KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜREVLİ ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

DOKTORA TEZİ

Evrim GÜVEN

Anabilim Dalı : Matematik

Danışman: Yrd. Doç.Dr. Muharrem SOYTÜRK

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜREVLİ ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

DOKTORA TEZİ

Evrim GÜVEN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02 Mart 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Mayıs 2007

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yrd. Doç. Dr. Muharrem SOYTÜRK	Prof. Dr. Halis AYGÜN	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
(.....................................)	(.....................................)	(.....................................)

Üye	Üye
Doç. Dr. Refik KESKİN	Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK
(.....................................)	(.....................................)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten, yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Muharrem SOYTÜRK'e, değerli fikirleriyle beni yönlendiren tez komitesine ve beni destekleyen ve bugünlere getiren aileme içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Halka
Z	: Halkanın merkezi
d	: Halkanın türevi
CharR	: R halkasının karakteristiği
$[x,y]$	: $xy-yx$
(x,y)	: $xy+yx$
$[x,y]_{\sigma,\tau}$	: $x\sigma(y)-\tau(x)y$
$(x,y)_{\sigma,\tau}$	: $x\sigma(y)+\tau(x)y$
$C_{\sigma,\tau}$	: $\{c\in R \mid [x,c]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R\}$

TÜREVLİ ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Evrim GÜVEN

Anahtar Kelimeler: Asal halka, Lie ideal, (σ,τ)-türev, (σ,τ)-Lie ideal.

Özet: Bu çalışmada, karakteristiği ikiden farklı olan asal halkalarda, türev ve Lie ideal ile ilgili bazı özellikler genelleştirilmiş ve halkalarda bazı özellikler verilmiştir. Birinci bölümde, üzerinde çalışılan konularla ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise halkalarda çalışılan konularla ilgili temel bilgilere değinilmiştir. Üçüncü bölümde, türevli asal halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen bazı araştırmalar özetlenmiştir. Dördüncü bölüm ve beşinci bölümde aşağıda özetlenen sonuçlar yer almıştır: R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ, τ, λ, μ, α, β, R halkasının otomorfizmleri, U halkanın sıfırdan farklı bir ideali, $0\neq d_1:R\to R$ bir (σ,τ)-türev, $0\neq d_2:R\to R$ bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. Bu durumda $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu}=0$ iken, R halkasının komütatif olduğu ve aynı koşullar altında eğer $d_1d_2(U)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğu gösterilmiştir. R halkasında bir d (σ,τ)-türevi ve $a\in R$ için $[d(R),a]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$ veya "$d\tau^{-1}\beta(a)=0$ ve $d\sigma^{-1}\alpha(a)=0$" sonucu elde edilmiş, ayrıca $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ olmak üzere $[a,d(U)]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ olduğu gösterilmiştir. Yine, $d:R\to R$ bir (σ,τ)-türev olmak üzere $a\in R$ için $d[a,R]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $a+\beta\alpha^{-1}(a)\in C_{\alpha,\beta}$ olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca U bir (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $d:R\to R$ bir (λ,μ)-türev olmak üzer, $d(U)=0$ ise $v+\tau\sigma^{-1}(v)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğu gösterilmiştir. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $\left[[I,a]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $[\tau(a),\beta(b)]=0$ sonucu elde edilmiş son olarak da tek yanlı (σ,τ)-Lie idealler ile ilgili bazı özellikler kanıtlanmıştır.

SOME RESULTS ON COMMUTATIVITY OF PRIME RINGS WITH DERIVATION AND GENERALİZED LIE IDEALS

Evrim GÜVEN

Keywords: Prime ring, Lie ideal, (σ,τ)-derivation, (σ,τ)-Lie ideal.

Abstract: In this study, some properties about derivation and Lie ideal of prime rings with characteristics different than two have been generalized and some properties about rings have been presented. In the first chapter, information about the corresponding subject has been reviewed. In the second chapter, an overview of the basic information related to rings research area has been presented. In the third chapter, some papers which include researchs on commutativity conditions about rings with derivation have been summarized. Furthermore, the following summarized results are given in the fourth and the fifth chapters: Let R be a prime ring, char$R\neq 2$, σ, τ, λ, μ, α, β are automorphisms of R, U is a nonzero ideal of R, $0\neq d_1:R\to R$ is a (σ,τ)-derivation and $0\neq d_2:R\to R$ is an (α,β)-derivation. In this case, if $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu}=0$ then R is a commutative ring has been proved and if $d_1d_2(U)=0$ then $d_1=0$ or $d_2=0$ has been shown. Let d be a (σ,τ)-derivation of R and $a\in R$. If $[d(R),a]_{\alpha,\beta}=0$ then $a\in Z$ or "$d\tau^{-1}\beta(a)=0$ and $d\sigma^{-1}\alpha(a)=0$" have been proved. Furthermore, if $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ and $[a,d(U)]_{\alpha,\beta}=0$ then $a\in C_{\alpha,\beta}$ has been shown. If $d:R\to R$ is a (σ,τ)-derivation and $a\in R$ such that $d[a,R]_{\alpha,\beta}=0$ then $a\in C_{\alpha,\beta}$ or $a+\beta\alpha\text{-}1(a)\in C_{\alpha,\beta}$ has been proved. In addition if U is a right (σ,τ)-Lie ideal of R and $d:R\to R$ is a (λ,μ)-derivation such that $d(U)=0$ then $v+\tau\sigma^{-1}(v)\in C_{\sigma,\tau}$ has been shown. Let I is a nonzero ideal of R such that $\left[[I,a]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}=0$ then $[\tau(a),\beta(b)]=0$ has been obtained. In the end, some properties related to one side (σ,τ)-Lie ideals have been proved.

1. GİRİŞ

Halkalarda aşağıdaki özellikler göz önüne alınsın:

A) a) $d_1d_2(R)=0$,
   b) $[d_1(R),d_2(R)]=0$,
   c) $(d_1(R),d_2(R))=0$,
   d) $[d_1(R),d_2(R)]_{\sigma,\tau}=0$,
   e) $(d_1(R),d_2(R))_{\sigma,\tau}=0$,
   f) $[d(R),a]=0$ $([a,d(R)]=0)$,
   g) $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=0$,
   h) $(d(R),a)_{\sigma,\tau}=0$,
   i) $d(R,a)=0$,

B) $d(R)\subset Z$,

C) a) $d[x,y]=[d(x),d(y)]$,
   b) $d(x,y)=(d(x),d(y))$

Karakteristiği ikiden farklı olan asal halkalarda, yukarıdaki koşullardan biri var olduğunda halkaların komütatifliği üzerinde birçok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar yapılırken, özelliklerde adı geçen halka, türev, komütatör kavramlarının yerine, ideal, Lie ideal, yarı-türev, (σ,τ)-türev ve (σ,τ)-komütatör alınarak, önceki sonuçlar genelleştirilmiştir.

1957 yılında E. C. Posner, karakteristiği ikiden farklı olan bir R asal halkasında tanımlı d_1, d_2 türevleri için d_1d_2 bileşkesi de türev ise bu takdirde $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğunu göstermiştir. P. H. Lee ve T. K. Lee 1981 yılında, R asal halkasında d_1, d_2 türevleri için $d_1d_2(R)\subset Z$ ise halkanın komütatif olduğunu ispatlamışlardır. Aynı yıl J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından, bu koşuldaki R halkası yerine R halkasının bir U ideali alınarak $d_1d_2(U)=0$ iken U idealinin halkanın merkezine ait olduğu gösterilmiştir. 1992 yılında N. Aydın ve K Kaya, d_1 bir (σ,τ)-türev, d_2 bir türev olmak üzere, $d_1d_2(R)=0$ iken $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğunu göstermişlerdir. 2002 yılına gelindiğinde, M. Ashraf ve N. Rehman adlı matematikçiler, d_1 ve d_2 R üzerinde iki (σ,τ)-türev, $d_1\sigma=\sigma d_1$, $d_1\tau=\tau d_1$, $d_2\sigma=\sigma d_2$, $d_2\tau=\tau d_2$, ve $d_1d_2(R)=0$ olması durumunda $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğunu ispatlamışlardır [46, 41, 16, 5, 1].

1978 yılında I.N. Herstein, R asal halkasında $\forall x,y\in R$ için $[d(x),d(y)]=0$ ise, halkanın komütatif olduğunu göstermiştir. Daha sonra 1981 yılında, P.H. Lee ve T.K. Lee, $[d(R),d(R)]\subset Z$ olduğu takdirde R halkasının komütatif olduğunu ispatlamışlardır. 1991 yılında N. Aydın U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere $[d(U),d(U)]\subset Z$ ise, $U\subset Z$ olduğunu göstermiştir. 1992 de N.Aydın ve K. Kaya U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve d, R üzerinde bir (σ,τ)-türev iken $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}=0$ ise, halkanın komütatifliğini ve dahası, $[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ iken de halkanın komütatif bir halka olduğunu ispatlamışlardır. 2002 de M. Ashraf ve N. Rehman, I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d, R üzerinde bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ iken, $\forall x,y\in I$ için $[d(x),d(y)]=0$ ise, halkanın komütatif olduğunu ispatlamışlardır. Benzer koşullar olan b), c), d), e) koşulları ile ilgili çalışmalar devam etmektedir [28, 41, 2, 5, 1].

Yine I. N. Herstein'ın, 1979 yılında R asal halkasındaki bir a elemanı için f) koşulu sağlandığında, bu a elemanının R halkasının merkezine ait olduğunu göstermesinin ardından P.H.Lee ve T.K.Lee 1981 yılında, R asal halkasında $[a,d(R)]\subset Z$ (ya da $[d(R),a]\subset Z$) ise $a\in Z$ olduğunu ispatladı. Aynı yıl, J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr, R halkasının merkezinde kapsanılmayan bir U Lie ideali için, $[a,d(U)]=0$ iken bu sonucu genelleştirmişler, P. H. Lee ve T. K. Lee de $[a,d(U)]\subset Z$ ise $a\in Z$ olduğunu göstermişlerdir. Öte yandan, 1992'de N. Aydın ve K. Kaya, R asal halkasında tanımlı bir d (σ,τ)-türevi için, $[d(R),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ olduğu sonucunu buldu. 2001 yılında da K. Kaya, Ö. Gölbaşı ve N. Aydın, R asal halkasında tanımlı d türevi için, $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olduğunu gösterdiler. Yine aynı araştırmacılar, R asal halkasında $[d(R),a]=0$ olması için gerek ve yeter koşulun $d[R,a]=0$ olduğunu gösterdiler. 2003'de K.H.Park ve Y.S.Jung, $\sigma,\tau,\phi,\varphi:R\rightarrow R$ otomorfizmler, d bir (ϕ,φ)-türev iken $[d(R),a]_{\phi\sigma,\varphi\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olduğu sonucunu buldu. Halka, türev ve komütatör değiştirilerek bu ve benzeri olan g), h), ı), i) koşulları da incelenerek farklı sonuçlar elde edilmiştir[30, 41, 16, 42, 5, 38, 44].

1978 yılında I. N. Herstein, R asal halkasındaki sıfırdan farklı d türevi için B) koşulu sağlandığı takdirde R halkasının komütatif bir halka olduğunu ispatladı. Daha sonra 1981 de J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından, bu koşuldaki R yerine, R halkasının bir U ideali alınarak, U idealinin halkanın merkezine ait olduğu gösterildi. 1995 yılında N. Aydın ve M. Soytürk, bu sonucu (σ,τ)-Lie ideal için ispatladı, 2002 yılına gelindiğinde de N. Aydın, K Kaya ve Ö.Gölbaşı tarafından U bir (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $d^2(U)=0$ iken $d(U)\subset Z$ ise $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olduğu ispatlandı. Yine bu koşul da Lie idealler, tek yanlı Lie idealler, d türevi yerine bir (σ,τ)-türevi alınarak da çeşitli araştırmacılar tarafından çalışılmaya devam edilmektedir [28, 16, 10, 8].

C) koşulu ile ilgili olarak, 1992 yılında M. N. Daif ve H. Bell, bir yarıasal R halkasında $[x,y]=[d(x),d(y)]$ veya $[x,y]=[d(y),d(x)]$ koşullarından biri sağlandığı takdirde, halkanın komütatif bir halka olduğunu göstermişlerdir [20].

Bu çalışmanın amacı, bir R asal halkasında türev ve Lie ideallerle ilgili elde edilmiş bazı sonuçları, (σ,τ)-türev ve (σ,τ)-Lie ideallerde yeni sonuçlara taşımaktır. Çalışmanın 2. bölümünde tez boyunca kullanılacak genel bazı tanım ve özellikler verilmiş, 3. bölümde ise bulunan sonuçlarla ilgili önceki çalışmalara değinilmiştir. Çalışmanın 4. ve 5. bölümü olan bulgular kısımlarında ise, yukarıda bahsi geçen (A),(B) ve (C) şıklarındaki özellikler kullanılarak, karakteristiği ikiden farklı asal halkaların komütatifliği ile ilgili yeni bazı sonuçlar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Genel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: R bir halka, A, B ve P, R halkasının idealleri olsunlar. AB(P iken A(P veya B(P oluyorsa, P idealine R halkasının asal ideali denir [30].

Teorem 2.1.2: R bir halka ve P onun bir ideali iken, aşağıdakiler denktir:

(i) P bir asal idealdir.

(ii) $\forall a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$'dir,

(iii) $\forall a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$'dir,

(iv) U ve V, R halkasının iki sol ideali olsun. $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$'dir,

(v) U ve V, R halkasının iki sağ ideali olsun. $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$'dir [30].

Tanım 2.1.3: (0) ideali asal ideal olan bir halkaya asal halka denir[30].

Tanım 2.1.4: R bir halka ve $S \subset R$ olsun. $Ann_R S = \{r \in R \mid rs = 0, \forall s \in S\}$ kümesine S kümesinin sol sıfırlayanı, $AnnS_R = \{r \in R \mid sr = 0, \forall s \in S\}$ kümesine ise S kümesinin sağ sıfırlayanı denir [30].

Teorem 2.1.5: Bir R halkasında aşağıdaki koşullar denktir:

(i) R asal halkadır,

(ii) $aRb = 0$, $a, b \in R$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olur,

(iii) R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealinin her sağ sıfırlayanı sıfırdır,

(iv) R halkasının sıfırdan farklı bir sol idealinin her sol sıfırlayanı sıfırdır [30]

Tanım 2.1.6: R bir halka ve A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. Eğer $A^2 \subseteq Q$ olduğunda $A \subseteq Q$ ise bu durumda Q idealine R halkasının bir yarı asal ideali denir [30].

Teorem 2.1.7: R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

(i) Q yarı asal idealdir,

(ii) $aRa \subseteq Q$, $a \in R$ ise $a \in Q$ olur,

(iii) $a \in R$, $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ olur,

(iv) R halkasının bir U sağ ideali için $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ olur,

(v) R halkasının bir V sol ideali için $V^2 \subseteq Q$ ise $V \subseteq Q$ olur [30].

Tanım 2.1.8: R bir halka, $d: R \to R$ bir dönüşüm olsun. d dönüşümü her x, $y \in R$ için, i) d(x+y)=d(x)+d(y), ii) d(xy)=d(x)y+xd(y) koşullarını sağlıyorsa, d dönüşümüne R halkası üzerinde, bir türev denir [46].

Tanım 2.1.9: R bir halka, α, R'nin sıfırdan farklı bir dönüşümü olsun. $d:R \to R$ toplamsal fonksiyonu $\forall x,y \in R$ için $d(xy)=d(x)\alpha(y)+xd(y)$ koşulunu sağlıyorsa d dönüşümüne zayıf-α-türev denir. Üstelik α, R halkasının bir endomorfizmi ise bu takdirde d dönüşümüne α-türev denir [34].

Tanım 2.1.10: R bir halka, $\sigma,\tau:R\to R$ dönüşümler olsun. Eğer $d: R \to R$ toplamsal dönüşümü, $\forall x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ koşulunu sağlıyorsa, d dönüşümüne bir (σ, τ)-türev denir [18].

Tanım 2.1.11: R halkasında, $\forall x, y \in R$ için xy-yx elemanına komütatör çarpımı denir ve [x,y] ile gösterilir, yine xy+yx elemanına da Jordan çarpımı denir ve (x,y) ile gösterilir. σ ve τ, R halkasında dönüşümler olmak üzere $[x,y]_{\sigma,\tau}=x\sigma(y)-\tau(y)x$ ve $(x,y)_{\sigma,\tau}=x\sigma(y)+\tau(y)x$ ile tanımlanır [27].

