in two different spaces, namely, Cartesian and Quaternion for driving the kinematics modeling of robot manipulators. Some of these methods of importance used in Cartesian space are Denavit-Hartenberg method, Exponential method, Zero Reference Position method, Pieper-Roth method and Complete and Parametrically Continuous method. First of all, these methods have been explained. Kinematics modeling of the robot manipulators using Quaternion kinematics modeling convention has been described in detail. The serial chain mechanisms and the equivalent rigid body models of the sixteen fundamental robot manipulators classified by Huang and Milenkovic have been given consequently.

The forward and inverse kinematics solutions of the sixteen fundamental robot manipulators have been obtained using Quaternion modeling convention. Finally, dynamic model of the NS robot manipulator which is one of these sixteen robot manipulator has been obtain and presented. The forward kinematics equations of industrial robot manipulators obtained from homogenous and quaternion representations are compared in terms of computational speed. It has been concluded that quaternion representation runs faster especially for the robot manipulators having spherical workspaces.

BÖLÜM 1. ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ

1.1. Giriş

Genellikle, robotlar seri ve paralel olmak üzere iki temel gruba ayrılır. Seri robotlar bir dizi eklemler (joints) ve bu eklemleri birbirine birleştiren bağlardan (links) oluşur. Seri robotlar, paralel robotlara göre daha geniş çalışma uzayına (aktif olarak robotun ulaşabileceği uzay) ve daha basit kinematik denklemlere sahip olmasına rağmen kaldıracakları kütlenin kendi mekanik yapılarının kütlesine oranı ise daha küçüktür. Paralel robotlar, ana çerçeve ile yük arasında birbirine paralel pek çok bağın bir araya gelmesiyle oluşur. Seri robotlara göre daha sağlam bir mekanik yapıya sahiptirler. Kinematik denklemlerinin çok karmaşık olmasına karşın, kaldıracakları kütlenin mekanik yapılarının kütlesine oranı daha büyüktür.

1.2. Robotların Kinematik Analizi

Bir endüstriyel robot öteleme (prismatic) ve dönme (revolute) hareketi gerçekleştiren eklemlerle, bu eklemleri birbirine birleştiren bağlardan oluşur. Dönme hareketinden dolayı meydana gelen yer değiştirmeye eklem açısı (joint angle) ve bağlar arasındaki yer değiştirmeden dolayı oluşan ötelemeye ise eklem kaçıklığı kayması (joint offset) denir.

Robotun ileri yön kinematiği (forward kinematics), robot bağlarının konumları, hızları ve ivmeleri arasındaki ilişkiyle ilgilenir.

Robot manipülatörleri, ana çerçeveden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya dönel eklemlerle tutturulmuş seri bağlardan oluşur. İki bağ arasındaki ilişki çoğunlukla bir homojen dönüşüm matrisiyle açıklanır. Eklem dönüşüm matrislerinin art arda çarpılmasıyla, ana çerçeveye araç çerçevesi (uç işlevcisi) arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişkiye robot manipülatörlerinin ileri yön kinematiği (forward

kinematics) denir ve araç çerçevesinin yönelimini ve konumunu ana çerçeveye göre tanımlar.

Robot manipülatörlerinin ters kinematiği (inverse kinematics) ise, araç çerçevesinin ana çerçeveye göre yönelimi ve konumu verildiğinde, robotun bu yönelim ve konuma ulaşabilmesi için gerekli olan açı setlerinin hesaplanması şeklinde tanımlanabilir (Craig 1989).

Robot manipülatörlerinin ileri kinematiğinin çok basit olmasına rağmen ters kinematik çözümleri kullanılan denklemlerin doğrusal olmamasından dolayı son derece karmaşık bir yapıya sahiptir.

1.3. Robotların Kinematik Modelinin Çıkarılması

Robotların kinematik modelini çıkarmak için iki farklı uzayda (Kartezyen ve Quaternion uzayı) günümüze kadar birçok yöntem geliştirilmiştir.

1.3.1. Kartezyen uzayda kinematik model çıkarılması

Robot manipülatörlerinin Kartezyen uzayda kinematik modelini çıkarmak için başlıca beş farklı yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler Denavit-Hartenberg, Üstel yöntem (exponential method), Sıfır Referans Konum yöntemi (Zero Reference Position method), Pieper-Roth yöntemi ve Tam ve Parametrik Olarak Sürekli yöntem (Complete and Parametrically Continuous method)'dir. Aşağıda bu beş yöntem kısaca anlatılmıştır.

Robot manipülatörlerinin kinematik modelini çıkarırken en sık kullanılan yöntem, Denavit-Hartenberg yöntemidir. Bu yöntemde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır. Bu değişkenler, iki eksen arasındaki bağ uzunluğu (link length) a_{i-1} , (i-1) ile i eksenleri arasındaki bağ açısı (link twist) α_{i-1} , üst üste çakışan bağlar arasındaki eklem kaçıklığı (joint offset) d_i , ve iki bağ arasında oluşan eklem açısı (joint angle) θ_i 'dir (Denavit and Hartenberg 1955). Bu dört değişkene Denavit-Hartenberg değişkeni denir ve kısaca DH değişkenleri olarak isimlendirilir. Bu

değişkenleri belirlemek için, öncelikle robotun dönme eksenleri belirlenir. Daha sonra bu eksenlere birer adet koordinat çerçevesi yerleştirilir. Son olarak bu koordinat çerçevelerinden yararlanarak a_{i-1} bağ uzunluğu, α_{i-1} bağ açısı, d_i eklem kaçıklığı ve θ_i eklem açısı belirlenir. Robotun bir eklemine ait 4x4 boyutlu dönüşüm matrisi bu dört değişkenin meydana getirdiği matrislerin çarpımıyla elde edilir. Bu dönüşüm matrisi, 3x3'lük bir dönme matrisinden ve 3x1'lik bir konum vektöründen oluşur. Elde edilen n tane matrisin yan yana çarpılmasıyla n serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematik modeli çıkarılır.

Ters kinematik probleminin doğrusal olmayan denklemler içermesinden dolayı, Kartezyen uzayda çözümleri son derece güçtür. Bu problemin çözümü için alternatif olarak Üstel yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problem üstel dönme matris tabanlı cebir kullanılarak sistematik olarak çözülür (Özgören 1987). Bu yöntemde sabit eksene göre dönme gerçekleştirilerek toplam ileri yön kinematik bulunur (Balkan ve Özgören 1999). Eksi bakışlı matris (skew symmetric matrix) kullanan Üstel yöntemde, başlangıç ekseni birinci hareketli eksenin göbeğine yerleştirilir.

Robot kinematik problemlerini çözenin başka bir yolu da, SRK yöntemini kullanmaktır. SRK, Sıfır Referans Konum'un kısaltılmış şeklidir. SRK yöntemi, bütün değişkenlere bir sıfır referans değeri bularak basitçe robotun geometrisini tanımlar ve hareket işlemlerini gerçekleştirir (Gupta 1986). Bu yöntemde, robot uygun bir şekilde dondurulur ve oluşan sıfır referans konumda bütün eksen değişkenleri (θ_i dönele ve s_j prizmatik) tanımlanır. Daha sonra bu konumda, robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları (u_{io}) ve bağ yerleşimleri (Q_{io}) belirlenir. Burada, u dönme veya kayma ekseni yönündeki birim vektör, Q ise eklem eksenlerinin yerleşimini gösteren değişkendir.

Bu yöntemde birden fazla sıfır referans konum noktası seçilebilir. Bu durum, uygun olan birçok SRK konuma ulaşılmasından dolayı avantaj sağlar. Fakat bazı uç seçimlerden dolayı aynı robot için iki farklı matematiksel sonuç elde edilebilir. Bu açıdan sonuçlar D-H yöntemiyle karşılaştırılmalıdır. Bu ise, SRK yönteminin bir dezavantajıdır. Ayrıca, SRK yöntemi genellikle açık kinematik çözümlerde kullanılır. Kapalı kinematik çözümlerde sonuç vermediğinden, bu aşamada DH

yönteminde üretilen veriler SRK yöntemi tarafından kullanılarak kapalı çözüm gerçekleştirilir.

Pieper-Roth yöntemi D-H değişkenlerini kullanarak yeni bir dönüşüm matrisi düzenlemiştir. Bu yöntemde dönüşüm matrisi, DH yönteminin aksine $(i+1)$. ekseninden i . eksene doğru bakılarak oluşturulur. d_i ile α_i değişkenleri yer değiştirilerek matris çarpımı gerçekleştirilir. Dönüşüm matrislerinin farklı olmasına rağmen, bakış açısının doğurduğu 90 derecelik açı farkı, ileri yön kinematik analizinde DH dönüşüm matrisi ile Pieper-Roth dönüşüm matrisinin aynı sonucu üretmesine neden olur.

Yeni bir robot kinematik modelleme yöntemi olarak geliştirilen Tam ve Parametrik Sürekli Kinematik yöntem, kısaca TPS olarak isimlendirilir (Zhuang 1992). Özellikle, TPS yönteminde hata modelinin (robot error model) uygulanmasından dolayı, robot kalibrasyonu için önemli avantaj sağlamaktadır (Mooring, Roth and Driels 1991; Hollerbach 1988).

Tam (Complete) kinematik bir yöntem, herhangi bir robotta, eklem değişkenlerini, robotun araç çerçevesine veya keyfi yönde seçilen evrensel çerçevesine göre ifade edebilmelidir (Everett, Driels ve Mooring 1987). Daha açık bir ifadeyle, tam kinematik bir yöntem robotun her türlü hareketini modelleyecek değişkenleri içermelidir. Parametrik süreklilik (Parametrically Continuity) ise, tamamen yöntemin tekilliğiyle (singularity) ilgilidir (Zuang 1989). Robot eklemlerinin yönelimi veya konumunun değişmesi sonucunda kinematik yöntem bağı değişkenleri de bu değişime esnek bir şekilde cevap veriyorsa, bu kinematik yöntem parametrik olarak süreklidir denir. Bu yöntemle ileri kinematik çıkarırken hayli zahmetli işlemler gerçekleştirildiğinden pek tercih edilen bir yöntem değildir.

1.3.2. Quaternion uzayında kinematik model çıkarılması

Quaternion yöntemi, robotların kinematik modellerini çıkarmak için çok uygun olmasına rağmen robot bilimcileri tarafından pek tercih edilmemiştir. Oysa ki, quaternion yöntemiyle dönme ve öteleme işlemleri bir dönüşüm vektörüyle aynı

anda gösterilebilmektedir. Homojen dönüşüm matrisleriyle dönme işlemi dokuz elemanla gösterilmesine rağmen quaternion yönteminde dönme işlemi sadece dört elemanla ifade edilmektedir. Bu durum bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önünde bulundurulduğunda diğer yöntemlere göre çok önemli bir avantaj sağlar(Funda, Taylor ve Paul 1990).

Quaternionlar ilk olarak İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından ortaya atıldı (Hamilton 1869). Günümüze kadar klasik mekanik, kuantum mekaniği, uzay bilimi ve geometri olmak üzere birçok alanda kullanıldı. Dönel operatörler olarak quaternionların özellikleri Pervin ve Webb (Pervin ve Webb 1982), avantajları ise Salamin (Salamin 1979) tarafından sunuldu. Gu ve Luh robot kinematiği ve dinamiğinde kullanılmak üzere Jakobiyenin hesaplanmasında quaternionlardan yararlandı (Gu ve Luh 1987). Kim ve Kumar ise altı serbestlik derecesine sahip olan bir robot manipülatörünün ileri ve ters kinematiğini quaternion yöntemini kullanarak elde etti (Kim ve Kumar 1990).

Kartezyen uzayda anlatılan yöntemlerden DH yöntemi, SRK yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve Tam ve Parametrik Sürekli yöntem, robot kinematiğini doğrudan on iki eleman içeren matrislerle ifade etmektedir. Üstel yöntem üç yararlı elemanla dönme hareketini en iyi şekilde ifade etmektedir. Pratikte robotla uğraşan insanlar matris işlemlerine daha yatkın, diğer yöntemlerde kullanılan operatörlere de alışkın olmadıklarından dolayı, DH yöntemi gibi matrisleri kullanarak kinematik model çıkaran yöntemler daha sık kullanılmaktadır. Oysa ki bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önüne alındığında, yukarıda anlatılan beş yöntem Quaternion yöntemine göre daha yavaş çalışmaktadır. Bu durum gerçekleştirilen bilimsel çalışmalarla da ortaya konmuştur (Nicholos, Aspragathos and Dimitros 1998). Yukarıda belirtilen quaternion yönteminin avantajlarından dolayı bu tez çalışmasında Quaternion yöntemiyle endüstriyel robotların kinematik ve dinamik modelleri detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

1.3.2.1. Robot kinematığında kullanılan quaternion tanımlamaları

Dörtlü sayılar olarak da ifade edilen tekil quaternionlar (unit quaternion), bir skaler 's' ve üç boyutlu 'v' vektörüyle aşağıdaki gibi ifade edilir ($s \in R, v \in R^3$).

$$\begin{aligned} q &= [s, v] \\ &= [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \langle k_x, k_y, k_z \rangle] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Denklem 1.1, k birim ekseninde θ açısıyla bir dönme ifade etmektedir. Denklem 1.1'deki dönmeye eşdeğer homojen dönme matrisini elde etmek için denklem 1.1 aşağıdaki gibi yazılsın.

$$q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \langle k_x, k_y, k_z \rangle] = [s, \langle x, y, z \rangle] \quad (1.2)$$

Denklemde $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eşittir. Denklem 1.2'deki ifadenin homojen dönme matris eşdeğeri,

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

şeklinde gösterilir. Denklem 1.3'teki R dönme matrisi denklem 1.4'deki gibi ifade edilsin.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Bu denklemden yararlanarak s, x, y ve z değişkenleri denklem 1.4'de verilen dönme matrisinin elemanları cinsinden aşağıdaki ifade edilir.

$$s = \frac{\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}}{2} \quad (1.5)$$

$$x = \frac{r_{32} - r_{23}}{4s} \quad (1.6)$$

$$y = \frac{r_{13} - r_{31}}{4s} \quad (1.7)$$

$$z = \frac{r_{21} - r_{12}}{4s} \quad (1.8)$$

Tekil quaternionlar, robot manipulatorlerinde gerekleŖen dönmeyi dört elemanla çok uygun bir Ŗekilde ifade etmelerine rağmen, uç boyutlu uzayda manipulatorlerin konumları hakkında herhangi bir bilgi içermez. Konum ve yönelimi tek bir dnŖm ifadesiyle göstermek için quaternion/vektör çiftleri kullanılır. Bu alıŖmada, Quaternion vektör çiftleri $Q(q, p)$, dönel eklemler için

$$Q(q, p) = \left(\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle k_x, k_y, k_z \rangle \right], \langle p_x, p_y, p_z \rangle \right) \quad (1.9)$$

prizmatik eklemler içinse

$$Q(q, p) = ([1, \langle 0, 0, 0 \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle) \quad (1.10)$$

Ŗeklinde ifade edilmektedir. Denklemde $[1, \langle 0, 0, 0 \rangle]$ birim quaternion (unit identity quaternion) tanımlamasıdır.

Quaternion arpımı hem skaler hem de vektörsel iŖlemlerle gerekleŖtirilir. $q_1 = [s_1, v_1]$ ve $q_2 = [s_2, v_2]$ iki quaternion olsun. Bu iki quaternionun çarpma iŖlemi aŖaėıdaki gibi ifade edilir.

$$q_1 * q_2 = [s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_2 \times v_1] \quad (1.11)$$

Denklemdede (\cdot) , (\times) ve $(*)$ işaretleri sırasıyla noktasal çarpım, çapraz çarpım ve quaternion çarpımını göstermektedir. Hem konum hem de dönme ifadesini içeren iki quaternion/vektör çiftinin çarpımı ise aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$Q_1 Q_2 = (q_1, p_1) * (q_2, p_2) = q_1 * q_2, q_1 * p_2 * q_1^{-1} + p_1 \quad (1.12)$$

Denklemdede,

$$q_1 * p_2 * q_1^{-1} = p_2 + 2s_1(v_1 \times p_2) + 2v_1 \times (v_1 \times p_2)$$

Bir quaternion'un tersi sadece vektör kısmının ters işaretinin alınmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q^{-1} = [s, v] = [s, -v] \quad (1.13)$$

Bir quaternion/vektör çiftinin tersi ise

$$Q^{-1} = (q^{-1}, -q^{-1} * p * q) \quad (1.14)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemdede,

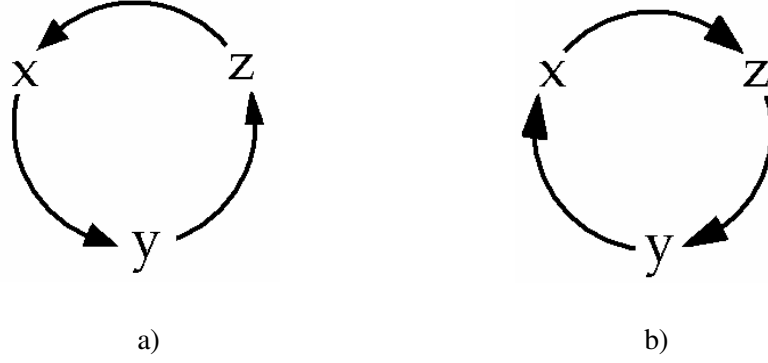
$$-q^{-1} * p * q = -p + [-2s(v \times (-p)) + 2v \times (v \times (-p))].$$

1.3.2.2. Quaternion yöntemiyle ileri kinematik

Bir robot manipülatörü, ana çerçevesinden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya dönel eklemlerle tutturulmuş seri bağlardan oluşur. Quaternion yönteminde ana çerçeveye bir referans koordinat sistemi yerleştirilir ve robot kinematiğinin çıkarılmasında bu koordinat sistemi kullanılır. Böylece her bir eklem için gerekli quaternion ifadeleri kolayca elde edilir. Konum vektörleri, eklem hareketinin bir sonraki bağı nasıl etkileyeceği hesaplanarak yazılır.

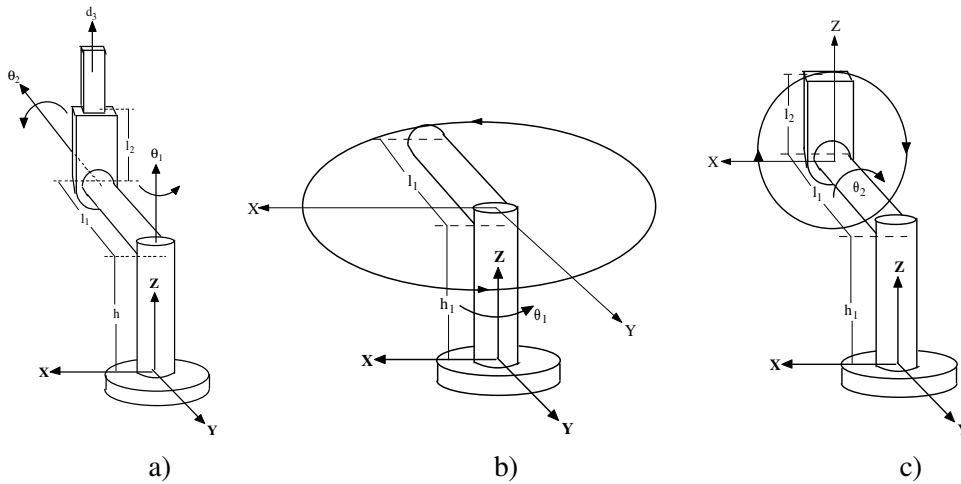
Robot manipülatörlerinde dönme hareketi x,y,z veya $-x,-y,-z$ eksenlerinde gerçekleştirilmektedir. Eklem, referans koordinat sisteminin z ekseninde bulunuyorsa bir

sonraki bağ xy düzleminde hareket eder. Diğer bir eklem referans koordinat sisteminin $-x$ ekseninde ise bir sonraki bağın hareketi zy düzleminde gerçekleşir. Şekil 1.1’de bu durum açık bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 1.1: a) Bağın bulunduğu eksene göre diğer eksenlerin hareket yönü b) Bağın bulunduğu eksen ters yöndeysse, diğer eksenlerin hareket yönü

Bir robot manipölatorünün her bir eklemindeki dönmeyi temsil eden quaternion ifadelerinin daha iyi anlaşılması için Şekil 1.2.a’daki robot manipölatorü göz önünde bulundurulsun. Robot manipölatorünün ana çerçevesine yerleştirilen referans koordinat sistemine göre ilk bağın dönme yönü z eksenine olduğundan birinci bağ için quaternion ifadesi,



Şekil 1.2: a) 3 DOF seri robot manipulator, b) l_1 bağının xy düzlemindeki hareketi, c) l_2 bağının xz düzlemindeki hareketi.

$$q_1 = [\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >] \quad (1.15)$$

olur. İkinci bağı hareket yönü, referans koordinat sistemindeki y eksenine zıttır. Bu durumda ikinci bağ için dönmeyi temsil eden quaternion ifadesi

$$q_2 = [\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, -1, 0 >] \quad (1.16)$$

şeklinde gerçekleşir. Üçüncü bağ prizmatik olduğundan kullanılacak ifade birim quaterniona eşit olur.

