KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYI PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

YÜKSEK LİSANS

Fizikçi Şahin ASLAN

Anabilim Dalı: Fizik

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Emine CAN

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYI PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizikçi Şahin ASLAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 27 Aralık 2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 18 Ocak 2008

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yrd.Doç.Dr. Emine CAN	Yrd.Doç.Dr. Aylin BAYRAK	Prof.Dr. Afet GOLAYOĞLU
(.....)	(.....)	(.....)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde başlangıç, sınır ve ek koşullar kullanılarak bilinmeyen katsayıların bulunması ve modellemelerinin yapılması uygulamalı bilimlerin güncel problemlerden biridir. Bu tip problemlerin modellenmesi çalışmalarda daha ekonomik sonuçlar vermiştir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve destekleyen danışmanım, sayın Yrd.Doç. Dr. Emine Can'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., FİZİK BÖLÜMÜ) ve Yrd. Doç. Dr. Aylin Bayrak'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., MATEMATİK BÖLÜMÜ) yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ…….. i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ..... iii
TABLOLAR DİZİNİ iv
ÖZET……. ..... ……..v
İNGİLİZCE ÖZET……..... ……..vi
1. GİRİŞ…… 1
2. YARI LİNEER PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK PARAMETRESİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI..... 21
2.1. Trace-Type-Functional (TTF) Formülasyonu..... 22
2.2. Sonlu Fark Şemaları 23
2.2.1. Açık şema..... 24
2.2.2. Kapalı şema..... 25
2.2.3. Crank-Nicolson şeması 27
3. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI 24
3.1. Sayısal Test 1.. 27
3.2. TTF Metodu ile Sayısal Çözüm 32
3.3. Sayısal Test 2… 33
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 39
KAYNAKLAR 41
EKLER……44
EK-1 Parabolik Denklemler İçin Sonlu Fark Şemaları……...44
EK-2 Takip Yöntemi (Tridiagonal Matrix Algoritm)..……...51
Ek-3 Bilgisayar Programları 53
KİŞİSEL YAYINLAR..... 61
ÖZGEÇMİŞ 62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\Omega_{h\tau}$ kafesi…….23
Şekil 2.2. Açık şema……25
Şekil 2.3. Kapalı şema…….28
Şekil 2.4. Crank-Nicolson şema……...28
Şekil 3.1. Açık şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1)…….34
Şekil 3.2. Açık şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test 2)…….34
Şekil 3.3. Kapalı şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1)……..35
Şekil 3.4. Kapalı şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test 2)……..35
Şekil 3.5. Crank-Nicolson şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1)…….36
Şekil 3.6. Crank-Nicolson şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test 2)…….36

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. q=0, M=10001 ve N=51 için u(x,t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları…….37
Tablo 3.2. q=0, M=10001 ve N=51 için p(t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları…….37
Tablo 3.3. q=2, M=10001 ve N=21 için u(x,t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları…….....38
Tablo 3.4. q=2, M=10001 ve N=21 için p(t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları…….38

PARABOLİK DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYI PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

Şahin ASLAN

Anahtar Kelimeler: Parabolik denklemler, Ters problemler, Kaynak parametresi, Sonlu fark şemaları

Özet: Bu çalışmada, bilinmeyen kaynak parametresinin bulunması ile ifade edilen ters parabolik problemin çözümü için sonlu fark şemaları ele alınmıştır. Bu parametre standart sınır ve başlangıç koşulları ve çözüm bölgesinin iç noktasında çözüm üzerinde verilmiş ek koşul ile birlikte ele alınmış lineer olmayan parabolik denklemde zaman değişkenine bağlı katsayıdır.

Yapılan bu çalışmada, bilinmeyen kaynak parametresi ile ifade edilen ters problemlerin çözümü için TTF (Trace-Type–Functional) formülasyonu kullanılarak ele alınan problemlerdeki bilinmeyen katsayı ek koşul yardımı ile ortadan kaldırılmakta, problem yeniden başlangıç ve sınır değer problemi olarak ifade edilmekte ve standart çözüm yöntemleri uygulanmaktadır.

Ele alınan problem için açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemalarına uygulanmakta ve karşılaştırmalı analizi yapılmaktadır.

FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR UNKNOWN COEFFICIENT PROBLEMS IN A PARABOLIC EQUATIONS

Şahin ASLAN

Keywords: Parabolic equations, Inverse problems, Source parameter, Finite difference schemes

Abstract: In this work, finite difference schemes for the solution of the inverse problem of determining unknown source parameter in a parabolic differential equation are considered. This parameter is a coefficient depending on time of the solution in a linear parabolic equation subject to the specification of the solution at an internal point, along with the usual initial boundary conditions.

Here, the solution of this problem is obtained by using TTF (Trace- Type-Functional) formulation. The strategy of method is to use overspecified condition to eliminate the unknown function from the partial differantial equation and to can reformulate the consideret problem as a inital-boundary value problem.

This problem can be solved by the finite difference schemes such as Explicit, Implicit and Crank-Nicolson schemes.

1. GİRİŞ

Doğa olaylarının pek çoğu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu tip problemler hiperbolik, parabolik veya eliptik tipte denklemlerdir.

Fiziksel olayların birçoğu genellikle kısmi diferansiyel denklemlerde ters problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin uzayda gönderilen elektromanyetik dalgaların saçılmasına dayanarak sınır ölçüm sonuçlarını kullanarak yeraltı kaynaklarının bulunması, gözenekli bir ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, radyoaktif izotopların bozunumu ve ısı kaynağının belirlenmesine yönelik bilinmeyen kaynak teriminin veya kapasite teriminin belirlenmesi v.s. ters problemlerle ifade edilmektedir (Bellassoued ve Yamamoto, 2006). Ters problem, çoğu zaman çözümün kararsızlığı ile ilişkili olarak doğru formüle edilmemiş (ill-posed) problemdir. Bu problemlerin çözümü için Tikhonov regularizasyon yöntemi, Freidman iterasyon yöntemi ve benzeri gibi özel yöntemler gerekmektedir.

Ters katsayı problemleri 1955 yılında Lehner ve Wing, 1957 yılında Bykhovsky, 1959-1960 yıllarında Lax ve Phillips, 1961 yılında Sobolevsky, 1962 yılında B.F. Jones, Kato ve Fujita tarafından ele alınmıştır. Daha sonra J.R. Cannon ve P.C. Duchateau da dahil çok sayıda bilim adamı tarafından araştırılmış ve bu konuda yüzlerce yayınlanmış makaleler vardır. Parabolik denklemlerin uygulaması ve analiz edilmesi, kaynak kontrol parametresinin geliştirilmesinde sürekli dikkat çekmektedir. Ters problemlerin pratik uygulamaları için, deneysel bulgular son derece büyük önem taşır. Bazı fiziksel parametreler (onlara f diyelim) doğrudan deneysel olarak elde edilemez, yalnız onların etkisi olan g fonksiyonu ölçülebilen bir değer olabilir. f ve g arasında fiziksel kurallara dayanan bir ilişki, genel olarak

$$Af = g \tag{1.1}$$

denklemi ile ifade edilmektedir. Bu denklemde A operatördür; f verildiği zaman g'nin hesabı düz problem olarak, g verildiği zaman f'in belirlenmesi ise ters problem olarak isimlendirilir.

Bu problemler deneysel olarak ölçülebilen bir niceliği varsayarak deneysel olarak ölçülemeyen ve denklemler ile ifade edilen başka bir niceliğin bulunmasını içerir.

En genel halde parabolik denklemler,

$$u_t = F(x,t,u,u_x,u_{xx},p) \tag{1.2}$$

olarak ifade edilir.

Parabolik denklemlerle ısı transferi, difüzyon olayları ve popülasyon dinamiği gibi problemleri ifade etmekte ve bu denklem fiziksel korunum kanunlarından (enerjinin korunumu kanunu, kütlenin korunumu kanunu ve momentumun korunum kanunu) elde edilmektedir.

(1.2) denklemindeki p giriş verileri, denklemin katsayıları veya bu denklemin çözümünün var ve tek olması için verilen sınır ve başlangıç koşulları olabilir. Bu katsayılar ısı transferi denkleminde ısı geçirgenlik katsayısı, ısı kaynakları için kontrol fonksiyonu v.s. ifade edilmektedir. p verildiğinde, (1.2) denkleminin düzgün formüle edilmesi için, yeterli bir teori vardır. p bilinmiyorsa, bu fonksiyonu elde edilmek için ek koşula ihtiyaç vardır.

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar, iç noktalarda ve sadece çözümün arandığı bölge sınırlarında olmak üzere iki türlü verilebilir. Bazı durumlarda ek koşulların iç noktalarda elde edilmesi imkansız olduğundan, sadece sınırda verilen koşullarda problem çözülmektedir. Ele alınan fiziksel süreçte çeşitli ölçme şekilleri olabilir. Bazı durumlarda ek koşul için yapılan ölçüm şekli seçilebilir. Bu ek koşullar çoğu zaman lokal özelliğe sahiptirler. İki farklı tip vardır:

i) Dirichlet tipi, $u(x_0,t) = h(t) \qquad 0 \le t \le T$

ii) Neumann tipi, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,t) = h(t) \qquad 0 \le t \le T$

Bazı durumlarda ek koşullar, spektrumun ölçümüyle, sistemin toplam enerjisinin ölçümüyle, periyodik verilerle veya zaman üzerinden integrali alınmış verilerle verilmiş ise yerel olmayan özelliğe sahiptir; bu koşullar aşağıda verilmiştir:

$$\alpha u(0,t) + \beta u(1,t) = h(t),$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = h(t),$$

$$\int_0^1 \left|u(x,t)\right|^P dx = h(t),$$

$$\int_0^t k(t-\tau)u(x_0,\tau)d\tau = h(t).$$

Ele alınan ters problemlerin katsayılarını bulmak için

$$u_t = u_{xx} + a(t)u_x + b(t)u + c(t), \qquad x \in (0,1), \ \ t \in (0,T], \tag{1.3}$$

denkleminden, başlangıç koşulu

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1.4}$$

sınır koşulları

$$u(0,t) = f_1(t), \quad u(1,t) = f_2(t), \qquad t \in (0,T], \tag{1.5}$$

$$u_x(0,t) = g(t), \quad u_x(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T] \tag{1.6}$$

ve ek koşul

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t), \qquad t \in (0,T] \tag{1.7}$$

kullanarak $a(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ katsayılarının belirlenmesi problemini ele alalım.

Burada $\varphi(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g(t)$ ve $E(t) \neq 0$ bilinen fonksiyonlardır. $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonlarını bulmaya yönelik problem ise ters problemdir. Amacımız doğrudan deneysel ölçümle bulunamayan bu bilinmeyen parametreleri bulmaktır. Eğer u sıcaklıkla ilgili bir fonksiyon ise problemimiz $a = a(t)$, $b = b(t)$ ve $c = c(t)$ kontrollerini bulmaya yönelik kontrol problemi halini almaktadır (Cannon ve diğ., 1990).

Eğer u kimyasal tepkimeyle ilgili bilinmeyen fonksiyon ise bu durumda $a(t)$ ortalama hızı (sürüklenme hızı), $b(t)$ bozunmanın büyüklüğünü ve $c(t)$ kaynağın gücünü belirtmektedir.