Tanım 2.1.12: X ve Y, R halkasının alt kümeleri olsun. $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$ için $[x,y]$ ile üretilen toplamsal grup $[X,Y]$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ile üretilen toplamsal grup da $[X,Y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilir [27].

Tanım 2.1.13: R halkasında, $Z=\{c\in R|cx=xc,\ \forall x\in R\}$ kümesine, R halkasının merkezi denir [30].

Tanım 2.1.14: Bir R halkasında, U toplamsal alt grubu, $[U,R]\subset U$ koşulunu sağlıyor ise, U kümesine R halkasının bir Lie ideali denir [27].

Tanım 2.1.15: U, R halkasının bir toplamsal alt grubu ve $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ dönüşümler olsun. Bu durumda,

i) $[U,R]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise U ya R halkasının bir sağ (σ,τ)-Lie ideali denir.

ii) $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise U ya R halkasının bir sol (σ,τ)-Lie ideali denir.

U, R halkasının hem sağ (σ,τ)-Lie ideali hem de sol (σ,τ)-Lie ideali ise U ya R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali denir [35].

Tanım 2.1.16: R bir halka, σ ve τ, R halkasının otomorfizmleri olsun. $C_{\sigma,\tau}=\{c\in R|c\sigma(x)=\tau(x)c,\forall x\in R\}$ kümesine R halkasının (σ,τ)-merkezi denir [35].

Tanım 2.1.17: R bir halka olsun. Her $a\in R$ için $na=0$ olacak biçimde n pozitif tamsayısı varsa bu biçimdeki n sayılarının en küçüğüne, R halkasının karakteristiği denir ve $\mathrm{char}R=n$ ile gösterilir [27].

Tanım 2.1.18: R bir halka ve $m\neq 0$ bir tamsayı olsun. $\forall x\in R$ için $mx=0$ olması $x=0$ olmasını gerektiriyorsa R halkasına m-torsion free halka denir [27].

Teorem 2.1.19: R bir asal halka ve $ab,\ b\in Z$ olsun. Bu durumda $b=0$ veya $a\in Z$'dir [27].

Teorem 2.1.20: R bir yarı asal halka ve $0\neq a\in R$ olsun. Buna göre $\forall x\in R$ için $a[a,x]=0$ ise $a\in Z$'dir [27].

Teorem 2.1.21: R sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan karakteristiği ikiden farklı bir halka olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve alt halkası ise bu takdirde, $U\subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar [27].

Teorem 2.1.22: Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz (Brauer Trick).

Uyarı 2.1.23: Çalışmalar sırasında sıkça kullanılan bazı bağıntılar şunlardır:

i) $[xy,z]_{\sigma,\tau}=x[y,z]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(z)]y=x[y,\sigma(z)]+[x,z]_{\sigma,\tau}$'dir.

ii) $[x,yz]_{\sigma,\tau}=\tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau}+[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$'dir.

iii) $(xy,z)_{\sigma,\tau}=x(y,z)_{\sigma,\tau}-[x,\tau(z)]y=x[y,\sigma(z)]+(x,z)_{\sigma,\tau}y$'dir.

iv) $(x,yz)_{\sigma,\tau}=\tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau}+[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$'dir.

v) d bir türev iken $d[x,y]=[d(x),y]+[x,d(y)]$'dir.'dir.

vi) d bir (σ,τ)-türev iken $d[x,y]=[d(x),y]_{\sigma,\tau}-[d(y),x]$
ve $d(x,y)=(d(x),y)_{\sigma,\tau}+(d(y),x)_{\sigma,\tau}$ 'dir.

vii) d bir (σ,τ)-türev iken $\sigma^{-1}d:R\rightarrow R$ bir $(1,\sigma^{-1}\tau)$-türev ve $\tau^{-1}d:R\rightarrow R$ bir $(\tau^{-1}\sigma,1)$-türevdir.

viii) $d:R\rightarrow R$ bir $(\sigma,1)$-türev ise $\sigma^{-1}d:R\rightarrow R$ bir $(1,\sigma^{-1})$-türevdir.

ix) $d:R\rightarrow R$ bir $(1,\tau)$-türev ise $\tau^{-1}d:R\rightarrow R$ bir $(\tau^{-1},1)$-türevdir.

x) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=[x,[y,z]]_{\sigma,\tau}+[[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}$'dir.

xi) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=(x,(z,y))_{\sigma,\tau}-((x,z)_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xii) $[(x,y)_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=([x,z]_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau}+(x,[y,z])_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xiii) $([x,y]_{\sigma,\tau},z)_{\sigma,\tau}+([x,z]_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau}=[x,(z,y)]_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xiv) $([x,y]_{\sigma,\tau},z)_{\sigma,\tau}=[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}+2\tau(z)[x,y]_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xv) $[(x,y)_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}+[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=2[x\sigma(y),z]_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xvi) $[[x,y],z]_{\sigma,\tau}=2[x,y]\sigma(z)-([x,y],z)_{\sigma,\tau}$ 'dir.

xvii) $d_2(x)=(x,a)$ ve $d_1(x)=[x,a]$ ise $d_2(xy)=d_2(x)y+xd_1(y)$
ve $d_2(xy)=-d(x)y+xd_2(y)$'dir.

2.2. Bir Cisim Üzerinde Türevler

Tanım 2.2.1: K bir cisim olsun. $D:K\to K$ dönüşümü verilsin. $\forall f,g\in K$ için;

1) $D(f+g)=D(f)+D(g)$,

2) $D(fg)=f(D(g))+g(D(f))$,

koşulları sağlanıyorsa D dönüşümüne K cismi üzerinde bir türev denir [22].

$S\subseteq K$ için $DS=0$ (yani $\forall s\in S$ için $Ds=0$) ise bu takdirde D, S üzerinde bir türevdir denir [22].

Uyarı 2.2.2: K bir cisim ve $S\subseteq K$ olsun. $\wp=\{D:K\to K|D,\ S \text{ üzerinde bir türev}\}$ kümesi, $\forall D,\ D'\in\wp$, $f,g\in K$ için, $(D+D')(f)=D(f)+D'(f)$ ve $(fD)(g)=f(D(g))$ işlemlerine göre bir K−modüldür. Bu K−modülü Der(K/S) ile göstereceğiz.

i) $(\wp,+)$ bir değişmeli gruptur: $0:K\to K$ birim eleman, ve $D:K\to K$ dönüşümünün tersi $-D:K\to K$, $(-D)(f)=-(D(f))$ şeklindedir.

ii) $\forall D,D'\in\wp$, $f\in K$ için, $(D+D')(f)=D(f)+D'(f)$, $\wp\times K\to\wp$, (D,D')ikilisini $D+D'\in\wp$ ye götüren, $(D+D')(f)=D(f)+D'(f)$ şeklinde,

iii) $K\times\wp\to\wp$, (f,D) ikilisini fD'ye götüren dönüşümle, $fD:K\to K$, $g\in K$ elemanını $(fD)(g)=f(D(g))$ dönüşümü alınır.

iv) $(f+g)D=D(f+g)=D(f)+D(g)=fD+gD$, yani, $[(f+g)D](h)=(f+g)D(h)=fD(h)+gD(h)=(fD)(h)=(fD+gD)(h)$ şeklindedir.

v) $f,g,h\in K$, $D\in\wp$ için $(fg)D=f(gD)$'dir, çünkü $[(fg)D](h)=(fg)D(h)$, $[f(gD)](h)=f((gD)(h))=f(g(D(h))=(fg)D(h)=[(fg)D](h)$ olur. O halde $\wp$ bir K−modüldür (K cisim olduğundan hem sağ hem sol modül) [22].

Teorem 2.2.3: D bir K cisminin bir türevi ise;

i) $\forall f\in K$ için $D(-f)=-Df$'dir,

ii) $S=\{f\in K|Df=0\}$ kümesi K cisminin bir alt-cismidir,

iii) $\forall f,g\in K$, $g\neq 0$ için $D(f/g)=\dfrac{gD(f)-fD(g)}{g^2}$ biçimindedir,

iv) $0\neq f\in K$ ve n tamsayısı için $D(f^n)=nf^{n-1}D(f)$'dir,

v) $\mathrm{char}K=p\neq 0$ ise bu taktirde $S=\{f\in K|Df=0\}$ kümesi $K^p=\{f^p|f\in K\}$kümesini kapsar [22].

İspat:

i) $f+(-f)=0$ olduğundan $D(f+(-f))=D(0)=0$ ve buradan $D(f)+D(-f)=0$ olur, bu durumda $D(-f)=-D(f)$'dir.

ii) $S=\{f\in K|Df=0\}$ olsun. $1^2=1$ olduğundan $D(1.1)=D(1)$ eşitliğinden $D(1)+D(1)=D(1)$ dir, buradan $D(1)=0$ bulunur. O halde $D(1)=0$ ve $D(0)=0$ olduğundan 1 ve 0, S kümesinin elemanlarıdır. Öte yandan $f\in S$ ise $(-f)\in S$ olur. O halde S bir cisimdir.

iii) $f=(f/g)g$ olduğundan $D(f)=gD(f/g)+f/gD(g)$, $gD(f)=g^2D(f/g)+fD(g)$ ve buradan $D(f/g)=\dfrac{gD(f)-fD(g)}{g^2}$ bulunur.

$D(f^n)=nf^{n-1}D(f)$ olduğunu görelim: n=0 veya n=1 ise $d(f^0)=0f^{-1}D(f)$, $D(1)=0$ ve $D(f^1)=1f^0D(f)$ olduğundan $D(f)=D(f)$ olur. Yani iddia doğrudur. $n\geq 2$ ise, bu taktirde,

$$D(f^n)=D(ff^{n-1})=f^{n-1}D(f)+fD(f^{n-1}) \tag{2.1}$$

olur.

iv) n üzerinde tümevarım yapalım. $n-1$ için doğru olsun. Yani, $D(f^{n-1})=(n-1)f^{n-2}D(f)$ olsun. Buna göre, (2.1) eşitliğinden,

$D(f^n)=f(n-1)f^{n-2}D(f)=f^{n-1}D(f)+(n-1)f^{n-1}D(f),D(f^n)=nf^{n-1}D(f)$

olduğu görülür.

v) $\mathrm{char}K=p\neq 0$ olsun. $S=\{f\in K|Df=0\}$, $K^p=\{f^p|f\in K\}$ olsun. $f^p\in K^p$ için, $D(f^p)=pf^{p-1}D(f)=0$ olduğundan $f^p\in S$ olur. O halde $K^p\subset S$ bulunur.

Teorem 2.2.4: I bir tamlık bölgesi ve K, I'nın kesirler cismi olsun. $D:K\to K$ türev olmak üzere, $d:I\to K$ dönüşümü D türevinin kısıtlanmışıdır $\Leftrightarrow$ $\forall f,g\in I$ için $\begin{cases}1)\ d(f+g)=d(f)+d(g)\\ 2)\ d(fg)=fd(g)+gd(f)\end{cases}$ koşulları sağlanır. Böyle bir D, d tarafından tek türlü belirlenir [22].

3. HALKALARDA TÜREVLER VE LİE İDEALLER İLE İLGİLİ YAPILMIŞ BAZI ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez çalışmasının konusu ile ilgili, diğer araştırmacıların elde etmiş oldukları bazı sonuçlara yer verilmiştir.

3.1. $d_1d_2(R)$ Dönüşümü İle İlgili Çalışmalar

1957 yılında E. C. Posner isimli matematikçi, R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d_1, d_2, R halkasının iki türevi olmak üzere, d_1d_2 bileşkesi de R halkasının bir türevi ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğunu ispatlamıştır. [46] Bu bölümün ilk kısmında, Posner'in vermiş olduğu bu sonuçla ilgili, karakteristiği ikiden farklı asal halkalarda günümüze kadar elde edilmiş benzeri sonuçlara yer verilmiştir:

Teorem 3.1.1: d_1 ve d_2, R halkasında tanımlı sıfırdan farklı iki türev olsun. $d_1d_2(R)\subseteq Z$ ise bu takdirde R halkası komütatiftir. [41]

Teorem 3.1.2: U, R halkasında merkezde kapsanmayan bir Lie ideal ve d_1, d_2, R halkasında tanımlı türevler olsunlar. Eğer $d_1d_2(U)=0$ ise o zaman $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır. [16]

Lemma 3.1.3: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d_1:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\rightarrow R$ bir türev olsun. Eğer $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır. [5]

Lemma 3.1.4: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d_1:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $d_2(U)\subset U$ olsun.Bu takdirde $d_1d_2(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir. [35]

Teorem 3.1.5: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, d_1 ve d_2, R halkasında (σ,τ)-türevler, $d_1\sigma=\sigma d_1$, $d_1\tau=\tau d_1$, $d_2\sigma=\sigma d_2$, $d_2\tau=\tau d_2$ olsun. Eğer $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır. [1]

3.2. [d(R),d(R)]=0 Koşulu ile İlgili Çalışmalar

1978 yılında I. N. Herstein, R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $[d(R),d(R)]=0$ koşulu sağlanıyorsa R halkasının komütatif olduğunu göstermiştir. [28] Karakteristiği ikiden farklı asal halkalarda, bu sonuçla ilgili daha sonra değişik araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar aşağıdaki biçimdedir:

Teorem 3.2.1: $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. $[d(R),d(R)]\subseteq Z$ ise bu takdirde R halkası komütatiftir. [41]

Teorem 3.2.2: U, R halkasının bir Lie ideali ve $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $[d(U),d(U)]\subseteq Z$ ise $U\subseteq Z$'dir. [42]

Teorem 3.2.3: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, d, R halkasının bir (σ,τ)-yarı türevi, U, sıfırdan farklı bir Lie ideal olsun. $[d(U),d(U)]=0$ ise bu takdirde $U\subseteq Z$'dir. [2]

Lemma 3.2.4: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $d(U)\subset U$ ve $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde R halkası komütatiftir. [35]

Teorem 3.2.5: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}=0$ ise R komütatiftir. [5]

Teorem 3.2.6: α veβ, R halkasında tanımlı otomorfizmler, d sıfırdan farklı bir (α,β)-türev, $\alpha d=d\alpha$ ve $\beta d=d\beta$ olsun. Bu durumda, $[d(R),d(R)]\subseteq Z$ ise R halkası komütatiftir.[19]

Teorem 3.2.7: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, σ:R→R bir örten homomorfizm, τ:R→R bir otomorfizm ve d sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. Eğer, $\sigma(U)\neq 0$ ve $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma^2=\tau^2$ ve $\sigma\tau=\tau\sigma$'dır. U=R ve $d^2\neq 0$ ise $\sigma=\tau$'dur. [21]

Teorem 3.2.8: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, d:R→R bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ olsun. Eğer $\forall x,y\in I$ için $[d(x),d(y)]=0$ ise bu takdirde R komütatiftir. [1]

3.3. [a,d(R)]=0 Koşulu İle İlgili İncelenen Çalışmalar

Yine R bir asal halka olmak üzere, d:R→R bir türev, $a\in R$ ve $\forall x\in R$ için $[a,d(x)]=0$ ise $a\in Z$ olduğu I. N. Herstein tarafından gösterilmiştir. [28] Tez çalışmasının bu kısmında karakteristiği ikiden farklı bir asal halkalarda bu özellikle ilgili günümüze kadar yapılan benzeri çalışmalar yer almaktadır:

Teorem 3.3.1: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a\in R$ olsun. Bu durumda $[a,d(R)]=0$ ise $a\in Z$'dir. [30]

Teorem 3.3.2: d:R→R sıfırdan farklı bir türev ve $a\in R$ olsun. Bu durumda $[a,d(R)]\subseteq Z$ ise $a\in Z$'dir. [41]

Teorem 3.3.3: U, R halkasının bir Lie ideali, d:R→R sıfırdan farklı bir türev ve $a\in R$ olsun. Bu durumda $[a,d(U)]\subseteq Z$ ise $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$'dir. [42]

Teorem 3.3.4: U, R halkasının merkezinde kapsanmayan bir Lie ideali, $a\in R$ olsun. Eğer $\forall u\in U$ için $[a,d(u)]\in Z$ ise d=0 veya $a\in Z$'dir. [13]

