KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOLOJİ TEORİ

DOKTORA TEZİ

Kubilay TOPKAYA

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOLOJİ TEORİ

DOKTORA TEZİ

Kubilay TOPKAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 08 Haziran 2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 12 Temmuz 2007

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Doç.Dr. Sadi BAYRAMOV	Prof.Dr. Halis AYGÜN	Doç.Dr. Ahmet KÜÇÜK
(..............................)	(..............................)	(..............................)

Üye	Üye
Prof.Dr. Metin BAŞARIR	Yrd.Doç.Dr. Muharrem SOYTÜRK
(..............................)	(..............................)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma olanağı sağlayan, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, çalışmalarımda daima destek ve yardımlarıyla yanımda olan danışman hocam Sn. Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV´a, akademik çalışmalarımda beni yüreklendiren ve desteğini esirgemeyen hocam Sn. Prof. Dr. Halis AYGÜN´e ve Sn. Doç Dr. Ahmet KÜÇÜK´e teşekkür ederim.

Ayrıca daima özverili ve sevgi dolu olan anneme, babama, kardeşlerime ve mutluluk kaynağım öğrencilerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

A_l	: A fuzzy kümesinin l kesimi
a_a	: L- fuzzy nokta
$B_n[(X,t),Z]$	: (X,t) uzayının singüler n- sınırı
CC	: zincir kompleksler kategorisi
$C_n[(X,t),Z]$	: (X,t) uzayının singüler n- zincir grubu
$C_q(X)$	: q- boyutlu zincir grup
$Cov(X)$	: X uzayının açık örtümlerinin kümesi
$Dir(Top)$	: topolojik uzayların düz spektirler kategorisi
Δ_q	: q- boyutlu simpleks
E	: fuzzy ekspiyonensal dönüşüm
$\underline{f}$	: ters spektirin morfizması
f'	: f kümesinin tümleyeni
$\overset{\circ}{f}$	: f kümesinin içi
$\overline{f}$	: f kümesinin kapanışı
fgm_{Λ}^{Z}	: fuzzy derece sol $\Lambda-$modüllerin kategorisi
G_0	: G fuzzy kümesinin destek kümesi
$H_n[(X,t),Z]$	: (X,t) uzayının singüler n- homoloji grubu
$H(q_C)$	: fuzzy derece modülü
H_q	: homoloji funktoru
H^q	: kohomoloji funktoru
$H_q(X)$	: X uzayının q- boyutlu homoloji grubu
$I(L)$	: monoton azalan dönüşümlerin kümesi
$I^n(L)$	: L- fuzzy esas n-küp
$Inv(Top)$	: topolojik uzayların ters spektirler kategorisi
c_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
x^n	: L-fuzzy singüler n- küp
x_I	: I üzerinde Öklid alt uzay topolojisi
$\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X}$	: ters spektrin limiti
$\lim\limits_{\rightarrow} \overline{X}$	: düz spektrin limiti
$M(L)$	: L latisinin indirgenemez elemanlarının kümesi
$M(L^X)$	: X kümesinin L-fuzzy noktalarının kümesi
(M,m)	: fuzzy modül

m	: derece fonksiyonu
$M \otimes N$	: M ve N modüllerinin tensör çarpımı
$m \otimes n$	: m ve n derece fonksiyonlarının tensör çarpımı
$nervf$	: f örtümünün simplisial kompleksi
$P(X,t)$	: fuzzy yolların ailesi
$S_n(X,t)$	: L-fuzzy singüler n- küpler kümesi
$S(M)$	: derece fonksiyonların kümesi
t^n	: çarpım topolojisi
Top^2	: topolojik uzayların çiftler kategorisi
q_C	: fuzzy zincir kompleks
(X,t)	: fuzzy topolojik uzay
$\underline{X}$	: X topolojik uzayının ters spektiri
$\overline{X}$	: X topolojik uzayının düz spektiri
$Z_n[(X,t),Z]$	: (X,t) uzayının singüler n- devri

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOLOJİ TEORİ

Kubilay TOPKAYA

Anahtar Kelimeler: Fuzzy topolojik uzay, Fuzzy homotopi, Fuzzy homoloji grup, Fuzzy modüller, Fuzzy zincir kompleks.

Özet: Tezde fuzzy topolojik uzaylarda ve fuzzy kümelerde verilen fuzzy homotopi kavramını kullanarak fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde homoloji gruplar tanımlanmaktadır ve bu gruplar için homoloji teorinin aksiyomlarının sağlandığı gösterilmektedir. Daha sonra inşa edilen Cech homoloji teorinin süreklilik özelliği ispatlanmaktadır. Son olarak fuzzy zincir kompleksler kategorisinde fuzzy homoloji modüllerin dizisinin tamlığı ispatlanmaktadır.

HOMOLOGY THEORY IN THE CATEGORY OF FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Kubilay TOPKAYA

Keywords: Fuzzy topological space, Fuzzy homotopy, Fuzzy homology group, Fuzzy modules, Fuzzy chain complex.

Abstract: In this thesis, homology groups in the category of fuzzy topological spaces are defined by using fuzzy homotopy concept given in the fuzzy sets and the fuzzy topological spaces. It is shown that axioms of homology theory are provided for these groups. Afterwards, the continuity property of Cech homology theory that was built is proved. Finally, the exactness of the sequence of fuzzy homology modules with the category of fuzzy chain complexes is shown.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Cebirsel topolojinin temel amaçlarından biri ele alınan topolojik problemin cebirsel probleme dönüştürülmesi ve bu cebirsel problemin çözümünden yararlanarak topolojik problem hakkında bilgi elde etmektir. Cebirsel topolojinin bu tür problemlerin çözümünde yıllardan beri gelişen kendine özgü yöntemleri vardır. Bu yöntemlerden en önemlileri homoloji ve kohomoloji homotopik teorilerdir. Homoloji ve kohomoloji gruplar için ele alınan topolojik nesnenin invaryantları olarak yedi aksiyomun sağlanması gerekmektedir. Bu aksiyomlardan en önemlileri homotopi, tamlık ve kesme aksiyomlarıdır.

Bilindiği gibi matematikte en önemli problemlerden biri topolojik uzayın alt uzayında verilen fonksiyonun tüm topolojik uzaya genişletilmesi problemidir. Bu problem hakkında çok fazla sonuç elde edilmemiştir. Bununla ilgili en önemli teorem Tietze genişletilme teoremidir. Cebirsel topolojinin yöntemleriyle bu problem daha kolay hale getirilebilir. Diğer topoloji problemlerinden kaldırım problemi de cebirsel topolojinin yöntemleriyle çözülebilir.

Cebirsel topoloji yöntemlerin sadece topolojide değil matematiğin ve fen bilimlerinin çeşitli alanlarında da uygulamaları vardır. Örneğin uygulamalı matematiğin varyasyonel hesabında homotopik teori kullanılmaktadır. Ayrıca kuantum fiziğinde kohomoloji teorinin sonuçları önemli bir yer tutmaktadır.

Cebirsel topolojik uzaylar kategorisinde üç önemli homoloji ve kohomoloji teori inşa edilmiştir. Bunlardan biri poliyedirler kategorisinde tanımlı geometrik yapısı olan simplisial homoloji teoridir. Bu teorinin tüm topolojik uzaylar kategorisine genişletilme problemi bir çok matematikçi için güncel bir probleme dönüşmüştür. Bu tür genişletilme problemi biri Cech diğeri ise shape teorisi olmak üzere iki farklı yöntemle çözülmeye çalışılmıştır. Simplisial homoloji teorinin iyi yönü homoloji ve kohomoloji grupların geometrik yapı kullanılarak daha kolay hesaplanmasıdır. Kötü yönü ise bu teorinin tüm topolojik uzaylarda tanımlı olmayışı ve bunun sonucu olarak genişletilmede tamlık ve homotopi aksiyomlarında problemlerin ortaya çıkmasıdır.

İkinci önemli teori olan singüler homoloji teori tüm topolojik uzaylar kategorisinde tanımlanmıştır. Fakat singüler homoloji grupların topolojik uzaylar için hesaplanması oldukça zor bir problemdir.

Üçüncü önemli teori olan spektral homoloji teori, simplisial ve singüler homoloji teorilerin iyi özelliklerini içermektedir. Bu teori hem singüler homoloji teoride olduğu gibi tüm topolojik uzaylar kategorisinde tanımlı hem de bu teorinin inşasında poliyedirler kullanıldığı için homoloji grupların hesaplanması daha kolaydır.

İlk olarak 1965 yılında Zadeh, L. A., fuzzy (bulanık) küme tanımını vermiştir [44]. Daha sonra topolojiciler fuzzy kümelerde topoloji tanımlayarak klasik topolojik uzaylardaki kavramları ve teoremleri fuzzy topolojik uzaylarda vermeye ve ispatlamaya çalışmışlardır. Fuzzy kümelerde topoloji kavramı ilk olarak Chang, C. L. tarafından verilmiştir [4].

Yapılan taramalar ve incelemeler fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde cebirsel topolojinin yöntemlerinin neredeyse hiç kullanılmadığını gösterdi. Bunun nedeni uygun homotopi kavramının verilmemesidir. Aslında fuzzy topolojik uzaylarda homotopi kavramının verilmesinde üç farklı yaklaşım izlenmektedir.

Birinci yaklaşım verilen topolojik uzayın topolojisi fuzzy kümelerin bir desteği olarak ele alınan fuzzy topolojiden yararlanarak fuzzy birim aralığını tanımlayarak homotopi bağıntısının verilmesidir [33,34].

İkinci yaklaşım monoton azalan fonksiyonları kullanarak fuzzy birim aralığının tanımlanması ve bundan yararlanarak fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde fuzzy homotopi kavramının verilmesidir [5,12,30,32,41]. Bu verilen fuzzy homotopinin bir denklik bağıntısı olup olmadığı bilinmemektedir.

Üçüncü yaklaşım [18] deki fuzzy kümelerle kümeler arasındaki bağlantıyı kullanarak fuzzy kümelerde farklı bir topoloji tanımlayarak fuzzy kümeler arasındaki dönüşümlerde fuzzy homotopinin verilmesidir [7,13,15]. Bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu ispatlanmamaktadır ve bu bağıntı tüm fuzzy topolojik uzaylara genişletilememektedir. Fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde Wang-Jin, L. , Chong-You, Z. [38] tarafından verilen fuzzy birim aralığını kullanarak singüler homoloji grup tanımlanmış ve bu grubun fuzzy homomorfizma altında invaryant olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra Salleh A.R. tarafından bu singüler homoloji grubun fuzzy homotopi bağıntısına göre invaryant olduğu ispatlanmıştır [32]. Daha sonra Salleh, A., R. tarafından bu singüler homoloji grubun fuzzy homotopi bağıntısına göre invaryant olduğu ispatlanmıştır [32].

Görüldüğü gibi cebirsel topolojinin yöntemleri fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde pek fazla yer almamıştır. Burada fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde ele alınan fuzzy homotopilerden yararlanarak homoloji teorinin tüm aksiyomlarını sağlayan bir teori inşa etmek amaçlanmaktadır.
Ayrıca Salleh, A. , R. [33,34] tarafından verilen homotopiden yararlanarak tüm topolojik uzaylar kategorisinde Cech homoloji teori inşa edilmektedir

Çuvalcıoğlu-Citil [7] tarafından verilen homotopiden yararlanarak fuzzy kümelerde başka bir homotopi inşa edilmektedir.

Bu çalışmalar için fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde gerekli olan fuzzy normallik, fuzzy dönüşümler uzayı, fuzzy uzayların ters düz spektirleri hakkında incelemeler yapmak gerekmektedir. Fuzzy normallikle ilgili [20,40] çalışmaları yapılmıştır. Fuzzy dönüşümler uzayı ile ilgili [1,22] çalışmaları yapılmıştır. Fuzzy uzayların ters düz spektirleri ile ilgili [10,11] çalışmaları yapılmıştır.

Homoloji teorilerin inşasında en fazla kullanılan yöntem topolojik uzaylar kategorisinden zincir kompleksler kategorisine ulaşma yöntemidir. Bundan ötürü fuzzy gruplar ve fuzzy modüller konusunda da incelemeler yapılmıştır. Fuzzy gruplar ve modüllerle ilgili [21,23,24,29,31,46,47] çalışmaları yapılmıştır. [2] de Ameri ve Zahedi tarafından fuzzy zincir kompleks, fuzzy zincir homotopi ve fuzzy homoloji gruplar tanımlanmıştır. Fakat fuzzy homoloji grupların tam dizisi oluşturulmamıştır. Bundan dolayı tezin son bölümünde fuzzy modüllerin fuzzy zincir komplekslerinin fuzzy homoloji tam dizisi ile ilgili araştırma yapılmıştır.

Tez, birinci bölüm giriş olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tez çalışmasıyla ilgili ön bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde fuzzy kümelerde [7] de verilen topolojiden yararlanarak fuzzy kümeler kategorisinde homoloji teori inşa edilmektedir. Tez çalışmasının temel bölümü olan dördüncü bölümde fuzzy topolojik uzayların fuzzy açık örtümlerinden yararlanarak Cech homoloji (kohomoloji) gruplar tanımlanır ve bu gruplar için kesme, homotopi ve tamlık aksiyomlarının geçerli olduğu ispatlanır. Bölümün sonunda ise tanımlanan homoloji grubun süreklilik özelliği araştırılmaktadır. Beşinci bölümde ise fuzzy zincir komplekslerin fuzzy homoloji gruplarının tam dizileri oluşturulmaktadır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

2.1. Ters Düz Spektirler

Eğer $(A,\leq)$ yarı sıralı kümesinde her $x,y\in A$ için $x\leq z,\ y\leq z$ sağlanacak şekilde $z\in A$ varsa $(A,\leq)$ kümesine yönlendirilmiş küme denir. A yönlendirilmiş bir küme, her $a\in A$ için X_a bir topolojik uzay ve her $a<a'\in A$ için $p_a^{a'}:X_{a'}\to X_a$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.1.1. Eğer

1) Her $a\in A$ için $p_a^a=1_{X_a}:X_a\to X_a$

2) Her $a<a'<a''$ için $p_a^{a''}=p_a^{a'}\circ p_{a'}^{a''}$

koşulları sağlanıyorsa $\underline{X}=\left(\{X_a\}_{a\in A},\{p_a^{a'}:X_{a'}\to X_a\}_{a<a'\in A}\right)$ ailesine topolojik uzayların ters spektri denir [9].

A yönlendirilmiş bir küme, her $a\in A$ için X^a bir topolojik uzay ve her $a<a'\in A$ için $q_a^{a'}:X^a\to X^{a'}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.1.2. Eğer

1) Her $a\in A$ için $q_a^a=1_{X^a}:X^a\to X^a$

2) Her $a<a'<a''$ için $q_a^{a''}=p_{a'}^{a''}\circ p_a^{a'}$

koşulları sağlanıyorsa $\overline{X} = \left(\{X^a\}_{a\in A}, \{q_a^{a'} : X^a \to X^{a'}\}_{a<a'\in A} \right)$ ailesine topolojik uzayların düz spektri denir [9].

$(X,\leq)$, $(Y,\leq')$ iki yarı sıralı küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \leq y \in X$ için $f(x) \leq' f(y)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna izoton fonksiyon denir. $\underline{X} = \left(\{X_a\}_{a\in A}, \{p_a^{a'}\}_{a<a'\in A} \right), \underline{Y} = \left(\{Y_b\}_{b\in B}, \{r_b^{b'}\}_{b<b'\in B} \right)$ topolojik uzayların ters spektrleri, $j : B \to A$ izoton örten dönüşüm ve her $b \in B$ için $f_b : X_{j(b)} \to Y_b$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.1.3. Eğer her $b < b' \in B$ için

$$\begin{array}{ccc} X_{j(b')} & \xrightarrow{p_{j(b)}^{j(b')}} & X_{j(b)} \\ f_{b'} \downarrow & & \downarrow f_b \\ Y_{b'} & \xrightarrow[r_b^{b'}]{} & Y_b \end{array} \tag{2.1}$$

diyagramı komütatif ise $\underline{f} = \left(j : B \to A, \{f_b : X_{j(b)} \to Y_b\}_{b\in B} \right)$ ailesine $\underline{X}$ ters spektrinden $\underline{Y}$ ters spektrine giden dönüşüm denir [9].

Tanım 2.1.4. $\overline{X} = \left(\{X^a\}_{a\in A}, \{q_a^{a'}\}_{a<a'\in A} \right), \overline{Y} = \left(\{Y^b\}_{b\in B}, \{r_b^{b'}\}_{b<b'\in B} \right)$ topolojik uzayların düz spektrleri, $f : A \to B$ izoton örten dönüşüm ve her $a \in A$ için $f^a : X^a \to Y^{f(a)}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $a < a' \in A$ için

$$\begin{array}{ccc} X^a & \xrightarrow{q_a^{a'}} & X^{a'} \\ f^a \downarrow & & \downarrow f^{a'} \\ Y^{f(a)} & \xrightarrow[r_{f(a)}^{f(a')}]{} & Y^{f(a')} \end{array} \tag{2.2}$$

diyagramı komütatif ise $\overline{f} = \left(f : A \to B, \{f^a : X^a \to Y^{f(a)}\}_{a\in A} \right)$ ailesine $\overline{X}$ düz spektrinden $\overline{Y}$ düz spektrine giden dönüşüm denir [9].

Tanım 2.1.5. $\underline{X}=\left(\{X_a\}_{a\in A},\{p_a^{a'}:X_{a'}\to X_a\}_{a<a'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters spektri olsun. $\prod_{a\in A} X_a$ topolojik çarpım uzayının

$$\left\{\{x_a\}\in\prod_{a\in A}X_a : \forall a<a'\in A \text{ için } p_a^{a'}(x_{a'})=x_a\right\}$$

alt uzayına $\underline{X}$ ters spektrinin limiti denir ve $\varprojlim \underline{X}$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.6. $\overline{X}=\left(\{X^a\}_{a\in A},\{q_a^{a'}:X^a\to X^{a'}\}_{a<a'\in A}\right)$ topolojik uzayların düz spektri, $X=\bigoplus_{a\in A}X^a$ topolojik toplam ve $\left\{i_a : X^a\to\bigoplus_{a\in A}X^a\right\}$ gömme fonksiyonların ailesi olsun. Ayrıca X uzayında denklik bağıntısı aşağıdaki biçimde verilsin,

$x^a\in X^a, x^{a'}\in X^{a'}$ için $x^a\sim x^{a'}\Leftrightarrow q_a^{a''}(x^a)=q_{a'}^{a''}(x^{a'})$ koşulunu sağlayan $a''>a, a''>a'$ olacak biçimde $a''\in A$ vardır.

X uzayının bu denklik bağıntısına göre bölüm uzayına $\overline{X}$ düz spektrinin limiti denir ve $\varinjlim \overline{X}$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.7. X bir topolojik uzay , $A\subset X$ olmak üzere nesneleri (X,A) şeklindeki çiftler, morfizmaları ise

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B),\ \ f:X\longrightarrow Y,\ \ f(A)\subset B \tag{2.3}$$

şeklindeki dönüşümler olan kategoriye çiftler kategorisi denir ve Top^2 ile gösterilir [35] .

Tanım 2.1.8. $f,g:X\to Y$ topolojik uzayların sürekli dönüşümleri olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan $F:X\times I\to Y$ dönüşümü varsa

$$F\big|_{X\times\{0\}} = f,\ \ F\big|_{X\times\{1\}} = g \tag{2.4}$$

F dönüşümüne f ile g arasında homotopi, f ve g dönüşümlerine homotop dönüşümler denir [35].

$$\underline{f} = \left(p : B \to A, \{f_b : X_{p(b)} \to Y_b\}_{b\in B}\right),$$
$$\underline{g} = \left(r : B \to A, \{g_b : X_{r(b)} \to Y_b\}_{b\in B}\right) \tag{2.5}$$

ters spektrlerin morfizması için aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 2.1.9. Eğer her $b \in B$ için $a > p(b), a > r(b)$ koşulunu sağlayan $a \in A$ varsa ve $f_b \circ p^a_{p(b)}$ ile $g_b \circ p^a_{p(b)}$ homotopik ise $\underline{f}, \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$ morfizmalarına spektral homotopik morfizmalar denir. Eğer $f_b \circ p^a_{p(b)} = g_b \circ p^a_{p(b)}$ ise bu durumda $\underline{f}$ ve $\underline{g}$ morfizmalarına kanonik spektral homotop morfizmalar denir $\underline{f} \overset{s}{\sim} \underline{g}$ ile gösterilir [14].

Benzer olarak topolojik uzayların düz spektirler kategorisinde homotopi bağıntısı tanımlanır.

Teorem 2.1.10. $Inv(Top)[Dir(Top)]$ topolojik uzayların ters (düz) spektrler kategorisinde spektral homotopi bağıntısı denklik bağıntısıdır [14].

Teorem 2.1.11. $Inv(Top)$ ve $Dir(Top)$ kategorilerinde bileşke işlemi spektral homotopi bağıntısına göre invaryanttır [14].

2.2. Spektral Homoloji Teori

Top topolojik uzaylar kategorisi olsun. Her $X \in Top$ topolojik uzayı için $Cov(X)$ olarak X uzayının tüm açık örtümlerinin ailesi gösterilir. $\forall a \in Cov(X)$ için $a = \{a(i)\}_{i\in I}$, $\forall i \in I$ için $a(i)$ açık kümedir ve $\bigcup_{i\in I} a(i) = X$ sağlanır [9].

Tanım 2.2.1. $a=\{a(i)\}_{i\in I}$, $b=\{b(j)\}_{j\in J}$, X uzayının iki örtümü olsun. Eğer her $b(j)\in b$ için $b(j)\subset a(i)$ sağlanacak biçimde en az bir $a(i)\in a$ varsa bu durumda b örtümüne a örtümünün bir inceltilmesi denir [9].

Başka bir ifadeyle her $j\in J$ için $b(j)\subset a(p(j))$ koşulunu sağlayan $p:J\to I$ dönüşümü varsa b örtümüne a örtümünün bir inceltilmesi denir ve $b>a$ biçiminde gösterilir.

X uzayının tüm $Cov(X)$ açık örtümler kümesi "$>$" bağıntısına göre yönlendirilmiş bir kümedir.

$a=\{a(i)\}_{i\in I}\in Cov(X)$ keyfi açık örtüm olsun. Her $a(i)\in a$ kümesine karşı bir nokta alınsın ve tepe olarak düşünülen bu nokta i ile gösterilsin, yani I indisler kümesi tepeler kümesidir. $(i_1,i_2,\mathbf{K},i_k)$ için $a(i_1)\cap a(i_2)\mathbf{K}\cap a(i_k)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa $(i_1,i_2,\mathbf{K},i_k)$ bir simpleks olur. Bu şekildeki simpleksler ailesi bir simplisial kompleks oluşturur ve bu simplisial kompleks $nerva$ ile gösterilir.

$b=\{b(j)\}_{j\in J}>a=\{a(i)\}_{i\in I}$, olsun, yani $b(j)\subset a(p(j))$ olacak biçimde $p:J\to I$ dönüşümü vardır. p dönüşümü $nervb$ simplisial kompleksinin tepelerini $nerva$ simplisial kompleksinin tepelerine taşır [9].

Teorem 2.2.2. Eğer $b>a$ ise keyfi

$$p,p':nervb\to nerva \tag{2.6}$$

dönüşümleri simplisial denktirler, yani her $s\in nervb$ simpleksi için $p(s)$ ve $p(s')$ simpleksleri $nerva$ simplisial kompleksinde aynı simpleksin sınırlarıdır [9].

Teorem 2.2.3. Her X topolojik uzayı için

$$\left(\{nerva\}_{a\in Cov(X)}, \{[p_a^b]: nervb \to nerva\}_{a<b}\right) \tag{2.7}$$

simplisial kompleksler ve simplisial dönüşümlerin denklik sınıfları bir ters spektir oluşturur. Bu ters spektre H_q homoloji funktoru uygulanırsa grupların ters spektri elde edilir. Bu spektrin limitine X topolojik uzayının $q-$boyutlu homoloji grubu denir. Ters spektrlerin homoloji grupları için homoloji teorinin aksiyomları sağlanır [9].