$$q_3 = [1, < 0, 0, 0 >] \quad (1.17)$$

Şekil 1.2.a'daki robot manipülatörünün eklem hareketlerinden dolayı meydana gelen yer değiştirmeyi temsil eden ifadeleri bulmak için sırasıyla Şekil 1.2.b ve Şekil 1.2.c göz önünde bulundursun. Şekil 1.2.b'de görüldüğü gibi birinci eklem z ekseninde θ_1 açısı kadar döndürüldüğünde l_1 bağının uç noktası (xy) düzleminde bir çember çizer. Bu çemberin denklemi sabit olan h_1 uzunluğu da eklendiğinde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle p_x, p_y, p_z \rangle \\ &= \langle l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1, h_1 \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

Şekil 1.2.c'de görüldüğü gibi ikinci eklem θ_2 kadar döndürülürse, l_2 bağının uç noktası referans koordinat sisteminin (xz) düzleminde bir çember çizer. Bu durumda çember denklemi,

$$\begin{aligned} p_2 &= \langle p_x, p_y, p_z \rangle \\ &= \langle -l_2 \sin \theta_2, 0, l_2 \cos \theta_2 \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

olur. Üçüncü eklem prizmatik olduğundan bağın hareketi sadece referans koordinat sisteminin z ekseninde gerçekleşir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} p_3 &= \langle p_x, p_y, p_z \rangle \\ &= \langle 0, 0, d_3 \rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3.2.3. Quaternion yöntemiyle ters kinematik

Bir robot manipülatörünün ters kinematiğini bulmak için, uç işlevcisinin ana koordinat çerçevesine göre konum ve yöneliminin bilinmesi gereklidir. Uç işlevcisinin bilinen konum ve yönelimini ifade etmek için

$$[R_w, T_w] = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle) \quad (1.21)$$

kullanılsın. Denklemden $w, \langle a, b, c \rangle$ ve $\langle p_x, p_y, p_z \rangle$ sırasıyla bilinen yönelim ve konumu göstermektedir. $Q_i (1 \leq i \leq 6)$ her eklem için $Q_1 = (q_1, p_1)$, $Q_2 = (q_2, p_2) \dots Q_6 = (q_6, p_6)$ şeklinde quaternion vektör çiftlerini ifade etsin. Altı eklemlilik bir robot manipülatörünün ters kinematik çözümünü elde etmek için aşağıda görüldüğü gibi M_i ve N_{j+1} şeklinde iki ifade tanımlansın.

$$M_i = Q_i Q_{i+1} \dots Q_6 \quad (1.22)$$

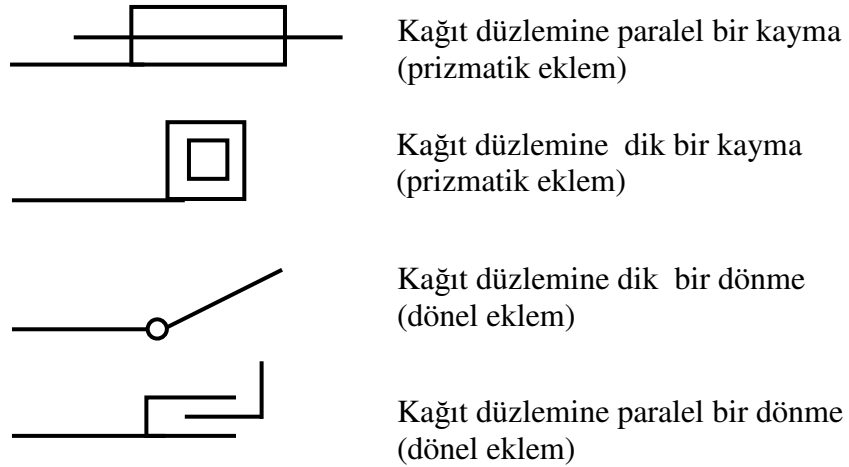
$$N_{j+1} = Q_j^{-1} N_j \quad (1.23)$$

Denklemden, $1 \leq i \leq 6$ ve $1 \leq j \leq 5$ 'dir. Denklem 1.22'de $M_6 = Q_6$ ve Denklem 1.23'te $N_1 = [R_w, T_w]$ olduğu unutulmamalıdır. Yukarıda elde edilen M_i ve N_{j+1} ifadeleri $M_1 = N_2, M_2 = N_2 \dots M_6 = N_6$ şeklinde eşitlenerek elde edilen denklemlerden kapalı formda ters kinematik çözümler gerçekleştirilir. Euler bilekli altı serbestlik derecesine sahip robotlarda genellikle ilk üç eklem değişkeni için $M_3 = N_3$, son üç değişken için ise $M_4 = N_4$ kullanılmaktadır.

BÖLÜM 2. İKİLİ HARF KODUNUN KULLANILMASIYLA YAPILAN SINIFLANDIRMA

2.1. Giriş

Bu bölümde, Huang ve Milenkovic tarafından ikili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırmaya göre elde edilen 16 adet robotun düzenleşimi ve katı gövde yapısı üzerinde durulacaktır. Huang ve Milenkovic robot türlerini tanımlamak için iki harften oluşan bir kod kullanmıştır. İlk harf, birinci eklemin özelliğini ve ikinci ekleme göre nasıl döndüğünü açıklamaktadır (Huang ve Milenkovic, 1983). İkinci harf ise, üçüncü eklemi ve ikinci eklem ile üçüncü eklem arasındaki ilişkiyi tanımlar. Tanımlanan bu mekanizma Şekil 2.1’de verilmiştir. Kullanılan harfler ve anlamları da şu şekildedir:



Şekil 2.1: Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma.

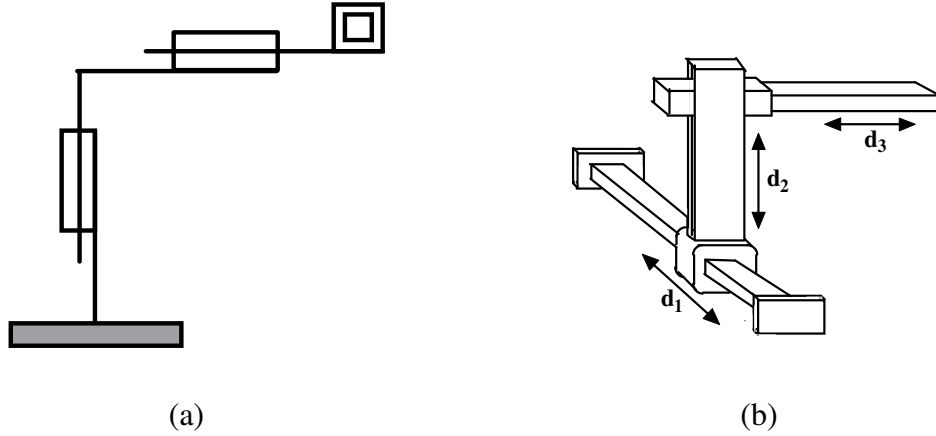
S : Kayma,

C : Kayma eksenine dik dönme,

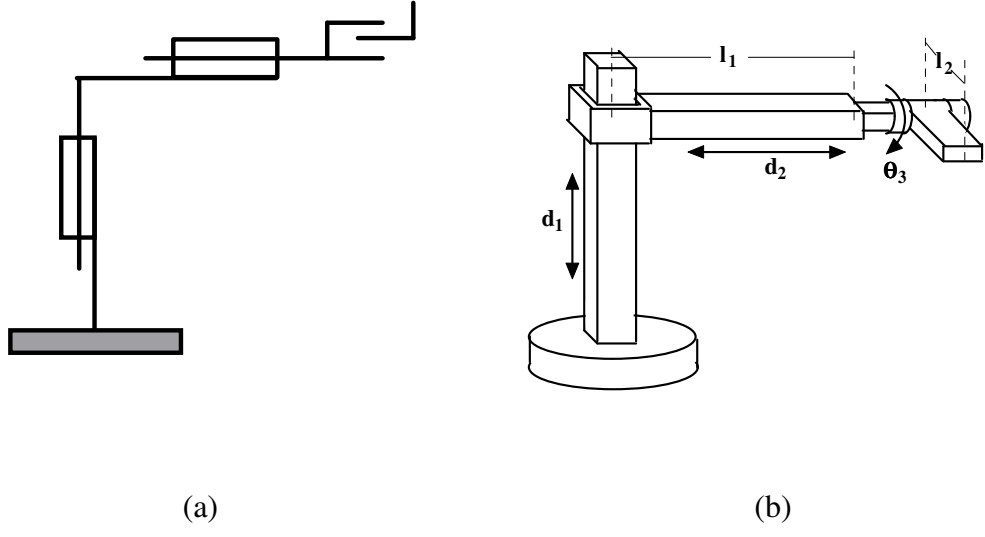
N : Dönme eksenine dik dönme,

R : Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme.

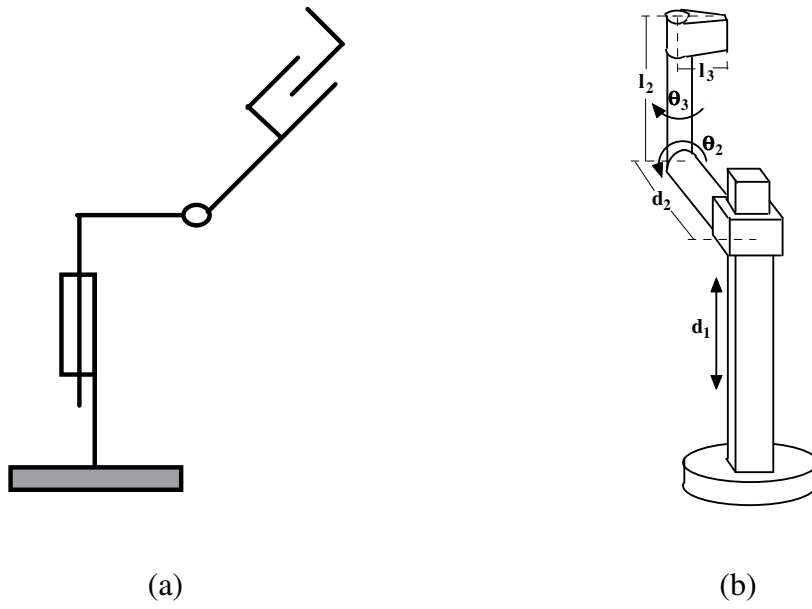
Huang ve Milenkoviç robot bağları için 16 adet 2 harf kombinasyonu kullanmıştır. Fakat bunların tamamı robot bağları için kullanışlı (useful) ve farklı (distinct) değildir. Kullanışlı bir bağ, 3 boyutlu uzayda geniş çaplı hareket (gross motion) yapabilme yeteneğine sahip olmalıdır. Farklılık ise her bir bağın kinematik olarak diğer kategoriler arasında tek olmasıdır. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 olası kod CC, CN, CR, CS, NC, NN, NR, NS, RC, RN, RR, RS, SC, SN, SR ve SS şeklinde elde edilir (Bingül, 2000). Ayrıca, ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 adet düzenleşim ve bu düzenleşimlere denk düşen robot manipülatörlerinin katı gövde yapıları aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Şekillerde robotların katı gövde yapıları üzerinde görülen d_1 , d_2 ve d_3 sırasıyla prizmatik θ_1 , θ_2 ve θ_3 ise dönel eklem değişkenlerini göstermektedir. Ayrıca P prizmatik, R ise dönel eklemi ifade etmektedir.



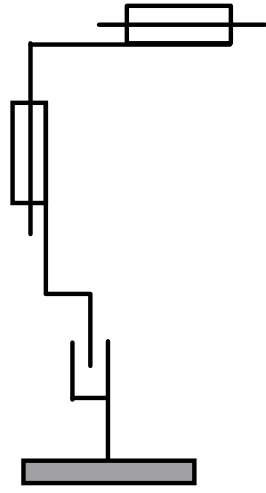
Şekil 2.2: SS (PPP) prizmatik robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



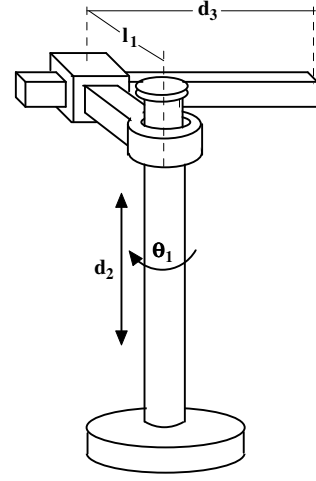
Şekil 2.3: SC (PPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.4: SN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

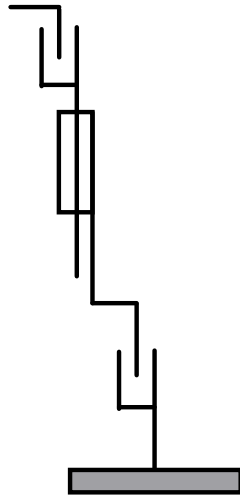


(a)

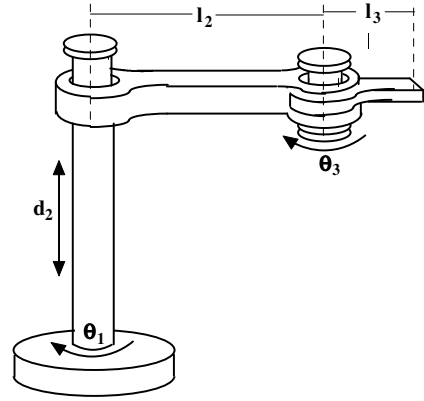


(b)

Şekil 2.5: CS (RPP) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

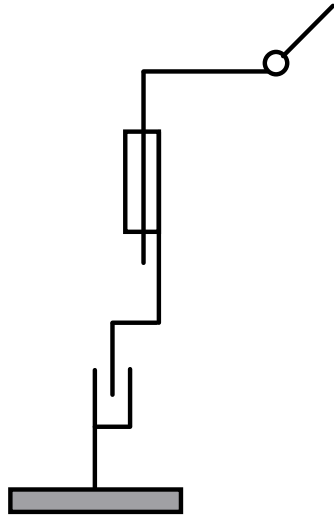


(a)

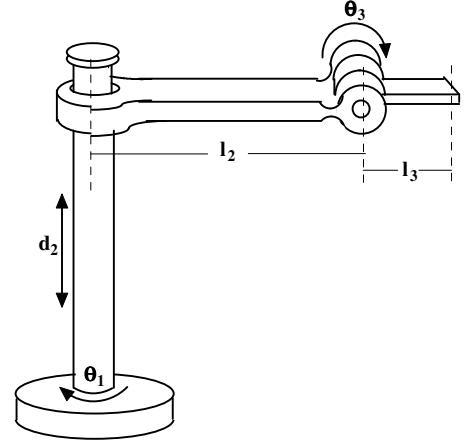


(b)

Şekil 2.6: CC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

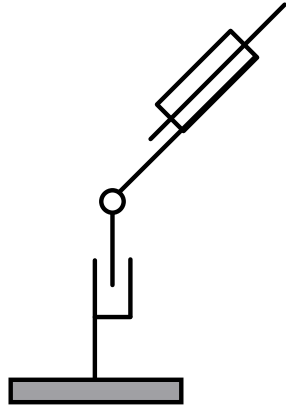


(a)

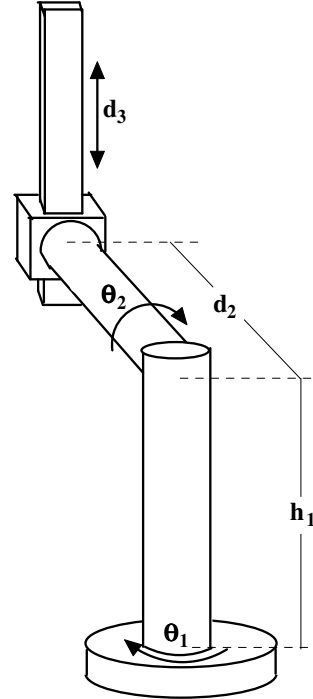


(b)

Şekil 2.7: CR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

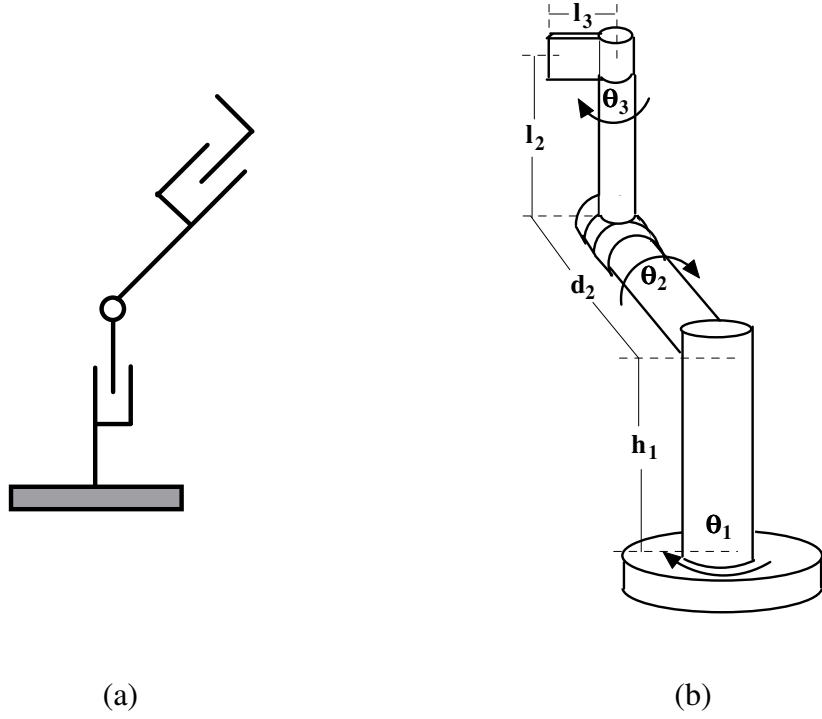


(a)

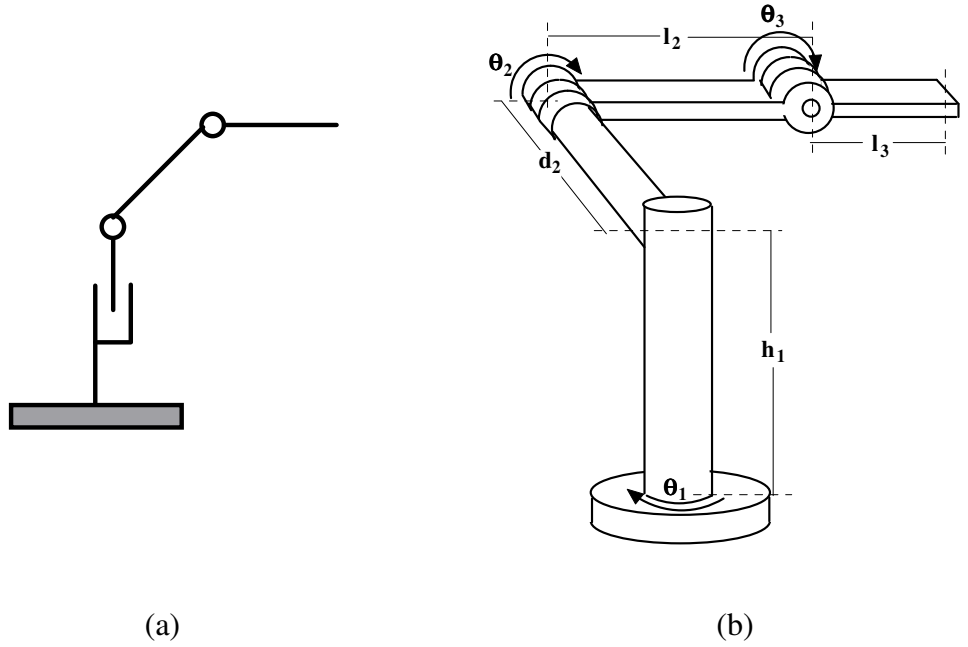


(b)

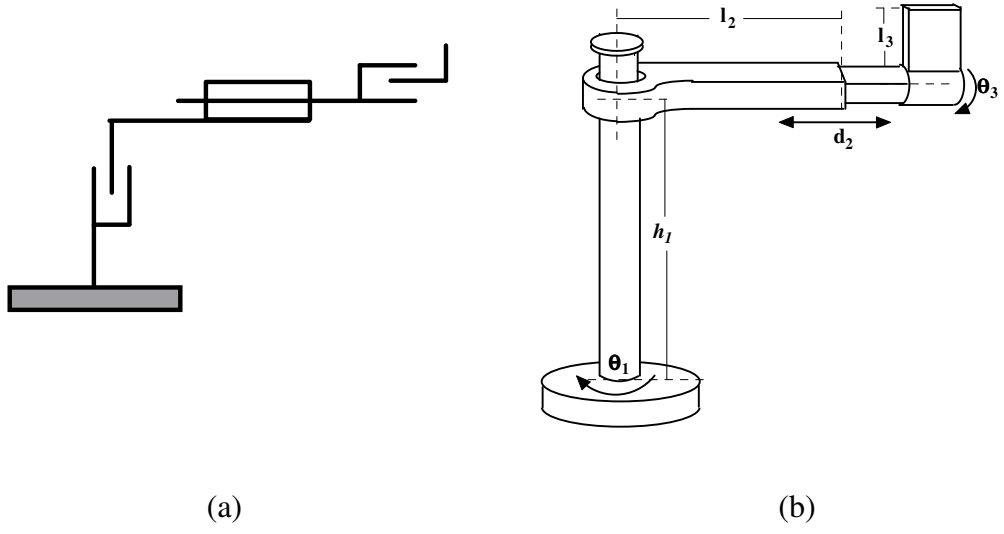
Şekil 2.8: NS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