(1.3)-(1.7) problemine baktığımızda eğer $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ ve $u(x,t)$ ters probleme ait çözüm fonksiyonları ise aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$f_1^{'}(t) = u_{xx}\big|_{x=0} + a(t)g(t) + b(t)f_1(t) + c(t),$$

$$f_2^{'}(t) = u_{xx}\big|_{x=1} + a(t).0 + b(t)f_2(t) + c(t),$$

$$E^{'}(t) = -g(t) + a(t)\big(f_2(t) - f_1(t)\big) + b(t)E(t) + c(t)$$

Böylece bilinmeyen $a = a(t)$, $b = b(t)$ ve $c = c(t)$ 'nin çözümü

$$\begin{vmatrix} g(t) & f_1(t) & 1 \\ 0 & f_2(t) & 1 \\ f_2(t) - f_1(t) & E(t) & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1^{'}(t) - u_{xx}\big|_{x=0} \\ f_2^{'}(t) - u_{xx}\big|_{x=1} \\ E^{'}(t) + g(t) \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

sistemi elde edilir.

Parabolik denklemlerin uygulamalarına örnekler olarak;

Isı İletimi: $u_t - \vec{\nabla}.(D\vec{\nabla}u) = f$

Kimyasal Kinetik: $u_t - D_1 u_{xx} = f_1(u,v)$

$$v_t - D_2 v_{xx} = f_2(u,v)$$

Nüfus Dinamiği: $\dfrac{dP}{dt} = \alpha P$ veya $\dfrac{\partial P}{\partial t} - DP_{xx} = f(P)$

verilebilir.

Burada D difüzyon katsayısı ve f kaynak terimdir. Yukarıdaki hallerin hepsinde, standart başlangıç ve sınır koşulları verilir.

Fiziksel modeller başlangıçta "KARA KUTU" lardır; çünkü temeli oluşturan sürecin ayrıntıları tam olarak anlaşılmaz. Bu modeller adi ve kısmi denklemler biçiminde, tek denklem veya sistem olabilir.

(Başlangıç + sınır) koşulları $\Rightarrow$ $\boxed{\text{fiziksel süreç}}$ $\Rightarrow$ (iç bölge + sınır) bilgisi

Bu süreci belirten matematik modelin şekli hakkında korunum kanunlarından yola çıkarak bazı ön bilgiye sahip olabiliriz. Örneğin, sıklıkla aşağıdaki biçimdeki enerji korunumu uygulanır.

Toplam enerjideki değişme=Sınırda enerji kaybı + iç kaynaklardan enerji

Isı akış modeli için, E özgül enerjiyi, $\vec{Q}$ ısı akısını ve γ, Ω bölgenin iç kısmında üretilen ısıyı gösterirse şuna sahip oluruz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} E dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{Q}.\hat{n}\, dS + \int_{\Omega} \gamma dV = \int_{\Omega} (\vec{\nabla}.\vec{Q}) dV + \int_{\Omega} \gamma dV \tag{1.9}$$

İntegral içindeki fonksiyonlar üzerinde gereken düzgünlük koşulları içerisinde, bu bağıntıdan

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}.\vec{Q} + \gamma \tag{1.10}$$

elde edilir.

Özgül ısıyı $c \equiv \dfrac{\partial E}{\partial u}$ ile gösterirsek c, γ ve $\vec{Q}$ bilinmeyen u' ya bağlı iseler ve ilave

olarak $Q, \vec{\nabla} u$ ' ya monoton olarak bağlı ise, yarı lineer parabolik denkleme

$$c(x,t,u)u_t - \vec{\nabla}.\vec{Q}(x,t,u).\vec{\nabla} u = \gamma(x,t,u) \tag{1.11}$$

sahip oluruz.

$\vec{Q}$ ve $\vec{\nabla} u$ arasında $\vec{Q} = D\vec{\nabla} u$ şeklinde bir lineer bağıntı kabul edersek,

$$c(x,t,u)u_t - \vec{\nabla}.[D(x,t,u)\vec{\nabla} u] = \gamma(x,t,u) \tag{1.12}$$

denklemi çıkar. Bu model ne kadar iyidir? Bu, dahil edilen fiziğe, dahil edilen malzemelerin doğasına ve fiziksel kanunların doğası üzerinde ön kabullenmelere bağlıdır.

Bu modelle ifade edilen düz problem, c, D ve γ katsayılarını, uygun olan başlangıç ve sınır koşullarını vermek (ana veriler) ve bunları kullanarak $u(x,t)$ bilinmeyen çözümü elde etmektir.

Ters problem ise ek verileri vererek hem bilinmeyen katsayıların birini veya birden fazlasını hem de *u*'yu elde etmektir. Örneğin *D*'nin değişkenlerine bağlılığını elde etmek istersek, deneyler yapmaya mecburuz. Deneylerden giriş ve çıkış verilerini bilerek D'yi elde etme problemi ters probleme klasik bir örnektir.

Genel halde, D'nin *x,t,u* ve $\vec{\nabla} u$ 'nun karmaşık bir fonksiyonu olduğu beklenebilir. Özel durumlarda *D* daha basit bir bağlılığa sahip olabilir. Şayet malzeme çok düzgün ise, malzeme katsayılarının *x* uzaysal değişkene bağlı olacağını beklemeliyiz.

İlave olarak, malzeme özellikleri, bağlı değişkenler sabit tutuldukları taktirde, zamanla değişmezler, o zaman katsayıların *t*'ye sıkı bağlı olduklarını bekleyebiliriz. Böyle durumlarda, sadece bağımsız değişkenlere ve belki gradientlere fonksiyonel bağlılık kabul edilmesi mümkündür. Bu bir anlamda, lineer olmayan katsayının *x*'e nazaran *t*'ye daha sıkı bağlı olduğu durumdur. Eğer $u(x,t)$ uzaysal olarak yavaş değişiyorsa, o zaman $D(u(x,t)) \approx D(t)$ 'dir.

D difüzyon katsayısı *x*'in bir fonksiyonu ise, genellikle iç bölge ölçümlerine ihtiyaç vardır veya birçok (belki sonsuz) sınır ölçmelerine ihtiyaç duyabiliriz.

$\left[\vec{\nabla}.(D(x)\vec{\nabla}u)=0\right]$ denkleminde $D(x)$ katsayısını elde etme hali Pilant (1988) tarafından ele alınmıştır.

Eğer D tek başına u'nun bir fonksiyonu ise, bazı hallerde bir tek sınır ölçmesinin yeterli olduğu gösterilebilir. Bu problemlerin her birinde kullanılan yöntemler tamamen farklıdırlar.

Eğer $D=D(t), D=D(x)$ veya $D=D(u)$ bağlılığını biliyorsak, modeli bu bağlantıya göre oluşturabiliriz.

Bir ilk yaklaşım için D'ye ait bir açılımda ilk birkaç terime karşılık gelmek üzere

$$D(x,t,u)\approx D_1(x)+D_2(u)+D_3(t) \tag{1.13}$$

düşünülebilir. Eğer terimlerden biri diğerlerinden üstün ise, bir ön bağıntı elde edebiliriz ve mümkün şekilde ana bağlılığın biçimini sabit tuttuktan sonra diğer terimleri yeniden elde edebiliriz.

Fiziksel süreci ifade eden matematiksel modeldeki değişmeyen terimler ihmal edilirler. Basitleştirilen modelin doğruluğu ancak deney yapma ile veya veriye uygun yaparak test edilebilir.

Belirli parametre bölgesinde, basitleştirilen model uygun olabilir, ama geçerlilik limitleri genişletildiğinde, söz konusu sürece dönülmelidir ve model yeniden ele alınmalıdır.

Eğer büyük gradientler mevcut ise, $\vec{Q},\vec{\nabla}u$'ya doğrusal olmayan bir tarzda bağlı olabilir. Eğer süreç denge durumunda değilse, daha karmaşık bir bağlılık meydana gelebilir. Bunun bir örneği olarak, akı kanununda zamana göre değişim bağlılığı olması halini göz önüne alabiliriz; yani, $\vec{Q}$ akısının ani olmayan şekilde $\vec{\nabla}u$ gradientine yanıt verdiği hali. Böylece, karakteristik bir ε durulma zamanı vardır. Bir ilk yaklaşım için,

$$\varepsilon\partial_t\vec{Q}+\vec{Q}=D_0\vec{\nabla}u \qquad D_0=sabit, \qquad \varepsilon<<1 \tag{1.14}$$

olduğunu kabul ederek,

$$\vec{Q} = D_0 \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-(\frac{1}{\varepsilon})(t-\tau)\right] \vec{\nabla} u(x,\tau) d\tau$$
$$= k^* D_0 \vec{\nabla} u, \qquad k^* = \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-(\frac{1}{\varepsilon})(t-\tau)\right] d\tau \tag{1.15}$$

konvolüsyonuna sahip oluruz ve

$$u_t - k^* \ \vec{\nabla}.(D_0 \vec{\nabla} u) = \gamma \tag{1.16}$$

bir ısı iletim denklemi elde edilir.

Doğrusal olmayan bağlılıkların birçok tipinden hangisinin mevcut olduğunu belirleme hassas şekilde modelleme sürecidir.

Genelde, katsayılar fiziksel önemi olan ölçümlemeleri ve parametreleri (örneğin, genlikleri, frekansları) yansıtırlar.

Sadece, bir (veya mümkün olabilen birkaç) parametrenin değiştiği deneylerin kurulmasına çalışılır ve tekrarlanan gözlem ile bilinmeyen katsayıların bağlılık biçimini yeniden elde etmek gerekir. Ne yazık ki; (hiç olmazsa onları çözmeye mecbur olan bu görünüm) fiziksel kanunları ifade eden çoğu denklem gerçekte lineer olmayan denklemdir.

Örneğin; nüfus dinamiği ile ilgili klasik problemi göz önüne alalım:

λ sabit bir çoğalma hızı ise

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \tag{1.17}$$

çoğalma kanununa götürür. Daha akla uygun bir model, kısıtlı çoğalmaya yol açan

$$\frac{du}{dt} = \lambda(u - \alpha u^2) = \lambda(1-\alpha u)u = (\lambda - \alpha\lambda u)u$$

mantıksal denklemdir. Gerçekte, nüfus

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

formlu daha karmaşık bir çoğalma kanununa sahip olabilir.

Eğer bir $t_1 < t < t_2$ zaman aralığı üzerinde bu adi diferansiyel denklemin u çözümünü kontrollü izleyebilirsek, f 'i elde edebiliriz. Örneğin $t_1 < t < t_2$ aralığında

$u(t) = h(t)$ ise,

$$\frac{dh}{dt} = f(h(t))$$

elde ederiz ve buradan

$$f(\xi) = \frac{dh}{dt}(h^{-1}(\xi))$$

ifade edilebilir. Bu gözlem, zaman bağlılığı ek koşulunu verildiği sınır yakınında uzay bağlılığından çok üstün olduğu, yani $|u_{xx}(x_0,t)| << |u_t(x_0,t)|$ olduğu, parabolik halde yakınsama sonuçlarının çoğuna temel teşkil eder (Pivant ve diğ., 1987a, 1987b, 1987c, 1988).

Parabolik denklemler için ters problemin klasik örnekleri şunlardır:

$c(u)u_t = u_{xx} + \gamma(x,t),$	$c \geq c_0 > 0$	bilinmeyen özgül ısı
$u_t = \partial_x(k(u)\partial_x u) + \gamma(x,t)$		bilinmeyen iletkenlik
$u_t = u_{xx} + f(u) + \gamma(x,t)$		bilinmeyen reaksiyon terimi
$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = F(u(0,t))$		bilinmeyen sınır koşulu

Bunlar kanonik tek katsayılı ters problemlerdir. Katsayılar R^1'den R^1'e fonksiyonlardır.

Fonksiyonel bağlılığı elde etmek için doğru boyutlulukta ilave veriler kullanmalıyız. İlave veriler $\Omega \times [0,T]$'nin bir alt kümesini R^1'e ifade etmelidir. Bu problemler,

$$u_t = a(t)\Delta u + \gamma(x,t)$$
$$u_t = \vec{\nabla}.(a(x)\vec{\nabla} u) + \gamma(x,t)$$
$$u_t = \Delta u + f(x,t)$$
$$u_t = \Delta u + p(x)u$$

bilinmeyen katsayının x veya t'ye bağlı olduğu ama u'ya bağlı olmadığı gibi ters problemlerin çözüm tekniklerine göre farklı problemlerdir.