Lemma 3.3.5: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, d, R halkasının (σ,τ)-yarı türevi, U, sıfırdan farklı bir Lie ideal, $a\in R$ ve $d(Z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $[d(U),a]\subseteq Z$ ise $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$'dir. [2]

Lemma 3.3.6: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, U, R halkasının bir sıfırdan farklı bir ideali, $a\in U$ olsun. Bu durumda $[d(U),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$'dir. [35]

Lemma 3.3.7: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $a\in R$ olsun. Eğer $[d(R),a]_{\sigma,\tau}\subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$'dir. [5]

Teorem 3.3.8: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, U, R halkasının bir ideali ve $a\in R$ olsun.Bu durumda $[d(U),a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in Z$ dir. [5]

Lemma 3.3.9: R, karakteristiği 2 ve 3'den farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, U, R halkasının $d(U)\subset U$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer bir $a\in R$ için $[d(U),a]=0$ ise $a\in Z$'dir. [47]

Teorem 3.3.10: α ve β, R'de tanımlı otomorfizmler, d sıfırdan farklı bir (α,β)-türev, $\alpha d=d\alpha$ ve $\beta d=d\beta$ olsun. $\forall x\in R$ için $[a,d(x)]\in Z$ ise $a\in Z$'dir. [19]

Lemma 3.3.11: U R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, σ, R halkasında, $\sigma(U)\neq 0$ koşulunu sağlayan örten bir homomorfizm, ve $\tau:R\rightarrow R$ bir otomorfizm olsun. Eğer d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $\forall u\in U$ ve sabit bir $a\in R$ için $[d(u),a]_{\sigma,\tau}=0$ koşulu sağlanıyorsa, $\sigma(a)\in Z(R)$'dir. [21]

Lemma 3.3.12: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir türev ve $a\in R$ olsun. Eğer $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$'dir. [38]

Teorem 3.3.13: σ, τ, θ ve φ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir (θ,φ)-türev ve $a\in R$ olsun. Bu durumda $[d(R),a]_{\theta\circ\sigma,\varphi\circ\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$'dir. [44]

3.4. d(R)⊂Z Koşulu İle İlgili Çalışmalar

1978 yılında I.N.Herstein, R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d sıfırdan farklı bir türev iken $d(R)\subset Z$ ise R halkasının komütatif olduğunu göstermiştir. [28] Bu kısımda, Herstein'ın bu sonucu bulmasının ardından karakteristiği ikiden farklı asal halkalarda yapılan çalışmalar incelenmiştir:

Lemma 3.4.1: U, R halkasının bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U)\subset Z$ ise bu takdirde $U\subset Z$'dir. [16]

Lemma 3.4.2: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, $d:R\to R$ bir (σ,τ)-türev, ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Bu durumda $d(U)\subseteq Z$ ise R komütatiftir. [5]

Lemma 3.4.3: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, d, R halkasının bir (σ,τ)-türevi, U, sıfırdan farklı bir Lie ideal olsun. Bu durumda $d(U)\subseteq Z$ ise $U\subseteq Z$'dir. [31]

Teorem 3.4.4: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. Bu durumda $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir. [10]

Teorem 3.4.5: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler ve U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Bu durumda $d(U)\subset Z$ ise $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$'dir. [8]

Lemma 3.4.6: σ ve τ, R halkasında otomorfizmler, U, R halkasının (σ,τ)-Lie ideali ve $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $d(U)\subset Z$ ise $U\subseteq Z$'dir. [49]

4. (σ,τ)-TÜREVLİ ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ İLE İLGİLİ BAZI BULGULAR

R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka olsun. R halkasında tanımlı d_1, d_2 türevleri için, d_1d_2 bileşkesinin de türev olması durumunda $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğu, 1957 yılında E.C. Posner isimli matematikçi tarafından gösterilmiştir.[46] Bu sonuçla ilgili olarak daha sonra da bir çok matematikçi tarafından çalışmalar yapılmış, en son 2002 yılında M. Ashraf ve N. Rehman, d_1 ve d_2, R asal halkası üzerinde iki (σ,τ)-türev, $d_1\sigma=\sigma d_1$, $d_1\tau=\tau d_1$, $d_2\sigma=\sigma d_2$ ve $d_2\tau=\tau d_2$ iken $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğunu göstermişlerdir. [1]

Tez çalışmasının bu bölümünde M. Ashraf ve N. Rehman'ın vermiş oldukları sonuç, d_1 bir (σ,τ)-türev, d_2 bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ için genelleştirilerek $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere aynı koşullarda $d_1d_2(U)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğu ispatlanmıştır.

Diğer yandan I.N. Herstein tarafından bir R asal halkasında $[d(R),d(R)]=0$ ise R halkasının komütatif olduğu gösterilmiştir. [28] Daha sonra bu özellik de birçok kez genelleştirilmiştir.

Bu bölümde, yukarıda R halkası üzerinde verilen $[d(R),d(R)]=0$ temel özelliği üzerinde çalışılmış, σ, τ, α, β, λ ve μ dönüşümleri R halkasında otomorfizmler olarak alınarak, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $0\neq d_1:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $0\neq d_2:R\rightarrow R$ bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha=\alpha d_2$, $d_2\beta=\beta d_2$ olmak üzere, $[d_1(R),d_2(R)]=0$, $[d_1(R),d_2(R)]_{\sigma,\tau}=0$, $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu}=0$ koşullarından biri varsa R halkasının komütatif olduğu gösterilmiştir.

Yine I. N. Herstein, R bir asal halka olmak üzere, $d:R\to R$ bir türev ve $a\in R$ iken $\forall x\in R$ için $[a,d(x)]=0$ ise $a\in Z$ olduğu sonucunu elde etmiştir. [28] I. N. Herstein'ın bu sonucu ile ilgili olarak tez çalışmasında, $d:R\to R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a\in R$ olmak üzere $[d(R),a]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$ veya "$d\tau^{-1}\beta(a)=0$ ve $d\sigma^{-1}\alpha(a)=0$" sonucu elde edilmiştir. Ayrıca $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $a\in R$ ve $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ olmak üzere $[a,d(R)]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ olduğu gösterilmiş ve daha sonra bu sonuç ideallere taşınarak aynı koşullar altında U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $[a,d(U)]_{\lambda,\mu}=0$ ise $a\in C_{\lambda,\mu}$ olduğu görülmüştür.

4.1. Asal Halkalarda (σ,τ)-Türevler

Lemma 4.1.1: $0\neq d_1:R\to R$, bir (σ,τ)-türev ve $0\neq d_2:R\to R$ bir (α,β)-türev olsun. $d_1d_2(R)=0$ ise

(i) $d_2\beta^{-1}d_2\alpha+\alpha\beta^{-1}d_2=0$, $d_2\alpha^{-1}\beta+\beta\alpha^{-1}d_2=0$,

(ii) $d_2\alpha^{-1}d_2=0=d_2\beta^{-1}d_2$ olur.

İspat: $\forall x,y\in R$ için,

$0=d_1d_2(xy)=d_1(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))$

$=d_1d_2(x)\sigma(\alpha(y))+\tau d_2(x)d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))\sigma(d_2(y))+\tau\beta(x)d_1d_2(y)$

biçimindedir. Buradan $\forall x,y\in R$ için,

$$\tau d_2(x)d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))\sigma(d_2(y))=0, \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinde x yerine $\beta^{-1}d_2(x)$ alınırsa $\forall x,y\in R$ için, $\tau d_2\beta^{-1}d_2(x)(d_1\alpha(y))=0$ bulunur. α örten olduğundan [5, Lemma3]'den, $\tau d_2\beta^{-1}d_2(x)=0$ veya $d_1=0$ elde edilir. τ bir otomorfizm ve $d_1\neq 0$ olduğundan; $\forall x\in R$ için,

$$d_2\beta^{-1}d_2(x)=0 \tag{4.2}$$

olur. Diğer yandan, $\forall x, y\in R$ için,

$0=d_2\beta^{-1}d_2(xy)=d_2\beta^{-1}(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))=d_2(\beta^{-1}d_2(x)\beta^{-1}\alpha(y)+x(\beta^{-1}d_2(y))$

$=d_2\beta^{-1}d_2(x)(\alpha\beta^{-1}\alpha(y))+d_2(x)d_2(\beta^{-1}\alpha(y))+d_2(x)(\alpha\beta^{-1}d_2(y))+\beta(x)(d_2\beta^{-1}d_2(y))$

$=d_2(x)(d_2\beta^{-1}\alpha(y))+d_2(x)(\alpha\beta^{-1}d_2(y))$

bulunur. Buradan, $\forall y\in R$ için,

$$d_2(R)(d_2\beta^{-1}\alpha+\alpha\beta^{-1}d_2)(y)=0 \qquad (4.3)$$

olur. (4.3) eşitliği ve [5, Lemma3]'den $\forall y\in R$ için $(d_2\beta^{-1}\alpha+\alpha\beta^{-1}d_2)(y)=0$ bulunur. Bu son eşitlikte y yerine $\alpha^{-1}d_2(y)$ alınır ve (4.2) eşitliğinde uygulanırsa, $\forall y\in R$ için,

$$d_2\alpha^{-1}d_2(y)=0 \qquad (4.4)$$

bulunur. (4.4) eşitliğinde, $\forall x, y\in R$ için,

$0=d_2\alpha^{-1}d_2(xy)=d_2(\alpha^{-1}d_2(x)y+(\alpha^{-1}\beta(x))(\alpha^{-1}d_2(y))=(\beta\alpha^{-1}d_2(x)d_2(y)+(d_2\alpha^{-1}\beta(x))d_2(y)$

biçimindedir. Buradan, $\forall x, y\in R$ için, $(\beta\alpha^{-1}d_2+d_2\alpha^{-1}\beta)(x)d_2(y)=0$ olur.

[5, Lemma3]'i bu eşitlik için düşünülürse, $\beta\alpha^{-1}d_2+d_2\alpha^{-1}\beta=0$ olur.

Lemma 4.1.2: $d_1:R\to R$ bir $(\sigma,1)$-türev, $d_2:R\to R$ bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. Bu takdirde $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır.

İspat:$\forall x, y\in R$ için,

$0=d_1d_2(xy)=d_1(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))$

$=d_1d_2(x)(\sigma\alpha(y))+d_2(x)d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))(\sigma d_2(y))+\beta(x)d_1d_2(y)$

$=d_2(x)d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))(\sigma d_2(y))$.

Buradan, $\forall x, y\in R$ için,

$$d_2(x)d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))(\sigma d_2(y))=0 \qquad (4.5)$$

bulunur. (4.5) eşitliğinde y yerine $d_2(y)$ alınır ve $d_2\alpha=\alpha d_2$ eşitliği kullanılırsa, $d_1(R)d_2^2(R)=0$ bulunur. R asal halka olduğundan [5, Lemma3]'den $d_1=0$ veya $d_2^2(R)=0$ olur. $d_2^2(R)=0$ ise $\forall x,y\in R$ için,

$0=d_2^2(xy)=d_2(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))=(\beta d_2(x))d_2(\alpha(y))+(d_2\beta(x))\alpha(d_2(y))$

bulunur. Buradan, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olduğundan $\forall x, y\in R$ için,

$(d_2\beta(x))\alpha(d_2(y))=0$ olur. R bir asal halka ve α, β örten dönüşümler olduğundan [5, Lemma3]'den $d_2=0$ elde edilir.

Lemma 4.1.3: d_1 bir $(1,\tau)$-türev, d_2 bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. $d_1d_2(R)=0$ ise, $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

İspat: $\forall x, y\in R$ için,

$0=d_1d_2(xy)=d_1(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))=(\tau d_2(x))d_1(\alpha(y))+d_1(\beta(x))d_2(y)$ biçimindedir. Burada y yerine $d_2(y)$ alınır ve $d_2\alpha=\alpha d_2$ olduğu da kullanılırsa $\forall x, y\in R$ için $d_1(\beta(x))d_2^2(y)=0$ bulunur. Buradan $d_1(R)d_2^2(R)=0$'dır. [5, Lemma3]'den ve bu son eşitlikten de $d_1=0$ veya $d_2^2(R)=0$ elde edilir. Eğer $d_2^2(R)=0$ ise Lemma 4.1.2'ün ispatından $d_2=0$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.4: d_1 bir (σ,τ)-türev ve d_2 bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. $d_1d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır.

İspat: Lemma 4.1.1 kullanılırsa, $d_1=0$ veya $d_2\beta^{-1}d_2=0$ elde edilir. Burada $d_2\beta^{-1}d_2=0$ ise $d_2\beta^{-1}:R\rightarrow R$ bir $(\alpha\beta^{-1},1)$-türev olduğundan Lemma 4.1.2'deki $d_2\beta^{-1}d_2=0$ eşitliğinden $d_2=0$ veya $d_2\beta^{-1}=0$ bulunur ve her iki durumda da $d_2=0$ olduğu görülür. Öyleyse sonuçta $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır.

Lemma 4.1.5: d_1 bir (σ,τ)-türev, d_2 bir (α,β)-türev olsun ve $d_2\alpha=\alpha d_2$, $d_2\beta=\beta d_2$ koşulları sağlansın. $d_1\sigma^{-1}d_2(R)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

İspat: $d_1\sigma^{-1}:R\rightarrow R$ bir $(1,\tau\sigma^{-1})$-türevdir. Buradan Lemma 4.1.3 den $d_1\sigma^{-1}d_2(R)=0$ eşitliğinden $d_1\sigma^{-1}=0$ veya $d_2=0$ yani $d_1=0$ veya $d_2=0$ bulunur.

Teorem 4.1.6: $0\neq d_1:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $0\neq d_2:R\rightarrow R$ bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha=\alpha d_2$, $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. Bu durumda $[d_1(R),d_2(R)]=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: $\forall x, y, z\in R$ için,

$0=[d_1(xz),d_2(y)]=[d_1(x)\sigma(z)+\tau(x)d_1(z),d_2(y)]$

$=d_1(x)[\sigma(z)d_2(y)]+[d_1(x),d_2(y)]\sigma(z)+\tau(x)[d_1(z),d_2(y)]+[\tau(x),d_2(y)]d_1(z)$

biçimindedir. Buradan, $\forall x, y, z\in R$ için,

$$d_1(x)[\sigma(z),d_2(y)]+[\tau(x),d_2(y)]d_1(z)=0 \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) eşitliğinde x yerine $\tau^{-1}d_2(y)$ alınır ve hipotez uygulanırsa, $\forall y, z\in R$ için,

$$d_1\tau^{-1}d_2(y)[\sigma(z),d_2(y)]=0 \quad (4.7)$$

elde edilir.

(4.7) eşitliğinde z yerine zt ($t\in R$) alınır ve R halkasının asallığı kullanılırsa, $\forall z\in R$ için $[\sigma(z),d_2(y)]=0$ veya $d_1\tau^{-1}d_2(y)=0$ elde edilir. $\forall y\in R$ için,

$$d_2(y)\in Z \text{ veya } d_1\tau^{-1}d_2(y)=0 \quad (4.8)$$

bulunur. $K=\{y\in R|d_2(y)\in Z\}$ ve $L=\{y\in R|d_1\tau^{-1}d_2(y)=0\}$ olsun. K ve L toplamsal kümelerdir ve $R=K\cup L$ olarak yazılabilir.

Bu durumda Brauer Trick uygulanabilir. $d_1\tau^{-1}d_2(R)=0$ ise Lemma 41.4'den $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur. Çünkü $d_1\tau^{-1}:R\rightarrow R$ bir $(\sigma\tau^{-1},1)$-türevdir. Hipotezden, d_1 ve d_2 sıfırdan farklı türevler olduklarından, (4. 8) eşitliğinden $d_2(R)\subset Z$ elde edilir. [5, Lemma2]'den R halkası komütatif bulunur.