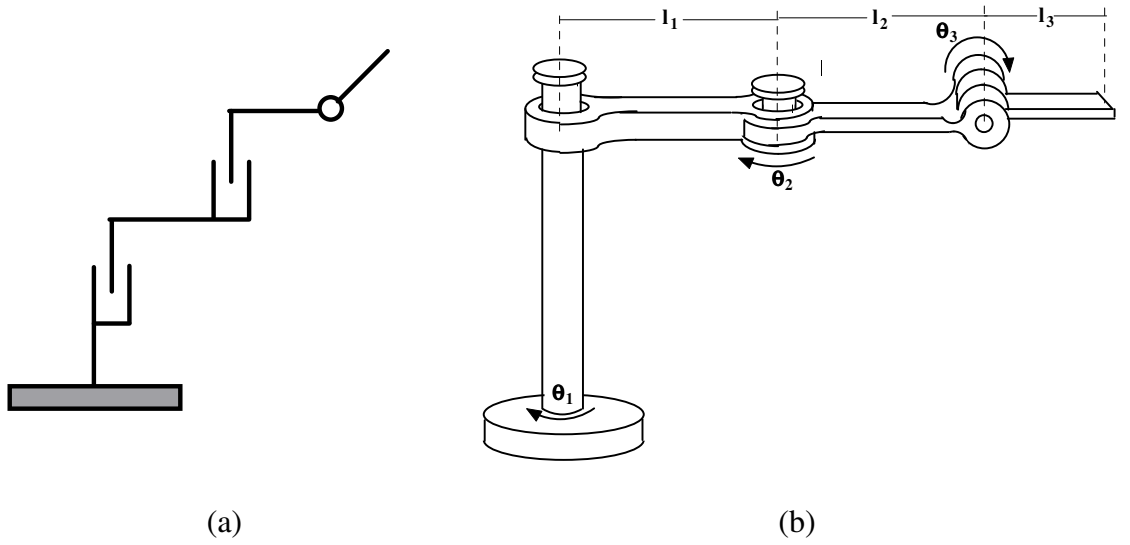
Şekil 2.9: NN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



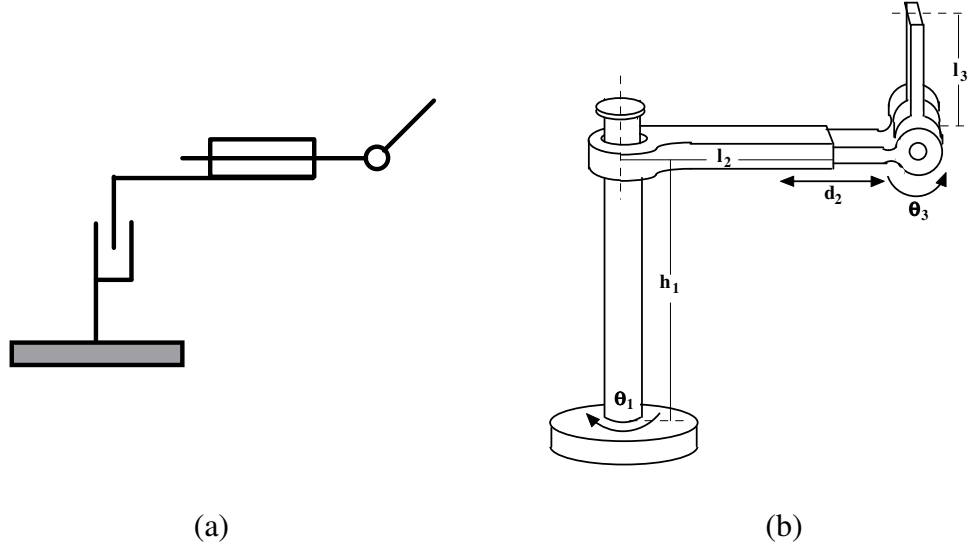
Şekil 2.10: NR (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.11: RC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



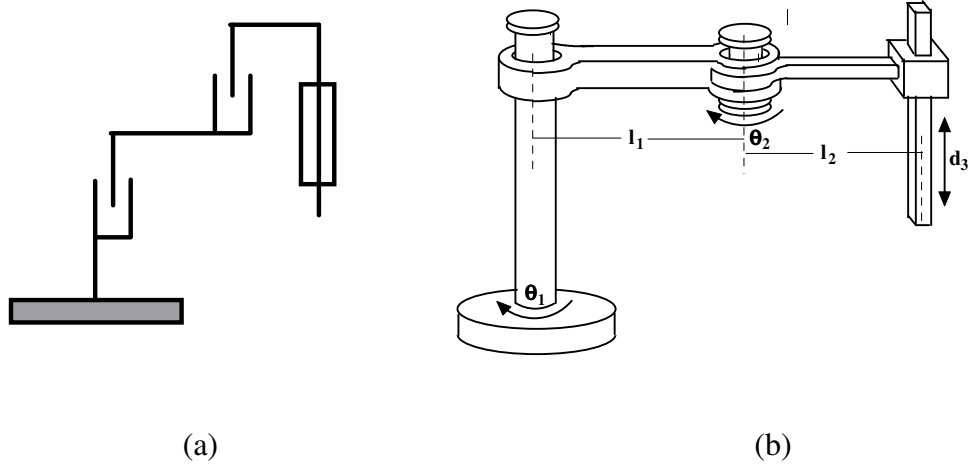
Şekil 2.12: RN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



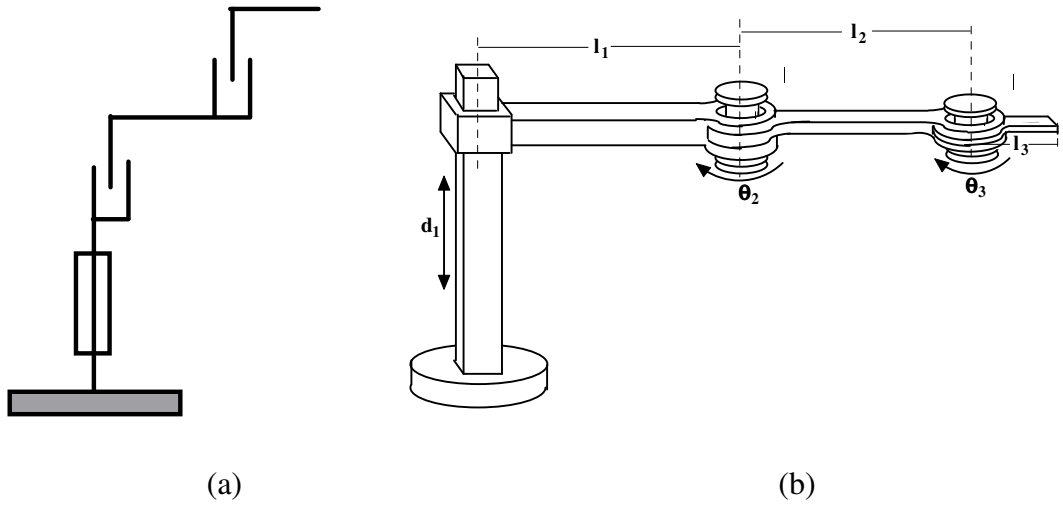
Şekil 2.13: RR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

Huang ve Milenkovic yukarıdaki kodlardan CN, NC, RS, ve SR'yi kullanışlı ve farklı bulmamıştır. Dolayısı ile bu robot türlerini sınıflandırma dışı bırakmışlardır. Buna rağmen RS kodu endüstride çok popüler olan “Skara” robotunu temsil eder. SR kodu da kullanışlı bir düzenleşimi temsil eder. Bu düzenleşimlerin her ikisi de üç boyutlu hareket etmesine rağmen düzlemsel robotlar (planar robots) olarak kabul edilirler. CN ve RC ise herhangi bir robot düzenleşimi olarak kabul edilmez.

Huang ve Milenkovic Şekil 2.14 ve Şekil 2.15’de verilen RS ve SR robotlarını kullanışlı ve farklı bulmamasına rağmen, bu robotlar silindirik çalışma alanları nedeniyle sık tercih edilirler. Huang ve Milenkovic’in bunları farklı ve kullanışlı bulmayışının nedeni, CS robotu ile aynı alanı taramalarından kaynaklanmaktadır. Sebep ne olursa olsun bunlar kullanışlı robotlar kategorisinde incelenecektir.

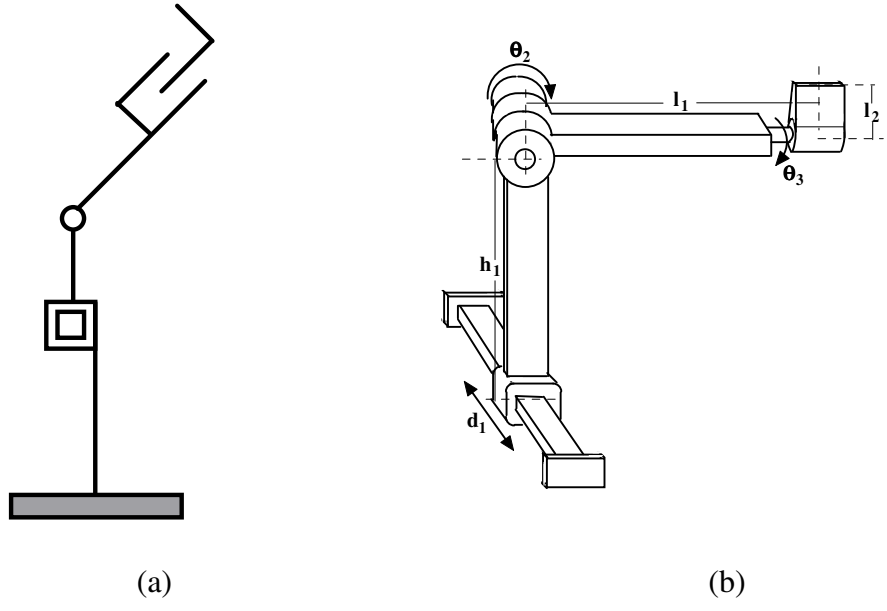


Şekil 2.14: RS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

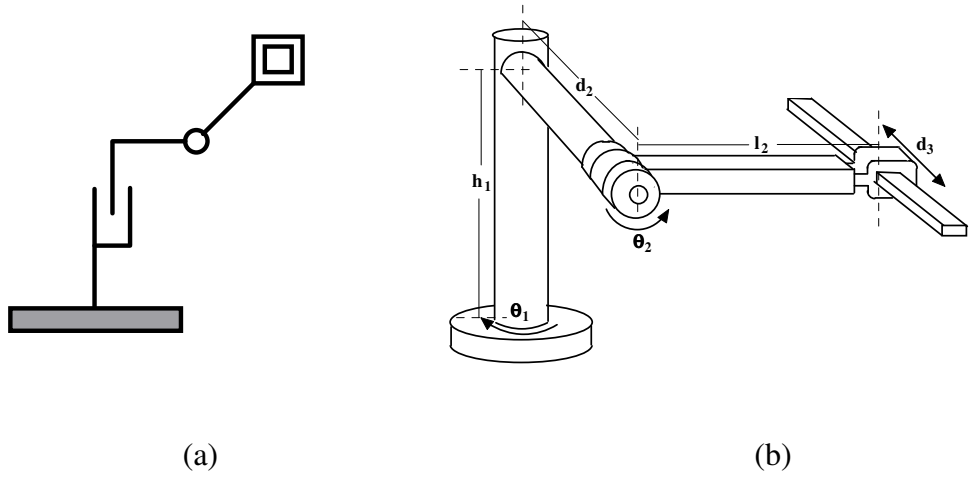


Şekil 2.15: SR (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

Şekil 2.16 ve Şekil 2.17'de gösterilen CN ve NC kodlarının tanımladıkları robot düzenleşimleri kullanışsızdırlar.



Şekil 2.16: CN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.17: NC (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

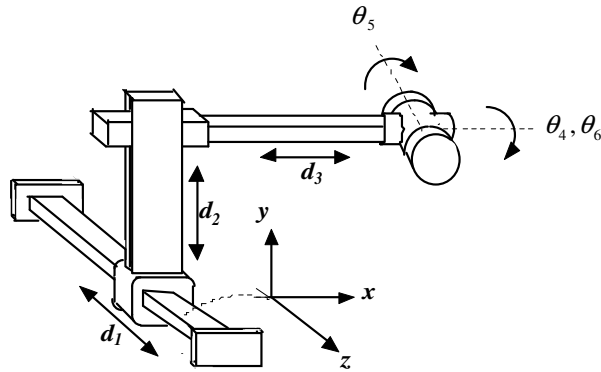
BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE İLERİ KİNEMATİĞİNİN ÇIKARILMASI

3.1. Giriş

Bu bölümde, onaltı adet temel endüstriyel robota Euler bileği eklenip quaternion yöntemi kullanılarak ileri kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir.

3.1.1. SS robotunun ileri kinematiği

SS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.1’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1: SS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.1’deki verilerden yararlanarak SS robotunun her bir ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([1,0] \langle 0,0,d_1 \rangle) \quad (3.1)$$

$$Q_2 = ([1,0]), \langle 0,d_2,0 \rangle \quad (3.2)$$

$$Q_3 = ([1,0], \langle d_3,0,0 \rangle) \quad (3.3)$$

Tablo 3.1: SS robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|------------------|-------------|
| 1 | 0 | $T(z, d_1)$ |
| 2 | 0 | $T(y, d_2)$ |
| 3 | 0 | $T(x, d_3)$ |
| 4 | $R(x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(x, \theta_6)$ | 0 |

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.4)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.5)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.6)$$

Altı serbestlik derecesine sahip SS robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < d_3, d_2, d_3 >) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Denklemdede,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6},$$

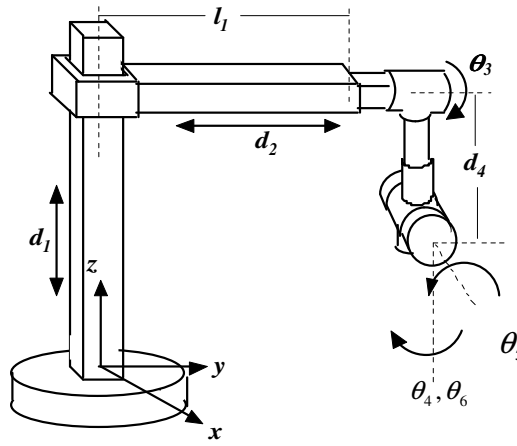
$$v_{i_{16}} = \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}, \quad v_{j_{16}} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}, \quad v_{k_{16}} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

Denklemlerin yazımında kolaylık sağlaması için trigonometrik ifadelerde bazı kısaltmalar yapılmıştır. Bunlar:

$$\begin{aligned}\cos \bar{\theta}_{4+6} &= \cos(\bar{\theta}_4 + \bar{\theta}_6), & \sin \bar{\theta}_{4+6} &= \sin(\bar{\theta}_4 + \bar{\theta}_6), & \cos \bar{\theta}_{4-6} &= \cos(\bar{\theta}_4 - \bar{\theta}_6) \\ \sin \bar{\theta}_{4-6} &= \sin(\bar{\theta}_4 - \bar{\theta}_6), & \bar{\theta}_{4+6} &= (\theta_4 + \theta_6)/2\end{aligned}$$

3.1.2. SC robotunun ileri kinematiği

SC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.2’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.2: SC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.2: SC robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|------------------|------------------------------|
| 1 | 0 | $T(z, d_1)$ |
| 2 | 0 | $T(y, d_2)$ |
| 3 | $R(y, \theta_3)$ | $T(x, -d_4s_3)T(z, -d_4c_3)$ |
| 4 | $R(x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(x, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.2’deki verilerden yararlanarak SC robotunun her bir ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([1,0], \langle 0,0,d_1 \rangle) \quad (3.8)$$

$$Q_2 = ([1,0], \langle 0,l_1 + d_2,0 \rangle) \quad (3.9)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0,1,0 \rangle], \langle -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 \rangle) \quad (3.10)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (3.11)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 1,0,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (3.12)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (3.13)$$

Altı serbestlik derecesine sahip SC robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, \langle v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} \rangle], \langle -d_4 \sin \theta_3, d_2 + l_1, d_1 - d_4 \cos \theta_3 \rangle) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Denklemden,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6},$$

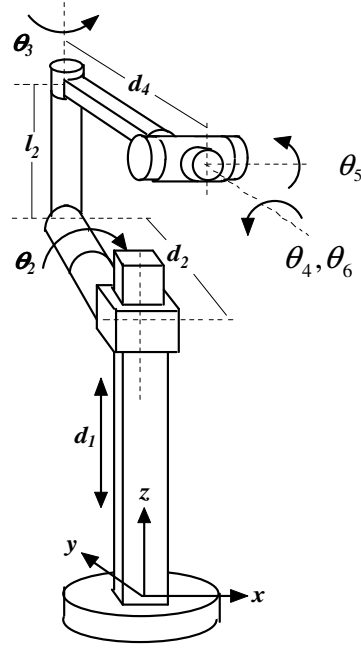
$$v_{i_{16}} = \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} - \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6},$$

$$v_{j_{16}} = \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} - \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6},$$

$$v_{k_{16}} = \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

3.1.3. SN robotunun ileri kinematiği

SN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.3'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.3: SN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.3: SN robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | 0 | $T(z, d_1)$ |
| 2 | $R(y, \theta_2)$ | $T(x, l_2 s_2) T(y, d_2) T(z, l_2 c_2)$ |
| 3 | $R(z, \theta_3)$ | $T(x, d_4 s_3) T(y, -d_4 c_3)$ |
| 4 | $R(-x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-x, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.3'deki verilerden yararlanarak SN robotunun her eklemine konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternyon/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([1, 0], \langle 0, 0, d_1 \rangle) \quad (3.15)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle l_2 \sin \theta_2, d_2, l_2 \cos \theta_2 \rangle) \quad (3.16)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, 0, 1 \rangle], \langle d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 \rangle) \quad (3.17)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.18)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < -1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.19)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.20)$$

Altı serbestlik derecesine sahip SN robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{x_{16}}, p_{y_{16}}, p_{z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Denklemden,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4-6} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4-6}$$

$$v_{i_{16}} = -\sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4-6} - \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4+6}$$

$$v_{j_{16}} = \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4-6} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4+6}$$

$$v_{k_{16}} = \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4+6} + \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4+6}$$

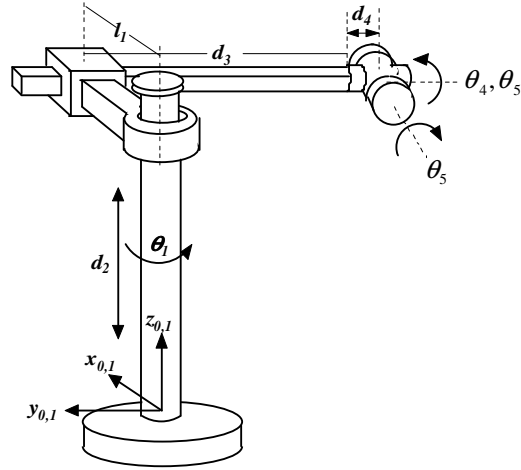
$$p_{16} = < d_4 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + l_2 \sin \theta_2, d_2 - d_4 \cos \theta_3, d_1 + l_2 \cos \theta_2 - d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 >$$

$$\bar{\theta}_{i+j+k} = \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j + \bar{\theta}_k$$

3.1.4. CS robotunun ileri kinematığı

CS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.4'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.4'de verilmiştir.