Eğer problemlerde $x \in \Omega \subset R^n$ ise, bu problemler bilinmeyen katsayının birden fazla değişkenli bir fonksiyonu olduğu problemlerdir. Bu problemlerin örnekleri Cannon (1984)'de verir.

Ters problemlerin çözüm yöntemlerini açıklamak için

$$u_t - u_{xx} = f(u) \tag{1.18}$$

$$u_x(0,t) = g_0(t), \quad u_x(1,t) = g_1(t) \tag{1.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{1.20}$$

ve

$$u(0,t) = h(t) \tag{1.21}$$

ek koşuluyla verilen başlangıç sınır değer problemini ele alalım. Diğer katsayı problemleri Cannon ve diğ., (1978, 1980, 1992a) ve Pilant ve diğ., (1986, 1987a,1987c, 1988) tarafından ele alınmıştır.

Bu ters problemin çözümü h verildiğinde f için yazılan

$$R[f] = u(0,t;f) - h(t) = 0 \tag{1.22}$$

denklemin çözümüne denktir. Başka deyişle, düz problemi ifade eden $f \mapsto h$ eşleşmesinin tersi olan $h \mapsto f$ eşleşmesini elde etmemiz gerekir. Bu ters problemin çözümü için çoğu artık algoritmalar

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \iint K(x,y,t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau \tag{1.23}$$

Green fonksiyonları temsiline dayandırılır. Burada (1.22) denklemini çözmek için gereken koşul $\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial f}$'in tekil olmamasıdır. (1.23) denklemini $x = x_0$ noktasında yazarsak

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \iint K(x_0, y, t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau$$

elde ederiz. (1.22)-(1.23) denklemler sistemi I.tür lineer olmayan Volterra integral sistemidir. Bu sistem tüm (1.18)-(1.21) bilgilerini içermektedir; ama sistemi bu şekilde çözmek zordur.

Kısmi diferansiyel denklem şeklinde yazıldığı zaman

$$u_t(0,t) - u_{xx}(0,t;f) = f(u(0,t)) \tag{1.24}$$

$$= h'(t) - \psi_{xx}(0,t) - \iint K(0,y,t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau$$

veya $u(0,t) = h(t)$ olduğuna göre

$$f(h(t)) = h'(t) - u_{xx}(0,t;f)$$

elde edilir. Bu problem Lipschitz koşulunu sağlıyor ise elde edilen f ele alınan ters problemin çözümüdür (Pilant ve diğ., 1987c).

(1.22) artık denklemin çözümü için uygulanan iki tip yöntem parametre tipli yöntemlerdir.

Bu yöntemlerde f 'in sonlu $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ parametreler kümesiyle ifade edildiği, yani $f = f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ olduğu kabul edilmektedir.

Örneğin $f(\xi) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \phi_i(\xi)$ burada $\phi_i(\xi)$ temel fonksiyonlardır. Bu yöntemler aşağıda ele alınmıştır.

a) Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi

Ölçümlerin sayısı M, parametre uzayının boyutunu aşarsa bunun sonucunda aşırı tayin edilmiş olur. Yukarıdaki şekilde f 'ler için,

$$\min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^{M} w_i R[t_i]^2 \right\} = \min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^{M} w_i \left| u(x_0, t_i, f(\alpha_j)) - h(t_i) \right|^2 \right\} \tag{1.25}$$

problemi çözülür. Burada $w_i > 0$ ağırlıklardır. Fonksiyonel çok sayıda lokal minimuma sahipse bu zor bir optimizasyon problemidir. Bu da küçük kareler tipli yöntemlerin zorluklarından biridir.

b) Sıralama Yöntemi

Bu yöntem temel fonksiyonları değişmez yapar ve problemi aşağıdaki lineer olmayan cebirsel sisteme indirger.

$$R\left[f(\alpha_j)\right](t_j) = u(0, t_i, f(\alpha_j)) - h(t_i) = 0, \qquad i = 1, ..., N$$

Bu yöntem sonlu sayıda sıralanmış noktalarda farkı sıfırlayarak elde edildiğine göre sıralama yöntemi olarak isimlendirilir.

Ele alınan problemin çözümü için kullanılan yöntemlerden diğer bir sınıf iterasyon tipli yöntemlerdir. Bu yöntemler u 'nun f 'e göre Gateaux türevi ile bağlıdır. Gateaux türevi lineer kısmi diferansiyel denklemi sağlar; u fonksiyonunun f katsayısına nasıl bağlı olduğunu görmek için, $u(x, t; f + s\phi)$ niceliği oluşturulur.

$u(x,t;\, f+s\phi)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır değer problemini sağlar.

$$u_t - u_{xx} = f(u) + s\phi(u) \tag{1.26}$$

$$u_x(0,t) = g_0(t) \tag{1.27}$$

$$u_x(1,t) = g_1(t) \tag{1.28}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{1.29}$$

$\hat{u} \equiv \frac{\partial}{\partial s} u(x,t;\, f+s\phi)\big|_{s=0} \equiv J[f]\phi$ ile Gateaux türevi tanımlanırsa, $\hat{u}$ nın aşağıdaki denklemi kolayca sağladığı görülür:

$$\hat{u}_t - \hat{u}_x = f'(u)\hat{u} + \phi(u) \tag{1.30}$$

$$\hat{u}_t(0,t) = 0 \tag{1.31}$$

$$\hat{u}_x(1,t) = 0 \tag{1.32}$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \tag{1.33}$$

burada $u = u(x,t;\, f)$ Gateaux türevi $L_x = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ şeklinde tanımlı Frechet türevine eşdeğer olsun diye yeterince pürüzsüz olduğu kabul edilir. f ve ϕ fonksiyonlarının bilinmesi (1.24) kısmi diferansiyel denklemini ve onun çözümünü belirler. Gerçekten bu durumda $\hat{u}(x,t)$ çözümü için

$$\hat{u}(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \hat{K}(x,y,t-\tau)\phi(u(y,\tau))dyd\tau$$

elde edilir. Burada $\hat{K}$, $\partial_t - \partial_{xx} - f'(u)$ operatörü için Green fonksiyonudur.

Yöntemlerin (1.18)-(1.21) problemine uygulaması aşağıdaki iterasyon formülü ile yapılmaktadır:

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} + F\left[R(..., f^{(n)})\right]$$
$$= f^{(n)} + F\left[u(0,t;\, f^{(n)}) - h(t)\right]$$

burada F , sadece orijinde sıfır olan bir fonksiyondur. Ancak ve ancak $R \equiv 0$ ise bir çözüme ve yakınsaklığa sahip olunur. Ardışık iterasyon dizisi

$$f = T[f] = [I + FoRouo]f$$

eşlemesinin sabit noktasının bulunmasına eşdeğerdir. Bu iterasyon

$$f^{(n)} \mapsto u^{(n)} \mapsto R^{(n)} \mapsto F \mapsto f^{(n+1)}$$

şeklinde bilinir. Bu dizinin yakınsaklığı F dönüşümünün Frechet türevine bağlıdır. Eğer $\left| I + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial f} \right| < 1$ sağlanırsa, o zaman yakınsaklık belirlenebilir. İterasyonun yakınsaklığını garanti etmek için, F seçilebilir olmalıdır. F' in seçimi iterasyonun yakınsaklığını sağlar ve farklı iterasyon şemasını doğurur. Bu iterasyon şemaları:

a) Newton-Raphson

Bu yöntemle $R[f] = u(0,t;\, f) - h(t) = 0$ lineer olmayan denklemin çözümü

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - \left(\frac{\partial R}{\partial f}\right)^{-1} (f^{(n)}).R\left[f^{(n)}\right]$$

iterasyonu ile yapılır. $J \equiv \frac{\partial R}{\partial f}$ olarak

$$f_{n+1} = f_n - J[f_n]^{-1}.R[f_n] = f_n - J[f_n]^{-1}(u(0,t;\, f_n) - h(t)) \qquad (1.34)$$

yazılabilir. Tekrar düzenleyerek,

$$J[f_n]\ (f_{n+1} - f_n) = h(t) - u(0,t;\ f_n)$$

olur.

Bu denklemden f_{n+1} elde edilebilir. $\hat{u} \equiv J[f_n]\ (f_{n+1} - f_n)$ alınarak, $\hat{u}$'nun

$$\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} = f_n^{'}(u_n)\hat{u} + f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \tag{1.35}$$

$$\hat{u}_x(0,t) = 0 \tag{1.36}$$

$$\hat{u}_x(1,t) = 0 \tag{1.37}$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \tag{1.38}$$

sistemini ve $x = 0$'daki

$$\hat{u}(0,t) = h(t) - u(0,t;\ f_n) \tag{1.39}$$

ek koşulunu sağladığı gösterilebilir. Buradan,

$$\hat{u}(0,t;\ f) = \int_0^t \int_0^1 \hat{K}(0,y,t-\tau)\ \left[f_{n+1}(u_n(y,\tau))\right]\ dyd\tau$$

olduğu bellidir. Burada $\hat{K}$, $\partial_t - \partial_{xx} - f_n^{'}(u_n)I$ operatörü için Green fonksiyonudur. Bu I. tip Volterra integral denklemidir. $x = 0$ sınırı üzerinde (1.35) denklemi ve (1.40) sınır koşulu kullanılarak f_{n+1}'i elde etmek için

$$h^{'}(t) - u_t(0,t;\ f_n) - \hat{u}_{xx}(0,t;\ f^{(n+1)})$$

$$f_n^{'}(u_n(0,t))(h(t) - u_n(0,t)) + f_{n+1}(u_n(0,t)) - f_n(u_n(0,t)).$$

denklemi elde edilir. Bu f_{n+1} için lineer olamayan denklemdir ve iterasyonla çözülür.

b) Quasi-Newton

Bu yöntemle $J[f_n]^{-1}$'in yerine sabit K operatörü alınır ve bunun sonucunda

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - K.R\left[f^{(n)}\right]$$

elde edilir. Doğal Quasi-Newton yöntemi (1.35) içinde $f_n^{'}(u_n)$'nun $f_n^{'}(h)$ ile değiştirilmesiyle tanımlanmaktadır. Başka mümkün şema $J\left[f_n\right]$'in bazı iterasyonlar için sabit tutulmasıyla elde edilmektedir.

(1.18)-(1.21) ters problemine farklı bir yaklaşım (1.24)'ü h cinsinden f için çözersek elde edilir.

$$f(s) = h^{'}(h^{-1}(s)) - u_{xx}(0, h^{-1}(s)) \tag{1.40}$$

(1.35)'u kullanarak (1.18)'den f 'i ortadan kaldırırsak

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = h^{'}(h^{-1}(u(x,t))) - u_{xx}(0, h^{-1}(u(x,t))) \tag{1.41}$$

Trace Type Functional (TTF) denklemine ulaşırız. Bu denklemin düzgün tanımlı olması için ek koşul $0 \le h^{-1}(u(x,t)) \le t$ kısıtlamasını sağlamak zorundadır. Böylece (1.41) düz problemi, (1.41)'den elde edilen f ile $u(x,t)$ için çözülmektedir.

Bu yöntemin zorluğu elde edilen denklemin lineer olmayan denklem olmasından kaynaklanır. Bu yöntemle ilgili bazı sonuçlar zamana bağlı değişken için sonlu farklar uygulanarak Cannon (1990)'da elde etmiştir.