2.3. Singüler Homoloji Teori

Tanım 2.3.1. R^{q+1} öklid uzayında $\Delta_q = (d_0, d_1, \mathbf{K}, d_q)$ q boyutlu birim simpleks ele alınsın. Bu simpleksin tepeleri koordinat eksenlerinin birim noktalarıdır. Eğer R^q uzayı R^{q+1} uzayının $x_q = 0$ koşulu altında bir alt uzayı olarak ele alınırsa Δ_{q-1} simpleksi Δ_q simpleksinin sınırıdır ve onun tepeleri $d_0, d_1, \mathbf{K}\, d_{q-1}$ biçimindedir.

$$l_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q, (i = 0,1, \mathbf{K}\, q) \tag{2.8}$$

simplisial dönüşümü tepelerde

$$l_q^i(d^j) = \begin{cases} d^j, & j < i \\ d^{j+1}, & j \geq i \end{cases} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece l_q^i dönüşümleri tepelerin yönünü koruyarak Δ_{q-1} simpleksini Δ_q simpleksinin $(q-1)$ boyutlu sınırına götürür ve bu sınıra d^j tepesi ait değildir [9].

Önerme 2.3.2. Eğer $0 \leq j \leq i \leq q$ ise $l_q^i l_{q-1}^i = l_q^i l_{q-1}^{i-1}$ [9].

Tanım 2.3.3. Her $T:\Delta_q \to X$ sürekli dönüşümüne X uzayının q-boyutlu singüler simpleksi denir. $T^{(i)} = Tl_q^i : \Delta_{q-1} \to X$ dönüşümüne T simpleksinin i. sınırı denir [9].

Önerme 2.3.4. Eğer $0 \le j \le i \le q$ ise $\left(T^{(i)}\right)^{(j)} = \left(T^{(j)}\right)^{(i-1)}$ [9].

Tanım 2.3.5. X uzayının tüm q-boyutlu singüler simplekslerinden üretilen serbest gruba X uzayının q-boyutlu singüler zincir grubu denir ve $C_q(X)$ ile gösterilir. $q<0$ için $C_q(X)=0$ sağlanır ve $\partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$ sınır operatörü,

$$\partial_q(T) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i T^{(i)} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ sağlanır.

$f: X \to Y$ sürekli dönüşüm olsun. Her $q \ge 0$ tam sayısı için $f_q : C_q(X) \to C_q(Y)$ dönüşümü $f_q(T) = fT$ olarak tanımlanır ve $\{f_q\}: SX \to SY$ zincir komplekslerin morfizmasıdır [9].

Teorem 2.3.6.

$$X \;\;\mathbf{a}\;\; SX = \{C_q(X), \partial_q\}$$

$$f: X \to Y \;\;\mathbf{a}\;\; \{f_q\}: SX \to SY \tag{2.11}$$

karşı gelmesi topolojik uzaylar kategorisinden zincir kompleksler kategorisine giden bir kovaryant funktordur [9].

Tanım 2.3.7. (X, A) çiftinin singüler kompleksine $S(X,A) = \{C_q(X)/C_q(A)\}$ faktör kompleksi denir [9].

$(X,A) \mapsto S(X,A)$ karşı gelmesi Top^2 topolojik uzayların çiftler kategorisinden CC zincir kompleksler kategorisine giden bir kovaryant funktordur [9].

Tanım 2.3.8. Her $(X,A) \in Top^2$ çifti için $H_q(X,A) = H_q(S(X,A))$ grubuna (X,A) çiftinin $q-$boyutlu singüler homoloji grubu denir [9].

Singüler homoloji gruplar için homoloji teorinin aksiyomları sağlanır [9].

2.4. Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1. $(L,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x,y \in L$ için $x \vee y = \sup\{x,y\}$ve $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ varsa L kümesine latis denir ve $L = (L,\leq,\wedge,\vee)$ ile gösterilir. Eğer L latisinin her alt kümesinin supremum ve infimumu varsa L latisine tam latis denir [40].

Tanım 2.4.2. $(L,\leq,\wedge,\vee)$ latisinin en büyük elemanı $\vee L = 1$ en küçük elemanı $\wedge L = 0$ olmak üzere her $x \in L$ için $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$ olacak şekilde bir x' elemanı varsa x' elemanına x elemanının tümleyeni denir. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$': L \to L, \ x \mapsto x' \tag{2.12}$$

dönüşümüne sırayı tersine koruyan dönüşüm denir [40].

i) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$

ii) $(a')' = a$.

Tanım 2.4.3. $(L,\leq,\wedge,\vee)$ bir latis olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa L latisine dağılımlı latis denir [40].

i) $\forall x,y,z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

ii) $\forall x, y, z \in L$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Tanım 2.4.5. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir tam latis olsun. Eğer

$$\{\{a_{i,j} : j \in J_i\} : i \in F\} \subset \wp(L) - \{f\} \; (F \neq \{f\})$$

ailesi için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L latisine tam dağılımlı latis denir [40].

i) $\bigwedge_{i \in F} \left(\bigvee_{j \in J_i} a_{i,j} \right) = \bigvee_{j \in \prod_{i \in F} J_i} \left(\bigwedge_{i \in F} a_{i,j(i)} \right)$

ii) $\bigvee_{i \in F} \left(\bigwedge_{j \in J_i} a_{i,j} \right) = \bigwedge_{j \in \prod_{i \in F} J_i} \left(\bigvee_{i \in F} a_{i,j(i)} \right)$

Tanım 2.4.6. Sırayı tersine koruyan dönüşüm ile birlikte tam dağılımlı bir latise fuzzy latis denir ve $L = (L, \leq, \wedge, \vee, ')$ biçiminde gösterilir [40].

Tanım 2.4.7. L bir latis ve $a \in L$ olsun. Eğer

$\forall\, a, b \in L$ için $a \leq a \vee b \;\Rightarrow\; a \leq a$ veya $a \leq b$

ise a elemanına L latisinin indirgenemez elemanı denir. L latisinin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi $M(L)$ ile gösterilir [40].

Tanım 2.4.8. X bir küme ve $A \in \wp(X)$ olmak üzere

$$c_A : X \to \{0,1\}, \quad x \mapsto c_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlı c_A foksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir [40].

Tanım 2.4.9. $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin tümleyeni A' kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$c_{A'} : X \to \{0,1\},\ x \mapsto c_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases} \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlıdır [40].

Tanım 2.4.10. $f : X \to L$ fonksiyonuna X üzerinde L-fuzzy küme denir. X üzerindeki L-fuzzy kümelerin ailesi L^X ile gösterilir. $f \in L^X$ L-fuzzy kümesinin tümleyeni

$$f' = 1 - f \tag{2.15}$$

biçiminde tanımlanır [40].

Tanım 2.4.11. $M(L)$ L latisinin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda

$$M\left(L^X\right) = \{x_a : x \in X, a \in M(L)\} \tag{2.16}$$

kümesinin elemanlarına X kümesinin L-fuzzy noktaları denir. Burada,

$$x_a : X \to L,\ y \mapsto x_a(y) = \begin{cases} a, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases} \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlıdır. x elemanına x_a fuzzy noktasının desteği denir ve $\sup px_a$ ile gösterilir [40].

Tanım 2.4.12. X, Y iki küme $j : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f \in L^X$ L-fuzzy kümesinin j fonksiyonu altındaki görüntüsü,

$$j(f): Y \to L,\ \ y\ \mathbf{a}\ \ j(f)(y) = \sup\{f(x) : x \in X, j(x) = y\}\ (\forall y \in Y) \tag{2.18}$$

biçiminde ve $g \in L^Y$ L-fuzzy kümesinin j fonksiyonu altındaki ters görüntüsü,

$$j^{-1}(g) : X \to L,\ \ x\ \mathbf{a}\ \ j^{-1}(g)(x) = (g(j(x)))\quad (\forall x \in X)$$

biçiminde tanımlıdır [40].

Tanım 2.4.13. X boştan farklı bir küme ve L bir fuzzy latis olsun. Eğer $t \subset L^X$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa t ailesine X üzerinde bir L-fuzzy topoloji denir,

i) $0,1 \in t$

ii) $f, g \in t \Rightarrow f \wedge g \in t$

iii) $\{f_i : i \in J\} \subset t \Rightarrow \bigvee_{i \in J} f_i \in t$.

(X, t) ikilisine L-fuzzy topolojik uzay (Chang) denir[4].

Tanım 2.4.14. (X, t) ve (Y, t^*) iki L-fuzzy topolojik uzay ve $j : (X, t) \to (Y, t^*)$ fuzzy dönüşüm olsun. Her $g \in t^*$ için $j^{-1}(g) \in t$ sağlanıyorsa $j : (X, t) \to (Y, t^*)$ dönüşümüne fuzzy süreklidir denir [40].

Tanım 2.4.15. X boştan farklı bir küme ve L bir fuzzy latis olsun. Eğer $t \subset L^X$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa t ailesine X üzerinde bir L-fuzzy topoloji denir,

i) Her $a : X \to L$ sabit fonksiyonu için $a \in t$

ii) $f, g \in t \Rightarrow f \wedge g \in t$

iii) Her $m \in M$ için $f_m \in t \Rightarrow \bigvee_{m \in M} f_m \in t$

(X,t) ikilisine L-fuzzy topolojik uzay (Lowen) denir[4].

Tanım 2.4.16. (X,t) bir L-fuzzy topolojik uzay ve $f \in L^X$ olsun. f fuzzy kümesinin içi,

$$\overset{o}{f} = \vee\{g : g \subset f, g \in t\} \tag{2.19}$$

şeklinde ve f fuzzy kümesinin kapanışı,

$$\overline{f} = \wedge\{h : h \supset f, h \in t'\} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanır [40].

Tanım 2.4.17. (X,t) fuzzy topolojik uzayının her P kapalı $L-fuzzy$ alt kümesi ve $P \leq U$ koşulunu sağlayan açık U alt kümesi için

$$P \leq V \leq V^{-} \leq U \tag{2.21}$$

koşulunu sağlayan V $L-fuzzy$ açık alt kümesi varsa, (X,t) fuzzy topolojik uzayına normal fuzzy topolojik uzay denir [40].

Tanım 2.4.18. (X,t) fuzzy topolojik uzay $A,B \in L^X$ olsun. Eğer $\vee \wp \geq$ A ise $\wp$ ailesine A kümesinin bir örtümü denir. Eğer $\wp$, $\underline{1}$ in bir örtümü ise $\wp$ ailesine $\left(L^X, d\right)$ uzayının örtümü denir. Eğer $A \subset t$ için $\wp$, A kümesinin bir örtümü ise $\wp$ örtümüne A kümesinin bir açık örtümü denir. A kümesinin $\wp$ örtümü için eğer $\mathbf{l} \subset \wp$ ise ve $\mathbf{l}$, A nın örtümü ise $\mathbf{l}$ ailesine A kümesinin alt örtümü denir [40].

Tanım 2.4.19. (X,t) fuzzy topolojik uzay olsun. Her $a \in [0,1)$ için ve her $x \in X$ için $A(x) > a$ olacak şekilde A$\in \wp$ varsa $\wp \subset I^X$ ailesine a-örtüm denir. Eğer $\wp_0 \subset \wp$ ve $\wp_0$ a-örtüm ise $\wp_0 \subset I^X$ örtümüne $\wp$ örtümünün a - alt örtümü denir.

Her $x \in X$ için $A(x) \geq a$ olacak biçimde A$\in \wp$ varsa $\wp$ örtümüne a^*-örtüm denir. Eğer $\wp \subset t$ ve $\wp$, a^*-örtüm ise $\wp$ örtümüne açık a^*-örtüm denir. Eğer $\wp_0 \subset \wp$ ve $\wp_0$ a^*-örtüm ise $\wp_0 \subset I^X$ örtümüne $\wp$ örtümünün alt a^*-örtümü denir [40].

Tanım 2.4.20. (X,t) fuzzy topolojik uzayının her açık örtümünün sonlu alt örtümü varsa (X,t) fuzzy topolojik uzayına $C-kompakt$ denir [40].

Tanım 2.4.21. $a \in [0,1)$ olsun. Eğer her açık a -örtümün sonlu alt a -örtümü varsa (X,t) uzayına $a-$kompakt uzay denir [40].

Tanım 2.4.22. $a \in [0,1)$ olsun. Eğer her açık a^*-örtümün sonlu alt a^*-örtümü varsa (X,t) uzayına a^*-kompakt uzay denir [40].

Tanım 2.4.23. (X,t) fuzzy topolojik uzayı her $a \in [0,1)$ için $a-$kompakt uzay ise (X,t) uzayına güçlü kompakt uzay denir [40].

$A_{(a)} = \{x \in X : A(x) > a\}$ olmak üzere her (X,t) L-fuzzy topolojik uzayı, her $\wp \subset L^X$ ve her $a \in L$ için $i_a(\wp) = \{A_{(a)} : A \in \wp\}$ biçimindedir. $\bigcup_{a \in L} i_a(t)$ alt tabanından üretilen X üzerindeki klasik topoloji $i_L(t)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.24. Eğer $(X, i_I(t))$ kompakt uzay ise (X,t) uzayına ultra kompakt uzay denir [40].

Tanım 2.4.25. Eğer $\vee \wp = \underline{1}$ koşulunu sağlayan her $\wp \subset d$ için ve her $e > 0$ için $\vee \wp_0 \geq 1-e$ koşulunu sağlayan $\wp_0 \subset \wp$ sonlu alt ailesi varsa (X,t) uzayına zayıf kompakt uzay denir [40].

Tanım 2.4.26. Eğer $\vee \wp_0 \geq \underline{a}$ koşulunu sağlayan her $a \in [0,1]$ için ve her $e \in (0,a)$ için $\vee \wp_0 \geq \underline{a-e}$ koşulunu sağlayan sonlu $\wp_0 \subset \wp$ alt ailesi varsa (X,t) uzayına fuzzy kompakt uzay denir [40].

Tanım 2.4.27. (X,t) L-fuzzy topolojik uzay, $A \in L^X$, $\Phi \subset L^X$ olsun. Eğer her $x \in \sup p(A)$ için $x_{A(x)} < U$ koşulunu sağlayan $U \in \Phi$ varsa Φ ailesine A kümesinin Q-örtümü denir. Eğer $\Phi \subset t$ ise ve Φ, A kümesinin Q-örtümü ise Φ ailesine A kümesinin açık Q-örtümü denir. Eğer $\Phi_0 \subset \Phi$ ise ve Φ_0, A kümesinin Q-örtümü ise $\Phi_0 \subset L^X$ örtümüne alt Q-örtüm denir. Eğer Φ, $\underline{1}$ kümesinin Q-örtümü ise Φ ailesine (X,t) uzayının Q-örtümü denir [40].

Tanım 2.4.28. (X,t) fuzzy topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık Q-örtümünün sonlu alt Q-örtümü varsa A kümesine Q-kompakt denir [40].

Tanım 2.4.29. (X,t) L-fuzzy topolojik uzay, $A \in L^X, C \in d$, $\Phi \subset L^X$, $a \in M(L)$ olsun. Eğer her $x_a < A$ için $C \in Q(x_a)$ ise C elemanına A kümesinin $a-Q$ komşuluğu denir. Eğer her $x_a < A$ için $x_a < U$ koşulunu sağlayan $U \in \Phi$ varsa Φ ailesine A kümesinin $a-Q$ örtümü denir ve $\vee \Phi \hat{q} A(a)$ ile gösterilir. Eğer $\Phi \subset t$ ve Φ A kümesinin $a-Q$ örtümü ise Φ ailesine A kümesinin açık $a-Q$ örtümü denir. Eğer $\Phi_0 \subset \Phi$ ise ve Φ_0, A kümesinin $a-Q$ örtümü ise $\Phi_0 \subset L^X$ ailesine Φ ailesinin alt $a-Q$ örtümü denir. Eğer Φ, A kümesinin $g-Q$ örtümü olacak şekilde $g \in b^*(a)$ varsa Φ ailesinin A kümesinin $a^- - Q$ örtümü denir ve $\vee \Phi \hat{\hat{q}} A(a)$ ile gösterilir [40].

Tanım 2.4.30. (X,t) L-fuzzy topolojik uzay, $A \in L^X$ olsun. Eğer her $a \in M(L)$ ve A kümesinin her açık $a-Q$ örtümünün A kümesinin $a^- - Q$ örtümü olacak şekilde sonlu alt ailesi varsa A kümesine N-kompakt denir. Eğer $\underline{1}$, N-kompakt ise (X,t) uzayına N-kompakt denir [40].

Tanım 2.4.31. X,Y fuzzy topolojik uzay ve $Y^X = \{ f : X \to Y : f$ fuzzy süreklidir. $\}$ olsun.

$K = \{ K \in I^X : K, X$ üzerinde fuzzy kompakttır. $\}$,

$V = \{ V \in I^Y : V, Y$ üzerinde fuzzy açıktır. $\}$

alınsın. Her $\mathrm{K} \in \Re$ ve $V \in \aleph$ için $N_{K,V} = \{ f \in Y^X : f(K) \le V \}$ olsun. $\{ N_{K,V} : \mathrm{K} \in \Re, V \in \aleph \}$ ailesi fuzzy alt taban alınarak Y^X üzerinde üretilen fuzzy topolojiye bir fuzzy kompakt –açık topoloji denir. Bu topoloji ile birlikte Y^X uzayına fuzzy kompakt açık topolojik uzay denir [40].

2.5. Fuzzy Homotopiler

Tanım 2.5.1. $\widetilde{I}$ aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $l : R \to L$ monoton azalan dönüşümlerin kümesi olsun,

1) $l(t) = 1, \quad t < 0$ için
2) $l(t) = 0, \quad t > 1$ için.

$l, m \in \widetilde{I}$ için

$$l \cong m \Leftrightarrow \forall t \in R, l(t^-) = m(t^-) \text{ ve } l(t^+) = m(t^+) \tag{2.22}$$

tanımlansın, burada $l(t^-) = \inf\limits_{s<t} l(s)$, $l(t^+) = \sup\limits_{s>t} l(s)$ dir [20].

$\widetilde{I}$ üzerinde "$\cong$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $\widetilde{I}/\cong$ bölüm kümesine L-fuzzy birim aralık denir ve $I(L)$ ile gösterilir . Ayrıca $l \in \widetilde{I}$ dönüşümünün denklik sınıfı $[l]$ ile gösterilmektedir. $\{ L_t, R_t : t \in R \}$ alt taban gibi alınarak $I(L)$ üzerinde bir t , L-fuzzy topoloji tanımlanır. $L_t([l]) = \left(l\left(t^-\right)\right)' \in L$, $R_t([l]) = l\left(t^+\right) \in L$. t ya $I(L)$ üzerinde standart topoloji denir [20].

Tanım 2.5.2. $n \geq 1$ için $I_1(L), I_2(L), \ldots, I_n(L)$ L-fuzzy birim aralıkların çarpımına L fuzzy esas n-küp denir ve $I^n(L)$ ile gösterilir. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sırasıyla standart topolojiler olmak üzere çarpım topolojisi t^n ile gösterilir.

$P_i : I^n(L) \to I_i(L)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ doğal izdüşüm olsun bu durumda $\left\{P_i^{-1}\left(L_t^{(i)}\right), P_i^{-1}\left(R_t^{(i)}\right) : t \in R, i = 1,2,\ldots,n\right\}$, t^n topolojisinin bir alt tabanıdır.Ayrıca burada $\left\{L_t^{(i)}, R_t^{(i)} : t \in R\right\}$, $I_i(L)$ üzerinde t_i standart topolojilerin bir alt tabanıdır [20].

Tanım 2.5.3. (X,t) L-fuzzy topolojik uzay olsun bu durumda (X,t) uzayında bir L-fuzzy singüler n-küp bir

$$x^{(n)} : (I^n(L), t^n) \to (X,t), \ n \geq 0 \tag{2.23}$$

L-fuzzy sürekli dönüşümdür. (X,t) uzayında tüm L-fuzzy n-küpler kümesi $S_n(X,t)$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.5.4. Her $1 \leq i \leq n$, $[l_i], [m_i] \in I_i(L)$ için $x^{(n)}(\ldots,[l_i],\ldots) = x^{(n)}(\ldots,[m_i],\ldots)$ koşulunu sağlayan en az bir i varsa yani $x^{(n)}([l^1]\ldots,[l^i],\ldots[l^n])$, $[l^i]$ sınıfına bağlı değilse $n \geq 1$ için $x^{(n)} \in S_n(X,t)$ L-fuzzy singüler n-küpüne dejenere denir[5].

Tanım2.5.5. (X,t) L-fuzzy topolojik uzay ve Z tamsayıların toplamsal grubu olsun. $n \geq 0$ için $Q_n[(X,t),Z]$ ile (X,t) uzayıdaki tüm L-fuzzy singüler n-küplerin $S_n(X,t)$ kümesinden üretilen serbest abelian grubu gösterilir, yani her $\hat{c}_n \in [(X,t),Z]$ elemanının L-fuzzy singüler n-küplerinin sonlu lineer kombinasyonu olarak bir tek gösterimi vardır,

$$\hat{c}_n = \sum_a a_a x_a^{(n)}, \quad a_a \in Z, \quad x_a^{(n)} \in S_n(X,t). \tag{2.24}$$

Bir $x^{(n)}$ L-fuzzy singüler n-küp ve $1x^{(n)} \in Q_n[(X,t),Z]$ arasında bir ayrışım yapılamaz ve 0 ile $\sum_a 0\, x_a^{(n)} \in Q_n[(X,t),Z]$ gösterilir.

$n \geq 1$ için $D_n[(X,t),Z]$ ile tüm dejenere L-fuzzy singüler n-küplerden üretilen $Q_n[(X,t),Z]$ grubunun alt grubu gösterilsin ve $D_0[(X,t),Z] = \{0\}$ alınsın $n \geq 0$ için

$$C_n[(X,t),Z] = \frac{Q_n[(X,t),Z]}{D_n[(X,t),Z]} \tag{2.25}$$

grubu tanımlanır ve buna (X,t) uzayında singüler n-zincir grup denir [5].

Tanım 2.5.6 (X,t) bir fuzzy topolojik uzay olsun.

$$Z_n[(X,t),Z] = Ker(\partial_n^*) = \{c_n \in C_n[(X,t),Z] : \partial_n^* c_n = 0\}, n \geq 1$$
$$B_n[(X,t),Z] = \mathrm{Im}(\partial_{n+1}^*) = \partial_{n+1}^* \{C_{n+1}[(X,t),Z]\}, n \geq 0$$

ifadelerine (X,t) uzayının singüler n-çemberi ve singüler n-sınırı denir. Ayrıca

$$H_n[(X,t),Z] = \frac{Z_n[(X,t),Z]}{B_n[(X,t),Z]}, n \geq 0 \tag{2.26}$$

grubuna (X,t) uzayının singüler n-homoloji grubu denir [5].

$i = 1,2,\ldots,n$ için $d_i^0 : (I^{n-1}(L), t^{n-1}) \longrightarrow (I^n(L), t^n)$ fuzzy dönüşümü

$$d_i^0([l^1], \mathbf{K}, [l^{n-1}]) = ([l^1], \mathbf{K}, [l^{i-1}], [n_0], [l^i], \mathbf{K}, [l^{n-1}])$$

biçimindedir. Burada $[n_0] \in I(L)$ dir ve d_i^0 fuzzy süreklidir.

Benzer olarak $i = 1,2,...,n$ için $d_i^1 : (I^{n-1}(L), t^{n-1}) \longrightarrow (I^n(L), t^n)$ fuzzy dönüşümü

$$d_i^1([l^1], \mathbf{K}, [l^{n-1}]) = ([l^1], \mathbf{K}, [l^{i-1}], [n_1], [l^i], \mathbf{K}, [l^{n-1}])$$

biçimindedir. Burada $[n_1] \in I(L)$ olmak üzere $t < 1$ için $n_1(t) = 1$ ve $t > 1$ için $n_1(t) = 0$ sağlanır. Bu durumda d_i^1 fuzzy süreklidir [5].