Tablo 3.4'deki verilerden yararlanarak CS robotunun her eklemının konum ve yönelimi temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.4: CS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.4: CS robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|-------------------------------|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_1 c_1) T(y, l_1 s_1)$ |
| 2 | 0 | $T(z, d_2)$ |
| 3 | 0 | $T(-y, -d_3)$ |
| 4 | $R(-x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-x, \theta_6)$ | 0 |

$$Q_1 = \left(\left[\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 > \right], < l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1, 0 > \right) \quad (3.22)$$

$$Q_2 = \left([1, 0], < 0, 0, d_2 > \right) \quad (3.23)$$

$$Q_3 = \left([1, 0], < 0, -d_3, 0 > \right) \quad (3.24)$$

$$Q_4 = \left(\left[\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 > \right], < 0, 0, 0 > \right) \quad (3.25)$$

$$Q_5 = \left(\left[\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 1, 0, 0 > \right], < 0, 0, 0 > \right) \quad (3.26)$$

$$Q_6 = \left(\left[\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 > \right], < 0, 0, 0 > \right) \quad (3.27)$$

Altı serbestlik derecesine sahip CS robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_{16} = Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6$$

$$= ([s_{16}, \langle v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} \rangle], \langle l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1, l_1 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1, d_2 \rangle) \quad (3.28)$$

Denklemden,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}$$

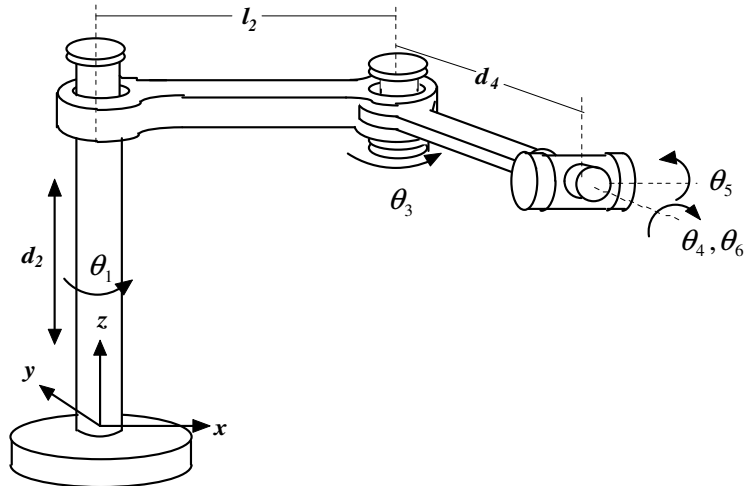
$$v_{i_{16}} = \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$v_{j_{16}} = \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} - \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$v_{k_{16}} = \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}$$

3.1.5. CC robotunun ileri kinematiği

CC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.5'te ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.5: CC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.5: CC robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_1 \cos \theta_1) T(y, l_1 \sin \theta_1)$ |
| 2 | 0 | $T(z, d_2)$ |
| 3 | $R(z, \theta_3)$ | $T(x, d_4 s_3) T(y, -d_4 c_3)$ |
| 4 | $R(-x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-x, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.5'teki verilerden yararlanarak CC robotunun her eklemine konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1, 0 >) \quad (3.29)$$

$$Q_2 = ([1, 0], < 0, 0, d_2 >) \quad (3.30)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 0, 1 >], < d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 >) \quad (3.31)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.32)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.33)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >)$$

Altı serbestlik derecesine sahip CC robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < d_4 \sin \theta_{1+3} + l_2 \cos \theta_1, l_2 \sin \theta_1 - d_4 \cos \theta_{1+3}, d_2 >) \quad (3.34) \end{aligned}$$

Denklemden,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}$$

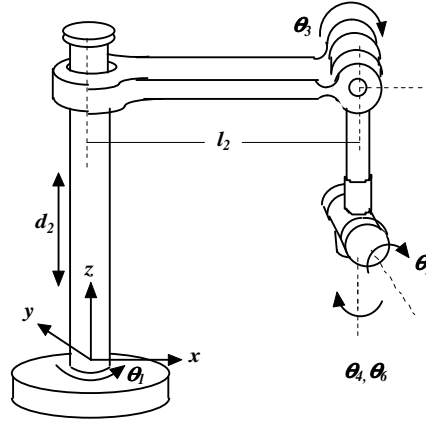
$$v_{i_{16}} = \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$v_{j_{16}} = \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} - \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$v_{k_{16}} = \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6} + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}$$

3.1.6. CR robotunun ileri kinematığı

CR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.6'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6: CR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.6: CR robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_1) T(y, l_2 \sin \theta_1)$ |
| 2 | 0 | $T(z, d_2)$ |
| 3 | $R(z, \theta_3)$ | $T(x, -d_4 \sin \theta_3) T(y, -d_4 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(z, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-x, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.6'daki verilerden yararlanarak CR robotunun her eklemine konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0,0,1 >], < l_2 \cos \theta_1, l_2 \sin \theta_1, 0 >) \quad (3.35)$$

$$Q_2 = ([1, 0], < 0, 0, d_2 >) \quad (3.36)$$

$$Q_3 = ([\bar{c}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0,0,1 >], < -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 >) \quad (3.37)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0,0,-1 >], < 0,0,0 >) \quad (3.38)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0,1,0 >], < 0,0,0 >) \quad (3.39)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0,0,-1 >], < 0,0,0 >) \quad (3.40)$$

Altı serbestlik derecesine sahip CR robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{x_{16}}, p_{y_{16}}, p_{z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4}) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= -\sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4}) + \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4}) \end{aligned}$$

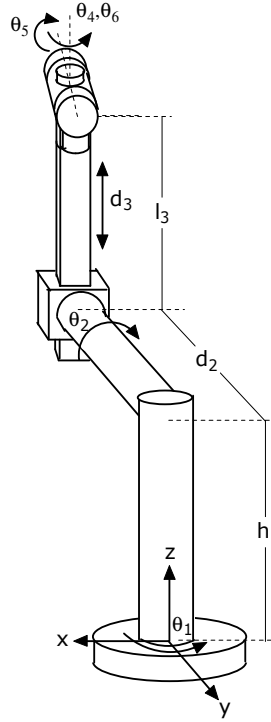
$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4}) \end{aligned}$$

$$p_{16} = < (l_2 - d_4 \sin \theta_3) \cos \theta_1, (l_2 - d_4 \sin \theta_3) \sin \theta_1, d_1 - d_4 \cos \theta_3 >$$

3.1.7. NS robotunun ileri kinematığı

NS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.7’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.7’de verilmiştir.



Şekil 3.7: NS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.7: NS robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, d_2 \sin \theta_1) T(-y, -d_2 \cos \theta_1)$ |
| 2 | $R(-y, \theta_2)$ | $T(x, -l_2 \sin \theta_2) T(z, l_2 \cos \theta_2)$ |
| 3 | 0 | $T(z, d_3)$ |
| 4 | $R(z, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(z, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.7'deki verilerden yararlanarak NS robotunun her eklemının konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < d_2 \sin \theta_1, -d_2 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.42)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \bar{s}_2 < 0, -1, 0 >], < -d_3 \sin \theta_2, 0, d_3 \cos \theta_2 >) \quad (3.43)$$

$$Q_3 = ([1, 0], < 0, 0, 0 >) \quad (3.44)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \theta_4 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.45)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.46)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.47)$$

Altı serbestlik derecesine sahip NS robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, p_{Z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= -\cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+4} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1-4}) + \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+4} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1-4}) \end{aligned}$$

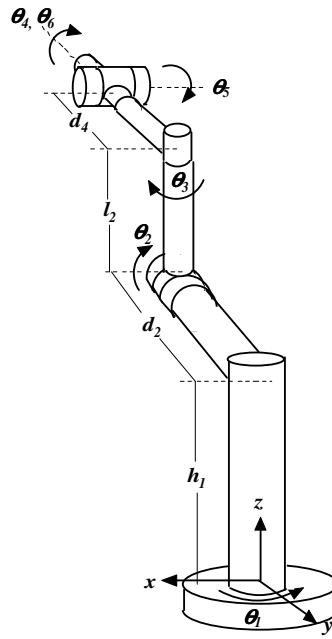
$$p_{X_{16}} = d_2 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$p_{Y_{16}} = -d_2 \cos \theta_1 - d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$p_{Z_{16}} = h_1 + d_3 \cos \theta_2$$

3.1.8. NN robotunun ileri kinematığı

NN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.8’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3.8: NN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.8: NN robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|--|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_1 \sin \theta_1) T(y, -l_1 c_1)$ |
| 2 | $R(-y, \theta_2)$ | $T(x, -l_2 \sin \theta_2) T(z, l_2 \cos \theta_2)$ |
| 3 | $R(z, \theta_3)$ | $T(x, d_4 \sin \theta_3) T(y, -d_4 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-y, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-x, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-y, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.8'deki verilerden yararlanarak NN robotunun her eklemının konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.49)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, -1, 0 >], < -l_2 \sin \theta_2, 0, l_2 \cos \theta_2 >) \quad (3.50)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 0, 1 >], < d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 >) \quad (3.51)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.52)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < -1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.53)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.54)$$

Altı serbestlik derecesine sahip NN robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, p_{Z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) + \\ &\quad \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= -\cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) - \\ &\quad \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) - \\ &\quad \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3}) \end{aligned}$$

$$v_{j_{16}} = -\cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) + \\ \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3}) - \\ \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3})) + \\ \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})$$

$$v_{k_{16}} = \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) - \\ \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3}) - \\ \cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1+3} + \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{1-3})) - \\ \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1+3} - \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{1-3})$$

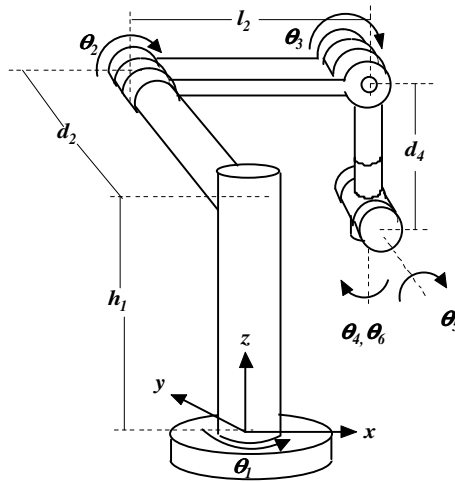
$$p_{x_{16}} = d_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3) - l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 \sin \theta_1$$

$$p_{y_{16}} = d_4 (\sin \theta_1 \cos \bar{\theta}_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - l_1 \cos \theta_1$$

$$p_{z_{16}} = d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + l_2 \cos \theta_2 + h_1$$

3.1.9. NR robotunun ileri kinematiği

NR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.9'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.9: NR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.9: NR robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, -d_2 \sin \theta_1) T(y, d_2 \cos \theta_1)$ |
| 2 | $R(y, \theta_2)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_2) T(z, -l_2 \sin \theta_2)$ |
| 3 | $R(y, \theta_3)$ | $T(x, -d_4 \sin \theta_3) T(z, -d_4 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-z, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-z, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.9'daki verilerden yararlanarak NR robotunun her eklemine konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < -d_2 \sin \theta_1, d_2 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.56)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 1, 0 >], < l_2 \cos \theta_2, 0, -l_2 \sin \theta_2 >) \quad (3.57)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 1, 0 >], < -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 >) \quad (3.58)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.59)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.60)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.61)$$

Altı serbestlik derecesine sahip NR robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_{16} = Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6$$

$$= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{x_{16}}, p_{y_{16}}, p_{z_{16}} >) \quad (3.62)$$

Denklemdede,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} - \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3}))$$

$$v_{i_{16}} = \cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) - \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) + \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3}))$$

$$v_{j_{16}} = \cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) + \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3})) + \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) - \cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3}))$$

$$v_{k_{16}} = -\cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) + \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_{2+3})) - \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_{2+3}))$$

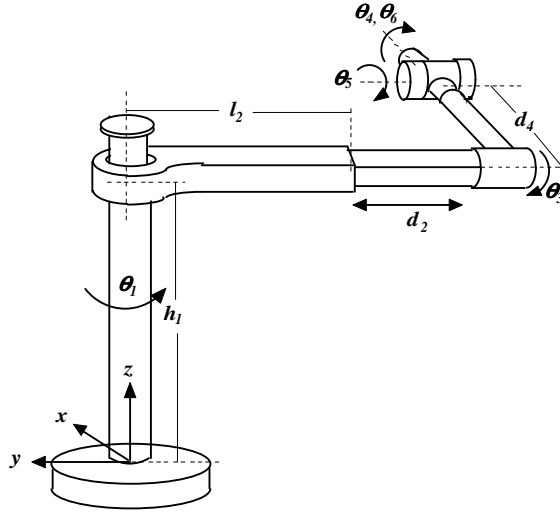
$$p_{X_{16}} = -d_4 \cos \theta_1 \sin \theta_{2+3} + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - d_2 \sin \theta_1$$

$$p_{Y_{16}} = -d_4 \sin \theta_1 \sin \theta_{2+3} + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + d_2 \cos \theta_1$$

$$p_{Z_{16}} = -d_4 \cos \theta_{2+3} - l_2 \sin \theta_2 + h_1$$

3.1.10. RC robotunun ileri kinematiği

RC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.10'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.10: RC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.10: RC robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|--|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_2 \sin \theta_1) T(y, -l_2 \cos \theta_1)$ |
| 2 | 0 | $T(-y, d_2)$ |
| 3 | $R(-y, \theta_3)$ | $T(x, d_4 \cos \theta_3) T(z, d_4 \sin \theta_3)$ |
| 4 | $R(x, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(x, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.10'daki verilerden yararlanarak RC robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_2 \sin \theta_1, -l_2 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.63)$$

$$Q_2 = ([1, 0], < 0, -d_2, 0 >) \quad (3.64)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, -1, 0 >], < d_4 \cos \theta_3, 0, d_4 \sin \theta_3 >) \quad (3.65)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.66)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.67)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.68)$$

Altı serbestlik derecesine sahip RC robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{x_{16}}, p_{y_{16}}, p_{z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4) - \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

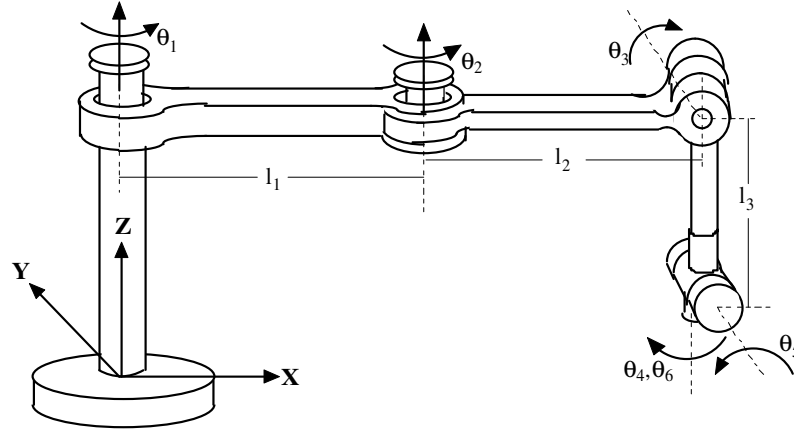
$$p_{x_{16}} = d_4 \cos \theta_3 \cos \theta_1 + (l_2 + d_2) \sin \theta_1$$

$$p_{y_{16}} = d_4 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - (l_2 + d_2) \cos \theta_1$$

$$p_{z_{16}} = d_4 \sin \theta_3 + h_1$$

3.1.11. RN robotunun ileri kinematığı

RN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.11’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.11’de verilmiştir.



Şekil 3.11: RN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.11’deki verilerden yararlanarak RN robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1, h_1 >) \quad (3.70)$$

Tablo 3.11: RN robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_1 \cos \theta_1) T(y, l_1 \sin \theta_1)$ |
| 2 | $R(z, \theta_2)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_2) T(y, l_2 \sin \theta_2)$ |
| 3 | $R(y, \theta_3)$ | $T(x, -l_3 \sin \theta_3) T(z, -l_3 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-z, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-z, \theta_6)$ | 0 |

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 0, 1 >], < l_2 \cos \theta_2, l_2 \sin \theta_2, 0 >) \quad (3.71)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 1, 0 >], < -l_3 \sin \theta_3, 0, -l_3 \cos \theta_3 >) \quad (3.72)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.73)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.74)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.75)$$

Altı serbestlik derecesine sahip RN robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, p_{Z_{16}} >) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2+4}) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2+4}) + \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2+4}) - \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2+4}) \end{aligned}$$

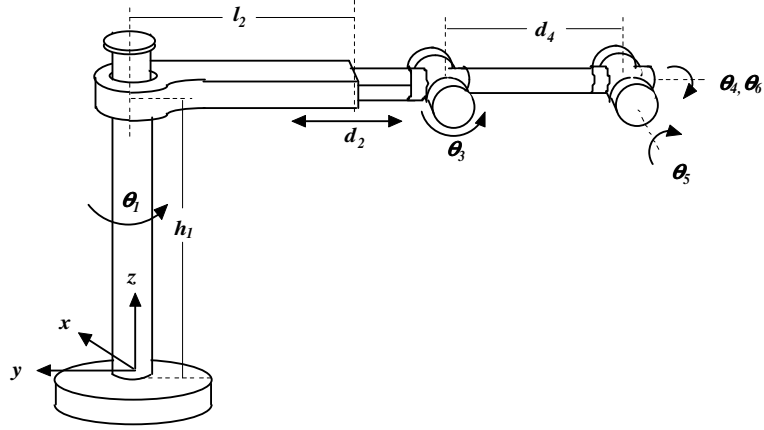
$$p_{X_{16}} = (l_2 - l_3 \sin \theta_3) \cos \theta_{1+2} + l_1 \cos \theta_1$$

$$p_{Y_{16}} = (l_2 - l_3 \sin \theta_3) \sin \theta_{1+2} + l_1 \sin \theta_1$$

$$p_{Z_{16}} = -l_3 \cos \theta_3 + h_1$$

3.1.12. RR robotunun ileri kinematığı

RR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.12’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.12’de verilmiştir.



Şekil 3.12: RR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.12’deki verilerden yararlanarak RR robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_2 \sin \theta_1, -l_2 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.77)$$

Tablo 3.12: RR robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_1) T(-y, l_2 \sin \theta_1)$ |
| 2 | 0 | $T(-y, -d_2)$ |
| 3 | $R(y, \theta_3)$ | $T(y, -d_4 \cos \theta_3) T(z, -d_4 \sin \theta_3)$ |
| 4 | $R(-y, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(x, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-y, \theta_6)$ | 0 |

$$Q_2 = ([1,0], \langle 0, -d_2, 0 \rangle) \quad (3.78)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 1, 0, 0 \rangle], \langle 0, -d_4 \cos \theta_3, d_4 \sin \theta_3 \rangle) \quad (3.79)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, -1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (3.80)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (3.81)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0, -1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (3.82)$$

Altı serbestlik derecesine sahip RR robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, \langle v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} \rangle], \langle p_{x_{16}}, p_{y_{16}}, p_{z_{16}} \rangle) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \cos \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= -\cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 - \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4 - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4)) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_5 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_4 + \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_4) \end{aligned}$$

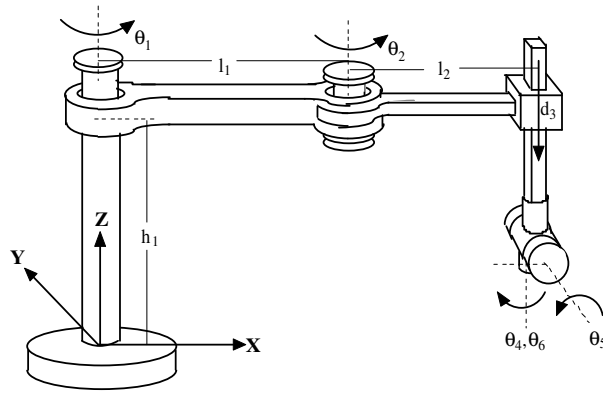
$$p_{x_{16}} = (l_2 + d_2) \sin \theta_1 + d_4 \sin \theta_1 \cos \theta_3$$

$$p_{y_{16}} = -(l_2 + d_2) \cos \theta_1 - d_4 \cos \theta_1 \cos \theta_3$$

$$p_{z_{16}} = h_1 - d_4 \sin \theta_3$$

3.1.13. RS robotunun ileri kinematığı

RS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.13'te ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.13'te verilmiştir.



Şekil 3.13: RS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.13: RS robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, l_1 \cos \theta_1) T(y, l_1 \sin \theta_1)$ |
| 2 | $R(z, \theta_2)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_2) T(y, l_2 \sin \theta_2)$ |
| 3 | 0 | $T(-z, -d_3)$ |
| 4 | $R(-z, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(-y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-z, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.13'deki verilerden yararlanarak RS robotunun her eklemının konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1, h_1 >) \quad (3.84)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 0, 1 >], < l_2 \cos \theta_2, l_2 \sin \theta_2, 0 >) \quad (3.85)$$

$$Q_3 = ([1, 0], < 0, 0, -d_3 >) \quad (3.86)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.87)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.88)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.89)$$

Altı serbestlik derecesine sahip RS robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= [s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < l_2 \cos \theta_{1+2} + l_1 \cos \theta_1, l_2 \sin \theta_{1+2} + l_1 \sin \theta_1, h_1 - d_3 > \end{aligned} \quad (3.90)$$

Denklemden,

$$s_{16} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4-6}$$

$$v_{i_{16}} = \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4+6}$$

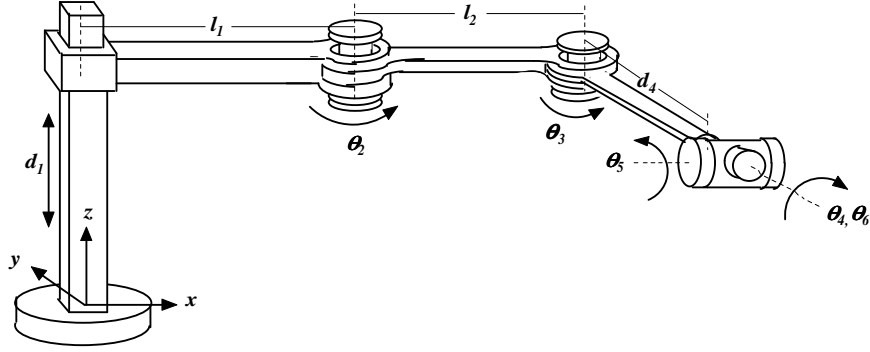
$$v_{j_{16}} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{1+2-4+6}$$

$$v_{k_{16}} = \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{1+2-4-6}$$

$$\bar{\theta}_{i+j+k+l} = \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j + \bar{\theta}_k + \bar{\theta}_l$$

3.1.14. SR robotunun ileri kinematığı

SR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.14’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.14’de verilmiştir.