Teorem 4.1.7: $0\neq d_1$ bir (σ,τ)-türev, $0\neq d_2$ bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ koşulları sağlansın. Bu durumda $(d_1(R),d_2(R))=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: $\forall x, y, z\in R$ için,

$0=(d_1(xy),d_2(z))=(d_1(x)\sigma(y)+\tau(x)d_1(y),d_2(z))$

biçimindedir. Bu eşitlikte, Uyarı 2.1.23 iii) bağıntısı uygulanırsa,

$0=d_1(x)[\sigma(y),d_2(z)]+(d_1(x),d_2(z))\sigma(y)+\tau(x)(d_1(y),d_2(z))-[\tau(x),d_2(z)]d_1(y)$ ve buradan $\forall x, y, z\in R$ için,

$$0=d_1(x)[\sigma(y),d_2(z)]-[\tau(x),d_2(z)]d_1(y)=0 \tag{4.9}$$

bulunur. Bu son eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}d_2(z)$ alınırsa, $\forall x, z\in R$ için,

$$[\tau(x),d_2(z)]d_1\sigma^{-1}d_2(z)=0 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinde x yerine xy ($y\in R$) alınır ve R halkasının asallığı kullanılırsa $\forall x\in R$ için $[\tau(x),d_2(z)]=0$ veya $d_1\sigma^{-1}d_2(z)=0$ bulunur. Buradan da $\forall z\in R$ için,
$d_2(z)\in Z$ veya $d_1\sigma^{-1}d_2(z)=0$
elde edilir. Brauer Trick kullanırsa,
$d_2(R)\subset Z$ veya $d_1\sigma^{-1}d_2(R)=0$
olur. d_1 ve d_2 sıfırdan farklı türevler olduklarından $d_1\sigma^{-1}d_2(R)$ sıfırdan farklı olur ve Lemma 4.1.5'den $d_2(R)\subset Z$'dir. [5, Lemma2]'den R komütatiftir.

Teorem 4.1.8: d_1 ve d_2 Teorem 4.1.7'daki gibi olsun. Eğer $[d_1(R),d_2(R)]_{\sigma,\tau}=0$ ise R komütatiftir.

İspat: $\forall x, y, z\in R$ için,
$0=[d_1(xy),d_2(z)]_{\sigma,\tau}=[d_1(x)\sigma(y)+\tau(x)d_1(y),d_2(z)]_{\sigma,\tau}$
biçimindedir. Burada Uyarı 2.1.23 i) bağıntısı ve hipotez uygulanırsa $\forall x, y, z\in R$ için
$d_1(x)[\sigma(y),\sigma d_2(z)]+[\tau(x),\tau d_2(z)]d_1(y)=0$
bulunur. Bu eşitlikte y yerine $d_2(z)$ alınırsa, $\forall x, z\in R$ için,

$$[\tau(x),\tau d_2(z)]d_1d_2(z)=0 \tag{4.11}$$

(4.11) eşitliğinde x yerine xy alınırsa, $\forall x\in R$ için $[\tau(x),\tau d_2(z)]=0$ veya $d_1d_2(z)=0$ bulunur. Buradan $\forall z\in R$ için $d_2(z)\in Z$ veya $d_1d_2(z)=0$ bulunur. Brauer Trick uygulanırsa, $d_2(R)\subset Z$ veya $d_1d_2(R)=0$ elde edilir. $d_2(R)\subset Z$ ise [5, Lemma3]'den R halkası komütatiftir. $d_1d_2(R)=0$ ise Teorem 4.1.4'den $d_1=0$ veya $d_2=0$ olmalıdır. d_1 ve d_2 sıfırdan farklı türevler olduklarından, R halkası komütatif olur.

4.2. Asal Halkalarda Türevler ve Lie İdealler

Lemma 4.2.1: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali olsun. Buna göre, $U\subset C_{\alpha,\beta}$ ise bu takdirde $U\subset Z$ bulunur.

İspat: $\forall r, x\in R$, $\forall v\in U$ için,

$0=[[r\sigma(v),v]_{\sigma,\tau},x]_{\alpha,\beta}$

$=[r[\sigma(v),\sigma(v)]+[r,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v),x]_{\alpha,\beta}$

$=[r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(x)]+[[r,v]_{\sigma,\tau},x]_{\alpha,\beta}\sigma(v)=[r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(x)]$ olur.

Buradan, $\forall r, x\in R$, $\forall v\in U$ için,

$$[r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(x)]=0 \tag{4.12}$$

bulunur. (4.12) eşitliğinde x yerine xz ($z\in R$) alınır ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa, $\forall r\in R$ için,

$$[r,v]_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } [\sigma(v),R]=0 \tag{4.13}$$

elde edilir. $\forall r\in R$ için $[r,v]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\forall r, t\in R$ için $0=[rt,v]_{\sigma,\tau}=r[t,v]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(v)]t=[r,\tau(v)]t$ olur. R bir asal halka olduğundan, bu son eşitlikten $v\in Z$ ve böylece $U\subset Z$ elde edilir.

Aşağıdaki lemma, [18, Lemma 5.1]'in bir genelleştirmesidir.

Lemma 4.2.2: $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d(R)\subset C_{\lambda,\mu}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: $\forall x, y, r\in R$ için,

$$0=[d(xy),r]_{\lambda,\mu}=[d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y),r]_{\lambda,\mu}$$

$$=d(x)[\sigma(y),\lambda(r)]+[d(x),r]_{\lambda,\mu}\sigma(y)+\tau(x)[d(y),r]_{\lambda,\mu}+[\tau(x),\mu(r)]d(y)$$

$$=d(x)[\sigma(y),\lambda(r)]+[\tau(x),\mu(r)]d(y)$$

bulunur. Son ifadede r yerine $\mu^{-1}\tau(x)$ alınırsa $\forall x, y\in R$ için

$$0 = d(x)\left[\sigma(y), \lambda\mu^{-1}\tau(x)\right] \tag{4.14}$$

olur. (4.14) eşitliğinde y yerine yz ($z \in R$) alınıp R halkasının asallığı kullanılırsa, $d(x)=0$ veya $x \in Z$ olur. Bu durumda Brauer Trick düşünülürse, $K=\{x \in R | x \in Z\}$ ve $L=\{x \in R | d(x)=0\}$ kümeleri R halkasının alt grupları ve üstelik $R=K \cup L$ olduğundan, R=K veya R=L olmak zorundadır. d sıfırdan farklı bir türev olduğundan R=K olur, yani halka komütatiftir.

Teorem 4.2.3: $d:R \to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $a \in R$ ve $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ olsun. Buna göre, $[a,d(R)]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a \in C_{\alpha,\beta}$'dır.

İspat: $[a,d(R)]_{\alpha,\beta}=0$ olsun. Buna göre $\forall x, y \in R$ için

$0=[a,d(xy)]_{\alpha,\beta}=[a,d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y)]_{\alpha,\beta}=\beta d(x)[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta}+[a,\tau(x)]_{\alpha,\beta}\alpha d(y)$

bulunur. Son ifadede x yerine $\tau^{-1}d(x)$ alınırsa, $\forall x, y \in R$ için,

$$\beta d\tau^{-1}d(x)[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta}=0 \tag{4.15}$$

olur. (4.15) de y yerine yz ($z \in R$) alınırsa, $\forall x, y, z \in R$ için,

$\beta d\tau^{-1}d(x)\beta\sigma(y)[a,\sigma(z)]_{\alpha,\beta}=0$

bulunur. σ, β örten ve R bir asal halka olduğundan,

$$d\tau^{-1}d(R)=0 \text{ veya } [a,R]_{\alpha,\beta}=0 \tag{4.16}$$

elde edilir. Burada, $d\tau=\tau d$ ve $d\tau^{--1}d(R)=0$ olduğundan $d^2(R)=0$'dır.

[47, Lemma1]'den d=0 bulunur. Böylece (4.16) eşitliği ve hipotezden $a \in C_{\alpha,\beta}$ elde edilir.

Örnek 4.2.4: Teorem 4.2.3'da R halkasının asal seçilmesi zorunludur.

R= $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \text{ tamsayı} \right\}$ olsun. $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ için, $d(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bir (σ,σ)-türev olur ve $d\sigma=\sigma d$ dir. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için $[A,d(R)]_{\alpha,\beta}=0$ eşitliği sağlanır ama $A\notin C_{\alpha,\beta}$'dır.

Sonuç 4.2.5: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ (σ,τ)-Lie ideali, $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı, $d\sigma=\sigma d$ ve $d\tau=\tau d$ koşullarını sağlayan bir türev olsun.Bu durumda d(U)=0 ise $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.

İspat: $\forall r\in R$, $\forall v\in U$ için $0=d[v,r]_{\sigma,\tau}=d(v\sigma(r)-\tau(r)v)=vd\sigma(r)-d\tau(r)v$ olur. Buradan, $\forall r\in R$, $\forall v\in U$ için $[v,d(r)]_{\sigma,\tau}=0$ bulunur. Teorem 4.2.3'dan, $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.

Teorem 4.2.6:

i) U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (α,β)-türev, $d\alpha=\alpha d$, $d\beta=\beta d$ olsun. Buna göre $[U,d(R)]_{\lambda,\mu}=0$ ise $U\subset Z$'dir.

ii) $d_1:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. Buna göre, $[d_1(R),d_2(R)]_{\lambda,\mu}=0$ ise R komütatiftir.

İspat:

i) $[U,d(R)]_{\lambda,\mu}=0$ olsun. Buna göre, Teorem 4.2.3'den, $U\subset C_{\lambda,\mu}$ olur. Bu durumda Lemma 4.2.1'den $U\subset Z$'dir.

ii) $[d_1(R),d_2(R)]_{\lambda,\mu}=0$ ise Teorem 4.2.3'den $d_1(R)\subset C_{\lambda,\mu}$dir. Lemma 4.2.2'den R halkası komütatiftir.

Teorem 4.2.7: $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a\in R$ olsun. Buna göre, d(R,a)=0 ise $(d(R),a)_{\sigma,\tau}=0$'dır.

İspat: d(R,a)=0 olsun. $\forall r\in R$ için,

$0=d(ar,a)=d(a(r,a)-[a,a]r)=d(a(r,a))=d(a)\sigma(r,a)+\tau(a)d(r,a)=d(a)\sigma(r,a)$ olur. Yani, $\forall r\in R$ için,

$$d(a)\sigma(r,a)=0 \tag{4.17}$$

biçimindedir. (4.17) da r yerine rx ($x\in R$) alınırsa, $0=d(a)\sigma(r)\sigma[x,a]+d(a)\sigma(r,a)\sigma(x)$ olur. Buradan da, $\forall x,\ r\in R$ için,

$$d(a)\sigma(r)\sigma[x,a]=0 \tag{4.18}$$

elde edilir. R asal olduğundan, (4.18)'den $d(a)=0$ veya $a\in Z$ bulunur. $a\in Z$ ise, bu takdirde $\forall r\in R$ için, $0=d(r,a)=2d(ra)$ olur; $\forall r\in R$ için, $d(r)\sigma(a)+\tau(r)d(a)=0$ bulunur. Burada, r yerine (r,a) alınırsa, $\forall r\in R$ için,

$$\tau(r,a)d(a)=0 \tag{4.19}$$

olur. Halkanın karakteristiği ikiden farklı ve $a\in Z$ olduğundan, (4.19) eşitliğinden $aR\tau^{-1}d(a)=0$ ve böylece $d(a)=0$ çıkar. Buradan $\forall r \in R$ için, $0=d(r,a)=(d(r),a)_{\sigma,\tau}+(d(a),r)_{\sigma,\tau}=(d(r),a)_{\sigma,\tau}$ olur.

Lemma 4.2.8: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali, d dönüşümü $d\sigma=\sigma d$ ve $d\tau=\tau d$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $d(U)=0$ ise U komütatiftir.

İspat: $\forall r\in R$, $\forall v\in U$ için,
$0=d[r,v]_{\sigma,\tau}=d(r\sigma(v)-\tau(v)r)=d(r)\sigma(v)+rd\sigma(v)-d\tau(v)r-\tau(v)d(r)=d(r)\sigma(v)-\tau(v)d(r)$
olur. Buradan, $\forall r\in R$, $\forall v\in U$ için,

$$d(r)\sigma(v)=\tau(v)d(r) \tag{4.20}$$

olur. r yerine rx ($x\in R$) alınır ve (4.20) eşitliğine uygulanırsa, $\forall x,\ r\in R$, $\forall v\in U$ için, $0=d(rx)\sigma(v)-\tau(v)d(rx)=d(r)x\sigma(v)+rd(x)\sigma(v)-\tau(v)d(r)x-\tau(v)rd(x)=d(r)x\sigma(v)+r\tau(v)d(x)-d(r)\sigma(v)x-\tau(v)rd(x)$ elde edilir. Buradan, $\forall x,\ r\in R$, $v\in U$ için,

$$d(r)[x,\sigma(v)]+[r,\tau(v)]d(x)=0 \tag{4.21}$$

(4.21) eşitliğinde x yerine $\sigma(w)$ ($w\in U$) alınırsa $\forall v,w\in U$ için $d(R)[\sigma(w),\sigma(v)]=0$ olur. R asal halka olduğundan $d=0$ veya $\sigma[U,U]=0$ dır. d sıfırdan farklı olduğundan $[U,U]=0$ sonucu bulunur.

Lemma 4.2.9: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve d dönüşümü $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $d^2(U)=0$ ve $d(U)\subset Z$ ise U komütatiftir.

İspat: Hipotezden, $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için, $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}$ eşitliğinden $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ bulunur. Böylece,

$0=d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})=d(d\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+\tau(u)d[x,u]_{\sigma,\tau})$

$=d^2\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+d\tau(u)d[x,u]_{\sigma,\tau}+d\tau(u)d[x,u]_{\sigma,\tau}+\tau(u)d^2[x,u]_{\sigma,\tau}$

eşitliğinden $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için,

$$d\tau(u)d[x,u]_{\sigma,\tau}=0 \tag{4.22}$$

(4.22) eşitliğinde u yerine u+v ($v\in U$) yazılırsa, $\forall x\in R$, $\forall u,v\in U$ için,

$$d\tau(u)d[x,v]_{\sigma,\tau}d\tau(v)d[x,u]_{\sigma,\tau}=0 \tag{4.23}$$

Ve (4.23) eşitliği soldan $d\tau(u)$ ile çarpılır ve $d(U)\subset Z$ ve $d\tau=\tau d$ olduğu kullanılırsa, $\forall u\in U$ için,

$$(d\tau(u))^2d[R,U]_{\sigma,\tau}=0 \tag{4.24}$$

bulunur. Diğer yandan, $\forall x\in R$, $\forall v\in U$ için

$[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau}=x[\sigma(v),\sigma(v)]+[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)=[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)\in[R,U]_{\sigma,\tau}$

biçimindedir. $d([x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v))\in d[R,U]_{\sigma,\tau}$ olur. Burada (4.24) eşitliği uygulanırsa,

$0=(d\tau(u))^2d([x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v))=(d\tau(u))^2d[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)+(d\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}d\sigma(v)$ elde edilir.

Buradan, $\forall x \in R$, $\forall u,v \in U$ için,

$$(d\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}d\sigma(v)=0 \tag{4.25}$$

(4.25) da v yerine v+w ($w \in U$) alınırsa,

$0=(d\tau(u))^2[x,v+w]_{\sigma,\tau}d\sigma(v+w)$

$=(d\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}d\sigma(v)+(d\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d\sigma(v)+(d\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}d\sigma(w)$

$+(d\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d\sigma(w)$

elde edilir, buna (4.25) eşitliği uygulanırsa, $\forall x \in R$, $\forall u, v, w \in U$ için,

$$(d\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}d\sigma(w)+(d\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d\sigma(v)=0 \tag{4.26}$$

bulunur. (4.26) eşitliği sağdan $d\sigma(v)$ ile çarpılır ve $d(U) \subset Z$ olduğu kullanılırsa, $\forall x \in R$, $\forall u, v, w \in U$ için,

$$(d\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau}(d\sigma(v))^2=0 \tag{4.27}$$

elde edilir. $d(U) \subset Z$ ve R asal olduğundan, $\forall x \in R$, $\forall v, u, w \in U$ için,

$$(d\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x \in R,\ \forall u,w \in U \text{ veya } (d\sigma(v))^2=0 \tag{4.28}$$

$d(U) \subset Z$, $d\sigma=\sigma d$ ve $d\tau=\tau d$ olduğundan $d(U)=0$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau}=0$'dır. $[R,U]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\forall x, y \in R$, $\forall v \in U$ için, $0=[xy,v]_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(v)]+[x,v]_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(v)]$ elde edilir. Bu ise $R[R,\sigma(U)]=0$ demektir. R asal halka olduğundan $U \subset Z$ bulunur. $d(U)=0$ ise Lemma 4.2.8'dan U komütatiftir.

Teorem 4.2.10: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve d dönüşümü $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $d(U) \subset Z$ ise U komütatiftir.