Tanım 2.5.7. $n \geq 1$ için (X, t) L-fuzzy topolojik uzay olsun. $\partial_n : Q_n[(X,t)] \to Q_{n-1}[(X,t), Z]$ homomorfizması $x^{(n)} \in S_n(X,t)$ için

$$\partial_n x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[d_i^1 - d_i^0 \right] \tag{2.27}$$

olarak tanımlanır [5].

Teorem 2.5.8. $n > 1$ için $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ sağlanır [5].

Tanım2.5.9. $f, g : (X,t) \to (Y,s)$ L-fuzzy sürekli dönüşümler olsun. (X,t) uzayında her a_a L-fuzzy noktası için $F(a_a, [l_0]) = f(a_a)$ ve $F(a_a, [l_1]) = g(a_a)$ olacak biçimde sürekli L-fuzzy $F : (X,t) \times (I(L), t) \to (Y,s)$ dönüşümü varsa f, g dönüşümleri fuzzy homotopiktir denir. Burada $i = 0,1$ için

$$l_i(t) = \begin{cases} 1 & t < i \\ 0 & t > i \end{cases} \tag{2.28}$$

olacak biçimdedir. F dönüşümüne f ve g arasında L-fuzzy homotopi denir [5].

Teorem2.5.10. $f, g : (X, t) \to (Y, s)$ L-fuzzy sürekli dönüşümler olsun. Eğer f ve g fuzzy homotop ise bu dönüşümlerden üretilen

$$f_*, g_* : H_n[(X,t),Z] \to H_n[(Y,s),Z],\ n \geq 0 \tag{2.29}$$

homomorfizmaları eşittir [5].

Bir $A \in F(X)$ fuzzy kümesi ve $l \in I$ için A kümesinin l kesimi ve güçlü l kesimi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$A_l = \{x \in X : A(x) \geq l\},\ \ A_{<l>} = \{x \in X : A(x) > l\} \tag{2.30}$$

l kesimi ve güçlü l kesimi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1.$(A \cup B)_l = A_l \cup B_l$

2.$(A \cap B)_l = A_l \cap B_l$.

$x \in X$ ve $l \in [0,1]$ için lA fuzzy kümesi

$$(lA)(x) = l \wedge A(x) \tag{2.31}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece

$$A = \bigcup_{l \in [0,1]} lA_l = \bigcup_{l \in [0,1]} lA_{<l>} \ . \tag{2.32}$$

Her $x \in X$, $l \in [0,1]$ ve x_l fuzzy noktası için eğer $A \in F(X)$ bir fuzzy küme ise

$$A = \bigcup \{x_{A(x)} : x \in X\} \tag{2.33}$$

yazılabilir [18].

Tanım 2.5.11. $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$ ve $f \subseteq A \times B$ fuzzy bağıntısını ele alalım. Eğer her $l \in [0,1]$ için f_l , A_l kümesinden B_l kümesine bir dönüşüm ise f dönüşümüne A fuzzy kümesinden B fuzzy kümesine giden bir fuzzy dönüşüm denir ve $f : A \to B$ biçiminde gösterilir [18].

Eğer her $l \in [0,1]$ için f_l , A_l kümesinden B_l kümesine bire bir dönüşüm ise $f : A \to B$ dönüşümüne fuzzy bire bir dönüşüm denir. Eğer her $l \in [0,1]$ için $B_{<l>} \subseteq f_l(A_l) \subseteq B_l$ sağlanıyorsa f dönüşümüne fuzzy örten dönüşüm denir [18].

Tanım 2.5.12. (X,t) bir topolojik uzay $A \in F(X)$ ve $t^* \subset F(X)$ olsun. $\left[t^* = \{G : n \to I | n \in t\}, t_l^* = \{G_l | G \in t^*\}, l \in I\right]$ alınsın. Eğer her $l \in [0,1]$ için (A_l, t_l^*) bir topolojik uzay ise (A, t^*) ikilisine fuzzy topolojik uzay denir [7].

$A \in F(X), B \in F(Y)$ için $A \times B = \bigcup_{l \in [0,1]} l(A_l \times B_l)$ biçimindedir ve buna A ve B fuzzy kümelerinin kartezyen çarpımı denir [18].

Tanım 2.5.13. $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$, $(A,t_1),(B,t_2)$ iki topolojik uzay ve $f : A \to B$ bir fuzzy dönüşüm olsun. Eğer her $l \in [0,1]$ için $f_l : A_l \to B_l$ sürekli ise f dönüşümüne fuzzy sürekli dönüşüm denir [7].

Tanım 2.5.14. (A,t_1) ve (B,t_2) fuzzy topolojik uzaylar ve $f, g : A \to B$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $\forall l \in I$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $F : A \times I \to B$ fuzzy sürekli dönüşüm varsa f , g ile fuzzy homotoptur denir.

$$F_l(x,0) = f_l(x)$$
$$F_l(x,1) = g_l(x)$$
$$F_l(x,t) = f_l^t(x). \qquad (2.34)$$

Eğer f ve g fuzzy homotop dönüşümler ise bu $f \sim g$ biçiminde yazılır.

$f, g : A \to B$ fuzzy homotop dönüşümler olsun bu durumda her $l \in I$ için $f_l, g_l : A_l \to B_l$ dönüşümleri homotoptur [7].

Tanım 2.5.15. (A, t_1) ve (B, t_2) fuzzy topolojik uzaylar olsun. $x_0 \subset X$ ve her $x_0 \in X$ için $f(x_0) = g(x_0)$ olacak şekilde $f, g : X \to Y$ fonksiyonları var olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan $F : A \times I \to B$ fonksiyonu varsa f ve g, x_0 elemanına göre göreceli homotoptur denir [7].

$$\begin{aligned} F_l(x,0) = f(x), F_l(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X \\ F_l(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0) \quad \forall x_0 \in X \end{aligned} \tag{2.35}$$

Teorem 2.5.16. Fuzzy homotopi bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [7].

Teorem 2.5.17. $A \in F(X), B \in F(Y), C \in F(Z)$ fuzzy topolojik uzaylar ve $f \subset A \times B,\ g \subset B \times C$ fuzzy sürekli dönüşümler olsun. Eğer $g \sim h$ ise $g \circ f$ ve $h \circ f$ fuzzy süreklidir ve $g \circ f \sim h \circ f$ [7].

Tanım 2.5.18. A ve B, (X, t) fuzzy topolojik uzayında fuzzy kümeler olsun. Eğer,

$$A \subset F, B \subset G, A \cap G = \{f\}, B \cap F = \{f\} \tag{2.36}$$

olacak biçimde F ve G kapalı kümeleri varsa A ve B ye $Q-$ayrılabilir denir [33].

X üzerinde bir fuzzy küme bir $F : X \to I$ fonksiyonudur. Eğer F sadece 0 ve 1 değerlerini alıyorsa F fonksiyonuna X üzerinde crisp küme denir. $F_0 = \{x \in X : F(x) > 0\}$ crisp kümesine F kümesinin desteği denir [33].

Tanım 2.5.19 F , (X, t) fuzzy topolojik uzayında fuzzy küme ve F_0, F kümesinin destek kümesi olsun. (F_0, t_{F_0}) alt uzayında boştan farklı $Q-$ayrılabilir A ve B kümeleri için $A \cup B = F$ sağlanıyorsa (X, t) uzayına bağlantısız uzay denir. Eğer (X, t) bağlantısız değilse bağlantılıdır denir [33].

Tanım 2.5.20. (X,T) klasik topolojik uzay olsun. $\tilde{T}=\{G:G, X$ üzerinde fuzzy küme ve $G_0\in T\}$ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojidir ve buna T den üretilen fuzzy topoloji denir. $\left(X,\tilde{T}\right)$ ikilisine (X,T) den üretilen fuzzy topolojik uzay denir.

Böylece eğer x_I, I üzerinde Öklid altuzay topoloji ise bu durumda $\left(I,\tilde{x}_I\right)$ ile (I,x_I) klasik topolojik uzayından üretilen fuzzy topolojik uzay gösterilir [33].

Lemma 2.5.21 (X,t) ve (Y,s) fuzzy topolojik uzaylar olsun. A ve B, X üzerinde sadece 0 ve 1 değerini alan fuzzy kümeler olsun ve $A\cup B=X$ sağlansın. $f:(A,t_A)\to(Y,s)$ ve $g:(B,t_B)\to(Y,s)$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$ ise bu durumda

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A \\ g(x) & x\in B \end{cases} \tag{2.37}$$

biçiminde tanımlanan $h:(X,t)\to(Y,s)$ fuzzy sürekli fonksiyondur [33].

Tanım 2.5.22. a_l ve b_h, (X,t) fuzzy topolojik uzayında iki fuzzy nokta olsun. $a:\left(I,\tilde{x}_I\right)\to(X,t)$ fuzzy sürekli fonksiyon olsun. A, $\left(I,\tilde{x}_I\right)$ uzayında bağlantılı ve $A(0)>0, A(1)>0$ olsun. Bu durumda (X,t) uzayında eğer $(a(0))_{A(0)}=a\left(0_{A(0)}\right)=a_l$ ve $(a(1))_{A(1)}=a\left(1_{A(1)}\right)=b_h$ ise $a(A)$ fuzzy kümesine a_l fuzzy noktasından b_h fuzzy noktasına giden fuzzy yol denir.

(X,t) fuzzy topolojik uzayında a_l fuzzy noktasından b_h fuzzy noktasına giden tüm fuzzy yolların ailesi $P(X,t)(a_l,b_h)$ ile gösterilir. (X,t) uzayında tüm fuzzy yolların ailesi $P(X,t)$ ile gösterilir [33].

Aşağıda fuzzy yollar için fuzzy homotopi tanımlanmaktadır.

Tanım 2.5.23. Aşağıdaki koşulları sağlayan $H:\left(I,\tilde{x}_I\right)\times\left(I,\tilde{x}_I\right)\to(X,t)$ fuzzy sürekli fonksiyonu varsa $P(X,t)\left(a_l,b_h\right)$ da $a(A),b(B)$ fuzzy yollarına uç noktalarına göre göreceli fuzzy homotopik denir.

$$
\begin{gathered}
(H(t,0))_{A(t)}=a\left(t_{A(t)}\right),(H(t,1))_{B(t)}=b\left(t_{B(t)}\right),t\in I \\
(H(0,s))_{A(0)}=a_l=(H(0,s))_{B(0)},(H(1,s))_{A(1)}=b_h=(H(1,s))_{B(1)},s\in I.
\end{gathered}
\tag{2.5.17}
$$

H fonksiyonuna uç noktalarına göre göreceli fuzzy homotopi denir ve $H:a(A)\cong b(B)$ biçiminde yazılır [33].

Lemma 2.5.24. $P(X,t)\left(a_l,b_h\right)$ üzerinde $\cong$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [33].

2.6. Fuzzy Modüller

Tanım 2.6.1. R bir halka (birimsiz olabilir), M bir sol(sağ) R modül ve $m:M\to[0,1]$ aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşüm olsun,

i) $m(x+y)\geq\min\{m(x),m(y)\},\quad x,y\in M$

ii) $m(-x)=m(x)$

iii) $m(0)=1$

iv) $m(rx)\geq m(x)\ \ [m(xr)\geq m(x)],\ \ r\in R$

bu durumda (M,m) ikilisine bir sol(sağ) fuzzy R modül denir [29].

Fuzzy kümelerde m, (M,m) fuzzy R modülünün derece fonksiyonu olarak ele alınmaktadır.

Tanım 2.6.2. (M,m) ve (N,h) fuzzy R modüller , $f:M\to N$ olmak üzere

$$\forall x\in M\ \ \textit{için}\ \ h(f(x))\geq m(x) \tag{2.38}$$

koşulu sağlanıyorsa f homomorfizmasına (M,m) fuzzy R modülünden (N,h) fuzzy R modülüne giden bir fuzzy R homomorfizma denir ve $\overline{f}:(M,m)\rightarrow(N,h)$ şeklinde gösterilir. $\overline{f}:(M,m)\rightarrow(N,h)$ R homomorfizması için $f:M\rightarrow N$ homomorfizmasına $\overline{f}$ nin esas R homomorfizması , M modülüne (M,m) fuzzy R modülünün esas modülü denir [24].

Lemma2.6.3. Her M modülü için grade fonksiyonların

$$S(M)=\{m:M\rightarrow[0,1]:(M,m)\ \textit{fuzzy}\ \text{mod}\,\textit{üldür}.\} \tag{2.39}$$

kümesi

$$\forall x\in M, m(x)\leq h(x)\Rightarrow m\leq h \tag{2.40}$$

sıralama bağıntısı altında bir tam latistir [24].

Lemma2.6.4. M ve N, R-modüller ve $f:M\rightarrow N$ bir R-homomorfizma olsun.
(i) Eğer (M,m) fuzzy R-modül ise N üzerinde h modüler grade fonksiyonu için

$$\bar{f}:(M,m)\rightarrow(N,h)\Leftrightarrow h\geq m^{f} \tag{2.41}$$

N üzerinde m^{f} modüler grade fonksiyonu vardır.

(ii) Eğer (N,h) fuzzy R-modül ise her (M,m) fuzzy R-modülü için

$$\bar{f}:(M,m)\rightarrow(N,h)\Leftrightarrow m\leq h_{f} \tag{2.42}$$

M üzerinde h_{f} modüler grade fonksiyonu vardır [24].

2.7. Fuzzy Zincir Kompleksler

Λ birimli bir halka her bir modül birimli bir Λ modül olsun. m_M modülünden r_N modülüne giden tüm fuzzy Λ modül homomorfizmaların $Hom_\Lambda(m_M, r_N)$ kümesi değişmeli bir gruptur [2].

Tanım 2.7.1. $\tilde{f} : m_A \to r_B$ fuzzy Λ modül homomorfizma olsun. f izomorfizma ise $\tilde{f}$ homomorfizmasına fuzzy quazi izomorfizma denir ve $m_A \approx_Q r_B$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.7.2. N, M modülünün bir alt modülü olsun. Bu durumda eğer her $x \in N$ için $m(x) \leq h(x)$ ise m_N modülüne h_N modülünün bir fuzzy alt modülü denir [2].

Tanım 2.7.3.

$$\mathbf{L} \to m_{n-1A_{n-1}} \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} m_{nA_n} \xrightarrow{\tilde{f}_n} m_{n+1A_{n+1}} \to \mathbf{L} \tag{2.43}$$

fuzzy Λ modül homomorfizmalarının dizisinde her n için $\operatorname{Im} \tilde{f}_{n-1} = \ker \tilde{f}_n$ sağlanıyorsa bu diziye fuzzy tam dizi denir. Burada $\operatorname{Im} \tilde{f}_{n-1} = m_n / \operatorname{Im} f_{n-1}$ ve $\ker \tilde{f}_n = m_n / \ker f_n$ biçimindedir.

$$\bar{0} \to m_A \xrightarrow{\tilde{f}} r_B \xrightarrow{\tilde{g}} h_C \to \bar{0} \tag{2.44}$$

fuzzy tam dizisine fuzzy kısa tam dizi denir [2].

Tanım 2.7.4. h_P fuzzy izdüşüm olmak üzere,

$$\bar{0} \to r_C \xrightarrow{\tilde{a}} h_P \xrightarrow{\tilde{b}} m_A \to \bar{0} \tag{2.45}$$

fuzzy Λ modüllerin kısa tam dizisine m_A modülünün fuzzy izdüşüm gösterimi denir [2].

Tanım 2.7.5. m_A ve h_B fuzzy Λ modülleri için

$$F-Ext_{\Lambda}^{\tilde{b}}\left(m_A, h_B\right) = co\ker\left(\tilde{a}^* : Hom_{\Lambda}\left(m_{0_P}, h_B\right) \rightarrow Hom_{\Lambda}\left(m_{0_C}, h_B\right)\right) \tag{2.46}$$

olarak tanımlanır ve $\tilde{j} : m_{0_C} \rightarrow h_B$ elemanı $[\tilde{j}] \in F-Ext_{\Lambda}^{\tilde{b}}\left(m_A, h_B\right)$ ile gösterilir [2].

Teorem 2.7.6. m_A fuzzy Λ-modülü için, $F-Ext_{\Lambda}^{\tilde{b}}\left(m_A, -\right)$, $\Lambda - fz\text{mod}$ kategorisinden değişmeli gruplar kategorisine giden kovaryant funktordur [2].

Tanım 2.7.7. r_1 fuzzy birebir dönüşümü ile birlikte fuzzy Λ modüllerin

$$\overline{0} \rightarrow m_B \xrightarrow{\tilde{d}} r_1 \xrightarrow{\tilde{s}} n_S \rightarrow \overline{0} \tag{2.47}$$

fuzzy Λ modüllerin kısa tam dizisine h_B modülünün fuzzy injektif gösterimi denir[2].

Tanım 2.7.8. h_B modülünün fuzzy injektif gösterimi m_A fuzzy Λ modülü için

$$F-\overline{Ext}_{\Lambda}^{\tilde{d}}\left(m_A, h_B\right) = co\ker\left(\tilde{h}_* : Hom_{\Lambda}\left(m_A, c_I\right) \rightarrow Hom_{\Lambda}\left(m_A, c^s\right)\right) \tag{2.48}$$

olarak tanımlanır.

fgm_{Λ}^{Z} fuzzy derece sol Λ modüllerin kategorisi olsun. fgm_{Λ}^{Z} kategorisinde bir q_M nesnesi $\Lambda - fz\text{mod}$ kategorisinin nesneleri olan $\left\{q_{M_i}^{i}\right\}, i \in Z$ ailesi, p dereceli $\tilde{f} : q_M \rightarrow q_M$ morfizması fuzzy modül homomorfizmaların $\left\{\tilde{f}_n : q_{M_i}^{i} \rightarrow q_{M_i+p}^{i}\right\}_{i \in Z}$ ailesidir [2].

Tanım 2.7.9. Λ üzerinde bir $q_C = \{q_{C_n}^n, \tilde{\partial}_n\}$ fuzzy zincir kompleksi fgm_Λ^Z kategorisinin bir nesnesidir.Burada $\tilde{\partial} : q_C \to q_C$, -1 dereceli fuzzy endomorfizmadır ve $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$ eşitliği sağlanır [2].

Aslında burada $\{q_{M_i}^i\}_{i\in Z}$ $\Lambda - fz$mod kategorisinin bir nesnesi, $\{\tilde{\partial}_n : q_{M_n}^n \to q_{M_{n-1}}^{n-1}\}_{n\in Z}$ $\Lambda - fz$mod kategorisinin morfizmalar ailesidir ve $\tilde{\partial}\tilde{\partial}_{n+1} = \tilde{0}$ sağlanır. Eğer $q_C = \{q_{C_n}^n, \tilde{\partial}_n\}$ fuzzy kompleks ise aşağıdaki gösterim kullanılır,

$$q_C : \mathbf{L} \to q_{M_{n+1}}^{n+1} \to q_{M_n}^n \to q_{M_{n-1}}^{n-1} \to \mathbf{L} \tag{2.49}$$

$\tilde{\partial}$ morfizmasına fuzzy sınır operatörü denir [2].

Tanım 2.5.25. İki fuzzy $\tilde{j}, \tilde{y} : q_C \to n_D$ fuzzy zincir dönüşüm arasında bir $\tilde{\Sigma} : \tilde{j} \to \tilde{y}$ fuzzy homotopi $\tilde{\Sigma} : q_C \to n_D$ fuzzy graded modüllerin $\tilde{y} - \tilde{j} = \tilde{\partial}\tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma}\tilde{\partial}$ koşulunu sağlayan $+1$ dereceli morfizmasıdır. Yani her $n \in Z$ için

$$\tilde{y} - \tilde{j} = \tilde{\partial}_{n+1}\tilde{\Sigma}_n + \tilde{\Sigma}_{n-1}\tilde{\partial}_n . \tag{2.50}$$

$\tilde{\Sigma} : \tilde{j} \to \tilde{y}$ fuzzy homotopi varsa $\tilde{j}, \tilde{y}$ dönüşümlerine fuzzy homotopik denir ve $\tilde{j} \cong \tilde{y}$ biçiminde yazılır. "$\cong$" fuzzy homotopi bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $\tilde{j} \cong \tilde{y} : q_C \to n_D$ ve $\tilde{j}' \cong \tilde{y}' : n_D \to h_E$ ise bu durumda $\tilde{j}'\tilde{j} \cong \tilde{y}'\tilde{y} : q_C \to h_E$ sağlanır [2].

2.8. Tensör Çarpımları

Tanım.2.8.1. M_R ve ${}_R N$ sırasıyla sağ ve sol R-modüller ve A abelian grup olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $s : M \times N \to A$ dönüşümüne ikili toplamsal ve dengede denir [24].

i) $\forall m_1, m_2 \in M$ ve $n_1, n_2 \in N$ için $s\left(m_1 + m_2, n_1\right) = s\left(m_1, n_1\right) + s\left(m_2, n_2\right)$, $s\left(m_1, n_1 + n_2\right) = s\left(m_1, n_1\right) + s\left(m_2, n_2\right)$.

ii) $\forall m \in M, n \in N, r \in R$ için $s\left(mr, n\right) = \left(m, rn\right)$.

M_R ve ${}_R N$ modülleri için $I = I_{M,N}$ kategorisinin nesneleri $s : M \times N \rightarrow A$ ikili toplamsal dengede dönüşümlerdir. I kategorisinde iki $s_1 : M \times N \rightarrow A_1$, $s_2 : M \times N \rightarrow A_2$ nesnesi için $q : s_1 \rightarrow s_2$ morfizması $qs_1 = s_2$ koşulunu sağlayan $q : A_1 \rightarrow A_2$ grup homomorfizmasıdır. M ve N modüllerinin tensör çarpımı I kategorisinin başlangıç nesnesi olarak tanımlanır. Tensör çarpımı vardır ve izomorfizma altında tektir [24].

$\left(M_R, m_R\right)$ fuzzy sağ R- modülü ile $\left({}_R N, {}_R n\right)$ fuzzy sol R-modülünün tensör çarpımı aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$fz - I$ nesneleri tüm $f : (M \times N, m \times n) \rightarrow (A, a)$ bi-additive dengede fuzzy dönüşümlerdir. Burada $(A, a) \in fz - Ab$ ve $m \times n =_Z m \times_Z n$, $fz - Ab$ kategorisinde çarpım derece fonksiyondur. Yani her $(m, n) \in M \times N$ için $(m \times n)\,(m, n) = \text{Min}\{m(m), n\,(n)\}$ sağlanır [24].

$s_1 : (M \times N, m \times n) \rightarrow \left(A_1, a_1\right)$ ve $s_{21} : (M \times N, m \times n) \rightarrow \left(A_2, a_2\right)$ nesneleri için $q : s_1 \rightarrow s_2$ morfizması $qs_1 = s_2$ olacak şekilde $q : \left(A_1, a_1\right) \rightarrow \left(A_2, a_2\right)$ fuzzy grup homomorfizmasıdır. (M, m) ve (N, n) fuzzy modüllerinin tensör çarpımı $fz - I$ kategorisinin başlangıç nesnesidir. $fz - I$, I üzerinde bir Top kategori olduğundan $fz - I$ gösterimi doğru bir gösterimdir. $s : I \rightarrow C - Lat$ funktoru

$s(s : M \times N \rightarrow A) = \{a \in s({}_Z A) \mid s : (M \times N, m \times n) \rightarrow (A, a)$ fz-Set kategorisinde morfizmadır. $\}$ (2.51)

üzerinde alınsın. $s(s)$ bir tam latistir ve eğer $s_1 : M \times N \rightarrow A_1$, $s_2 : M \times N \rightarrow A_2$, I kategorisinde nesneler ise $q \in Hom\left(s_1, s_2\right)$ olmak üzere $s(q) : s\left(s_2\right) \rightarrow s\left(s_1\right)$,

$s(q): s({}_Z A_2) \to s({}_Z A_1)$ in $s(s_2)$ ye kısıtlanmasıdır. $a_2 \in s(s_2)$, $s(q)(a_2) \in s(s_1)$ olup olmadığını görmek için $(s(s_1)s(q))(a_2) > m \times n$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $s: Sets \to C-Lat$ kontravaryant funktordur ve bundan ötürü $s(s_1)s(q) = s(qs_1) = s(s_2)$ sağlanır. $I^s \cong fz-I$ olduğu kolayca gösterilebilir [24].

