KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIĞIN ZAYIF VE GÜÇLÜ FORMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

A. Arzu ARI

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Halis AYGÜN

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIĞIN ZAYIF VE GÜÇLÜ FORMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

A. Arzu ARI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 09.05.2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.06.2007

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Prof. Dr. Halis AYGÜN	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**	**Prof. Dr. Servettin BİLİR**
(.......................)	(.......................)	(.......................)

Üye	Üye
Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	**Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK**
(.......................)	(.......................)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora tezimin çalışmaları süresince, her zaman olduğu gibi, yoğun çalışmaları arasında değerli vakitlerini ayırarak, ilgi ve desteklerini esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Halis Aygün’ e, katkılarından dolayı Tez İzleme Komitesine, sevgi, sabır ve güvenleri ile beni teşvik eden aileme ve eşim Levent Arı'ya ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\forall$	: Evrensel niceleyici
$\exists$	: Varlıksal niceleyici
$\in$	: Eleman
$\subseteq$	: Alt küme
X, Y, Z,..	: Klasik kümeler
$\varnothing$	: Boş küme
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\wp(A)$	: A kümesinin kuvvet kümesi
$2^{(J)}$	: J kümesinin sonlu alt kümeler ailesi
(X,T)	: Klasik topolojik uzay
I	: [0,1] kapalı aralığı
L	: Latis
0, 1	: L latisinin en küçük ve en büyük elemanı
pr(L)	: L latisinin asal elemanlarının kümesi
M(L)	: L latisinin indirgenemez elemanlarının kümesi
$\bigvee$	: Supremum
$\bigwedge$	: İnfimum
$'$	: Sırayı tersine koruyan dönüşüm
(L, T_S)	: Scott topolojik uzay
f, g, h,…	: L-fuzzy kümeler
L^X	: X üzerindeki L-fuzzy kümeler ailesi
supp f	: f fuzzy kümesinin desteği
f'	: f fuzzy kümesinin tümleyeni
x_α, x_p	: Fuzzy noktalar
$pr(L^X)$	: L^X latisinin asal elemanlarının kümesi
$M(L^X)$	: L^X latisinin indirgenemez elemanlarının kümesi
$\overset{\circ}{f}$	: f fuzzy kümesinin smooth içi
$\overline{f}$	: f fuzzy kümesinin smooth kapanışı
${}_{\circ}f$	: f fuzzy kümesinin smooth ön-içi
${}_{-}f$	: f fuzzy kümesinin smooth ön-kapanışı
$f_{\circ}$	: f fuzzy kümesinin smooth yarı-içi
f_{-}	: f fuzzy kümesinin smooth yarı-kapanışı
$\varphi, \psi, \ldots$	: Fuzzy fonksiyonlar
(X, τ)	: L-fuzzy topolojik uzay
(X,t)	: Smooth L-fuzzy topolojik uzay
t	: Açıklığın derecesi
c	: Kapalılığın derecesi

(X,t,t*)	: Sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay
t*	: Açık olmama derecesi
ω_L (T)	: X üzerinde T klasik topolojisi tarafından üretilen L-fuzzy topoloji
ω_T	: X üzerinde T klasik topolojisi tarafından üretilen smooth L-fuzzy topoloji

SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIĞIN ZAYIF VE GÜÇLÜ FORMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

A. Arzu ARI

Anahtar Kelimeler: L-fuzzy küme, smooth L-fuzzy topolojik uzay, smooth güçlü kompaktlık, smooth P-kapalılık, smooth yarı-kompaktlık, smooth S*-kapalılık, smooth yarı-ön kompaktlık, smooth α-kompaktlık, açıklığın sezgisel derecesi, sezgisel smooth kompaktlık.

Özet: Bu tez çalışmasının amacı, smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda keyfi L-fuzzy kümeleri için kompaktlığın zayıf ve güçlü formları üzerine incelemeler yapmak ve bu formlar arasındaki ilişkileri araştırmaktır. Ayrıca sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaylarda, keyfi L-fuzzy kümeleri için tanımlanan kompaktlığın çeşitli formları ve aralarındaki ilişkileri incelemektir.

Tezin ilk bölümünde, latislerin genel özelliklerine değinilmiş, L-fuzzy küme tanımı, L-fuzzy topolojik uzay tanımı ve özellikleri verilerek klasik topolojik uzaylarla ilişkileri açıklanmıştır.

İkinci bölümde, smooth L-fuzzy topolojik uzayların tanımına ve özelliklerine değinilmiş, klasik topolojik uzaylarla ilişkileri sunularak, bu uzayda keyfi L-fuzzy kümelerinin çeşitli kompaktlık tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, smooth ön-açık kümeler yardımıyla tanımlanan smooth güçlü kompaktlık ve smooth P-kapalılık kavramları verilmiş, bazı karakterizasyonları incelenerek sağladığı özellikler araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, smooth yarı-açık kümeler yardımıyla tanımlanan smooth yarı-kompaktlık ve smooth S*-kapalılık kavramları verilmiş, diğer karakterizasyonları ve sağladığı özellikler incelenmiştir.

Beşinci bölümde, smooth yarı-ön açık kümeler yardımıyla tanımlanan smooth yarı-ön kompaktlık tanımı verildikten sonra, çeşitli karakterizasyonları ve özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde, smooth α-açık kümeler yardımıyla tanımlanan smooth α-kompaktlık tanımı verilmiş, diğer karakterizasyonları ve özellikler araştırılmıştır.

Son bölümdeyse, açıklığın sezgisel derecelendirilmesine değinilerek çeşitli özellikleri araştırılmış ve bu yapıda keyfi L-fuzzy kümeleri için çeşitli kompaktlık formları verilerek aralarındaki ilişkiler ve bazı özellikleri araştırılmıştır.

WEAK AND STRONG FORMS OF COMPACTNESS IN SMOOTH L-FUZZY TOPOLOGICAL SPACES AND THEIR RELATIONSHIP

A. Arzu ARI

Keywords: L-fuzzy set, smooth L-fuzzy topological space, smooth strong compactness, smooth P-closedness, smooth semi-compactness, smooth S*-closedness, smooth semi-pre compactness, smooth α-compactness, intuitionistic gradation of openness, intuitionistic smooth compactness.

Abstract: The aim of this study is to work on the weak and strong forms of the compactness of arbitrary L-fuzzy sets and investigate the relationships between these forms. Moreover, we defined compactness of the arbitrary L-fuzzy sets in the intuitionistic smooth fuzzy topological spaces and investigated various forms of this compactness and their relationships.

In the first chapter of the thesis, the basic definitions and properties of lattices and L-fuzzy sets are mentioned. After presenting fundamental concepts in L-fuzzy spaces, the relationships between classical spaces and L-fuzzy spaces are given.

In the second chapter, basic properties of smooth L-fuzzy spaces and relationships between classical topological spaces and smooth L-fuzzy topological spaces are presented. Definition of compactness of arbitrary L-fuzzy sets in smooth L-fuzzy topological space is given and some of their properties are studied.

In the third chapter, the concepts of smooth strong compactness and smooth P-closedness are defined by using smooth pre-open L-fuzzy sets. Different characterization of these concepts are obtained and some of their properties are analyzed.

In the forth chapter, the concepts of smooth semi-compactness and smooth S-closedness are defined with smooth semi-open L-fuzzy sets. Different characterization of these concepts are obtained and some of their properties are analyzed.

In the fifth chapter, by using smooth semi-pre open L-fuzzy sets, smooth semi-pre compactness is defined and different characterization of these concepts are obtained and some of their properties are analyzed.

In the sixth chapter, smooth α-compactness is given with smooth α-open L-fuzzy sets and different characterizations and properties are studied.

In the last chapter of the thesis, after presenting the definition of intuitionistic gradation of openness and some of it's properties, we defined intuitionistic smooth compactness, intuitionistic smooth almost compactness and intuitionistic smooth nearly compactness of arbitrary L-fuzzy sets in intuitionistic smooth fuzzy topological space. We also study some of their properties and the relations between these concepts.

1. ÖN BİLGİLER

1900'lerin ilk yıllarında, Jan Lukasiewicz iki değerli Aristo mantığına karşı bir öneride bulunmuştur. Açıkladığı üç değerli mantık en uygun olarak "belki" tanımıyla tercüme edilebilir ve doğru ile yanlış arasında bir değere sahiptir.
Donald Ervin Knuth, Lukasiewicz'den aldığı üç değerli mantığı, [0,1,2] tamsayı aralığı yerine [-1,0,1] aralığını kullanarak ifade etmiştir. Ancak bu öneri yaygınlaşmamış, önemsenmemiş ve karanlıkta kalmıştır.
Arend Heyting çok değerli mantığı genişletmiş olmasının yanı sıra sezgisel mantığın da kurucusudur.

Matematiğin sahip olduğu kesin kurallar yardımı ile günlük yaşantımızda karşılaştığımız belirsizlikleri gidermek için Zadeh [1], 1965 yılında fuzzy (bulanık) mantığını ve onun sonucunda fuzzy küme teorisini geliştirmiştir. Fuzzy küme teorisinde öncelikle fuzzy kümeyi, boştan farklı bir kümeden [0,1] kapalı birim aralığına bir fonksiyon olarak tanımlamış, ardından kümeler teorisinin temel kavramları olan birleşim, kesişim ve tümlemeyi fuzzy küme teorisinde vermiştir. Aslında bir fuzzy kümesi bir çeşit karakteristik fonksiyondur, ancak burada, kümenin elemanı olup olmamanın cevabı "evet" veya "hayır" kadar keskin değil, bundan daha geneldir, burada kümenin elemanı olup olmama derecelendirilerek tanımlanır. Zadeh' in yaptığı bu çalışmalar pür ve uygulamalı matematik alanlarında çalışan matematikçilerin yoğun ilgisini çekmenin yanı sıra yapay zeka, optimizasyon, ekonomi, işletme gibi birçok farklı alanlarda çalışan bilim insanlarını da etkilemiştir. Böylece birçok yönde yapılan bu çalışmalar sonucunda matematikte "Fuzzy Matematik" olarak adlandırılan yeni bir anabilim dalı doğmuştur.

Fuzzy kümelere de sistematik olarak uygulanmış olan topoloji, pür matematiğin en önemli dallarından biridir. İlk olarak 1968 yılında Chang [2], fuzzy topolojik uzaylar teorisini, temel topolojik kavramları fuzzy kümelerle gözönüne alarak vermiştir. Ayrıca bu çalışmasında, bir fuzzy kümesinin bir fonksiyon altındaki görüntü ve ters görüntü kavramlarını da vererek fonksiyonların süreklilik gibi bir takım topolojik özelliklerini de araştırmıştır. Chang' in ardılı olarak Lowen [3] 1976 yılında Chang' in tanımına, bütün sabit fonksiyonların topoloji tarafından içerilmesi gereğini ekleyerek yeni bir fuzzy topolojik uzay tanımı vermiştir. 80'li yılların başında, artık matematiğin bir branşı haline gelmiş olan fuzzy topoloji üzerindeki araştırmalarda belirgin bir artış yaşanmıştır. Bu dönemde birçok araştırmacı tarafından, kendi yaklaşımları doğrultusunda, çok çeşitli fuzzy topoloji tanımları verilmiş ve klasik topoloji teorisi paralelinde çalışmalar yapılmıştır.

Sostak [4, 5], verilmiş olan bütün fuzzy topoloji tanımlarının "fuzzy" olmalarının sadece içerdikleri kümelerle sınırlı kaldığına, fuzzy topolojinin boştan farklı klasik bir kümenin fuzzy kuvvet kümesinin, sonlu kesişim ve keyfi birleşimlerini içeren bir klasik alt kümesi olduğuna dikkat çekmiştir. Bunun, fuzzy topolojik uzay kavramının "fuzzy" olarak düşünülmesinde bir eksiklik olduğunu vurgulamıştır. Bu düşüncelerin ışığında Sostak tarafından yeni bir fuzzy topoloji tanımı verilmiştir. Bu yeni yaklaşımında Sostak' ın ilk amacı, fuzzy topolojiyi bir fuzzy alt küme olarak düşünmekti. İkinci amacı ise fuzzy kümelerinin, değeri 1 (yani tam açık fuzzy kümesi) ile 0 (yani tam açık olmayan fuzzy kümesi) arasında belirli dereceden açık olmasını sağlamaktı.

1992 yılına gelindiğinde, Sostak' ın amaçladığı yapıya benzer bir yapıyı, Sostak' ın çalışmalarından habersiz ve bağımsız olarak, Hazra, Samanta ve Chattopadhyay [6] fuzzy kümesinin açıklık derecesi kavramını tanımlamış, aynı fuzzy topoloji tanımını yeniden vermiştir. Aynı araştırmacılar, dereceli fonksiyon kavramını da tanımlayarak, dereceyi koruyan dönüşümler ve fuzzy topolojik uzayların kategorisi üzerine çalışmışlardır. Aynı yıl Ramadan [7] da, Sostak' ın tanımına benzer olan ve "smooth topoloji" olarak adlandırdığı bir fuzzy topoloji tanımını vermiş, [0,1] kapalı birim aralığı yerine daha genel olan latislerin de alınabileceğini ileri sürmüştür. Fuzzy topolojik uzayın bu yeni tanımı da daha sonra birçok yazar tarafından çalışılmıştır. [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]

Aygün, Warner ve Kudri [21] tarafından klasik bir topolojik uzaydan [0,1] kapalı birim aralığına tanımlı "α-alttan yarı-sürekli" ($\alpha \in I$) fonksiyonlar yardımıyla klasik topolojiden smooth fuzzy topoloji elde edilmiştir. Ardından I yerine L fuzzy latisi alınarak "α-Scott sürekli" adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyonlar kullanılarak klasik topolojiden smooth L-fuzzy topoloji elde edilmiştir.

Tez çalışmamızın iskeletini oluşturan kompaktlık kavramı ise topolojinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Bu nedenle kompaktlık bu alanda çalışma yapanlar için her zaman önemli görülen, ilgi çeken bir uğraş ve araştırma alanı olmuştur. Fuzzy topolojik uzaylarda kompaktlık kavramı ilk olarak Chang [2]' in 1968 yılında yapmış olduğu çalışmasında yer almıştır. Fakat tanımlamasının hemen ardından bu kompaktlığın bazı dezavantajları olduğu ortaya çıkmış ve fuzzy topolojik uzaylardaki kompaktlık tanımının klasik topolojik uzaylardaki tanımdan daha karmaşık olduğu görülmüştür. Chang' in arkasından Gougen [22] fuzzy kompaktlık üzerine çalışmış ve sonlu çarpım için Tychonoff teoreminin Chang' in verdiği kompaktlık tanımıyla sağlanmadığını göstererek, kendi verdiği tanımla Tychonoff teoreminin (sonlu kümeler için) sağlandığını ispatlamıştır. Bundan sonra Wong [23] fuzzy kompaktlık, fuzzy dizisel kompaktlık ve fuzzy sayılabilir kompaktlık üzerine çalışarak, fuzzy lokal kompaktlık tanımını vermiştir. Gantner, Steinlage ve Warren [24] bir L tam dağılımlı latisi için L-fuzzy kompaktlık tanımını vermiş, $\alpha \in L$ için bu kompaktlığı α-kompaktlık olarak adlandırmışlardır. Ayrıca α üzerinde kısıtlamalar yaparak keyfi çarpım için Tychonoff teoreminin ve tek nokta kompaktlaştırmasının sağlandığını göstermişlerdir. Lowen [25] da çeşitli kompaktlık tanımlarını [3] de vermiş olduğu fuzzy topolojik uzaylarda tanımlamış, aralarındaki ilişkileri incelemiştir. Bu çalışmalardan esinlenen birçok araştırmacı fuzzy topolojik uzaylarda kompaktlık üzerine pek çok çalışmada bulunmuş, çeşitli topolojik yapılar kullanarak yeni kompaktlık kavramları tanımlamış ve çalışmıştır [26, 27, 28, 29, 30]

Böylece klasik kompaktlığın fuzzy topolojik uzaylara genelleştirilmesi problemi 30 yılı aşan bir zaman boyunca araştırmacıları artan bir merakla çalışmalar yapmaya yöneltmiştir. Birçok fuzzy kompaktlık tanımı yayınlanmış, fuzzy kompaktlığın birçok çeşidi sunulmuş ve çalışılmıştır. Bütün bu kompaktlık çalışmaları içinde Warner ve Mclean [31] tarafından tanımlanan ve Kudri tarafından [26, 32] keyfi fuzzy kümelerine genişletilen kompaktlık tanımının diğerlerinden daha fazla tatmin edici özelliklere sahip olduğu görülmüştür. Bu kompaktlık baz alınarak, arka arkaya birçok çalışmalar yapılmıştır [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]. Bu seri çalışmalarda farklı örtüm tanımları kullanılarak RS-kompaktlık, S-kapalılık, …gibi kompaktlığın çeşitli formları tanımlanmıştır.

Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda keyfi fuzzy kümeleri için kompaktlık kavramı ilk kez 1997 yılında Aygün, Warner ve Kudri [21] tarafından verilmiştir. Bu çalışmada smooth Hausdorff uzay ve smooth lokal kompaktlık tanımları da verilmiştir. Daha sonra bu çalışmalar doğrultusunda 2001 yılında Ramadan ve Abbas [43] smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth hemen hemen kompaktlık, hafif kompaktlık ve yakın kompaktlık tanımlarını vermişler ve özelliklerini araştırmışlardır. Yine bu çalışmada regüler smooth L-fuzzy topolojik uzay tanımı vererek, bu kompaktlıkların regüler smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda denk olduklarını göstermişlerdir. 2003 yılında Chun-Kee Park, Won Keun Min ve Myeong Hwan Kim α-kompaktlığı smooth fuzzy topolojik uzaylarda tanımlamış, bazı yapısal özelliklerini araştırmışlardır. Ardından, Aygün ve Abbas [45] smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda relatif kompaktlık, RS-kompaktlık ve S-kapalılık kavramlarını tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir. Aynı çalışmada fuzzy tam bağlantısız uzay tanımını vererek, fuzzy tam bağlantısız uzayda Ramadan ve Abbas tarafından verilmiş olan kompaktlık tanımlarıyla kendi kompaktlık tanımlarının denk olduğunu göstermişlerdir. Smooth kompaktlık da birçok yazar için geniş bir çalışma alanı olmuştur [46, 47].

Son 5 yıllık dönemi kapsayan yeni bir topolojik çalışma alanı da "açıklığın sezgisel derecesi" dir. Açıklığın Sezgisel Derecesinin tanımı ilk olarak 2002 yılında Mondal ve Samanta [48] tarafından verilmiştir. Bu çalışmada Mondal ve Samanta smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda yapılmış olan çalışmalara [8, 9] paralel olarak incelemeler yapmış ve fuzzy topolojik uzaylardaki kompaktlıklarla ilişkili olan kompaktlık tanımları vermişlerdir.

Ardından 2005 yılında Min ve Park [49] açıklığın sezgisel derecesi ile ilgili incelemelerde bulunmuş, topolojik özelliklerini araştırmış ve sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaylarda kompaktlığın birçok çeşidini tanımlamıştır.

2005 yılında Abbas [50] da sezgisel kompaktlıklar üzerine çalışmış, sezgisel regüler uzay tanımını vererek tanımlamış olduğu kompaktlıkların sezgisel regüler uzaylarda denk olduğunu göstermiştir.

Yine 2005 yılında Rammadan, Kim ve Abbas [51] sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaylarda çeşitli kompaktlık tanımları vermiş, aralarındaki ilişkileri göstermiş ve hangi şartlarda denk oluklarını araştırmışlardır.

2006 yılında ise Abbas ve Aygün [52] sezgisel smooth fuzzy topolojik uzayların yarı-regülerliği üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Ancak yapılan bütün bu çalışmalarda kompaktlık uzayın kompaktlığı ile sınırlı kalmıştır, yani keyfi fuzzy kümelerinin kompaktlığı sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaylarda araştırılmamıştır. Ayrıca bu alanda çalışan yazarlar kompaktlıkla ilgili olarak ihtiyaç duyulan örtümleri kendi ihtiyaçları ve istekleri doğrultusunda seçmiş ve çalışmalarını bunlar üzerinde yapmışlardır.

1.1. Latisler ve Bazı Özellikleri

Tanım 1. 1. 1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in L$ için

$x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$

mevcutsa L kümesine bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve $L = L(\leq, \wedge, \vee)$ ile gösterilir. [53]

Tanım 1. 1. 2: $L = L(\leq, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. Eğer L' nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcutsa L' ye tam latis denir.

L' nin en büyük elemanı $\vee L = 1$ ve L' nin en küçük elemanı $\wedge L = 0$ ile gösterilir.