Eğer (1.24)'den aşağıdaki temsili

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \iint K(x, y, t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau$$

kullanılarak u yok edilirse

$$f(h(t)) = h^{'}(t) - \psi(0,t) - \iint K_{xx}(0, y, t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau \tag{1.42}$$

Fixed Point Projection (FPP) yöntemi elde edilir. FPP, TTF ve “sıralama” yöntemleri arasında bağlantı vardır. TTF denklemi için tam kapalı şema aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = h^{'}(h^{-1}(u^{(n+1)}(x,t))) - u_{xx}^{(n+1)}(0, h^{-1}(u^{(n+1)}(x,t))). \tag{1.43}$$

Bu ise aşağıdaki iki denklem çiftine ayrılabilir:

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = f^{(n+1)}(u^{(n+1)})$$

$$f^{(n+1)}(h(t)) = f^{'}(t) - u_{xx}^{(n+1)}(0,t)$$

$0 \le t \le t_j$ için bu yöntemle TTF denkleminin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilen monotonluğu ve aralık üzerinde verilen koşuldan dolayı $f^{(n+1)}$’in $\lfloor h(t_j), h(t_{j+1}) \rfloor$ aralığında değiştiği görülebilir. Bu ise (1.42)’deki lineer olmayan Volterra integral denkleminin $t > t_j$ için çözülmesi olarak yorumlanabilir.

$$f(h(t)) = h^{'}(t) - \psi(0,t) - \int_0^{t_j}\int_0^1 K_{xx}(0,y,t_{j+1}-\tau) f(u(y,\tau))dyd\tau \tag{1.44}$$

$$- \int_{t_j}^{t}\int_0^1 K_{xx}(0,y,t_{j+1}\tau) f(u(y,\tau))dyd\tau .$$

$0 \le t \le t_j$ için $u(x,t) \in \lfloor h(t_0), h(t_j) \rfloor$ olduğundan dolayı bu denklemin sağ tarafından ilk üç terim bilinmektedir. $\overline{f}$ için $u_t(0,t_j,\overline{f}) = h^{'}(t_j)$ olacak şekilde $h^{'}(t)$ düzenlenirse o zaman ,

$$\overline{f}(\overline{u}(t_j)) = h^{'}(t_j) - \psi(0,t_j) - \int_0^{t_j}\int_0^1 K_{xx}(0,y,t_j-\tau)\overline{f}(\overline{u}(y,\tau))dyd\tau$$

elde edilir.

Bir boyutlu durumda ek koşul ve sınır verilerin etkisini görmek ve modeli ona göre yapmak mümkündür. Yüksek boyutluda, bu strateji çalışmaz. Aşağıdaki ters kaynak problemi;

$$u_t - \Delta u = f(u) \qquad \Omega \times [0,T] \tag{1.45}$$

denkleminden

$$u = h \qquad \partial\Omega \times [0,T] \tag{1.46}$$

sınır koşulunu ve ek Neumann koşulunu

$$\frac{\partial \psi(x_0,t)}{\partial \upsilon} = g_0(t) \tag{1.47}$$

kullanarak $f(u)$ 'nun bulunması problemini ele alalım.

Ek koşul, bir boyutlu eğri üzerinde verilmiştir. (1.23) temsilini kullanarak,

$$g_0(t) = \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \upsilon} = \frac{\partial \psi(x_0,t)}{\partial \upsilon} + \iint \frac{\partial K(x_0,y,t-\tau)}{\partial \upsilon} f(u(y,\tau))dyd\tau$$

Bu Neumann veri-katsayı dönüşümü olup $f(u)$ için I. tip lineer olmayan integral denklemidir. Herhangi basit yöntemle bunun II. tipe nasıl dönüşeceğini görmek açık değildir. Jakobi iterasyon yönteminde benzeşim ile diagonal terimleri çıkarmak II. tip denklemi elde etmek için mümkündür;

$$\int_0^t k(t-\tau) f(h(t))d\tau = \frac{\partial \psi}{\partial \upsilon} - g(t) + \iint \frac{\partial K}{\partial \upsilon}(f(h(t))) - f(u(y,\tau))dyd\tau$$

burada $k(t)=\int_0^1 K(x_0 y,t)dy$ ile ifade edilir. Genelde bu, kesirli mertebeli çekirdeğe sahip integral denklemlerinin tersine götürür ki bunların tersi lokal diferansiyel operatör değildir.

(1.18)-(1.21) denklemlerini

$$E(t)=\int_0^t u(x,t)dx$$

ek koşulu ile ele alalım. [0,1] üzerinde (1.18)'yi integre edersek

$$E^{'}(t)=g_1(t)-g_0(t)-\int_0^1 f(u(y,t))dy \tag{1.48}$$

elde edilir.

Bu $K=1$ pürüzsüz çekirdeği ile, I. tip lineer olmayan Fredholm integral denklemidir. Bu durum iyi değildir; ama $f_1>f_2 \Rightarrow u_1>u_2 \Rightarrow E_1>E_2$ olduğu kolayca görülür ve E f'in monoton fonksiyonudur. Bu ise sıralama yöntemiyle, $E(t_j)=\int_0^1 \overline{f}(u(x,t_j))dx$ koşulunu sağlayan bir tek parça parça lineer $\overline{f}$ fonksiyonu verecektir.

Eğer u, bilinmeyen katsayı f'in artan bir fonksiyonu ve $f_1>f_2$ ise, $u(x_0 t;f_1)>u(x_0,t;f_2)$. Bu yöntemle sıralama yöntemleri oldukça kullanışlıdır. Eğer ilk değer f_0 bilinirse, $u_0<u<u_1$ aralığında $f(u)\approx f_0+M(u-u_0)$ yazılabilir ki burada M, $u(0,t_1;f)=h(t_1)$ koşulunu sağlamasından elde edilmiş bir eğimdir.

Monotonluk yüzünden bu denklemi sağlayan birden fazla olamayan M_0 değeri vardır. Bu yolla M_i'nin ardışık değerleri bulunur.

Düz problem lineer olmayan problem oldukları için $f\mapsto u|x,t;f|$ dönüşümü üzerinde hesapları çok kesin olmak zorundayız. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinde sınır değerlendirilmesinde tekil integral denklem teorisi kullanılmalıdır. Bu zorluk yüzünden, sayısal simülasyonlar çok faydalıdır.

Problemleri sonlu boyuta indirgemek zorlukları tam olarak kaldırmaz; ama gerçek veriler çoğu zaman kesikli oldukları için daha avantajlıdır.

FPP yöntemini şekil değişikliğe dayalı ters problemler, direk çözücüye göre yenilen stratejide çok az üstünlüğe sahiptir.

Bunun sebebi, her iterasyonda FPP yöntemi bir düz çözüme denktir. FPP yöntemi çok küçük sayıda iterasyonlar için yakınsaktır.

Ters problemleri ayrıklaştırdığımız zaman, pürüzsüzlük bizi ilgilendirmez.

Bu durum için bütün fonksiyonlar kısım kısım lineerdir veya düşük mertebeli parçalı parçalı polinomdur. Kesikli verilerle kesin dataya yaklaşmalıyız ve bu durumda ek koşullara hatalar eklenecektir. Bu çalışmada parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak parametresinin bulunması problemi incelenmiştir.

Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. bölümde, yarı lineer parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak parametresinin elde edilmesi için sonlu fark şemaları oluşturulmuştur. Problemin çözümü için uygulanan TTF (Trace Type-Formulation) metodu ele alınarak bu çözüm metodunun uygulaması hakkında gerekli açıklamalara yer verilmiştir.

3. bölümde, sayısal çözüm için test oluşturulmuş ve TTF metodu kullanılarak algoritma I ve algoritma II yazılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlara göre tablolar oluşturulmuştur.

4. bölümde, ele aldığımız problemin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiş ve daha sonra yapılacak çalışmalar da ele alınacak problemler ifade edilmiştir.

2. YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK PARAMETRESİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

Bu bölümde,

$$u_t = u_{xx} + qu_x + p(t)u(x,t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T = (0,1)\times(0,T) \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2.4}$$

sistemini ve

$$u(x^*, t) = E(t), \qquad 0 < x^* < 1, \qquad 0 \le t \le T \tag{2.5}$$

ek koşulunu sağlayan bilinmeyen $u = u(x,t)$ fonksiyonu ve $p = p(t)$ kaynak parametresinin bulunması için yazılı ters problemin sayısal çözüm algoritmaları ve şemaları incelenmiştir. Burada $\varphi(x)$, $f(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ ve $E(t) \neq 0$ bilinen fonksiyonlardır, q bilinen sabit ve x^*, $(0,1)$ içinde tanımlanan sabit bir noktadır (Fatullayev ve Can, 2000). Bu tip problemler, Cannon ve diğ.,(1987) tarafından incelenmiştir.

Eğer u kimyasal konsantrasyonu veya sıcaklığı gösterirse o zaman $p(t)$ kaynak kontrolünü, $q(t)$ ortalama hızı (sürüklenme hızını) belirtmektedir. Eğer $p(t)$ biliniyorsa, (2.1)-(2.5) direkt başlangıç sınır değer problemi $f(t) \in C(0,T)$ ile $u(x,t)$'nin tek düzgün bir çözümüne sahiptir (Cannon ve diğ., 1990). Bilinmeyen kaynak kontrol fonksiyonunun bulunmasına benzer ters problemler son yıllarda bazı

bilim adamları tarafından ele alınmıştır (Cannon ve diğ., 1992, 1994). Bu tip problemlerin kararlılığı Shidher ve Tavakoli (2002) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada, bu tip ters problemler için TTF (Trace-Type-Functional) sayısal çözüm algoritması kullanıldı.

TTF (Trace-Type-Functional) metod Colton ve diğ. (1990), Cannon (1991b, 1992b) tarafından ele alınmıştır.

2.1. Trace-Type-Functional (TTF) Formülasyonu

Eğer (u, p) fonksiyon çifti (2.1)-(2.5) ters probleminin çözümü ise o zaman,

$$E_t = u_{xx}\Big|_{x=x^*} + qu_x\Big|_{x=x^*} + p(t)E(t) + f(x,t)\Big|_{x=x^*} \tag{2.6}$$

sağlanmalıdır. Buradan,

$$p(t) = \frac{E_t - u_{xx}\Big|_{x=x^*} - qu_x\Big|_{x=x^*} - f(x,t)\Big|_{x=x^*}}{E(t)} \tag{2.7}$$

elde edilir ki, bu ifadeyi tekrar (2.1)'de yerine yazarsak,

$$u_t = u_{xx} + qu_x + \left(\frac{E_t - u_{xx}\Big|_{x=x^*} - qu_x\Big|_{x=x^*} - f(x,t)\Big|_{x=x^*}}{E(t)}\right)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q \tag{2.8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2.9}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2.10}$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in (0,T) \tag{2.11}$$

standart başlangıç sınır değer problemini elde etmiş oluruz. Bu problem sayısal olarak çözülebilir. Elde edilen çözümler (2.7) denkleminin sağ tarafındaki u yerine yazılarak, $p(t)$ için yaklaşık çözüm bulunur.

Parabolik denklemler için yazılı bilinmeyen özgül ısı, bilinmeyen iletkenlik, bilinmeyen reaksiyon terimi ve bilinmeyen sınır koşulu gibi ters problemler verilen ek koşula bağlı TTF formülasyonu ile çözülebilmektedir (Can, 2005).

Bu yöntemde ele alınan problemlerdeki bilinmeyen katsayı ek koşul yardımı ile ortadan kaldırılır. Problem yeniden başlangıç ve sınır değer problemi olarak ifade edilir ve standart çözüm yöntemleri uygulanır.

(2.6)-(2.11) sistemine sonlu farklar şemaları metodu uygulanarak çözülebilir.