$M \times N$ üzerinde $m \otimes n$ derece fonksiyonu için

$$(M \times N, m \times n) = (M, m) \otimes (N, n) \tag{2.52}$$

formülünün sağlandığını göstermek yerine $(M, m) \otimes (N, n)$ çarpımının varlığını gösterilmektedir. $p: M \times N \to M \otimes N$, M ve N modüllerinin tensör çarpımı olsun. p bi-additive $R-$dengede dönüşümdür ve özel olarak p Set kategorisinin bir nesnesidir. Açıktır ki

$$p: (M \times N, m \times n) \to (M \otimes N, m \otimes n) \tag{2.53}$$

$fz-I$ kategorisinde bir nesnedir. Eğer $s\,(M \times N, m \times n) \to (A, a)$ $fz-I$ kategorisinin keyfi bir nesnesi ise I kategorisinde $y: M \otimes N \to A$ vardır ve $yp = s$ sağlanır. $s(y)(a)$, $M \otimes N$ üzerinde bir grup derece fonksiyon olduğundan $s(s)(a) \geq m \times n$ ve $s(s) = s(yp) = s(p)s(y)$ sağlanır. Buradan $s(p)s(y)(a) \geq m \times n$ sağlanır. Bundan ötürü $s(y)(a) \geq t(p)(m \times n)$ ve böylece $s(y)(a) \geq m \otimes n$ sağlanır. $p: M \times N \to M \otimes N$ I kategorisinde başlangıç nesnesi olduğundan teklik sağlanır. (M_R, m_R) ve $({}_R N, {}_R n)$ fuzzy modüllerin tensör çarpımı için $(M \otimes N, m \otimes n)$ gösterimini kullanılmaktadır.

$(M_R, m), (M'_R, m'), ({}_R N, n)\,({}_R N', n')$ fuzzy modüller ve

$f: (M_R, m) \to (M'_R, m')$, $g: ({}_R N, n) \to ({}_R N', n')$

fuzzy R-homomorfizmalar olsun. f ve g nin $f \otimes g$ tensör çarpımı $f \otimes g : (M \otimes N, m \otimes n) \to (M' \otimes N', m' \otimes n')$ dönüşümüdür. Bunun varlığı

$$(M \times N, m \times n) \xrightarrow{(f,g)} (M' \times N', m' \times n') \xrightarrow{p} (M' \otimes N', m' \otimes n') \tag{2.54}$$

bileşkesi ikili toplamsal ve dengede olmasından elde edilir. Burada $(f,g)(m,n) = (f(m), g(n))$ sağlanır ve bundan ötürü (f,g) fuzzy dönüşümdür.

${}_S M_R$ $S-R-$bimodül olsun. $m \in s({}_S M) \cap s(M_R)$ için (M,m) fuzzy bi-modül tanımlanabilir. Yani $m : M \to [0,1]$, $m(x+y) \geq \min\{m(x), m(y)\}$ ve $m(x) \leq \min\{m(xa), m(bx)\}$ $\forall x, y \in M, a \in R, b \in S$ sağlanır [24].

Lemma 2.8.2. Eğer $({}_S M_R, m)$ fuzzy $S-R-$bi-modül ve $({}_R N, n)$ fuzzy sol $R-$modül ise bu durumda $(M \otimes_R N, m \otimes n)$ fuzzy sol $S-$modüldür [24].

Lemma 2.8.3. Her fuzzy sağ $R-$modül için

$$(M_R, m), (R,1) \otimes (M,m) \cong (M,m) \tag{2.55}$$

sağlanır [24].

Lemma 2.8.4. [24] R,S halkalar M_R, ${}_R N_S$ ve ${}_S P$ modüller olsun. Eğer n fuzzy $R-S$ bi-modül derece fonksiyon ve p , P üzerinde fuzzy $S-$modül derece

fonksiyon ise

$$((M,1) \otimes_R (N,n)) \otimes_S (P,p) \cong (M,1) \otimes_R ((N,n) \otimes_S (P,p)) \tag{2.56}$$

sağlanır.

2.9. Ters Limitler

Tanım 2.9.1. I kategori olarak ele alınan yönlendirilmiş küme olmak üzere I^{op} kategorisinden A kategorisine giden her D funktoruna A kategorisinde ters sistem denir. Her $D: I^{op} \to A$ ters sisteminin limiti varsa A kategorisinin ters limiti vardır denir. Dual olarak A kategorisinde düz sistem, direk limit kavramları tanımlanabilir [10].

$S((L^X, d)) = X$ ve $S(F) = f$ biçiminde tanımlı $S : LTop \to Set$ funktoruna destek funktoru denir [10].

Teorem 2.9.2. $S : LTop \to Set$ support funktoru topolojik funktordur [10].

Sonuç 2.9.3. $LTop$ kategorisi tamdır ve kotamdır. $LTop$ kategorisinde ters limitler ve düz limitler vardır [10].

Teorem 2.9.4. $D(i) = (L^{X_i}, d_i)$ ve $i \leq j$ koşulunu sağlayan her $i, j \in I$ için $D(i \leq j) = F_{ji} : D(j) \to D(i)$ olmak üzere $D : I^{op} \to LTop$, $LTop$ kategorisinde bir ters sistem olsun. (A_i, P_i), $\{D(i)\}_{i \in I}$ ailesinin çarpımı olsun, yani $A = (L^X, d)$, $\{D(i)\}_{i \in I}$ ailesinin çarpım $L-$ *fuzzy* topolojik uzay olsun. $P_i : A \to D(i)$ $L-$değerli projektif Zadeh fonksiyonları olsun,

$$Y = \{y \in X : F_{ji} \circ P_j(y_a) = P_i(y_a), a \in M(L); i, j \in I; i \leq j\}. \tag{2.57}$$

Bu durumda $((L^Y, d|_Y), P_i|_Y)$, D ters sisteminin bir ters limitidir [10].

Sonuç 2.9.5. $D : I^{op} \to LTop$ bir ters sistem ve $S : LTop \to Set$ support fonksiyon olsun. Bu durumda $((L^Y, e), Q_i)$ limitinin D ters sisteminin ters limiti olması için gerek ve yeter koşul (Y, q_i) limitinin $S \circ D$ ters sisteminin ters limiti olmasıdır [10].

BÖLÜM 3. FUZZY KÜMELERDE HOMOLOJİ TEORİ

(X,t) bir topolojik uzay ve $A \in F(X)$ bir fuzzy küme olsun. Buradan (A,t^*) fuzzy topolojik uzayı elde edilir [7].

Tanım 3.1. (A,t^*) fuzzy topolojik uzayının her fuzzy açık örtümünün sonlu alt örtümü varsa (A,t^*) topolojik uzayına fuzzy kompakt topolojik uzay denir [8].

Önerme 3.2. (A,t^*) fuzzy topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $l \in [0,1]$ için (A_l, t_l^*) topolojik uzayının kompakt olmasıdır[13].

İspat.$\Rightarrow$. Her $l \in [0,1]$ için $\{G_l^{(i)}\}$ ailesi (A_l, t_l^*) uzayının bir açık örtümü olsun. $A = \bigcup_l lA_l$, $A = \bigcup_l l\left(\bigcup_i G_l^{(i)}\right) = \bigcup_{l,i} lG_l^{(i)}$ olduğundan $\{G^{(i)}\}$ ailesi (A,t^*) fuzzy topolojik uzayının bir açık örtümüdür. (A,t^*) fuzzy kompakt uzay olduğundan, bu örtümün $A = \overset{n}{\underset{k=1}{\vee}} G^{i_k}$ olacak biçimde sonlu alt örtümü vardır. Her $l \in [0,1]$ için $A_l = \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}} G^{i_k} \right)_l = \bigcup_{i=1}^{n} G_l^{i_k}$ olduğundan $\{G_l^{i_k}\}$ ailesi $\{G_l^{(i)}\}$ örtümünün bir alt örtümüdür. Böylece $(A_l, t_l^{\ *})$ kompakttır.

$\Leftarrow$. Her $l \in [0,1]$ için $(A_l, t_l^{\ *})$ kompakt uzay ve $\{G^{(i)}\}$ ailesi (A, t^{*}) fuzzy topolojik uzayının keyfi fuzzy açık örtümü olsun. Bu durumda her $l \in [0,1]$ için $\{G_l^{(i)}\}$ ailesi $(A_l, t_l^{\ *})$ topolojik uzayının bir açık örtümüdür. $(A_l, t_l^{\ *})$ kompakt uzay olduğundan bu örtümün $\{G_l^{i_{k_l}}\}_{k_l = \overline{1, n_l}}$ gibi sonlu alt örtümü vardır. $l = 0$ iken $A_0 = X$ uzayının $\{G_0^{i_{k_0}}\}$ örtümü için $G_l^{i_{k_0}} = G_0^{i_{k_0}} \cap A_l$ elde edilir. $\{G_l^{i_{k_0}}\}_{k_0 = \overline{1, n_0}}$ ailesi $(A_l, t_l^{\ *})$ topolojik uzayının sonlu alt örtümüdür. Böylece her $(A_l, t_l^{\ *})$ uzayının sonlu örtümünü aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Her $l \in [0,1]$ için $\{G_l^{i_{k_l}}\}_{k_l = \overline{1, n_0}}$ ailesi $(A_l, t_l^{\ *})$ uzayının sonlu bir örtümüdür. $l_1 < l_2$ için $G_{l_2}^{i_{k_{l_2}}} = A_{l_2} \cap G_{l_1}^{i_{k_{l_1}}}$ elde edilir.

Böylece $\{G^{i_k}\}_{k = \overline{1, n_0}}$ ailesi (A, t^{*}) fuzzy topolojik uzayının sonlu fuzzy açık örtümüdür, yani (A, t^{*}) uzayı fuzzy kompakttır.

Tanım 3.3. (A, t^{*}) fuzzy topolojik uzayında her farklı iki x_r ve y_s $(x \neq y)$ fuzzy noktası için bu noktaların ayrık fuzzy açık komşulukları varsa (A, t^{*}) fuzzy topolojik uzayına fuzzy Hausdorff uzay denir [36].

Önerme 3.4. (A, t^{*}) fuzzy topolojik uzayının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $l \in [0,1]$ için $(A_l, t_l^{\ *})$ uzayının Hausdorff uzayı olmasıdır [13].

İspat. $\Rightarrow$. $z_1 \neq z_2 \in A$ farklı iki nokta olsun. Bu durumda $A(x_1) = z_1$ ve $A(x_2) = z_2$ eşitliklerini sağlayan $x_1 \neq x_2 \in X$ vardır. $(x_1)_{A(x_1)}, (x_2)_{A(x_2)}$ fuzzy noktaları (A, t^*) fuzzy topolojik uzayı üzerinde ayrık noktalardır. (A, t^*) fuzzy topolojik uzayı Hausdorff uzayı olduğundan

$$(x_1)_{A(x_1)} < G_1,\ (x_2)_{A(x_2)} < G_2,\quad G_1 \wedge G_2 = 0 \tag{3.1}$$

olacak biçimde $G_1, G_2 \in t^*$ kümeleri vardır.

Bu durumda $(G_1)_l, (G_2)_l$ kümeleri (A_l, t_l^*) uzayı üzerinde açık kümelerdir ve $(G_1)_l \cap (G_2)_l = (G_1 \cap G_2)_l = \varnothing$ elde edilir. $A(x_1) = z_1 \in (G_1)_l$ ve $A(x_2) = z_2 \in (G_2)_l$ olduğundan (A_l, t_l^*) uzayı Hausdorff uzayıdır.

$\Leftarrow$. Her $l \in I$ için (A_l, t_l^*) uzayı Hausdorff uzayı ve x_r, y_s $(x \neq y)$ keyfi iki ayrık fuzzy nokta olsun. $x \neq y \in X$ ve $A_0 = X$ olduğundan $x, y \in A_l$ olacak biçimde en az bir $l \in I$ vardır. l^* bu koşulu sağlayan en büyük sayı olsun. Bu durumda her $l > l^*$ için x veya y noktalarından biri A_l uzayına ait değildir. $x \neq y \in A_{l^*}$ ve $(A_{l^*}, t_{l^*}^*)$ Hausdorff uzayı olduğundan

$$x \in U_{l^*},\ y \in V_{l^*},\ U_{l^*} \cap V_{l^*} = \varnothing \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan $U_{l^*}, V_{l^*} \in t_{l^*}$ açık kümeleri vardır.

Benzer biçimde her $l < l^*$ $x, y \in A_l$ olduğundan

$$x \in U_l,\ y \in V_l,\quad U_l \cap V_l = \varnothing \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan $U_l, V_l \in t_l$ vardır.

$l > l^*$ için (A_l, t_l) uzayı üzerinde $U_l = U_{l^*} \cap A_l$, $V_l = V_{l^*} \cap A_l$ alınsın. $U_l \cap V_l = \emptyset$ olduğu açıktır. Bu durumda $U = \bigcup_l l\, U_l$, $V = \bigcup_l l\, V_l$ kümeleri uygun x_r, y_s fuzzy noktalarını kapsayan (A, t^*) uzayı üzerinde ayrık fuzzy açık kümelerdir, yani (A, t^*) fuzzy uzayı Hausdorff uzayıdır.

Açıktır ki her fuzzy Hausdorff uzayın kompakt alt kümesi kapalıdır.

Tanım 3.5. (A, t^*) uzayında U fuzzy kompakt olmak üzere her x_t fuzzy noktası için $x_t \in U$ koşulunu sağlayan bir $U \in t^*$ fuzzy açık küme varsa (A, t^*) fuzzy topolojik uzayına fuzzy yerel kompakt denir [39].

Önerme 3.6. (A, t^*) fuzzy topolojik uzayının fuzzy lokal kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $l \in [0,1]$ için (A_l, t_l^*) uzayının yerel kompakt olmasıdır [13].

İspat.$\Rightarrow$. Eğer $z \in A_l$ keyfi bir nokta ise bu durumda $A(x) = z$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. $x_{A(x)}$ noktası (A, t^*) uzayı üzerinde bir fuzzy noktadır. (A, t^*) fuzzy yerel kompakt olduğundan $G \in t^*$ açık kompakt komşuluk vardır ve $x_{A(x)} \in G$ elde edilir. Bu durumda $A(x) = z$ noktasını içeren G_l kümesi , (A_l, t_l^*) uzayı üzerinde açık kompakt kümedir, yani (A_l, t_l^*) uzayı yerel kompakttır.

$\Leftarrow$. $l \in I$ için (A_l, t_l^*) yerel kompakt uzay ve $x_r \in A$ keyfi fuzzy nokta olsun . $A_0 = X$ olduğundan $x \in A_l$ olacak biçimde en az bir $l \in I$ vardır. l^* bu koşulu sağlayan en küçük sayı olsun. Bu durumda her $l < l^*$ için x noktası A_l uzayına aittir. Her $l \geq l^*$ için $x \in A_l$ sağlanır. (A_l, t_l^*) uzayı yerel kompakt olduğundan $x \in U_l, U_l \in t^*$ olacak biçimde açık kompakt komşuluk vardır. Böylece $U = \bigcup_l l\, U_l$ kümesi x_r fuzzy noktasının fuzzy açık kompakt komşuluğudur.

Açıktır ki eğer (A,t^*) uzayı fuzzy Hausdorff uzay ise bu durumda (A,t^*) uzayının lokal kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $x_r \in A$ noktasının her $x_r \in G$ açık komşuluğu için

$$x_t \in V\,,\ \overline{V} \le U\,,\quad \overline{V} - \text{kompakt} \tag{3.4}$$

olacak biçimde V açık kümesinin var olmasıdır.

(A,t_1^*), (B,t_2^*) iki topolojik uzay , $B^A = \{f : A \to B \mid f \text{ fuzzy süreklidir.}\}$,

$$\begin{aligned} \Re &= \{K \le A : K, (A,t_1^*) \text{ fuzzy kompakttır.}\} \\ \aleph &= \{V \le A : V, (B,t_2^*) \text{ açıktır.}\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

olsun. Her $K \in \Re$ and $V \in \aleph$ için

$$N_{K,V} = \{f \in B^A : f(K) \le V\} \tag{3.6}$$

alınsın. $\{N_{K,V} : K \in \Re,\ V \in \aleph\}$ alt taban gibi ele alınarak B^A üzerinde üretilen fuzzy topolojiye fuzzy kompakt-açık topoloji denir. B^A fuzzy kümesine bu topoloji ile birlikte bir fuzzy kompakt-açık topolojik uzay denir [8].

$B^A = \bigcup\limits_{l \in (0,1]} l\left(B_l^{A_l}\right)$ olduğundan $B_l^{A_l}$ uzayı üzerinde her $l \in [0,1]$ için $\left(A_l, t_{1_l}^*\right), \left(B_l, t_{2_l}^*\right)$ uzaylarından üretilen kompakt açık topoloji verilir.

$e : B^A \times A \to B$ dönüşümü her bir $x_r \in A$ fuzzy noktası için $e(f, x_r) = f(x_r)$ olarak tanımlanır ve $f \in B^A$ dönüşümüne fuzzy evaluation(değerlendirme) dönüşümü denir [8]. Bu dönüşüm

$$e_l : B_l^{A_l} \times A_l \to B_l\ ,\ l \in [0,1] \tag{3.7}$$

biçiminde belirlenir. Her $l \in [0,1]$ için e_l dönüşümü sürekli olduğundan e fuzzy dönüşümü de süreklidir.

A, B, C fuzzy topolojik uzaylar ve $f : C \times A \to B$ fuzzy sürekli dönüşüm olsun. Bu dönüşümü kullanarak $\hat{f}(x_r)(y_s) = f(y_s, x_r)$ ile $\hat{f} : A \to B^C$ fuzzy dönüşümü tanımlanabilir. Her $l \in [0,1]$ için $f : C \times A \to B$ fuzzy dönüşümü $f_l : C_l \times A_l \to B_l$ dönüşümünü üretir [15]. Aynı zamanda f_l dönüşümü $\hat{f}_l : A_l \to {B_l}^{C_l}$ dönüşümünü üretir.

Teorem 3.7. C fuzzy yerel kompakt Hausdorff uzayı ve A, B keyfi fuzzy topolojik uzaylar olsun. Bu durumda $f : C \times A \to B$ dönüşümünün fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\hat{f} : A \to B^C$ dönüşümünün fuzzy sürekli olmasıdır [13].

İspat. Eğer $f : C \times A \to B$ sürekli ise her $l \in [0,1]$ için $f_l : C_l \times A_l \to B_l$ dönüşümü süreklidir. Bu durumda her $l \in [0,1]$ için $\hat{f}_l : A_l \to {B_l}^{C_l}$ süreklidir [7]. Her $l \in [0,1]$ için eğer $\hat{f}_l$ sürekli ise $\hat{f} : A \to B^C$ fuzzy sürekli dönüşümdür.

Benzer biçimde teoremin diğer kısmı ispatlanır. $\hat{f}$ sürekli dönüşüm olduğundan her $l \in [0,1]$ için $\hat{f}_l$ sürekli dönüşümü elde edilir. Aynı zamanda $\hat{f}_l$ sürekli olduğundan $f_l : C_l \times A_l \to B_l$ sürekli dönüşümdür. Böylece $f : C \times A \to B$ fuzzy dönüşümü süreklidir.

Benzer olarak topolojik uzaylarda olduğu gibi fuzzy topolojik uzaylar üzerinde $E : B^{C \times A} \to \left(B^C\right)^A$ fuzzy ekspiyonensal dönüşüm

$$E(f) = \hat{f}, \quad E(f)(x_r)(z_s) = f(z_s, x_r) = \left(\hat{f}(x_r)\right)(z_s) \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlanır [37,8].

Her $l \in [0,1]$ için E dönüşümünden $E_l : B_l^{C_l \times A_l} \to \left(B_l^{C_l}\right)^{A_l}$ dönüşümü üretilir. E dönüşümünün birebir, örten, fuzzy sürekli ve açık olması için gerek ve yeter koşul her $l \in [0,1]$ için E_l dönüşümünün birebir, örten, sürekli ve açık olmasıdır [15,18].

Teorem 3.8. A ve C fuzzy lokal kompakt Hausdorff uzaylar olsun. Bu durumda her B fuzzy topolojik uzayı için

$$E : B^{C\times A} \to \left(B^C\right)^A \tag{3.9}$$

fuzzy ekspiyonensal dönüşüm bir fuzzy homeomorfizmadır [13].

X bir topolojik uzay ve $A \in F(X)$ bir fuzzy küme olsun. (A, t^*) fuzzy topolojik uzay, her $l \in I$ için $(A_l, t_l^{\,*})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer $l_1 < l_2$ ise $(A_{l_2}, t_{l_2}^{\,*})$ uzayı $(A_{l_1}, t_{l_1}^{\,*})$ topolojik uzayının alt uzayıdır. $i_{l_1}^{l_2} : A_{l_2} \to A_{l_1}$ gömme dönüşümü olmak üzere,

$$\left(\{A_l\}_{l\in I}, \{i_{l_1}^{l_2} : A_{l_2} \to A_{l_1}\}\right) \tag{3.10}$$

ailesi topolojik uzayların ters spektridir.

Topolojik uzayların ters spektrine $H_q\left(H^q\right)$ homoloji (kohomoloji) funktoru uygulanırsa

$$\left(\{H_q(A_l)\}, \{\left(i_{l_1}^{l_2}\right)_* : H_q\left(A_{l_2}\right) \to H_q\left(A_{l_1}\right)\}_{l_1<l_2}\right) \tag{3.11}$$

$$\left[\ \left(\{H_q(A_l)\}, \{\left(i_{l_1}^{l_2}\right)_* : H_q\left(A_{l_2}\right) \to H_q\left(A_{l_1}\right)\}_{l_1<l_2}\right)\ \right]$$

grupların ters (düz) spektri elde edilir.

Tanım 3.9. $H_q(A,t^*) := \underset{\overleftarrow{l\in I}}{\lim} H_q(A_l)$ $[H^q(A,t^*) := \underset{\overrightarrow{l\in I}}{\lim} H^q(A_l)]$ grubuna (A,t^*) fuzzy topolojik uzayının q boyutlu homoloji (kohomoloji) grubu denir.

$A' \le A$ olmak üzere (A, A') ikilisi ele alınsın. Her $l \in I$ için $A'_l \subset A_l$ olduğundan

$$\left(\left\{(A_l, A'_l)_{l\in I}, \left\{i_{l_1}^{l_2} : (A_{l_2}, A'_{l_2}) \to (A_{l_1}, A'_{l_1})\right\}_{l_1<l_2}\right\}\right) \tag{3.12}$$

topolojik uzaylar çiftinin ters spektridir. Bu ters spektre homoloji (kohomoloji) funktoru uygulanırsa

$$\left(\left\{H_q(A_l, A'_l), \left\{(i_{l_1}^{l_2})_* : H_q(A_{l_2}, A'_{l_2}) \to H_q(A_{l_1}, A'_{l_1})\right\}_{l_1<l_2}\right\}\right) \tag{3.13}$$

$$\left[\ \left(\left\{H^q(A_l, A'_l), \left\{(i_{l_1}^{l_2})^* : H^q(A_{l_2}, A'_{l_2}) \to H^q(A_{l_1}, A'_{l_1})\right\}_{l_1<l_2}\right\}\right)\ \right]$$

grupların ters (düz) spektri elde edilir.

Tanım 3.10. $H_q(A, A') := \underset{\leftarrow}{\lim} H_q(A_l, A'_l)$ grubuna (A, A') fuzzy topolojik uzaylar çiftinin q boyutlu göreceli homoloji grubu denir.

A, B fuzzy kümeler ve $f : A \to B$ olmak üzere,

$$\underline{f} = \left(1_I : I \to I, \{f_l : A_l \to B_l\}\right) : \left(\{A_l\}, \left\{i_{l_1}^{l_2} : A_{l_2} \to A_{l_1}\right\}\right) \longrightarrow \left(\{B_l\}, \left\{j_{l_1}^{l_2} : B_{l_2} \to B_{l_1}\right\}\right)$$
(3.14)

topolojik uzayların ters spektrlerinin morfizması olmaktadır. Bu morfizmaya $H_q\ (H^q)$ homoloji funktoru uygulanırsa,

$$H_q\left(\underline{f}\right) = \left\{1_I : I \to I, \left\{H_q(f_l) = f_{l*} : H_q(A_l) \to H_q(B_l)\right\}\right\} : \left\{H_q(A_l)\right\} \longrightarrow \left\{H_q(B_l)\right\}$$
(3.15)

grupların ters (düz) spektrlerin morfizması elde edilir. O halde ,

$$\underset{\leftarrow}{\lim} H_q\left(\underline{f}\right): H_q(A) \to H_q(B) \ \left[\ \underset{\rightarrow}{\lim} H^q\left(\underline{f}\right): H^q(A) \to H^q(B)\ \right] \tag{3.16}$$

homoloji (kohomoloji) grupların homomorfizmasıdır.