0 ile boş kümenin supremumunu, 1 ile de boş kümenin infimumunu gösterebiliriz. [53]

Tanım 1. 1. 3: $L = L(\leq, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. Eğer her $x \in L$ için

$x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$

olacak şekilde bir x' elemanı mevcutsa x' elemanına x' in tümleyeni denir. [53]

Tanım 1. 1. 4: Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\begin{aligned} {}' : L &\to L \\ x &\to x' \end{aligned}$$

dönüşümüne sırayı tersine koruyan dönüşüm denir: [53]

a) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$

b) $(a')' = a$

Önerme 1. 1. 5: L sırayı tersine koruyan dönüşümle bir tam latis olsun. Her $\{a_i \mid i \in J\} \subseteq L$ ailesi için

a) $(\bigvee_{i \in J} a_i)' = \bigwedge_{i \in J} a_i'$

b) $(\bigwedge_{i \in J} a_i)' = \bigvee_{i \in J} a_i'$ sağlanır. [53]

Tanım 1. 1. 6: $L = L(\leq,\wedge,\vee)$ bir latis olsun. Eğer bu L latisi aşağıdaki özellikleri sağlarsa L' ye dağılımlı latis denir. [54]

a) $\forall x, y, z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

b) $\forall x, y, z \in L$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Tanım 1. 1. 7: $L = L(\leq,\wedge,\vee)$ bir tam latis olsun. Eğer

$\{\{a_{i,j} \mid j \in J_i\} \mid i \in F\} \subseteq \wp(L) - \{\varnothing\}$ $(F \neq \varnothing)$ ailesi için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L' ye tam dağılımlı latis denir. [55]

a) $\bigwedge_{i\in F}(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in F} J_i}(\bigwedge_{i\in F} a_{i,\varphi(i)})$

b) $\bigvee_{i\in F}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi\in\prod_{i\in F} J_i}(\bigvee_{i\in F} a_{i,\varphi(i)})$ $(\varphi : F \to J(i) := J_i)$

Tanım 1. 1. 8: Sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı latise fuzzy latis denir ve $L = L(\leq,\wedge,\vee,')$ ile gösterilir. [53]

Tanım 1. 1. 9: L bir latis ve $0 \neq \alpha \in L$ olsun. Eğer $a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa α' ya L' nin bir indirgenemez (irreducible, coprime) elemanı denir ve M(L) ile gösterilir. [55]

M(L):=$\{\alpha \in L \mid \alpha,$ L' nin indirgenemez elemanı ve $\alpha \neq 0\}$

Tanım 1. 1. 10: L bir latis ve $1 \neq p \in L$ olsun. Eğer $a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa p' ye L' nin bir asal (prime) elemanı denir ve pr(L) ile gösterilir. [55]

pr(L):=$\{p \in L \mid p,$ L' nin asal elemanı ve $p \neq 1\}$

Tanımlar karşılaştırıldığında, sırayı tersine koruyan dönüşümle bir L latisi için

$\alpha \in M(L) \Leftrightarrow \alpha' \in pr(L)$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 1. 1. 11: L bir fuzzy latis olsun. Bu durumda L' deki her a elemanı için L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan en az bir B kümesi vardır öyle ki $\bigvee B = a$ sağlanır.

İspat: ([55], sayfa 66)

Bu teorem L' nin her elemanının L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olduğunu ifade eder. Benzer olarak L' nin her elemanı asal elemanlarından oluşan bir kümenin infimumuna eşittir.

Örnek 1. 1. 12: L=[0,1] için Pr(L)=[0,1), M(L)=(0,1]' dir.

L=I olması durumunda sırayı tersine koruyan dönüşüm

$' : I \to I$

$x \to 1 - x$ olarak tanımlanır.

1.2. L-Fuzzy Kümeler

Tanım 1. 2. 1: X klasik bir küme ve $\wp(X)$ X' in kuvvet kümesi olsun.

$A \in \wp(X)$ olmak üzere

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longrightarrow \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanan χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

A kümesinin tümleyeni olan A' kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{A'} : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longrightarrow \chi_{A'}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A' \\ 0, & x \notin A' \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Buradan görülür ki $\chi_{A'} = 1 - \chi_A$ ' dır.

Önerme 1. 2. 2: $\forall i \in J$ için $A_i \subseteq X$ ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$

b) $\chi_{\bigcup_{i \in J} A_i} = \bigvee_{i \in J} \chi_{A_i}$

c) $\chi_{\bigcap_{i \in J} A_i} = \bigwedge_{i \in J} \chi_{A_i}$

Özel olarak; a) $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$

b) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$

sağlanır.

Tanım 1. 2. 3: X boştan farklı bir klasik küme ve L bir fuzzy latis olmak üzere her $f : X \to L$ fonksiyonuna X' in bir L-fuzzy alt kümesi denir.

Özel olarak L = [0,1] alınırsa, her $f : X \to [0,1]$ fonksiyonuna X' in bir I-fuzzy alt kümesi (ve ya fuzzy alt kümesi) denir.

X' in her klasik alt kümesi karakteristik fonksiyonu ile göz önüne alındığında X' in bir fuzzy alt kümesi olur.

X' in bütün L-fuzzy kümelerinin ailesi L^X ile gösterilir, yani

$L^X := \{ f \mid f : X \to L \text{ bir fonksiyon } \}$' dir.

$x \in X$ ve $f \in L^X$ olmak üzere f(x) değerine, x elemanının f fuzzy kümesine ait olma derecesi denir.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi crisp fuzzy alt küme olarak adlandırılır.

$\{x \in X \mid f(x) > 0\} \subseteq X$ alt kümesine f fuzzy kümesinin desteği denir ve supp f ile gösterilir.

Her $x \in X$ için X üzerinde $f(x) = 0$ ve $g(x) = 1$ olarak tanımlanan f ve g L-fuzzy kümeleri sırasıyla 0_x ve 1_x olarak gösterilir. [57]

Tezin bundan sonraki kısmında, aksi belirtilmedikçe L bir fuzzy latis olarak alınacaktır.

Tanım 1. 2. 4: f ve g iki L-fuzzy kümesi olsun.

a) $f = g :\Leftrightarrow \ \forall x \in X$ için $f(x) = g(x)$

b) $f \leq g :\Leftrightarrow \ \forall x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$

c) $f' : X \to L$

$$x \to f'(x) := (f(x))'$$

şeklinde tanımlanan f' L-fuzzy kümesine f L-fuzzy kümesinin tümleyeni denir. [57]

Eğer L= I=[0,1] ise f'=1-f olur.

L-fuzzy kümelerinde birleşim ve kesişim işlemleri sırasıyla

$(f \vee g)(x) := \sup\{f(x), g(x)\}$ ve $(f \wedge g)(x) := \inf\{f(x), g(x)\}$

olarak tanımlanır. X' in tüm L-fuzzy kümelerinin ailesi L^X birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri ile bir fuzzy latistir. [57]

$$(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) := \bigvee_{i \in J} f_i(x) = \mathrm{Sup}\{f_i(x) \mid i \in J\} \quad \text{ve} \quad (\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) := \bigwedge_{i \in J} f_i(x) = \mathrm{\dot{I}nf}\{f_i(x) \mid i \in J\}$$

dir.

M(L) L' nin indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde, $M(L^X) = \{x_\alpha \mid x \in X,\ \alpha \in M(L)\}$ kümesinin elemanları X' in L-fuzzy noktaları olarak adlandırılır.

Burada $x_\alpha : X \to L$

$$y \to x_\alpha(y) := \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu durumda x' e x_α fuzzy noktasının desteği , α değerine de x_α fuzzy noktasının değeri (yüksekliği) denir ve supp $x_\alpha =$ x ve h(x_α) $= \alpha$ ile gösterilir. [32]

$x_\alpha \in M(L^X)$ ve $f \in L^X$ olmak üzere

$x_\alpha \in f :\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha$ olarak tanımlanır.

Ayrıca pr(L), L’ nin asal elemanların kümesi olmak üzere

$pr(L^X) = \{x_p \mid x \in X,\ \ p \in pr(L)\}$ olur. Burada

$x_p : X \longrightarrow L$

$$y \longrightarrow x_p(y) := \begin{cases} p, & y = x \\ 1, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. [32]

$pr(L^X)$’ in elemanları olan x_p’ lere de X’ in L-fuzzy noktaları denir.

$x_p \in pr(L^X)$ ve $f \in L^X$ olmak üzere

$x_p \in f :\Leftrightarrow f(x) \not\leq p$ olarak tanımlanır.

Uyarı 1. 2. 5: Teorem 1.1.11’ e göre X üzerindeki her L-fuzzy kümesi $M(L^X)$’ deki L-fuzzy noktalarının birleşimi şeklinde ifade edilir. Diğer bir ifadeyle her $f \in L^X$ için $f = \bigvee_{x_\alpha \in f} x_\alpha$ olur. [58]

Önerme 1. 2. 6 (De Morgan Kuralları): $\{f_i \in L^X \mid i \in J\}$ ailesi X üzerindeki L-fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde

a) $(\bigvee_{i \in J} f_i)' = \bigwedge_{i \in J} f_i'$

b) $(\bigwedge_{i \in j} f_i)' = \bigvee_{i \in J} f_i'$

sağlanır. [59]

Tanım 1. 2. 7: X ve Y iki klasik küme ve $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) $f \in L^X$ L-fuzzy kümesinin φ fonksiyonu altındaki görüntüsü

$\varphi(f) : Y \to L$

$$y \to \varphi(f)(y) := \sup\{f(x) \mid x \in X,\ x \in \varphi^{-1}(y)\} \quad (\forall y \in Y)$$

olarak tanımlanır. $\varphi^{-1}(y) = \varnothing$ ise $\varphi(f)(y) = 0$ olarak alınır.

(b) $g \in L^Y$ L-fuzzy kümesinin φ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$\varphi^{-1}(g): X \to L$

$$x \to \varphi^{-1}(g)(x) := (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \quad (\forall x \in X)$$

olarak tanımlanır. [2]

Önerme 1. 2. 8: $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ klasik kümeleri verilsin.

a) $\varphi(\chi_A) = \chi_{\varphi(A)}$

b) $\varphi^{-1}(\chi_B) = \chi_{\varphi^{-1}(B)}$ sağlanır.

Önerme 1. 2. 10: $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon, $f, f_1, f_2 \in L^X$ ve $g, g_1, g_2 \in L^Y$ olsun.

Bu takdirde

a) $f \leq \varphi^{-1}(\varphi(f))$

Eğer φ fonksiyonu 1-1 ise $f = \varphi^{-1}(\varphi(f))$ sağlanır.

b) $\varphi(\varphi^{-1}(g)) \leq g$

Eğer φ fonksiyonu örten ise $\varphi(\varphi^{-1}(g)) = g$ sağlanır.

c) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \varphi(f_1) \leq \varphi(f_2)$

d) $g_1 \leq g_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(g_1) \leq \varphi^{-1}(g_2)$

e) φ örten ise $\varphi(f') \geq (\varphi(f))'$, φ bire-bir ise $\varphi(f') \leq (\varphi(f))'$ sağlanır.

Eğer φ bire-bir ve örten ise $\varphi(f') = (\varphi(f))'$ olur.

f) $\varphi^{-1}(g') = (\varphi^{-1}(g))'$

g) $\{ f_i \in L^X \mid i \in J \}$ X üzerindeki L-fuzzy kümelerin bir ailesi ise

$$\varphi(\bigvee_{i \in J} f_i) = \bigvee_{i \in J} \varphi(f_i)$$

$$\varphi(\bigwedge_{i \in J} f_i) \subseteq \bigwedge_{i \in J} \varphi(f_i)$$

h) $\{ g_i \in L^Y \mid i \in J \}$ Y üzerindeki L-fuzzy kümelerin bir ailesi ise

$$\varphi^{-1}(\bigvee_{i \in J} g_i) = \bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(g_i)$$

$$\varphi^{-1}(\bigwedge_{i \in J} g_i) = \bigwedge_{i \in J} \varphi^{-1}(g_i) \quad [2]$$

1.3. L-Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 1. 3. 1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir fuzzy latis olsun. Eğer $\tau \subseteq L^X$ fuzzy alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ailesine X üzerinde bir (Chang) L-fuzzy topoloji denir. [2]

1) $0_X, 1_X \in \tau$

2) $\forall f, g \in \tau$ için $f \wedge g \in \tau$

3) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq \tau$ ailesi için $\bigvee_{i \in J} f_i \in \tau$

(X, τ) ikilisi de bir (Chang) L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır. τ' nun elemanlarına açık L-fuzzy kümeleri denir.
Eğer $f' \in \tau$ ise f' ye kapalı L-fuzzy kümesi denir. Kapalı L-fuzzy kümelerinin ailesi τ' ile gösterilir.

L= I=[0,1] olması durumunda (X, τ) ikilisine bir (Chang) I-fuzzy topolojik uzay denir.

Tanım 1. 3. 2: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki L-fuzzy topolojik uzay olsun.

a) $\varphi : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy süreklidir $:\Leftrightarrow$ $\forall g \in \tau_Y$ için $\varphi^{-1}(g) \in \tau_X$.

b) $\varphi : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy açıktır $:\Leftrightarrow$ $\forall g \in \tau_X$ için $\varphi(g) \in \tau_Y$.

c) $\varphi : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy kapalıdır $:\Leftrightarrow$ $\forall g \in \tau_X{}'$ için $\varphi(g) \in \tau_Y{}'$. [2]

Uyarı 1. 3. 3: Klasik topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde fuzzy topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların fuzzy sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği fuzzy topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen, Chang' in fuzzy topoloji tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 1. 3. 4: X boştan farklı klasik bir küme, L bir fuzzy latis ve $\tau \subseteq L^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde bir (Lowen) L-fuzzy topoloji denir. [3]

L1) $\forall \alpha : X \to L$ sabit fonksiyonu için $\alpha \in \tau$

L2) $\forall f, g \in \tau$ için $f \wedge g \in \tau$

L3) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq \tau$ ailesi için $\bigvee_{i \in J} f_i \in \tau$

(X, τ) ikilisine de (Lowen) L- fuzzy topolojik uzay denir.

Tanım 1. 3. 5: (X, τ) bir L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun. f L-fuzzy kümesinin içi ve kapanışı sırasıyla

$$\overset{\circ}{f} := \bigvee \{h \in L^X \mid h \leq f, h \in \tau\}$$

$$\overline{f} := \bigwedge \{h \in L^X \mid f \leq h, h \in \tau'\}$$

olarak tanımlanır. [3]

Klasik topolojik uzaylarda bilinen iç ve kapanış özellikleri L-fuzzy topolojik uzaylar için de geçerlidir.

Tanım 1. 3. 6: (X, τ) bir L-fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$\tau_A := \{f_{|A} \mid f \in \tau\}$ ailesi A üzerinde bir fuzzy topolojidir.

Bu fuzzy topolojiye, τ ' nun A alt kümesi üzerinde ürettiği fuzzy alt uzay topolojisi denir. (A, τ_A) L-fuzzy topolojik uzayına da (X, τ) L-fuzzy topolojik uzayının alt uzayı adı verilir. [24]

1.4. Klasik ve Fuzzy Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Tanım 1. 4. 1: (X,T) bir klasik topolojik uzay, f: X$\rightarrow$ R bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

f : (X,T) $\rightarrow$ (R, T_e) fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı-süreklidir :

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$: $\forall x \in U$ için $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$

Buradan

f : (X,T) $\rightarrow$ (R, T_e) fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı-süreklidir

$\Leftrightarrow$ f : (X,T) $\rightarrow$ $(R, T_{sağ})$ $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.

elde edilir. Burada

$T_{sağ} = \{(\alpha,\infty) \mid \alpha \in R\} \cup \{Ø,R\}$' dir.

Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında alttan yarı-sürekli ise f fonksiyonuna alttan yarı-sürekli fonksiyon denir.

R yerine I = [0,1]$\subseteq$ R aldığımızda alt uzay topolojisi tanımından

$(T_{sağ})_I := T_r = \{ I \cap (\alpha,\infty) \mid (\alpha,\infty) \in T_{sağ} \} \cup \{Ø,I\} = \{ (\alpha,1] \mid 0 \le \alpha < 1 \} \cup \{Ø,I\}$

I = [0,1] kapalı aralığının sağ topolojisi elde edilir.

f : (X,T) $\rightarrow$ I alttan yarı-süreklidir $\Leftrightarrow$ f : (X,T) $\rightarrow$ (I, T_r) süreklidir.

$\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in [0,1)$ için $f^{-1}(\alpha,1] \in T$. [60]

Önerme 1. 4. 2: (a) Her sabit fonksiyon alttan yarı-süreklidir.

(b) f ve g alttan yarı-sürekli fonksiyonlar ise f $\wedge$ g alttan yarı-süreklidir.

(c) $\{f_i\}_{i\in J}$ alttan yarı-sürekli fonksiyonların ailesi ise $\bigvee_{i\in J} f_i$ alttan yarı-süreklidir.

(d) $G \in T \Leftrightarrow \chi_G$ alttan yarı-süreklidir. [60]

Önerme 1. 4. 3: T , X kümesi üzerinde klasik bir topoloji olsun. Bu takdirde

$\omega(T) := \{f \mid f : (X,T) \rightarrow I \text{ alttan yarı-süreklidir } \} \subseteq I^X$

ailesi X kümesi üzerinde bir (Lowen) fuzzy topolojidir.

İspat: ([61], S 88)

Tanım 1. 4. 4: L bir tam latis ve $U \subseteq L$ olsun. Eğer U aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa U kümesine L' nin Scott açık alt kümesi denir. [55]

a) $a \in U$ ve $a \leq b$ ise $b \in U$ ' dur.

b) $D \subseteq L$ yönlendirilmiş bir küme ve $\bigvee D \in U \Rightarrow \exists d \in D$ öyle ki $d \in U$ ' dur.

L' nin bütün Scott açık alt kümelerinin ailesi L üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye L' nin Scott topolojisi denir ve T_S ile gösterilir.

Önerme 1. 4. 5: L bir tam dağılımlı latis ve $p \in Pr(L)$ olsun. Bu taktirde L üzerindeki Scott topoloji $\{x \in L \mid x \not\leq p\}$ formundaki kümeler tarafından üretilir. [31]

Tanım 1. 4. 6: (X,T) bir klasik topolojik uzay, L bir fuzzy latis ve $f : (X,T) \to (L,T_S)$ bir fonksiyon olsun. Eğer L' nin her Scott açık alt kümesinin ters görüntüsü (X,T) topolojik uzayında açık ise f fonksiyonu Scott sürekli (veya sürekli) olarak adlandırılır. [55]

Önerme 1. 4. 5' ten

$f : (X,T) \to (L,T_S)$ Scott süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{x \in L \mid x \not\leq p\}) \in T$ elde ederiz.

L = I olması durumunda Scott süreklilik alttan yarı-sürekliliğe denk olur, yani

$f : (X,T) \to I$ Scott süreklidir $\Leftrightarrow \forall p \in Pr(I) = [0,1)$ için $f^{-1}((p,1]) \in T$

$\Leftrightarrow$ f alttan yarı-süreklidir. [55]

Önerme 1. 4. 7: (X,T) bir klasik topolojik uzay ve L bir fuzzy latis olsun. (X,T)' den (L,T_S) ' ye Scott sürekli olan tüm fonksiyonların ailesi

$\omega_L(T) := \{f \mid f : (X,T) \to (L,T_S)$ Scott sürekli $\}$

X üzerinde bir L-fuzzy topolojidir.

L= I olması durumunda $\omega_L(T) = \omega(T)$ elde edilir.

İspat: ([61], sayfa 88)

Tanım 1. 4. 8: T, X üzerinde bir klasik topoloji olmak üzere $\omega_L(T)$' ye T topolojisi tarafından üretilen L-fuzzy topoloji denir.

(X,τ) bir L-fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer $\omega_L(T)=\tau$ olacak şekilde X üzerinde klasik bir T topolojisi mevcut ise (X,τ) L-fuzzy topolojik uzayına topolojik olarak üretilmiştir denir. [3]

Önerme 1. 4. 9: (X,T) bir klasik topolojik uzay, $f \in L^X$ ve $A \subseteq X$ olsun.

a) f, $(X,\omega_L(T))$'de açıktır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Pr(L)$ için $f^{-1}(\{x \in L \mid x \not\leq p\}) \in T$ dir.

b) f, $(X,\omega_L(T))$'de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\forall a \in L$ için $f^{-1}(\{x \in L \mid x \geq a\})$ kümesi (X,T)' da kapalıdır.

c) A, (X,T)' de açıktır $\Leftrightarrow$ χ_A, $(X,\omega_L(T))$' de açıktır.

d) A, (X,T)' de kapalıdır $\Leftrightarrow$ χ_A, $(X,\omega_L(T))$' de kapalıdır.

İspat: ([32], sayfa 53)

Lemma 1. 4. 10: (X,T_X) ve (Y,T_Y) iki klasik topolojik uzay olsun.

$\varphi:(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varphi:(X,\omega_L(T_X))\to(Y,\omega_L(T_Y))$ fuzzy süreklidir. [3]

Sonuç 1. 4. 11: KT klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi, L-FT de L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonların kategorisi olsun.

$\omega_L : KT \to L\text{-}FT$

$\quad\quad T \to \omega_L(T)$

olarak tanımlanan dönüşüm KT ile L-FT kategorileri arasında bir funktordur. [3]

Tanım 1. 4. 12: (X,T) bir klasik topolojik uzay olsun. Eğer

"(X,T) klasik topolojik uzayı P özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow$ $(X,\omega_L(T))$ üretilmiş L-fuzzy topolojik uzayı P_f özelliğine sahiptir."

özelliği sağlanıyorsa, L-fuzzy topolojik uzaylardaki bir P_f özelliği klasik topolojik uzaylardaki bir P özelliğinin iyi genelleştirilmişidir denir. [3]

2. SMOOTH L-FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

1968 yılında Chang [2]' in, bir X kümesi üzerinde fuzzy topolojiyi tanımlamasının ardından, bazı yazarlar onun tanımının yeterince "fuzzy" olmadığı konusundaki düşüncelerini ortaya koydular. Bu yazarlar, Chang' in tanımındaki "fuzzy" kavramının sadece kümelerin "fuzzy" olmasını içerdiğini, bir fuzzy kümesinin açıklık kavramının "fuzzy" olmasının tanımlanmadığını öne sürmüşlerdir. Bu düşüncelerin ışığında Sostak topolojik yapının "fuzzy" olması üzerinde çalışmalarda bulunmuştur. Bu yeni yapıda Chang' in tanımladığı topolojiden farklı olarak, topolojinin kendisi de "fuzzy" dir, yani Chang' in tanımındaki fuzzy topoloji, fuzzy kümeler ailesinin bir klasik alt kümesi iken, Sostak [4, 5]' ın tanımladığı fuzzy topoloji fuzzy kümeler ailesinin bir fuzzy alt kümesidir. Ayrıca Sostak bu çalışmalarıyla kümenin açıklığını da derecelendirmiştir. Ardından birçok araştırmacı ve çalışma grubu, bu konuda çok çeşitli tanımlar vermiş ve incelemelerde bulunmuştur. Bu araştırmacılardan biri olan Ramadan [7] bu yapıyı "Smooth Topoloji" olarak adlandırmış ve onu fuzzy latislere genişletmiştir.

Bu bölümde öncelikle smooth L-fuzzy topolojik uzaylar tanıtılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ardından α-Scott sürekli fonksiyonlar kullanılarak, Aygün [62] tarafından incelenmiş olan smooth L-fuzzy topolojik uzay ve klasik topolojik uzay ilişkisi verilmiştir. Son olarak da Aygün, Warner ve Kudri [21]' nin smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda keyfi fuzzy kümeleri için tanımlamış olduğu kompaktlık ve bu kompaktlığın çeşitli yazarlar tarafından, smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda incelenmiş olan zayıf ve güçlü formlarının tanımları verilmiş ve onların özellikleri incelenmiştir.