İspat: $\forall x \in R$, $\forall u, v \in U$ için

$d[d(v)x,u]_{\sigma,\tau}=d(d(v)[x,u]_{\sigma,\tau}+[d(v),\tau(u)]x)=d(d(v)[x,u]_{\sigma,\tau})=d^2(v)[x,u]_{\sigma,\tau}+d(v)d[x,u]_{\sigma,\tau} \in Z$

olur. $d(v)d[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan, $\forall x\in R$, $\forall u, v\in U$ için,

$$d^2(v)[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z \tag{4.29}$$

olur. $d(U)\subset Z$ olduğundan, [33, Lemma3] ve (4.29) eşitliğinden, $\forall v\in U$ için $d^2(v)=0$ veya $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$'dir. $d^2(U)=0$ ise Lemma 4.2.9'dan U komütatiftir. $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ ise,
$[x\sigma(u),u]_{\sigma,\tau}=x[\sigma(u),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)=[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\in Z$ bulunur. Bu son eşitlikte tekrar [33, Lemma3] kullanılırsa, $\forall x\in R$ ve $u\in Z$ için,

$$[x,u]_{\sigma,\tau}=0 \tag{4.30}$$

elde edilir. $\forall x\in R$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\forall x, r\in R$ ve $\forall u\in U$ için, $0=[xr,u]_{\sigma,\tau}=x[r,\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}r=x[r,\sigma(u)]$ olur. Bu ise $R[R,\sigma(u)]=0$ demektir. R asal olduğundan, son eşitlikten $u\in Z$'dir. Böylece (4.30) eşitliğinde her iki durumda da $u\in Z$ bulunmuş olur. $U\subset Z$'dir, buradan U komütatiftir.

Teorem 4.2.11: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve d dönüşümü $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $d(U)=0$ ve $\forall u\in U$ için $u^2\in Z$ ise $U\subset Z$'dir.

İspat: $d(U)=0$ ise [37, Lemma2]'den $[U,\sigma(U)]=0$ ve Lemma 4.2.8'den U komütatif demektir. $\forall u, v\in U$ için $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv\in Z$'dir. Halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğundan $\forall u, v\in U$ için $uv\in Z$'dir. Bu durumda $r, s\in R$, $u, v\in U$ keyfi elemanları için,

$$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}\in Z \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.31) eşitliğinde s yerine sx ($x\in R$) alınırsa,
$[r,u]_{\sigma,\tau}[sx,v]_{\sigma,\tau}=[r,u]_{\sigma,\tau}s[x,\sigma(v)]+[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}x\in Z$
biçimindedir. Burada x yerine $w\in U$ alınır ve $[U,\sigma(U)]=0$ olduğu kullanılırsa,
$\forall r, s\in R$, $\forall u, v, w\in U$ için,

$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}w\in Z$ (4.32)

bulunur. (4.31), (4.32) eşitlikleri ve [33, Lemma3]'den, $\forall r, s\in R$, $u, v, w\in U$ için,

$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}=0$, veya $w\in Z$ (4.33)

elde edilir. $\forall r, s\in R$, $u, v\in U$ için $[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\forall r, t, s\in R$, $\forall u, v\in U$ için $0=[rt,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}=r[t,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(u)]t[s,v]_{\sigma,\tau}=[r,\tau(u)]t[s,v]_{\sigma,\tau}$ biçimindedir. Buradan $[R,\tau(U)]R[R,U]_{\sigma,\tau}=0$'dır. Öte yandan $[R,U]_{\sigma,\tau}=0$ ise Lemma 4.2.9'in ispatından, $U\subset Z$ olduğu sonucu elde edilir.

4.3. (σ,τ)-Türevli Asal Halkalarda İdeallerle Bazı Genelleştirmeler

Lemma 4.3.1: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. Bu durumda $d(U)\subset C_{\lambda,\mu}$ ise R komütatiftir.

İspat: $\forall x, y\in U$, $\forall r\in R$ için,
$0=[d(xy),r]_{\lambda,\mu}=[d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y),r]_{\lambda,\mu}$
$=d(x)[\sigma(y),\lambda(r)]+[d(x),r]_{\lambda,\mu}\sigma(y)+\tau(x)[d(y),r]_{\lambda,\mu}+[\tau(x), \mu(r)]d(y)$.
Buradan, $\forall x, y\in U$, $\forall r\in R$ için,

$d(x)[\sigma(y),\lambda(r)]+[\tau(x),\mu(r)]d(y)=0$ (4.34)

bulunur. (4.34)'de r yerine $\lambda^{-1}\sigma(y)$ alınırsa, $\forall x, y\in U$ için,

$[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y)=0$ (4.35)

olur. (4.35) eşitliğinde x yerine xt ($t\in U$) alınırsa, $\forall x, y, t\in U$, $\forall r\in R$ için, $0=[\tau(xt),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y)=\tau(x)[\tau(t),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y)+[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]\tau(t)d(y)$
elde edilir. Buradan, $\forall x, y, t\in U$için,

$$[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]\tau(t)d(y) \tag{4.36}$$

bulunur. R asal halka ve $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, $\forall x\in U$ için,

$$[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]=0 \text{ veya } d(y)=0 \tag{4.37}$$

elde edilir. $\tau(U)$ sıfırdan farklı bir ideal olduğundan (4.37) eşitliğinde $\forall y\in R$ için,

$$y\in Z \text{ veya } d(y)=0 \tag{4.38}$$

bulunur. $d(U)=0$ ise $\forall x\in U$, $\forall r\in R$ için, $0=d(xr)=d(x\sigma(r)+\tau(x)d(r)=\tau(x)d(r)$ olur. $Ud(R)=0$'dır. U sıfırdan farklı bir ideal olduğundan $d(R)=0$ ve böylece $d=0$ bulunur. Hipotezden $d(U)$ sıfırdan farklı olmak zorundadır. Brauer Trick düşünülürse, (4.38) eşitliğinden $U\subset Z$'dir. R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan R halkası komütatif olur.

Teorem 4.3.2: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $d:R\rightarrow R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ ve $a\in R$ olsun. Bu durumda $[a,d(U)]_{\lambda,\mu}=0$ ise $a\in C_{\lambda,\mu}$'dir.

İspat: $\forall x\in U$ için $[a,d(x)]_{\lambda,\mu}=0$ olsun. $\forall x, y\in U$ için,
$0=[a,d(xy)]_{\lambda,\mu}=[a,d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y)]_{\lambda,\mu}$
$=\mu d(x)[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu}+[a,d(x)]_{\lambda,\mu}\lambda\sigma(y)+\mu\tau(x)[a,d(y)]_{\lambda,\mu}+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda d(y)$
bulunur. Buradan, $\forall x, y\in U$ için,

$$\mu d(x)[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu}+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda d(y)=0 \tag{4.39}$$

(4.39) eşitliğinde y yerine yr ($r\in R$) alınırsa, $\forall x, y\in U$, $\forall r\in R$ için,
$0=\mu d(x)\mu\sigma(y)[a,\sigma(r)]_{\lambda,\mu}+\mu d(x)[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu}\lambda\sigma(r)+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda d(y)\lambda\sigma(r)$
$+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda\tau(y)\lambda d(r)=\mu d(x)\mu\sigma(y)[a,\sigma(r)]_{\lambda,\mu}+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda\tau(y)\lambda d(r)$
bulunur. Son eşitlikte r yerine $\sigma^{-1}d(v)$ ($v\in U$) alındığında, $\forall x, y, v\in U$ için,

$$[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda\tau(y)\lambda d\sigma^{-1}d(v)=0 \tag{4.40}$$

Burada $\lambda\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir.(4.40) eşitliğinden,

$$[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu}=0 \text{ veya } d\sigma^{-1}d(U)=0 \tag{4.41}$$

elde edilir. $d\sigma=\sigma d$ ve R bir asal halka olduğundan $d\sigma^{-1}d(U)=0$ eşitliğinden $d^2(U)=0$ elde edilir ve buradan [47, Lemma1] düşünülürse, d=0 bulunur. Bu ise hipotez ile çelişir.(4.41) eşitliğinden, $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu}=0$ olmalıdır. Bu durumda $\forall x\in U$, $\forall r\in R$ için, $0=[a,\tau(xr)]_{\lambda,\mu}=[a,\tau(x)\tau(r)]_{\lambda,\mu}=\mu\tau(x)[a,\tau(r)]_{\lambda,\mu}+[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\lambda\tau(r)$ elde edilir ve

$$\mu\tau(U)[a,R]_{\lambda,\mu}=0 \tag{4.42}$$

bulunur. R bir asal halka ve $\mu\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, (4.42) eşitliğinden $[a,R]_{\lambda,\mu}=0$ yani $a\in C_{\lambda,\mu}$ olduğu görülür.

Sonuç 4.3.3: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $d:R\rightarrow R$, bir (σ,τ)-türev, $d\sigma=\sigma d$ ve $d\tau=\tau d$ olsun. Eğer $[U,d(U)]_{\lambda,\mu}=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: Teorem 4.3.2'den, $U\subset C_{\lambda,\mu}$'dir. Buradan $\forall v\in U$, $\forall r, x\in R$ için, $0=[vr,x]_{\lambda,\mu}=v[r,\lambda(x)]+[v,x]_{\lambda,\mu}r$ biçimindedir. $U[R,\lambda(R)]=0$ olur. U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve R bir asal halka olduğundan, R komütatiftir.

Sonuç 4.3.4: $d_1:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\rightarrow R$, bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali iken $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu}=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: Teorem 4.3.2'den $d_1(U)\subset C_{\lambda,\mu}$'dir. Böylece Lemma 4.3.1'den R halkasının komütatif olduğu elde edilir.

Teorem 4.3.5: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $d_1:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\rightarrow R$, bir (α,β)-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve $d_2\beta=\beta d_2$ olsun. Eğer $d_1d_2(U)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$'dır.

İspat: Hipotezden $\forall x, y\in U$ için,
$0=d_1d_2(xy)=d_1(d_2(x)\alpha(y)+\beta(x)d_2(y))=\tau d_2(x)d_1\alpha(y)+d_1\beta(x)\sigma d_2(y))$
biçimindedir. Buradan $\forall x, y\in U$ için,

$$\tau d_2(x)d_1\alpha(y)+d_1\beta(x)\sigma d_2(y))=0 \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.43)eşitliğinde x yerine rx ($r\in R$) alınırsa,
$0=\tau d_2(rx)d_1\alpha(y)+d_1\beta(rx)\sigma d_2(y))$
$=\tau d_2(r)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y)+\tau\beta(r)\tau d_2(x)d_1\alpha(y)+d_1\beta(r)\sigma\beta(x)\sigma d_2(y)+\tau\beta(r)d_1\beta(x)\sigma d_2(y))$ ve buradan $\forall x, y\in U$, $\forall r\in R$ için,

$$\tau d_2(r)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y)+d_1\beta(r)\sigma\beta(x)\sigma d_2(y)=0 \tag{4.44}$$

bulunur. (4.44) eşitliğinde $r=\beta^{-1}d_2(v)$ ($v\in U$) alınırsa,
$\tau d_2\beta^{-1}d_2(U)\tau\alpha(U)d_1\alpha(U)=0$
elde edilir,

$$d_2\beta^{-1}d_2(U)=0 \text{ veya } d_1=0 \tag{4.45}$$

olur. Hipotezde $d_2\beta=\beta d_2$ ($d_2\beta^{-1}=\beta^{-1}d_2$) olduğundan $d_2\beta^{-1}d_2(U)=0$ ve $d_2^2(U)=0$ olur, buradan da [47, Lemma1]'den $d_2=0$ olduğu görülür.

Teorem 4.3.6: $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a\in R$ olsun. Eğer $[d(R),a]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$ veya ($d\tau^{-1}\beta(a)=0$ ve $d\sigma^{-1}\alpha(a)=0$)'dır.

İspat: $h:R\rightarrow R$ olmak üzere, $\forall x\in R$ için $h(x)=[x,a]_{\alpha,\beta}$olsun. Bu durumda $\forall x\in R$ için $d_1(x)=[x,\alpha(a)]$ ve $d_2(x)=[x,\beta(a)]$ olmak üzere, $\forall x, y\in R$ için,

$$h(xy)=h(x)y+xd_1(y)=d_2(x)y+xh(y) \quad (4.46)$$

biçimindedir. Hipotezden $hd(R)=0$ olur. $\forall x, y\in R$ için,

$0=hd(xy)=h(d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y))=hd(x)\sigma(y)+d(x)d_1\sigma(y)+d_2\tau(x)d(y)+\tau(x)hd(y)$

$=d(x)d_1\sigma(y)+d_2\tau(x)d(y)$

olur. Buradan $\forall x, y\in R$ için,

$$d(x)[\sigma(y),\alpha(a)]+[\tau(x),\beta(a)]d(y)=0 \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47) eşitliğinde x yerine $\tau^{-1}\beta(a)$ alınırsa bu durumda $\forall y\in R$ için $d\tau^{-1}\beta(a)[\sigma(y),\alpha(a)]=0$ olur. Son eşitlikte y yerine yz ($z\in R$) alınırsa R halkasının asallığından faydalanılarak $a\in Z$ veya $d\tau^{-1}\beta(a)=0$ elde edilir. Diğer yandan (4.47) eşitliğinde y yerine $\sigma^{-1}\alpha(a)$ alınırsa aynı yöntemle $a\in Z$ veya $d\sigma^{-1}\alpha(a)=0$ bulunur.

Sonuç 4.3.7: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $d\sigma=\sigma d$ ve $d\tau=\tau d$ olsun. Bu durumda $[d(R),U]_{\alpha,\beta}=0$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: $[d(R),U]_{\alpha,\beta}=0$ ise Teorem 4.3.6'den $\forall u\in U$ için $u\in Z$ veya $d\sigma^{-1}\alpha(u)=0$ olur. $\sigma^{-1}\alpha(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, hipotezden $d\sigma^{-1}\alpha(U)$ sıfırdan farklı olur. Buradan $U\subset Z$'dır, R halkası komütatiftir.

4.4. (σ,τ)-Türevli Asal Halkaların Komütatifliği İle İlgili Bazı Bulgular

R bir karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun.

Lemma 4.4.1: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. $\forall y\in U$ için aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa R halkası komütatiftir. (i) $d(y)-\tau(y)\in Z$, (ii) $d(y)+\tau(y)\in Z$, (iii) $d(y)-\sigma(y)\in Z$, (iv) $d(y)+\sigma(y)\in Z$.

İspat: (i) $\forall y \in U$ için,

$0=[d(y)-\tau(y),\tau(y)]=[d(y),\tau(y)]-[\tau(y),\tau(y)]$'dir. Buradan $\forall y \in U$ için$[d(y),\tau(y)]=0$ elde edilir. Bu eşitlikte x yerine x+y alınırsa, $\forall x, y \in U$ için,

$$[d(y),\tau(x)]+[d(x),\tau(y)]=0 \tag{4.48}$$

bulunur. (4.48)eşitliğinde y yerine xy ($x \in U$) alınırsa,

$0=[d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y),\tau(x)]+[d(x),\tau(x)\tau(y)]$

$=d(x)[\sigma(y),\tau(x)]+[d(x),\tau(x)]\sigma(y)+\tau(x)[d(y),\tau(x)]+[\tau(x),\tau(x)]d(y)+\tau(x)[d(x),\tau(y)]$

$+[d(x),\tau(x)]\tau(y)$ olur. Buradan $\forall x, y \in U$ için,

$$d(x)[\sigma(y),\tau(x)]=0 \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.49) eşitliğinde y yerine yt ($t \in R$) alınırsa, $\forall x \in U$ için $d(x)=0$ veya $x \in Z$ olur. $K=\{x \in U | d(x)=0\}$ ve $L=\{x \in U | x \in Z\}$ kümeleri düşünülürse. Brauer Trick'ten, U=K veya U=L olması gerektiği görülür. d sıfırdan farklı bir türev olduğundan $U \neq K$ olacağından, U=L dir. Bu durumda $U \subset Z$ yani, R halkası komütatiftir.

(ii), (iii), (iv) şıkları da benzer biçimde ispatlanır.

Lemma 4.4.2: $d:R \rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun.

i) $\forall x \in R$ için, $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in R$ için $d\tau^{-1}d(x)=-d(x)$ olmasıdır.

(ii) $\forall x \in R$ için, $d\sigma^{-1}d(x)=-d(x)$ ise $\forall x \in R$ için $d\tau^{-1}d(x)=d(x)$'dir.