Teorem 3.11.

A **a** $H_q(A)$ $\left[H^q(A)\right]$

$$f : A \to B \ \ \mathbf{a} \ \ \underset{\leftarrow}{\lim} H_q\left(\underline{f}\right) \ \left[\ \underset{\rightarrow}{\lim} H^q\left(\underline{f}\right)\ \right] \tag{3.17}$$

karşı gelmesi fuzzy topolojik uzaylar kategosinden gruplar kategorisine giden bir kovaryant (kontravaryant) funktordur.

Tanım 3.12. (A,t_1) ve (B,t_2) fuzzy topolojik uzaylar ve $f,g : A \to B$ fuzzy sürekli dönüşümler olsun. Eğer her $l \in I$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $F : A \times I \to B$ fuzzy sürekli fonksiyonu varsa f , g ile fuzzy homotoptur denir ve $f \sim g$ biçiminde yazılır.

$$F_l(x,0) = f_l(x)$$
$$F_l(x,1) = g_l(x)$$
$$F_l(x,t) = f_l^t(x). \tag{3.18}$$

Teorem 3.13. Eğer $f,g : A \to B$ fuzzy homotop ise

$$\underset{\leftarrow}{\lim} H_q\left(\underline{f}\right) = \underset{\leftarrow}{\lim} H_q\left(\underline{g}\right) \qquad \left[\ \underset{\rightarrow}{\lim} H^q\left(\underline{f}\right) = \underset{\rightarrow}{\lim} H^q\left(\underline{g}\right)\ \right] \tag{3.19}$$

sağlanır. Yani homoloji gruplar homotopik invaryanttır.

İspat: $f, g : A \to B$ fuzzy homotop dönüşümler olsun. Bu durumda her $l \in I$ için $f_l, g_l : A_l \to B_l$ dönüşümleri homotoptur. f ve g aşağıdaki ters spektrlerin morfizmasını belirler.

$$\underline{f} = (1_I : I \to I, \{f_l : A_l \to B_l\})$$
$$\underline{g} = (1_I : I \to I, \{g_l : A_l \to B_l\}) \tag{3.20}$$

Her $l \in I$ için $f_l \sim g_l$ olduğundan $\underline{f}, \underline{g}$ spektral homotoptur.

$$\left\{H_q\left(\underline{f}\right)\right\}, \left\{H_q\left(\underline{g}\right)\right\} : \{H_q(nerva)\} \longrightarrow \{H_q(nervb)\}$$

grupların ters spektrinin kanonik homotop morfizmalarıdır. O halde [14] den $\lim\limits_{\leftarrow} H_q\left(\underline{f}\right) = \lim\limits_{\leftarrow} H_q\left(\underline{g}\right)$ elde edilir.

(A, A') çifti alınsın her $l \in I$ için (A_l, A'_l) çiftinin homoloji (kohomoloji) gruplarının tam dizisi aşağıdaki şekildedir.

$$\mathbf{L} \to H_q(A'_l) \xrightarrow{a_l} H_q(A_l) \xrightarrow{p_l} H_q(A_l, A'_l) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A'_l) \to \mathbf{L}$$
$$[\ \mathbf{L} \to H^q(A'_l) \xleftarrow{a_l} H^q(A_l) \xleftarrow{p_l} H^q(A_l, A'_l) \xleftarrow{\partial_*} H^{q-1}(A'_l) \to \mathbf{L}\ ] \tag{3.21}$$

Burada $a_l : A'_l \to A_l$, $p_l : A_l \to (A_l, A'_l)$ gömme dönüşümleridir. Bu dizi $H(A_l, A'_l)$ ile gösterilsin. Her $l_1 < l_2$ için $i_{l_1}^{l_2} : \left(A_{l_2}, A'_{l_2}\right) \to \left(A_{l_1}, A'_{l_1}\right)$ gömme dönüşümü ise

$$\left(\{H(A_l, A'_l)\}_{l \in I}, \left\{\left(i_{l_1}^{l_2}\right)_* : H\left(A_{l_2} A'_{l_2}\right) \to H(A_l, A'_l)\right\}_{l_1 < l_2}\right)$$
$$[\ \left(\{H^q(A_l, A'_l)\}, \left\{\left(i_{l_1}^{l_2}\right)^* : H^q\left(A_{l_2}, A'_{l_2}\right) \to H^q\left(A_{l_1}, A'_{l_1}\right)\right\}_{l_1 < l_2}\right)\ ] \tag{3.22}$$

homoloji tam dizilerin ters (düz) spektri olmaktadır. Bu ters (düz) spektrin limitine

$$\mathbf{L} \to H_q(A') \longrightarrow H_q(A) \longrightarrow H_q(A, A') \longrightarrow H_{q-1}(A') \to \mathbf{L} \tag{3.23}$$

(A, A') çiftinin homoloji (kohomoloji) dizisi denir. Tam dizilerin ters spektrinin limiti genellikle tam değildir.

Teorem 3.16. (A, A') fuzzy kompakt uzaylar çifti olsun. Bu durumda

$$\mathbf{L} \to H_q(A') \xrightarrow{a} H_q(A) \xrightarrow{p} H_q(A, A') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A') \to \mathbf{L} \tag{3.24}$$

dizisi tamdır .

İspat: (A, A') çifti fuzzy kompakt fuzzy topolojik uzay ise her $l \in I$ için (A_l, A_l') çifti de kompakt topolojik uzaylar çiftidir. [9] dan $H_q(A_l'), H_q(A_l), H_q(A_l, A_l')$ kompakt gruplardır. Böylece her $l \in I$ için

$$\mathbf{L} \to H_q(A_l') \xrightarrow{a_l} H_q(A_l) \xrightarrow{p_l} H_q(A_l, A_l') \xrightarrow{\partial_{l*}} H_{q-1}(A_l') \to \mathbf{L} \tag{3.25}$$

dizisi kompakt grupların tam dizisidir. Bu dizi $\lfloor H_q(A, A') \rfloor_l$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\left(\{H(A_l, A_l')\}_{l \in I}, \left\{ (i_{l_1}^{l_2})_* : H(A_{l_2} A_{l_2}') \to H(A_l, A_l') \right\}_{l_1 < l_2} \right) \tag{3.26}$$

Kompakt grupların tam dizisinin ters spektridir. [9] dan bu şekildeki dizinin ters limiti tamdır. Böylece (A, A') kompakt fuzzy topolojik uzaylar çifti için homoloji grupların aşağıdaki dizisi tamdır,

$$\mathbf{L} \to H_q(A') \xrightarrow{a} H_q(A) \xrightarrow{p} H_q(A, A') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A') \to \mathbf{L} \tag{3.27}$$

Teorem 3.17. Her (A, A') fuzzy topolojik uzaylar çifti için kohomoloji grupların

$$\mathbf{L} \leftarrow H^q(A') \xleftarrow{a} H^q(A) \xleftarrow{p} H^q(A, A') \xleftarrow{\partial_*} H^{q-1}(A') \leftarrow \mathbf{L} \tag{3.28}$$

dizisi tamdır.

İspat: Her $l \in I$ için (A_l, A_l') topolojik uzaylar çiftinin

$$\mathbf{L} \to H^q(A_l') \xleftarrow{a_l} H^q(A_l) \xleftarrow{p_l} H^q(A_l, A_l') \xleftarrow{\partial_*} H^{q-1}(A_l') \to \mathbf{L} = [H^q(A, A')]$$

dizisi tamdır. O halde

$$[\ \{\{H(A_l, A_l'), \{(i_{l_1}^{l_2})^* : H(A_{l_2}, A_{l_2}') \to H(A_{l_1}, A_{l_1}')\}_{l_1 < l_2}\}\}\ ] \tag{3.29}$$

tam dizilerin düz spektri olmaktadır. Tam dizilerin düz spektrinin limiti ise tamdır [35].Böylece teoremdeki

$$\mathbf{L} \leftarrow H^q(A') \xleftarrow{a} H^q(A) \xleftarrow{p} H^q(A, A') \xleftarrow{\partial_*} H^{q-1}(A') \leftarrow \mathbf{L} \tag{3.30}$$

kohomoloji grupların tam dizisi elde edilir.

Teorem 3.18. (Kesme aksiyomu) (X, t) bir topolojik uzayında $A, A_1 \in F(X)$ fuzzy kümeler , $A_1 \leq A$ (A, t^*) fuzzy topolojik uzayında U açık kümesi için $U^c \subset Int(A_1)$ olsun.

$$f \ : (A \wedge U', A_1 \wedge U') \longrightarrow (A, A_1)$$

fuzzy gömme dönüşümü için

$$f_{*q} \ : H_q(A \wedge U', A_1 \wedge U') \longrightarrow H_q(A, A_1)$$

homomorfizması bir izomorfizmadır.

İspat: $f \ :(A\wedge U', A_1 \wedge U')\longrightarrow(A, A_1)$ fuzzy gömme dönüşümü ele alınsın. Her $l \in I$ için $A_{1l} \subset A_l$ alt uzay ve U_l, A_{1l} uzayında açık olduğundan $A_l^c \subset IntA_{1l}$ sağlanır.

$$\left(A\wedge \overline{U}\right)_l = A_l \cap \overline{U}_l = A_l - U_l$$

olduğundan (A_l, A_{1l}) için

$$f_l \ :(A_l - U_l, A_{1l} - U_l)\longrightarrow(A_l, A_{1l})$$

gömme dönüşümü için

$$f_{*lq} \ : H_q(A_l - U_l, A_{1l} - U_l)\longrightarrow H_q(A_l, A_{1l})$$

izomorfizmasıdır. O halde $\{f_{*lq}\}$ ailesi $\{H_q(A_l, U_l, A_{1l} - U_l)\}$ ters spektrinden $\{H_q(A_l, A_{1l})\}$, $l \in I$ ters spektrine giden izomorfizmalar ailesidir. Böylece $f_{*q} = \varprojlim_{l\in I} f_{lq}$ homomorfizması

$$f_{*q} \ : H_q(A\wedge U', A_1 \wedge U')\longrightarrow H_q(A, A_1)$$

bir izomorfizmadır.

BÖLÜM 4. SPEKTRAL HOMOLOJİ TEORİ

4.1. Spektral Homoloji Gruplar

Tanım 4.1.1. X fuzzy topolojik uzay ve $f = \{f_i\}_{i \in I}$, X fuzzy topolojik uzayının bir örtümü olsun. Yani $\underset{i}{\vee} f_i = 1$ sağlanır. X uzayının tüm açık örtümlerinin kümesi $Cov(X)$ ile gösterilir.

X fuzzy topolojik uzay ve A, X uzayında kapalı fuzzy küme olsun. $\{f_i|_A\}_{i \in I' \subset I}$, A uzayının bir örtümü ve $\{(f_{i,} f_i|_A)\}$ çifti (X, A) uzayının bir örtümüdür. (X, A) uzayının tüm açık örtümlerinin kümesi $Cov(X, A)$ ile gösterilir.

$f=\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_j\}_{j\in J}$ X uzayının örtümleri olsun. Her $i\in I$ için $f_i \le g_j$ koşulunu sağlayan en az bir $j\in J$ varsa f örtümüne g örtümünün inceltilmesi denir ve $f>g$ biçiminde gösterilir. $Cov(X)$ ve $Cov(X,A)$ örtümleri inceltilme bağıntılarına göre yönlendirilmiş kümelerdir.

Eğer $f>g$ ise ve $p:I\to J$ dönüşümü her $i\in I$ için $f_i\le g_{p(i)}$ biçiminde tanımlanırsa

$$p_g^f : nervf \to nervg \tag{4.1}$$

tepeyi tepeye taşıyan simplisial komplekslerin morfizmasıdır.

Lemma 4.1.2. $f=\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_j\}_{j\in J}$ iki örtüm olsun. Eğer $p:I\to J$, $q:I\to J$ için $f_i\le g_{p(i)}$ ve $f_i\le g_{q(i)}$ koşulu sağlanıyorsa

$$p_g^f, q_g^f : nervf \to nervg \tag{4.2}$$

morfizmaları simplisial denktir.

İspat: $f=\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_j\}_{j\in J}$ ve $p,p':I\to J$ için $f_i\le g_{p(i)}$ ve $f_i\le g_{p'(i)}$ sağlanır. Eğer $(i_1,i_2,\mathbf{K},i_k)$, $nervf$ simplisial kompleksinin bir simpleksi ise $\overset{k}{\underset{n=1}{\wedge}} f_{i_n}\ne 0$ elde edilir. Buradan

$$\overset{k}{\underset{n=1}{\wedge}} g_{p(i_n)} > \overset{k}{\underset{n=1}{\wedge}} f_{i_k}\ne 0\,,\quad \overset{k}{\underset{n=1}{\wedge}} g_{p'(i_n)} > \overset{k}{\underset{n=1}{\wedge}} f_{i_n}\ne 0 \tag{4.3}$$

sağlanır.

$$\underset{n,m}{\wedge}\left(p(i_n)\wedge p'(i_m)\right)=\left(\underset{n}{\wedge}p(i_n)\right)\wedge\left(\underset{m}{\wedge}p'(i_m)\right)>\left(\wedge f_{i_n}\right)\wedge\left(\wedge f_{i_m}\right)=\wedge f_{i_n}\ne 0\ . \tag{4.4}$$

Yani $\left(p(i_1), \ldots, p(i_k), p'(i_1), \ldots, p'(i_k)\right)$ bir simplekstir ve p_g^f, q_g^f dönüşümleri simpleksi bir simpleksin sınırına taşır. Bu durumda bu dönüşümler simplisial denktir.

$j : X \to Y$ fuzzy topolojik uzayların dönüşümü ve $f = \{f_i\}_{i \in I}$, Y uzayının bir örtümü olsun. $j^{-1}(f) = \{j^{-1}(f_i) : j^{-1}(f_i) \neq 0\}_{i \in I'}$ için

$$\vee j^{-1}(f_i) = j^{-1}(\vee f_i) = j^{-1}(1) = 1 \tag{4.5}$$

sağlanır. Eğer $s = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $nerv j^{-1}(f)$ simplisial kompleksinin herhangi bir simpleksi ise $\overset{k}{\underset{j=1}{\wedge}} j^{-1}(f_{ij}) \neq 0$ bu durumda $\overset{k}{\underset{j=1}{\wedge}} f_{ij} \neq 0$ elde edilir. Yani $s = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ simpleksi $nervf$ simplisial kompleksinin simpleksidir. Bundan dolayı $nerv j^{-1}(f)$ kompleksi $nervf$ simplisial kompleksinin alt kompleksidir.

$$j_f : nerv j^{-1}(f) \to nervf \tag{4.6}$$

ile gömme morfizması gösterilsin. Eğer $f > g$ ise simplisial denklik sınıfında aşağıdaki diyagram komütatiftir.

$$\begin{array}{ccc} nervf & \xrightarrow{p_g^f} & nervg \\ j_f \uparrow & & \uparrow j_g \\ nerv j^{-1}(f) & \xrightarrow[p_{j^{-1}(g)}^{j^{-1}(f)}]{} & nerv j^{-1}(g) \end{array} \tag{4.7}$$

Teorem 4.1.3. Her X fuzzy topolojik uzayı için

$$X \mapsto \left(\{nervf\}_{f \in Cov(L^X)}, \{p_g^f : nervf \to nervg\}_{f<g}\right) = nerv(X) \tag{4.8}$$

ve her $j : X \to Y$ fuzzy topolojik uzayların dönüşümü için

$$j : X \to Y \mapsto j_* = \{j_f : nerv j^{-1}(f) \to nervf\}_{f \in Cov(X)} \tag{4.9}$$

karşı gelmesi fuzzy topolojik uzaylar kategorisinden simplisial komplekslerin ters spektrler kategorisine giden kovaryant funktordur.

(4.8) ters spektrine $H_q(H^q)$ homoloji funktoru uygulanırsa,

$$\left\{H_q(nervf)\right\}_{f\in Cov\left(L^X\right)},\left\{H_q\left(p_g^f\right):H_q(nervf)\to H_q(nervg)\right\}_{f>g} \tag{4.10}$$

$$[\left\{H^q(nervf)\right\}_{f\in Cov\left(L^X\right)},\left\{H^q\left(p_g^f\right):H^q(nervf)\to H^q(nervg)\right\}_{f>g}$$

grupların ters (düz) spektri elde edilir.

Tanım 4.1.4. $H_q(X)=\lim\limits_{\leftarrow} H_q(nervf)$ $\left[H^q(X)=\lim\limits_{\rightarrow} H^q(nervf)\right]$ (4.11)

grubuna X fuzzy topolojik uzayının q boyutlu homoloji (kohomoloji) grubu denir.

Homoloji (kohomoloji) funktorun kovaryant (kontravaryant) olması ve Teorem 4.1.3 ele alınırsa aşağıdaki teorem kolayca ispatlanır.

Teorem 4.1.5.

$$X\ \mathbf{a}\ H_q(X)\ ,\ \ j:X\to Y\ \mathbf{a}\ H_q(j):H_q(X)\to H_q(Y) \tag{4.12}$$

$$[X\ \mathbf{a}\ H^q(X)\ ,\ \ j:X\to Y\ \mathbf{a}\ H^q(j):H^q(Y)\to H^q(X)]$$

karşı gelmesi fuzzy topolojik uzaylar kategorisinden gruplar kategorisine giden bir kovaryant funktordur.

Aşağıda topolojik uzayların homoloji grupları ile uygun fuzzy topolojik uzayın homoloji grupları arasında bağıntı kurulmaktadır.

(X,T) bir topolojik uzay olsun. (X,t) fuzzy topolojik uzayının t topolojisi $(d_U)_{U\in t}$ ailesinden oluşsun. Eğer $a=(U_i)_{i\in I}$, (X,T) uzayının açık bir örtümü ise

$$nerva = \left\{ (i_1, \ldots, i_k) : \bigcap_{j=1}^{k} U_{ij} \neq 0 \right\} \tag{4.13}$$

şeklinde belirlenir. Açıktır ki $d_a = \{d_{U_i}\}_{i \in I}$ ailesi de X fuzzy topolojik uzayının açık bir örtümüdür.

Eğer $s = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in nerva$ bir simpleks ise bu durumda $\bigwedge_{j=1}^{k} d_{U_{ij}} \neq 0$ olduğundan s simpleksi $nervd_a$ simplisial kompleksine aittir. Tersine $s \in nervd_a$ ise ($\bigwedge_{j=1}^{k} d_{U_{ij}} \neq 0$) $\bigcap_{j=1}^{k} U_{ij} \neq 0$ olacağı açıktır ve bu durumda $s \in nerva$ elde edilir.

Böylece $nerva = nervd_a$ olduğu söylenebilir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.6. Eğer (X, t) fuzzy topolojik uzayı (X, T) topolojik uzayından üretilirse (X, T) uzayının homoloji (kohomoloji) grubu (X, t) fuzzy topolojik uzayının homoloji (kohomoloji) grubuna eşittir.

L bir F latis olsun. Her (X, T) klasik topolojik uzayı için $w_L(T)$ ile X uzayından L latisine giden tüm alttan yarı sürekli dönüşümlerin ailesi gösterilsin.

(X, t) fuzzy topolojik uzayı, $\mathrm{A} \subset X$ ve her $a \in L$ için

$$i_a(A) = \{A_{(a)} : A \in \mathrm{A}\} \tag{4.14}$$

biçimindedir . Burada

$$A_{(a)} = \{x : A(x) > a\} \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır. $i_L(t)$ ile $\bigcup_{a \in L} i_a(t)$ alt tabanı ile üretilen X üzerindeki topoloji gösterilir.

L tam latis olmak üzere L üzerinde $\{\downarrow a : a \in L\}(\downarrow a = \{b \in L : b << a\})$ alt tabanından üretilen topolojiye alt topoloji denir. (X,T) topolojik uzay, L tam latis olsun. Eğer $f : X \to L$ dönüşümü alt topoloji için sürekli ise f dönüşümüne alttan yarı süreklidir denir.

(X,T) topolojik uzayı için $w_L(T)$ ile (X,T) uzayından L latisine giden tüm alttan yarı sürekli dönüşümlerin ailesidir.

Her $(X,T),(Y,S)$ topolojik uzayı için ve her $f : X \to Y$ topolojik uzayların morfizması için

$$w_L(f) = f^{\to} : (X, w_L(T)) \to (Y, w_L(S)) \tag{4.16}$$

biçimindedir .Her (X,T), (Y,S) topolojik uzayı için ve $f^{\to} : (X,t) \to (Y,m)$ fuzzy dönüşümü için

$$i_L(f^{\to}) = f \quad : (X, i_L(t)) \to (Y, i_L(m)) \tag{4.17}$$

biçimindedir. $f : (X,T) \to I$ olmak üzere $w_T : I^X \to I$

$$w_T(f) = \vee \{a : f - \text{alttan yarı süreklidir.}\} \tag{4.18}$$

şeklinde olur ve (X,T) için

$$i(t) = \{A \subset X : t(c_A) = 1\}. \tag{4.19}$$

$f = \{f_i\} \subset d$ örtümü ele alınsın. $\forall a \in I$ için

$$(f_i)_{(a)} = \{x \in X : f_i(x) > a\} \tag{4.20}$$

sağlanır. $f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} \neq 0 \in I$ alınırsa

$$\left(f_{i_1}\right)_{(a_1)} = \left\{x \in X : f_{i_1}(x) > a_1\right\}$$
$$\left(f_{i_2}\right)_{(a_2)} = \left\{x \in X : f_{i_2}(x) > a_2\right\}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\left(f_{i_k}\right)_{(a_k)} = \left\{x \in X : f_{i_k}(x) > a_k\right\} \tag{4.21}$$

olduğundan ve

$$f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} > 0 \tag{4.22}$$

sağlandığından $\exists a > 0$ öyleki

$$\left(f_{i_1}\right)(x) > a , \left(f_{i_2}\right)(x) > a , \ldots , \left(f_{i_k}\right)(x) > a \tag{4.23}$$

elde edilir.

$$x \in \left(f_{i_1}\right)_{(a)} ,\ x \in \left(f_{i_2}\right)_{(a)} ,\ \ldots ,\ x \in \left(f_{i_k}\right)_{a} , \tag{4.24}$$

olduğundan $\bigcap \left(f_{ij}\right)_{(a_{ij})} \neq 0$ sağlanır.

$j : X \rightarrow Y$ dönüşümünden elde edilen $j^{\rightarrow} : I^X \rightarrow I^Y$ için $\{g_i\} > \{f_i\}$ inceltilmesi ele alınsın. Yani $g_j \leq f_{i(j)}$ ise bu durumda

$$\left(g_j\right)_{(a)} = \left\{x \in X : g_j(x) > a\right\} \tag{4.25}$$

ve

$$\left(f_{i(j)}\right)_{(a)} = \left\{x \in X : \left(f_{ij}\right)(x) \geq g_i(x) > a\right\} \tag{4.26}$$

olduğundan

$$\left\{\left(g_j\right)_{(a)}\right\} > \left\{\left(f_{i(j)}\right)_{(a)}\right\} \tag{4.27}$$

sağlanır. Böylece

$$i : \{nervf\}_{f\in Cov\left(I^X\right)} \rightarrow \{nervi(f)\}_{i(f)\in Cov(X)} \tag{4.28}$$

için

$$i_* : \lim_{\leftarrow} H_q(nervf) \rightarrow \lim_{\leftarrow} H_q(nervi(f)) \tag{4.29}$$

homomorfizması tanımlanır.

Teorem 4.1.7. i_* homomorfizması bir monomorfizmadır.