2.1. Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2. 1. 1: $X \neq \varnothing$ ve L bir fuzzy latis olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $t : L^X \rightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir smooth L-fuzzy topoloji ve ya açıklığın derecelendirilmesi denir.

AD1) $t(0_X) = t(1_X) = 1$

AD2) $\forall f, g \in L^X$ için $t(f \wedge g) \geq t(f) \wedge t(g)$

AD3) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ için $t(\bigvee_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} t(f_i)$

(X,t) ikilisine de smooth L-fuzzy topolojik uzay denir.

Her $f \in L^X$ için t(f) değeri, f fuzzy alt kümesinin açıklık derecesi olarak adlandırılır.

L-fuzzy topoloji (Tanım 1. 3. 1.) L^X ' in klasik bir alt kümesi olduğu halde smooth L- fuzzy topoloji L^X ' in bir fuzzy alt kümesidir. [7]

Örnek 2. 1. 2: (X,T) bir klasik topolojik uzay olsun. t:=$\chi_T : 2^X \rightarrow 2 = \{0,1\}$ olarak tanımladığımızda (X,T) klasik topolojik uzayını smooth fuzzy topolojik uzay olarak göz önüne alabiliriz.

Örnek 2. 1. 3: (X, τ) bir L-fuzzy topolojik uzay olmak üzere $t := \chi_\tau : L^X \rightarrow 2 = \{0,1\}$ olarak aldığımıza (X, τ) L-fuzzy topolojik uzayını smooth L-fuzzy topolojik uzay olarak göz önüne alabiliriz.

Tanım 2. 1. 4: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $c : L^X \rightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi denir. [7]

KD1) $c(0_X) = c(1_X) = 1$

KD2) $\forall f, g \in L^X$ için $c(f \vee g) \geq c(f) \wedge c(g)$

KD3) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ için $c(\bigwedge_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} c(f_i)$

Önerme 2. 1. 5: t, X üzerinde bir smooth L-fuzzy topoloji olsun.

$$c_t : L^X \to L$$
$$f \to c_t(f) := t(f')$$

olarak tanımlanan dönüşüm X üzerinde kapalılığın derecelendirilmesidir. [7]

Önerme 2. 1. 6: c, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi olsun.

$$t_c : L^X \to L$$
$$f \to t_c(f) := t(f')$$

olarak tanımlanan dönüşüm X üzerinde bir smooth L-fuzzy topolojidir. [7]

Sonuç 2. 1. 7: t ve c, X üzerinde sırasıyla smooth topoloji ve kapalılığın derecelendirilmesi ise $t_{c_t} = t$ ve $c_{t_c} = c$ ' dir.

Tanım 2. 1. 8: t_1 ve t_2 X üzerinde iki smooth topoloji olsun.
$\forall f \in L^X$ için $t_1(f) \geq t_2(f)$ ise t_1, t_2 ' den güçlü veya t_1, t_2 ' den zayıf denir ve $t_1 \geq t_2$ ile gösterilir. [7]

Önerme 2. 1. 9: $\{t_i \mid i \in J\}$ ailesi X üzerinde smooth L-fuzzy topolojilerin bir ailesi ise

$$t := \bigwedge \{t_i \mid i \in J\},\ t(f) := \bigwedge \{t_i(f) \mid i \in J\}$$

ile tanımlanan $t : L^X \to L$ dönüşümü X üzerinde bir smooth L-fuzzy topolojidir.
İspat: ([4], S 372)

Teorem 2. 1. 10: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$t_A : L^A \to L$$
$$f \to t_A(f) := \bigvee \{t(g) \mid g \in L^X \text{ ve } g_{|A} = f\}$$

olarak tanımlanan dönüşüm A üzerinde bir smooth L-fuzzy topolojidir. [7]
İspat: ([4], S 372)

Tanım 2. 1.11: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. (A, t_A) smooth L-fuzzy topolojik uzayına (X,t)' nın bir alt uzayı ve t_A ' ya ise t'nin A üzerinde ürettiği smooth L-fuzzy topoloji denir. [7]

Teorem 2. 1. 12: (A, t_A), (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzayının bir alt uzayı ve $f \in L^X$ olsun.

a) $c_{t_A}(f) := \bigvee \{c_t(g) \mid g \in L^X \text{ ve } g_{|A} = f\}$

b) $B \subseteq A \subseteq X$ ise $t_B = (t_A)_B$ sağlanır.

İspat: ([4], S 373)

Tanım 2. 1.13: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun. f' nin smooth içi ve smooth kapanışı sırasıyla

$$\overset{\circ}{f} := \bigvee \{h \in L^X \mid h \leq f \text{ ve } t(h) > 0\}$$

$$\overline{f} := \bigwedge \{h \in L^X \mid f \leq h \text{ ve } t(h') > 0\}$$

olarak tanımlanır. [47]

Önerme 2. 1. 14: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in L^X$ olsun.

a) $f \leq g \Rightarrow \overset{\circ}{f} \leq \overset{\circ}{g}$ ve $\overline{f} \leq \overline{g}$

b) $(\overline{f})' = (f')^{\circ}$ ve $(\overset{\circ}{f})' = (f')^{-}$

c) $t(f) > 0 \Rightarrow f = \overset{\circ}{f}$

d) $c(f) > 0 \Rightarrow f = \overline{f}$

İspat: ([47], S 84-85)

Tanım 2. 1. 15: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

a) φ smooth süreklidir $:\Leftrightarrow \forall f \in L^Y$ için $t_X(\varphi^{-1}(f)) \geq t_Y(f)$ [7]

b) φ smooth zayıf süreklidir $:\Leftrightarrow \forall f \in L^Y$ için $t_Y(f) > 0$ ise $t_X(\varphi^{-1}(f)) > 0$ [4]

Tanımlar karşılaştırıldığında smooth sürekli her fonksiyonun smooth zayıf sürekli olduğu görülür.

Teorem 2. 1. 16: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. [4]

a) φ smooth süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $c_{t_X}(\varphi^{-1}(f)) \geq c_{t_Y}(f)$

b) φ mooth zayıf süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^Y$ için $c_{t_Y}(f) > 0$ ise $c_{t_X}(\varphi^{-1}(f)) > 0$ sağlanır.

Teorem 2. 1. 17: (X, t_X), $(Y, t_Y))$ ve (Z, t_Z) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ smooth sürekli dönüşümler ise $\psi \circ \varphi : X \to Z$ dönüşümü smooth süreklidir. [7]

Teorem 2. 1. 18: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ smooth sürekli ve $A \subseteq X$ ise $\varphi_{|A} : (A, t_A) \to (Y, t_Y)$ smooth süreklidir. [7]

Önerme 2. 1. 19: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü smooth sürekli ise her $g \in L^Y$ için $(\varphi^{-1}(g))^{-} \leq \varphi^{-1}(\overline{g})$ sağlanır.

İspat: ([47], S 86)

Tanım 2. 1. 20: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar, c_{t_X} ve c_{t_Y} sırasıyla X ve Y üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. [7]

a) φ smooth açıktır denir $:\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^X$ için $t_Y(\varphi(f)) \geq t_X(f)$

b) φ smooth kapalıdır denir $:\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^X$ için $c_{t_Y}(\varphi(f)) \geq c_{t_X}(f)$

Tanım 2. 1. 21: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar olsun. $\varphi : X \to Y$ dönüşümüne smooth homeomorfizm denir $:\Leftrightarrow$ φ bire-bir, örten, φ ve φ^{-1} smooth süreklidir. [4]

Tanım 2. 1. 22: Smooth homeomorfizmi altında korunan özelliğe smooth topolojik özellik denir. [4]

Teorem 2. 1. 23: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \rightarrow Y$ bire-bir, örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) φ smooth homeomorfizmdir.

b) φ smooth açık ve smooth süreklidir.

c) φ smooth kapalı ve smooth süreklidir. [4]

2.2. Klasik ve Smooth L-Fuzzy Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Tanım 2. 2. 1: (X, T) bir klasik topolojik uzay ve $\alpha \in L$ olsun.

$f : (X, T) \rightarrow (L, T_S)$ fonksiyonu α-Scott süreklidir: $\Leftrightarrow$ $\alpha \not\leq p$ olan her $p \in pr(L)$ için $f^{-1}(\{a \in L : a \not\leq p\}) \in T$ dir. [21]

$L = I$ ise α-Scott süreklilik α-alttan yarı sürekliliğe denktir, yani

$f : (X, T) \rightarrow I$ α-Scott süreklidir: $\Leftrightarrow$ $\alpha > p$ olan her $p \in pr(I) = [0,1)$ için $f^{-1}((p,1]) \in T$

$\Leftrightarrow$ f α-alttan yarı süreklidir.

Bu tanımlardan aşağıdakiler kolaylıkla görülür:

Scott sürekli her fonksiyon her $\alpha \in L$ için α-Scott süreklidir.

Scott sürekli her fonksiyon 1-Scott süreklidir.

Her fonksiyon 0-Scott süreklidir.

Lemma 2. 2. 2: $f, g : (X, T) \rightarrow L$ iki fonksiyon olsun. Her $p \in pr(L)$ için $(f \wedge g)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) = f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$ sağlanır.

İspat: $x \in (f \wedge g)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$

$\Leftrightarrow (f \wedge g)(x) \not\leq p \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x) \not\leq p$

$\Leftrightarrow f(x) \not\leq p$ ve $g(x) \not\leq p \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$ ve $x \in g^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$

Lemma 2. 2. 3: $\forall i \in J$ için $f_i : (X,T) \to L$ bir fonksiyon olsun. Her $p \in pr(L)$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$ sağlanır.

İspat: $x \in (\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \Leftrightarrow (\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$

$\Leftrightarrow \exists i \in J \;:\; f_i(x) \not\leq p \Leftrightarrow \exists i \in J \;:\; x \in f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$

Lemma 2. 2. 4: (X, T) bir klasik topolojik uzay olsun.

a) $f, g : (X,T) \to L$ sırasıyla α_1-Scott sürekli ve α_2-Scott sürekli ise $f \wedge g : (X,T) \to L$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2$-Scott süreklidir.

b) $\forall i \in J$ için $f_i : (X,T) \to L$ α_i-Scott sürekli ise $\bigvee_{i\in J} f_i : (X,T) \to L$ $\bigwedge_{i\in J} \alpha_i$-Scott süreklidir.

İspat: a) f ve g sırasıyla α_1-Scott sürekli ve α_2-Scott sürekli, $p \in pr(L)$ ve $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \not\leq p$ olsun. Buradan $\alpha_1 \not\leq p$ ve $\alpha_2 \not\leq p$ olur.

f α_1-Scott sürekli olduğundan $f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$ ve g α_2-Scott sürekli olduğundan $g^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$ dir.

p asal olduğundan Lemma 2. 2. 2' den

$(f \wedge g)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) = f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \cap g^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})$

$\Rightarrow f \wedge g$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2$-Scott süreklidir.

b) $\bigwedge_{i\in J} \alpha_i \not\leq p$ olan $p \in pr(L)$ alalım.

$\Rightarrow \forall i \in J$ için $\alpha_i \not\leq p$

$\forall i \in J$ için f_i α_i-Scott sürekli olduğundan $f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$ ' dir. Buradan $\bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$ elde ederiz.

Lemma 2. 2. 3' den $(\bigvee_{i\in J} f_i)^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$ ' dir.

$\Rightarrow \bigvee_{i\in J} f_i$, $\bigwedge_{i\in J} \alpha_i$-Scott süreklidir.

Teorem 2. 2. 5: T, X üzerinde bir klasik topoloji olmak üzere

$$\omega_T : L^X \to L$$
$$f \to \omega_T(f) := \bigvee \{\alpha \in L \mid f \ \ \alpha\text{-Scott sürekli}\}$$

dönüşümü X üzerinde bir smooth L-fuzzy topolojidir.

İspat: (S1) Sabit her fonksiyon Scott sürekli ve Scott sürekli her fonksiyon 1-Scott sürekli olduğundan $\omega_T(0_X) = \omega_T(1_X) = 1$ olur.

(S2) $f, g \in L^X$ alalım.

$$\omega_T(f) := \bigvee \{\alpha \in L \mid f \ \ \alpha\text{-Scott sürekli}\}$$

$$\omega_T(g) := \bigvee \{\lambda \in L \mid g \ \ \lambda\text{-Scott sürekli}\}$$

$$\omega_T(f \wedge g) := \bigvee \{\beta \in L \mid f \wedge g \ \ \beta\text{-Scott sürekli}\} \quad \text{olsun.}$$

L tam dağılımlı olduğundan

$$\omega_T(f) \wedge \omega_T(g) = \bigvee \{\alpha \in L \mid f \ \ \alpha\text{-Scott sürekli}\} \wedge \bigvee \{\lambda \in L \mid g \ \ \lambda\text{-Scott sürekli}\}$$
$$= \bigvee \{\alpha \wedge \lambda \in L \mid f \ \ \alpha\text{-Scott sürekli}, \ \ g \ \ \lambda\text{-Scott sürekli}\}$$

İddia ediyoruz ki;

$$A = \{\alpha \wedge \lambda \in L \mid f \ \ \alpha\text{-Scott sürekli}, \ \ g \ \ \lambda\text{-Scott sürekli}\}$$
$$\subseteq \{\beta \in L \mid f \wedge g \ \ \beta\text{-Scott sürekli}\} = B$$

sağlanır. Gerçekten

$\alpha \wedge \lambda \in A \Rightarrow$ f α-Scott sürekli ve g λ-Scott süreklidir.

Lemma 2. 2. 4 (a)' dan $f \wedge g$, $\alpha \wedge \lambda$-Scott süreklidir. Eğer $\beta := \alpha \wedge \lambda \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow \bigvee A \leq \bigvee B \Rightarrow \omega_T(f \wedge g) \geq \omega_T(f) \wedge \omega_T(g)$ elde edilir.

(S3) $(f_i)_{i \in J} \subset L^X$ alalım.

$\forall i \in J$ için $\omega_T(f_i) = \bigvee \{\alpha_i \mid f_i \ \ \alpha_i\text{-Scott sürekli}\}$ ve

$$\omega_T(\bigvee_{i \in J} f_i) = \bigvee \{\beta \in L \mid \bigvee_{i \in J} f_i \ \ \beta\text{-Scott sürekli}\} \ \text{olsun.}$$

L tam dağılımlı olduğundan,

$$\bigwedge_{i \in J} \omega_T(f_i) = \bigwedge_{i \in J} (\bigvee \{\alpha_i \in L \mid f_i \ \ \alpha_i\text{-Scott sürekli}\})$$

$= \bigvee \{ \bigwedge \alpha_i \in L \mid f_i \ \ \alpha_i \text{ - Scott sürekli} \}$ olur.

İddia ediyoruz ki

$A = \{ \bigwedge_{i \in J} \alpha_i \mid f_i \ \ \alpha_i \text{ - Scott sürekli} \} \subseteq \{ \beta \in L \mid \bigvee_{i \in J} f_i \ \ \beta \text{ - Scott sürekli} \} = B$

sağlanır. Gerçekten

$\bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in A \ \Rightarrow \ \forall i \in J$ için f_i , α_i-Scott süreklidir.

Lemma 2. 2. 4. (b)' den $\bigvee_{i \in J} f_i$, $\bigwedge_{i \in J} \alpha_i$-Scott sürekli olur. Eğer $\beta := \bigwedge_{i \in J} \alpha_i \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B \ \Rightarrow \bigvee A \leq \bigvee B \ \Rightarrow \ \omega_T(\bigvee_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \omega_T(f_i)$ elde edilir.

Not: L = I olması durumunda, α-Scott süreklilik α-alttan yarı-sürekiliğe denk olduğundan

$$\omega_T : I^X \to I$$
$$f \to \omega_T(f) = \bigvee \{ \alpha \in I \mid f \ \ \alpha \text{ - alttan yarı - sürekli} \}$$

olur.

Tanım 2. 2. 6: Bir önceki teoremde elde edilen ω_T smooth L-fuzzy topolojisine T klasik topolojisi tarafından üretilmiş smooth L-fuzzy topoloji veya kısaca üretilmiş smooth L-fuzzy topoloji ve (X, ω_T) smooth L-fuzzy topolojik uzayına da üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzay denir. [21]

(X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzayının üretilmiş olması için gerek ve yeter şart $\omega_T = t$ olacak şekilde bir T klasik topolojisinin var olmasıdır.

Lemma 2. 2. 7: (X, T) bir klasik topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$A \in T \Leftrightarrow \omega_T(\chi_A) \neq 0$.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in T$ olsun. χ_A süreklidir, buradan da χ_A Scott süreklidir. Böylece χ_A 1-Scott süreklidir. Dolayısıyla $\omega_T(\chi_A) = 1 \neq 0$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\omega_T(\chi_A) \neq 0$ olsun.

$\omega_T(\chi_A) = \bigvee \{ \alpha \in L \mid \chi_A \ \ \alpha \text{ - Scott sürekli} \} \neq 0$

$\Rightarrow \exists \alpha \in L \ : \ \chi_A \ \ \alpha$-Scott süreklidir.

$\Rightarrow \alpha \not\leq p$ olan $\forall p \in pr(L)$ için $\chi_A^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T$

$\Rightarrow \ \chi_A^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) = A \in T$ 'dir.

Lemma 2. 2. 8: (X, T_X) ve (Y, T_Y) klasik topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\varphi : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varphi : (X, \omega_{T_X}) \to (Y, \omega_{T_Y})$ smooth süreklidir.

İspat: $\varphi : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ sürekli olsun.

$f \in L^Y$ alalım. Buradan

$\omega_{T_Y}(f) = \bigvee \{\beta \in L \mid f : (Y, T_Y) \to L \ \ \beta\text{-Scott sürekli}\}$ ' dir.

İddia ediyoruz ki

A:=$\{\beta \in L \mid f \ \ \beta$-Scott sürekli$\} \subseteq \{\alpha \in L \mid \varphi^{-1}(f) \ \ \alpha$-Scott sürekli$\}$=:B

sağlanır. Gerçekten

$\beta \in A \Rightarrow f : (Y, T_Y) \to L \ \ \beta$-Scott süreklidir.

$\Rightarrow \beta \not\leq p$ olan her $p \in pr(L)$ için $f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}) \in T_Y$ ' dir.

$\varphi : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ sürekli olduğundan $\beta \not\leq p$ olan her $p \in pr(L)$ için

$\varphi^{-1}(f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})) \in T_X$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})) &= \{x \in X \mid \varphi^{-1}(f)(x) \not\leq p\} \\ &= \{x \in X \mid f(\varphi(x)) \not\leq p\} \\ &= \{x \in X \mid \varphi(x) \in f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})\} \\ &= \{x \in X \mid x \in \varphi^{-1}(f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\}))\} \\ &= \varphi^{-1}(f^{-1}(\{a \in L \mid a \not\leq p\})) \in T_X \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(f) : (X, T_X) \to L \ \ \beta$-Scott süreklidir. Dolayısıyla $\beta \in B$ ' dir. Buradan da $A \subseteq B$ elde edilir ve $\bigvee A \leq \bigvee B$ sağlanır.

Dolayısıyla da $\omega_{T_X}(\varphi^{-1}(f)) \geq \omega_{T_Y}(f)$ ' dir.

Sonuç 2. 2. 9: Klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SLFT olmak üzere,

$\omega : \mathrm{TOP} \to \mathrm{SLFT}$

$\qquad T \to \omega(T) := \omega_T$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur. [21]

Böylece, bir klasik topolojik uzaydan bir smooth L-fuzzy topojik uzay ve bunun sonucunda da TOP ile SLFT kategorileri arasında bir funktor elde ettik. Bu smooth L-fuzzy topolojik uzaylar için ‘ iyi genelleştirme’ kriterini verir. Eğer

“(X,T) klasik topolojik uzay P özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ smooth L-fuzzy topolojik uzay P_f özelliğine sahiptir.”

özelliği sağlanıyorsa, smooth L-fuzzy topolojik uzaylardaki P_f özelliği klasik topolojik uzaylardaki P özelliğinin iyi genelleştirilmesidir denir. [21]

Lemma 2. 2. 10: t, X üzerinde bir smooth L-fuzzy topoloji olsun.

$\psi(t) := \{A \subseteq X \mid t(\chi_A) = 1\}$ ailesi X üzerinde bir klasik topolojidir.

İspat: (T1) $\chi_\varnothing = 0_X$ ve $\chi_X = 1_X$ ve $t(0_X) = t(1_X) = 1$ olduğundan $\varnothing, X \in \psi(t)$ olur.

(T2) $G, H \in \psi(t) \Rightarrow t(\chi_G) = 1$ ve $t(\chi_H) = 1$ olur.

$t(\chi_{G \cap H}) = t(\chi_G \wedge \chi_H)$ ve t X üzerinde smooth topoloji olduğundan

$t(\chi_G \wedge \chi_H) \geq t(\chi_G) \wedge t(\chi_H) = 1$’ dir.

$\Rightarrow t(\chi_{G \cap H}) = 1 \Rightarrow G \cap H \in \psi(t)$ olur.

(T3) $(G_i)_{i \in J} \subseteq \psi(t) \Rightarrow \forall i \in J$ için $t(\chi_{G_i}) = 1 \Rightarrow \bigwedge_{i \in J} t(\chi_{G_i}) = 1$ olur.

$t(\chi_{\bigcup_{i \in J} G_i}) = t(\bigvee_{i \in J} \chi_{G_i})$ ve t, X üzerinde smooth L-fuzzy topoloji olduğundan

$t(\chi_{\bigcup_{i \in J} G_i}) \geq \bigwedge_{i \in J} t(\chi_{G_i}) = 1$’ dir. Buradan $t(\chi_{\bigcup_{i \in J} G_i}) = 1$ dolayısıyla da $\bigcup_{i \in J} G_i \in \psi(t)$ elde edilir.

Lemma 2. 2. 11: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

$\varphi : (X t_X) \to (Y, t_Y)$ smooth sürekli ise $\varphi : (X, \psi(t_X)) \to (Y, \psi(t_Y))$ süreklidir.