Şekil 3.14: SR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.14: SR robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|--|
| 1 | 0 | $T(z, d_1)$ |
| 2 | $R(z, \theta_2)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_2)T(y, l_2 \sin \theta_2)$ |
| 3 | $R(z, \theta_3)$ | $T(x, d_4 \sin \theta_3) T(y, -d_4 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-y, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(x, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-y, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.14’deki verilerden yararlanarak SR robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([1,0], \langle l_1, 0, d_1 \rangle) \quad (3.91)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0, 0, 1 \rangle], \langle l_2 \cos \theta_2, l_2 \sin \theta_2, 0 \rangle) \quad (3.92)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 0, 1 >], < d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 >) \quad (3.93)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.94)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.95)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.96)$$

Altı serbestlik derecesine sahip SR robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, d_1 >) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3}) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= -\cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3} - \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3}) \end{aligned}$$

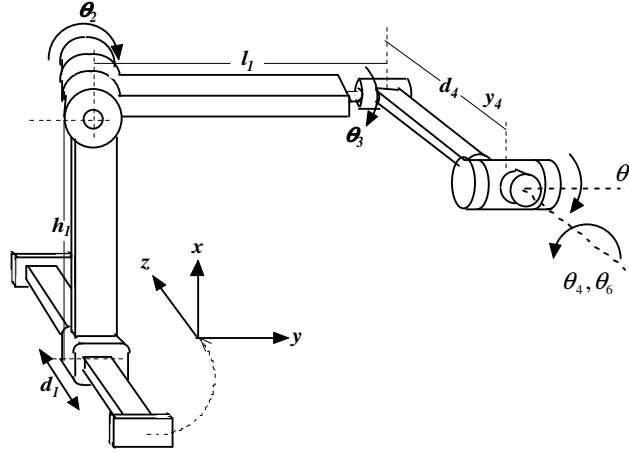
$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_4 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+3} + \sin \bar{\theta}_4 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+3}) \end{aligned}$$

$$p_{X_{16}} = l_1 + d_4 \sin \theta_{2+3} + l_2 \cos \theta_2$$

$$p_{Y_{16}} = l_2 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_{2+3}$$

3.1.15. CN robotunun ileri kinematığı

CN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.15'te ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.15'te verilmiştir.



Şekil 3.15: CN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.15: CN robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|---|
| 1 | 0 | $T(z, d_2)$ |
| 2 | $R(z, \theta_2)$ | $T(x, -l_1 \sin \theta_2) T(y, l_1 \cos \theta_2)$ |
| 3 | $R(y, \theta_3)$ | $T(x, -d_4 \sin \theta_3) T(z, -d_4 \cos \theta_3)$ |
| 4 | $R(-z, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(y, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-z, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.15'teki verilerden yararlanarak CN robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([1,0], \langle h_1, 0, d_2 \rangle) \quad (3.98)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 0, 1 >], < -l_1 \sin \theta_2, l_1 \cos \theta_2, 0 >) \quad (3.99)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 1, 0 >], < -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 >) \quad (3.100)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.101)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.102)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, -1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.103)$$

Altı serbestlik derecesine sahip CN robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, d_2 - d_4 \cos \theta_3 >) \end{aligned} \quad (3.104)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= -\sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4} + \sin \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

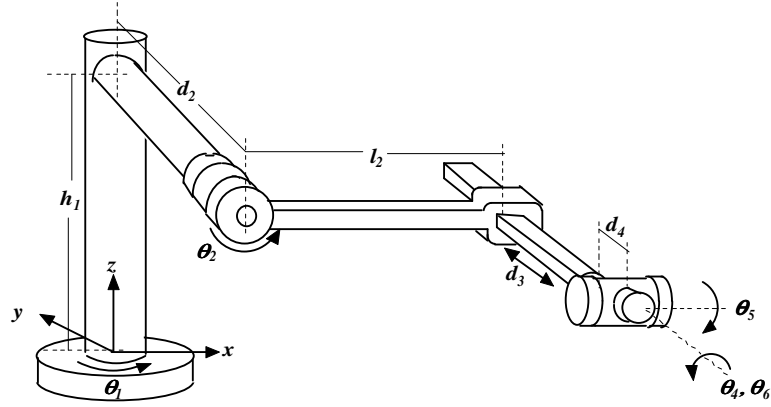
$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_3 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2-4} - \sin \bar{\theta}_3 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$p_{X_{16}} = -d_4 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + h_1 - l_1 \sin \theta_2$$

$$p_{Y_{16}} = -d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + l_1 \cos \theta_2$$

3.1.16. NC robotunun ileri kinematığı

NC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.16'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş her bir ekleme ait yönelim ve konum bilgileri Tablo 3.16'da verilmiştir.



Şekil 3.16: NC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.16: NC robotunun yönelim ve konum bilgileri.

| Q_i | Dönme | Öteleme |
|-------|-------------------|--|
| 1 | $R(z, \theta_1)$ | $T(x, d_2 \sin \theta_1) T(y, -d_2 \cos \theta_1)$ |
| 2 | $R(-y, \theta_2)$ | $T(x, l_2 \cos \theta_2) T(z, l_2 \sin \theta_2)$ |
| 3 | 0 | $T(-y, -d_3)$ |
| 4 | $R(-y, \theta_4)$ | 0 |
| 5 | $R(x, \theta_5)$ | 0 |
| 6 | $R(-y, \theta_6)$ | 0 |

Tablo 3.16'daki verilerden yararlanarak NC robotunun her ekleminin konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_1 = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >], < d_2 \sin \theta_1, -d_2 \cos \theta_1, h_1 >) \quad (3.105)$$

$$Q_2 = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, -1, 0 >], < l_2 \cos \theta_2, 0, l_2 \sin \theta_2 >) \quad (3.106)$$

$$Q_3 = ([1, 0], < 0, -d_3 - d_4, 0 >) \quad (3.107)$$

$$Q_4 = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.108)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.109)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (3.110)$$

Altı serbestlik derecesine sahip NC robotunun konum ve yönelimini gösteren dönüşüm vektörü yukarıda elde edilen quaternion/vektör çiftlerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{16} &= Q_1 * Q_2 * Q_3 * Q_4 * Q_5 * Q_6 \\ &= ([s_{16}, < v_{i_{16}}, v_{j_{16}}, v_{k_{16}} >], < p_{X_{16}}, p_{Y_{16}}, h_1 + l_2 \sin \theta_2 >) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} s_{16} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) + \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_{16}} &= -\cos \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} - \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k_{16}} &= \cos \bar{\theta}_6 (\sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} + \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) - \\ &\quad \sin \bar{\theta}_6 (\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{2+4} + \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{2+4}) \end{aligned}$$

$$p_{X_{16}} = (d_2 + d_3 + d_4) \sin \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$p_{Y_{16}} = (-d_2 - d_3 - d_4) \cos \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

3.2. Robot Manipülatorlerinin Çalışma Uzaylarının Sınıflandırılması

Robot manipülatorlerinin çalışma uzaylarının, eklem yapısına ve dönüşüm matrisine göre sınıflandırılması Tablo 3.17’de verilmiştir. Tablo 3.17’de verilen S-1 ve S-2 sırasıyla Scara tip-1 ve Scara tip-2 robotlarını, \perp dik ve $//$ ise paralelliği göstermektedir. Örneğin $\perp\perp//$ ilk iki eksenin birbirine dik, üçüncünün ise ikinciye paralel, $////\perp$ ilk iki eksenin birbirine paralel üçüncünün ise ikinciye dik veya $\perp\perp\perp$ üç eklemin de bir birine dik olduğunu göstermektedir.

Tablo 3.17: Robot manipülatorlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması.

| Manipülator | Eklem yapısına göre | Dönüşüm matrisine göre |
|-----------------------------|---------------------|------------------------|
| SS (PPP $\perp\perp\perp$) | Prizmatik | Prizmatik |
| SC (PPR $\perp\perp//$) | - | Silindirik |
| SN (PPR $\perp\perp\perp$) | Küresel | Küresel |
| CS (RPP $////\perp$) | Silindirik(S-2) | Silindirik |
| CC (RPR $//////$) | Silindirik(S-2) | Silindirik |
| CR (RPR $////\perp$) | Küresel | Küresel |
| NS (RRP $\perp\perp\perp$) | Küresel | Küresel |
| NN (RRR $\perp\perp\perp$) | Küresel | - |
| NR (RRR $\perp\perp//$) | Dönel | - |
| RC (RPR $\perp\perp//$) | Silindirik(S-2) | Küresel |
| RN (RRR $\perp\perp//$) | Küresel | Küresel |
| RR (RPR $\perp\perp\perp$) | Küresel | Küresel |
| RS (RRP $//////$) | Silindirik(S-1) | Silindirik |
| SR (PRR $//////$) | Silindirik(S-2) | Silindirik |
| CN (PRR $////\perp$) | Küresel | Küresel |
| NC (RRP $\perp\perp//$) | Küresel | Küresel |

3.3. Quaternion Yöntemiyle DH Yönteminin Bilgisayar Ortamında Karşılaştırılması

Bu bölümde anlatılan 16 adet endüstriyel robotun her biri için hem quaternion yöntemiyle hem de DH yöntemiyle ileri kinematik algoritmaları Matlab'ta hazırlanmıştır. Intel Pentium M 1.73 GHz, 2 MB L2 cache işlemcili ve 1 GB DDR2 RAM belleğe sahip bilgisayar tarafından bu algoritmalarındaki değişkenlere bir milyon farklı değer verilerek işlem süreleri ölçülmüştür. Quaternion yönteminin homojen dönüşüm matrislerine göre üstün olduğu tablo 3.18'de görülmektedir. Diğer bir önemli kazanım ise sonuçları robotların çalışma uzayına göre değerlendirdiğimizde görülmektedir.

Tablo 3.18: Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması.

| END. ROBOT | DH YÖNTEMİ(sn) | Q/V YÖNTEMİ(sn) | FARK (sn) | ÇALIŞMA UZAYI |
|------------|----------------|-----------------|-----------|---------------|
| NS | 39.922 | 26.172 | 13.75 | K |
| RN | 41.032 | 31.938 | 9.094 | K |
| NN | 40.953 | 31.922 | 9.031 | K |
| NR | 40.953 | 31.984 | 8.969 | K |
| CR | 40.062 | 31.453 | 8.609 | K |
| RR | 40 | 31.454 | 8.546 | K |
| CC | 39.953 | 31.484 | 8.469 | S |
| SR | 39.922 | 31.453 | 8.469 | S |
| SN | 39.89 | 31.53 | 8.36 | K |
| RC | 39.906 | 31.547 | 8.359 | S |
| CN | 39.891 | 31.594 | 8.297 | K |
| SC | 39.109 | 30.953 | 8.156 | S |
| CS | 38.953 | 31.031 | 7.922 | S |
| NC | 36 | 28.453 | 7.547 | K |
| RS | 35.953 | 28.469 | 7.484 | S |
| SS | 37.953 | 30.875 | 7.078 | P |

P: Prizmatik, S: Silindirik, K: Küresel.

Dikkat edilirse küresel çalışma uzayına sahip robotlarda quaternion yönteminin daha hızlı sonuç verdiği görülmektedir. Kartezyen çalışma uzayında hareket eden SS robotunda zaman farkı minimumdur. Bu durumda quaternion yönteminin özellikle çalışma uzayı küresel olan robotların kinematik analizinde kullanılmasının daha avantajlı olduğu bir gerçektir.

BÖLÜM 4. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN QUATERNION YÖNTEMİYLE TERS KİNEMATİĞİNİN ÇIKARILMASI

4.1. Giriş

Bu bölümde, onaltı adet temel endüstriyel robota Euler bileği eklenip quaternion yöntemi kullanılarak ters kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir. Euler bileğinin düzenleşimi için (BİNGÜL ve KÜÇÜK, 2005) bakınız. Bölüm 3'de onaltı adet robotun her eklemının konum ve yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion/vektör çiftleri bulunduğundan bu bölümde ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersleri doğrudan yazılmıştır. Her robotun ters kinematik çözüm yolu birbirine benzer olduğu için sadece SS robotunun çözümü ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

4.1.1 SS robotunun ters kinematığı

SS Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([1,0] \langle 0,0,-d_1 \rangle) \quad (4.1)$$

$$Q_2^{-1} = ([1,0], \langle 0,-d_2,0 \rangle) \quad (4.2)$$

$$Q_3^{-1} = ([1,0], \langle -d_3,0,0 \rangle) \quad (4.3)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle -1,0,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.4)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.5)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle -1,0,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.6)$$

SS robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_6 = Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.7)$$

$$M_5 = ([M_{51}, \langle M_{52}, M_{53}, M_{54} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) = Q_5 M_6$$

$$M_5 = ([\cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_6, \langle \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_6 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.8)$$

Denklemden,

$$M_{51} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_6 - \langle 0, 0, \sin \bar{\theta}_5 \rangle \cdot \langle \sin \bar{\theta}_6, 0, 0 \rangle = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_6$$

$$M_{V(5)} = \cos \bar{\theta}_5 \langle \sin \bar{\theta}_6, 0, 0 \rangle + \cos \bar{\theta}_6 \langle 0, 0, \sin \bar{\theta}_5 \rangle + \langle 0, 0, \sin \bar{\theta}_5 \rangle \times \langle \sin \bar{\theta}_6, 0, 0 \rangle = \langle \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_6 \rangle$$

Q_6, Q_5 ve Q_4 quaternion/vektör çiftleri Euler bileğini temsil ettiğinden bu ifadelerde pozisyon vektörleri $\langle 0, 0, 0 \rangle$ alınmıştır. Bu nedenle konum vektörünü için gerekli denklemler M_2 ifadesinin konum vektörü hesaplanıncaya kadar kullanılmayacaktır.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.9)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_4 M_{51} - \langle \sin \bar{\theta}_4, 0, 0 \rangle \cdot \langle M_{52}, M_{53}, M_{54} \rangle$$

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{V(4)} = \bar{c}_4 \langle M_{52}, M_{53}, M_{54} \rangle + M_{51} \langle \bar{s}_4, 0, 0 \rangle + \langle \bar{s}_4, 0, 0 \rangle \times \langle M_{52}, M_{53}, M_{54} \rangle = \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle$$

$$\begin{aligned}
M_{42} &= \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}, & M_{43} &= -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}, & M_{44} &= \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}, \\
\bar{c}_i &= \cos \bar{\theta}_i, & \bar{s}_i &= \sin \bar{\theta}_i \\
M_3 &= ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < d_3, 0, 0 >) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Denklemden,

$$\begin{aligned}
M_{31} &= \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, & M_{32} &= \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}, & M_{33} &= -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6} \\
M_{34} &= \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}
\end{aligned}$$

Euler bilekli endüstriyel robotların ters kinematik çözümlemesinde M_3 ifadesine kadar işlem yapmak yeterli olduğundan M_2 ve M_1 ifadeleri gösterilmemiştir.

Hedeflenen konum ve yönelim bilgisi verildikten ve quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1}N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1}N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

Q_1^{-1} , Q_2^{-1} , Q_3^{-1} ifadelerinde kullanılan quaternionlar birim quaternion olduğundan yapılan işlemler sonucunda sadece konum vektörü değişecektir.

$$N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >) \tag{4.11}$$

$$N_2 = Q_1^{-1}N_1 = ([w, < a, b, c >], < N_{25}, N_{26}, N_{27} >) \tag{4.12}$$

Denklemden,

$$\begin{aligned}
N_{P2} &= < p_x, p_y, p_z > + (< 0, 0, 0 > \times < p_x, p_y, p_z >) 2.1 + \\
& (< 0, 0, 0 > 2) \times (< 0, 0, 0 > \times < p_x, p_y, p_z >) + < 0, 0, -d_1 > \\
&= < p_x, p_y, p_z - d_1 >
\end{aligned}$$

$$N_3 = ([w, < a, b, c >], < N_{35}, N_{36}, N_{37} >) \tag{4.13}$$

Denklemden,

$$\begin{aligned}
N_{P3} &= < p_x, p_y, p_z - d_1 > + (< 0, 0, 0 > \times < p_x, p_y, p_z - d_1 >) 2.1 + \\
& (< 0, 0, 0 > 2) \times (< 0, 0, 0 > \times < p_x, p_y, p_z - d_1 >) + < 0, -d_2, 0 >
\end{aligned}$$

$$= \langle p_x, p_y - d_2, p_z - d_1 \rangle$$

$$N_4 = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.14)$$

Denklemde,

$$\begin{aligned} N_{P4} &= \langle p_x, p_y - d_2, p_z - d_1 \rangle + (\langle 0, 0, 0 \rangle \times \langle p_x, p_y - d_2, p_z - d_1 \rangle) 2.1 + \\ &\quad (\langle 0, 0, 0 \rangle \times 2) \times (\langle 0, 0, 0 \rangle \times \langle p_x, p_y - d_2, p_z - d_1 \rangle) + \langle -d_3, 0, 0 \rangle \\ &= \langle p_x - d_3, p_y - d_2, p_z - d_1 \rangle \end{aligned}$$

d_1 , d_2 ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_1 = p_z \quad (4.15)$$

$$d_2 = p_y \quad (4.16)$$

$$d_3 = p_x \quad (4.17)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{N_{44}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{42}^2} \right) \quad (4.18)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(N_{42}, N_{41}) - \arctan 2(N_{43}, N_{44}) \quad (4.19)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(N_{42}, N_{41}) + \arctan 2(N_{43}, N_{44}) \quad (4.20)$$

Denklemde,

$$\tan(\bar{\theta}_4 + \bar{\theta}_6) = \frac{N_{42}}{N_{41}}, \quad \tan(\bar{\theta}_6 - \bar{\theta}_4) = \frac{N_{43}}{N_{44}}$$

4.1.2. SC robotunun ters kinematiği

SC Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([1,0], \langle 0,0,-d_1 \rangle) \quad (4.21)$$

$$Q_2^{-1} = ([1,0], \langle 0, -(l_1 + d_2), 0 \rangle) \quad (4.22)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, -1, 0 \rangle], \langle 0, 0, d_4 \rangle) \quad (4.23)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 0, 1 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.24)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.25)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0, 0, 1 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.26)$$

SC robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.27)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{(4-6)}, \quad M_{43} = \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6-4)}$$

$$M_{44} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6+4)}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 \rangle) \quad (4.28)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < p_x, p_y - l_1 - d_2, p_z - d_1 >) \quad (4.29)$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.30)$$

Denklemden,

$$N_{41} = w \cos \frac{1}{2} \theta_3 + b \sin \frac{1}{2} \theta_3$$

$$N_{42} = a \cos \frac{1}{2} \theta_3 - c \sin \frac{1}{2} \theta_3$$

$$N_{43} = b \cos \frac{1}{2} \theta_3 - w \sin \frac{1}{2} \theta_3$$

$$N_{44} = c \cos \frac{1}{2} \theta_3 + a \sin \frac{1}{2} \theta_3$$

d_1 ve d_2 prizmatik ile θ_3 dönel eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(-\frac{p_x}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{p_x}{d_4} \right)^2} \right) \quad (4.31)$$

$$d_1 = p_z + d_4 \cos \theta_3 \quad (4.32)$$

$$d_2 = p_y - l_1 \quad (4.33)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{44}^2} \right) \quad (4.34)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(N_{43}, N_{42}) \quad (4.35)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(N_{43}, N_{42}) \quad (4.36)$$

4.1.3 SN robotunun ters kinematığı

SN Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([1, 0], \langle 0, 0, -d_1 \rangle) \quad (4.37)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0, -1, 0 \rangle], \langle 0, -d_2, -l_2 \rangle) \quad (4.38)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle 0, d_4, 0 \rangle) \quad (4.39)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.40)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.41)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.42)$$

SN robotunun ters kinematığının bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.43)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 \rangle) \quad (4.44)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, N_{37} \rangle) \quad (4.45)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = p_x \cos \theta_2 + d_1 \sin \theta_2 - p_z \sin \theta_2$$

$$N_{35} = p_y - d_2$$

$$N_{35} = p_z \cos \theta_2 - d_1 \cos \theta_2 - l_2 + p_x \sin \theta_2$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.46)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_2 + b \sin \frac{1}{2} \theta_2) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_2 + a \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_2 - c \sin \frac{1}{2} \theta_2) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_2 - w \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_2 - w \sin \frac{1}{2} \theta_2) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_2 - c \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_2 + a \sin \frac{1}{2} \theta_2) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_2 + b \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

d_1 prizmatik, θ_2 ve θ_3 dönel eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(-\frac{p_y - d_2}{d_4} \right)^2}, \left(-\frac{p_y - d_2}{d_4} \right) \right) \quad (4.47)$$

$$\theta_2 = \arctan 2((d_1 - p_z), p_x) + \arctan 2 \left(\pm \sqrt{(d_1 - p_z)^2 + p_x^2 - (d_4 \sin \theta_3)^2}, d_4 \sin \theta_3 \right) \quad (4.48)$$

$$d_1 = \frac{p_z \cos \theta_2 - l_2 + p_x \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \quad (4.49)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{44}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{43}^2} \right) \quad (4.50)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.51)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(N_{44}, N_{43}) \quad (4.52)$$

4.1.4. CS robotunun ters kinematiği

CS Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle -l_1, 0, 0 \rangle) \quad (4.53)$$

$$Q_2^{-1} = ([1, 0], \langle 0, 0, -d_2 \rangle) \quad (4.54)$$

$$Q_3^{-1} = ([1, 0], \langle 0, d_3, 0 \rangle) \quad (4.55)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0,1,0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.56)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle -1,0,0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.57)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,1,0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.58)$$

CS robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.59)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{(4+6)}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{(4-6)}, \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6+4)}$$

$$M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6-4)}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle 0, -d_3, 0 \rangle) \quad (4.60)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, p_z - d_2 \rangle) \quad (4.61)$$

Denklemden,

$$N_{35} = p_x \cos \theta_1 - l_1 + p_y \sin \theta_1$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1$$

$$N_4 = ([N_{41}, \langle N_{42}, N_{43}, N_{44} \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.62)$$