Aşağıda fuzzy topolojik uzaylarda tanımlanan homoloji(kohomoloji) funktorlar için homoloji (kohomoloji) teorinin aksiyomlarının sağlandığı kontrol edilmektedir.

Fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde bir noktalı fuzzy uzay tanımlanmamaktadır. Fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde bir noktaya benzer uzay olarak $P = \{*\}$ bir noktalı topolojik uzay olmak üzere L^P fuzzy uzayı ele alınsın.

Teorem 4.1.7. L^P bir noktaya benzer uzayların yukarıdaki topoloji ile birlikte homoloji ve kohomoloji grupları trivialdir.

İspat: Her $c \in L^P$ fuzzy kümesi sabit dönüşüm olduğundan bunun örtümü olarak kendisi ele alınabilir. Böyle örtümden oluşan simplisial kompleks bir noktadan oluştuğundan homoloji (kohomoloji) grupları trivialdir.

4.2. Kesme Aksiyomu

Teorem 4.2.1.(Kesme aksiyomu) X fuzzy topolojik uzay A ise X uzayında bir fuzzy küme olsun. Eğer U fuzzy kümesi X fuzzy topolojik uzayında açık ve $\overline{U} \subset Int(A)$ $(A \subset X)$ sağlanıyorsa

$$f^{\rightarrow} : (U', A \wedge U') \longrightarrow (X, A) \tag{4.30}$$

gömme dönüşümü için

$$f_{*q} : H_q(U', A \wedge U') \longrightarrow H_q(X, A) \tag{4.31}$$

homomorfizması bir izomorfizmadır.

İspat: D, (V_a, V_a^A) ile indisli $Cov(X, A)$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan örtümü olsun.

(1) Eğer $a_u \wedge U \neq 0$ ise $u \in V_a^A$ ve $a_u \in A$.

teoremin sonucu aşağıdaki üç önermenin bir sonucudur.

(2) D, $Cov(X, A)$ kümesinin kofinal alt kümesidir.

(3) $f^{\leftarrow}(D)$, $Cov(U', A \wedge U')$ kümesinin kofinal alt kümesidir.

(4) Eğer $a \in D$ ve $b = f^{\leftarrow}a$ ise

$$f_{a*} : H_q(nerv_b(U'), nerv_b(A \wedge U')) \approx H_q(nerv_a(X), nerv_a(A)) \tag{4.32}$$

izomorfizmadır. (2) yi ispatlamak için, (V_a, V_a^A) ikilisi ile indisli (X, A) ikilisinin herhangi bir a örtümü ele alınsın. V', V_a ile ayrık bir küme olsun ve V_a^A ile bire-bir uygunluk sağlansın. Bir $u \in V_a^A$ için V' nün uygun elemanı u' ile gösterilecektir. (X, A) fuzzy uzayının indis kümesi $(V_a \cup V', V_a^A \cup V')$ olan aşağıdaki gibi tanımlanan g örtümünü ele alalım.

$$g_u = a_u - \left(\overline{U}\right)', \quad u \in V_a$$
$$g_{u'} = a_u \cap Int(A)\ , \quad u' \in V' \tag{4.33}$$

$(U)^c \subset Int(A)$ olduğundan g , (X, A) ikilisinin bir örtümüdür. Ayrıca $a < g$ ve $g \in D$ sağlanır.

$\left(V_b, V_b^{A'}\right)$ ile indisli $(U', A \wedge U')$ ikilisinin herhangi b örtümü ele alınsın. Aynı $\left(V_b, V_b^{A'}\right)$ ikilisi ile indisli $a \in Cov(U', A \wedge U')$ aşağıdaki gibi alınsın,

$$a_u = b_u \vee (U) \tag{4.34}$$

bu durumda $b = f^{\leftarrow}a$ dır. $g \in D, a < g$ olarak seçilirse $b = f^{\leftarrow}a < f^{\leftarrow}g$ elde edilir. Bundan dolayı $f^{\leftarrow}(D)$ örtümü $Cov(U', A \wedge U')$ kümesinin kofinal alt kümesidir.

(3) ü ispatlamak için

$$nerv_a(X) = nerv_b(U') \cup nerv_a(A)$$
$$nerv_b(X) = nerv_b(U') \cup nerv_a(A) \tag{4.35}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\left(nerv_b(U'), nerv_b(A \wedge U')\right)$, $\left(nerv_a X, nerv_a A\right)$ kompleksinin alt kompleksi olduğundan aşağıdaki gömmeler elde edilir.

$$nerv_a(X) \supset nerv_b(U') \cup nerv_a(A)$$
$$nerv_b(A \wedge U') \subset nerv_b(U') \cap nerv_a(A) \tag{4.36}$$

Böylece geriye,

$$nerv_a(X) \subset nerv_b(U') \cup nerv_a(A)$$
$$nerv_b(A \wedge U') \supset nerv_b(U') \cap nerv_a(A) \tag{4.37}$$

olduğunu ispatlamak kalmaktadır.

s, $nerv_a(X)$ simplisial kompleksinin bir simpleksi olsun ve $nerv_b(U')$ kompleksine ait olmasın. Bu durumda $car_a(s) \neq 0$ sağlanır ve $car_a(s) \cap U' = car_b(s) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $0 \neq car(s) \subset U$ bulunur. Bu sonuç şunu gerektirir, s simpleksinin her u tepesi için $a_u \cap U \neq 0$ elde edilir. Bundan dolayı $a \in D$ olduğundan $u \in V_a^A$ elde edilir. $U < A$ olduğundan, $car_a(s) \cap (A) \neq 0$ elde edilir ve bundan dolayı s, $nerv_a(A)$ kompleksinin bir simpleksidir. Bu (4.2.8) ifadesinin birinci kısmını ispatlıyor.

s, $nerv_b(U') \cap nerv_a(A)$ kompleksinin bir simpleksi olsun. Buradan s simpleksinin tepeleri V_a^A kümesine aittir ve

$$car_a(s) \wedge (U') = car_b(s) \neq 0 \tag{4.38}$$

elde edilir. Eğer $car_a(s) < (U')$ ise bu durumda

$$car_b(s) \wedge (A \wedge U') = car_a(s) \wedge (U') \wedge (A) = car_a(s) \wedge (A) \neq 0 \tag{4.39}$$

elde edilir ve s $nerv_b(A \wedge U')$ kompleksine aittir. Eğer $car_a(s) \wedge (U) \neq 0$ ise a, D örtümüne ait olduğundan s simpleksinin her n tepesi için $a_n \subset A$ sağlanır.

Böylece $car_a(s) < (A)$ elde edilir ve

$$car_b(s) \wedge (A \wedge U') = car_a(s) \wedge (U') \wedge (A) = car_a(s) \wedge (U') \neq 0 \tag{4.40}$$

sağlanır. Bundan dolayı s, $nerv_b(A \wedge U')$ kompleksine aittir.

4.3. Homotopi Aksiyomu

Aşağıdaki teoremde A. R. Salleh [32] tarafından verilen homotopi ele alınmaktadır.

Teorem 4.3.1. (Homotopi aksiyomu): Eğer $f, g : (X, t) \to (Y, t')$ fuzzy dönüşümleri fuzzy homotop ise

$$f_{*q} = g_{*q} : H_q(X;G) \to H_q(Y;G) \tag{4.41}$$

sağlanır.

Bu teoremin ispatı için önce aşağıdaki lemmaların ispatlanması gerekmektedir.

Lemma 4.3.2. $(I, \tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığında her açık bağlantılı fuzzy küme desteği (a,b) açık aralığı olan fuzzy kümedir.

İspat: Her G bağlantılı açık fuzzy küme için bu kümenin desteği $G_0 \subset I$ kümesi bağlantılı açık küme olduğundan $G_0 = (a,b)$ dır.

Lemma 4.3.3. $(I, \tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığında destekleri açık aralıklar olan fuzzy kümeler $\tilde{t}_e$ topolojisinin bir tabanıdır.

İspat: Eğer $G \in \tilde{t}_e$ ise $G_0 \in t_e$ sağlanır. Bu durumda $G_0 = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ yazılabilir. Her $i \in I$ için G^i fuzzy kümesi

$$G^i(t) = \begin{cases} G(t), & t \in (a_i, b_i) \\ 0 & t \notin (a_i, b_i) \end{cases} \tag{4.42}$$

biçiminde tanımlansın. G^i kümeleri açık fuzzy kümelerdir ve $G = \bigvee_{i\in I} G^i$ sağlanır.

Lemma 4.3.4. $(I,\tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığının her sonlu açık bağlantılı örtümü için $nerva$ simplisial kompleksi asikliktir.

İspat: $(I,\tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığının herhangi sonlu açık bağlantılı fuzzy kümelerden oluşan $a = \{G^1, G^2, ..., G^n\}$ örtümü genelliği bozmadan karşılaştırılamaz fuzzy kümeler olarak ele alınabilir. G^i fuzzy kümeleri $(G^i)_0 = (a_i, b_i)$ aralıklarının uç noktalarının artmasına göre düzenlensin. Bu durumda

$$G^i \wedge G^{i+1} \neq \underline{0},\ G^i \wedge G^j = \underline{0} \quad j \neq i-1, i+1 \ ; \quad 0 \in (G^1)_0,\ 1 \in (G^n)_0 \tag{4.3.3}$$

sağlanır. Eğer $p_i : nerva \to nerva$, $i = \overline{1,n}$ simplisial dönüşümleri

$$p_i(U_j) = \begin{cases} U_j & j \leq i \\ U_i & j > i \end{cases} \tag{4.43}$$

şeklinde tanımlanırsa p_i, p_{i+1} simplisial dönüşümlerinin simplisial denk olduğu görülür. O halde p_1 ile p_n simplisial denk dönüşümlerdir. p_1 sabit p_n ise birim

dönüşüm olduğundan $H_q(nerva) = H_q(*) = 0$ olmaktadır.

Lemma 4.3.4. ün ispatında ele alınan bağlantılı açık örtümler $(I,\tilde{t}_e)$ birim aralığının kofinal alt kümesidir. Bu şekildeki örtümlere regüler örtüm denir.

Herhangi $a = \{U_i\}_{i\in I} \in Cov(X)$ fuzzy açık örtümü ele alınsın. Her $i \in I$ indisine karşı $(I,\tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığının indisi $N^i = (0,1,...,n^i)$ olan regüler b örtümü karşı gelsin. W kümesi

$$W = \{(i,j) : i \in I, j \in N^i\} \tag{4.44}$$

ise bu durumda

$$g=\{g_{i,j}=U_i \times V_j^i\}_{(i,j)\in W} \tag{4.45}$$

ailesi $X \times I$ fuzzy uzayının fuzzy açık örtümüdür. Böyle örtümlere tuğla örtüm denir.

Lemma 4.3.5. Tuğla örtümler $Cov(X \times I)$ kümesinin kofinal alt kümesidir.

İspat: $d=\{A_k\}_{k\in K} \in Cov(X \times I)$ herhangi bir örtüm olsun. Her (x_l, t_m) fuzzy noktası için $U(x_l, t_m) \subset X$, $V(x_l, t_m) \subset I$ fuzzy açık kümeleri $U(x_l, t_m) \times V(x_l, t_m) < A_k$ olacak biçimde seçilsin. x_l fuzzy noktası sabit tutulduğunda $\{V(x_l, t_m)\}$ ailesi $(I, \tilde{t}_e)$ fuzzy birim aralığının açık bir örtümü olmaktadır.Yukarıdaki lemmadan bu örtümün sonlu regüler b^{x_l} inceltilmesi vardır. O halde $b_i^{x_l}$ fuzzy açık kümesi için $U(x_l, i) \times b_i^{x_l} < A_k$ sağlanacak şekilde $U(x_l, i) \subset X$ fuzzy açık kümesi bulunabilir. Buradan $U(x_l) = \wedge_i U(x_l, i)$ ise $\{U(x_l) \times b_i^{x_l}\}$ ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tuğla örtümüdür ve d örtümünün bir inceltilmesidir.

Lemma 4.3.6. Eğer g ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tabanı a olan tuğla örtümü ve $nerva$ simpleks ise $nervg$ simplisial kompleksi asikliktir (homoloji grubu sıfırdır).

İspat: $a=\{U_i\}_{i\in I}$, $g=\{U_i \times V_j^i\}_{(i,j)\in W}$ olsun. $(I, \tilde{t}_e)$ uzayının d örtümü

$$d=\{d_{i,j}=V_j^i\}_{(i,j)\in W} \tag{4.46}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer s tepeleri $(i_0, j_0), \mathbf{K}, (i_n, j_n) \in W$ olan bir simpleks ise

$$\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}}\left(U_{i_k} \times V_{j_k}^{i_k}\right) = \left(\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} U_{i_k}\right) \wedge \left(\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} V_{j_k}^{i_k}\right) = \left(\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} U_{i_k}\right) \wedge \left(\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} d_{i_k, j_k}\right) \tag{4.47}$$

sağlanır. $nerva$ simpleks olduğunda $\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} U_{i_k} \neq \underline{0}$ elde edilir. Buradan

$$\overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}}\left(U_{i_k} \times V_{j_k}^{i_k}\right) = \underline{0} \Leftrightarrow \overset{n}{\underset{k=0}{\wedge}} d_{i_k, j_k} = \underline{0} \tag{4.48}$$

sağlanır. O halde $nervg = nervd$ eşitliği vardır ve Lemma 4.3.4. den $nervd$ asikliktir.

Eğer g ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tabanı a olan tuğla örtümü ise

$$l(i) = (i,0),\ u(i) = \left(i, n^i\right) \tag{4.49}$$

formülü ile tanımlanan $l, u : nerva \to nervg$ simplisial dönüşümleri için

$$l_{*q} = u_{*q} : H_q(nerva) \to H_q(nervg) \tag{4.50}$$

sağlanır [9].

Teorem 4.3.1 in ispatı: $f_0, g_0 : X \to X \times I$ fuzzy dönüşümleri her $p \in X$ fuzzy noktası için $f_0(p) = (p,0)$, $g_0(p) = (p,1)$ şeklinde tanımlansın. O halde eğer $H : X \times I \to Y$, f ve g dönüşümleri arasında fuzzy homotopi ise $f = H \circ f_0$, $g = H \circ g_0$ sağlanır. Bundan dolayı teoremi ispatlamak için $f_{0*q} = g_{0*q}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Tuğla örtümleri $Cov(X \times I)$ kümesinin kofinal alt küme olduğundan $X \times I$ fuzzy uzayının homoloji gruplarının tanımında tuğla örtümleri ele alınabilir. g ailesi $X \times I$

fuzzy uzayının tabanı a olan herhangi tuğla örtümü olsun. $g_0 = f_0^{-1}(g)$, $g_1 = g_0^{-1}(g)$ örtümleri için

$$i_{f_0,g} : nervf_0^{-1}(g) \to nervg$$
$$i_{g_0,g} : nervg_0^{-1}(g) \to nervg \tag{4.51}$$

simplisial dönüşümleri ele alınsın. Eğer $u' : nerva \to nervg$, $p : nervg \to nervf_0^{-1}(g)$ dönüşümleri

$$u'(i) = (i, n^i),\ p(i, j) = (i, 0) \tag{4.52}$$

formülleri ile tanımlanırsa (4. 49) ifadesindeki dönüşümler için

$$u = i_{g_0,g} \circ u',\ l = i_{f_0,g} pu' \tag{4.53}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan ise $(i_{g_0,g})_{*q} = (i_{f_0,g})_{*q}$ ve dolayısıyla $f_{0*q} = g_{0*q}$ elde edilir.

4.4.Sınır Operatörü ve Tamlık Aksiyomu

Tanım 4.4.1. $a \in Cov(X, A)$ olmak üzere $(nerv_a X, nerv_a A)$ ikilisinin homoloji (kohomoloji) dizisi

$$\mathbf{L} \leftarrow H_q(nervX, nervA) \leftarrow H_q(nervX) \leftarrow H_q(nervA) \leftarrow H_{q+1}(nervX, nervA) \leftarrow \mathbf{L}$$
$$[\mathbf{L} \to H^q(nervX, nervA) \to H^q(nervX) \to H^q(nervA) \to H^{q+1}(nervX, nervA) \to \mathbf{L}]$$

$S_a\,[S^a]$ ile gösterilsin. $Cov(X, A)$ kümesinde $a < b$ ise

$$p_a^b : S_b \to S_a \quad [p_a^b : S^a \to S^b]\ , \tag{4.54}$$

$\left(nerv_b X, nerv_b A\right) \to \left(nerv_a X, nerv_a A\right)$ izdüşümü ile üretilen dönüşüm olsun. Burada limite geçilirse (X, A) ikilisinin homoloji (kohomoloji) dizisi elde edilir,

$$\mathbf{L} \leftarrow H_q(X,A) \xleftarrow{j'_*} H_q(X)_{(X,A)} \xleftarrow{i'_*} H_q(A)_{(X,A)} \xleftarrow{\partial'} H_{q+1}(X,A) \leftarrow \mathbf{L} \qquad (4.55)$$
$$\left[\mathbf{L} \to H^q(X,A) \xrightarrow{j'^*} H^q(X)_{(X,A)} \xrightarrow{i'^*} H^q(A)_{(X,A)} \xrightarrow{d'} H^{q+1}(X,A) \to \mathbf{L}\right]$$

$f : Cov(X,A) \to Cov(A,0)$, $y : Cov(X,A) \to Cov(X,0)$ olarak ele alınsın. $a \in Cov(X,A)$, $\left(V_a, V_a^A\right)$ ile indisli olsun. fa, $\left(V_a^A, 0\right)$ ile indislidir ve $n \in V_a^A$ için $(fa)_n = A \wedge a_n$ sağlanır. $y\,a$ örtümü $\left(V_a, 0\right)$ ile indislidir ve $(y\,a)_n = a_n$ sağlanır. Buradan

$$nerv_a A = nerv_{fa} A \;, \qquad nerv_a X = nerv_{y\,a} X \qquad (4.56)$$

elde edilir. f ve Ψ dönüşümleri ve homoloji grupların uygun idantik dönüşümü için ters sistemlerin aşağıdaki dönüşümü elde edilir,

$$\Phi : \left\{H_q\left(nerv_a A\right), p_b^a\right\}_{(A,0)} \to \left\{H_q\left(nerv_a A\right), p_b^a\right\}_{(X,A)}$$
$$\Psi : \left\{H_q\left(nerv_a X\right), p_b^a\right\}_{(X,0)} \to \left\{H_q\left(nerv_a X\right), p_b^a\right\}_{(X,A)} \qquad (4.57)$$

Φ ve Ψ dönüşümlerinin ters limitleri homomorfizmalardır,

$$\Phi_\infty : H_q(A) \to H_q(A)_{(X,A)} \;, \quad \Psi_\infty : H_q(X) \to H_q(X)_{(X,A)}. \qquad (4.58)$$

kohomoloji için düz sistemlerin Φ ve y dönüşümleri ve bunların limitleri

$$\Phi^\infty : H^q(A)_{(X,A)} \to H^q(A) \;, \quad \Psi^\infty : H^q(X)_{(X,A)} \to H^q(X) \qquad (4.59)$$

biçimindedir.

Lemma 4.4.2. $\Phi_\infty, \Psi_\infty, \Phi^\infty$ ve Ψ^∞ izomorfizmalardır.

İspat: Φ dönüşümünün görüntü kümesinin $Cov(A,0)$ kümesinde ve Ψ dönüşümünün görüntü kümesinin $Cov(X,0)$ kümesinde kofinal olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in Cov(A,0)$, (V,W) ikilisi ile indisli olsun. V^+ ile V ve V kümesine ait olmayan bir n_0 elemanı gösterilsin. Her bir $n \in V$ için X uzayında $a_n = A \wedge b_n$ olacak biçimde b_n seçilsin. $b_{n_0} = X$ olarak tanımlansın. Bu durumda $b \in Cov(X,A)$ örtümünün (V^+,V) indis kümesi vardır, böylece $a < fb$ sağlanır ve Φ dönüşümünün görüntü kümesi kofinaldir.

$a \in Cov(X,0)$, (V,W) ile indisli olsun. Bu durumda a ile (V,V) ile indisli bir $b \in Cov(X,A)$ örtümü tanımlanır. yb örtümü a örtümü ile aynıdır fakat $(V,0)$ ile indislidir. Böylece $a < yb$ sağlanır ve y dönüşümünün görüntü kümesi kofinaldir.

Tanım 4.4.3. $\partial : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$, $d : H^q(A) \to H^{q+1}(X,A)$ homomorfizmaları

$$H_q(X,A) \xrightarrow{\partial'} H_{q-1}(A)_{(X,A)} \xleftarrow{\Phi_\infty} H_{q-1}(A),\ \partial = \Phi_\infty^{-1}\partial' \tag{4.60}$$

ve

$$H^q(A) \xleftarrow{\Phi_\infty} H^q(A)_{(X,A)} \xrightarrow{d'} H^{q+1}(X,A),\ d = d\left(\Phi^\infty\right)^{-1} \tag{4.61}$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.4. $f:(X,A) \to (Y,B)$ olsun bu durumda $\left(f|_A\right)_* \partial = \partial f_*$ ve $d\left(f|_A\right)^* = f^* d$ sağlanır.

İspat: Bu teorem homoloji için aşağıdaki diyagramın kamütatifliğinin açık bir sonucudur,

$$
\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "(f|_A)'_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[l, "\Phi_\infty"'] \arrow[d, "(f|_A)_*"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial'"] & H_{q-1}(B) & H_{q-1}(B) \arrow[l, "\Phi_\infty"']
\end{tikzcd}
\tag{4.62}
$$

Burada $(f|_A)'_*$ uygun limit dönüşümü olarak tanımlanır. Her bir karede komütatiflik bağıntısı tanımların bir sonucudur. Kohomoloji için ispat benzer biçimdedir.

Teorem 4.4.5. (X,A) ikilisinin homoloji (kohomoloji) dizi ile düzenlenen (adjusted) homoloji (kohomoloji) dizi izomorfiktir. İzomorfizma $\Phi_\infty, \Psi_\infty [\Phi^\infty, \Psi^\infty]$ dönüşümleriyle ve $H_q(X,A)[H^q(X,A)]$ üzerinde örten idantik dönüşümle verilir.

İspat: İspat homoloji için verilmektedir. Kohomoloji için ispat benzer biçimdedir. Bunun için aşağıdaki diyagramın komütatif olduğunu göstermek yeterli olmaktadır.

$$
\begin{tikzcd}
 & H_q(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\Phi_\infty"] & H_q(X) \arrow[dr, "j_*"] & \\
H_{q+1}(X,A) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\partial'"'] & H_q(A)_{(X,A)} \arrow[r, "i'_*"] & H_q(X)_{(X,A)} \arrow[r, "j'_*"'] & H_q(X,A)
\end{tikzcd}
\tag{4.63}
$$

Soldaki üçgenin komütatifliği ∂ dönüşümünün tanımının direk bir sonucudur. Ortadaki karede kamütatifliği ispatlamak için $\Phi_\infty i'_*$ ve $i_*\Psi_\infty$ dönüşümlerini ele alalım. Bu dönüşümler

$$t, h : \{H_q(nerv_a A), p^a_b\}_{(A,0)} \to \{H_q(nerv_a X), p^a_b\}_{(X,A)} \tag{4.64}$$

dönüşümlerinin limitleridir. t dönüşümü her bir (V_a, V_a^A) ile indisli $a \in Cov(X,A)$ örtümünü $(V_a^A, 0)$ ile indisli $ta = \Phi a \in Cov(A,0)$ örtümüne götürür. Burada $(ta)_n = A \wedge a_n$ eşitliğini sağlanır. Üstelik ta, $nerv_{ta} A \subset nerv_a X$ gömmesinden üretilen $H_q(nerv_{ta} A) \to H_q(nerv_a X)$ bir dönüşümdür. h dönüşümü (V_a, V_a^A) ile indisli $a \in Cov(X, A)$ örtümünü $(V,0)$ ile indisli $ha = i^{-1}\Psi a \in Cov(A,0)$ örtümüne taşır. Burada $(ha)_n = A \wedge a_n$ eşitliği sağlanır. ha, $nerv_{ha} A \subset nerv_a X$ gömmesinden elde edilen $H_q(nerv_{ha} A) \to H_q(nerv_a X)$ bir dönüşümdür. $ha < ta$ sağlanır ve $nerv_{ta} A \subset nerv_{ha} A$ gömme dönüşümü izdüşümdür. Dolayısıyla p_{ha}^{ta} gömmeden üretilen $H_q(nerv_{ta} A) \to H_q(nerv_{ha} A)$ dönüşümdür ve böylece

$$ha < ta \ , \ t_\infty = h_\infty p_{ha}^{ta} \tag{4.65}$$

elde edilir. Böylece $t_\infty = h_\infty$ sağlanır. Yani

$$\Phi_\infty i'_* = i^* \Psi_\infty \tag{4.66}$$

elde edilir.