İspat: $\varphi : (X,\ t_X) \to (Y,\ t_Y)$ smooth sürekli olsun.

$G \in \psi(t_Y)$ alalım.

$\psi(t_Y)$ ' nin tanımından $t_Y(\chi_G) = 1$ ' dir.

$t(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = t(\varphi^{-1}(\chi_G))$ ve φ smooth sürekli olduğundan $t(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) \geq t_Y(\chi_G) = 1$

$\Rightarrow t(\chi_{\varphi^{-1}(G)}) = 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(G) \in \psi(t) \Rightarrow$ $\varphi : (X, \psi(t_X)) \to (Y, \psi(t_Y))$ sürekli olur.

Sonuç 2. 2. 12: Klasik topolojik uzaylar ile onlar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi TOP, smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ile onlar arasındaki smooth sürekli fonksiyonların kategorisi SLFT olmak üzere,

ψ : SLFT $\to$ TOP

$\quad t \to \psi(t)$

olarak tanımlanan dönüşüm bu kategoriler arasında bir funktordur.[21]

Önerme 2. 2. 13: ψ : SLFT $\to$ TOP ve ω : TOP $\to$ SLFT olmak üzere $\psi \circ \omega$ funktoru idantiktir.

İspat: $(\psi \circ \omega)(T) = \psi(\omega_T) = \{A \subseteq X \mid \omega_T(\chi_A) = 1\} = \{A \subseteq X \mid A \in T\} = T$

2.3. Smooth L-fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlıklar

Tanım 2. 3. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \nleq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) \nleq p\}_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \nleq p \quad (g(x) \geq p')$ sağlanır.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t crisp ise, yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki gibi olur:

g (smooth) kompakttır: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) = 1\}_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ sağlanır. [21]

Böylece, t' nin crisp olması durumunda smooth kompaktlık Warner ve McLean [31] tarafından tüm uzay için tanımlanan ve Kudri [26]' nin keyfi L-fuzzy kümelerine genelleştirdiği L-fuzzy kompaktlık tanımına denk olmaktadır. Dolayısıyla, smooth kompaktlık L-fuzzy kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirmesi olur.

L=I olması durumunda bütün uzay için kompaktlık tanımı aşağıdaki şekilde olur:

(X,t) (smooth) kompakttır: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p$ $(\forall x \in X)$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) > p\}_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) > p$ $(\forall x \in X)$ ' dir.

Bu durumda, eğer t crisp ise I-fuzzy topolojik uzaylardaki kompaktlık Lowen [3]' ın güçlü fuzzy kompaktlık tanımına denk olur.

Teorem 2. 3. 2: (X,T) klasik topolojik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ (X, ω_T) üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth kompakttır.

İspat: ([62], S 179)

Teorem 2. 3. 3: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth sürekli bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ smooth kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ smooth kompakttır.

İspat: ([43], S 71)

Tanım 2. 3. 4: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth hemen hemen kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$

olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ sağlanır.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth hemen hemen kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t crisp ise, yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki gibi olur:

g (smooth) hemen hemen kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$

olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) = 1\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ sağlanır. [43]

Böylece, t' nin crisp olması durumunda smooth hemen hemen kompaktlık Warner [42] tarafından tanımlanan ve Kudri [36]' nin keyfi L-fuzzy kümeleri için genelleştirdiği hemen hemen kompaktlık tanımına denk olmaktadır. Dolayısıyla, smooth hemen hemen kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki hemen hemen kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirmesi olur.

L=I olması durumunda bütün uzay için kompaktlık tanımı aşağıdaki şekilde olur:

(X,t) (smooth) hemen hemen kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p \quad (\forall x \in X)$

olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) > p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) > p \quad (\forall x \in X)$ ' dir.

Bu durumda, eğer t crisp ise I-fuzzy topolojik uzaylardaki kompaktlık Lowen [25]' ın hemen hemen kompaktlık tanımına denk olur.

Teorem 2. 3. 5: (X,T) klasik topolojik uzayı hemen hemen kompakttır $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth hemen hemen kompakttır.
İspat: ([43], S 67)

Teorem 2. 3. 6: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth sürekli bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ smooth hemen hemen kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakttır.
İspat: ([43], S 71)

Tanım 2. 3. 7: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
g smooth yakın kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$$\exists F \in 2^{(J)} \ : \ (\bigvee_{i \in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p') \text{ sağlanır.}$$

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth yakın kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t crisp ise, yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki şekilde elde edilir:
g (smooth) yakın kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) = 1\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$$\exists F \in 2^{(J)} \ : \ (\bigvee_{i \in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p') \text{ sağlanır. [43]}$$

Böylece, t' nin crisp olması durumunda smooth yakın kompaktlık Warner ve Kudri [36] tarafından tanımlanan yakın kompaktlık tanımına denk olmaktadır. Bu durumda smooth yakın kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki yakın kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirmesi olur.

L=I olması durumunda bütün uzay için kompaktlık tanımı aşağıdaki şekilde olur:

(X,t) (smooth) yakın kompakttır: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p \quad (\forall x \in X)$ olacak biçimdeki L-fuzzy kümelerinin her $\{f_i \mid t(f_i) > p\}_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} \; : \; (\bigvee_{i\in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) > p \quad (\forall x \in X)$ ’ dir.

Bu durumda, eğer t crisp ise I-fuzzy topolojik uzaylardaki kompaktlık Lowen [25]’ ın hemen hemen kompaktlık tanımı ile çakışır.

Teorem 2. 3. 8: (X,T) klasik topolojik uzayı yakın kompakttır $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth yakın kompakttır.

İspat: ([43], S 68)

Teorem 2. 3. 9: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth sürekli bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ smooth yakın kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakttır.

İspat: ([43], S 72)

Teorem 2. 3. 10: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth kompakt $\Rightarrow$ g smooth yakın kompakt $\Rightarrow$ g smooth hemen hemen kompakttır.

İspat: ([43], S 69)

Tanım 2. 3. 11: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzayı regülerdir: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $t(f) \not\leq p$ olacak biçimdeki her $f \in L^X$ için

$f = \bigvee \{g \in L^X \mid t(g) \geq t(f) \text{ ve } \overline{g} \leq f\}$ ’ dir. [43]

Teorem 2. 3. 12: Smooth hemen hemen kompakt ve smooth regüler L-fuzzy topolojik uzayı smooth kompakttır.
İspat: ([43], S 69)

Teorem 2. 3. 13: Smooth yakın kompakt ve smooth regüler L-fuzzy topolojik uzayı smooth kompakttır.
İspat: ([43], S 69)

Tanım 2. 3. 14: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.
f smooth yarı-açıktır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ için $\exists g \in L^X$ öyle ki $t(g) \not\leq p$ ve $g \leq f \leq \overline{g}$ dır. [45]

Tanım 2. 3. 15: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşüm olsun.
a) φ smooth yarı-süreklidir:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $t_Y(g) \not\leq p$ olan her $g \in L^Y$ için $\varphi^{-1}(g)$ smooth yarı-açıktır.
b) φ smooth kararsızdır:$\Leftrightarrow$ Her $g \in L^Y$ smooth yarı-açık için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth yarı-açıktır. [45]

Tanım 2. 3. 16: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
g smooth RS-kompakttır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$$\exists F \in 2^{(J)} \ : \ (\bigvee_{i \in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p') \text{ sağlanır. [45]}$$

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth RS-kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t crisp ise, yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise, bu tanım aşağıdaki gibi olur:

g (smooth) RS-kompakttır: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ $\quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p$ $\quad (g(x) \geq p')$ sağlanır.

Böylece, t' nin crisp olması durumunda smooth yakın kompaktlık Kudri [32] tarafından tanımlanan RS-kompaktlık tanımına denk olmaktadır. Bu durumda smooth RS-kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki RS-kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara bir genelleştirmesi olur.

Teorem 2. 3. 17: (X,T) klasik topolojik uzayı RS-kompakttır $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth RS-kompakttır.
İspat: ([4], S 230)

Teorem 2. 3. 18: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth yarı- sürekli bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ smooth RS-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakttır.
İspat: ([45], S 230)

Tanım 2. 3. 19: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
g smooth S-kapalıdır: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ $\quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p$ $\quad (g(x) \geq p')$ sağlanır. [45]

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth S-kapalı L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

Teorem 2. 3. 20: (X,T) klasik topolojik uzayı S-kapalıdır $\Leftrightarrow (X,\omega_T)$ üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth S-kapalıdır.
İspat: ([45], S 230)

Teorem 2. 3. 21: (X,t_X) ve (Y,t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth sürekli ve smooth kararsız bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ smooth RS-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S-kapalıdır.
İspat: ([45], S 232)

Böylece, aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd} & \text{S-kapalı} \arrow[dr] & \\ \text{RS-kompakt} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Hemen hemen kompaktı} \\ & \text{Yakın kompakt} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Tanım 2. 3. 22: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzayına tamamen bağlantısız uzay (fuzzy extremally disconnected) denir: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $t(f) \not\leq p$ olan her $f \in L^X$ için $t(\overline{f}) \not\leq p$ sağlanır. [45]

Teorem 2. 3. 23: (X,t) bir smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:
a) X smooth RS-kompakttır.
b) X smooth hemen hemen kompakttır.
c) X smooth yakın kompakttır.
d) X smooth S-kapalıdır.
İspat: ([45], S 230)

3. SMOOTH GÜÇLÜ KOMPAKTLIK VE SMOOTH P-KAPALILIK

Klasik topolojik uzaylarda güçlü kompaktlık, 1982 yılında Atia, El Deeb ve Hasamin [63] tarafından ön-açık kümeler yardımıyla tanımlanmıştır: X klasik topolojik uzayının güçlü kompakttır ancak ve ancak X' in her ön-açık örtümü sonlu bir alt örtüme sahiptir. Benzer düşünceyle P-kapalılığın tanımı da verilmiştir.

Fuzzy topolojik uzaylarda güçlü kompaktlık ve P-kapalılık tanımları Nanda ve Zahran [65] tarafından çalışılmıştır. Kudri ve Warner [37] 1995 yılında L-fuzzy topolojik uzaylarda keyfi L-fuzzy kümelerinin güçlü kompaktlığı tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. 2000 yılında, Aygün ve Kudri [66] keyfi L-fuzzy kümelerinin P-kapalılığını tanımlayarak, özelliklerini araştırmış ve diğer kompaktlıklarla ilişkilerini incelemiştir.

Bu bölümde smooth güçlü kompaktlık ve smooth P-kapalılığın temel yapı taşı olan smooth ön-açık kümeler tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Ardından smooth güçlü kompaktlık ve smooth P-kapalılık tanımlanmış, çeşitli özellikleri araştırılarak diğer kompaktlık tanımlarıyla ilişkileri incelenmiştir.

3.1. Önerilen Tanımlar

Tanım 3. 1. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

a) f smooth ön-açıktır:$\Leftrightarrow$ $f \le \overset{\circ}{\overline{f}}$

b) f smooth ön-kapalıdır:$\Leftrightarrow$ $\overline{\overset{\circ}{f}} \le f$

c) Eğer f hem smooth ön-açık hem de smooth ön-kapalı ise f smooth ön K-açık olarak adlandırılır.

Önerme 3. 1. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ smooth ön-açık ise $f' \in L^X$ smooth ön-kapalıdır.

İspat: f smooth ön-açık ise $f \le \overset{\circ}{\overline{f}}$ ’ dir. Buradan

$(\overset{\circ}{\overline{f}})' \le f' \Rightarrow ((\overline{f})')^{-} \le f' \Rightarrow (f')^{\circ -} \le f'$ ’ dir. Dolayısıyla $f' \in L^X$ smooth ön-kapalıdır.

Tanım 3. 1. 3: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay olsun. $f \in L^X$ kümesinin smooth ön-içi, smooth ön- kapanışı sırasıyla

$${}_\circ f = \bigvee \{g \in L^X \mid g \le f \text{ ve } g \text{ smooth ön-açık}\}$$

$${}_- f = \bigwedge \{g \in L^X \mid g \ge f \text{ ve } g \text{ smooth ön-kapalı}\}$$

olarak tanımlanır.

Açık olarak $f \le {}_- f \le \overline{f}$ ve $\overset{\circ}{f} \le {}_\circ f \le f$ sağlanır.

Ayrıca $f \in L^X$ smooth ön-açık ise ${}_\circ f = f$ ve smooth ön-kapalı ise ${}_- f = f$ ’ dir.

Önerme 3. 1. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

a) Her $p \in pr(L)$ için $t(f) \not\le p$ ise f smooth ön-açıktır.

b) Her $p \in pr(L)$ için $c_t(f) \not\le p$ ise f smooth ön-kapalıdır.

c) $({}_- f)' = {}_\circ(f')$ ve $({}_\circ f)' = {}_-(f')$ sağlanır.

İspat: (a) $p \in pr(L)$ ve $t(f) \nleq p$ olsun. Buradan t(f)>0' dır.

Önerme 2. 1. 14.(c)' den $f = \overset{\circ}{f}$ ' dir. Ayrıca $f \leq \overline{f}$ olduğundan $\overset{\circ}{f} = f \leq \overset{\circ}{\overline{f}}$ sağlanır. Dolayısıyla f smooth ön-açıktır.

(b) $p \in pr(L)$ ve $c_t(f) \nleq p$ olsun. Buradan $t(f') \nleq p$ ' dir. (a)' dan f' smooth ön-açık, dolayısıyla da f smooth ön-kapalıdır.

(c)

$$
\begin{aligned}
({}_{-}f)' &= (\bigwedge \{h \in L^X \mid f \leq h \ \text{ ve } \ h \text{ smooth ön-kapalı}\})' \\
&= \bigvee \{h' \mid h \in L^X, h' \leq f' \ \text{ ve } \ h' \text{ smooth ön-açık}\} \\
&= \bigvee \{k \in L^X \mid f' \leq k \ \text{ ve } \ k \text{ smooth ön-açık}\} \\
&= {}_{\circ}(f')
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tanım 3. 1. 5: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar olsun.

$\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümüne;

a) smooth ön-kararsızdır denir: $\Leftrightarrow$ Her $g \in L^Y$ smooth ön-açık için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth ön-açıktır.

b) smooth zayıf ön-kararsızdır denir: $\Leftrightarrow g \in L^Y$ smooth ön-açık için $\varphi^{-1}(g) \leq {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}g))$

Tanım 3. 1. 6: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth güçlü kompakttır: $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \nleq p \ \ (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} \ : \ (\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \nleq p \ \ (g(x) \geq p')$ ' dür.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth güçlü kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisinin crisp olması durumunda; yani $t: L^X \to \{0,1\}$ olması durumunda bu tanım Kudri [37] tarafından L-fuzzy topolojik uzaylarda verilmiş olan güçlü kompaktlık tanımına denk olmaktadır.

Tanım 3. 1. 7: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth P-kapalıdır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} \quad : \quad (\bigvee_{i \in F} \bar{f_i})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ ’ dür.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth P-kapalı L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisinin crisp olması durumunda; yani $t: L^X \to \{0,1\}$ olması durumunda bu tanım Aygün ve Kudri [66] tarafından L-fuzzy topolojik uzaylarda verilen P-kapalılığa denk olmaktadır.

3.2. Diğer Karakterizasyonlar

Teorem 3. 2. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth güçlü kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \not\geq \alpha \quad (g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth ön-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} \quad : \quad (\bigwedge_{i \in F} f_i)(x) \not\geq \alpha \quad (g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in M(L)$ ve $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ olacak biçimdeki smooth ön-kapalı L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth ön-kapalı ise $f_i' \in L^X$ smooth ön-açık ve

$\alpha \in M(L) \Leftrightarrow p := \alpha' \in pr(L)$ olduğundan

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i \in J} f_i)'(x) = (\bigvee_{i \in J} f_i')(x) \not\leq \alpha' = p$ sağlanır.

g smooth güçlü kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i')(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in F} f_i)(x) \not\geq \alpha$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Sağ taraf sağlansın.

$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Leftrightarrow \alpha := p' \in M(L)$ ' dir ve $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in J} f_i')(x) \not\geq \alpha$ ' dır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in F} f_i')(x) \not\geq \alpha$

$\Rightarrow \exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$

Sonuç olarak g smooth güçlü kompakttır.

Teorem 3. 2. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth güçlü kompakttır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ ' dür.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in pr(L)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) = (\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \vee g'(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimde her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$

g smooth güçlü kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$

$x \in X$ keyfi alalım.

$g'(x) \leq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$g'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dir.

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım. Buradan, $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dir. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dür.

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak g smooth güçlü kompakttır.

Teorem 3. 2. 3: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth P-kapalıdır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i\in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth ön-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i\in F} {}^{\circ}f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in M(L)$ ve $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ olacak biçimdeki smooth ön-kapalı L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\alpha \in M(L) \Leftrightarrow p := \alpha' \in pr(L)$ ' dir. Dolayısıyla

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i')(x) \not\leq \alpha' = p$ ' dür. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} {}^{-}(f_i'))(x) \not\leq p$

Dolayısıyla Önerme 3. 1. 4.(c)' den

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in F} {}^{\circ}f_i)(x) \not\geq \alpha$

$(\Leftarrow)$ Sağ taraf sağlansın.

$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Leftrightarrow \alpha := p' \in M(L)$ ' dir ve $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i \in J} f_i')(x) \ngeq \alpha$ ' dır.

Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i \in F} {}^{\circ}(f_i'))(x) \ngeq \alpha$

$\Rightarrow \exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} {}^{-} f_i))(x) \nleq p$

Sonuç olarak g smooth P-kapalıdır.

Teorem 3. 2. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth P-kapalıdır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \nleq p$ $(x \in X)$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} {}^{-} f_i \vee g')(x) \nleq p$ $(x \in X)$ ' dir.

İspat: Teorem 3. 2. 2.' ye benzer olarak gösterilir.

3.3. Bazı Özellikler

Önerme 3. 3. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth güçlü kompakt ise $g \vee h$ smooth güçlü kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \nleq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Leftrightarrow p' \in M(L)$ olduğundan

$(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) \geq p' \Rightarrow g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ dür.

g ve h smooth güçlü-kompakt olduğundan

$\exists F, E \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \nleq p$ ve

$h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E} f_i)(x) \nleq p$ dir.

$g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ ise her zaman için $(g \vee h)(x) \geq p'$ sağlandığından

$(g \vee h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F \cup E} f_i)(x) \nleq p$ ' dir.

Sonuç olarak $g \vee h$ smooth güçlü-kompakttır.

Önerme 3. 3. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth güçlü kompakt ve h smooth ön-kapalı ise $g \wedge h$ smooth güçlü kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$h \in L^X$ smooth ön-kapalı olduğundan $h' \in L^X$ smooth ön-açıktır. Dolayısıyla $\beta = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$ smooth ön-açık L-fuzzy kümeler ailesidir ve

$(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım.

$h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$

$h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$

g güçlü kompakt olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu öyle ki $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta_0} k)(x) \not\leq p$

$\Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) \not\leq p$ ' dir. Gerçekten

$g(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta_0} k)(x) \not\leq p \Rightarrow \exists k \in \beta_0$ öyle ki $k(x) \not\leq p$ ' dir.

Ancak $h(x) \geq p' \Rightarrow h'(x) \leq p$ olduğundan

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) \not\leq p$

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth güçlü kompakttır.

Sonuç 3. 3. 3: Smooth güçlü kompakt L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth ön-kapalı her L-fuzzy kümesi smooth güçlü kompakttır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Önerme 3. 3. 4 : (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth P-kapalı ise $g \vee h$ smooth P-kapalıdır.

İspat: Önerme 3. 3. 1.' e benzer olarak gösterilir.

Önerme 3. 3. 5: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth P-kapalı ve h smooth ön K-açık ise $g \wedge h$ smooth P-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$h \in L^X$ smooth ön-kapalı olduğundan $h' \in L^X$ smooth ön-açıktır.

$\Rightarrow \beta = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$ smooth ön-açık L-fuzzy kümeler ailesidir ve

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım.

$h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$

$h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır.

g smooth P-kapalı olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu öyle ki $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta_0} \_k)(x) \not\leq p$ dir. Buradan

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} \_f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta_0} \_k)(x) \not\leq p \Rightarrow \exists k \in \beta_0$ öyle ki $\_k(x) \not\leq p$

$h(x) \geq p'$ olduğundan $h'(x) \leq p$ 'dir. Ayrıca h smooth ön-açık olduğundan h' smooth ön-kapalıdır. Dolayısıyla da $\_(h') = h'$ ' dür. Buradan $(\_(h'))(x) = h'(x) \leq p$ elde edilir. Böylece

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} \_f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth P-kapalıdır.

Sonuç 3. 3. 6: Smooth P-kapalı L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth ön K-açık her L-fuzzy kümesi smooth P-kapalıdır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Teorem 3. 3. 7: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth güçlü kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth güçlü kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ sağlanır.

φ smooth ön-kararsız ve her $i \in J$ için $f_i \in L^Y$ smooth ön-açık olduğundan $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth ön-açıktır.

g smooth güçlü kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$' dir. Buradan

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$' dir.

$\Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x)$' dir. Böylece

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth güçlü kompakttır.

Sonuç 3. 3. 8: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth ön-kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth güçlü kompakt ise (Y, t_Y) smooth güçlü kompakttır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Teorem 3. 3. 9: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth P-kapalı ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth P-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth ön-kararsız ve her $i \in J$ için $f_i \in L^Y$ smooth ön-açık olduğundan $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth ön-açıktır.

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$

g smooth P-kapalı olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{-}(\varphi^{-1}(f_i)))(x) \not\leq p$' dir. Buradan

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$' dir.

Şimdi, her $i \in J$ için ${}_{-}f_i$ smooth ön-kapalı ve φ smooth ön-kararsız olduğundan $\varphi^{-1}({}_{-}f_i)$ smooth ön-kapalı, dolayısıyla da ${}_{-}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)) = \varphi^{-1}({}_{-}f_i)$' dır. Buradan

$(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}({}_{-}f_i))(x) = (\bigvee_{i \in F} {}_{-}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))(x) \geq (\bigvee_{i \in F} {}_{-}(\varphi^{-1}(f_i)))(x)$

sağlanır. Böylece

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth P-kapalıdır.