Denklemden,

$$N_{41} = w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1$$

$$N_{42} = a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1$$

$$N_{43} = b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1$$

$$N_{44} = c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1$$

θ_1 dönel, d_2 ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_2 = p_z \quad (4.63)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) + \arctan 2\left(\pm \sqrt{p_y^2 + p_x^2 - l_1^2}, l_1\right) \quad (4.64)$$

$$d_3 = p_x \sin \theta_1 - p_y \cos \theta_1 \quad (4.65)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{44}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{43}^2}\right) \quad (4.66)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.67)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.68)$$

4.1.5. CC robotunun ters kinematiği

CC Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = \left([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle -l_1, 0, 0 \rangle \right) \quad (4.69)$$

$$Q_2^{-1} = \left([1, 0], \langle 0, 0, -d_2 \rangle \right) \quad (4.70)$$

$$Q_3^{-1} = \left([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle 0, d_4, 0 \rangle \right) \quad (4.71)$$

$$Q_4^{-1} = \left([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle \right) \quad (4.72)$$

$$Q_5^{-1} = \left([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle \right) \quad (4.73)$$

$$Q_6^{-1} = \left([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle \right) \quad (4.74)$$

CC robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.75)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6},$$

$$M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6+4}, \quad M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 >) \quad (4.76)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{35}, p_z - d_2 >) \quad (4.77)$$

Denklemden,

$$N_{35} = p_x \cos \theta_1 - l_1 + p_y \sin \theta_1$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.78)$$

Denklemden,

$$N_{41} = (\cos \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{42} = (\cos \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1)$$

θ_1, θ_3 dönel ve d_2 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

M_3 ile N_3 ifadelerinin beşinci ve altıncı elemanları eşitlendikten sonra kareleri alınıp alt alta toplanırsa $\sin \theta_3$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sin \theta_3 = a = \frac{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_1^2}{2d_4l_1} \quad (4.79)$$

$$\theta_3 = \arctan 2\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right) \quad (4.80)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(p_x, -p_y) + \arctan 2\left(\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (d_4 \cos \theta_3)^2}, d_4 \cos \theta_3\right) \quad (4.81)$$

$$d_2 = p_z \quad (4.82)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm\sqrt{N_{42}^2 + N_{44}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{43}^2}\right) \quad (4.83)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.84)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(N_{44}, N_{43}) \quad (4.85)$$

4.1.6. CR robotunun ters kinematiği

CR Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = \left[\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0, 0, -1 \rangle\right], \langle -l_2, 0, 0 \rangle \quad (4.86)$$

$$Q_2^{-1} = \left[1, 0\right], \langle 0, 0, -d_2 \rangle \quad (4.87)$$

$$Q_3^{-1} = \left[\bar{c}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, 0, -1 \rangle\right], \langle 0, 0, d_4 \rangle \quad (4.88)$$

$$Q_4^{-1} = \left[\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 0, 1 \rangle\right], \langle 0, 0, 0 \rangle \quad (4.89)$$

$$Q_5^{-1} = \left[\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 0, -1, 0 \rangle\right], \langle 0, 0, 0 \rangle \quad (4.90)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,0,1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.91)$$

CR robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.92)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} M_{41} &= \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, & M_{42} &= -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}, & M_{43} &= \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6} \\ M_{44} &= -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6+4}. \end{aligned}$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 \rangle) \quad (4.93)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, p_z - d_1 \rangle) \quad (4.94)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} N_{35} &= p_x \cos \theta_1 - l_2 + p_y \sin \theta_1 \\ N_{36} &= p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$N_4 = ([N_{41}, \langle N_{42}, N_{43}, N_{44} \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.95)$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} N_{41} &= (\cos \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) \\ N_{42} &= (\cos \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) \end{aligned}$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1)$$

θ_1 , θ_3 dönel ve d_1 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) \quad (4.96)$$

$$\theta_3 = \arctan 2(a, \pm \sqrt{1 - a^2}) \quad (4.97)$$

Denklemdede,

$$a = \frac{l_2 - p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1}{d_4}$$

$$d_1 = p_z + d_4 \cos \theta_3 \quad (4.98)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{44}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{43}^2}\right) \quad (4.99)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.100)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(N_{44}, N_{43}) \quad (4.101)$$

4.1.7. NS robotunun ters kinematiği

NS Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0, d_2, -h_1 \rangle) \quad (4.102)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0,1,0 \rangle], \langle 0,0,-d_3 \rangle) \quad (4.103)$$

$$Q_3^{-1} = ([1,0], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.104)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.105)$$

$$Q_{5,5}^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 0,-1,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.106)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.107)$$

NS robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.108)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4-6}, \quad M_{43} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

$$M_{44} = \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle 0, 0, d_3 \rangle) \quad (4.109)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, N_{37} \rangle) \quad (4.110)$$

Denklemden,

$$N_{35} = \cos \theta_2 (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - \sin \theta_2 (h_1 - p_z)$$

$$N_{36} = d_2 + (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1)$$

$$N_{37} = -d_3 - \sin \theta_2 (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - \cos \theta_2 (h_1 - p_z)$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.111)$$

Denklemden,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

θ_1 , θ_2 dönel ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{-p_x}{p_y} \right) + \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2} \right) \quad (4.112)$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{p_x c_1 + p_y s_1}{h_1 - p_z} \right) \quad (4.113)$$

$$d_3 = -\sin \theta_2 (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - \cos \theta_2 (h_1 - p_z) \quad (4.114)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = 2 \arctan \left(\pm \sqrt{N_{43}^2 + N_{42}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{44}^2} \right) \quad (4.115)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.116)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.117)$$

4.1.8. NN robotunun ters kinematığı

NN Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, -1 >], < 0, l_1, -h_1 >) \quad (4.118)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, -l_2 >) \quad (4.119)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, 0, 1 >], < 0, d_4, 0 >) \quad (4.120)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.121)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \bar{\sin} \bar{\theta}_5 < -1, 0, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.122)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \bar{\sin} \bar{\theta}_6 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.123)$$

NN robotunun ters kinematığının bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, < M_{42}, M_{43}, M_{44} >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.124)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}, \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 >) \quad (4.125)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{36}, N_{37} >) \quad (4.126)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = \cos \theta_2 (p_x \cos \theta_1 - l_2 + p_y \sin \theta_1) - \sin \theta_2 (d_1 - p_z)$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1$$

$$N_{37} = -\sin \theta_2 (p_x \cos \theta_1 - l_2 + p_y \sin \theta_1) - \cos \theta_2 (d_1 - p_z)$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.127)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = -(\cos \bar{\theta}_3) \left((\sin \bar{\theta}_2) (b \cos \bar{\theta}_1 + a \sin \bar{\theta}_1) - (\cos \bar{\theta}_2) (w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) \right) \\ + (\sin \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_2) (a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) \right)$$

$$N_{42} = (\cos \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2) (c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) \right) \\ + (\sin \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2) (w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) \right)$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2) (w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) \right) \\ - (\sin \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2) (c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) \right)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_3) \left((\cos \bar{\theta}_2) (c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_2) (a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) \right) \\ + (\sin \bar{\theta}_3) \left((\sin \bar{\theta}_2) (b \cos \bar{\theta}_1 + a \sin \bar{\theta}_1) - (\cos \bar{\theta}_2) (w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) \right)$$

θ_1 , θ_2 ve θ_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşığıdaki gibi bulunur.

M_3 ile N_3 ifadelerinin 5. ve 7. elemanları eşitlendikten sonra kareleri alınıp alt alta toplanırsa $\sin \theta_3$ aşığıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(a, \pm \sqrt{1 - a^2} \right) \quad (4.128)$$

Denklemdede,

$$a = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - l_2^2}}{d_4}$$

$$A = p_x \cos \theta_1 - l_2 + p_y \sin \theta_1$$

$$B = d_1 - p_z$$

$$\theta_1 = \arctan 2(p_x, -p_y) + \arctan 2\left(\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (d_4 \cos \theta_3)^2}, d_4 \cos \theta_3\right) \quad (4.129)$$

$$\theta_2 = \arctan 2(-B, A) + \arctan 2\left(\pm \sqrt{B^2 + A^2 - (d_4 \sin \theta_3)^2}, d_4 \sin \theta_3\right) \quad (4.130)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = 2 \arctan\left(\pm \sqrt{N_{44}^2 + N_{42}^2}, \sqrt{N_{43}^2 + N_{41}^2}\right) \quad (4.131)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.132)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.133)$$

4.1.9. NR robotunun ters kinematiği

NR Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, -1 >], < 0, -d_2, -h_1 >) \quad (4.134)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, -1, 0 >], < -l_2, 0, 0 >) \quad (4.135)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, d_4 >) \quad (4.136)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.137)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \bar{\sin} \bar{\theta}_5 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.138)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.139)$$

NR robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, < M_{42}, M_{43}, M_{44} >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.140)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{43} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 >) \quad (4.141)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{36}, N_{37} >) \quad (4.142)$$

Denklemden,

$$N_{35} = \cos \theta_2 (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - l_2 + \sin \theta_2 (h_1 - p_z)$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 - d_2$$

$$N_{37} = \sin \theta_2 (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - \cos \theta_2 (h_1 - p_z)$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.143)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) (\sin \frac{1}{2} \theta_2 (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ + (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ - (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ - (\sin \frac{1}{2} \theta_3) (\sin \frac{1}{2} \theta_2 (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\cos \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ + (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

θ_1 , θ_2 ve θ_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşığıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = \arctan 2(-p_x, p_y) + \arctan 2(\mp \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2) \quad (4.144)$$

M_3 ile N_3 ifadelerinin pozisyon vektörlerinin x ve z bileşenlerinin kareleri alınıp toplanırsa $\sin \theta_3$ değeri aşığıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_3 = \arctan 2(x, \mp \sqrt{1 - x^2}) \quad (4.145)$$

Denklemdede,

$$x = \frac{d_4^2 + l_2^2 - A^2 - B^2}{2d_4 l_2}$$

Pozisyon vektörlerinin x bileşeninden elde edilen aşığıdaki denklemden;

$$\theta_2 = \arctan 2(A, -B) + \arctan 2(\mp \sqrt{A^2 + B^2 - d_4^2 \cos^2 \theta_3}, -d_4 \cos \theta_3) \quad (4.146)$$

Denklemdede,

$$A = p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1$$

$$B = h_1 - p_z$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = 2 \arctan\left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{44}^2 + N_{41}^2}\right) \quad (4.147)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.148)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.149)$$

4.1.10. RC robotunun ters kinematiği

RC Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle 0, l_2, -h_1 \rangle) \quad (4.150)$$

$$Q_2^{-1} = ([1, 0], \langle 0, d_2, 0 \rangle) \quad (4.151)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \bar{\sin} \bar{\theta}_3 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle -d_4, 0, 0 \rangle) \quad (4.152)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.153)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.154)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.155)$$

RC robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.156)$$

Denklemdede,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6} \quad M_{43} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

$$M_{44} = \sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < d_4 \cos \theta_3, 0, d_4 \sin \theta_3 >) \quad (4.157)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{36}, p_z - h_1 >) \quad (4.158)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 + d_2 + l_2$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.159)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(\cos \bar{\theta}_1 b - \sin \bar{\theta}_1 a)$$

$$N_{42} = (\cos \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1)$$

d_1 , d_2 ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(\frac{p_z - h_1}{d_4}, \mp \sqrt{1 - \left(\frac{p_z - h_1}{d_4} \right)^2} \right) \quad (4.160)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) + \arctan 2 \left(\mp \sqrt{p_y^2 + p_x^2 - d_4^2 \cos^2 \theta_3}, d_4 \cos \theta_3 \right) \quad (4.161)$$

$$d_2 = p_x \sin \theta_1 - l_2 - p_y \cos \theta_1 \quad (4.162)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{N_{44}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{42}^2 + N_{41}^2} \right) \quad (4.163)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(N_{42}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{43}) \quad (4.164)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(N_{42}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{44}, N_{43}) \quad (4.165)$$

4.1.11. RN robotunun ters kinematiği

SS Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \bar{\sin} \bar{\theta}_1 < 0, 0, -1 >], < -l_1, 0, -h_1 >) \quad (4.166)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 0, -1 >], < -l_2, 0, 0 >) \quad (4.167)$$

$$Q_3 = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 < 0, -1, 0 >], < 0, 0, l_3 >) \quad (4.168)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.169)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \bar{\sin} \bar{\theta}_5 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.170)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.171)$$

RN robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, < M_{42}, M_{43}, M_{44} >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.172)$$

Denklemdede,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(4-6)}, \quad M_{43} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

$$M_{44} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6+4)}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < -l_3 \sin \theta_3, 0, -l_3 \cos \theta_3 >) \quad (4.173)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{36}, N_{37} >) \quad (4.174)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 - l_1) \cos \theta_2 + (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1) \sin \theta_2 - l_2$$

$$N_{36} = -(p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 - l_1) \sin \theta_2 + (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1) \cos \theta_2$$

$$N_{37} = p_z - h_1$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.175)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$+ (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ - (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ - (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)) \\ + (\sin \frac{1}{2} \theta_3) ((\cos \frac{1}{2} \theta_2) (a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2) (b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1))$$

θ_1 , θ_2 ve θ_3 dönel eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - p_z}{l_3} \right)^2}, \frac{h_1 - p_z}{l_3} \right) \quad (4.176)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) \pm \arctan(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - c^2}, c) \quad (4.177)$$

Denklemden,

$$c = - \frac{l_2^2 + l_3^2 \sin^2 \theta_3 - 2l_2 l_3 \sin \theta_3 - p_x^2 - p_y^2 - l_1^2}{2l_1}.$$

$$\theta_2 = \arctan 2(B, A) \pm \arctan \left(\sqrt{B^2 + A^2 - (l_2 - l_3 s_3)^2}, (l_2 - l_3 s_3) \right) \quad (4.178)$$

Denklemden,

$$A = (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 - l_1)$$

$$B = (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{44}^2} \right) \quad (4.179)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.180)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.181)$$

4.1.12. RR robotunun ters kinematiği

RR Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0, l_2, -h_1 \rangle) \quad (4.182)$$

$$Q_2^{-1} = ([1,0], \langle 0, d_2, 0 \rangle) \quad (4.183)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle -1,0,0 \rangle], \langle 0, d_4, 0 \rangle) \quad (4.184)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0,1,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.185)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle -1,0,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.186)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,1,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.187)$$

RR robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.188)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}, \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle 0, -d_4 \cos \theta_3, -d_4 \sin \theta_3 \rangle) \quad (4.189)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, p_z - h_1 \rangle) \quad (4.190)$$

Denklemden,

$$N_{35} = p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 - l_2$$

$$N_4 = ([N_{41}, \langle N_{42}, N_{43}, N_{44} \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.191)$$

Denklemden,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

θ_1 , θ_3 dönel ve d_2 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = \arctan 2(-p_x, p_y) \quad (4.192)$$

$$\theta_3 = \arctan 2 \left(\frac{h_1 - p_z}{d_4}, \mp \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - p_z}{d_4} \right)^2} \right) \quad (4.193)$$

$$d_2 = l_2 + p_x \sin \theta_1 - p_y \cos \theta_1 \quad (4.194)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{44}^2 + N_{42}^2}, \sqrt{N_{43}^2 + N_{41}^2}\right) \quad (4.195)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.196)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.197)$$

4.1.13. RS robotunun ters kinematiği

RS Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, -1 >], < -l_1, 0, -h_1 >) \quad (4.198)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 0, -1 >], < -l_2, 0, 0 >) \quad (4.199)$$

$$Q_3^{-1} = ([1, 0], < 0, 0, d_3 >) \quad (4.200)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.201)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 < 0, 1, 0 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.202)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 < 0, 0, 1 >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.203)$$

RS robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, < M_{42}, M_{43}, M_{44} >], < 0, 0, 0 >) \quad (4.204)$$

Denklemdede,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \bar{\sin} \bar{\theta}_{(4-6)}, \quad M_{43} = -\sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{(4-6)}$$

$$M_{44} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{(6+4)}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, < M_{32}, M_{33}, M_{34} >], < 0, 0, -d_3 >) \quad (4.205)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, < a, b, c >] < p_x, p_y, p_z >)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, < N_{32}, N_{33}, N_{34} >], < N_{35}, N_{36}, N_{37} >) \quad (4.206)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) \cos \theta_2 + (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1) \sin \theta_2 - l_2 - l_1 \cos \theta_2$$

$$N_{36} = (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1) \cos \theta_2 - (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) \sin \theta_2 + l_1 \sin \theta_2$$

$$N_{36} = p_z - h_1$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.207)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2)(w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2)(c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2)(a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1) + (\sin \frac{1}{2} \theta_2)(b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2)(b \cos \frac{1}{2} \theta_1 - a \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2)(a \cos \frac{1}{2} \theta_1 + b \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_2)(c \cos \frac{1}{2} \theta_1 - w \sin \frac{1}{2} \theta_1) - (\sin \frac{1}{2} \theta_2)(w \cos \frac{1}{2} \theta_1 + c \sin \frac{1}{2} \theta_1)$$

d_1 , d_2 ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = \arctan 2(\pm \sqrt{1-a^2}, a) \quad (4.208)$$

Denklemdede,

$$a = \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_1^2}{2l_1l_2}.$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{-p_x}{p_y}\right) \pm \arctan\left(\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (l_2s_2)^2}}{l_2s_2}\right) \quad (4.209)$$

$$d_3 = h_1 - p_z \quad (4.210)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{44}^2}\right) \quad (4.211)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.212)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(N_{42}, N_{43}) \quad (4.213)$$

4.1.14. SR robotunun ters kinematığı

SR Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([1,0], \langle -l_1, 0, -d_2 \rangle) \quad (4.214)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle -l_2, 0, 0 \rangle) \quad (4.215)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \sin \bar{\theta}_3 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle 0, d_4, 0 \rangle) \quad (4.216)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.217)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.218)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.219)$$

SR robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.220)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}, \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle d_4 \sin \theta_3, -d_4 \cos \theta_3, 0 \rangle) \quad (4.221)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, p_z - d_2 \rangle) \quad (4.222)$$

Denklemden,

$$N_{35} = (p_x - l_1) \cos \theta_2 + p_y \sin \theta_2 - l_2$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_2 + (l_1 - p_x) \sin \theta_2$$

$$N_4 = ([N_{41}, \langle N_{42}, N_{43}, N_{44} \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.223)$$

Denklemden,

$$N_{41} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_2 + c \sin \frac{1}{2} \theta_2) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_2 - w \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{42} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_2 + b \sin \frac{1}{2} \theta_2) + (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_2 - a \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{43} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(b \cos \frac{1}{2} \theta_2 - a \sin \frac{1}{2} \theta_2) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(a \cos \frac{1}{2} \theta_2 + b \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

$$N_{44} = (\cos \frac{1}{2} \theta_3)(c \cos \frac{1}{2} \theta_2 - w \sin \frac{1}{2} \theta_2) - (\sin \frac{1}{2} \theta_3)(w \cos \frac{1}{2} \theta_2 + c \sin \frac{1}{2} \theta_2)$$

d_1 prizmatik, θ_2 ve θ_3 dönel eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3 = \arctan 2\left(x, \mp \sqrt{1-x^2}\right) \quad (4.224)$$

Denklemden,

$$x = \frac{(p_x - l_1)^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2d_4l_2}$$

$$d_2 = p_z \quad (4.225)$$

$$\theta_2 = \arctan 2\left((p_x - l_1), -p_y\right) + \arctan 2\left(\mp \sqrt{(p_x - l_1)^2 + p_y^2 - (d_4 \cos \theta_3)^2}, d_4 \cos \theta_3\right) \quad (4.226)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{44}^2 + N_{42}^2}, \sqrt{N_{43}^2 + N_{41}^2}\right) \quad (4.227)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.228)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{44}, N_{42}) \quad (4.229)$$

4.1.15. CN robotunun ters kinematiği

CN Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([1,0], \langle -h_1, 0, -d_2 \rangle) \quad (4.230)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0,0,-1 \rangle], \langle 0, -l_1, 0 \rangle) \quad (4.231)$$

$$Q_3^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_3, \bar{\sin} \bar{\theta}_3 \langle 0,-1,0 \rangle], \langle 0,0,d_4 \rangle) \quad (4.232)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0,0,1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.233)$$

$$Q_5^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_5, \sin \bar{\theta}_5 \langle 0,-1,0 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.234)$$

$$Q_6^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_6, \sin \bar{\theta}_6 \langle 0,0,1 \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.235)$$

CN robotunun ters kinematiğinin bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0,0,0 \rangle) \quad (4.236)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}, \quad M_{43} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}$$

$$M_{44} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle -d_4 \sin \theta_3, 0, -d_4 \cos \theta_3 \rangle) \quad (4.237)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, p_z - d_2 \rangle) \quad (4.238)$$

Denklemden,

$$N_{35} = (p_x - h_1) \cos \theta_2 + p_y \sin \theta_2$$

$$N_{36} = p_y \cos \theta_2 + (h_1 - p_x) \sin \theta_2 - l_1$$

$$N_4 = ([N_{41}, \langle N_{42}, N_{43}, N_{44} \rangle], \langle N_{45}, N_{46}, N_{47} \rangle) \quad (4.239)$$