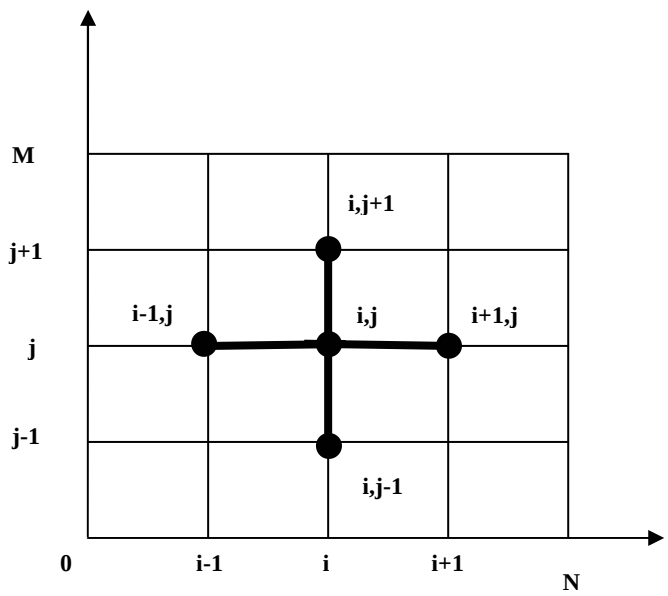
2.2. Sonlu Fark Şemaları

τ zamana bağlı adım uzunlukları, h uzay koordinatları, M ve N tamsayılar olmak üzere,

$$\tau = \Delta T > 0, \quad h = \Delta x > 0$$

$$\Omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = ih, \ t_j = \tau j, \ i = \overline{0,N}, \ j = \overline{0,M}, \ h = \frac{1}{N}, \ \tau = \frac{T}{M} \right\} \tag{2.12}$$

kafesi yazılabilir.



Şekil 2.1: $\Omega_{h\tau}$ kafesi

2.2.1. Açık şema

Zamana bağlı ileri fark t_j ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark x_i kullanılarak ele aldığımız (2.1) denklemi

$$\frac{1}{\tau}(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{1}{h^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + q^j(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}) + p^j u_i^j + f_i^j \qquad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir.

$s = \frac{\tau}{h^2}$ olarak tanımlanıp, (2.13) denklemi tekrar düzenlenirse

$$u_i^{j+1} = u_i^j + s(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + \frac{\tau q^j}{2h}(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + \tau(p^j u_i^j + f_i^j) \qquad (2.14)$$

sonucuna ulaşılır (Dehghan, 2003).

Burada

$1 \le i \le N-1,\ 0 \le j \le M-1$

değerlerini almaktadır.

Sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (2.14) denkleminin başlangıç ve sınır koşulları,

başlangıç koşulu

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad i = 1,2,3,...,N-1 \qquad (2.15)$$

sınır koşulları

$$u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \qquad j = 0,1,2,...,M-1 \qquad (2.16)$$

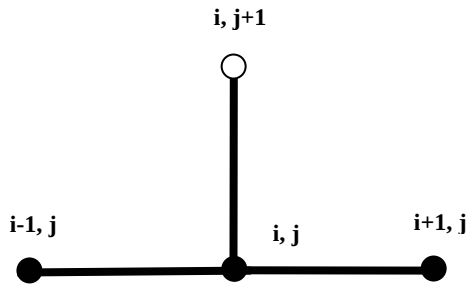
$$u_N^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \qquad j = 0,1,2,...,M-1 \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Açık şema,

$$0 < s \leq \frac{1}{2}$$

aralığında kararlılık gösterir. Açık şema küçük zaman adımlarında iyi sonuç vermemektedir. Sayısal hataları, zaman adımı ve uzay adımının karesine bağlı olarak değişmektedir (Dehghan, 2001).



Şekil 2.2: Açık şema

2.2.2. Kapalı şema

Zamana bağlı geri fark t_{j+1} ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark x_i kullanılarak (2.1) denklemi

$$2s(2-hq^j)u_{i-1}^{j+1} - 2(2s+1)u_i^{j+1} + 2s(2+hq^j)u_{i+1}^{j+1} = -2u_i^j - 2\tau(k(u_{i^*}^j)u_i^{j+1} + f_i^{j+1}) \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$k(u_{i^*}^j) = \frac{\dfrac{E^{j+1} - E^j}{\tau} - \dfrac{u_{i^*+1}^j - 2u_{i^*}^j + u_{i^*-1}^j}{h^2} - q^j \dfrac{u_{i^*+1}^j - u_{i^*-1}^j}{2h} - f_{i^*}^j}{E^{j+1}}$$

$$s = \frac{\tau}{h^2}$$

$$f_i^{j+1} = f(x_i,\ t_{j+1})$$

$E_j = E(t_j)$ olarak belirtilmekte ve

$$1 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le M-1$$

değerlerini almaktadır.

Sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (2.18) denkleminin başlangıç ve sınır koşulları,

başlangıç koşulu

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad i = 1,2,3,...,N-1 \tag{2.19}$$

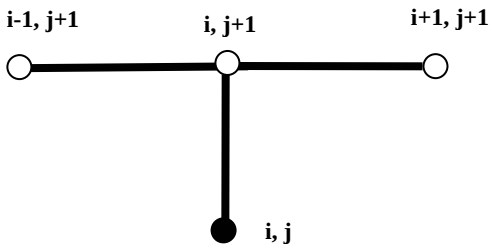
sınır koşulları

$$u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \qquad j = 1,2,3,...,M-1 \tag{2.20}$$

$$u_N^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \qquad j = 1,2,3,...,M-1 \tag{2.21}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Kapalı şema koşulsuz kararlılık göstermektedir ve yakınsaktır. Açık şema metoduna göre daha fazla sayısal işlem gerektirir. Bundan dolayı kapalı şemayı probleme uygulamak daha zor ve yavaştır. Çünkü her adımda denklem sisteminin çözülmesi gerekmektedir (Dehghan, 2005). Sayısal hataları, zaman adımı ve uzay adımının üçüncü derecesine bağlı olarak değişmektedir (Dehghan, 2001).



Şekil 2.3: Kapalı şema

2.2.3. Crank-Nicolson şeması

Zamana bağlı merkezi fark $t_{j+1/2}$ ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark x_i kullanılarak (2.1) denklemi

$$s(1-hq^j)u_{i-1}^{j+1} - 2(s+1)u_i^{j+1} + s(1+hq^j)u_{i+1}^{j+1} = -su_{i-1}^j + 2(s-1)u_i^j - su_{i+1}^j \qquad (2.22)$$
$$- 2\tau(k(u_{i^*}^j)u_i^{j+1} + f_i^{j+1})$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$k(u_{i^*}^j) = \frac{\dfrac{E^{j+1}-E^j}{\tau} - \dfrac{u_{i^*+1}^j - 2u_{i^*}^j + u_{i^*-1}^j}{2h^2} - q^j\dfrac{u_{i^*+1}^j - u_{i^*-1}^j}{2h} - f_{i^*}^j}{E^{j+1}}$$

olarak belirtilmekte ve

$$1 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le M-1$$

değerlerini almaktadır.

Sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (2.22) denkleminin başlangıç ve sınır koşulları,

başlangıç koşulu

$$u_i^1 = \varphi(x_i), \qquad i = 1,2,...,N-1 \tag{2.23}$$

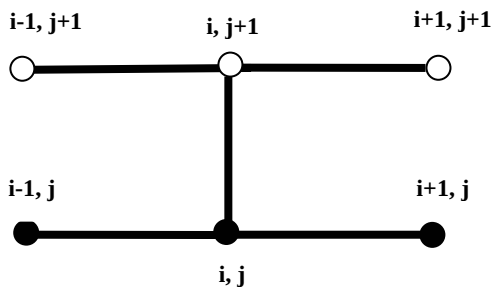
sınır koşulları

$$u_1^j = \mu_1(t_j), \qquad j = 1,2,...,M-1, \tag{2.24}$$

$$u_N^j = \mu_2(t_j), \qquad j = 1,2,...,M-1 \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$s > 0$ için Crank-Nicolson şeması koşulsuz kararlılık göstermektedir ve yakınsaktır. Küçük zaman adımlarında çok iyi sonuç vermektedir. Sayısal hataları, zaman adımının üçüncü derecesi ve uzay adımın dördüncü derecesine bağlı olarak değişim göstermektedir (Dehghan, 2001).



Şekil 2.4: Crank-Nicolson şema

Yukarıda ele alınan kapalı ve Crank-Nicolson şemaların sınır koşulları TDMA yöntemine uygun bir biçimde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u_1^{j+1} = \chi_1^{j+1} u_2^{j+1} + \mu_1^{j+1},$$
$$u_N^{j+1} = \chi_2^{j+1} u_{N-1}^{j+1} + \mu_2^{j+1}$$

Burada,

$$\chi_1^{j+1} = 0, \qquad \chi_2^{j+1} = 0,$$

$$\mu_1^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad \mu_2^{j+1} = \mu_2(t_{j+1})$$

bağıntılarıyla verilmektedir.

Bu sonlu farklar şemasının çözümü TDMA (Tree Diagonal Matrix Algorithm) ile yapılmaktadır (Ek-2).

Sonlu fark şemaları ile ilgili daha detaylı bilgiler (Ek-1)'de verilmiştir.

3. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI

3.1 Sayısal Test 1

Problemin çözümünün doğruluğunu göstermek için test oluşturalım.

$$u_t = u_{xx} + qu_x + p(t)u + f(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < T \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 < t < T \tag{3.3}$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 < t < T \tag{3.4}$$

probleminde,

$$u(x,t) = t\sin x + 1 \tag{3.5}$$

$$p(t) = 10t\exp(-t^2) \tag{3.6}$$

ilk durumda,

$q = 0$

olarak verilsin.

Başlangıç ve sınır koşullarını $u(x,t)$ fonksiyonuna uygulayarak, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ ve $\mu_2(t)$ değerleri

$$u(x,0) = 0.\sin x + 1 = 1 = \varphi(x)$$

$$u(0,t) = t.\sin 0 + 1 = 1 = \mu_1(t)$$

$$u(1,t) = t.\sin(1) + 1 = \mu_2(t)$$

olarak elde edilir.

$u(x,t)$ fonksiyonunun, (3.1) için gerekli olan türevleri alır

$$u_t(x,t) = (t\sin x + 1)_t = \sin x$$
$$u_x(x,t) = (t\sin x + 1)_x = t\cos x$$
$$u_{xx}(x,t) = (t\sin x + 1)_{xx} = -t\sin x$$

ve bunları (3.1) denkleminde yazarsak,

$$f(x,t) = \sin x(1 + t - p(t)t) - p(t)$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı problemde sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan ve önceden bildiğimiz $u(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

O zaman problem,

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + \sin x(1 + t - p(t)t) - p(t) \tag{3.7}$$
$$u(x,0) = 1 \tag{3.8}$$
$$u(0,t) = 1 \tag{3.9}$$
$$u(1,t) = t\sin(1) + 1 \tag{3.10}$$

ve ek koşul,

$$u(x^*,t) = t\sin(x^*) + 1 \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır.

3.2 TTF Metodu ile Sayısal Çözüm

Ek koşula bağlı olarak yazılan (2.6) denklemine Test 1 (q=0) uygulanırsa, p(t) ifadesi,

$$p(t) = \frac{E_t - u_{xx}\Big|_{x=x^*} - f(x,t)\Big|_{x=x^*}}{E(t)} \tag{3.12}$$

olarak bulunur.