Sonuç 3. 3. 10: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth ön-kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth P-kapalı ise (Y, t_Y) smooth P-kapalıdır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Teorem 3. 3. 11: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth zayıf ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X) ' de smooth güçlü kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y) ' de smooth P-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth zayıf ön-kararsız olduğundan

$\forall i \in J$ için $\varphi^{-1}(f_i) \leq {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i))$ 'dir. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimde her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))(x) \geq (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimde her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))(x) \not\leq p$

$({}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini (X, t_X) smooth L-fuzzy topolojik uzayında smooth ön-açık L-fuzzy kümeler ailesi ve g smooth güçlü kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))(x) \not\leq p$

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p \in pr(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ ' dir.

$(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}({}_{-}f_i))(x) \geq (\bigvee_{i \in F} {}_{\circ}(\varphi^{-1}({}_{-}f_i)))(x)$ elde edilir.

Böylece

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $\varphi(g)$ smooth P-kapalıdır.

Sonuç 3. 3. 12: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth zayıf ön-kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth güçlü kompakt ise (Y, t_Y) smooth P-kapalıdır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Önerme 3. 3. 13: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun. Bu takdirde

g smooth güçlü kompakt $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ g smooth P-kapalı $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ g smooth hemen hemen kompakttır.

İspat: (i) g smooth güçlü kompakt olsun.

$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth ön-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ ’ dür.

Her $i \in J$ için $f_i \leq {}_{-}f_i$ olduğundan $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} {}_{-}f_i)(x) \not\leq p$ ’dür.

Sonuç olarak g smooth P-kapalıdır.

(ii) g smooth P-kapalı olsun.

$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki $\{f_i \mid t(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

Önerme 3. 1. 4.(a)’ dan $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi smooth ön-açıktır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} {}_{-}f_i)(x) \not\leq p$

Her $i \in J$ için ${}_{-}f_i \leq \overline{f_i}$ olduğundan

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p$ ’dür.

Sonuç olarak g smooth hemen hemen kompakttır.

Önerme 3. 3. 14: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth güçlü kompakt $\Rightarrow$ g smooth kompakttır.

İspat: g smooth güçlü kompakt olsun.

$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki $\{f_i \mid t(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

Önerme 3. 1. 4.(a)' dan bu $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi smooth ön-açık kümeler ailesidir.

Hipotezden $\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak g smooth kompakttır.

Bu önermelerin ışığında aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{P-kapalı} \arrow[dr] & \\
\text{Güçlü kompakt} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{Kompakt} \arrow[r] & \text{Hemen hemen kompakt}
\end{tikzcd}$$

4. SMOOTH YARI-KOMPAKTLIK VE SMOOTH S*-KAPALILIK

Fuzzy topolojik uzaylarda yarı-açık kümeler ilk olarak Azad [67] tarafından tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra birçok yazar yarı-açık kümeler yardımıyla yarı-kompaktlık tanımı vermiş ve bu tanım ile ilgili araştırmalar yapmıştır.

2000 yılında Kudri [39], keyfi L-fuzzy kümeleri için yarı-kompaktlığı L-fuzzy topolojik uzaylarda tanımlamış, çeşitli karakterizasyonlarını inceleyerek, yarı-açık fuzzy kümeleri yardımıyla yapılan kompaktlık tanımları arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Daha sonra 2004 yılında, Aygün ve Abbas [45] smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-açık küme tanımını vererek, bu kümeler yardımıyla smooth RS-kompaktlık ve S-kapalılığı tanımlamışlardır. Abbas ve Ramadan [43] tarafından yapılmış olan smooth hemen hemen kompaktlık ve yakın kompaktlık tanımları ile bu kompaktlıklar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bu bölümde ilk olarak Aygün ve Abbas [45]' ın tanımladığı smooth yarı-açık kümelerin özellikleri incelenmiştir. Kudri [39]' nin vermiş olduğu yarı-kompaktlık ve S*-kapalılık tanımları ışığında, bu kompaktlıklar smooth L-fuzzy topolojik uzaylara genelleştirilmiştir. Kudri' nin L-fuzzy topolojik uzaylarda verdiği bu kompaktlık tanımlarının topolojik özelliklerinin, smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda korunup korunmadığı araştırılmıştır. Ayrıca Aygün ve Abbas [45]' ın verdiği kompaktlık tanımlarıyla ilişkileri incelenmiş ve fuzzy tam bağlantısız uzaylarda bu çeşit kompaktlıkların denk oldukları gösterilmiştir.

4.1. Önerilen Tanımlar

(X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay olmak üzere $f \in L^X$ fuzzy kümesine smooth yarı-açık denir: $\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ için $\exists g \in L^X$ öyle ki $t(g) \not\leq p$ ve $g \leq f \leq \overline{g}$ ' dır. [45]

$f \in L^X$ fuzzy kümesine smooth yarı-kapalı denir: $\Leftrightarrow$ f' smooth yarı-açıktır

$f \in L^X$ hem smooth yarı-açık hem de smooth yarı-kapalı ise f' ye smooth yarı K-açık denir.

Tanım 4. 1. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun. f L-fuzzy kümesinin smooth yarı-içi ve smooth yarı-kapanışı sırasıyla

$f_{\circ} = \bigvee \{h \in L^X \mid h \leq f \text{ ve h smooth yarı-açık}\}$

$f_{-} = \bigwedge \{h \in L^X \mid h \geq f \text{ ve h smooth yarı-kapalı}\}$

olarak tanımlanır.

Tanımlardan

$\forall f \in L^X$ için $f \leq f_{-} \leq \overline{f}$ $\quad \overset{\circ}{f} \leq f_{\circ} \leq f$ $\quad (f_{-})^{-} = \overline{f}$ $\quad \overset{\circ}{\overline{f}} \leq f_{-}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Ayrıca f smooth yarı kapalı ise $f = f_{-}$ ve f smooth yarı açık ise $f = f_{\circ}$ sağlanır.

Önerme 4. 1. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay olmak üzere her $f \in L^X$ için $(f_{-})' = (f')_{\circ}$ sağlanır.

İspat: Keyfi $f \in L^X$ alalım.

$$\begin{aligned}
(f_{-})' &= (\bigwedge \{h \in L^X \mid f \leq h \text{ ve } h \text{ smooth yarı-kapalı}\})' \\
&= \bigvee \{h' \mid h \in L^X, h' \leq f' \text{ ve } h' \text{ smooth yarı-açık}\} \\
&= \bigvee \{k \in L^X \mid f' \leq k \text{ ve } k \text{ smooth yarı-açık}\} \\
&= (f')_{\circ}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4. 1. 3: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar olsun.

$\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümüne;

a) smooth yarı-zayıf süreklidir denir: $\Leftrightarrow \forall g \in L^Y$ smooth yarı-açık için

$\varphi^{-1}(g) \le (\varphi^{-1}(g_-))_\circ$

b) smooth yarı-kararsızdır denir: $\Leftrightarrow \forall g \in L^Y$ smooth yarı K-açık için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth yarı K-açıktır.

Önerme 4. 1. 4: (X, t_X) ve (Y, t_Y) L-fuzzy topolojik uzaylar ve

$\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $p \in pr(L)$ ve $t_Y(h) \not\le p$ olacak biçimdeki her $h \in L^Y$ için $\varphi^{-1}(\overline{h}) \le (\varphi^{-1}(h))^-$ özelliğine sahip bir smooth sürekli dönüşüm ise φ smooth kararsızdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $g \in L^Y$ smooth yarı-açık alalım. Dolayısıyla $t_Y(h) \not\le p$ olacak biçimde $\exists h \in L^Y : h \le g \le \overline{h}$ ’ dır. Buradan

$\varphi^{-1}(h) \le \varphi^{-1}(g) \le \varphi^{-1}(\overline{h}) \le (\varphi^{-1}(h))^-$ elde ederiz.

Ayrıca φ smooth sürekli ve $t_Y(h) \not\le p$ olduğundan $t_X(\varphi^{-1}(h)) \ge t_Y(h) \not\le p$ ’ dir, yani $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth yarı-açıktır. Dolayısıyla φ smooth kararsızdır.

Tanım 4. 1. 5: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-kompakttır: $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\le p \quad (g(x) \ge p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} : (\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\le p \quad (g(x) \ge p')$ sağlanır.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth yarı-kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisi crisp ise; yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise smooth yarı-kompaktlık S. R. T. Kudri [39] tarafından verilmiş olan yarı-kompaktlık tanımına denk olmaktadır.

Tanım 4. 1. 6: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth S*-kapalıdır:$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i \_)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ sağlanır.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth S*-kapalı L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisi crisp ise; yani $t : L^X \to \{0,1\}$ ise bu durumda smooth S*-kapalılık S. R. T. Kudri [39] tarafından verilmiş olan S*-kapalılık tanımına denk olmaktadır.

4.2. Diğer Karakterizasyonlar

Önerme 4. 2. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-kompakttır $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i\in J} f_i)(x) \not\geq \alpha \quad (g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth yarı-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i\in F} f_i)(x) \not\geq \alpha \quad (g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in M(L)$ ve $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ olacak biçimdeki smooth yarı-kapalı L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\alpha \in M(L) \Leftrightarrow p := \alpha' \in pr(L)$ ve her $i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-kapalı ise $f_i' \in L^X$ smooth yarı-açık olduğundan

$g(x) \geq \alpha = p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in J} f_i)'(x) = (\bigvee_{i\in J} f_i')(x) \not\leq \alpha' = p$ ' dir.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$

$\Rightarrow \exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i\in F} f_i)(x) \not\geq \alpha$ ' dır.

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Leftrightarrow \alpha := p' \in M(L)$ ve her $i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-açık ise $f_i' \in L^X$ smooth yarı-kapalıdır. Dolayısıyla

$g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)'(x) = (\bigwedge_{i \in J} f_i')(x) \not\geq p' = \alpha$ ' dır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq \alpha$ olan her $x \in X$ için $(\bigwedge_{i \in F} f_i')(x) \not\geq \alpha$

$\Rightarrow \exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ ' dür.

Sonuç olarak g smooth yarı-kompakttır.

Önerme 4. 2. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-kompakttır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$

İspat: $p \in pr(L)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) = (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \vee g'(x) \not\leq p$ sağlanır. Buradan

$g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ ' dir.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ ' dür.

$x \in X$ keyfi alalım.

$g(x) \geq p' \Rightarrow g'(x) \leq p \Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \vee g'(x) = (\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$g(x) \not\geq p' \Rightarrow g'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dir. Buradan

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olduğundan

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ sağlanır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$

Sonuç olarak g smooth yarı-kompakttır.

Önerme 4. 2. 3: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth S*-kapalıdır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth yarı-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i \in F} f_{i\,\circ})(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: Önerme 4. 2. 1.' in ispatına benzer olarak yapılır.

Önerme 4. 2. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth S*-kapalıdır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_{i\,-} \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$

İspat: Önerme 4. 2. 2.' nin ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 4. 2. 5: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth S*-kapalıdır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı K-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı K-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-açık ve g smooth S*-kapalı olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i\,\_)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Ayrıca her $i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-kapalı olduğundan $f_i = f_i\,\_$ dır. Dolayısıyla

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

Her $i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-açık olduğundan $f_i\,\_$ smooth yarı K-açıktır. Gerçekten her $i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-açık olduğundan

$t(h_i) \not\leq p$ olacak biçimdeki $\exists h_i \in L^X$: $h_i \leq f_i \leq \overline{h_i}$

$\Rightarrow h_i \leq h_i\,\_ \leq f_i\,\_ \leq (\overline{h_i})\_ = \overline{h_i}$

$\Rightarrow f_i\,\_$ smooth yarı-açıktır.

Ayrıca $f_i\,\_$ smooth yarı-kapalı olduğundan $f_i\,\_$ smooth yarı K-açıktır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i\,\_)(x) \not\leq p$ sağlanır.

$\forall i \in J$ için $f_i = f_i\,\_$ olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ $(g(x) \geq p')$ sağlanır.

Sonuç olarak g smooth S*-kapalıdır.

Önerme 4. 2. 6: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth S-kapalıdır (Tanım 2. 3. 19) $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \not\geq p$ $(g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth yarı-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i \in F} f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: Önerme 4. 2. 1.' e benzer olarak gösterilebilir.

Önerme 4. 2. 7: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth RS-kompakttır (Tanım 2. 3. 16.) $\Leftrightarrow \forall \alpha \in M(L)$ ve

$(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \ngeq \alpha \ \ (g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimde smooth yarı-kapalı L-fuzzy kümelerinin

her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in L^X \ : (\bigwedge_{i \in F} \overline{\mathring{f}_i})(x) \ngeq \alpha \ \ (g(x) \geq \alpha)$

İspat: Önerme 4. 2. 1.' e benzer olarak gösterilebilir.

4.3. Bazı Özellikler

Önerme 4. 3. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth yarı-kompakt ise $g \vee h$ smooth yarı-kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \nleq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Rightarrow p' \in M(L)$ olduğundan

$(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) \geq p' \Rightarrow g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ dür.

g ve h smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F, E \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \nleq p$ ve

$h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E} f_i)(x) \nleq p$ dir.

$g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ ise her zaman için $(g \vee h)(x) \geq p'$ sağlandığından

$(g \vee h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F \cup E} f_i)(x) \nleq p$ ' dir.

Sonuç olarak $g \vee h$ smooth yarı-kompakttır.

Önerme 4. 3. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth yarı-kompakt ve h smooth yarı-kapalı ise $g \wedge h$ smooth yarı-kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \nleq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$h \in L^X$ smooth yarı-kapalı olduğundan $h' \in L^X$ smooth yarı-açıktır.

Şimdi $\beta = \{f_i\}_{i\in J} \cup \{h'\}$ ailesini ele alalım. Bu aile için

$g(x) \geq p'$ oan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k\in\beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım. Eğer

$h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k\in\beta} k)(x) \not\leq p$

$h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k\in\beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu öyle ki $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k\in\beta_0} k)(x) \not\leq p$

$\Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) \not\leq p$ olur. Gerçekten de

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki $x \in X$ alalım.

$g(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{k\in\beta_0} k)(x) \not\leq p \Rightarrow \exists k \in \beta_0$ öyle ki $k(x) \not\leq p$

Ancak $h(x) \geq p' \Rightarrow h'(x) \leq p$ dir. Buradan da

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth yarı-kompakttır.

Sonuç 4. 3. 3: Smooth yarı-kompakt L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-kapalı her L-fuzzy kümesi smooth yarı-kompakttır.

Önerme 4. 3. 4: (X,T) klasik topolojik uzayı yarı-kompakttır $\Leftrightarrow (X, \omega_T)$ üretilmiş smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth yarı-kompakttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in pr(L)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

Buradan her $x \in X$ için $\exists i \in J : f_i(x) \not\leq p$ ' dir. Dolayısıyla da

$X = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$ elde edilir.

$\forall i \in J$ için $f_i \in L^X$ smooth yarı-açık olduğundan

$\omega_T(g_i) \not\leq p$ olacak biçimde $\exists g_i \in L^X$: $g_i \leq f_i \leq \overline{g_i}$ ' dir. Ayrıca

$\forall i \in J$ için $\omega(T)(g_i) \not\leq p$ olduğundan $G_i := g_i^{-1}\{t \in L \mid t \not\leq p\} \in T$ ' dir. Dahası

$\forall i \in J$ için $g_i \leq f_i \leq \overline{g_i}$ olduğundan

$g_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\}) \subseteq f_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\}) \subseteq (\overline{g_i})^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\}) \subseteq (g_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\}))^{-}$

$\forall i \in J$ için $U_i = f_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$ dersek

$G_i \in T$ için $G_i \subseteq U_i \subseteq \overline{G_i}$ elde ederiz.

(X,T) klasik topolojik uzayı yarı kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $X = \bigcup_{i \in F} f_i^{-1}(\{t \in L \mid t \not\leq p\})$

$\Rightarrow \exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

(X, ω_T) smooth L-fuzzy topolojik uzayı smooth yarı-kompakttır.

$(\Leftarrow)$ (X,T) klasik topolojik uzayında $(U_i)_{i \in J}$ ailesi X' in yarı-açık örtümü olsun.

$\forall i \in J$ için $U_i \subseteq X$ yarı-açık olduğundan $\exists G_i \in T$: $G_i \subseteq U_i \subseteq \overline{G_i}$ sağlanır. Ayrıca

$\forall i \in J$ için $G_i \in T$ olduğundan $\omega(t)(\chi_{G_i}) = 1 \not\leq p$ ve $\chi_{G_i} \leq \chi_{U_i} \leq \chi_{\overline{G_i}} \leq (\chi_{G_i})^{-}$ sağlanır.

$X = \bigcup_{i \in J} U_i$ olduğundan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} \chi_{U_i})(x) = 1 \not\leq p$ sağlanır.

(X, ω_T) smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \chi_{U_i})(x) \not\leq p$ olur; yani $X = \bigcup_{i \in F} U_i$ elde edilir.

Dolayısıyla (X,T) yarı-kompakttır.

Önerme 4. 3. 5: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth S*-kapalı ise $g \vee h$ smooth S*-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$p \in pr(L) \Rightarrow p' \in M(L)$ olduğundan

$(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) \geq p' \Rightarrow g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ dür.

g ve h smooth S*-kapalı olduğundan

$\exists F, E \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_{i\_})(x) \not\leq p$ ve

$h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E} f_{i\_})(x) \not\leq p$ dir.

$g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ ise her zaman için $(g \vee h)(x) \geq p'$ sağlandığından

$(g \vee h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F \cup E} f_{i\_})(x) \not\leq p$ ' dir.

Sonuç olarak $g \vee h$ smooth S*-kapalıdır.

Önerme 4. 3. 6: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth S*-kapalı ve h smooth yarı-kapalı ise $g \wedge h$ smooth S*-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$h \in L^X$ smooth yarı-kapalı olduğundan $h' \in L^X$ smooth yarı-açıktır.

Şimdi $\beta = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$ ailesini ele alalım. Bu aile için

$g(x) \geq p'$ oan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım. Eğer

$h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$

$h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır.

g smooth S*-kapalı olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu öyle ki $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta_0} k_{\_})(x) \not\leq p$

$\Rightarrow (\bigvee_{i=1}^{n} f_{i\_})(x) \not\leq p$ $((g \wedge h)(x) \geq p')$ olur. Gerçekten de

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki $x \in X$ alalım.

$g(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta_0} k_{\_})(x) \not\leq p \Rightarrow \exists k \in \beta_0$ öyle ki $k_{\_}(x) \not\leq p$

Ancak $h(x) \geq p' \Rightarrow h'(x) \leq p$ dir. h smooth yarı-kapalı olduğundan $(h')_{\_} = h'$ ' dür.

Dolayısıyla $(h')_{\_}(x) = h'(x) \leq p$ ' dir. Buradan da

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_{i\_})(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth S*-kapalıdır.

Sonuç 4. 3. 7: Smooth S*-kapalı L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-kapalı her L-fuzzy kümesi smooth S*-kapalıdır.

Önerme 4. 3. 8: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth S-kapalı ise $g \vee h$ smooth S-kapalıdır.
İspat: Önerme 4. 3. 1.'e benzer düşünceyle ispatlanır.

Önerme 4. 3. 9: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth RS-kompakt ise $g \vee h$ smooth RS-kompakttır.
İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.
$p \in pr(L) \Leftrightarrow p' \in M(L)$ olduğundan
$(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) \geq p' \Rightarrow g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ dür.
g ve h smooth RS-kompakt olduğundan
$\exists F, E \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p$ ve
$h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p$ ' dir.
$g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ ise her zaman için $(g \vee h)(x) \geq p'$ sağlandığından
$(g \vee h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F \cup E} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) \not\leq p$ ' dir.
Dolayısıyla $g \vee h$ smooth RS-kompakttır.

Önerme 4. 3. 10: Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-kompakt her L-fuzzy kümesi smooth kompakttır.
İspat: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
$p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimde $\{f_i \mid t(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall i \in J$ için $t(f_i) \not\leq p$ ve $f_i \leq \overline{f_i}$ olduğundan $f_i \in L^X$ smooth yarı-açıktır.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Dolayısıyla g smooth kompakttır.

Önerme 4. 3. 11: Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-kompakt her L-fuzzy kümesi smooth S*-kapalıdır.

İspat: $\forall f \in L^X$ için $f \leq f\_$ olduğundan açıktır.

Önerme 4. 3. 12: Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth S*-kapalı her L-fuzzy kümesi smooth S-kapalıdır.

İspat: $\forall f \in L^X$ için $f\_ \leq \overline{f}$ olduğundan açıktır.

Önerme 4. 3. 13: Tamamen bağlantısız smooth L- fuzzy topolojik uzaylarda smooth S-kapalılık ile smooth S*-kapalılık denktirler.

İspat: $f \in L^X$ smooth yarı-açık ve $p \in pr(L)$ olsun.

$\Rightarrow t(h) \not\leq p$ olacak biçimde $\exists h \in L^X$: $h \leq f \leq \overline{h}$

$\Rightarrow t(h) \not\leq p$ olacak biçimde $\exists h \in L^X$: $\overline{h} \leq \overline{f} \leq \overline{\overline{h}} = \overline{h}$

$\Rightarrow t(h) \not\leq p$ olacak biçimde $\exists h \in L^X$: $\overline{h} = \overline{f}$

(X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay çok bağlantısız olduğundan $t(\overline{h}) \not\leq p$ dır.

Buradan $\overline{f} = \overline{h} = \mathring{\overline{h}} = \mathring{\overline{f}} \leq f\_ \Rightarrow \overline{f} \leq f\_ \Rightarrow \overline{f} = f\_$ elde edilir.

Bu önermelerin ışığında aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
\text{Yarı-kompakt} \arrow[r] & \text{S*-kapalı} \arrow[r] & \text{S-kapalı} \arrow[r] & \text{Hemen hemen kompakt} \\
 & & & \text{Yakın Kompakt} \arrow[u] \\
 & & & \text{RS-kompakt} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Önerme 4. 3. 14: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth yarı-sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak

biçimdeki $\{f_i \mid t_Y(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth yarı-sürekli olduğundan her $i \in J$ için $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth yarı-açıktır. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ dir.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır. Buradan da

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ dir. Dolayısıyla

$(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ elde edilir. Böylece

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth kompakttır.