Sağdaki üçgen için durum benzer biçimdedir. $j'_*\Psi_\infty$ ve j_* dönüşümleri,

$$t, h : \{H_q(nerv_a X), p_b^a\}_{(X,0)} \to \{H_q(nerv_a X, nerv_a A), p_b^a\}_{(X,A)} \tag{4.67}$$

dönüşümlerinin limitleridir.

(V_a, V_a^A) ile indisli her $a \in Cov(X, A)$ için ta, $ha \in Cov(X,0)$ örtümleri a ile örtüşür fakat bu örtümler sırasıyla $(V_a,0)$ ve (V_a, V_a^A) ile indislidir. Buradan $nerv_{ta} X = nerv_{ha} X = nerv_a X$ elde edilir. ta ve ha gömmeden elde edilen $H_q(nerv_a X) \to H_q(nerv_a X, nerv_a A)$ dönüşümlerdir. Buradan

$$ha < ta \ , \ t_\infty = h_\infty p_{ha}^{ta} \tag{4.68}$$

sağlanır ve bundan ötürü $t_\infty = h_\infty$ elde edilir.

Teorem 4.4.6. (Tamlık aksiyomu) Her (X,A) ikilisi için kohomoloji dizi tamdır. Eğer (X,A) kompakt G_F, F cismi üzerinde vektör uzayların kategorisinde ise homoloji dizi tamdır.

İspat: Eğer (X,A) kompakt ise homoloji dizide ortaya çıkan grup tanımında sonlu örtüm için limite geçilebilir. G kompakt ise her bir sonlu a örtüm için G üzerinde $(nerv_a X, nerv_a A)$ ikilisinin homoloji dizisi kompakt gruplarla oluşturulur. Bundan ötürü limit dizisi tamdır. Eğer G, G_F de ise ve F üzerinde sonlu boyutlu ise bu durumda F üzerinde $(nerv_a X, nerv_a A)$ ikilisinin homoloji dizisinin grupları sonlu boyutludur ve limit tamdır.

Eğer $G \in G_F$ sonlu boyutlu değilse bu durumda G, $\sum G_b$ direk toplam gibi gösterilebilir ve burada G_b sonlu boyutludur. Bu ayrıştırma G üzerinde (X,A) ikilisinin homoloji dizisinin G_b üzerindeki homoloji dizilerin bir direk toplamına ayrıştırılmasıdır. Bunların her biri tam olduğundan, G üzerinde homoloji dizisi tamdır.

4.5.Süreklilik

Bu bölümde fuzzy topolojik uzayın ters spektrinin limitinin homoloji grubu ile bu ters spektrin homoloji gruplarının ters spektrinin limiti arasında bağıntı kurulmaktadır.

Tanım 4.5.1. a ve b, X fuzzy topolojik uzayında, aynı $V_a = V_b$ indis kümesine sahip aileler olsun. Eğer her $u \in V_a$ için $a_u \supset b_u$ ise a ailesine b ailesinin genişletilmesi veya b ailesine a ailesinin indirgenmesi denir. a, X fuzzy topolojik uzayında bir aile olmak üzere $\overline{a}$ ile a ailesinin kümelerinin kapanışlarının ailesi gösterilir.

Lemma 4.5.2. Eğer X bir fuzzy normal uzay ve a , X uzayının sonlu fuzzy açık örtümü ise bu durumda a örtümünün indirgenmesi olan X uzayının, bir kapalı fuzzy b örtümü vardır.

İspat: Eğer V_a indis kümesi n elemanlı ise bu durumda $a_n = X$ elde edilir. $b_n = X$ alınsın bu durumda b aranan örtümdür. Tümevarım yönteminin uygulanması için, lemmanın V_a kümesinin k elemanlı olması durumunda bir normal uzayda sağlandığı varsayılsın. V_a kümesinin $k+1$ elemanlı olduğu durumda a, X uzayının bir örtümü olsun. Sabit bir $n_0 \in V_a$ seçilsin ve $n \neq n_0$ için $A = (\vee a_n)'$ alınsın. X fuzzy normal uzay ve A kapalı küme olduğundan $A < U$ ve $\overline{U} < a_{n_0}$ olacak biçimde açık bir U kümesi vardır. $X' = U'$, $n \neq n_0$ için $a_n' = a_n \wedge X'$ alınsın. Bu durumda a', k elemanlı küme üzerinde tanımlı X' fuzzy normal uzayının bir açık örtümüdür. b', a' örtümünün kapalı bir alt örtümü olsun ve $b_{n_0} = \overline{U}$ ve $n \neq n_0$ için $b_{n_0} = b_n'$ tanımlansın. Bu durumda b örtümü a örtümünün kapalı bir indirgenmesidir.

Lemma 4.5.3. X bir fuzzy normal uzay, $a \in Cov(X)$ ve b , $a < b$ olacak biçimde X üzerinde fuzzy kapalı kümelerin sonlu indisli ailesi olsun. Bu durumda $a < \bar{g} < g < b$ olacak biçimde b nın g genişletilmesi vardır ve

$$nerv(\bar{g}) = nerv(g) = nerv(b). \tag{4.69}$$

İspat: Uygunluk açısından V_b indis kümesi $1,2,...,k$ tamsayıları olarak kabul edilebilir.$n \in V_a$ indisi $b_1 < a_n$ olarak seçilsin. B tüm $b_2, \mathbf{K}, b_k$ kümelerinin infimumlarının supremumu olsun ve b_1 ile infimumu sıfır olmasın. X fuzzy normal uzay olduğundan $b_1 < g_1$, $\bar{g}_1 < a_n$ ve $\bar{g}_1 \wedge B = 0$ olacak biçimde g_1 fuzzy açık kümesi vardır. Eğer $b_1 = 0$ ise $g_1 = 0$ seçilmelidir. Böylece $\bar{g}_1, b_2, \mathbf{K}, b_k > a$ sağlanır ve bunların *nerv* leri *nervb* ile aynıdır. Bu işleme b_2 elemanı üzerinde devam edilirse $\bar{g}_2$ ve yeni $\bar{g}_1, \bar{g}_2, b_3, \mathbf{K}, b_k$ elde edilir. Tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

Tanım 4.5.4. a, X fuzzy topolojik uzayı üzerindeki kümelerin indisli bir ailesi ve $A < X$ fuzzy küme olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa a örtümüne A kümesine göre göreceli regülerdir denir:

1) $a_u \wedge A \neq 0$, $u \in V_a$ ise $\overline{a}_u \wedge A \neq 0$

2) $a_{u_i} \wedge A \neq 0$ $(i = 1,2,...,k)$ ve $D = a_{u_1} \wedge a_{u_2} \wedge \mathbf{L} \wedge a_{u_k} \neq 0$ ise $D \wedge A \neq 0$.

Lemma 4.5.5. Eğer X fuzzy normal uzay ve A', X' $(A' < X')$ X uzayında kapalı fuzzy kümeler ise X uzayının A' ve X' ile göreceli regüler sonlu açık örtümleri $Cov(X)$ kümesinde kofinal bir ailedir.

İspat: $a \in Cov(X)$ olsun, Lemma 4.5.2 den A' kümesinin $a < b$ olacak biçimde kapalı bir b örtümü vardır. Lemma 4.5.3 den b örtümünün X' uzayının açık kümelerinden oluşan $a < \bar{g}$ olacak biçimde bir g genişletilmesi vardır ve $nerv(\bar{g}) = nerv(g) = nerv(b)$ sağlanır. U, g örtümünün kümelerinin birleşimi olsun. Bu durumda $X' \wedge U'$ bir kapalı kümedir. Lemma 4.5.2 den B fuzzy kümesinin $a < d$ olacak biçimde bir d örtümü vardır. X' uzayının $e = \{\bar{g}, d\}$ örtümü X' uzayının kapalı fuzzy kümeleriyle oluşturulsun. Lemma 4.5.3. den e örtümünün $a < h$ ve $nervh = nerve$ olacak biçimde X uzayının açık fuzzy kümelerinden oluşan bir h genişletilmesi vardır. Ayrıca her bir h_n için $\bar{h}_n \wedge A' = 0$ elde edilir ve bu d örtümünün bir kümesinin genişletilmesidir. $\overline{W} \wedge A' = 0$ olacak biçimde $W > B$ açık küme seçilsin ve h_n ile $h_n \wedge W$ yer değiştirsin. Bu durumda da $a < h$ ve $nervh = nerve$ sağlanır. h örtümünün A' kümeleri için göreceli regülerliğin ilk koşulu sağlanır.

s, $nervh$ simplisial kompleksinin tepeleri A'_h olan simpleksi olsun. Bu durumda s simpleksinin her bir n tepesi için $h_n \wedge A' \neq 0$ elde edilir. Böylece h_n, $\bar{g}$ kümesinin genişletilmesidir. $nervh = nerve$ olduğu için s, $nerv\bar{g}$ simplisial kompleksine aittir. $nerv\bar{g} = nervb$ olduğundan s, $nervb$ simplisial kompleksine aittir. Bundan dolayı $car_b(s) \neq 0$ sağlanır fakat $car_b(s) < A' \wedge car_h(s)$ olacak biçimdedir. Buradan $car_h(s)$, A' ile kesişir ve böylece s, A'_h üzerindedir.

s, $nervh$ simplisial kompleksinin tepeleri X'_h olan simpleksi olsun. $nervh = nerve$ olduğundan s, $nerve$ simplisial kompleksine aittir. Buradan $car_e(s) \neq 0$ sağlanır fakat $car_e(s) < X' \wedge car_h(s)$ olacak biçimdedir. Buradan $car_h(s)$, X' ile kesişir ve böylece s, X'_h üzerindedir. Böylece h, A' ye göre göreceli regülerdir ve X' ye göre göreceli regülerlik için ikinci koşulu sağlar.

U', h örtümünün açık kümelerinin birleşimi olsun. W', $W' > X \wedge (U')'$ ve $\overline{W}' \wedge X' = 0$ olacak biçimde bir açık küme olsun. a', a örtümünün W' ye kısıtlanmış örtümü olsun. Eğer a', h ile bitişik ise bu durumda $> a$ biçiminde A' ve X' ile göreceli olan bir bileşik örtüm elde edilir.

Lemma 4.5.6. $\left\{L^{X_m}, p^{m_1}_{m_2}\right\}$ güçlü fuzzy kompakt uzayların bir ters sistemi ve $X = \lim\limits_{\leftarrow} \left\{L^{X_m}, p^{m_1}_{m_2}\right\}$ olsun. Bu durumda $m \in M, b \in Cov(X_m)$ için $Cov(X)$ kümesinin $p_m^{-1}(U)$ biçimindeki elemanları kofinal bir ailedir.

İspat: $a \in Cov(X)$ olsun bu durumda U, X_m de açık olmak üzere $p_m^{-1}(U)$, X in açık kümeleri için tabandır. X kompakt olduğundan $a < a'$ olacak biçimde $p_{m_i}^{-1}(U_i), (i = 1,...,k)$ kümelerinden oluşan a' örtümü vardır. M yönlendirilmiş olduğundan $i = 1,...,k$ için $m > m_i$ vardır. $i = 1,...,k$ için $b_i = \left(p^m_{m_i}\right)^{-1}(U_i)$ lerden oluşan X_m nin b örtümü tanımlansın ve $b_{k+1} = X_m \wedge (p_m(X))'$ olsun. Bu durumda $p_m^{-1}(b_i) = p_{m_i}^{-1}(U_i), (i = 1,...,k)$ biçimindedir ve $p_m^{-1}(b_{k+1}) = 0$ elde edilir. Böylece $p_m^{-1}(b) > a$ sağlanır.

Lemma 4.5.7. $\{X_m, p_{m_2}^{m_1}\}$ fuzzy kompakt uzayların bir ters sistemi ve $X = \lim\limits_{\leftarrow} \{X_m, p_{m_2}^{m_1}\}$ olsun. Bu durumda $Cov(X)$ in $a = p_m^{-1}(b)$ biçimindeki $nerv(a) = nerv(mb)$ koşulunu sağlayan elemanları kofinal alt kümedir $(m \in M, b \in Cov(X_m))$.

İspat: $g \in Cov(X)$ olsun bir önceki lemmadan $p_{m_0}^{-1}(d) > g$ koşulunu sağlayan bir m_0 ve bir $d \in Cov(X_{m_0})$ vardır. $X' = p_{m_0}(X)$ ve $A' = p_{m_0}(A)$ alınsın Lemma 4.5.5 den $d < e$ koşulunu sağlayan , X' ve A' ye göre göreceli regüler olan $e \in Cov(X_{m_0})$ vardır. $U(W)$, $\bar{e}$ kümelerinin X' ile infimumları sıfır olan supremumu olsun. $U'(W')$ ile X_{m_0} da bunların kapanışları olsun. Bu durumda U', W' açıktır ve $X' < U'$, $A' < W'$ sağlanır. Eğer a kümesinin $U'(W')$ ile infimumu sıfır değilse bu durumda $X'(A')$ ile infimumu da sıfır değildir.

Böylece $p_{m_0}^{m}(X_m) < U'$ ve $p_{m_0}^{m}(A_m) < W'$ koşulunu sağlayan $m > m_0$ vardır. $b = (p_{m_0}^{m})^{-1}(e)$ biçiminde tanımlansın bu durumda,

$$a = p_m^{-1}(b) = p_{m_0}^{-1}(e) > p_{m_0}^{-1}(d) > g \tag{4.70}$$

sağlanır. $a = p_m^{-1}(b)$ olduğundan $X_a \subset X_{mb}$ elde edilir. s, X_{mb} simplisial kompleksinin simpleksi olsun. Bu durumda $car_b(s) \neq 0$ dır ve $car_e(s) > p_{m_0}^{m}$, $(car_b(s)) < U'$ olduğundan $car_e(e) \wedge U' \neq 0$ elde edilir.

Böylece s simpleksinin her tepesi için $e_n \wedge X' \neq 0$ elde edilir. e, X' ile göreceli regüler olduğundan $car_e(s) \wedge X' \neq 0$ elde edilir. Fakat $car_a(s) = p_{m_0}^{-1}(car_e(s))$ olduğundan $car_a(s) \neq 0$ dır ve bundan dolayı s, X_a ya aittir. Böylelikle $X_a = X_{mb}$ elde edilir.

Teorem 4.5.8. Güçlü fuzzy kompakt uzaylar kategorisinde spektral homoloji teorinin süreklilik özelliği vardır. Yani $l(q,X) \quad : H_q\left(\varprojlim_m X_m\right) \longrightarrow \varprojlim_m H_q(X_m)$ homomorfizması bir izomorfizmadır.

İspat: $p_m : \varprojlim X_m \longrightarrow X_m$ fuzzy izdüşüm fonksiyonu olsun. Her $m_1 > m_2$ için

$$\begin{tikzcd} & X_{m_1} \arrow[d, "p_{m_2}^{m_1}"] \\ \varprojlim X_m \arrow[ur, "p_{m_1}"] \arrow[r, "p_{m_2}"'] & X_{m_2} \end{tikzcd} \tag{4.71}$$

diyagramı komütatif olduğundan $\{p_m\}$ ailesi $\varprojlim X_m$ fuzzy uzayından $\{X_m, p_{m_2}^{m_1}\}$ ters spektrine giden bir morfizmadır. O halde

$$l(q,X) = \varprojlim p_{m*q} : H_q\left(\varprojlim X_m\right) \longrightarrow \varprojlim H_q(X_m) \tag{4.72}$$

homomorfizması elde edilir.

$X = \{X_m, p_{m_2}^{m_1}\}$ kompakt uzayların bir ters sistemi olsun ve $X = \varprojlim X_m$ olsun. Aşağıda $l(q,X)$ in örten ve çekirdeğinin sıfır olduğu gösterilmektedir.

$u \in H_q(X)$, l nin çekirdeğine ait olsun. $p_{m*}(u), H_q(X_m)$ de $l(u)$ nun koordinatı olduğundan $p_{m*}(u) = 0 \ (\forall m \in M)$. Eğer $b \in Cov(X_m)$ ise $H_q(X_{mb})$ da $p_{m*}(u)$ koordinatı sıfırdır. Eğer $a = p_m^{-1}(b)$ ve $X_a = X_{mb}$ ise $p_{m*}(u)$ nun tanımından $H_q(X_a)$ da u nun koordinatı sıfırdır ve a , $Cov(X)$ de kofinal bir ailedir. Burada $u = 0$ sağlanır.

$n \in \varprojlim H_q(X)$ olduğu kabul edilsin. n_m, V nin $H_q(X_m)$ de bir koordinatı olsun. $b \in Cov(X_m)$ için n_{mb}, n_m nin $H_q(X_{mb})$ da koordinatı olsun. $l(u) = v$ olacak biçimde $u \in H_q(X)$ bulunmalıdır. $Cov(X)$ de bir D kofinal ailesinde bir a için u nun u_a koordinatlarını yapılandırmak yeterlidir. Her bir a için $m \in M$ seçilsin ve $b \in Cov(X_m)$, $a = p_m^{-1}(b)$ ve $(X_a, A_a) = (X_{mb}, A_{mb})$ olacak biçimde olsun. $u_a = n_{mb}$ tanımlansın.

D de $a_1 < a_2$ olsun ve a_1, a_2 için $m_1 b_1, m_2 b_2$ ve $m_3 > m_i$ seçilsin ve $b_i' = (p_{m_i}^{m_3})^{-1}(b_i)(i = 1,2)$ tanımlansın. Bu durumda b_1' ve b_2' nün inceltilmesi olan ve $p_{m_3}(X)$, $p_{m_3}(A)$ ile göreceli regüler $e \in Cov(X_{m_3})$ vardır. O halde $b = (p_{m3}^{m_4})^{-1}(e)$ ve $a = p_{m_4}^{-1}(b)$ ise $(X_a, A_a) = (X_{m_4 b}, A_{m_4 b})$ sağlanacak biçimde $m_4 > m_3$ vardır. $i = 1,2$ için $g_i = (p_{m_i}^{m_4})^{-1}(b_i)$ alınsın. Bu durumda,

$$(X_{a_i}, A_{a_i}) = (X_{m_4 g_i}, A_{m_4 g_i}) = (X_{m_i b_i}, A_{m_i b_i}) \tag{4.73}$$

sağlanır. Bundan dolayı $u_{a_i} = n_{m_4 g_i}$ sağlanır ve $e > b_1', b_2'$ olduğundan $b > g_1, g_2$ ve $a > a_1, a_2$ elde edilir. $u_a' = n_{m_4 b}$ ele alınsın, aşağıdaki diyagram komütatif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_a, A_a) & = & H_q(X_{m_4 b}, A_{m_4 b}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(X_{a_i}, A_{a_i}) & = & H_q(X_{m_4 g_i}, A_{m_4 g_i}) \end{array} \tag{4.74}$$

u_a', $u_{a_i}(i = 1,2)$ üzerinde izdüşümdür. Bundan dolayı u_{a_2}, u_{a_1} üzerine izdüşümdür. Bu ise $a \in D$ için u_a elemanlarının $u \in H_q(X, A)$ elemanının koordinatları olmasını ispatlıyor. Bu aynı zamanda u_a nın m ve b nın seçiminden bağımsız olduğunu gösteriyor.

Geriye her bir $m \in M$ için $l(u) = n_1$ veya $p_{m_*}(u) = n_m$ olduğunu göstermek kalıyor. Eğer $\left(p_{m_*}(u)\right)_e = n_{m_e}$ ise kofinal ailede e için bu $Cov(X_m)$ aittir. e, $p_m(X)$ ve $p_m(A)$ ile göreceli regüler olsun. Böyle örtümler kofinal ailedir. . O halde $b = \left(p_m^{m_1}\right)^{-1}(e)$ ve $a = p_{m_1}^{-1}(b)$ ise $(X_a, A_a) = \left(X_{m_1 b}, A_{m_1 b}\right)$ sağlanacak biçimde $m_1 > m$ vardır. u_a, m_{1b} nın seçiminden bağımsızdır ve $u_a = n_{mb}$ sağlanır. Bundan dolayı u_a ve $n_{m_1 b}$, $\left(X_{m_1 b}, A_{m_1 b}\right) = \left(X_{me}, A_{me}\right)$ gömme dönüşümü altında aynı görüntüye sahiptir. Bu görüntüler $\left(p_{m_*}(u)\right)_e$ ve n_{me} dur.

BÖLÜM 5. FUZZY MODÜLLERİN ZİNCİR KOMPLEKSLERİ

Tanım 5.1. Λ üzerinde bir $q_C = \left\{q_{C_n}^{n}, \tilde{\partial}_n\right\}$ fuzzy zincir kompleks $fgm_{\Lambda}^{£}$ kategorisinin bir nesnesidir ve $\tilde{\partial} : q_C \to q_C$ derecesi -1 ve $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$ olan bir fuzzy endomorfizmadır [2].

Uyarı 5.2. $q_C = \{q_{C_n}^{n}, \tilde{\partial}_n\}$ fuzzy zincir kompleks olsun. $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$ koşulu $\operatorname{Im}\tilde{\partial}_{n+1} \subseteq \ker\tilde{\partial}_n, n \in Z$ olmasını gerektirir. Böylece q_C ile

$$H(q_C) = \{H_n(q_C)\} \tag{5.1}$$

fuzzy derece modülü elde edilir. Burada

$$H(q_C) = \bar{q}\ \ker\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}, n \in Z \tag{5.2}$$

biçimindedir. $\overline{q_n}$, $\ker\bar{q}_n$ modülünün $\operatorname{Im}\tilde{q}_n$ ile fuzzy bölümüdür. Bu durumda $H(q_C)$ modülüne q_C modülünün fuzzy homoloji modülü denir [2].

Teorem 5.3. Her bir n için $H_n(-) : FComp \to \Lambda - fz\,\mathrm{mod}$ bir toplamsal funktordur [2].

Tanım 5.4. m_A bir sağ fuzzy $\Lambda-$modül ve n_B sol fuzzy $\Lambda-$modül olsun. m_A modülünün fuzzy izdüşüm gösterimi

$$\bar{0} \to m_{0R} \xrightarrow{\tilde{f}} m_{0P} \xrightarrow{\tilde{g}} m_A \to \bar{0} \tag{5.3}$$

biçimindedir ve

$$F - Tor_{\tilde{g}}^{\Lambda}(m_A, n_B) = \ker\left(\tilde{f}_* = \tilde{f} \otimes \tilde{1} : (m_0 \otimes n)_{R\otimes_\Lambda B} \to (m_0 \otimes n)_{P\otimes_\Lambda B}\right) \tag{5.4}$$

tanımlanır. Böylece

$$\bar{0} \to F - Tor_{\tilde{g}}^{\Lambda}(m_A, n_B) \xrightarrow{\tilde{i}} (m_0 \otimes n)_{R\otimes_\Lambda B} \xrightarrow{\tilde{f}\otimes\tilde{1}} (m_0 \otimes n)_{P\otimes_\Lambda B} \xrightarrow{\tilde{g}\otimes\tilde{1}} (m \otimes n)_{A\otimes_\Lambda B} \to \bar{0}$$
(5.5)

dizisi tamdır[2].