İspat:

(i) $\forall x \in R$ için $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için,

$0=d\sigma^{-1}d(xy)-d(xy)=d\sigma^{-1}(d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y))-d(x)\sigma(y)-\tau(x)d(y)$

$=d(\sigma^{-1}d(x)y+\sigma^{-1}\tau(x)\sigma^{-1}d(y))-d(x)\sigma(y)-\tau(x)d(y)$

$=d\sigma^{-1}d(x)\sigma(y)+\tau\sigma^{-1}d(x)d(y)+d\sigma^{-1}\tau(x)d(y)+\tau\sigma^{-1}\tau(x)d\sigma^{-1}d(y)-d(x)\sigma(y)-\tau(x)d(y)$

$=(\tau\sigma^{-1}d(x)+d\sigma^{-1}\tau(x))d(y)+\tau\sigma^{-1}\tau(x)d\sigma^{-1}d(y)-\tau(x)d(y)$

olur. Hipotez kullanılırsa, $\forall x, y \in R$ için,

$$(\tau\sigma^{-1}d(x)+d\sigma^{-1}\tau(x)+\tau\sigma^{-1}\tau(x)-\tau(x))d(y)=0 \qquad (4.50)$$

Ve [8,Lemma3]'den $\forall x\in R$ için,

$$\tau\sigma^{-1}d(x)+d\sigma^{-1}\tau(x)+\tau\sigma^{-1}\tau(x)-\tau(x)=0 \qquad (4.51)$$

elde edilir. (4.51) eşitliğinde x yerine $\tau^{-1}d(x)$ alınır ve hipotezden faydalanılırsa $\forall x\in R$ için, $\tau\sigma^{-1}d\tau^{-1}d(x)+d(x)+\tau\sigma^{-1}d(x)-d(x)=0$ bulunur. Buradan, $\forall x\in R$ için,

$$\tau\sigma^{-1}d\tau^{-1}d(x)+\tau\sigma^{-1}d(x)=0 \qquad (4.52)$$

bulunur. Bu ise $d\tau^{-1}d(x)+d(x)=0$ demektir. Tersine, $\forall x\in R$ için $d\tau^{-1}d(x)=-d(x)$ olsun. Lemmanın ilk kısmının ispatındaki yöntem yinelenirse, $\forall x,\ y\in R$ için,

$$d(x)(-\sigma\tau^{-1}\sigma(y)+d\tau^{-1}\sigma(y)+\sigma\tau^{-1}d(y)+\sigma(y))=0 \qquad (4.53)$$

Buradan $\forall y\in R$ için,

$$-\sigma\tau^{-1}\sigma(y)+d\tau^{-1}\sigma(y)+\sigma\tau^{-1}d(y)+\sigma(y)=0 \qquad (4.54)$$

elde edilir.
Bu eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}d(y)$ alınır ve hipotez kullanılırsa, $\forall y\in R$ için,
$\sigma\tau^{-1}d(y)-\sigma\tau^{-1}d\sigma^{-1}d(y)=0$ bulunur, bu da $\forall y\in R$ için, $d\sigma^{-1}d(y)=d(y)$ demektir.
(ii) şıkkı da benzer biçimde ispatlanır.

Lemma 4.4.3: $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $\forall x,\ y\in R$ için $d[x,y]=[d(x),d(y)]$ ve $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ olsun. Bu durumda R halkası komütatiftir.

İspat: Hipotezden,
$0=d[xz,y]-[d(xz),d(y)]=d(x[z,y]+[x,y]z)-[d(x)\sigma(z)+\tau(x)d(z),d(y)]$
$=d(x)\sigma[z,y]+\tau(x)d[z,y]+d[x,y]\sigma(z)+\tau[x,y]d(z)-d(x)[\sigma(z),d(y)]$
$-[d(x),d(y)]\sigma(z)-\tau(x)[d(z),d(y)]-[\tau(x),d(y)]d(z)$

$=d(x)\sigma[z,y]+\tau[x,y]d(z)-d(x)[\sigma(z),d(y)]-[\tau(x),d(y)]d(z)$

$=d(x)[\sigma(z),\sigma(y)-d(y)]+[\tau(x),\tau(y)-d(y)]d(z)$

olur. Bu eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}d(y)$ alınır ve hipotez kullanılırsa $\forall x, y, z\in R$ için,

$$[\tau(x),\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)]d(z)=0 \quad (4.55)$$

bulunur. [8,Lemma3]'den $\forall y\in R$ için $\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)\in Z$'dir, buradan $\forall y\in R$ için,

$$\sigma^{-1}d(y)-\tau^{-1}d(y)\in Z \quad (4.56)$$

elde edilir. Diğer yandan $a\in Z$ ise hipotezden, $\forall x\in R$ için $0=d[x,a]=[d(x),d(a)]$'dir. Teorem 4.3.6'den $d(a)\in Z$ veya $d\sigma^{-1}d(a)=0$ olur. $d\sigma^{-1}d(a)=0$ ise hipotezden $d(a)=0$ olur ve her iki durumda da $d(a)\in Z$ bulunmuş olur. Buna göre, (4.56) eşitliğinden $\forall y\in R$ için, $d\sigma^{-1}d(y)-d\tau^{-1}d(y)\in Z$'dir. Hipotez ve Lemma 4.4.2(i) kullanılırsa, $\forall y\in R$ için $d(y)+d(y)\in Z$ olur, R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan $d(R)\subset Z$ bulunur. [5, Lemma2]'den R komütatiftir.

Lemma 4.4.4: $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $\forall x\in R$ için $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ ve $\forall x, y\in R$ için $d(x,y)=(d(x),d(y))$ olsun. Bu durumda $a\in Z$ ise $d(a)\in Z$'dir.

İspat: $a\in Z$ olduğundan $\tau(a)\in Z$'dir. Hipoteze bakılırsa, $\forall x, y\in R$ için,

$0=d(ax,y)-(d(ax),d(y))$

$=d(a(x,y)-[a,y]x)-(d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x),d(y))$

$=d(a)\sigma(x,y)+\tau(a)d(x,y)-d(a)(\sigma(x),d(y))+[d(a),d(y)]\sigma(x)\tau(a)(d(x),d(y))+[\tau(a),d(y)]d(x)$

biçimindedir. Buradan, $\forall x, y\in R$ için,

$$d(a)(\sigma(x),\sigma(y)-d(y))+[d(a),d(y)]\,\sigma(x)=0 \quad (4.57)$$

Burada y yerine $\sigma^{-1}d(y)$ alınır ve $d\sigma^{-1}d(y)=d(y)$ olduğu kullanılırsa, $\forall x, y\in R$ için, $[d(a),d(y)]\sigma(x)=0$ bulunur. R bir asal halka olduğundan, bu son eşitlikten $[d(a),d(y)]=0$ elde edilir. Buradan Teorem 4.3.6'den $d(a)\in Z$ veya $d\sigma^{-1}d(a)=0$ elde edilir. Hipotezden, $d\sigma^{-1}d(a)=0$ olması durumunda $d(a)=0$ olduğu görülür. Sonuçta $d(a)\in Z$'dir.

Lemma 4.4.5: $d:R\to R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $\forall x\in R$ için $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ ve $\forall x, y\in R$ için $d(x,y)=(d(x),d(y))$ olsun. Bu durumda R komütatiftir.

İspat: $\forall x\in R$ için, $d\sigma^{-1}d(x)=d(x)$ olduğundan, Lemma 4.4.2'den $\forall x\in R$ için, $d\tau^{-1}d(x)=-d(x)$'dir. $\forall x, y\in R$ için,

$0=d(xy,y)-(d(xy),d(y))=d(x[y,y]+(x,y)y)-(d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y),d(y))$

$=d(x,y)\sigma(y)+\tau(x,y)d(y)-d(x)[\sigma(y),d(y)]-(d(x),d(y))\sigma(y)-\tau(x)[d(y),d(y)]-$

$(\tau(x),d(y))d(y)$ olur. $\forall x, y\in R$ için,

$$(\tau(x),\tau(y)-d(y))d(y)-d(x)[\sigma(y),d(y)]=0 \qquad (4.58)$$

(4.58) eşitliğinde y yerine $\sigma^{-1}d(y)$ alınır ve hipotez uygulanırsa, $\forall x, y\in R$ için $(\tau(x), \tau\sigma^{-1}d(y)-d(y))d(y)=0$ elde edilir. Bu son eşitlikte, x yerine xr ($r\in R$) alınırsa, $\forall x, y\in R$ için,

$\tau(x)(\tau(r),\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y))d(y)-[\tau(x),\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)]\tau(r)d(y)=-[\tau(x),\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)]\tau(r)d(y)$

bulunur. R bir asal halka olduğundan $\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)\in Z$ veya $d(y)=0$ dır. $K=\{y\in R|\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)\in Z\}$ ve $L=\{y\in R|d(y)=0\}$ kümeleri tanımlanırsa bu kümeler R halkasının toplamsal alt grupları olurlar ve $R=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten, $R=K$ veya $R=L$ olmalıdır. $R=L$ olması durumunda $d=0$ çelişkisi ortaya çıkacağından $R=K$ olur. $\forall y\in R$ için $\tau\sigma^{-1}d(y)-d(y)\in Z$'dir. Burada Lemma 4.4.4 kullanılırsa, $\forall y\in R$ için, $d\sigma^{-1}d(y)-d\tau^{-1}d(y)\in Z$ bulunur. Lemma 4.4.2'ten $2d(y)\in Z$'dir. Halkada karakteristik ikiden farklı olduğundan $d(R)\subset Z$ ve böylece [5, Lemma2]'den R halkası komütatiftir.

Teorem 4.4.6: $d:R\to R$ bir (σ,τ)-türev olsun. $\forall x, y\in R$ için $d[x,y]=[d(x),d(y)]$ ise R komütatiftir.

İspat: $\forall x,\ y\in R$ için, $d[x,y]=[d(x),d(y)]$ olsun.

$d[x,y]=[d(x),y]_{\sigma,\tau}-[d(y),x]_{\sigma,\tau}$

olduğundan, hipotezden, $\forall x,\ y\in R$ için,

$$[d(x),y]_{\sigma,\tau}-[d(y),x]_{\sigma,\tau}=[d(x),d(y)] \tag{4.59}$$

elde edilir. (4.59) eşitliğinde x yerine xz ($z\in R$) alınırsa, $\forall x,\ y,\ z\in R$ için,

$0=[d(x)\sigma(z)+\tau(x)d(z),y]_{\sigma,\tau}-[d(y),xz]_{\sigma,\tau}-[d(x)\sigma(z)+\tau(x)d(z),d(y)]_{\sigma,\tau}$

$=d(x)[\sigma(z),\sigma(y)]+[d(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)+\tau(x)[d(z),y]_{\sigma,\tau}+[\tau(x),\tau(y)]d(z)-\tau(x)[d(y),z]_{\sigma,\tau}$

$-[d(y),x]_{\sigma,\tau}\sigma(z)-d(x)[\sigma(z),d(y)]-[d(x),d(y)]\sigma(z)-\tau(x)[d(z),d(y)]-[\tau(x),d(y)]d(z)$

$=d(x)[\sigma(z),\sigma(y)]+[\tau(x),\tau(y)]d(z)-d(x)[\sigma(z),d(y)]-[\tau(x),d(y)]d(z)$

olur. Bu eşitlikten $\forall x,\ y,\ z\in R$ için,

$$d(x)[\sigma(z),\sigma(y)-d(y)]+[\tau(x),\tau(y)-d(y)]d(z)=0 \tag{4.60}$$

bulunur. (4.60)da z yerine $\sigma^{-1}(\sigma(y)-d(y))=y-\sigma^{-1}d(y)$ alınır ise $\forall x,\ y\in R$ için,

$$[\tau(x),\tau(y)-d(y)]d(y-\sigma^{-1}d(y))=0 \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.61) eşitliğinde x yerine, xt ($t\in R$) alınırsa, $\forall x,\ y\in R$ için, $0=\tau(x)[\tau(t),\tau(y)-d(y)]d(y-\sigma^{-1}d(y))+[\tau(x),\tau(y)-d(y)]\tau(t)d(y-\sigma^{-1}d(y))$ ifadesi elde edilir. R bir asal halka ve τ örten bir dönüşüm olduğundan,

$[\tau(x),\tau(y)-d(y)]=0$ veya $d(y-\sigma^{-1}d(y))=0$

bulunur. Buradan, $\forall y\in R$ için $\tau(y)-d(y)\in Z$ veya $d(y)=d\sigma^{-1}d(y)$ elde edilir. $K=\{y\in R|\tau(y)-d(y)\in Z\}$ ve $L=\{y\in R|d(y-\sigma^{-1}d(y)=0\}$ kümeleri tanımlansın. Bu kümelerin R halkasının toplamsal alt grupları oldukları açıktır ve $R=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten, R=K veya R=L olmalıdır. R=K ise Lemma 4.4.1'den R komütatif olur. R=L olması durumunda da Lemma 4.4.3'den R halkasının komütatif olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Örnek 4.4.7: Yukarıdaki teoremde R halkasının asallık koşulunun kaldırılamayacağı aşağıdaki örnekte görülmektedir:

$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle\| a, b \text{ tamsayı}\right\}$ ve $d(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bir (1,1)-türev olsun. Bu durumda $d[x,y]=[d(x),d(y)]$ koşulu sağlanır ama R halkası komütatif değildir.

Teorem 4.4.8: $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. $\forall x,\ y\in R$ için, $d(x,y)=(d(x),d(y))$ ise R komütatiftir.

İspat: $\forall x,\ y\in R$ için $d(x,y)=(d(x),y)_{\sigma,\tau}+(d(y),x)_{\sigma,\tau}$ olduğundan, hipotezden $\forall x,\ y\in R$ için,

$$(d(x),y)_{\sigma,\tau}+(d(y),x)_{\sigma,\tau}=(d(x),d(y)) \quad (4.62)$$

biçimindedir. Bu eşitlikte x yerine xr ($r\in R$) kullanılırsa, $\forall x,\ y\in R$ için,

$0=(d(xr),y)_{\sigma,\tau}+(d(y),xr)_{\sigma,\tau}-(d(xr),d(y))$

$=(d(x)\sigma(r)+\tau(x)d(r),y)_{\sigma,\tau}+(d(y),xr)_{\sigma,\tau}(d(x)\sigma(r)+\tau(x)d(r),d(y))=d(x)[\sigma(r),\sigma(y)]$

$+(d(x),y)_{\sigma,\tau}\sigma(r)+\tau(x)(d(r),y)_{\sigma,\tau}-[\tau(x),\tau(y)]d(r)+\tau(x)(d(y),r)_{\sigma,\tau}+[d(y),x]_{\sigma,\tau}\sigma(r)$

$-d(x)[\sigma(r),d(y)]-(d(x),d(y))_{\sigma,\tau}\sigma(r)-\tau(x)(d(r),d(y))+[\tau(x),d(y)]d(r)$

bulunur. $(d(x),y)_{\sigma,\tau}\sigma(r)-(d(x),d(y))\sigma(r)$ yerine $-(d(y),x)_{\sigma,\tau}\sigma(r)$ yazılırsa, bu son eşitlikten, $\forall x,\ y,\ r\in R$ için,

$$d(x)[\sigma(r),\sigma(y)-d(y)]-[\tau(x),\tau(y)-d(y)]d(r)-2\tau(x)d(y)\sigma(r)=0 \quad (4.63)$$

elde edilir. (4.63) eşitliğinde r yerine rt ($t\in R$) alınırsa,

$0=d(x)\sigma(r)[\sigma(t),\sigma(y)-d(y)]+d(x)[\sigma(r),\sigma(y)-d(y)]\sigma(t)+[\tau(x),d(y)-\tau(y)]d(r)\sigma(t)$

$+[\tau(x),d(y)-\tau(y)]\tau(r)d(t)-2\tau(x)d(y)\sigma(r)\sigma(t)$

$=d(x)\sigma(r)[\sigma(t),\sigma(y)-d(y)]+[\tau(x),d(y)-\tau(y)]\tau(r)d(t)$

ve buradan, $\forall x,\ y,\ r,\ t\in R$ için,

$$d(x)\sigma(r)[\sigma(t),\sigma(y)-d(y)]+[\tau(x),d(y)-\tau(y)]\tau(r)d(t)=0 \quad (4.64)$$

olur. Bu eşitlikte t yerine $y-\sigma^{-1}d(y)$ alınır ise $\forall x,\ y,\ r\in R$ için,

$$[\tau(x),d(y)-\tau(y)]\tau(r)d(y-\sigma^{-1}d(y))=0 \qquad (4.65)$$

ifadesi elde edilir. R asal bir halka olduğundan, $\forall y \in R$ için,

$$d(y)-\tau(y)\in Z \text{ veya } d(y)=d\sigma^{-1}d(y) \qquad (4.66)$$

olur. Teorem 4.4.6'nın ispatı gözönünde bulundurulursa, (4.66) eşitliğinden R halkasının komütatif olduğu görülür.