Sonuç 4. 3. 15: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth yarı-sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. (X, t_X) smooth yarı-kompakt ise (Y, t_Y) de smooth kompakttır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Önerme 4. 3. 16: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde smooth kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth yarı-kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth kararsız bir dönüşüm olduğundan her $i \in J$ için $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth yarı-açıktır. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i\in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ dir.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ sağlanır. Buradan da

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ dir. Dolayısıyla

$(\bigvee_{i\in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i\in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ elde edilir.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth kompakttır.

Sonuç 4. 3. 17: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth yarı-kompakt ise (Y, t_Y) de smooth yarı-kompakttır.

İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Önerme 4. 3. 18: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu, her $p \in pr(L)$ ve $t_Y(h) \not\leq p$ olan her $h \in L^X$ için $\varphi^{-1}(\overline{h}) \leq (\varphi^{-1}(h))^-$ olacak biçimde smooth sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth yarı-kompakttır.

İspat: Önerme 4. 1. 4. ve Önerme 4. 3. 16.' dan açıktır.

Önerme 4. 3. 19: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-kararsız bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth S*-kapalı ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth S*-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı K-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth yarı-kararsız ve her $i \in J$ için $f_i \in L^Y$ smooth yarı K-açık olduğundan $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth yarı K-açıktır. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ dir. Teorem 4. 2. 5' den

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$' dir. Ayrıca

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ dir. Böylece

$(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ elde edilir. Dolayısıyla

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) \not\leq p$' dir.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S*-kapalıdır.

Sonuç 4. 3. 20: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth yarı-kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth S*-kapalı ise (Y, t_Y) de smooth S*-kapalıdır.
İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Önerme 4. 3. 21: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth kararsız bir dönüşüm olsun. $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth S*-kapalı ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth S*-kapalıdır.
İspat: φ smooth kararsız ise smooth yarı-kararsız olduğundan ve Önerme 4. 3. 19.' den açıktır.

Önerme 4. 3. 22: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth S*-kapalıdır.
İspat: Önerme 4. 3. 11. ve Önerme 4. 3. 19. dan açıktır.

Önerme 4. 3. 23: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-zayıf sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth S*-kapalıdır.
İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.
φ smooth yarı-zayıf sürekli olduğundan tanımı gereği her $i \in J$ için
$\varphi^{-1}(f_i) \leq (\varphi^{-1}(f_i\_))_{\circ}$ dir ve $(\varphi^{-1}(f_i\_))_{\circ}$ smooth yarı-açıktır.
$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i\in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \nleq p$ dir. Buradan

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} (\varphi^{-1}(f_i \_))_\circ)(x) \nleq p$ sağlanır.

g smooth yarı-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} (\varphi^{-1}(f_i \_))_\circ)(x) \nleq p$ ' dir. Ayrıca

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$-sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x\in\varphi^{-1}} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyleki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ dir. Dolayısıyla da

$(\bigvee_{i\in F} f_i \_)(y) = (\bigvee_{i\in F} f_i \_)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(f_i \_))(x) \geq (\bigvee_{i\in F} (\varphi^{-1}(f_i \_))_\circ)(x) \nleq p$ elde edilir.

Böylece $\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \_)(y) \nleq p$ ' dir.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S*-kapalıdır.

Sonuç 4. 3. 24: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth yarı-zayıf sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth yarı-kompakt ise (Y, t_Y) de smooth S*-kapalıdır.

Teorem 4. 3. 25: (X, t_X) smooth L-fuzzy topolojik uzay, (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X) ' de smooth S-kapalı ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y) ' de smooth S-kapalıdır.

İspat: $g \in L^X$ smooth S-kapalı ise $g \in L^X$ smooth hemen hemen kompakt olduğunu biliyoruz. φ smooth sürekli olduğundan $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakttır. (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay olduğundan $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S-kapalıdır.

Teorem 4. 3. 26: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve her $h \in L^Y$ smooth yarı-açık için $\varphi^{-1}(\overline{h}) \geq (\varphi^{-1}(h))^{-}$ olacak biçimde smooth kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth S-kapalı ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth S-kapalıdır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde smooth yarı-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth kararsız olduğundan $(\varphi^{-1}(f_i))_{i \in J} \subseteq L^X$ smooth yarı-açık L-fuzzy kümeler ailesidir. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$

g smooth S-kapalı olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} (\varphi^{-1}(f_i))^{-})(x) \not\leq p$ sağlanır. Ayrıca

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$' dir.

$(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(y) = (\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(\overline{f_i}))(x) \geq (\bigvee_{i \in Fi} (\varphi^{-1}(f_i))^{-})(x) \not\leq p$

elde ederiz. Böylece

$\varphi(g)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p$ olur.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S-kapalıdır.

Teorem 4. 3. 27: (X, t_X) smooth L-fuzzy topolojik uzay, (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay, $\varphi:(X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth RS-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth RS-kompakttır.

İspat: $g \in L^X$ smooth RS-kompakt ise $g \in L^X$ smooth hemen hemen kompakttır. φ smooth sürekli olduğundan $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakttır. (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay olduğundan da $\varphi(g) \in L^Y$ smooth RS-kompakttır.

Teorem 4. 3. 28: (X, t_X) smooth L-fuzzy topolojik uzay, (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay, $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth RS-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth RS-kompakttır.

İspat: Teorem 2. 3. 18' den $\varphi(g) \in L^Y$ smooth hemen hemen kompakt ve (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay olduğundan da $\varphi(g) \in L^Y$ smooth RS-kompakttır.

Teorem 4. 3. 29: (X, t_X) smooth L-fuzzy topolojik uzay, (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay, $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth RS-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth RS-kompakttır.

İspat: Teorem 2. 3. 21' den $\varphi(g) \in L^Y$ smooth S-kapalı ve (Y, t_Y) smooth tamamen bağlantısız L-fuzzy topolojik uzay olduğundan da $\varphi(g) \in L^Y$ smooth RS-kompakttır.

5. SMOOTH YARI-ÖN KOMPAKTLIK

1998 yılında Thakur ve Singh [68] fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy yarı-ön açık küme tanımını vererek, zayıf ve güçlü fuzzy kümeleri ile ilişkilerini incelemiştir. Ayrıca fuzzy yarı-ön sürekli tanımını da vererek, fuzzy yarı-ön açık kümelerin çeşitli fonksiyonlar altındaki özelliklerini incelemiştir.

2004 yılında Shi-Zhong Bai [69] fuzzy topolojik uzaylarda yarı-ön kompaktlık tanımını Kudri [26]' nin keyfi L-fuzzy kümeleri için verdiği tanımdan esinlenerek vermiştir. Daha sonra bu kompaktlığın çeşitli karakterizasyonlarını inceleyerek topolojik özelliklerini araştırmıştır.

Bu bölümde Shi-Zhong Bai [69]' nin vermiş olduğu yarı-ön kompaktlık tanımı smooth L- fuzzy topolojik uzaylara genelleştirilmiş, fuzzy topolojik uzaylardaki özelliklerinin korunup korunmadığı araştırılmıştır. Ayrıca smooth yarı-kompaktlık ve güçlü kompaktlık arasındaki ilişki incelenmiştir.

5.1. Önerilen Tanımlar

Tanım 5. 1. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

f smooth yarı-ön açıktır:$\Leftrightarrow$ $\exists g \in L^X$ smooth ön-açık : $g \le f \le \overline{g}$

f smooth yarı-ön kapalıdır:$\Leftrightarrow$ f' smooth yarı-ön açıktır.

Önerme 5. 1. 2: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzayında $f \in L^X$ olsun.

a) f smooth ön-açık ise smooth yarı-ön açıktır.

b) f smooth yarı-açık ise smooth yarı-ön açıktır.

İspat: a) $f \in L^X$ smooth ön-açık olsun. Tanımda g:=f aldığımızda f yarı-ön açık olarak elde edilir.

b) $f \in L^X$ smooth yarı-açık olsun. Smooth yarı-açık tanımından her $p \in pr(L)$ için $t(g) \not\le p$ olacak biçimde $\exists g \in L^X$: $g \le f \le \overline{g}$ sağlanır. Buradan

$t(g) \not\le p \Rightarrow t(g) > 0 \Rightarrow g = \mathring{g}$ ve $g \le \overline{g}$ $\Rightarrow$ $g = \mathring{g} \le \mathring{\overline{g}}$' dir. Dolaysıyla g smooth ön-açıktır. Böylece $f \in L^X$ smooth yarı-ön açıktır.

Tanım 5. 1. 3: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay olsun. $f \in L^X$ kümesinin smooth yarı-ön içi ve smooth yarı-ön kapanışı sırasıyla

$\underset{\circ}{f} := \bigvee \{g \in L^X \mid g \le f \text{ ve g smooth yarı-ön açık}\}$

$\underline{f} := \bigwedge \{g \in L^X \mid f \le g \text{ ve g smooth yarı-ön kapalı}\}$

olarak tanımlanır.

Tanım 5. 1. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-ön kompakttır :$\Leftrightarrow$ $\forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\le p$ $(g(x) \ge p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\le p$ $(g(x) \ge p')$

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth yarı-ön kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisinin crisp olması durumunda; yani $t : L^X \to \{0,1\}$ olması durumunda bu tanım Shi-Zhong Bai [69] tarafından L-fuzzy topolojik uzaylarda verilen yarı-ön kompaktlık tanımına denk olmaktadır, yani smooth yarı-ön kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki yarı-ön kompaktlığın smooth L-fuzzy topoloik uzaylara geneleştirilmesi olur.

Tanım 5. 1. 5: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
g smooth hemen hemen yarı-ön kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve
$(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için
$\exists F \in 2^{(J)} \ : (\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$

Tanım 5. 1. 6: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.
g smooth yakın yarı-ön kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için $\exists F \in 2^{(J)} \ : (\bigvee_{i\in F} \overline{f_i}^{\circ})(x) \not\leq p \quad (g(x) \geq p')$

Tanımlar karşılaştırıldığında
g smooth yarı-ön kompakt $\Rightarrow$ g smooth yakın yarı-ön kompakt $\Rightarrow$ g smooth hemen hemen yarı-ön kompakt
olduğu görülür.

5.2. Bazı Karakterizasyonlar ve Özellikler

Teorem 5. 2. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-ön kompakttır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i \in J} f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ olacak biçimdeki smooth yarı ön-kapalı L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i \in F} f_i)(x) \not\geq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$

İspat: Teorem 3. 2. 1.' in ispatına benzer olarak gösterilir.

Teorem 5. 2. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth yarı-ön kompakttır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(\forall x \in X)$ sağlanır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i \vee g')(x) = (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \vee g(x) \not\leq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ ' dir.

g smooth yarı-ön kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$ ' dir.

$x \in X$ keyfi alalım.

$g(x) \geq p' \Rightarrow g'(x) \leq p \Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \vee g'(x) = (\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$g(x) \not\geq p' \Rightarrow g'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olduğundan

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ sağlanır. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dir.

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\leq p$

Sonuç olarak g smooth yarı-ön kompakttır.

Önerme 5. 2. 3: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth yarı-ön kompakt ise $g \vee h$ smooth yarı-ön kompakttır.

İspat: Teorem 3. 3. 1.' in ispatına benzer olarak gösterilir.

Önerme 5. 2. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth yarı-ön kompakt ve h smooth yarı-ön kapalı ise $g \wedge h$ smooth yarı-ön kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth yarı-ön açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$h \in L^X$ smooth yarı-ön kapalı olduğundan $h' \in L^X$ smooth yarı-ön açıktır. Böylece $\beta = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$ ailesi smooth yarı-ön açık kümeler ailesidir ve

$g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım.

$h(x) \geq p' \Rightarrow h'(x) \leq p$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\leq p$ olduğundan $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ sağlanır.

$h(x) \not\geq p' \Rightarrow h'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) \not\leq p$ ' dir.

g smooth yarı-ön kompakt olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu öyle ki $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta_0} k)(x) \not\leq p$ elde edilir. Buradan

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak $g \wedge h$ smooth yarı-ön kompakttır.

Sonuç 5. 2. 5: Smooth yarı-ön kompakt L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth yarı-ön kapalı her L-fuzzy kümesi smooth yarı-ön kompakttır.

Tanım 5. 2. 6: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ olsun.

φ smooth yarı-ön süreklidir $:\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $t_Y(g) \not\leq p$ olacak biçimdeki her $g \in L^Y$ için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth yarı-ön açıktır.

Teorem 5. 2. 7: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-ön sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-ön kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde $\{f_i \mid t_Y(f_i) \not\leq p\}_{i \in J} \subseteq L^Y$ ailesini alalım.

φ smooth yarı-ön sürekli olduğundan $(\varphi^{-1}(f_i))_{i \in J} \subseteq L^X$ smooth yarı-ön açıktır. Ayrıca

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$

g smooth yarı-ön kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ ' dür.

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimde $y \in Y$ alalım.

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p \in pr(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Leftrightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$

$\Rightarrow (\bigvee_{i \in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ elde edilir.

Sonuç olarak $\varphi(g)$ smooth kompakttır.

Sonuç 5. 2. 8: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X,t_X)\to(Y,t_Y)$ dönüşümü smooth yarı-ön sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth yarı-ön kompakt ise (Y, t_Y) de smooth kompakttır.
İspat: Bir önceki teoreme benzer olarak gösterilir.

Tanım 5. 2. 9: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X,t_X)\to(Y,t_Y)$ olsun.
φ smooth yarı-ön kararsızdır $:\Leftrightarrow \forall g \in L^X$ smooth yarı-ön açık için $\varphi^{-1}(g)\in L^X$ smooth yarı-ön açıktır.

Teorem 5. 2. 10: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X,t_X)\to(Y,t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth yarı-ön kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth yarı-ön kompakt ise $\varphi(g)\in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth yarı-ön kompakttır.
İspat: Teorem 3. 3. 7. ye benzer olarak gösterilir.

Sonuç 5. 2. 11: (X, t_X) ve (Y, t_Y) smooth L-fuzzy topolojik uzaylar ve $\varphi:(X,t_X)\to(Y,t_Y)$ dönüşümü smooth yarı-ön kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth yarı-ön kompakt ise (Y, t_Y) de smooth yarı-ön kompakttır.

Teorem 5. 1. 12: Smooth L-fuzzy topolojik uzaylarda her smooth yarı-ön kompakt L-fuzzy kümesi smooth güçlü kompakt ve smooth yarı kompakttır.
İspat: Önerme 5. 1. 2' den ve Tanım 5. 1. 4' den açıktır.

Böylece aşağıdaki diyagramı elde ederiz:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Güçlü kompakt} \\
\text{Yarı-ön kompakt} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{Yarı kompakt}
\end{tikzcd}$$

6. SMOOTH α-KOMPAKTLIK

Klasik topolojide α-açık (ya da güçsüz -açık) küme Njastad [70] tarafından verilmiş ve çalışılmıştır. Bu kümelerden yararlanan Maheshwari ve Thakur [71] klasik topolojik uzaylarda α-kompaktlık (güçsüz komaktlık) tanımını vermiştir: X klasik topolojik uzayının α-kompakttır ancak ve ancak X' in her α-açık örtümü sonlu bir alt örtüme sahiptir.

Fuzzy topolojik uzaylarda α-kompaktlık kavramı Chang [2]' in kompaktlık tanımı baz alınarak Thakur ve Saraf [72] tarafından verilmiştir. L-fuzzy topolojik uzaylarda bu kavram, Aygün [62] tarafından tanımlanmış ve topolojik özellikleri araştırılarak diğer kompaktlıklarla ilişkileri incelenmiştir.

Bu bölümde smooth α-açık küme kavramı verilerek smooth L-fuzzy topolojik uzaylardaki özellikleri incelenmiştir. Smooth α-kompaktlık tanımlanarak sahip olduğu topolojik özellikler araştırılmış, diğer kompaktlık çeşitleri ile ilişkileri incelenmiştir.

6.1. Önerilen Tanımlar

Tanım 6. 1. 1: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

f smooth α-açıktır (güçsüz açıktır) $:\Leftrightarrow f \le \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{f}}}$

f smooth α-kapalıdır (güçsüz kapalıdır) $:\Leftrightarrow \overline{\overset{\circ}{\overline{f}}} \le f$

Teorem 6. 1. 2: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun.

a) $\forall p \in pr(L)$ için $t(f) \not\le p$ ise f smooth α-açıktır.

b) f smooth α-açık ise smooth ön-açıktır.

İspat: (a) $p \in pr(L)$ ve $t(f) \not\le p$ olacak biçimde $f \in L^X$ alalım. Buradan

$t(f) > 0 \Rightarrow f = \overset{\circ}{f}$ sağlanır. Diğer taraftan

$f \le \overline{f} \Rightarrow f = \overset{\circ}{f} \le \overset{\circ}{\overline{f}} = (\overset{\circ}{f})^{-\circ} \Rightarrow f \le \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{f}}}$ sağlanır. Dolayısıyla f smooth α- açıktır.

(b) $f \in L^X$ smooth α- açık olsun.

$\overset{\circ}{f} \le f \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{f}} \le \overline{f} \Rightarrow f \le \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{f}}} \le \overset{\circ}{\overline{f}}$ sağlanır. Dolayısıyla f smooth ön-açıktır.

Tanım 6. 1. 3: (X,t) smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth α-kompakttır (güçsüz kompakttır) $:\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) \not\le p \quad (g(x) \ge p')$ olan her $(f_i)_{i \in J} \subseteq L^X$ smooth α-açık L-fuzzy kümeler ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} : (\bigvee_{i \in F} f_i)(x) \not\le p \quad (g(x) \ge p')$.

$g = 1_X$ ise (X,t) smooth α-kompakt L-fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır.

t smooth L-fuzzy topolojisinin crisp olması durumunda; yani $t : L^X \to \{0,1\}$ olması durumunda bu tanım Aygün [62] tarafından L-fuzzy topolojik uzaylarda verilen α-kompaktlık tanımına denk olmaktadır, yani smooth α-kompaktlık L-fuzzy topolojik uzaylardaki α-kompaktlığın smooth L-fuzzy topolojik uzaylara genelleştirilmesi olur.

6.2. Diğer Karakterizasyonlar ve Özellikler

Teorem 6. 2. 1: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth α-kompakttır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in M(L)$ ve $(\bigwedge_{i\in J} f_i)(x) \ngeq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ olan her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ smooth α-kapalı L-fuzzy kümeler ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigwedge_{i\in F} f_i)(x) \ngeq \alpha$ $(g(x) \geq \alpha)$ sağlanır.

İspat: Teorem 3. 2. 1.' in ispatına benzer olarak gösterilir.

Teorem 6. 2. 2: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth α-kompakttır $\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \nleq p$ $(x \in X)$ olacak biçimdeki smooth α-açık L-fuzzy kümelerinin her $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$ $(x \in X)$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p \in pr(L)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \nleq p$ olacak biçimdeki smooth α-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) = (\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \vee g'(x) \nleq p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ olacak biçimde her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \nleq p$

g smooth α-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \nleq p$

$x \in X$ keyfi alalım.

$g'(x) \leq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \nleq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \nleq p$

$g'(x) \not\leq p \Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$

$(\Leftarrow)$ $p \in pr(L)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) \not\leq p$ olacak biçimdeki smooth α-açık L-fuzzy kümelerinin $(f_i)_{i\in J} \subseteq L^X$ ailesini alalım.

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ ' dir. Hipotezden

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i\in F} f_i \vee g')(x) \not\leq p$ $(x \in X)$ ' dür. Böylece

$g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(x) \not\leq p$ sağlanır.

Sonuç olarak g smooth α-kompakttır.

Önerme 6. 2. 3: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g ve h smooth α-kompakt ise $g \vee h$ smooth α-kompakttır.

İspat: Önerme 3. 3. 1.' in ispatına benzer olarak gösterilir.

Önerme 6. 2. 4: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in L^X$ olsun. g smooth α-kompakt ve h smooth α-kapalı ise $g \wedge h$ smooth α-kompakttır.

İspat: Önerme 3. 3. 2.' nin ispatına benzer olarak gösterilir.

Sonuç 6. 2. 5: Smooth α-kompakt L-fuzzy topolojik uzaylarda smooth α-kapalı her L-fuzzy kümesi smooth α-kompakttır.

İspat: Bir önceki teoremin sonucu olarak açıktır.

Önerme 6. 2. 6: (X,t) bir smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $g \in L^X$ olsun.

g smooth güçlü kompakt $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ g smooth α-kompakt $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ g smooth kompakttır.

İspat: (i) Önerme 6. 1. 2. (b) den açıktır.

(ii) Önerme 6. 1. 2. (a) dan açıktır.

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki diyagramı elde ederiz:

Güçlü kompakt $\longrightarrow$ α-kompakt $\longrightarrow$ Kompakt

Tanım 6. 2. 7: (X, t_X) ve (Y, t_Y) L-fuzzy topolojik uzaylar olsun.
$\varphi:(X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümüne smooth α-süreklidir denir $:\Leftrightarrow \forall p \in pr(L)$ ve $t_Y(g) \not\leq p$ olacak biçimdeki her $g \in L^Y$ için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth α-açıktır.

Teorem 6. 2. 8: (X, t_X) ve (Y, t_Y) iki smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $\varphi:(X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth α-sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth α-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(y) \not\leq p$ olacak biçimde $\{f_i \mid t_Y(f_i) \not\leq p\}_{i\in J} \subseteq L^Y$ L-fuzzy kümelerinin ailesini alalım.

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(y) \not\leq p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i\in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ sağlanır.

Ayrıca φ smooth α-sürekli olduğundan her $i \in J$ için $\varphi^{-1}(f_i) \in L^X$ smooth α-açıktır.

g smooth α-kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$' dir. Buradan

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} f_i)(y) \not\leq p$ sağlanır. Gerçekten de

$\forall y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu ve $p' \in M(L)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Rightarrow \exists x \in X$ öyle ki $g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$' dir.

$\Rightarrow (\bigvee_{i\in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i\in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) \not\leq p$ elde edilir.

Sonuç olarak $\varphi(g)$ smooth kompakttır.