Denklemde,

$$N_{41} = (\cos \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_2 + c \sin \bar{\theta}_2) + (\sin \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_2 - a \sin \bar{\theta}_2)$$

$$N_{42} = (\cos \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_2 + b \sin \bar{\theta}_2) - (\sin \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_2 - w \sin \bar{\theta}_2)$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_3)(b \cos \bar{\theta}_2 - a \sin \bar{\theta}_2) - (\sin \bar{\theta}_3)(w \cos \bar{\theta}_2 + c \sin \bar{\theta}_2)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_3)(c \cos \bar{\theta}_2 - w \sin \bar{\theta}_2) + (\sin \bar{\theta}_3)(a \cos \bar{\theta}_2 + b \sin \bar{\theta}_2)$$

d_2 prizmatik, θ_2 ve θ_3 dönel eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = \arctan 2(h_1 - p_x, p_y) + \arctan 2(\mp \sqrt{(h_1 - p_x)^2 + p_y^2 - l_1^2}, l_1) \quad (4.240)$$

$M_{35}=N_{35}$ ve $M_{36}=N_{36}$ eşitlemelerinin kareleri alınıp alt alta toplanırsa;

$$\theta_3 = \arctan 2(a, \mp \sqrt{1 - a^2}) \quad (4.241)$$

Denklemde,

$$a = \mp \sqrt{\frac{(p_x - h_1)^2 + p_y^2 - l_1^2}{d_4^2}}$$

$$d_2 = d_4 \cos \theta_3 + p_z \quad (4.242)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{43}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{44}^2}) \quad (4.243)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{42}, N_{43}) \quad (4.244)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{44}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{42}, N_{43}) \quad (4.245)$$

4.1.16. NC robotunun ters kinematığı

NC Robotuna ait ileri kinematik quaternion/vektör çiftlerinin tersi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$Q_1^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 \langle 0, 0, -1 \rangle], \langle 0, d_2, -h_1 \rangle) \quad (4.246)$$

$$Q_2^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle -l_2, 0, 0 \rangle) \quad (4.246)$$

$$Q_3^{-1} = ([1, 0], \langle 0, d_3 + d_4, 0 \rangle) \quad (4.247)$$

$$Q_4^{-1} = ([\cos \bar{\theta}_4, \sin \bar{\theta}_4 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.248)$$

$$Q_5 = ([\cos \bar{\theta}_5, \bar{\sin} \bar{\theta}_5 \langle -1, 0, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.249)$$

$$Q_6 = ([\cos \bar{\theta}_6, \bar{\sin} \bar{\theta}_6 \langle 0, 1, 0 \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.250)$$

NC robotunun ters kinematığının bulunması için $M_6 = Q_6$ ve $M_5 = Q_5 M_6$ quaternion vektör çarpımları hesaplandıktan sonra $M_4 = Q_4 M_5$ ve $M_3 = Q_3 M_4$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$M_4 = ([M_{41}, \langle M_{42}, M_{43}, M_{44} \rangle], \langle 0, 0, 0 \rangle) \quad (4.251)$$

Denklemden,

$$M_{41} = \cos \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4+6}, \quad M_{42} = \sin \bar{\theta}_5 \cos \bar{\theta}_{4-6}, \quad M_{43} = -\cos \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{4+6}$$

$$M_{44} = -\sin \bar{\theta}_5 \sin \bar{\theta}_{6-4}.$$

$$M_3 = ([M_{31}, \langle M_{32}, M_{33}, M_{34} \rangle], \langle 0, -d_3 - d_4, 0 \rangle) \quad (4.252)$$

Hedeflenen konum ve yönelim $N_1 = ([w, \langle a, b, c \rangle] \langle p_x, p_y, p_z \rangle)$ bilgisi verildikten ve $N_2 = Q_1^{-1} N_1$ quaternion vektör çifti hesaplandıktan sonra $N_3 = Q_2^{-1} N_2$ ve $N_4 = Q_3^{-1} N_3$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_3 = ([N_{31}, \langle N_{32}, N_{33}, N_{34} \rangle], \langle N_{35}, N_{36}, N_{37} \rangle) \quad (4.253)$$

Denklemdede,

$$N_{35} = (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) \cos \theta_2 + (p_z + h_1) \sin \theta_2 - l_2$$

$$N_{36} = (p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1) + d_2$$

$$N_{36} = -(p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) \sin \theta_2 + (p_z + h_1) \cos \theta_2$$

$$N_4 = ([N_{41}, < N_{42}, N_{43}, N_{44} >], < N_{45}, N_{46}, N_{47} >) \quad (4.254)$$

Denklemdede,

$$N_{41} = (\cos \bar{\theta}_2)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_2)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{42} = (\cos \bar{\theta}_2)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{43} = (\cos \bar{\theta}_2)(b \cos \bar{\theta}_1 - a \sin \bar{\theta}_1) + (\sin \bar{\theta}_2)(w \cos \bar{\theta}_1 + c \sin \bar{\theta}_1)$$

$$N_{44} = (\cos \bar{\theta}_2)(c \cos \bar{\theta}_1 - w \sin \bar{\theta}_1) - (\sin \bar{\theta}_2)(a \cos \bar{\theta}_1 + b \sin \bar{\theta}_1)$$

θ_1, θ_2 dönel ve d_3 prizmatik eklem değişkenleri M_3 ile N_3 ifadelerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$M_{35}=N_{35}$ ve $M_{37}=N_{37}$ eşitlemelerinin kareleri alınıp alt alta toplanırsa;

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) + \arctan 2\left(\mp \sqrt{p_y^2 + p_x^2 - c^2}, c\right) \quad (4.255)$$

Denklemdede,

$$c = \mp \sqrt{(l_2)^2 - (h_1 + p_z)^2}$$

$$d_3 = -d_2 - p_y \cos \theta_1 + p_x \sin \theta_1 - d_4 \quad (4.256)$$

$$\theta_2 = \arctan 2(A, B) + \arctan 2\left(\mp \sqrt{A^2 + B^2 - l_2^2}, l_2\right) \quad (4.257)$$

Denklemdede,

$$A = (h_1 + p_z)$$

$$B = (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1)$$

θ_4 , θ_5 ve θ_6 dönel eklem değişkenleri ise M_4 ile N_4 ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(\pm \sqrt{N_{42}^2 + N_{44}^2}, \sqrt{N_{41}^2 + N_{43}^2}\right) \quad (4.258)$$

$$\theta_4 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) - \arctan 2(-N_{42}, N_{44}) \quad (4.259)$$

$$\theta_6 = \arctan 2(-N_{43}, N_{41}) + \arctan 2(-N_{42}, N_{44}) \quad (4.260)$$

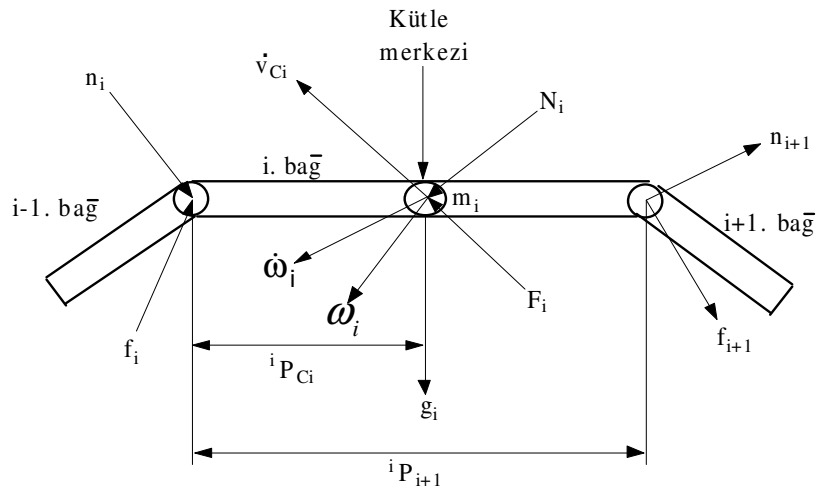
BÖLÜM 5. QUATERNION YÖNTEMİYLE ROBOT DİNAMİĞİNİN ÇIKARILMASI

5.1. Giriş

Bu bölümde, Newton-Euler yöntemi kullanılarak Huang ve Milenkovic tarafından ikili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırmaya göre elde edilen NS robotunun dinamik denklemleri bulunmuştur. Hem Newton-Euler hem de Quaternion yönteminde matematiksel işlemler vektörlerle gerçekleştirilmektedir. Bu açıdan dinamik denklemler Quaternion yönteminin yapısına çok uygun olan Newton-Euler yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

5.2. Newton-Euler Yöntemi

Newton-Euler yöntemi bir robot kolunun doğrusal ve açısal hareketinden faydalanarak ardışık işlemler sonucunda dinamik denklemleri üretir. Newton-Euler yöntemi hakkında detaylı bilgi için (Bingül ve Küçük, basım aşamasında) bakınız.



Şekil 5.1: i. bağa etkiyen kuvvet ve momentler.

Newton-Euler yöntemine göre, katı bir cisme herhangi bir kuvvet veya tork uygulanırsa bu iki büyüklüğe eşit ve zıt yönlü bir kuvvet ve tork meydana gelir. Eklemlerin kütle merkezlerine etkiyen kuvvet ve tork ifadelerinin hesaplanması için dışa dönük (outward) ardışık denklemler bulunur ve ayrıca, bu net kuvvet ve torkları üretmek için gerekli olan eklem torklarının bulunması için ise içe dönük (inward) ardışık denklemler elde edilir. Bu denklemleri açıklamadan önce Şekil 5.1 üzerinden bazı terimleri ve bunların anlamlarını yazalım.

- \dot{v}_i :i. bağıın doğrusal ivmesi
- \dot{v}_{C_i} :i. bağıın kütle merkezinin doğrusal ivmesi.
- ω_i :i. bağıın açısal hızı.
- $\dot{\omega}_i$:i. bağıın açısal ivmesi.
- m_i :i. bağıın kütlesi.
- g_i :i. bağıın yerçekimi ivmesi.
- q_i :i ile i+1. bağlar arasındaki dönme vektörü.
- ${}^c_i I$:i. bağıın kendi kütle merkezine göre atalet tensörü.
- ${}^i P_{C_i}$:i. bağıın kütle merkezine konumu.
- ${}^i P_{i+1}$:i. bağıın i+1. bağa göre konumu.
- F_i :i. bağıın kütle merkezine etkiyen kuvvet.
- N_i :i. bağıın kütle merkezine etkiyen tork.
- f_i :i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan kuvvet.
- n_i :i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan tork.

5.2.1. Dışa dönük ardışık denklemler

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal hız,

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = q_{i+1}^{-1} * \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{R}_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

Denklemden ${}^{i+1}\hat{R}_{i+1}$ robotun ana çerçevesine yerleştirilen referans koordinat sistemine göre ilgili bağıın dönme eksenini göstermektedir. Eğer dönme referans koordinat sistemine göre X ekseninde gerçekleşiyorsa Denklem 5.1’de ${}^{i+1}\hat{R}_{i+1}$ yerine ${}^{i+1}\hat{X}_{i+1} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, Y ekseninde gerçekleşiyorsa ${}^{i+1}\hat{Y}_{i+1} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ve Z ekseninde gerçekleşiyorsa ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ yazılır.

Bir dönel eklem için açısal ivme

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = q_{i+1}^{-1} * {}^i\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{R}_{i+1} + (q_{i+1}^{-1} * {}^i\omega_i) \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{R}_{i+1} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer, i+1. eklem prizmatik ise i+1. eklem için açısal hız ve açısal ivmesi sıfır olur. Bu durumda i+1. prizmatik eklem için açısal ivme ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = q_i^{-1} * {}^i\dot{\omega}_i \quad (5.3)$$

Dönel eklemler için doğrusal ivme

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = q_{i+1}^{-1} * ({}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i) \quad (5.4)$$

Prizmatik eklemler için ise doğrusal ivme ise

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = q_{i+1}^{-1} * [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] + 2{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{R}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{R}_{i+1} \quad (5.5)$$

şeklinde ifade edilir. Doğrusal ivmeyi gösteren yukarıdaki ifade Newton denklemindeki her bir eklem için kütle merkezinin doğrusal ivmesini hesaplamada kullanılır. Kütle merkezinin doğrusal ivmesi aşağıda verilmiştir.

$${}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \quad (5.6)$$

Sonuç olarak her bir bağıın kütle merkezine etkiyen kuvvet ve moment vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \quad (5.7)$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} \quad (5.8)$$

Denklemden ${}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1}$ ifadesi Kartezyen uzayda verilen yöntemlerde matrislerle gösterilirken Quaternion yönteminde vektörlerle aşağıdaki gibi yazılır. Denklemden kullanılan ‘.’ işareti noktasal çarpımı göstermektedir.

$$[\langle I_{xx_{i+1}}, I_{yy_{i+1}}, I_{zz_{i+1}} \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle I_{xy_{i+1}}, I_{yy_{i+1}}, I_{yz_{i+1}} \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle I_{xz_{i+1}}, I_{yz_{i+1}}, I_{zz_{i+1}} \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle] \quad (5.9)$$

Bu çalışmada kütle merkezleri bağların ortasında seçildiğinden yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi olur.

$$[\langle I_{xx_{i+1}}, 0, 0 \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle 0, I_{yy_{i+1}}, 0 \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle 0, 0, I_{zz_{i+1}} \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle] \quad (5.10)$$

Quaternion yönteminde robotların sıfır konumu özgürce seçilebildiği için ana çerçeveye yerleştirilen referans koordinat sistemine göre ilgili bağın dönme eksenini Y veya Z’de gerçekleştirilmektedir. Eğer dönme Y ekseninde gerçekleşiyorsa denklem 5.10 aşağıdaki şekle dönüşür.

$$[\langle I_{xx_{i+1}}, 0, 0 \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle 0, I_{zz_{i+1}}, 0 \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle, \langle 0, 0, I_{yy_{i+1}} \rangle \cdot \langle {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \rangle] \quad (5.11)$$

5.2.2. İçer dönük ardışık denklemler ile kuvvet ve torkun hesaplanması

Şu ana kadar her bağa etkiyen kuvvet ve tork ifadeleri bulundu. Eklem torklarını hesaplamak için kuvvet denge ve moment denge ifadelerinden yararlanılır. Sonuç olarak, bu ifadelerden faydalanarak n. eklemden temel koordinat sistemine doğru içer dönük ${}^i f_i$ ve ${}^i n_i$ denklemleri

$${}^i f_i = q_i * {}^{i+1}f_{i+1} + {}^i F_i \quad (5.12)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + q_i * {}^{i+1}n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times q_i * {}^{i+1}f_{i+1} \quad (5.13)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemler n. eklemden ana koordinat sistemine doğru ardışık olarak uygulanır. Gerekli eklem torkları dönel eklemler için

$$\tau_i = {}^i n_i^T \hat{R}_i \quad (5.14)$$

prizmatik eklemler için ise

$$\tau_i = {}^i f_i^T \hat{R}_i \quad (5.15)$$

şeklinde bulunur. İçe ve dışa dönük ardışık dinamik denklemler, eklemlerin konum, hız ve ivmelerinin verilmesiyle gerekli eklem torklarının hesaplanmasında kullanılır.

5.2.3. Yerçekimi kuvveti

Eklemlere etkiyen yerçekimi kuvveti ${}^0 \dot{v}_0$ ile G ifadelerinin eşitlenmesiyle (${}^0 \dot{v}_0 = G$) bulunabilir. Bu eşitlikte G yer çekimi vektörünü göstermektedir. Bu ifadeden robotun temel çerçevesinin yukarı yönde G ivmesiyle ivmelendiği anlamı çıkarılabilir. Bu yukarı yönlü ivme, bir ekleme yerçekimi ivmesinin uyguladığı etkinin aynısını uygular.

5.3. NS Robotunun Quaternion Yöntemi Kullanılarak Dinamik Modelinin Çıkarılması

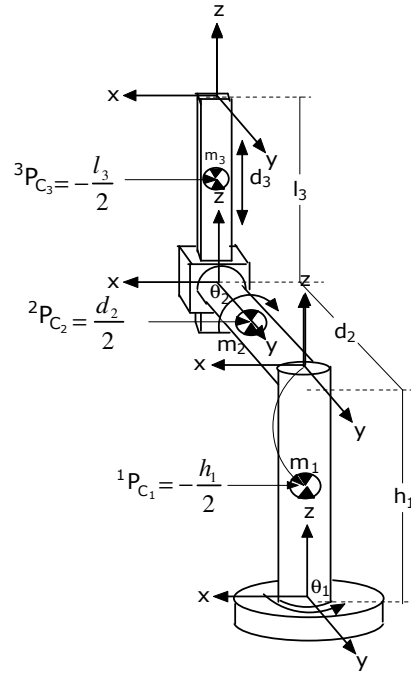
Şekil 5.2’de RRP eklem yapısına sahip olan NS robotunun katı gövde yapısı ve dinamik düzenleşimi görülmektedir.

NS robotunun her ekleminin yönelimini temsil eden ileri kinematik quaternion ifadeleri,

$$q_1 = [\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, 1 >] \quad (5.16)$$

$$q_2 = [\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, -1, 0 >] \quad (5.17)$$

$$q_3 = [1, 0] \quad (5.18)$$



Şekil 5.2: NS robotunun katı gövde yapısı ve dinamik düzenleşimi.

Ve ters kinematik quaternion gösterimleri

$$q_1^{-1} = [\cos \bar{\theta}_1, \sin \bar{\theta}_1 < 0, 0, -1 >] \quad (5.19)$$

$$q_2^{-1} = [\cos \bar{\theta}_2, \sin \bar{\theta}_2 < 0, 1, 0 >] \quad (5.20)$$

$$q_3^{-1} = [1, 0] \quad (5.21)$$

şeklinde yazılabilir. Quaternion yönteminde her bağıın kütle merkezinin konumunu yazmak için Şekil 5.2'de görüldüğü gibi temel koordinat sistemi bağların uç noktalarına yerleştirilir. Bu durumda ${}^1P_{C_1}$ ile ${}^3P_{C_3}$ sırasıyla Z_1 ve Z_3 ile zıt, ${}^2P_{C_2}$ ise Y_2 ile aynı yönde olduğundan her bağıın kütle merkezinin konumu aşağıdaki gibi elde edilir.

$${}^1P_{C_1} = \langle 0, 0, -\frac{h_1}{2} \rangle, \quad {}^2P_{C_2} = \langle 0, \frac{d_2}{2}, 0 \rangle, \quad {}^3P_{C_3} = \langle 0, 0, -\frac{l_3}{2} \rangle$$

Robot sıfır konumdayken 0P_1 , 1P_2 ve 2P_3 aşağıdaki gibi bulunur.

$${}^0P_1 = \langle 0, 0, h_1 \rangle, \quad {}^1P_2 = \langle 0, -d_2, 0 \rangle, \quad {}^2P_3 = \langle 0, 0, d_3 \rangle$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız (${}^0\omega_0 = 0$) ve ivme (${}^0\dot{\omega}_0 = 0$) sıfıra eşit olur. Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin Z ekseninde olduğundan aşağıdaki gibi gösterilir.

$${}^0\dot{v}_0 = g \hat{Z}_0 \quad (5.22)$$

Birinci eklem için dışa dönük ardışık denklemler:

Açısal hız

$${}^1\omega_1 = q_1^{-1} * {}^0\omega_0 + \dot{\theta}_1 \hat{Z}_1 = \langle 0, 0, \dot{\theta}_1 \rangle \quad (5.23)$$

Açısal ivme

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\omega}_1 &= q_1^{-1} * {}^0\dot{\omega}_0 + \ddot{\theta}_1 \hat{Z}_1 + (q_1^{-1} * {}^0\omega_0) \times \dot{\theta}_1 \hat{Z}_1 \\ &= \langle 0, 0, \ddot{\theta}_1 \rangle \end{aligned} \quad (5.24)$$

Doğrusal ivme

$$\begin{aligned} {}^1\dot{v}_1 &= q_1^{-1} * ({}^0\dot{\omega}_0 \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0 \times ({}^0\omega_0 \times {}^0P_1) + {}^0\dot{v}_0) \\ &= \langle 0, 0, g \rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi

$$\begin{aligned} {}^1\dot{v}_{C1} &= ({}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_{C1} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_{C1}) + {}^1\dot{v}_1) \\ &= \langle 0, 0, g \rangle \end{aligned} \quad (5.26)$$

Birinci ekleme ait kuvvet vektörü

$$\begin{aligned} {}^1F_1 &= m_1 {}^1\dot{v}_{C1} \\ &= \langle 0, 0, m_1 g \rangle \end{aligned} \quad (5.27)$$

Moment vektörü

$$\begin{aligned}
{}^1N_1 &= {}^C I_1 {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^C I_1 {}^1\omega_1) \\
&= [\langle I_{xx_1}, 0, 0 \rangle \cdot {}^1\dot{\omega}_1, \langle 0, I_{yy_1}, 0 \rangle \cdot {}^1\dot{\omega}_1, \langle 0, 0, I_{zz_1} \rangle \cdot {}^1\dot{\omega}_1] + \\
&\quad {}^1\omega_1 \times ([\langle I_{xx_1}, 0, 0 \rangle \cdot {}^1\omega_1, \langle 0, I_{yy_1}, 0 \rangle \cdot {}^1\omega_1, \langle 0, 0, I_{zz_1} \rangle \cdot {}^1\omega_1]) \\
&= \langle 0, 0, \ddot{\theta}_1 I_{zz_1} \rangle
\end{aligned} \tag{5.28}$$

İkinci eklem için dışa dönük ardışık denklemler aşağıdaki gibi gerçekleştirilir. İkinci eklem için açısal hızı

$${}^2\omega_2 = q_2^{-1} * {}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2 [-{}^2\hat{Y}_2] = q_2^{-1} * \langle 0, 0, \dot{\theta}_1 \rangle + \dot{\theta}_2 \langle 0, -1, 0 \rangle \tag{5.29}$$