Test 1'de bulunan $f(x,t) = \sin x(1 + t - p(t)t) - p(t)$ ifadesi denklemde yerine yazılırsa (3.7) denklemi

$$u_t = u_{xx} + \left(\frac{E_t - u_{xx}\Big|_{x=x^*} - f(x,t)\Big|_{x=x^*}}{E(t)} \right) u + \sin x(1 + t - p(t)t) - p(t) \tag{3.13}$$

şekline dönüşür.

Başlangıç ve sınır koşulları

$$u(x,0) = 1 \tag{3.14}$$

$$u(0,t) = 1 \tag{3.15}$$

$$u(1,t) = t\sin(1) + 1 \tag{3.16}$$

verilen ek koşul yardımıyla belirlenir. Ek koşul

$$u(x^*,t) = E(t) = t\sin(0.2) + 1 \tag{3.17}$$

olarak alınmıştır. Burada x^* noktası, çözümün en kararlı olduğu noktayı gösterir ve sayısal değeri yapılan test sonucunda $x^* = 0.2$ olarak bulunmuştur.

Elde edilen yeni denklem sistemi sayısal olarak çözülür.

TTF (Trace-Type-Functional) metoduna göre yazılan Algoritma I ve Algoritma II bize sırasıyla $p(t)$ ve $u(x,t)$'nin gerçek ve yaklaşık sonuçlarını vermektedir. Bu sayısal sonuçlara göre Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 oluşturuldu.

3.3 Sayısal Test 2

(3.1) denkleminde $q = 2$ yazılırsa

$$f(x,t) = \sin x(1+t) - 2t\cos x - p(t)(t\sin x + 1)$$

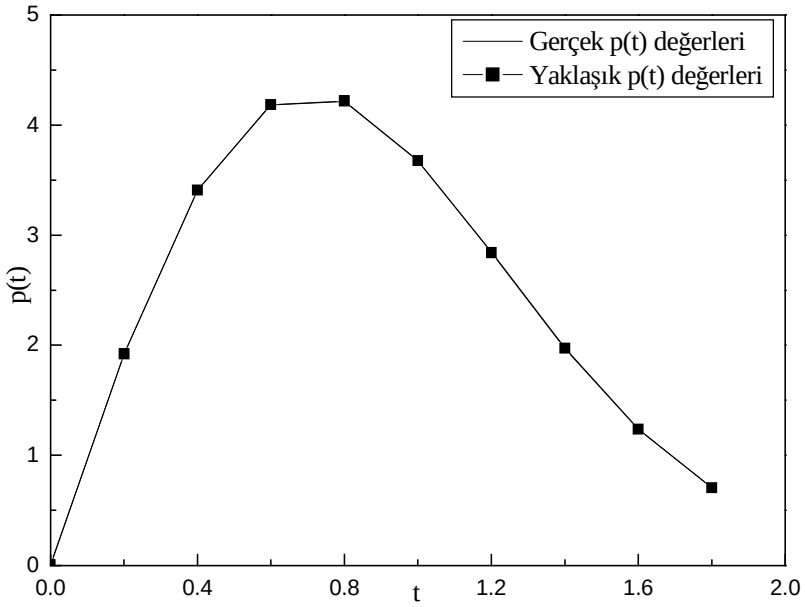
bulunur. Bu durumda denklemimiz,

$$u_t = u_{xx} + qu_x + p(t)u + \sin x(1+t) - 2t\cos x - p(t)(t\sin x + 1)$$

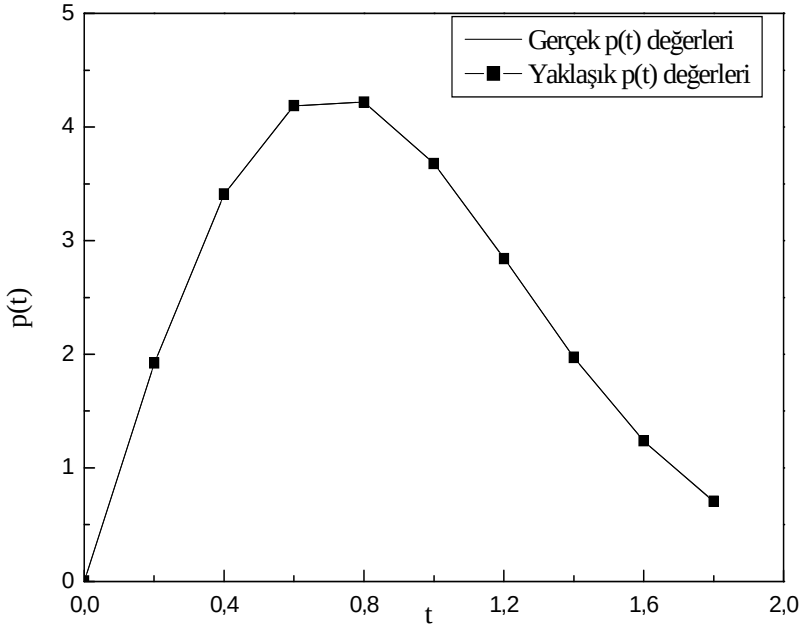
şekline dönüşür.

Test 1'de yapılan dönüşümler burada da yapılmıştır. TTF (Trace-Type-Functional) metoduna göre yazılan Algoritmalar bize $p(t)$ ve $u(x,t)$'nin gerçek ve yaklaşık sonuçlarını verir. Bu sayısal sonuçlara göre Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 oluşturuldu.

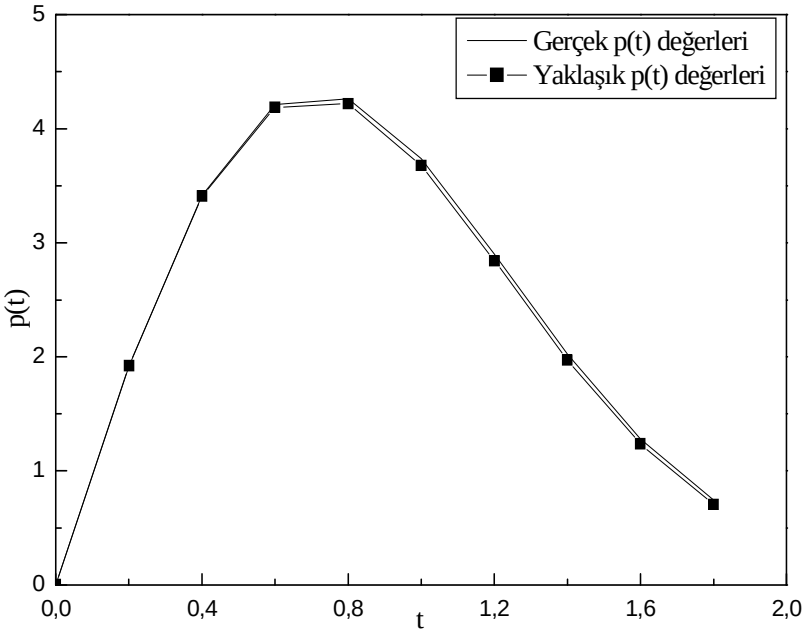
Test 1 ve Test 2'de bulunan $p(t)$ değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları grafikler üzerinde gösterildi.



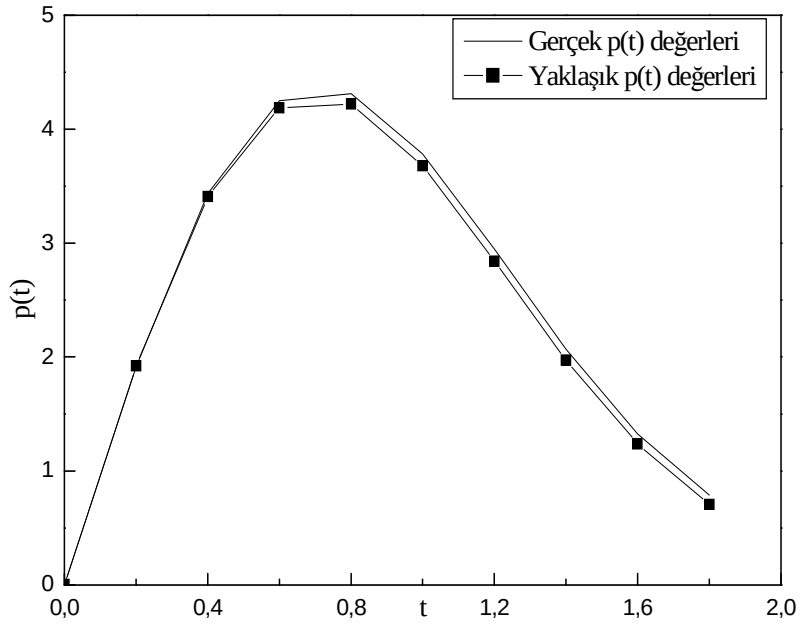
Şekil 3.1: Açık şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1).



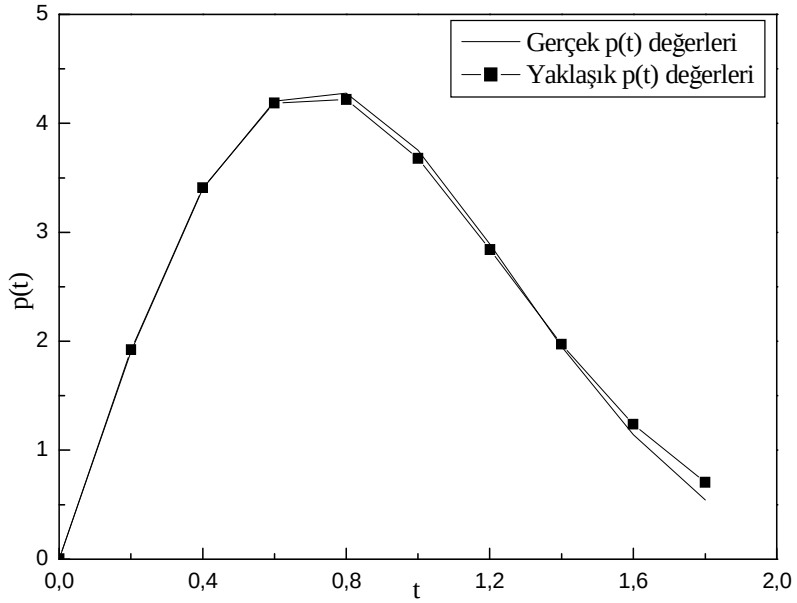
Şekil 3.2: Açık şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test2).



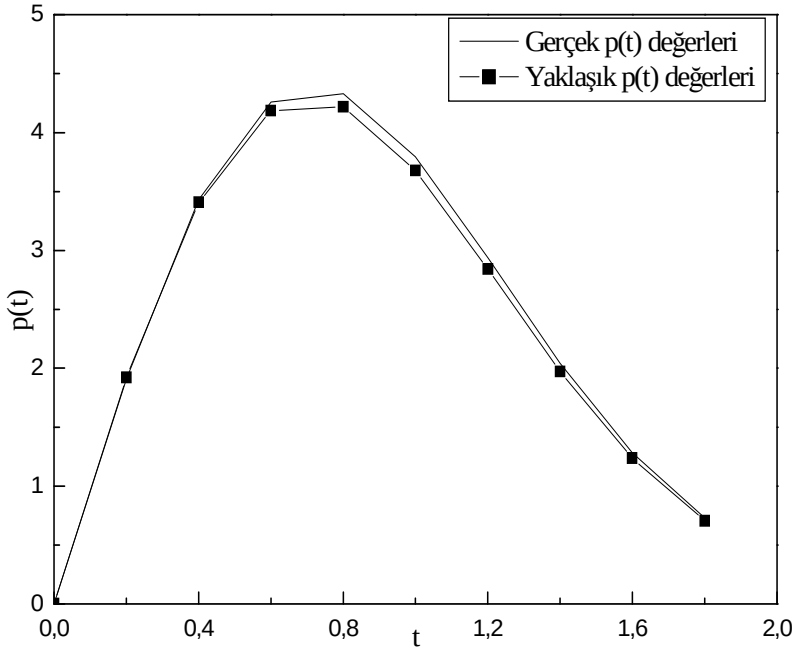
Şekil 3.3: Kapalı şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1).