5. LİE İDEALLER VE ASAL HALKALAR İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

K. H. Park ve Y. S. Jung isimli matematikçiler, 2003 yılında R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve σ, τ, θ, φ, α, β, λ ve μ, R halkasında dönüşümler iken $d:R\rightarrow R$ bir (θ,φ)-türev ve $a\in R$ olmak üzere, $d[R,a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olduğunu göstermişlerdir. [44, Teorem 2]
Öte yandan J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr isimli matematikçiler, 1981 yılında yayınlanan bir çalışmalarında, karakteristiği ikiden farklı bir R asal halkasında, U, R halkasının bir Lie ideali ve $d:R\rightarrow R$ bir türev iken, $d(U)=0$ ise $U\subset Z$ olduğunu göstermişlerdir. [16,Lemma5]

Tez çalışmasının bu bölümünde, R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, $d:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türev, $a\in R$ ve α, β, R halkasında otomorfizmler olmak üzere $d[a,R]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $a+\beta\alpha^{-1}(a)\in C_{\alpha,\beta}$ olduğu ispatlanmıştır.
Ayrıca R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, σ, τ, α, β, λ, μ, R halkasında otomorfizmler, U bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $d:R\rightarrow R$ bir (λ,μ)-türev olmak üzere $d(U)=0$ ise $v+\tau\sigma^{-1}(v)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğu gösterilmiştir.

Öte yandan 1969 yılında I. N. Herstein tarafından, $a\in R$ için $[[R,R],a]=0$ ise $a\in Z$ olduğu gösterilmiştir. [27, Lemma1.5] Daha sonraları üzerinde bir çok araştırmacı tarafından çalışılmış olan bu özellik, tez çalışmasında aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir:
I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $\left[[I,a]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $[\tau(a),\beta(b)]=0$'dır.
Ayrıca bu bölümün son kısmında, tek yanlı (σ,τ)-Lie idealler ile ilgili bazı özellikler ispatlanmıştır.

5.1. Lie İdealler ve Genelleştirilmiş Lie İdealler

R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, σ, τ, α, β, λ ve μ, R halkasında tanımlı otomorfizmler olsun.

Lemma 5.1.1: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b \in R$ olsun. $[[I,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}=0$ ise bu durumda $[\tau(a),\beta(b)]=0$'dır.

İspat: $[[I,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}=0$ olsun. $\forall y \in I$ için,

$0=[[\tau(a)y,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = [\tau(a)[y,a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]y,b]_{\alpha,\beta}$

$= \tau(a)[[y,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} + [\tau(a),\beta(b)][y,a]_{\sigma,\tau}$

bulunur. Buradan, $\forall y \in I$ için,

$$[\tau(a),\beta(b)][y,a]_{\sigma,\tau}=0 \tag{5.1}$$

(5.1)'de, y yerine yr ($r \in R$) alınırsa,

$0=[\tau(a),\beta(b)]y[r,\sigma(a)]+ [\tau(a),\beta(b)]\,[y,a]_{\sigma,\tau}\, r$

olur. Buradan da $\forall y \in I$, $\forall r \in R$ için,

$$[\tau(a),\beta(b)]y[r,\sigma(a)]=0 \tag{5.2}$$

bulunur. R bir asal halka olduğundan ve (5.2) eşitliğinden,

$$[\tau(a),\beta(b)]=0 \text{ veya } a \in Z \tag{5.3}$$

elde edilir. İki durumda da $[\tau(a),\beta(b)]=0$ bulunur.

Sonuç 5.1.2:

1) I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ olsun. $[I,a]_{\alpha,\beta} \subset C_{\lambda,\mu}$ ise $a \in Z$'dir.

2) U, R halkasının, sıfırdan farklı bir sağ(sol) (σ,τ)-Lie ideali ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer, $\left[[I,I]_{\sigma,\tau},U\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $U\subset Z$'dir.

3) $a\in R$ ve $\left[[I,I]_{\sigma,\tau},a\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$'dir.

İspat:

1) $[I,a]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ olduğundan, $\left[[I,a]_{\alpha,\beta},R\right]_{\lambda,\mu}=0$ bulunur. Lemma 5.1.1'den $[\beta(a),\mu(R)]=0$ olur. μ örten olduğundan $\beta(a)\in Z$ve buradan $a\in Z$ olur.

2) Lemma 5.1.1'den, $[\tau(I),\beta(U)]=0$ ve böylece $U\subset Z$'dir.

3) $\left[[I,I]_{\sigma,\tau},a\right]_{\alpha,\beta}=0$ eşitliğinden ve Lemma 5.1.1'den, $[\tau(I),\beta(a)]=0$ olur. Buradan $a\in Z$ bulunur.

Lemma 5.1.3: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve a, $b\in R$ olsun. Bu durumda $\left[[a,I]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $b\in Z$ veya $\left[a,\tau^{-1}\beta(b)\right]_{\sigma,\tau}=0$'dır.

İspat: $\forall x, y\in I$ için,

$$\left[[a,xy]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}=\left[\tau(x)[a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y),b\right]_{\alpha,\beta}$$

$$=\tau(x)\left[[a,y]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}+[\tau(x),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),\alpha(b)]+\left[[a,x]_{\sigma,\tau},b\right]_{\alpha,\beta}\sigma(y)$$

ve buradan, $\forall x, y\in I$ için,

$$[\tau(x),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),\alpha(b)]=0 \tag{5.4}$$

bulunur.

(5.4) eşitliğinde, x yerine $r\in R$ olmak üzere rx alınarak,

$$[\tau(rx),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[a,rx]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),\alpha(b)]=\tau(r)[\tau(x),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[\tau(r),\beta(b)]\tau(x)[a,y]_{\sigma,\tau}$$
$$+[a,r]_{\sigma,\tau}\sigma(x)[\sigma(y),\alpha(b)]$$

bulunur. Böylece, $\forall x, y\in I$, $\forall r\in R$ için,

$$[\tau(r),\beta(b)]\tau(x)[a,y]_{\sigma,\tau}+[a,r]_{\sigma,\tau}\sigma(x)[\sigma(y),\alpha(b)]=0 \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) eşitliğinde, r yerine $\tau^{-1}\beta(b)$ alınırsa,

$$[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau}\sigma(I)[\sigma(I),\alpha(b)]=0 \tag{5.6}$$

bulunur. R bir asal halka ve $\sigma(I)$, R halkasında sıfırdan bir ideal olduğundan, (5.6) eşitliğinden,

$$[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } [\sigma(I),\alpha(b)]=0 \tag{5.7}$$

olur. .Yine R asal olduğundan, $[\sigma(I),\alpha(b)]=0$ eşitliğinden $b\in Z$ elde edilir. Böylece $[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau}=0$ veya $b\in Z$ sonucu bulunur.

Lemma 5.1.4: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ (σ,τ)-Lie ideali ve $a\in R$ olsun. $[U,a]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.

İspat: $[[U,R]_{\sigma,\tau},a]_{\alpha,\beta}\subset[U,a]_{\alpha,\beta}=0$ olduğundan, Lemma 5.1.3'den, $a\in Z$ veya $[U,\tau^{-1}\beta(a)]_{\sigma,\tau}=0$ olur. $[U,\tau^{-1}\beta(a)]_{\sigma,\tau}=0$ ise [11, Lemma2]'den, $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.

Teorem 5.1.5: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ (σ,τ)-Lie ideali ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun.

1) $a\in R$ ve $[[U,I]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu}=0$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.
2) $[U,I]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ ise $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya R komütatiftir.

İspat:

1) Lemma 5.1.3'den, $[[U,I]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu}=0$ ise, $a\in Z$ veya $[U,\beta^{-1}\mu(a)]_{\alpha,\beta}=0$ olur. $[U,\beta^{-1}\mu(a)]_{\alpha,\beta}=0$ ise, Lemma 5.1.4'dan, $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$'dır.

2) $[U,I]_{\alpha,\beta} \subset C_{\lambda,\mu}$ ise $\left[[U,I]_{\alpha,\beta}, R\right]_{\lambda,\mu} = 0$ olur. (1). şıkkı incelenirse, $R \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür. Böylece $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya R komütatiftir.

Teorem 5.1.6: d, R halkasında sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a \in R$ olsun. $d[a,R]_{\alpha,\beta} = 0$ ise bu durumda $a \in C_{\alpha,\beta}$ veya $a + \beta\alpha^{-1}(a) \in C_{\alpha,\beta}$'dir.

İspat: x, $y \in R$ için,

$$d[a,xy]_{\alpha,\beta} = d\left(\beta(x)[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,x]_{\alpha,\beta}\alpha(y)\right) = d\beta(x)\sigma[a,y]_{\alpha,\beta} + \tau[a,x]_{\alpha,\beta} d\alpha(y)$$

biçimindedir. Bu eşitlikte x yerine, $\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}$ $(z \in R)$ alınırsa, $\forall$ y, $z \in R$ için, $\left[a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}\right]_{\alpha,\beta} d\alpha(y) = 0$ bulunur ve [5, Lemma3]'den, $\forall z \in R$ için,

$$\left[a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}\right]_{\alpha,\beta} = 0 \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) eşitliğinde z yerine zy $(y \in R)$ alınırsa,

$$0 = \left[a,\beta^{-1}[a,zy]_{\alpha,\beta}\right]_{\alpha,\beta} = \left[a,\beta^{-1}\left(\beta(z)[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,z]_{\alpha,\beta}\alpha(y)\right)\right]_{\alpha,\beta}$$
$$= \left[a, z\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + \beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}\beta^{-1}\alpha(y)\right]_{\alpha,\beta} = [a,z]_{\alpha,\beta}\alpha\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,z]_{\alpha,\beta}\left[a,\beta^{-1}\alpha(y)\right]_{\alpha,\beta}$$

ve buradan, $\forall z$, $y \in R$ için,

$$[a,z]_{\alpha,\beta}\left(\alpha\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + \left[a,\beta^{-1}\alpha(y)\right]_{\alpha,\beta}\right) = 0, \tag{5.9}$$

(5.9) eşitliğinde z yerine, $t \in R$ olmak üzere zt alınır ve R halkasının asallığı kullanılırsa, $\forall y \in R$, $\forall z \in R$ için,

$$[a,z]_{\alpha,\beta} = 0 \text{ veya } \alpha\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + \left[a,\beta^{-1}\alpha(y)\right]_{\alpha,\beta} = 0 \tag{5.10}$$

elde edilir. Buradan, $\forall y \in R$ için,

$a \in C_{\alpha,\beta}$ veya $0 = \alpha\beta^{-1}(a)\alpha\beta^{-1}\alpha(y) - \alpha(y)\alpha\beta^{-1}(a) + a\alpha\beta^{-1}\alpha(y) - \alpha(y)a$ bulunur. Son eşitlikte sırasıyla α^{-1} ve β dönüşümleri uygulanırsa, $\forall y \in R$ için, $a\alpha(y) - \beta(y)a + \beta\alpha^{-1}(a)\alpha(y) - \beta(y)\beta\alpha^{-1}(a) = 0$ bulunur.

Buradan $\left(a+\beta\alpha^{-1}(a)\right)\alpha(y)-\beta(y)\left(a+\beta\alpha^{-1}(a)\right)=0$ ve böylece $a+\beta\alpha^{-1}(a)\in C_{\alpha,\beta}$ sonucu bulunur. (5.10) eşitliğinden, $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $\alpha+\beta\alpha^{-1}(a)\in C_{\alpha,\beta}$ elde edilir.

Sonuç 5.1.7: $\left[b,[a,R]_{\sigma,\tau}\right]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $b\in C_{\alpha,\beta}$ veya $a+\tau\sigma^{-1}(a)\in C_{\sigma,\tau}$'dır.

İspat: $d(x)=[b,x]_{\alpha,\beta}$, R üzerinde bir (α,β)-türevdir. Üstelik hipotezden, $d[a,R]_{\sigma,\tau}=0$'dır. Teorem 5.1.6'dan, $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $b\in C_{\alpha,\beta}$ veya $a+\tau\sigma^{-1}(a)\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Teorem 5.1.8: U, R halkasının, sıfırdan farklı bir sağ (σ,τ)-Lie ideali ve $d:R\to R$ bir (λ,μ)-türev olsun.

1) $d(U)=0$ ise, $\forall\, v\in U$ için $v+\tau\sigma^{-1}(v)\in C_{\sigma,\tau}$'dir.
2) $d[U,R]=0$ ise $U\subset Z$'dir.

İspat:

1) $d(U)=0$ olsun. Bu durumda $d[U,R]_{\sigma,\tau}=0$ dır. Teorem 5.1.6 kullanılırsa, $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $\forall\, v\in U$ için $v+\tau\sigma^{-1}(v)\in C_{\sigma,\tau}$ olur.
2) Teorem 5.1.6'da $\alpha=\beta=1$ alalım. Bu durumda, $d[U,R]=0$ iken $U\subset Z$ olur.

Teorem 5.1.9: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir (α,β)-türev olsun.

1) $d(U)=0$ ise, $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.
2) $a\in R$ ve $[U,a]=0$ ise, $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.
3) $a\in R$ ve $[U,a]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.
4) $\left[[R,U]_{\alpha,\beta},a\right]_{\lambda,\mu}=0$ ise $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.

İspat:

1) $d(U)=0$ olsun. $\forall\, v\in U$ için $d[R,v]_{\sigma,\tau}=0$'dır. [44,Sonuç5]'den $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$ olduğu görülür.

2) $\forall\, x\in R$ için, $d(x)=[x,a]$ ile tanımlansın. Bu durumda d, R halkasında bir türevdir. Hipotezden $d(U)=0$ dır. Bu teoremin (1). şıkkından, $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$ olduğu görülür.

3) $[[R,U]_{\sigma,\tau},a]_{\alpha,\beta}\subset[U,a]_{\alpha,\beta}=0$ olduğundan, Lemma 5.1.3'den,

$[\tau(U),\beta(a)]=0$ olur, buradan $[U,\tau^{-1}\beta(a)]=0$ bulunur. Bu teoremdeki (2). şıktan, $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$ olduğu görülür.

4) $[[R,U]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu}=0$ olsun. Lemma 5.1.1 ve hipotezden $[\beta(U),\mu(a)]=0$ elde edilir. Buradan $[U,\beta^{-1}\mu(a)]=0$ olur. (2). şıktan $a\in Z$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$ olduğu görülür.

Örnek 5.1.10: R=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{ tamsayı}\right\}$ olsun. $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$,

$\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ ve $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, R halkasının otomorfizmleri,

U=$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ kümesi bir sol (σ,τ) Lie ideal ve d($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)=$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ bir (α,α)-türev olmak üzere, $d(U)=0$ ve $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$ olduğu ve böylece Teorem 5.1.9, (1) şıkkının sağlandığı görülür.

Uyarı 5.1.11: U R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve $[U,U]_{\alpha,\beta}=0$ olsun. Bu durumda, $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.

İspat: Teorem 5.1.9 (3). şıktan, $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.

Teorem 5.1.12: U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (σ,τ)-Lie ideali ve $a\in R$ olsun.

1) $[a,U]_{\alpha,\beta}=0$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $\forall v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.

2) $[a,[R,U]_{\alpha,\beta}]_{\lambda,\mu}=0$ ise $a\in C_{\lambda,\mu}$ veya $\alpha(v)+\beta(v)\in Z$'dir.

3) $[R,U]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ ise R halkası komütatif veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)=\tau(v)$'dir.

4) $U\subset C_{\lambda,\mu}$ ise R halkası komütatif veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)=\tau(v)$'dir.

İspat:

1) $\forall\, x\in R$ için $d(x)=[a,x]_{\alpha,\beta}$ olsun. Bu durumda d bir (α,β)-türevdir. $[a,[R,U]_{\sigma,\tau}]_{\alpha,\beta}\subset[a,U]_{\alpha,\beta}=0$ olduğundan, $d[R,U]_{\sigma,\tau}=0$ elde edilir.

[44, Teorem5]'den, $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\in Z$'dir.

2) (1). şıkkın ispatından görülür.