Sonuç 6. 2. 9: (X, t_X) ve (Y, t_Y) iki smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth α-sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth α-kompakt ise (Y, t_Y) de smooth kompakttır.
İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

Tanım 6. 2. 10: (X, t_X) ve (Y, t_Y) L-fuzzy topolojik uzaylar olsun. $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümüne smooth α-kararsızdır denir $:\Leftrightarrow \forall g \in L^Y$ smooth α-açık için $\varphi^{-1}(g) \in L^X$ smooth α-açıktır.

Teorem 6. 2. 11: (X, t_X) ve (Y, t_Y) iki smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olan smooth α-kararsız bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in L^X$ (X, t_X)' de smooth α-kompakt ise $\varphi(g) \in L^Y$ (Y, t_Y)' de smooth α-kompakttır.
İspat: Teorem 3. 3. 7' ye benzer olarak gösterilir.

Sonuç 6. 2. 12: (X, t_X) ve (Y, t_Y) iki smooth L-fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : (X, t_X) \to (Y, t_Y)$ dönüşümü smooth α-kararsız ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer (X, t_X) smooth α-kompakt ise (Y, t_Y) de smooth α-kompakttır.
İspat: Bir önceki teoremden kolaylıkla görülür.

7. AÇIKLIĞIN SEZGİSEL DERECESİ: SEZGİSEL SMOOTH FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

1986 yılında Atanassov [73] fuzzy kümenin bir genelleştirmesi olarak sezgisel fuzzy küme kavramını tanımlamıştır:
X boştan farklı bir küme olmak üzere
$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >| x \in X\}$
formundaki kümeye X' in sezgisel fuzzy kümesi denir. Burada $\mu_A : X \to I$ ve $\nu_A : X \to I$ fonksiyonlarına (fuzzy kümelerine) sırasıyla x elemanının A kümesine ait olma ve olmama derecesi denir ve bunlar
$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq (\nu_A(x))'$ özelliğini sağlar, yani
$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ ' dir.

Sezgisel fuzzy kümelerini kullanarak Çoker [74] sezgisel fuzzy topolojik uzay tanımını vermiştir. Daha sonra 2002 yılında Samanta ve Mondal [48] fuzzy kümelerinin açıklığının sezgisel derecesi kavramını tanımlamışlardır. Bu tanımda her fuzzy kümesinin bir açıklık olma derecesi bir de açık olmama derecesi vermiştir. Dolayısıyla açıklığın sezgisel derecesi kavramı, açıklığın derecesi ve sezgisel fuzzy kümelerinin topolojisi kavramlarının bir genelleştirmesi haline gelmiştir.

2005 yılında Abbas [75] sezgisel fuzzy kompaktlık kavramını uzay için tanımlamış, bu kompaktlığın zayıf hallerini incelemiş ve topolojik özelliklerini araştırmıştır. Ancak almış olduğu örtüm yapısından dolayı bu kompaktlıklar arasındaki ilişkileri inceleyememiştir.

Ramadan, Kim ve Abbas [51] açıklığın sezgisel derecesi yapısında kompaktlıklar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmada r-kompaktlık,
r-hemen hemen kompaktlık ve r-yakın kompaktlık $(r \in (0,1])$ tanımlarını vererek özelliklerini ve ilişkilerini incelemişlerdir.

Won Keun Min ve Chun-Kee Park [49] da açıklığın sezgisel derecesi üzerine çalışmış, bu yapının topolojik özelliklerini incelemiştir. Uzayın zayıf ve güçlü kompaktlık tanımlarını vererek aralarındaki ilişkileri ve özelliklerini araştırmışlardır.

Tezin bu son bölümünde Won Keun Min ve Chun-Kee Park' ın kompaktlık tanımları baz alınarak açıklığın sezgisel derecesi yapısında keyfi fuzzy kümelerinin sezgisel kompaktlığı, sezgisel hemen hemen kompaktlığı ve sezgisel yakın kompaktlığı tanımlanmış, topolojik özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca sezgisel smooth regüler uzay tanımı verilerek bu kompaktlıkların sezgisel smooth regüler uzaylarda denk oldukları gösterilmiştir.

7.1. Giriş

Tanım 7. 1. 1: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $t, t^* : I^X \to I$ dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (t, t*) sıralı ikilisine X üzerinde açıklığın sezgisel derecesi denir:

ASD 1) $\forall f \in I^X$ için $t(f) + t^*(f) \leq 1$

ASD 2) $t(0_X) = t(1_X) = 1$ ve $t^*(0_X) = t^*(1_X) = 0$

ASD 3) $\forall f, g \in I^X$ için $t(f \wedge g) \geq t(f) \wedge t(g)$ ve $t^*(f \wedge g) \leq t^*(f) \vee t^*(g)$

ASD 4) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq I^X$ için $t(\bigvee_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} t(f_i)$ ve $t^*(\bigvee_{i \in J} f_i) \leq \bigvee_{i \in J} t^*(f_i)$

(X,t,t*) üçlüsüne sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay denir. Burada t(f), $f \in I^X$ fuzzy kümesinin açıklığının derecesi, t*(f) ise f fuzzy kümesinin açık olamamasının derecesi olarak yorumlanır. [49]

Tanım 7. 1. 2: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $c, c^* : I^X \to I$ dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (c, c*) sıralı ikilisine X üzerinde kapalılığın sezgisel derecesi denir. [49]

KSD 1) $\forall f \in I^X$ için $c(f) + c^*(f) \leq 1$

KSD 2) $c(0_X) = c(1_X) = 1$ ve $c^*(0_X) = c^*(1_X) = 0$

KSD 3) $\forall f, g \in I^X$ için $c(f \vee g) \geq c(f) \wedge c(g)$ ve $c^*(f \vee g) \leq c^*(f) \vee c^*(g)$

KSD 4) $\forall (f_i)_{i \in J} \subseteq I^X$ için $c(\bigwedge_{i \in J} f_i) \geq \bigwedge_{i \in J} c(f_i)$ ve $c^*(\bigwedge_{i \in J} f_i) \leq \bigvee_{i \in J} c^*(f_i)$

Teorem 7. 1. 3: $t, t^* : I^X \to I$ ve $c, c^* : I^X \to I$ dönüşümlerini ele alalım.

Her $f \in I^X$ için

$t_c(f) = c(f')$, $t^*_{c^*}(f) = c^*(f')$ ve $c_t(f) = t(f')$, $c^*_{t^*}(f) = t^*(f')$

olarak tanımlansın.

a) (t,t*) X üzerinde açıklığın sezgisel derecesidir $\Leftrightarrow$ $(c_t, c^*_{t^*})$ X üzerinde kapalılığın sezgisel derecesidir.

b) (c,c*) X üzerinde kapalılığın sezgisel derecesidir. $\Leftrightarrow$ $(t_c, t^*_{c^*})$ X üzerinde açıklığın sezgisel derecesidir.

c) $\forall f \in I^X$ için $t_{c_t}(f) = t(f)$, $\quad t^*_{c^*_{t^*}}(f) = t^*(f)$ ve

$c_{t_c}(f) = c(f)$, $\quad c^*_{t^*_{c^*}}(f) = c^*(f)$

İspat: ([48], S 325)

Örnek 7. 1. 4: X=R, T alt tabanı $\mathcal{S} = \{(a,b] \mid a,b \in R, a < b\}$ olan topoloji ve $T_0 = T_e$ olsun.

$t, t^* : I^X \to I$

$$t(\chi_A) = \begin{cases} 1 & ; A \in T_0 \\ 0.5 & ; A \in T - T_0 \end{cases} \qquad \text{diğer durumlarda } t(f)=0$$

$$t^*(\chi_A) = \begin{cases} 0 & ; A \in T_0 \\ 0.3 & ; A \in T - T_0 \end{cases} \qquad \text{diğer durumlarda } t^*(f)=1$$

olarak tanımlandığında (t,t*) X üzerinde açıklığın sezgisel derecelendirilmesidir. [48]

Örnek 7. 1. 5: $a < b$ olacak biçimde $a, b \in R$ ve $\alpha \in (0,1]$ alalım.

$$(a,b)_\alpha(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in (a,b) \\ \alpha & ; x = b \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}$$

τ alt tabanı $\mathcal{S} = \{(a,b)_\alpha \mid a,b \in R,\ a < b,\ 0 < \alpha \le 1\}$ ailesi olan Chang topoloji ve $\tau_0 = \{\chi_G \mid G \ (R, T_e) \text{ de açık}\}$ olsun.

$f_i = (a_i, b_i)_\alpha$ ve J sayılabilir olmak üzere $f \in \tau - \tau_0$ fuzzy kümesi de $f = \bigvee_{i \in J} f_i$ (1) olarak gösterilsin.

$t, t^* : I^R \to I$ dönüşümleri

$t(f)=1 \qquad (f \in \tau_0)$

$t((a,b)_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$

$$t(f) = \begin{cases} \bigwedge_{i \in J} t(f_i) & ; f \ (1) \text{ formunda} \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$t^*(f)=0 \qquad (f \in \tau_0)$

$t^*((a,b)_\alpha) = 0.3\alpha$

$$t^*(f)=\begin{cases}\bigvee_{i\in J} t^*(f_i) & ; f \ (1) \ \text{formunda}\\ 1 & ; \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlansınlar. Bu taktirde (t,t*) R üzerinde açıklığın sezgisel derecesidir. [48]

Aşağıdaki teorem smooth fuzzy topolojik uzaylarla sezgiel smooth fuzzy topolojik uzaylar arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 7. 1. 6: (X,t) smooth fuzzy topolojik uzay olsun.

$$\begin{aligned} t^*: I^X &\to I \\ f &\to t^*(f) := 1 - t(f) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm ile (t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaydır.

İspat:

ASD 1) $f \in I^X$ alalım. $t(f) + t^*(f) \le 1$ olduğu kolaylıkla görülür.

ASD 2) $t(0_X) = t(1_X) = 1$ smooth fuzzy topolojik uzay olduğundan sağlanır.

$t^*(0_X) = 1 - t(0_X) = 1 - 1 = 0$ ve $t^*(1_X) = 1 - t(1_X) = 1 - 1 = 0$ elde edilir.

ASD 3) $f, g \in I^X$ alalım. $t(f \wedge g) \ge t(f) \wedge t(g)$ olduğunu biliyoruz.

$t^*(f \wedge g) = (1 - t)(f \wedge g) = 1 - t(f \wedge g) \le 1 - (t(f) \wedge t(g)) = (1 - t(f)) \vee (1 - t(g)) = t^*(f) \vee t^*(g)$
elde ederiz

ASD 4) $(f_i)_{i\in J} \subseteq I^X$ alalım. $t(\bigvee_{i\in J} f_i) \ge \bigwedge_{i\in J} t(f_i)$ olduğunu biliyoruz.

$$t^*(\bigvee_{i\in J} f_i) = (1 - t)(\bigvee_{i\in J} f_i) = 1 - t(\bigvee_{i\in J} f_i) \le 1 - \bigwedge_{i\in J} t(f_i) = \bigvee_{i\in J}(1 - f(f_i)) = \bigvee_{i\in J} t^*(f_i)$$

elde ederiz

Dolayısıyla (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzaydır.

Tanım 7. 1. 7: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay olsun. $f \in I^X$ kümesinin sezgisel smooth içi ve kapanışı sırasıyla

$$\overset{\circ}{f} = \bigvee \{h \in I^X \mid h \le f, t(h) > 0, t^*(h) \le t^*(f)\}$$

$$\overline{f} = \bigwedge \{h \in I^X \mid f \le h, c_t(h) > 0, c^*_{t^*}(h) \le c^*_{t^*}(f)\}$$

olarak tanımlanır. [49]

Teorem 7. 1. 8: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. [49]

a) $c*_{t*}(\overline{f}) \leq c*_{t*}(f)$

b) $t*(\overset{\circ}{f}) \leq t*(f)$

c) $f \leq g$ ve $c*_{t*}(g) \leq c*_{t*}(f) \Rightarrow \overline{f} \leq \overline{g}$

d) $f \leq g$ ve $t*(f) \leq t*(g) \Rightarrow \overset{\circ}{f} \leq \overset{\circ}{g}$

İspat: (a) Tanım 7. 1. 2. ve Tanım 7. 1. 7. den

$$c*_{t*}(\overline{f}) = c*_{t*}(\bigwedge\{h \in I^X \mid f \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(f)\})$$

$$\leq \bigvee\{c*_{t*}(h) \mid f \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(f)\}$$

$$\leq c*_{t*}(f)$$

(b) (a) ya benzer olarak gösterilir.

(c) $k \in \{h \in I^X \mid g \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(g)\}$ alalım.

$f \leq g$ ve $c*_{t*}(g) \leq c*_{t*}(f)$ olduğundan aynı zamanda

$k \in \{h \in I^X \mid f \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(f)\}$ sağlanır. Dolayısıyla

$\{h \in I^X \mid g \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(g)\} \subseteq \{h \in I^X \mid f \leq h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \leq c*_{t*}(f)\}$ sağlanır. Buradan da $\overline{g} \geq \overline{f}$ elde ederiz.

(d) (c) ye benzer olarak gösterilir.

Teorem 7. 1. 9: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $f \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. [49]

(a) $(\overline{f})' = (f')^\circ$

(b) $\overline{f} = ((f')^\circ)'$

(c) $(f^\circ)' = \overline{(f')}$

(d) $f^\circ = (\overline{(f')})'$

İspat: (a) Tanım 7. 1. 7 den

$$(\overline{f})' = (\bigwedge \{h \in I^X \mid f \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(f)\})'$$

$$= \bigvee \{h' \mid h \in I^X, h' \le f', t(h') = c_t(h) > 0, t*(h') \le t*(f')\}$$

$$= \bigvee \{k \in I^X \mid k \le f', t(k) > 0, t*(k) \le t*(f)\} = (f')^{\circ}$$

(b), (c) ve (d) özellikleri (a) dan kolaylıkla elde edilir.

Teorem 7. 1. 10: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. [49]

(a) $\overline{0_X} = 0_X$

(b) $f \le \overline{f}$

(c) $\overline{f} \le \overline{\overline{f}}$

(d) $\overline{f} \wedge \overline{g} \le \overline{f \vee g}$

İspat: (a) ve (b) Tanım 7. 1. 7 dan kolaylıkla elde edilir. (c) ise Teorem 7. 1. 8 (a) dan elde edilir.

(d) $f, g \in I^X$ alalım.

$$\overline{f \vee g} = \bigwedge \{h \in I^X \mid f \vee g \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(f \vee g)\}$$

$$\ge \bigwedge \{h \in I^X \mid f \vee g \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(f) \vee c*_{t*}(g)\}$$

$$\ge \bigwedge (\{h \in I^X \mid f \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(f)\})$$

$$\cup \{h \in I^X \mid g \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(g)\})$$

$$= (\bigwedge \{h \in I^X \mid f \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(f)\})$$

$$\wedge (\bigwedge \{h \in I^X \mid g \le h, c_t(h) > 0, c*_{t*}(h) \le c*_{t*}(g)\})$$

$$= \overline{f} \wedge \overline{g}$$

Teorem 7. 1. 11: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. [49]

(a) $\overset{\circ}{1_X} = 1_X$

(b) $\overset{\circ}{f} \leq f$

(c) $(\overset{\circ}{f})^{\circ} \leq \overset{\circ}{f}$

(d) $(f \wedge g)^{\circ} \leq \overset{\circ}{f} \vee \overset{\circ}{g}$

İspat: Teorem 7. 1. 10. a benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 7. 1. 12: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $f \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. [49]

(a) $t(f) > 0 \Rightarrow f = \overset{\circ}{f}$

(b) $c_t(f) > 0 \Rightarrow f = \overline{f}$

İspat: (a) $t(f) > 0$ olsun. Buradan

$f \in \{h \in I^X \mid h \leq f, t(h) > 0, t^*(h) \leq t^*(f)\}$ ' dır. Dolayısıyla $f \leq \overset{\circ}{f}$ elde edilir. Buradan ve Teorem 7. 1. 11. (b)' den $f = \overset{\circ}{f}$ elde ederiz.

(b) de (a) ya benzer olarak gösterilir.

Tanım 7. 1. 13: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay olsun. $\varphi : X \to Y$ dönüşümüne sezgisel sürekli dönüşüm (dereceyi koruyan dönüşüm) denir: $\Leftrightarrow \forall g \in I^Y$ için $t(\varphi^{-1}(g)) \geq u(g)$ ve $t^*(\varphi^{-1}(g)) \leq u^*(g)$ ' dir. [48]

Teorem 7. 1. 14: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümüne sezgisel sürekli dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $\forall f \in I^X$ için $\varphi(\overline{f}) \leq \overline{\varphi(f)}$

(b) $\forall g \in I^Y$ için $\overline{\varphi^{-1}(g)} \leq \varphi^{-1}(\overline{g})$

(c) $\forall g \in I^Y$ için $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{g}) \leq (\varphi^{-1}(g))^{\circ}$

İspat: ([49], S 797)

Tanım 7. 1. 15: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay olsun. $\varphi : X \to Y$ dönüşümüne sezgisel açık dönüşüm (dereceyi koruyan açık dönüşüm) denir: $\Leftrightarrow \forall g \in I^X$ için $t(g) \leq u(\varphi(g))$ ve $t^*(g) \geq u^*(\varphi(g))$' dir. [49]

Teorem 7. 1. 16: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü sezgisel açık dönüşüm olsun. Bu taktirde,

$\forall g \in I^X$ için $\varphi(\overset{\circ}{g}) \leq (\varphi(g))^{\circ}$ sağlanır. [49]

İspat: $g \in I^X$ alalım.

$$\varphi(\overset{\circ}{g}) = \varphi(\bigvee \{h \in I^X \mid h \leq g, t(h) > 0, t^*(h) \leq t^*(g)\})$$

$$\leq \bigvee \{\varphi(h) \in I^Y \mid \varphi(h) \leq \varphi(g), t(h) > 0, t^*(h) \leq t^*(g)\}$$

$$\leq \bigvee \{\varphi(h) \in I^Y \mid \varphi(h) \leq \varphi(g), u(\varphi(h)) > 0, u^*(\varphi(h)) \leq u^*(\varphi(g))\}\text{' dir.}$$

Teorem 7. 1. 11. (a) dan $u(\varphi(h)) > 0 \Rightarrow (\varphi(h))^{\circ} = \varphi(h) \leq (\varphi(g))^{\circ}$ olduğundan $\varphi(\overset{\circ}{g}) \leq (\varphi(g))^{\circ}$ elde edilir.

7.2. Sezgisel Smooth Kompaktlık ve Özellikleri

Tanım 7. 2. 1: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g \in I^X$ olsun.

(a) g sezgisel smooth kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p$ $(g(x) \geq p')$ olacak biçimdeki her $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0$ ve $t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)}$: $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) > p$ $(g(x) \geq p')$.

Eğer $g = 1_X$ ise (X,t,t*) uzayı sezgisel smooth kompakt olarak adlandırılır.

Bu durumda tanımımız aşağıdaki şekilde ifade edilir:

X sezgisel smooth kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p \quad (\forall x \in X)$ olacak biçimdeki her $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \le t(f_i)\}$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} : (\bigvee_{i\in F} f_i)(x) > p \ (\forall x \in X)$.

(b) g sezgisel smooth yakın kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p \quad (g(x) \ge p')$ olacak biçimdeki her $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \le t(f_i)\}$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} : (\bigvee_{i\in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(x) > p \ (g(x) \ge p')$.

Eğer $g = 1_X$ ise (X,t,t*) uzayı sezgisel smooth yakın kompakt olarak adlandırılır.

(c) g sezgisel smooth hemen hemen kompakttır $:\Leftrightarrow \forall p \in [0,1)$ ve $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p$ $(g(x) \ge p')$ olacak biçimdeki her $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \le t(f_i)\}$ ailesi için

$\exists F \in 2^{(J)} : (\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(x) > p \ (g(x) \ge p')$.

Eğer $g = 1_X$ ise (X,t,t*) uzayı sezgisel smooth hemen hemen kompakt olarak adlandırılır.

Not: Tanım 7. 2. 1.' de ailede t*=1-t olarak aldığımızda bu tanımlar Abbas [74] tarafından verilmiş olan kompaktlık tanımları ile çakışır. Dolayısıyla bu kompaktlık tanımları Abbas tarafından verilen tanımların bir genelleştirmesi olur.

Teorem 7. 2. 2: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g \in I^X$ olsun.

g sezgisel smooth kompakt $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ g sezgisel smooth yakın kompakt

$\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ g sezgisel smooth hemen hemen kompakttır

İspat: (i) $p \in [0,1)$ ve $(g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p$ olacak biçimdeki $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesini alalım.

g sezgisel smooth kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) > p$ sağlanır.

$\forall i \in J$ için $t(f_i) > 0$ olduğundan Teorem 7. 1. 12. (a) dan $f_i = \overset{\circ}{f_i}$ elde ederiz. Ayrıca Teorem 7. 1. 8. (b) den her $i \in J$ için $f_i = \overset{\circ}{f_i} \leq \overline{\overset{\circ}{f_i}}$ elde ederiz. Buradan da

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{\overset{\circ}{f_i}})(x) > p$ elde ederiz.

Sonuç olarak g sezgisel smooth yakın kompakttır.

(ii) $p \in [0,1)$ ve $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p$ olacak biçimdeki $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesini alalım.

g sezgisel smooth yakın kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{\overset{\circ}{f_i}})(x) > p$ sağlanır.

Teorem 7. 1. 11. (b) den her $i \in J$ için $\overline{\overset{\circ}{f_i}} \leq \overline{f_i}$ elde ederiz. Buradan da

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(x) > p$ elde ederiz.

Sonuç olarak g sezgisel smooth hemen hemen kompakttır.

Teorem 7. 2. 3: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in I^X$ olsun. g ve h sezgisel smooth kompakt ise $g \vee h$ sezgisel smooth kompakttır.

İspat: $p \in [0,1)$ ve $(g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p$ olacak biçimdeki $\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0 \text{ ve } t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesini alalım.