Şekil 3.4: Kapalı şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test 2).



Şekil 3.5: Crank-Nicolson şema; M=10001, N=51 ve q=0 için p(t) değerleri (Test 1).



Şekil 3.6: Crank-Nicolson şema; M=10001, N=51 ve q=2 için p(t) değerleri (Test 2).

Tablo 3.1: q=0, M=10001 ve N=51 için u(x,t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları

x	Gerçek u	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.02	1.019	1.192×10^{-7}	7.593×10^{-5}	1.621×10^{-3}
0.08	1.079	2.384×10^{-7}	2.938×10^{-4}	6.226×10^{-3}
0.14	1.139	7.152×10^{-7}	4.932×10^{-4}	1.039×10^{-2}
0.20	1.198	1.430×10^{-6}	6.707×10^{-4}	1.408×10^{-2}
0.26	1.257	2.503×10^{-6}	8.231×10^{-4}	1.722×10^{-2}
0.32	1.314	3.099×10^{-6}	9.471×10^{-4}	1.978×10^{-2}
0.38	1.370	3.218×10^{-6}	1.039×10^{-4}	2.171×10^{-2}
0.44	1.425	3.218×10^{-6}	1.100×10^{-4}	2.298×10^{-2}
0.50	1.479	3.576×10^{-6}	1.126×10^{-4}	2.355×10^{-2}
0.56	1.531	4.053×10^{-6}	1.117×10^{-4}	2.341×10^{-2}
0.62	1.581	4.172×10^{-6}	1.072×10^{-4}	2.254×10^{-2}
0.68	1.628	4.172×10^{-6}	9.914×10^{-4}	2.093×10^{-2}
0.74	1.674	4.053×10^{-6}	8.754×10^{-4}	1.857×10^{-2}
0.80	1.717	3.576×10^{-6}	7.251×10^{-4}	1.548×10^{-2}
0.86	1.757	2.622×10^{-6}	5.419×10^{-4}	1.165×10^{-2}
0.92	1.795	1.311×10^{-6}	3.279×10^{-4}	7.118×10^{-2}
0.98	1.830	3.576×10^{-6}	8.630×10^{-4}	1.890×10^{-2}

Tablo 3.2: q=0, M=10001 ve N=51 için p(t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları

t	Gerçek p	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.1	0.991	7.792×10^{-4}	1.877×10^{-3}	6.279×10^{-2}
0.2	1.922	4.303×10^{-4}	2.417×10^{-3}	1.538×10^{-2}
0.3	2.742	5.350×10^{-4}	3.612×10^{-3}	2.410×10^{-2}
0.4	3.409	1.242×10^{-4}	3.869×10^{-3}	3.164×10^{-2}
0.5	3.894	8.778×10^{-4}	2.802×10^{-3}	3.788×10^{-2}
0.6	4.186	1.647×10^{-4}	4.313×10^{-3}	4.576×10^{-2}
0.7	4.288	1.688×10^{-4}	4.105×10^{-3}	5.335×10^{-2}
0.8	4.218	4.429×10^{-4}	3.783×10^{-3}	6.226×10^{-2}
0.9	4.003	4.954×10^{-4}	3.849×10^{-3}	7.256×10^{-2}

Tablo 3.3: q=2, M=10001 ve N=51 için u(x,t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları

x	Gerçek u	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.02	1.019	1.788×10^{-6}	7.772×10^{-4}	1.586×10^{-2}
0.08	1.079	6.914×10^{-6}	2.847×10^{-4}	5.800×10^{-2}
0.14	1.139	1.049×10^{-5}	4.540×10^{-4}	9.229×10^{-2}
0.20	1.198	1.287×10^{-5}	5.873×10^{-4}	1.191×10^{-2}
0.26	1.257	1.418×10^{-5}	6.855×10^{-4}	1.391×10^{-2}
0.32	1.314	1.502×10^{-5}	7.517×10^{-4}	1.527×10^{-2}
0.38	1.370	1.561×10^{-5}	7.877×10^{-3}	1.602×10^{-2}
0.44	1.425	1.573×10^{-5}	7.959×10^{-3}	1.624×10^{-2}
0.50	1.479	1.490×10^{-5}	7.790×10^{-3}	1.595×10^{-2}
0.56	1.531	1.335×10^{-5}	7.396×10^{-3}	1.521×10^{-2}
0.62	1.581	1.168×10^{-5}	6.802×10^{-3}	1.406×10^{-2}
0.68	1.628	9.894×10^{-6}	6.033×10^{-3}	1.254×10^{-2}
0.74	1.674	7.867×10^{-6}	5.116×10^{-4}	1.071×10^{-2}
0.80	1.717	5.841×10^{-6}	4.075×10^{-4}	8.598×10^{-2}
0.86	1.757	4.172×10^{-6}	2.931×10^{-4}	6.240×10^{-2}
0.92	1.795	2.503×10^{-6}	1.715×10^{-4}	3.677×10^{-2}
0.98	1.830	5.960×10^{-7}	4.374×10^{-4}	9.437×10^{-2}

Tablo 3.4: q=2, M=10001 ve N=51 için p(t) değerlerinin gerçek ve yaklaşık sonuçları

t	Gerçek p	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.1	0.991	2.529×10^{-4}	1.924×10^{-3}	5.955×10^{-2}
0.2	1.922	2.484×10^{-4}	2.689×10^{-3}	1.243×10^{-2}
0.3	2.742	1.503×10^{-4}	3.456×10^{-3}	1.910×10^{-2}
0.4	3.409	2.709×10^{-4}	3.077×10^{-3}	2.404×10^{-2}
0.5	3.894	1.549×10^{-4}	3.393×10^{-3}	2.919×10^{-2}
0.6	4.186	7.948×10^{-4}	3.104×10^{-3}	3.366×10^{-2}
0.7	4.288	9.837×10^{-4}	3.339×10^{-3}	3.847×10^{-2}
0.8	4.218	1.185×10^{-4}	2.479×10^{-3}	4.390×10^{-2}
0.9	4.003	7.591×10^{-4}	1.668×10^{-3}	4.904×10^{-2}

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ele aldığımız başlangıç-sınır değer problemi, fizik alanında pek çok örneklemeleri içermektedir. Bulmak istediğimiz katsayılar fiziksel bazı parametrelere karşılık gelmektedir. Ancak bu katsayıları belirlemek istediğimiz zaman çözümde kullanacağımız şemaların kararlığı ve dayanıklılığı büyük önem taşır.

Çalışmada, yarı lineer parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak parametresinin bulunmasına yönelik TTF (Trace-Type-Formulation) algoritması kullanıldı. Sayısal çözüm uygulamaları yapılarak, elde edilen sonuçlara göre şemalar karşılaştırıldı.

TTF yönteminin kararlılık aralığının küçüklüğü, bu yöntemde elde edilen yeniden formüle edilmiş problemin çözümünün kendisi ve ikinci mertebeden türevine tekrarlı şekilde bağlantılı olması ile ilgilidir. Bu bağlantı katsayı çözümündeki değişimlere aşırı duyarlı yapmaktadır.

TTF yöntemiyle ele alınan Test 1 ve Test 2 verilerine bakılarak, ele aldığımız problem için Açık şemanın, Kapalı ve Crank-Nicolson şemalarına göre kullanışlı olduğu, daha az CPU (Central Processing Unit) zamanına ihtiyaç duyduğu görülmektedir.
Problemimizi kapalı şemayı uygulamak daha zor ve çalışması bakımından daha yavaş olduğu sonucuna varılmıştır. Çünkü her adımda denklem sistemini çözmeyi gerektirmektedir. Grafiklerden de görüldüğü gibi Test 1 ($q = 0$) ve Test 2 ($q = 2$) uygulamalarında, p(t) değerlerinin gerçek çözüme M ve N bağlı olarak en yakın sonuçları açık şema vermektedir. Kapalı şemada ise, p(t) değerlerinin hata oranı Açık ve Crank-Nicolson şemaya göre daha yüksek çıkmaktadır.

Tablolardaki p(t) ve u(x,t) değerlerinin hataları uzaya bağlı, M=10001 ve zamana bağlı, N=51 tamsayı değerleri için bulunmuştur. M=10001 ve N=51 tamsayı değerleri çözüme en yakın sayısal değerler olup, birçok denemeler sonucunda elde edilmiştir. Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson şemalar Test 1 (q=0) için iyi sonuç vermektedir. Test 2 (q=2) için ise bu şemaların hatalarının arttığı görülmektedir.

Daha sonra, yapılan bu çalışma iki boyutlu sonlu fark şemalarına uygulanarak sonuçların elde edilmesi öngörülebilir.

KAYNAKLAR

Bellasoued, M. ve Yamamoto, M., "Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation", ***J. Inv. III-Posed Problems***, 1, 47-56, (2006).

Cannon, J.R., "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation", ***Duke Math. J***., 30, 313-323, (1963).

Cannon, J.R., "Determination of certain parameter in heat conduction problems", ***J. Math. Anal. Appl***., 8, 188-321, (1964).

Cannon, J.R., ve Duchateau, P.C., "Determination of an unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial boundary data", ***J. Heat Transfer***, 100, 503-507, (1978).

Cannon, J.R., ve Duchateau, P.C., "An inverse problem for a nonlinear diffusion equation", ***SIAM J.Appl. Math***., 39(2), 272-289, (1980).

Cannon, J.R., "The one-dimensional heat equation", ***Addison-Wesley***, (1984).

Cannon, J.R., Estera, S.P., ve Vanderhoek, J., "A Galarkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass", ***SIAM J. Numer. Anal***., 24, 499-515, (1987).

Cannon, J.R., ve Lin, Y., "An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation", ***J. Math. Anal. Appl***., 145, 470-484, (1990).

Cannon, J.R., ve Rundell, W., "Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equations", ***J. Math. Anal. Appl***, 160, 572-582, (1991a).

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Wang, S., "Determination of source parameter in parabolic equations", ***Meccanica***, 27, 85-94, (1992a).

Cannon, J.R., Duchateau, P.C., ve Steube, K., "Trace type functional differential equations and the identification of hydraulic properties of porous media", ***Transport Porous Media***, 6, 745-758, (1991b).

Cannon, J.R., Duchateau, P.C., ve Steube, K., "Unknown Ingredient Inverse Problems and Trace-Type-Functional Differential Equation (1992b).

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Xu, S., “Numerical procedures for the determination of an unknown coefficient in semilinear parabolic differantial equations”, ***Inverse problems***, 10, 227-243, (1994).

Can, E., “Isı transferi ve difüzyon olaylarında ters problemler”, Doktora Tezi, ***Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü***, İstanbul, 1-13, (2000).

Can, E., “Numerical procedures for determining of an unknown parameter in parabolic equation”, ***Applied Mathematics and Computation***, 162, 1219-1226, (2005).

Colton, D., Eving, R., ve Rundell, W., “Inverse problems in partial differantial equations”, ***SIAM Pres, Philadelphia***, (1990).

Dehghan, M., “An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation”, ***Applied Mathematical Modelling***, 25, 743-754, (2001).

Dehghan, M., “Finding a control parameter in one-dimensional parabolic equations”, ***Applied Numerical Mathematics***, 135, 491-503, (2003).

Dehghan, M., “Parameter determination in a partial differential equation from the overspecified data”, ***Mathematical and Computer Modelling***, 41, 197-213, (2005).