3) $[R,U]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ olsun. Bu durumda $[[R,U]_{\alpha,\beta},R]_{\lambda,\mu}=0$'dır.

Lemma 5.1.1'den, $[\beta(U),\mu(R)]=0$ ve $U\subset Z$ olduğu görülür. Böylece $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U\subset Z$ olur. $\forall\, r,s\in R$, $\forall v\in U$ için,

$$0=[[r,v]_{\sigma,\tau},s]=[r\sigma(v)-\tau(v)r,s]=[r(\sigma(v)-\tau(v)),s]$$

$$=r[\sigma(v)-\tau(v),s]+[r,s](\sigma(v)-\tau(v))$$

eşitliğinden, $\forall r,s\in R$ ve $\forall v\in U$ için,

$$[r,s](\sigma(v)-\tau(v))=0 \tag{5.11}$$

bulunur. R asal ve $\sigma(v)-\tau(v)\in Z$ olduğundan, $\forall r,s\in R$ ve $\forall v\in U$ için,

$$[r,s]=0 \text{ veya } \sigma(v)=\tau(v) \tag{5.12}$$

ve buradan R komütatif veya $\forall v\in U$ için $\sigma(v)=\tau(v)$ elde edilir.

4) $U\subset C_{\lambda,\mu}$ ise $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\lambda,\mu}$'dır. (3). şıktan dolayı R komütatif veya $\forall\, v\in U$ için $\sigma(v)=\tau(v)$ olur.

5.2. Asal Halkalarda Bazı Bağıntılar:

Lemma 5.2.1: a, $b\in R$ olsun. Aşağıdaki koşullardan her biri için, $a\in Z$ veya b=0 olur.

i) $(x,a)_{\sigma,\tau}b=0$

ii) $b(x,a)_{\sigma,\tau}=0$

İspat:

i) Her x, $y\in R$ için, $0=(xy,a)_{\sigma,\tau}b=x(y,a)_{\sigma,\tau}b-[x,\tau(a)]yb=-[x,\tau(a)]yb$ biçimindedir. Buradan, $[R,\tau(a)]Rb=0$ olur. R halkasının asallığından, $a\in Z$ veya b=0 bulunur.

ii) Her x, $y\in R$ için, $0=b(xy,a)_{\sigma,\tau}=bx[y,\sigma(a)]+b(x,a)_{\sigma,\tau}y=bx[y,\sigma(a)]$ olur. (i) şıkkının ispatından, $a\in Z$ veya b=0 olur.

Lemma 5.2.2: a, $b\in R$ olsun. Aşağıdaki koşullardan her biri için, ab=ba'dır. Her $x\in R$ için,

i) $((x,b)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=0$

ii) $([x,a]_{\sigma,\tau},b)_{\sigma,\tau}=0$

İspat:

i) Her x, $y\in R$ için,

$0=((xy,b)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=(x[y,\sigma(b)]+(x,b)_{\sigma,\tau}y,a)_{\sigma,\tau}$

$=x[[y,\sigma(b)],\sigma(a)]+(x,a)_{\sigma,\tau}[y,\sigma(b)]+(x,b)_{\sigma,\tau}[y,\sigma(a)]+((x,b)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}y$

Bu son eşitlikte y yerine $\sigma(b)$ alınarak, $\forall x\in R$ için,

$$(x,b)_{\sigma,\tau}[\sigma(b),\sigma(a)]=0 \tag{5.13}$$

bulunur. (5.13) eşitliğinde x yerine xt ($t\in R$) alınırsa, Uyarı 2.1.23 iii) eşitliği ve R halkasının asallığından, $[R,\tau(b)]=0$ veya $\sigma[b,a]=0$ olduğu görülür. Buradan, ab=ba olur.

ii) $\forall x\in R$ için,

$$0=\left(\left[\tau(a)x,a\right]_{\sigma,\tau},b\right)_{\sigma,\tau}=\left(\tau(a)\left[x,a\right]_{\sigma,\tau}+\left[\tau(a),\tau(a)\right]x,b\right)_{\sigma,\tau}$$
$$=\tau(a)\left(\left[x,a\right]_{\sigma,\tau}b\right)_{\sigma,\tau}-\left[\tau(a),\tau(b)\right]\left[x,a\right]_{\sigma,\tau}=-\left[\tau(a),\tau(b)\right]\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} \tag{5.14}$$

(5.14) eşitliğinde x yerine xz, $z\in R$ alınır ve Uyarı 2.1.23 i) eşitliği kullanılırsa, $\left[\tau(a),\tau(b)\right]=0$ veya $a\in Z$ bulunur. Buradan, ab=ba olur.

Lemma 5.2.3: a,b ve c, R halkasının elemanları olsunlar. Her x, $y\in R$ için,

i) (x,a)(y,b)=0 ise $a\in Z$ veya $b\in Z$'dir. Ayrıca, [x,a][y,b]=0 ise $a\in Z$ veya $b\in Z$'dir.

ii) $[x,b]^2=0$ ise $b\in Z$'dir.

İspat:

i) Her x, y, $z\in R$ için, 0=(xz,a)(y,b)=x(z,a)(y,b)-[x,a]z(y,b) olur. Bu ise [R,a]R(R,b)=0 demektir. R asal halka olduğundan, [R,a]=0 veya (R,b)=0 olur. (R,b)=0 ise $\forall x,y\in R$ için, 0=(xy,b)=x(y,b)-[x,b]y eşitliğinden $b\in Z$ bulunacağından, sonuçta $a\in Z$ veya $b\in Z$ elde edilir.

ii) Her $x\in R$ için, [x,b][x,b]=0 olsun. $\forall x, y\in R$ için, [x,b][y,b]+[y,b][x,b]=0 olur. R halkasında d(x)=[x,b] iç türev dönüşümü alınırsa, $\forall x, y\in R$ için, d(x)d(y)+d(y)d(x)=0 olur. Buradan, (d(R),d(R))=0 olduğu görülür. Teorem 4.1.7'den, R halkası komütatiftir.

Teorem 5.2.4: Her $x\in R$ için, $\left((x,a)_{\sigma,\tau},a\right)_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in Z$'dir.

İspat: R halkasında, $h(x)=(x,a)_{\sigma,\tau}$ dönüşümü alınırsa. hipotezden $h^2(R)=0$ olduğu görülür. Diğer yandan, $\forall x, y\in R$ için,

$$h(xy)=(xy,a)_{\sigma,\tau}=x(y,a)_{\sigma,\tau}-\left[x,\tau(a)\right]y=x\left[y,\sigma(a)\right]+(x,a)_{\sigma,\tau}y$$

olur. $d_1(x)=\left[x,\tau(a)\right]$ ve $d_2(x)=\left[x,\sigma(a)\right]$, R halkasında tanımlı iç türevler olmak üzere, $\forall x, y\in R$ için,

$$h(xy)=h(x)y+xd_2(y) \tag{5.15}$$

Ve

$$h(xy) = -d_1(x)y + xh(y) \tag{5.16}$$

biçimindedir. Hipotez ve (5.16) eşitliği düşünülürse $\forall\, x, y \in R$ için,

$$0 = h^2(xy) = h(-d_1(x)y + xh(y)) = d_1^2(x)y - d_1(x)h(y) - d_1(x)h(y) + xh^2(y)$$
$$= d_1^2(x)y - 2d_1(x)h(y)$$

olur. Buradan, $\forall\, x, y \in R$ için,

$$d_1^2(x)y - 2d_1(x)h(y) = 0 \tag{5.17}$$

ve (5.17)'de, y yerine, h(y) alınır ve hipotez uygulanırsa,

$$d_1^2(R)h(R) = 0 \tag{5.18}$$

bulunur. Buradan, $d_1^2(R) = 0$ veya $a \in Z$'dir. $d_1^2(R) = 0$ ise $d_1 = 0$ olur, böylece $a \in Z$ olduğu görülür.

Teorem 5.2.5: U ve V, R halkasının sıfırdan farklı iki ideali ve $a \in R$ olsun. $[[U, V]_{\sigma,\tau}\, a]_{\alpha,\beta} = 0$ ise $a \in Z$'dir.

İspat: Lemma 5.1.3'den $a \in Z$ veya $[U, \tau^{-1}\beta(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu görülür. $\forall\, x, y \in U$ için, $[xy, \tau^{-1}\beta(a)]_{\sigma,\tau} = x[y,\tau^{-1}\beta(a)]+[x,\beta(a)]y$ eşitliğinden, $\forall\, x, y \in U$ için $[x,\beta(a)]y=0$ bulunur. Böylece her iki durumda da $a \in Z$ olduğu görülür.

KAYNAKLAR

1. Ashraf, M., Rehman, N., “On (σ,τ)-Derivations in Prime Rings”, ***Archivium Mathematicum***, 38, 259-264, (2002).

2. Aydın, N., “(σ,τ)-Yarı-Türevli Asal Halkalar ve Lie İdealler”, ***C. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi*** 14, 106-115, (1991)

3. Aydın, N., “On One Sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings”, ***Turkish Journal of Mathematics*** 21, 1-7 (1997).

4. Aydın, N., “Notes on Generalized Lie Ideals”, ***Analele Universitatii din Timisoara Seria Matematica-Informatica***, Vol. XXXVII (2), 7-13, (1999).

5. Aydın, N., Kaya, K., “Some Genaralizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivations”, ***Doğa-Tr J. of Math.***, 16, 169-176, (1992).

6. Aydın, N., Gölbaşı, Ö., “Some Results in Prime Rings with Derivation”, ***XIII. Ulusal Matematik Sempozyumu***, İstanbul, 6-9 Eylül, (2000).

7. Aydın, N., Kaya, K., Gölbaşı, Ö., “Some Results on Generalized Lie Ideals with Derivation”, **East Asian Mathematical J.**, Vol.17, No.2, 225-232, (2002).

8. Aydın,N., Kaya, K., Gölbaşı, Ö., “Some Results on One-Sided Genaralized Lie Ideals with Derivation”, ***Mathematical Notes***, 71-76, (2002).

9. Aydın, N., Soytürk, M., “Türevli Asal Halkalarda (σ,τ)-Lie İdealler”, ***C.Ü. Fen-Ed. Fak. Fen Bil. Dergisi***, Sayı 15, 103-110, (1993).

10. Aydın, N., Soytürk, M., “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation”, ***Turkish J. of Mathematics***, 19, 239-244, (1995).

11. Aydın, N., Kandamar, H., “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings”, ***Turkish Journal of Mathematics***, 18, 143-148, (1994).

12. Awtar, R., “A Remark on the Commutativity of Certain Rings”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** 41, 370-372, (1973).

13. Awtar, R., “Lie Structure in Prime Rings with Derivations”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** Vol.41, No.1, 67-74, (1984).

14. Bell, H., Daif, M.N., “On derivations and Commutativity in Prime Rings”, ***Acta Math. Hungar.*** , 66, 4, 337-343, (1995).

15. Bell, H., “A Note on Centralizers”, ***Int. J. Math.& Math. Sci.,*** 24, 1, 55-57, (2000).

16. Bergen, J., Herstein, I.N., Kerr, J.W.,“Lie Ideals and Derivations of Prime Rings”, ***Journal Of Algebra***, 71, 259-267, (1981).

17. Carini, L., “Derivations on Lie ideals in semiprime rings”, ***Rend.Circ. Mat. Palermo, II Ser.,*** 34, 122-126, (1985).

18. Chang J., “On Fixed Power Central (α,β)-Derivations”, ***Bull. Of Inst. Math. Acad. Sinica***, 15, 2, 163-178, (1975).

19. Chang J., “On (α,β)-Derivation of Prime Rings”, ***Chinese J. Math.,*** 22, 21-30, (1994).

20. Daif, M.N., Bell, H., “Remarks on Derivations on Semiprime Rings”, ***Internat. J. Math. & Math. Sci.,*** 15,1,205-206, (1992).

21. Deng, Q., Yenigül, M.Ş., Argaç, N., “On Ideals of Prime Rings with (σ,τ)-Derivations”, ***Tr J. of Math.***, 21, 45-49, (1997).

22. Masayoshi N.,Dekker,M., “Field Theory”, ***Inc. New York and Basel,*** (1977)

23. Gölbaşı, Ö., Aydın, N., “Some Notes on Generalized Lie Ideals”, ***XII. Ulusal Matematik Sempozyumu***, Malatya, 6-10 Eylül, (1999).

24. Güven, E., Soytürk, M. "Some Results on Prime Rings and (σ,τ)-Lie Ideals", ***Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics***, Vol:36, Issue 1, (2007).

25. Güven, E., Kaya, K. and Soytürk, M. "Some Results on (σ,τ)-Lie Ideals", ***Mathematical Journal of Okayama University***, Vol:49, (2007).

26. Herstein, I. N., “Topics in Algebra”, ***The University of Chicago Press,*** (1964).

27. Herstein, I. N., “Topics in Ring Theory”, ***The University of Chicago Press,*** (1969).

28. Herstein, I. N., “A Note on Derivations”, ***Can. J. Math.,*** 21(3), 369-370, (1978).

29. Herstein, I. N., “A Note on Derivations II”, ***Can. J. Math.,*** 22(4), 509-511, (1979).

30. Hungerford, T.W., “Algebra”, ***Springer Science and Business Media, Inc***., (1974).

31. Kandamar, H., Kaya, K., "Lie Ideals and (σ,τ)-Derivations in Prime Rings", ***Hacettepe Bull. Of Natural Sciences and Engineering,*** 21, 29-33, (1993)

32. Kaya, A., "On a Generalization of Lie Ideals in Prime Rings", ***Tr J. of Math.,*** 21,285-294, (1997).

33. Kaya, K., "On (σ,τ)-Derivations of Prime Rings", ***Doğa, TU Math. D***., 12, 2, 42-45, (1988).

34. Kaya, K., "Zayıf α-Türevli Asal Halkalar Üzerine", ***Doğa-Tr J. of Math.,*** 12, 46-51, (1988).

35. Kaya, K., "(sigma,tau)- Lie Ideals In Prime Rings", ***An.Univ. Timisoara, Stiinte Mat.*** 30, No.2-3, 251-255 (1992).

36. Kaya, K., Aydın, N., "The Summaries of Papers on Rings with Derivation"**,** ISBN 975-96530-0-1, SİVAS, (1995).

37. Kaya, K., Aydın, N., "Some Results on Generalized Lie Ideals", ***A Scientific Journal Issued by Jordan University for Women***, Vol. 3, No.1, (1999).

38. Kaya, K., Gölbaşı, Ö., Aydın,N., "Some Results for Generalized Lie Ideals in Prime Rings with Derivation", ***Applied Mathematics E-Notes***, No.1, 24-30, (2001).

39. Kaya,K., Güven, E. and Soytürk, M., "On (sigma,tau)-Derivations of Prime Rings", ***Journal of the Korea Society of Mathematical Education Ser B:Pure Appl. Math***., Vol. 13, Nubbe 3, (2006).

40. Lang, S., "Algebra", ***Addison Wesley***, (1993).

41. Lee, P.H., Lee, T.K., "On Derivations of Prime Rings", ***Chinese J. Math.,*** 9(2), 107-110, (1981).

42. Lee, P.H., Lee, T.K., "Lie Ideals of Prime Rings with Derivations", ***Bull. Institute of Math. Academia Sinica,*** 11, 75-79, (1983).

43. Mc Coy, N., "Theory of Rings", ***New York the Macmillan Company***, (1964).

44. Park, K.H., Jung, Y.S., "Some Results Concerning (θ,φ)-Derivations", ***J. Korea Soc. Math. Educ. Ser B, Pure Appl. Math.*** (2003).

45. Park, K.H., Jung, Y.S., "θ-Derivations on Prime Rings", ***J. Appl. Math. & Computing (Serie A),*** 12, 1-2, 313-321, (2003).

46. Posner, E.C., “Derivations in Prime Rings”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** No.8, 1093-1100, (1957).

47. Soytürk, M., “(σ,τ)-Türevli Asal Halkaların Komütatifliği”, ***C.Ü. Fen-Ed. Fak. Fen Bil. Derg,*** (1993).

48. Soytürk, M., “On (σ,τ)-derivations with Module Values”, ***Turkish J. of Mathematics***, No.20, 563-569, (1996).

49. Soytürk, M., “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation”, ***Turkish J. of Mathematics***, No.20, 233-236, (1996).

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Eskişehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini 1992 yılında Sivas'ta tamamladı. 1998 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2001 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 1999 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.