Denklemden quaternion ve vektör çarpımı şöyle gerçekleştirilir.

$$q_2^{-1} * {}^1\omega_1 = {}^1\omega_1 + (\langle 0, \sin \bar{\theta}_2, 0 \rangle \times {}^1\omega_1) 2 \cos \bar{\theta}_2 + (\langle 0, \sin \bar{\theta}_2, 0 \rangle \times 2) \times (\langle 0, \sin \bar{\theta}_2, 0 \rangle \times {}^1\omega_1)$$

Sonuç olarak açısal hız

$${}^2\omega_2 = \langle \dot{\theta}_1 s \theta_2, -\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1 c \theta_2 \rangle \tag{5.30}$$

Dinamik denklemlerinin gösterimleri çok uzun olduğundan bundan sonraki denklemlerde aşağıdaki kısaltmalar kullanıldı.

$$s \theta_i = \sin \theta_i, \quad c \theta_i = \cos \theta_i$$

Açısal ivme

$$\begin{aligned}
{}^2\dot{\omega}_2 &= q_2^{-1} * {}^1\dot{\omega}_1 + \ddot{\theta}_2 [-{}^2\hat{Y}_2] + (q_2^{-1} * {}^1\omega_1) \times \dot{\theta}_2 [-{}^2\hat{Y}_2], \\
&= \langle s \theta_2 \ddot{\theta}_1 + c \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, -\ddot{\theta}_2, c \theta_2 \ddot{\theta}_1 - s \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \rangle
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Doğrusal ivme

$$\begin{aligned}
{}^2\dot{v}_2 &= q_2^{-1} * ({}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_2) + {}^1\dot{v}_1) \\
&= \langle d_2 c \theta_2 \ddot{\theta}_1 + g s \theta_2, d_2 \dot{\theta}_1^2, -d_2 s \theta_2 \ddot{\theta}_1 + g c \theta_2 \rangle
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi

$$\begin{aligned}
 {}^2\dot{v}_{C_2} &= ({}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_{C_2} + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_{C_2}) + {}^2\dot{v}_2) \\
 &= \left\langle \frac{1}{2}d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2, \frac{1}{2}d_2\dot{\theta}_1^2, -\frac{1}{2}d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gc\theta_2 \right\rangle
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Kuvvet vektörü

$$\begin{aligned}
 {}^2F_2 &= m_2 {}^2\dot{v}_{C_2} \\
 &= \langle F_{X_2}, F_{Y_2}, F_{Z_2} \rangle
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Denklemden

$$F_{X_2} = \frac{1}{2}m_2d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + m_2gs\theta_2, \quad F_{Y_2} = \frac{1}{2}m_2d_2\dot{\theta}_1^2 \quad \text{ve} \quad F_{Z_2} = -\frac{1}{2}m_2d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + m_2gc\theta_2$$

Moment vektörü

$$\begin{aligned}
 {}^2N_2 &= {}^{C_2}I_2 {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times ({}^{C_2}I_2 {}^2\omega_2) \\
 &= [\langle I_{xx_2}, 0, 0 \rangle \cdot {}^2\dot{\omega}_2, \langle 0, I_{zz_2}, 0 \rangle \cdot {}^2\dot{\omega}_2, \langle 0, 0, I_{yy_2} \rangle \cdot {}^2\dot{\omega}_2] + \\
 &\quad {}^2\omega_2 \times (\langle I_{xx_2}, 0, 0 \rangle \cdot {}^2\omega_2, \langle 0, I_{zz_2}, 0 \rangle \cdot {}^2\omega_2, \langle 0, 0, I_{yy_2} \rangle \cdot {}^2\omega_2) \\
 &= \langle N_{X_2}, N_{Y_2}, N_{Z_2} \rangle
 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Denklemden

$$\begin{aligned}
 N_{X_2} &= I_{xx_2}s\theta_2\ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} + I_{zz_2})c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, \quad N_{Y_2} = -I_{zz_2}\ddot{\theta}_2 - (I_{yy_2} - I_{xx_2})s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 \\
 N_{Z_2} &= I_{yy_2}c\theta_2\ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} - I_{zz_2})s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

Üçüncü eklem için dışa dönük ardışık denklemler aşağıdaki gibi gerçekleştirilir. Üçüncü eklem prizmatik olduğundan açılma hızı ve ivmesi ikinci eklemdenki değerlerle aynı olur. Bu durumda açılma hızı

$$\begin{aligned}
 {}^3\omega_3 &= q_3^{-1} * {}^2\omega_2 \\
 &= \langle \dot{\theta}_1s\theta_2, -\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1c\theta_2 \rangle
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Açısal ivme

$${}^3\dot{\omega}_3 = q_3^{-1} * {}^2\dot{\omega}_2$$

$$= \langle s\theta_2\ddot{\theta}_1 + c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, -\ddot{\theta}_2, c\theta_2\ddot{\theta}_1 - s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \rangle \quad (5.37)$$

Doğrusal ivme

$${}^3\dot{v}_3 = q_3^{-1} * \left[{}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_3 + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_3) + {}^2\dot{v}_2 \right] + 2({}^3\omega_3) \times \dot{d}_3 {}^3\hat{Z}_3 + \ddot{d}_2 {}^3\hat{Z}_3$$

$$= \langle \dot{v}_{x3}, \dot{v}_{y3}, \dot{v}_{z3} \rangle \quad (5.38)$$

Denklemden,

$$\dot{v}_{x3} = -d_3\ddot{\theta}_2 + d_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3$$

$$\dot{v}_{y3} = -d_3s\theta_2\ddot{\theta}_1 - 2d_3c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + d_2\dot{\theta}_1^2 - 2s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{d}_3$$

$$\dot{v}_{z3} = -d_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gc\theta_2 + \ddot{d}_3$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi

$${}^3\dot{v}_{C_3} = {}^3\dot{\omega}_3 \times {}^3P_{C_3} + {}^3\omega_3 \times ({}^3\omega_3 \times {}^3P_{C_3}) + {}^3\dot{v}_3$$

$$= \langle -\frac{1}{2}l_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_2 + \dot{v}_{x3}, \frac{1}{2}l_3(s\theta_2\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \dot{v}_{y3},$$

$$\frac{1}{2}l_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \dot{v}_{z3} \rangle \quad (5.39)$$

Kuvvet vektörü

$${}^3F_3 = m_3 {}^3\dot{v}_{C_3}$$

$$= \langle F_{x3}, F_{y3}, F_{z3} \rangle \quad (5.40)$$

Denklemden,

$$F_{x3} = -\frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3\ddot{\theta}_2 + m_3\dot{v}_{x3}, \quad F_{y3} = \frac{1}{2}l_3m_3(s\theta_2\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + m_3\dot{v}_{y3}$$

$$F_{z3} = \frac{1}{2}l_3m_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3\dot{v}_{z3}$$

Moment vektörü

$$\begin{aligned}
{}^3N_3 &= {}^C_3 I_3 \cdot {}^3\dot{\omega}_3 + {}^3\omega_3 \times {}^C_3 I_3 \cdot {}^3\omega_3 \\
&= [\langle I_{xx_3}, 0, 0 \rangle \cdot {}^3\dot{\omega}_3, \langle 0, I_{yy_3}, 0 \rangle \cdot {}^3\dot{\omega}_3, \langle 0, 0, I_{zz_3} \rangle \cdot {}^3\dot{\omega}_3] + \\
&\quad {}^3\omega_3 \times [\langle I_{xx_3}, 0, 0 \rangle \cdot {}^3\omega_3, \langle 0, I_{yy_3}, 0 \rangle \cdot {}^3\omega_3, \langle 0, 0, I_{zz_3} \rangle \cdot {}^3\omega_3] \\
&= \langle N_{X3}, N_{Y3}, N_{Z3} \rangle
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Denklemden,

$$\begin{aligned}
N_{X3} &= I_{xx_3} s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + (I_{xx_3} + I_{yy_3} - I_{zz_3}) c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
N_{Y3} &= -I_{yy_3} \ddot{\theta}_2 + (I_{xx_3} - I_{zz_3}) s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\
N_{Z3} &= I_{zz_3} c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + (I_{xx_3} - I_{yy_3} - I_{zz_3}) s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

Son ekleme ait moment vektörü bulunduğundan sonra içe dönük ardışık denklemleri kullanarak eklemlere etkiyen kuvvet ve torkları buluruz.

Robot manipülatörü uzayda serbestçe hareket ettiğinden, ${}^4f_4 = 0$ ve ${}^4n_4 = 0$ olur.

Bu durumda üçüncü eklem için kuvvet ifadesi 3F_3 ifadesine eşit olur.

$${}^3f_3 = q_4 * {}^4f_4 + {}^3F_3 \tag{5.42}$$

Üçüncü ekleme etkiyen tork ifadesi,

$$\begin{aligned}
{}^3n_3 &= {}^3N_3 + q_4 * {}^4n_4 + {}^3P_{C_3} \times {}^3F_3 + {}^3P_4 \times q_4 * {}^4f_4 \\
&= {}^3N_3 + {}^3P_{C_3} \times {}^3F_3 \\
&= \langle N_{X3}, N_{Y3}, N_{Z3} \rangle + \langle 0, 0, -\frac{l_3}{2} \rangle \times \langle F_{X3}, F_{Y3}, F_{Z3} \rangle \\
&= \langle N_{X3} + \frac{1}{2} l_3 F_{Y3}, N_{Y3} - \frac{1}{2} l_3 F_{X3}, N_{Z3} \rangle
\end{aligned} \tag{5.43}$$

İkinci ekleme etkiyen kuvvet

$$\begin{aligned}
{}^2f_2 &= q_3 * {}^3f_3 + {}^2F_2 = \langle F_{X3}, F_{Y3}, F_{Z3} \rangle + \langle F_{X2}, F_{Y2}, F_{Z2} \rangle \\
&= \langle F_{X2} + F_{X3}, F_{Y2} + F_{Y3}, F_{Z2} + F_{Z3} \rangle
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Denklemdede,

$$F_{X2} + F_{X3} = \frac{1}{2}m_2d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + m_2gs\theta_2 - \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3\ddot{\theta}_2 + m_3\dot{v}_{X3}$$

$$F_{Y2} + F_{Y3} = \frac{1}{2}m_2d_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3(s\theta_2\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + m_3\dot{v}_{Y3}$$

$$F_{Z2} + F_{Z3} = -\frac{1}{2}m_2d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + m_2gc\theta_2 + \frac{1}{2}l_3m_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3\dot{v}_{Z3}$$

$q_3 = [1,0]$ olduğundan çarpımda etkisizdir.

İkinci eklem için tork

$$\begin{aligned} {}^2n_2 &= {}^2N_2 + q_3 * {}^3n_3 + {}^2P_{C_2} \times {}^2F_2 + {}^2P_3 \times q_3 * {}^3f_3 \\ &= \langle n_{X2}, n_{Y2}, n_{Z2} \rangle \end{aligned} \quad (5.45)$$

Denklemdede,

$$n_{X2} = N_{X2} + N_{X3} + \frac{1}{2}d_2F_{Z2} + (\frac{1}{2}l_3 - d_3)F_{Y3}$$

$$n_{Y2} = N_{Y2} + N_{Y3} - (\frac{1}{2}l_3 - d_3)F_{X3}$$

$$n_{Z2} = N_{Z2} + N_{Z3} - \frac{1}{2}d_2(F_{X2})$$

Birinci eklem için tork ifadesi

$$\begin{aligned} {}^1n_1 &= {}^1N_1 + q_2 * {}^2n_2 + {}^1P_{C_1} \times {}^1F_1 + {}^1P_2 \times q_2 * {}^2f_2 \\ &= \langle n_{X1}, n_{Y2}, n_{Z1} \rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

Denklemdede,

$$n_{X1} = n_{X2}c\theta_2 - n_{Z2}s\theta_2 - d_2s\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) - d_2c\theta_2(F_{Z2} + F_{Z3})$$

$$n_{Z1} = I_{zz_1}\ddot{\theta}_1 + n_{X2}s\theta_2 + n_{Z2}c\theta_2 + d_2c\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) - d_2s\theta_2(F_{Z2} + F_{Z3})$$

Her bir ekleme etkiyen torku bulmak için, eklem hangi ekseninde ise ekleme ait tork ifadelerinde eksene karşılık gelen denklem seçilir. Birinci eklem Z ekseninde olduğu için tork ifadesinin üçüncü elemanı (n_{Z1}), birinci eklem için tork değerini verir.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= {}^1n_1^T \hat{Z}_1 \\ &= I_{zz_1} \ddot{\theta}_1 + n_{x_2} s \theta_2 + n_{z_2} c \theta_2 + d_2 c \theta_2 (F_{x_2} + F_{x_3}) - d_2 s \theta_2 (F_{z_2} + F_{z_3})\end{aligned}$$

Denklemden,

$$n_{x_2} = N_{x_2} + N_{x_3} + \frac{1}{2} d_2 F_{z_2} + \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3\right) F_{y_3}$$

$$n_{y_2} = N_{z_2} + N_{z_3} - \frac{1}{2} d_2 (F_{x_2})$$

Yukarıdaki matematiksel işlemler gerçekleştirilirse birinci eklem torku aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2))] \\ &\quad + c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + [d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \ddot{\theta}_2 - [d_2 m_3 s \theta_2] \ddot{d}_3 \\ &\quad + 2 s \theta_2 c \theta_2 [I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ &\quad - [d_2 m_3 s \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \dot{\theta}_2^2 - [2 d_2 m_3 c \theta_2] \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + [m_3 s^2 \theta_2 (-l_3 + 2 d_3)] \dot{d}_3 \dot{\theta}_1\end{aligned}\quad (5.47)$$

İkinci eklem -Y ekseninde olduğundan

$$\begin{aligned}\tau_2 &= {}^2n_2 [-{}^2\hat{Y}_2] = \langle n_{x_2}, n_{y_2}, n_{z_2} \rangle \cdot \langle 0, -1, 0 \rangle = -n_{y_2} \\ &= -N_{y_2} - N_{y_3} + \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3\right) F_{x_3} \\ &= I_{zz_2} \ddot{\theta}_2 + (I_{yy_2} - I_{xx_2}) s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + I_{yy_3} \ddot{\theta}_2 - (I_{xx_3} - I_{zz_3}) s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3\right) \left(-\frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 \ddot{\theta}_2\right) \\ &\quad + m_3 (-d_3 \ddot{\theta}_2 + d_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + d_2 c \theta_2 \ddot{\theta}_1 + g s \theta_2 - 2 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3)\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde gerekli işlemler yapıлып

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & I_{zz_2} \ddot{\theta}_2 + (I_{yy_2} - I_{xx_2}) s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + I_{yy_3} \ddot{\theta}_2 - (I_{xx_3} - I_{zz_3}) s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\
& - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} l_3 d_3 m_3 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} l_3 d_3 m_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - l_3 m_3 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 \\
& + \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c \theta_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_3 g m_3 s \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 d_3 m_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} l_3 d_3 m_3 \ddot{\theta}_2 \\
& + d_3^2 m_3 \ddot{\theta}_2 - d_3^2 m_3 s \theta_2 c \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - d_2 d_3 m_3 c \theta_2 \ddot{\theta}_1 - g d_3 m_3 s \theta_2 + 2 m_3 d_3 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3
\end{aligned}$$

denklem düzenlenirse ikinci ekleme etkiyen tork aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \ddot{\theta}_1 + [I_{zz_2} + I_{yy_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)] \ddot{\theta}_2 \\
& - s \theta_2 c \theta_2 [I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_3 [-l_3 + 2d_3] \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + g m_3 s \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Üçüncü eklem Z ekseninde ve prizmatik olduğundan tork ifadesi,

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & {}^3 f_3 {}^3 \hat{Z}_3 = \langle F_{X_3}, F_{Y_3}, F_{Z_3} \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle \\
& = F_{Z_3} \\
& = \frac{1}{2} l_3 m_3 (s^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3 \dot{v}_{Z_3} \\
& = \frac{1}{2} l_3 m_3 (s^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3 [-d_3 (s^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - d_2 s \theta_2 \ddot{\theta}_1 + g c \theta_2 + \ddot{d}_3]
\end{aligned}$$

olur. Denklem düzenlenirse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\tau_3 = -[d_2 m_3 s \theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_3] \ddot{d}_3 + [m_3 s^2 \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \dot{\theta}_1^2 + [m_3 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \dot{\theta}_2^2 + g m_3 c \theta_2 \tag{5.49}$$

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın birinci bölümünde, kartezyen uzayda beş farklı robot kinematik modelleme yöntemi kısaca özetlendi ve quaternion uzayında quaternion/vektör çifti kullanılarak robot manipülatörlerinin kinematik modelinin çıkarılması detaylı olarak anlatıldı.

Üçüncü ve dördüncü bölümde Quaternion yöntemi kullanarak onaltı adet temel endüstriyel robotun sırasıyla ileri ve ters kinematik çözümleri gerçekleştirildi. Beşinci bölümde ise RRP düzenlemesine sahip NS robotunun quaternion uzayında Newton-Euler yöntemi kullanılarak dinamik modeli çıkarıldı.

Bu konuyla ilgili gelecekte yapılabilecek çalışmalar şu şekilde sıralanabilir.

1. Quaternion yöntemi ile Kartezyen uzaydaki yöntemler kullanılarak elde edilen dinamik denklemlerin bilgisayar ortamında çalışma hızlarını karşılaştıran bir çalışma yapılabilir.
2. Quaternion yöntemiyle paralel robotların kinematik ve dinamik denklemleri elde edilebilir.
3. Quaternion yöntemiyle elde edilen dinamik denklemlerden faydalanarak endüstriyel robot manipülatörlerinin kontrolü gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

ASPRAGATHOS, NICHOLAS, A., DIMITROS, J. K., "A Comparative Study of Three Methods for Robot Kinematics", *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, Vol. 28, No. 2, (1998)

BALKAN, T., ÖZGÖREN, M.K., "A Method of Inverse Kinematics Solution Including Singular and Multiple Configurations for a Class of Robotic Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, (1999)

BİNGÜL, Z., KÜÇÜK, S., "Robot Tekniği I", *Birsen Yayınevi*, 132-134, (2005)

BİNGÜL, Z., KÜÇÜK, S., "Robot Tekniği II", basım aşamasında.

BİNGÜL, Z., Robot Tekniği Ders Notları, *Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mekatronik Mühendisliği*, Kocaeli, (2000)

CRAIG, J. J., "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", USA, (1989)

DENAVIT, J., HARTENBERG, R. S., "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", *ASME J. Appl. Mechanics*, pp. 215-221, (1955)

EVERETT, L. J., DRIELS, M., Mooring, B.W., "Kinematic Modelling for Robot Calibration", *In Proc. IEEE IN. Conf. Robotics Automat.* pp. 183-189, (1987)

FUNDA J., TAYLOR R. H., PAUL R.P., "On homogeneous transorms, quaternions, and computational efficiency", *IEEE Trans.Robot. Automat.*, vol. 6, pp. 382-388, (1990)

GU Y.L., Luh J., "Dual-number transformation and its application to robotics," *IEEE J. Robot. Automat.* Vol. 3, pp. 615-623, (1987)

GUPTA, K. C., "Kinematic Analysis of Manipulators Using Zero Reference Position Description", *International Journal of Robotics Research*, (1986)

HAMILTON, W. R., Elements of Quaternions. Vol. I and II., Newyork Chelsea, (1869)

HOLLERBACH, J. M., A Survey of Kinematic Calibration. In O Khatib, J. J. Craig, and T. Lozano-Perez, Eds., Robotics Review. Cambridge, MA: MIT Press. pp.208-242, (1988)

HUANG, B, and MILENKOVIC, V., "Kinematics of Major Robot Linkages", *Proc. 13th International Symposium on Industrial Robots. Robotics International of SME*, vol.12, pp. 16-31 to 16-47, (1983)

KIM J. H., Kumar V. R., "Kinematics of robot manipulators via line transformations," *J. Robot. Syst.*, Vol. 7, No. 4, pp. 649–674, (1990)

MOORING, B. M., ROTH, Z. S., DRIELS, M. R., "Fundamentals of Manipulators Calibration", New York, 1991.

ÖZGÖREN, M. K., "Application of Exponential Rotation Matrices to the Kinematic Analysis of Manipulators", *Proceeding Seventh World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Spain, (1987)

PERWIN, E., WEBB, J. A., Quaternions in Vision and Robotics. Dept. Comput. Sci. Carnegie-Mellon Univ. Tech. Rep, (1982)

SALAMIN E., "Application of quaternions to computation with rotations," Tech., AI Lab, Stanford Univ., (1979)

WU, C. H., and PAUL, R. P., "Resolved Motion Force Control of Robot Manipulators", pp. 266-275, (1982)

ZHUANG, H., "Kinematic Modelling, Identification and Compensation of Robot Manipulators", Ph.D. Dissertation, *Florida Atlantic Univ., Boca Raton*, (1989)

ZHUANG, Z., A, "Complete and Parametrically Continuous Kinematic Model for Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 4, (1992)

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında İzmit'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladı. 2000 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik Öğretmenliği Bölümü'nden 2005 yılında Elektronik Öğretmeni olarak mezun oldu. 2005-2006 yılları arasında, Kocaeli Derbent İlköğretim Okulu'nda bilgisayar öğretmeni olarak çalışırken Şubat 2006 senesinde Bilecik Merkez Endüstri Meslek Lisesi'ne atandı. Halen aynı okulda elektronik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.