Tanım 5.5. [2] İki $\tilde{y}, \tilde{j} : q_C \to n_D$ fuzzy zincir dönüşüm arasında $\tilde{\Sigma} : \tilde{y} \to \tilde{j}$ fuzzy homotopi $\tilde{\Sigma} : q_C \to n_D$ fuzzy grade modüllerin $+1$ dereceli morfizmasıdır ve $\tilde{y} - \tilde{j} = \tilde{\partial}\tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma}\tilde{\partial}$ sağlanır, yani $n \in Z$ için

$$\tilde{y}_n - \tilde{j}_n = \tilde{\partial}_{n+1}\tilde{\Sigma}_n + \tilde{\Sigma}_{n-1}\tilde{\partial}_n \quad . \tag{5.6}$$

Önerme 5.6. $\tilde{y}, \tilde{j} : q_C \to n_D$ fuzzy zincir dönüşümlerin fuzzy homotopik ise bu durumda

$$H(\tilde{y}) = H(\tilde{j}) : H(q_C) \to H(n_D) \tag{5.7}$$

elde edilir[2].

Teorem 5.7. R esas ideal bölgesi olsun. Bu durumda fuzzy serbest $R-$modülünün her fuzzy alt modülü serbesttir [46].

Lemma 5.8. Fuzzy $R-$modülünün

$$\bar{0} \to mA \xrightarrow{\tilde{f}} r_B \xrightarrow{\tilde{g}} h_C \to \bar{0} \tag{5.8}$$

kısa tam dizisi için $\tilde{s} : h_C \to r_B$ fuzzy parçalanan olsun. Bu durumda $r_B \cong m \oplus h$ [44].

$q_C = \{q^n_{C_n}, \tilde{\partial}_n\}$, $n_D = \{n^n_{D_n}, \tilde{\partial}'_n\}$ fuzzy zincir kompleksler ve $\tilde{j} = \{\tilde{j}_n : q^n_{C_n} \to n^n_{D_n}\}$ bu komplekslerin bir fuzzy homomorfizmi olsun. Böylece $h_E(\tilde{j}) = \{h^n_{E_n}, \tilde{\partial}''_n\}$ zincir kompleksi

$$h^n_{E_n} = q^{n-1}_{C_{n-1}} \oplus n^n_{D_n}, \;\; \partial''_n(a,b) = (-\partial_{n-1}(a), j_{n-1}(a) + \partial'_n(b)) \tag{5.9}$$

tanımlanır. Eğer $\tilde{i}: q_C \to h_E(\tilde{j}),\ \tilde{p}: h_E(\tilde{j}) \to n_D$ dönüşümleri sırasıyla gömme ve izdüşüm dönüşümleridir. Bu durumda,

$$\tilde{0} \to q_C \xrightarrow{\tilde{i}} h_{E(\tilde{j})} \xrightarrow{\tilde{p}} n_D \to \tilde{0} \tag{5.10}$$

fuzzy kısa tam dizidir. Eğer $n_D = 0$ ise bu durumda $h_E(\tilde{j})$ fuzzy zincir kompleksi q_C^+ ile gösterilir. $H_n(q_C^+) = H_{n-1}(q_C)$ olduğu açıktır.

$$C' = \{C'_q, \partial'_q : C'_q \to C'_{q-1}\},$$
$$C = \{C_q, \partial_q : C_q \to C_{q-1}\},$$
$$C'' = \{C''_q, \partial''_q : C''_q \to C''_{q-1}\}$$

zincir kompleksler olmak üzere,

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0 \tag{5.11}$$

Zincir komplekslerin kısa tam dizisi olsun. Burada $i = \{i_q : C'_q \to C_q\}$, $p = \{p_q : C_q \to C''_q\}$ zincir komplekslerin morfizmasıdır.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i_{q+1}} & C & \xrightarrow{p_{q+1}} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial''_{q+1} & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i_q} & C & \xrightarrow{p_q} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i_{q-1}} & C & \xrightarrow{p_{q-1}} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{5.12}$$

Lemma 5.9. Zincir komplekslerin [35]

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0 \qquad (5.13)$$

kısa tam dizisi için öyle $\partial_{*q} : H_q(C'') \to H_{q-1}(C')$ homomorfizması vardır ki

$$\ldots \longleftarrow H_{q-1}(C') \xleftarrow{\partial_{*q}} H_q(C'') \xleftarrow{p_{*q}} H_q(C) \xleftarrow{i_{*q}} H_q(C') \longleftarrow \ldots \qquad (5.14)$$

homoloji grupların dizisi tamdır. (j_1, j_2, j_3)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{p} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow j_1 & & \downarrow j_2 & & \downarrow j_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1' & \xrightarrow{i_1} & C_1 & \xrightarrow{p_1} & C_1'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (5.15)$$

diyagramını kamütatif yapacak biçiminde verilsin. ∂_{*q} aşağıdaki şekilde zincir komplekslerin kısa tam dizilerinin morfizması ise aşağıdaki diyagram komütatiftir.

$$\begin{array}{ccc} H_q(C'') & \xrightarrow{\partial_{*q}} & H_{q-1}(C') \\ \downarrow j_{3*q} & & \downarrow j_{1*q} \\ H_q(C_1'') & \xrightarrow{\partial_{1*q}} & H_{q-1}(C_1') \end{array} \qquad (5.16)$$

$$\forall [z] \in H_q(C'') = \ker \partial_q'' \big/ \operatorname{Im} \partial_{q+1}'' \quad \text{için} \quad \partial_{*q}[z] = \left[i_{q-1}^{-1} \circ \partial_q \circ p_q^{-1}(z) \right] \qquad (5.17)$$

Zincir komplekslerin homoloji dizisi tamdır. Fakat fuzzy zincir komplekslerde homoloji modüllerin dizisi genellikle tam değildir.

Örnek 5.10. $\partial_3(m,n,0,0) = (0,n,0,0)$, $\partial_2(m,n,k,l) = (m,n,0,0)$ olmak üzere ,

$$A : 0 \xrightarrow{0} A_3 = Z \otimes Z \otimes (0) \otimes (0) \xrightarrow{\partial_3} A_2 = Z \otimes Z \otimes Z \otimes 2Z \xrightarrow{\partial_2}$$

$$\xrightarrow{\partial_2} A_1 = Z \otimes Z \otimes (0) \otimes (0) \xrightarrow{0} 0$$

tanımlansın. $A = B = C$ olarak alınsın ve m_A, n_B, q_C aşağıdaki gibi tanımlansın. $i = 1,2,3$ için

$$m_i(x) = n_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{i+2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad , \qquad q(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{i+2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

tanımlansın. $\tilde{f} : m_A \to n_B$ ve $\tilde{y} : n_B \to q_S$ sırasıyla idantik ve sıfır dönüşüm olmak üzere,

$$\overline{0} \to m_A \to n_B \to q_C \to \overline{0}$$

fuzzy komplekslerin fuzzy kısa tam dizisidir. Böylece

$$H_3(m_A) = m|_{Z \times (0) \times (0) \times (0)}, \quad H_3(n_B) = n|_{Z \times (0) \times (0) \times (0)}, \quad H_3(q_C) = q|_{Z \times (0) \times (0) \times (0)}$$
$$H_2(m_A) = m|_{(0) \times (0) \times (0) \times 2Z}, \quad H_2(n_B) = n|_{(0) \times (0) \times (0) \times 2Z}, \quad H_2(q_C) = q|_{(0) \times (0) \times (0) \times 2Z}$$

ve $i \neq 2,3$ için $H_i(q_A) = H_i(n_B) = H_i(q_C) = 0$ elde edilir. $H_3(q_C)$ den $H_2(m_A)$ ya sıfırdan farklı $\tilde{w}$ fuzzy homomorfizma vardır [2].

∂_* morfizmasının tanımında ters görüntüler kullanıldığından ∂_* fuzzy homoloji modüllerin morfizması olmayabilir.

Aşağıda modüller kategorisinden ∂_* morfizmasının başka bir ifadesi verilmektedir.

$$f : C = \{C_q, \partial_q\} \longrightarrow C' = \{C'_q, \partial'_q\}, \ f = \{f_q : C_q \longrightarrow C'_q\} \tag{5.18}$$

zincir komplekslerin morfizması olsun.

$$C_f = \{C_{q-1} \oplus C'_q, \partial_q^{C_f} : C_{q-1} \oplus C'_q \longrightarrow C_{q-2} \oplus C'_{q-1}\} \tag{5.19}$$

zincir kompleksine f morfizmasının konisi denir. Burada

$$\partial_q^{C_f}(x,y) = \left(-\partial_{q-1}(x), \partial'_q(y) + f_{q-1}(x)\right) \tag{5.20}$$

biçimindedir.

$C' = 0$ ise bu durumda $C_f = \{C_{q-1}, -\partial_{q-1}\}$ elde edilir. Bu kompleks C^+ ile gösterilsin. $H_q(C_f) = H_{q-1}(C)$ olduğu açıktır.

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\ i\ } C \xrightarrow{\ p\ } C'' \longrightarrow 0 \tag{5.21}$$

zincir komplekslerin tam dizisinin parçalanan (splitting) olduğu varsayılsın. Bu durumda her q için $j_q : C_q \to C'_q$ ve $b_q : C''_q \to C_q$ morfizmaları vardır ve aşağıdaki koşullar sağlanır.

(1) $j_q \circ i_q = 1_{C'_q}$

(2) $p_q \circ b_q = 1_{C''_q}$

(3) $i_q \circ j_q + b_q \circ p_q = 1_{C_q}$

$$d_q = j_{q-1} \circ \partial_q \circ b_q : C''_q \xrightarrow{\ b_q\ } C_q \xrightarrow{\ \partial_q\ } C_{q-1} \xrightarrow{\ j_{q-1}\ } C'_{q-1} \tag{5.22}$$

homomorfizması ele alınsın.

Lemma 5.11. $d = \{d_q : C''_q \to (C'_q)^+\}$ zincir komplekslerin morfizmasıdır. $d_{*q} : H_q(C'') \to H_q(C')^+ = H_{q-1}(C')$ için $\partial_{*q} = d_{*q}$ eşitliği sağlanır.

İspat: $i_{q-2}\left(\partial'_{q-1} \circ d_q\right) = (i_{q-2}\partial'_{q-1})(j_{q-1}\partial_q b_q)$

$$= (\partial_{q-1} i_{q-1})(j_{q-1}\partial_q b_q)$$
$$= \partial_{q-1}(i_{q-1} j_{q-1})(\partial_q b_q)$$
$$= \partial_{q-1}(1 - b_{q-1} p_{q-1})(\partial_q b_q)$$
$$= \partial_{q-1}\partial_q b_q - \partial_{q-1} b_{q-1} p_{q-1}\partial_q b_q$$
$$= -\partial_{q-1} b_{q-1} p_{q-1}\partial_q b_q$$
$$= -\partial_{q-1} b_{q-1}(p_{q-1}\partial_q) b_q$$
$$= -\partial_{q-1} b_{q-1}(\partial''_q p_q\ ) b_q$$
$$= -\partial_{q-1} b_{q-1}\partial''_q (p_q b_q)$$
$$= -\partial_{q-1} b_{q-1}\partial''_q$$
$$= -(i_{q-2} \circ j_{q-2} + b_{-2} \circ p_{q-2})\ \partial_{q-1} b_{q-1}\partial''_q$$
$$= -\ (i_{q-2}(j_{q-2}\ \partial_{q-1} b_{q-1})\partial''_q - b_{q-2}(p_{q-2}\ \partial_{q-1}) b_{q-1}\partial''_q$$
$$= -i_{q-2} d_{q-1}\ \partial''_q - b_{q-2}(\partial''_{q-1} p_{q-1}\ ) b_{q-1}\partial''_q$$
$$= -i_{q-2} d_{q-1}\ \partial''_q - b_{q-2}\partial''_{q-1}(p_{q-1}\ b_{q-1})\partial''_q$$
$$= -i_{q-2} d_{q-1}\ \partial''_q - b_{q-2}\partial''_{q-1}\ \partial''_q$$
$$= -i_{q-2} d_{q-1}\ \partial''_q$$
$$= i_{q-2}(-d_{q-1}\ \partial''_q)$$

i_{q-2} monomorfizma olduğundan

$$\partial'_{q-1} \circ d_q = -d_{q-1} \circ \partial''_q \tag{5.23}$$

olur ve böylece $d = \{d_q\}$ ailesinin zincir komplekslerin morfizması olduğu ispatlanır. Aşağıda bunların eşitliği gösterilmektedir.

Keyfi $[z''] \in H_q(C'')$ için tanım gereği

$$\partial_{*q}[z''] = \left[i_{q-1}^{-1} \circ \partial_q \circ p_q^{-1}(z'')\right]$$
$$= \left[i_{q-1}^{-1} \circ \partial_q \circ b_q(z'')\right]$$

$$= \lfloor j_{q-1} \circ \partial_q \circ b_q(z'') \rfloor$$
$$= \lfloor d_q(z'') \rfloor$$
$$= d_{*q}[z'']$$

Teorem 5.12. $q'_{C'^q} = \{q'^q_{C'_q}, \tilde{\partial}'_q\}$, $q_{C^q} = \{q^q_{C_q}, \tilde{\partial}_q\}$, $q''_{C''^q} = \{q''^q_{C''_q}, \tilde{\partial}''_q\}$ ve $\tilde{i} = \{\tilde{i}_q : q'^q_{C'_q} \to q''^q_{C''_q}\}$, $\tilde{p} = \{\tilde{p}_q : q^q_{C_q} \to q''^q_{C''_q}\}$ olmak üzere,

$$0 \longrightarrow q'_{C'} \xrightarrow{\tilde{i}} q_C \xrightarrow{\tilde{p}} q''_{C''} \longrightarrow 0 \tag{5.24}$$

fuzzy modüllerin zincir komplekslerinin parçalanan kısa tam dizisi ise homoloji modüllerin aşağıdaki dizisi tamdır [14].

$$\mathbf{L} \to H_q(q_{C'}) \to H_q(q_C) \to H_q(q_{C''}) \to H_{q-1}(q_{C'}) \to \mathbf{L} \tag{5.25}$$

İspat: Fuzzy modüller kategorisinde homoloji dizinin tam olmaması $\partial_{*q} : H_q(q_{C''}) \to H_{q-1}(q_{C'})$ homomorfizmasının fuzzy modüller kategorisinin fuzzy morfizması olmamasından kaynaklanıyor. Teoremin koşulunda bir önceki teoreme dayanarak $\partial_{*q} = d_{*q}$ yazılabilir. $d = \{d_q\}$ zincir komplekslerin morfizması ve homoloji funktor fuzzy modüller kategorisinden fuzzy modüller kategorisine giden kovaryant funktor olduğundan $\partial_{*q} = d_{*q} : H_q(q_{C''}) \to H_{q-1}(q_{C'})$ fuzzy modüllerin homomorfizmasıdır.

Teorem 5.13. Fuzzy modüllerin parçalanan

$$\tilde{0} \to q_{A'} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} n_A \to h_{A''} \to \tilde{0} \tag{5.26}$$

fuzzy kısa tam dizisi için ve her bir m_B fuzzy modülü için

$$\tilde{0} \to q_{A'} \otimes m_b \xrightarrow{\tilde{\alpha} \otimes \tilde{1}} n_A \otimes m_B \to h_{A''} \otimes m_B \to \tilde{0} \tag{5.27}$$

dizisi fuzzy parçalanan kısa tam dizidir.

İspat: Önermeyi ispatlamak için $\tilde{a} \otimes \tilde{1}$ fuzzy homomorfizmasının sol tersinin olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{a}$ fuzzy homomorfizmasının $\tilde{a}'$ sol tersi vardır. Böylece $\tilde{a}' \otimes \tilde{1}$ fuzzy homomorfizması $\tilde{a} \otimes \tilde{1}$ fuzzy homomorfizmasının bir sol tersidir.

Her bir $q_C = \{q_{C^n}^n, \tilde{\partial}_n\}$ fuzzy zincir kompleksi ve m_G fuzzy modülü için tensör çarpımı funktor olduğundan

$$q_C \otimes m_G = \{q_{C_n}^n \otimes m_G, \tilde{\partial}_n \otimes \tilde{1}_{m_G}\} \tag{5.28}$$

ailesi fuzzy modüllerin bir fuzzy zincir kompleksidir.

Tanım 5.14. $H_n(q_C \otimes m_G)$ fuzzy homoloji modülü ve q_C fuzzy zincir kompleksine m_G katsayılı homoloji modülü denir ve $H_n(q_C; m_G)$ ile gösterilir.

Önerme 4.10 dan fuzzy zincir komplekslerin

$$\tilde{0} \to q_{C'}^{/} \longrightarrow q_C \longrightarrow q_{C''}^{//} \to \tilde{0} \tag{5.29}$$

parçalanan kısa tam dizisi için ve her m_G fuzzy modülü için

$$\tilde{0} \to \tilde{q}_{C'}' \otimes m_G \to q_C \otimes m_G \to q_{C''}'' \otimes m_G \to \tilde{0} \tag{5.30}$$

dizisi parçalan fuzzy kısa tam dizisidir. Bu durumda Teorem 4.9 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 5.15. Fuzzy zincir komplekslerin parçalanan fuzzy kısa tam dizisi için

$$\tilde{0} \to q_{C'}^{/} \longrightarrow q_C \longrightarrow q_{C''}^{//} \to \tilde{0} \tag{5.31}$$

ve her m_G modülü için fuzzy homoloji modüllerin

$$\mathbf{L} \leftarrow H_{n-1}(q'_{C'}; m_G) \longleftarrow H_n(q''_{C''}; m_G) \leftarrow H_n(q_C; m_G) \leftarrow H_n(q'_{C'}; m_G) \leftarrow \mathbf{L} \qquad (5.32)$$

dizisi tamdır ve funktoriyeldir.

KAYNAKLAR

1. Alderton, I., W., "Function spaces in fuzzy topology", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 32, 115-124, (1989).

2. Ameri, R. , Zahedi, M.M. , "Fuzzy chain complex and fuzzy homotopy." ***Fuzzy Sets and Systems,*** 112, 287-297, (2000).

3. Bourbaki, N., "Algebre Homologique", Elements de Mathematique, ChapitreX, ***Mason- Paris- New York-Barcelone- Milan***, (1980).

4. Chang, C.L., Fuzzy topological spaces, ***J. Math. Anal. Appl.*** 24, 182-190, (1968).

5. Chong-You, Z., "L-fuzzy unit interval and fuzzy connectedness", ***Fuzzy Sets and Systems***, 27, 73-76, (1988).

6. Christoph, F., T., "Quotient fuzzy topolology and local compactness", ***J. Math. Anal. Appl.*** 57, 497-504, (1977).

7. Cuvalcıoğlu, G., Citil, M., "On fuzzy homotopy theory", ***Adv. Stud. Contemp. Math.,*** 12, No 1, 163-166, (2006).

8. Dang, S. , Behera, A. "On fuzzy compact-open topology." ***Fuzzy Sets and Systems,*** 80, 377-381, (1996).

9. Eilenberg, S. , Steenrod, N. , "Foundations of Algebraic Topology", ***Princeton University Press, Princeton, New Jersey,*** 1952.

10. Gang-Li, S., "Inverse limits in category LTOP(I)", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 108, 235-241, (1999).

11. Gang-Li, S., "Inverse limits in category LTOP(II).", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 109, 291-299, (2000).

12. Gang-Li, S., Some results on $\widetilde{I}(L)$ and $\widetilde{R}(L)$, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 82, 103-110, (1996).

13. Gündüz, Ç., and Bayramov, S., "Algebraic structures on fuzzy homotopy sets." , ***Proceeding Of The Jangjeon Mathematical Society*** , 9, No.2, pp. 161-173, (2006).

14. Gündüz, Ç., and Bayramov, S., "Homotopy relation on the category of ınverse and direct spectra of topological spaces" , ***Transactions of NAS of Azerbaijan*** 29-38

15. Gündüz, Ç., and Bayramov, S., "On fuzzy homotopy sets", ***Advances in Theoretical and Applied Mathematics***, Vol.1, No.3, (2006).

16. Herrlich, H., "Topological functors", ***Gen. Topol. Appl.*** 4:125-142 (1974).

17. Hoffman,R.E., Topological functors and factorizations, ***Arch. Der Math***. ,26: 1-7 (1975).

18. Hong-xing, L., Cheng-zhong, L., and Pei-zhuang, W., "The cardinality of fuzzy sets and the continuum hypothesis.", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 55, 61-77, (1993).

19. Hu, S-T. , "Homotopy Teory", ***Academic Press, New York and London***, 1959.

20. Hutton, B., "Normality in fuzzy topological space" ***J. Math. Anal. Appl.*** 50, 74-79, (1975).

21. Isaac, P., "On projective L-modules", ***International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,*** Issue 5, 747-754, (2005).

22. Kohli, J.K., Prasannan, A.R., "Fuzzy topologies on function spaces", ***Fuzzy Sets and Systems,*** 116,415-420, (2000).

23. Lopez-Permouth, S.R., " On categories of fuzzy modules", ***Information Sciences,*** 52, 211-220, (1990).

24. Lopez-Permouth, S.R., " Lifting Morita Equivalence to categories of fuzzy modules", ***Information Sciences,*** 64, 191-201, (1992).

25. Lowen, R., "Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness", ***J. Math. Anal. Appl.*** 56, 621-633, (1976)

26. Lowen, R., "Initial and final fuzzy topologies and fuzzy Tychonoff theorem, ***J. Math. Anal. Appl.*** 58, 11-21, (1977)

27. Massey, W., S., "Singular homology theory Springer", ***New York***, (1980).

28. Maclane, S., "Categories for the working mathematician", ***Berlin-Hidelberg-New York, Springer***, (1972).

29. Pan, F.Z., “Fuzzy finitely generated modules”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 21, 105-115, (1987).

30. Rodabaugh, S., E., “Connectivity and the L-fuzzy unit interval” ***Rocky Mountain J. Math.*** 12, 113-121, (1982).

31. Rosenfeld, A., Fuzzy groups, ***J. Math. Anal. Appl***., 35, 312-317, (1971).

32. Salleh, A.R., “The homotopy property of the induced homomorphisms on homology groups of fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 56, 111-116, (1993).

33. Salleh, A.R.B., and MD.TAP, A.O.B., “The fundamental group of fuzzy topological spaces.”, ***Sains Malaysiana,*** 15(4), 397-407, (1986).

34. Salleh, A.R.B., and MD.TAP, A.O.B., “The fundamental groupoid of fuzzy topological spaces.”, ***Sains Malaysiana,*** 16(4), 447-454, (1987).

35. Spanier, Edwin H. , “Algebraic Topology”, ***Mc Graw-Hill Book Company***, ***California, Berkeley***, (1966).

36. Srivastava, R., and Srivastava, A.K., “On fuzzy Hausdorff concepts”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 17, 67-71, (1985).

37. Switzer, R. M., “Algebraic Topology Homotopy and Homology”, ***Springer, Verlag***, (1975).

38. Wang-jin, L., Chong-you, Z., “Singular homology groups of fuzzy topological spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 15, 199-207, (1985).

39. Wong, C.K., “Fuzzy topology: product and quotient theorems”, ***J. Math. Anal. Appl.*** 45, 512-521, (1974)

40.Ying-Ming, L. , Mao-Kang, L. , “Fuzzy Topology”, ***World Scientific, Singapore***, 1997.

41. Ying-Ming, L., “A note on compactness in fuzzy unit interval” ***Kexue Tongbao Selected Papers, Mathematics-Physics-Chemistry Series***, (in Chinese), 33-35, (1980).

42. Xu, J.J., “The F-compactness in L-fuzzy topological spaces, ***Chinese Quart. J. Math.*** 5(3), 104-105, (1990).

43. Zadeh, L.A., Fuzzy sets, ***Inform. and Control*** 8, 333-353, (1965)

44. Zahedi, M.M., and Ameri, R.A, “Fuzzy exact sequence in category of fuzzy modules.”, ***The Journal Of Fuzzy Mathematics,*** Vol.2, No.2, 409-424, (1994).

45. Zahedi, M.M., and Ameri, R.A, “Fuzzy flat and faithfully flat R-modules.”, ***The Journal Of Fuzzy Mathematics,*** Vol.5, No.4, (1997).

46. Zahedi, M.M., and Ameri, R.A, “On fuzzy projective and injective modules.”, ***The Journal Of Fuzzy Mathematics,*** Vol.3, No.1, 181-190, (1995).

47. Zahedi, M.M., Some results on fuzzy modules, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 55, 355-361, (1993).

48. Zhao, D. S., The N-compactness in L-fuzzy topological spaces, ***J. Math. Anal. Appl.*** 128, 64-79, (1987).