$p \in [0,1)$ olduğundan $g(x) \geq p'$ ve ya $h(x) \geq p'$ dür.

g ve h sezgisel smooth kompakt olduğundan

$\exists F, E \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) > p$ ve

$h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ içn $(\bigvee_{i \in E} f_i)(x) > p$

$\Rightarrow g(x) \geq p'$ ve $h(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E \cup F} f_i)(x) > p$

$\Rightarrow (g \vee h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in E \cup F} f_i)(x) > p$

Sonuç olarak $g \vee h$ sezgisel smooth kompakttır.

Teorem 7. 2. 4: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in I^X$ olsun. g ve h sezgisel smooth yakın kompakt (sezgisel smooth hemen hemen kompakt) ise $g \vee h$ sezgisel smooth yakın kompakttır (sezgisel smooth hemen hemen kompakttır).

İspat: Teorem 7. 2. 3.’ e benzer olarak gösterilir.

Teorem 7. 2. 5: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in I^X$ olsun. g sezgisel smooth kompakt, $c_t(h) = 1$ ve $c^*_{t^*}(h) = 0$ ise $g \wedge h$ sezgisel smooth kompakttır.

İspat: $p \in pr(L)$ ve $(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p$ olacak biçimde $\{f_i \subseteq I^X \mid t(f_i) > 0$ ve $t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesini alalım. Buradan $\beta = \{f_i\}_{i \in J} \cup \{h'\}$ ailesi için $c_t(h) = t(h') = 1 > 0$ ve $c^*_{t^*}(h) = t^*(h') = 0 < t(h')$ sağlanır. Dolayısıyla bu aile için

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta} k)(x) > p$

elde ederiz. Gerçekten

$g(x) \geq p'$ olacak biçimde $x \in X$ alalım.

$h(x) \geq p' \Rightarrow (g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{i \in J} f_i)(x) > p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) > p$

$h(x) \ngeq p \Rightarrow h'(x) > p \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta} k)(x) > p$ elde ederiz.

g sezgisel smooth kompakt olduğundan

$\exists \beta_0 = \{f_1, f_2, ..., f_n, h'\} \subseteq \beta$ sonlu : $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{k \in \beta_0} k)(x) > p$

sağlanır. Buradan

$(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) > p \quad ((g \wedge h)(x) \geq p')$ elde ederiz. Gerçekten de

$(g \wedge h)(x) \geq p' \Rightarrow g(x) \geq p' \Rightarrow (\bigvee_{k \in \beta_0} k)(x) > p$ ’ dir. Buradan

$\exists k \in \beta_0$: $k(x) > p$ ' dir. Ancak $h(x) \geq p' \Rightarrow h'(x) \leq p$ ' dir. Böylece

$(g \wedge h)(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(x) > p$ elde ederiz

Dolayısıyla $g \wedge h$ sezgisel smooth kompakttır.

Sonuç 7. 2. 6: (X,t,t*) sezgisel smooth kompakt fuzzy topolojik uzayı için $c_t(h) = 1$ ve $c*_{t*}(h) = 0$ olacak biçimdeki her $h \in I^X$ fuzzy kümesi sezgisel smooth kompakttır. Diğer bir ifadeyle, sezgisel smooth kompakt uzaylarda kapalı olma derecesi 1 ve kapalı olmama derecesi 0 olan her fuzzy kümesi sezgisel smooth kompakttır.

Teorem 7. 2. 7: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $g, h \in I^X$ olsun. g sezgisel smooth hemen hemen (yakın) kompakt, $c_t(h) = 1$ ve $c*_{t*}(h) = 0$ ise $g \wedge h$ sezgisel smooth hemen hemen (yakın) kompakttır.

İspat: Teorem 7. 2. 5.' e benzer olarak gösterilir.

Teorem 7. 2. 8: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde sezgisel sürekli dönüşüm olsun. Eğer $g \in I^X$ (X,t,t*)' de sezgisel smooth kompakt ise $\varphi(g) \in I^Y$ (Y,u,u*)'de sezgisel smooth kompakttır.

İspat: $p \in [0,1)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) > p$ olacak biçimde

$\{f_i \in I^Y \mid u(f_i) > 0$ ve $u*(f_i) \leq u(f_i)\}$ ailesini alalım.

φ sezgisel sürekli olduğundan her $i \in J$ için

$t(\varphi^{-1}(f_i)) \geq u(f_i) > 0 \Rightarrow t(\varphi^{-1}(f_i)) > 0$ ve $t*(\varphi^{-1}(f_i)) \leq u*(f_i) \leq u(f_i) \leq t(\varphi^{-1}(f_i))$

sağlanır.

Ayrıca $\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) > p$ olduğundan

$\varphi(g)(\varphi(x)) = g(x) \geq p'$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$(\bigvee_{i \in J} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) > p$ dir.

g sezgisel smooth kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) > p$ dir. Dolayısıyla

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) > p$ sağlanır.

Gerçekten de her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$-sonlu ve $p \in [0,1)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Leftrightarrow \exists x \in X : g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$

$(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) = (\bigvee_{i \in F} f_i)(\varphi(x)) = (\bigvee_{i \in F} \varphi^{-1}(f_i))(x) > p$ sağlanır. Böylece

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(y) > p$ elde ederiz.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in I^Y$ sezgisel smooth kompakttır.

Sonuç 7. 2. 9: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ sezgisel sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer X sezgisel smooth kompakt ise Y de sezgisel smooth kompakttır.

Teorem 7. 2. 10: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde sezgisel sürekli dönüşüm olsun. Eğer $g \in I^X$ (X,t,t*)' de sezgisel smooth hemen hemen kompakt ise $\varphi(g) \in I^Y$ (Y,u,u*)' de sezgisel smooth hemen hemen kompakttır.

İspat: $p \in [0,1)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in J} f_i)(y) > p$ olacak biçimde

$\{f_i \in I^Y \mid u(f_i) > 0$ ve $u^*(f_i) \leq u(f_i)\}$ ailesini alalım.

φ sezgisel sürekli olduğundan

$\{\varphi^{-1}(f_i) \in I^X \mid t(\varphi^{-1}(f_i)) > 0$ ve $t^*(\varphi^{-1}(f_i)) \leq t(\varphi^{-1}(f_i))\}$ ailesi için

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) > p$ sağlanır.

g sezgisel smooth hemen hemen kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} (\varphi^{-1}(f_i))^{-})(x) > p$' dir. Dolayısıyla

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{f_i})(y) > p$ sağlanır.

Gerçekten de her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$-sonlu ve $p \in [0,1)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Leftrightarrow \exists x \in X : g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ ' dir.

Teorem 7. 1. 14. (b) den

$(\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(y) = (\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(\varphi(x)) = (\bigvee_{i\in F} \varphi^{-1}(\overline{f_i}))(x) \geq (\bigvee_{i\in F} (\varphi^{-1}(f_i))^{-})(x) > p$ sağlanır. Böylece $\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} \overline{f_i})(y) > p$ elde ederiz.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in I^Y$ sezgisel smooth hemen hemen kompakttır.

Sonuç 7. 2. 11: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ sezgisel sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. X sezgisel smooth hemen hemen kompakt ise Y sezgisel smooth hemen hemen kompakttır.

Teorem 7. 2. 12: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde sezgisel sürekli dönüşüm olsun. Eğer $g \in I^X$ (X,t,t*)' de sezgisel smooth yakın kompakt ise $\varphi(g) \in I^Y$ (Y,u,u*)' de sezgisel smooth hemen hemen kompakttır.

İspat: Teorem 7. 2. 2. ve Teorem 7. 2. 10.' dan kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 7. 2. 13: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$ sonlu olacak biçimde sezgisel sürekli ve sezgisel açık bir dönüşüm olsun. Eğer $g \in I^X$ (X,t,t*)' de sezgisel smooth yakın kompakt ise $\varphi(g) \in I^Y$ (Y,u,u*)' de sezgisel smooth yakın kompakttır.

İspat: $p \in [0,1)$ ve $\varphi(g)(y) \geq p'$ olan her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(y) > p$ olacak biçimde

$\{f_i \in I^Y \mid u(f_i) > 0 \text{ ve } u^*(f_i) \leq u(f_i)\}$ ailesini alalım.

φ sezgisel sürekli olduğundan

$\{\varphi^{-1}(f_i) \in I^X \mid t(\varphi^{-1}(f_i)) > 0 \text{ ve } t^*(\varphi^{-1}(f_i)) \leq t(\varphi^{-1}(f_i))\}$ ailesi için

$g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} \varphi^{-1}(f_i))(x) > p$ sağlanır.

g sezgisel smooth yakın kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $g(x) \geq p'$ olan her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in F} (\varphi^{-1}(f_i))^{-\circ})(x) > p$ ' dir. Dolayısıyla

$\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(y) > p$ sağlanır.

Gerçekten de her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y)$-sonlu ve $p \in [0,1)$ olduğundan

$\varphi(g)(y) = \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} g(x) \geq p' \Leftrightarrow \exists x \in X \ : \ g(x) \geq p'$ ve $\varphi(x) = y$ ’ dir.

Teorem 7. 1. 13. ve Teorem 7. 1. 15. dan

$$p < \varphi(\bigvee_{i\in F} (\varphi^{-1}(f_i))^{-\circ})(y) = (\bigvee_{i\in F} \varphi((\varphi^{-1}(f_i))^{-\circ})(y) \leq (\bigvee_{i\in F} (\varphi((\varphi^{-1}(f_i))^{-}))^{\circ})(y)$$
$$\leq (\bigvee_{i\in F} (\varphi(\varphi^{-1}(f_i)))^{-\circ})(y) \leq (\bigvee_{i\in F} f_i)(y)$$

Böylece $\varphi(g)(y) \geq p'$ olacak biçimdeki her $y \in Y$ için $(\bigvee_{i\in F} \overset{\circ}{\overline{f_i}})(y) > p$ sağlanır.

Sonuç olarak $\varphi(g) \in I^Y$ sezgisel smooth yakın kompakttır.

Sonuç 7. 2. 14: (X,t,t*) ve (Y,u,u*) iki sezgisel smooth fuzzy topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ sezgisel sürekli, sezgisel açık ve örten bir dönüşüm olsun. X sezgisel smooth yakın kompakt ise Y sezgisel smooth yakın kompakttır.

Tanım 7. 2. 15: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzayı sezgisel regülerdir:

$\Leftrightarrow$ $t(f) > 0$ ve $t^*(f) \leq t(f)$ olacak biçimdeki her $f \in I^X$ için

$f = \bigvee \{h \in I^X \mid \overline{h} \leq f, t(h) > 0, t^*(h) \leq t^*(f)\}$ olarak yazılır.

Teorem 7. 2. 16: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzayı sezgisel smooth hemen hemen kompakt ve sezgisel regüler ise sezgisel smooth kompakttır.

İspat: $p \in [0,1)$ ve her $x \in X$ için $(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) > p$ olacak biçimde

$\{f_i \in I^X \mid t(f_i) > 0$ ve $t^*(f_i) \leq t(f_i)\}$ ailesini alalım.

X sezgisel regüler olduğundan her $i \in J$ için

$f_i = \bigvee \{h_i \in I^X \mid \overline{h_i} \leq f_i, t(h_i) > 0, t^*(h_i) \leq t^*(f_i)\}$ sağlanır. Buradan

$(\bigvee_{i\in J} f_i)(x) = (\bigvee_{i\in J} h_i)(x) > p$ elde ederiz.

X sezgisel smooth hemen hemen kompakt olduğundan

$\exists F \in 2^{(J)}$: $\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} \overline{h_i})(x) > p$ olur.

$\forall i \in J$ için $\overline{h_i} \leq f_i$ olduğundan

$\forall x \in X$ için $(\bigvee_{i \in F} f_i)(x) > p$ elde ederiz.

Dolayısıyla X sezgisel smooth kompakttır

Teorem 7. 2. 17: (X,t,t*) sezgisel smooth fuzzy topolojik uzayı sezgisel smooth yakın kompakt ve sezgisel regüler ise sezgisel smooth kompakttır.

İspat: Teorem 7. 2. 16.’ ya benzer olarak ispatlanır.

Sonuç 7. 2. 18: Sezgisel regüler smooth topolojik uzayarda kompaktlık, yakın kompaktlık ve hemen hemen kompaktlık birbirine denktirler.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets”, ***Inform. Contr.***, 8, 338-353, (1965)

2. Chang, C. L., “Fuzzy topological spaces”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 24, 182-190, (1968)

3. Lowen, R., “Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 56, 621-633, (1976)

4. Sostak, A.P., “On fuzzy topological structure” ***Suppl. Rend. Circ. Math. Palermo Ser.II***, 11, 89-103, (1985)

5. Sostak, A. P., “Two decades of fuzzy topology: Basic ideas, notatitions and results”, ***Russian Math. Surveys***, 44, 125-186, (1989)

6. Hazra, R. N., Samanta, S. K., Chattopadhyay, K. C., “Fuzzy topology redefined”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 45, 79-82, (1992)

7. Ramadan, A. A., “Smooth topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 48, 371-375, (1992)

8. Chattopadhyay, K. C., Hazra, R. N., Samanta, S. K., “Gradation of openness: fuzzy topology”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 49, 237-242, (1992)

9. Chattopadhyay, K. C., Samanta, S. K.,”Fuzzy topology: fuzzy closure operator, fuzzy compactness and fuzzy connectedness”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 54, 207-212, (1993)

10. Das, P., “Bifuzzy topology redefined”, ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 3, 331-336, (1995)

11. El Gayyar, M. K., Kerre, E. E., Ramadan, A. A., “Almost compactness and near compactness in smooth topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 62, 193-202, (1992)

12. Eş, A. H., Çoker, D., “On several types of degrees of fuzzy compactness in fuzzy topological spaces in Sostak’ s sense”, ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 3, 481-491, (1995)

13. Gerla, G., “On fuzzy convergence”, ***Information Sciences***, 39, 269-284, (1986)

14. Mingsheng, Y., “A new approach for fuzzy topology I”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 39, 303-321, (1991)

15. Srivastava, R., “On separation axioms in a mewly defined fuzzy topology”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 62, 341-346, (1994)

16. El Gayyar, M. K., Kerre, E. E., Ramadan, A. A., “On smooth topological spaces II: Saparation axioms”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 119, 495-504, (2001)

17. Ramadan, A. A., El Deeb, S. M., Abdel-Sattar, M.,A., “On smooth topological space”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 119, 473-482, (2001)

18. Demirci, M., “Neighbohood structures of smooth topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 92, 123-128, (1997)

19. Demirci, M., “Three topological structures of smooth topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 101, 185-190, (1999)

20. Zhang, J., Shi, F. G., Zheng, C, Y., “On fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 149, 473-484, (2005)

21. Aygün, H., Warner, M. W., Kudri, S. R. T., “On smooth L-fuzzy topological spaces”, ***The Journal of Fuzzy Math.***, 5, 321-338, (1997)

22. Goguen, J. A., “The Tychonoff theorem”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 43, 734-742, (1973)

23. Wong, C.K., “Covering properties of fuzzy topological spaces”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 43, 697-704, (1973)

24. Gantner, T. E., Steinlage, R. C., Warren, R. H., “Compactness in fuzzy topological spaces”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 62, 547-562, (1978)

25. Lowen, R., “A comparsion of different compactnesss notion in fuzzy topological spaces”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 64, 446-454, (1978)

26. Kudri, S. R. T., “Compactness in L-fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 67, 329-336, (1994)

27. Meng, G., “Lowen’s compactness in L-fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 53, 329-335, (1983)

28. Wang, G. J., “A new compactness definitions by fuzzy nets”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 94, 1-23, (1983)

29. Kudri, S. R T., Warner, M. W., “Relations between the good definitions of compactness in L-fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 86, 241-248, (1997)

30. Zhao, D., “N-compactness in L-fuzzy topological spaces”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 128, 64-79, (1987)

31. Warner, M.W. and McLean, R.G., "On Hausdorff L-fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 56, 103-110, (1993)

32. Kudri, S. R. T., "L-fuzzy compactness and related concepts", Doktora tezi, ***City University***, London,

33. Kudri, S. R. T., Warner, M. W., "L-fuzzy local compactness", ***Fuzzy Sets and Systems***, 67, 337-345, (1995)

34. Kudri, S. R. T., "Paracompactnass in L-fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 70, 119-123, (1995)

35. Kudri, S. R. T., "Countability in topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 71, 241-249, (1995)

36. Kudri, S. R. T., Warner, M. W., "Some good L-fuzzy compactness: Related concepts and their properties I", ***Fuzzy Sets and Systems***, 76, 141-155, (1995)

37. Kudri, S. R. T., Warner, M. W., "Some good L-fuzzy compactness: Related concepts and their properties II", ***Fuzzy Sets and Systems***, 76, 141-155, (1995)

38. Kudri, S. R. T., Warner, M. W., "L-fuzzy weak local compactness", ***Fuzzy Sets and Systems***, 81, 275-279, (1996)

39. Kudri, S. R. T., "Semi-compactness and S*-closedness in L-fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 109, 223-231, (2000)

40. Steinlage, R. C., "Wallman Compactification of L-fuzzy topological spaces", ***Proceedings of Sixth IFSA Word Congress***, 459-462, (1995)

41. Warner, M. W., "On fuzzy compactness", ***Prdoceedings of Fifth IFSA World Congress***, 336-340, (1993)

42. Warner, M. W., "On fuzzy compactness", ***Fuzzy Sets and Systems***, 80, 15-22, (1996)

43. Ramadan, A. A., Abbas, S. E., "On L-smooth compactness", ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 9, 59-73, (2001)

44. Park, C. K., Min, W. K., "α-compactness in smooth topological spaces", ***Journal of Mathematic and Mathematical Sciences***, 2897-2906, (2003)

45. Aygün, H. and Abbas, S. E., "On characterizations of some covering properties in L-fuzzy topological spaces in Sostak's sense", ***Information Sciences***, 165, 221-233, (2004)

46. Eş, H., Çoker, D., "On several types of degree of fuzzy compactness", ***Fuzzy Sets and Systems***, 87, 349-359, (1997)

47. Demirci, M., “On several types of compactness in smooth topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 90, 83-88, (1997)

48. Mondal, T. K. and Samanta, S. K., “On intuitionistic gradation of openness”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 131, 323-336, (2002)

49. Min, W. K. and Park, C. K., “Some results on intuitionistic fuzzy topological spaces defined by intuitionistic gradation of openness”, ***Commun Korean Math. Soc.***, 20, 791-801, (2005)

50. Abbas, S. E., “On intuitionistic fuzzy compactness”, ***Information Sciences***, 173, 75-91, (2005)

51. Ramadan, A. A., Kim, Y. C., Abbas, S. E., “Compactness in intuitionistic gradation of openness”, ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 13, 581-600, (2005)

52. Abbas, S. E., Aygün, H., “Intuitionistic fuzzy semiregularization spaces”, ***Information Sciences,*** 176, 745-757, (2006)

53. Birkoff, G., “Lattice theory”, ***Amer. Math. Soc. Collog .Pub.***, 25, Providence, R. I., (1984)

54. Yingming, Y., and Maokong, L., “Fuzzy topology”, ***Word Scientific***, USA, 1997

55. Gierz, Hophman, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Misolve, M., Scott, D.S., “A compendium of continuous lattices”, ***Springer-Verlag***, Berlin, (1980)

56. Hutton, B., “Products of fuzzy topological spaces”, ***Topology and Its Applications***, 11, 59-67, (1980)

57. Gougen, J. A., “L-fuzzy sets”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 18, 145-174, (1967)

58. Warner, M. W., “Frame-fuzzy points and membership”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 42, 335-344, (1991)

59. Pu, P. M., Liu, Y. M., “Fuzzy topology I: Neigbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence”, ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 76, 571- 599, (1980)

60. Bourbaki, N., “Elements of mathematics, General topology I”, ***Addison-Wesley***, Reading, MA, (1996)

61. Warner, M.W., “Fuzzy topology with respect to continuous lattices”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 35, 85-91, (1990)

62. Aygün, H., “Study of covering properties in fuzzy topology”, Doktora Tezi, ***City University***, London,1997.

63. Atia, R. H., El Deeb, S. M.,Hasamin, I. A., "A note on strong compactness and S-closedness", ***Math. Vesnik***, 6, 23-28, (1982)

64. Nanda, S., "Strongly compact L-fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 42, 259-262, (1991)

65. Zahran, A. M., "Strongly compact and P-closed L-fuzzy topological spaces", ***Journal of Fuzzy Mathematic***, 3, 97-102, (1995)

66. Aygün, H. and Kudri, S. R. T., "P-closedness in L-fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 109, 277-283, (2000)

67. Azad, K. K., "On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity", ***Journal of Mathematic Analysis and Applications***, 82, 14-32, (1981)

68. Thakur, S. S., Singh, S., "On fuzzy Semi-preopen sets and fuzzy semi-precontinuity", ***Fuzzy Sets and Systems***, 98, 383-391, (1998)

69. Bai, S. Z., "The semi-precompactness axioms", ***Information Sciences***, 165, 139-148, (2004)

70. Njastad, O., "On some classes of nearly open sets", ***Pasific Journal of Mathematics***, 15, 961-970, (1965)

71. Maheshwari,S. N., Thakur, S. S., "On α-compact spaces", ***Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica***, 13, (1985)

72. Thakur, S. S., Saraf, R. K., "α-compact fuzzy topological spaces", ***Mathematica Bohemica***, 120, (1995)

73. Atanassov, T. K., "Intuitionistic fuzzy sets", ***Fuzzy Sets and Systems***, 20, 87-96, (1986)

74. Çoker, D., "An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces", ***Fuzzy Sets and Systems***, 88, 81-89, (1997)

75. Abbas, S. E., "On intuitionistic fuzzy compactness", ***Information Sciences***, 173, 75-91, (2005)

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Adapazarı' nda doğdu. İlkokulu Ahmet Akkoç İlkokulu' nda, ortaokul ve lise öğrenimini de Adapazarı Atatürk Lisesi' nde tamamladı. 1990 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' ne başladı. 1995 yılında bu bölümden mezun oldu. 1996 yılında Pendik Fatih Sultan Mehmet İlköğretim Okulu' nda Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2000 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksak Lisans (Matematik) Programına başladı. Haziran 2001' de Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı' na araştırma görevlisi olarak atandı. Mayıs 2003' de Yüksek Lisansı programını tamamladı. Halen Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi' nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.