Dramac, Z., Marusic, M., ve Tutek, Z., “Procedings of the conference on applied mathematics and scientific”, ***Springer***, 1161-164, (2003).

Fatullayev, A., ve Can, E., “Numerical procedures for determining unknown source parameter in parabolic equations”, ***Mathematical and Computers in simulation***, 1845, 1-9, (2000).

Pilant, M.S., ve Rundell, W., “Undetermined coefficient problems for nonlinear elliptic and parabolic equations”, ***Inter. Ser. Num. Math***., 77, 139-154, (1986).

Pilant, M.S., ve Rundell, W., “ Iteration schemes for unknown coefficient problems arising in parabolic equation”, ***Numer. Methods in P.D.E***., 3, 313-325, (1987a).

Pilant, M.S., ve Rundell, W., “An inverse problem for a nonlinear elliptic equation”, ***SIAM J.Math. Anal***., 18, 1801-1809, (1987b).

Pilant, M.S., ve Rundell, W., “Fixed point methods a nonlinear parabolic inverse problem”, ***Comm. In P.D.E***., 13, 469-493, (1987c).

Pilant, M.S., ve Rundell, W., “A uniqueness theorem for determining conductivity from overspecified boundary data”, ***Journal of Math. Anal. Appl***., 136, 20-28, (1988).

Ramm, A.G., “An inverse problem for the heat equation II”, ***Applicable Analysis***, 81, 929-937.

Shidfar, A. ve Azary, H., “Nonlinear parabolic problems”, ***Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications***, 30, 4823-4832, (1997).

Shidfar, A., ve Tavakoli, K., “ An Inverse Heat Conduction Problem”, ***Southeast Bulletin of Mathematics***, 26, 503-507, (2002).

EK-1

Parabolik Denklemler İçin Sonlu Fark Şemaları

Isı transferi denklemi için sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,t) = u_0(t), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \tag{3}$$

$$u(1,t) = \mu_2(t). \tag{4}$$

Burada $u_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)$ verilen fonksiyonlardır.

Açık şema

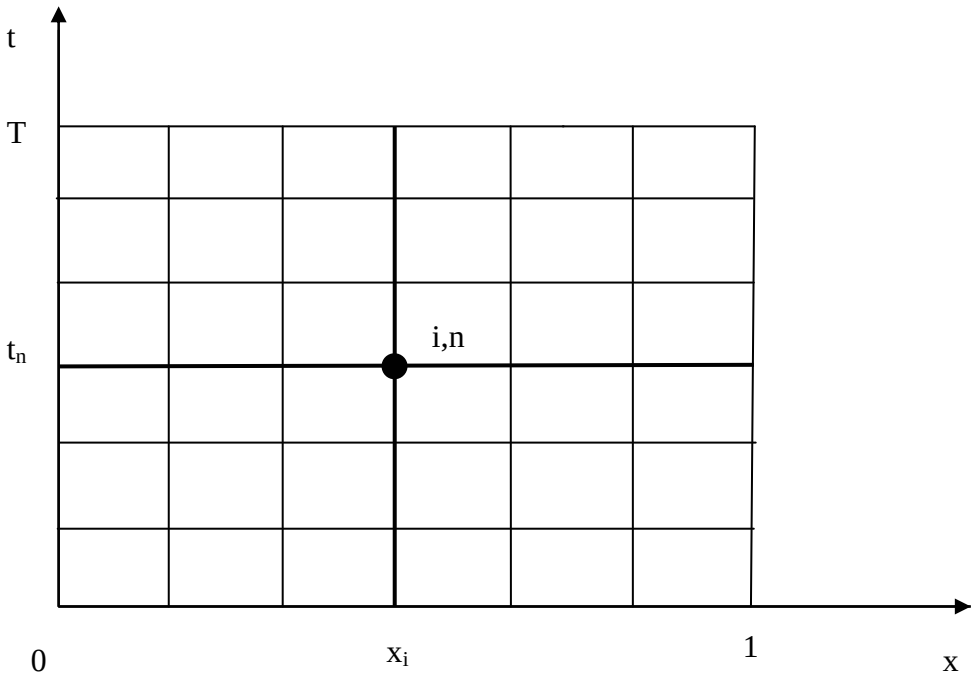
x değişkeni için W_h kafesi

$$W_h = \{x_i = ih,\ \ i = 0,1,...,N,\ \ hN = 1\}$$

t değişkeni için W_τ kafesini

$$W_\tau = \{t_n = n\tau,\ \ n = 0,1,...,K,\ \ K\tau = T\}$$

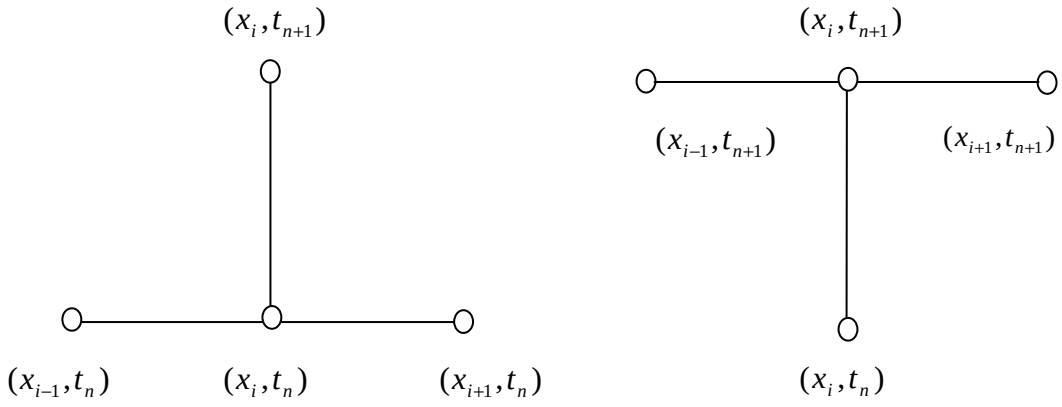
şeklinde oluşturalım.
$(x_i, t_n),\ \ i = 0,1,...,N,\ \ n = 0,1,...,K$ noktaları $W_{h,\tau} = W_h \times W_\tau$ şebekelerin noktaları olacaktır.



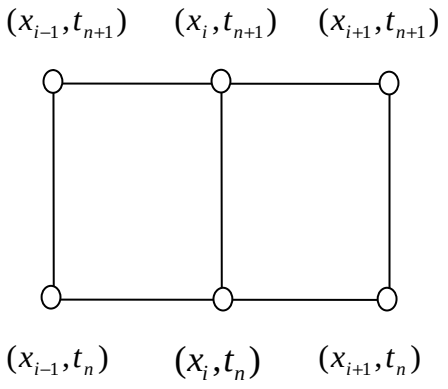
$(x_0,\ t_n),\ (x_1,\ t_n),...(x_n,\ t_n)$ noktaları kümesine n. katman denir.

$$y_i^n = y(x_i, t_n),\quad y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau},\quad y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} \tag{5}$$

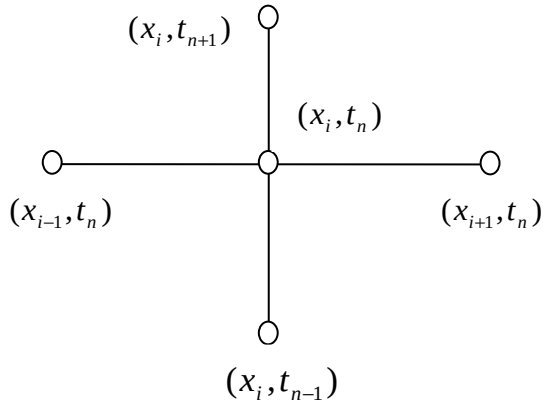
gösterimlerini kullanarak, (1) denkleminin (x_i, t_n) noktasında yaklaşımını yapmak için aşağıdaki şablonlar kullanılır.



a) **b)**



c)



d)

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ türevini (x_i,t_n) noktasında $y_{t,i}^n$ fark ifadesi ile, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$'yi ise $y_{\bar{x}x,i}^n$ ve $f(x,t)$'yi $f(x_i,t_n)$'le değiştirelim. Sonuçta,

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=a^2\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}+\varphi_i^n \tag{6}$$

alırız. Bu (a) şablonuna karşılık şemadır.
Fark şeması ise,

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=a^2\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}+\varphi_i^n \tag{7}$$

şeklinde gösterilir.

Burada

$i=1,2,...,N-1,\quad n=0,1,2,...,K$

$hN=l,\quad K\tau=T$

değerlerini almaktadır. Başlangıç ve sınır koşulları

$y_0^n=\mu_1(t_n),\qquad y_N^n=\mu_2(t_n),\qquad n=0,1,...,K$

$y_i^0=u_0(x_i),\qquad i=0,1,...,N$

olarak verilmektedir.

Bu şemada görüldüğü gibi eğer y_i^n, $i = 0,1,...,N$ çözümünü *n.* katmanda belliyse, o zaman $(n+1)$. katmanda

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau(y_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n) \qquad i = 0,1,...,N \tag{8}$$

açık formülü ile bulunacaktır. Onun için de (6) şemasına açık şema denir.
(1)-(3) probleminin çözümüne (6) şemasının çözümü $O(\tau + h^2)$ hatası ile yaklaşmaktadır. (6) şemasının dayanıklılık koşulunu inceleyelim.

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \tilde{a}\,\frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2}, \qquad (\tilde{a} = a^2) \tag{9}$$

uygun homojen denklemine bakalım.
(9) denkleminin

$$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi} \tag{10}$$

şeklinde özel çözümleri aranır. (9)'u (8)'e yazarsak ve $e^{ijh\varphi}$'ye bölersek

$$\frac{q-1}{\tau} = \tilde{a}\,\frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2}$$ ve buradan

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2\frac{h\varphi}{2}, \qquad \gamma = \frac{\tau\ \tilde{a}}{h^2} \tag{11}$$

bulunur. Eğer tüm φ'ler için $|q| \le 1$ sağlanırsa o zaman (9) şekilli tüm çözümler sınırlıdır ve (8) fark denklemi dayanıklıdır;

$$|q| \le 1 \Rightarrow \left|1 - 4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\right| \le 1, \qquad \left|4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\right| \le 2 \Rightarrow \gamma \le 0.5 \Rightarrow \tau \le 0.5\frac{h^2}{\tilde{a}}$$

yani, (8) fark şeması, zaman adımı τ ve uzay adımı h olmak üzere belli bir sınırlamalar içinde dayanıklıdır. Onun için (8) şemasına koşullu dayanıklı şema denir.

Kapalı şema

(b) şablonuna karşılık

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\tilde{a}\,\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\varphi_i^n \qquad (12)$$

$i=1,2,...,N-1,\qquad n=0,1,...,K-1$

$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\qquad y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\qquad n=0,1,...,K-1$

$y_0^{n+1}=u_0(x_i),\qquad i=0,1,...,N$

Bu şemanın hatası $O(\tau+h^2)$'dir. Bilinen y_i^n'ler için y_i^{n+1}'lerin bulunması

$$\gamma.y_{i+1}^{n+1}-(1+2\gamma)y_i^{n+1}+\gamma.y_{i-1}^{n+1}=F_i^n,\qquad i=1,2,...,N-1$$

$$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$$
$$y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$$

ile ifade edilir.

Burada $\gamma=\tilde{a}\,\tau/h^2,\quad F_i^n=y_i^n+\tau\varphi_i^n$

Bu sistem takip yöntemi ile çözülür. Takip yönteminde dayanıklılık koşulu sağlanmaktadır.
Benzer şekilde,

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\tilde{a}\,\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\varphi_i^n$$

şemasının dayanıklılık koşulunu ararsak,

$$q=(1+4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2})^{-1},\qquad \gamma=\frac{a\tau}{h^2}$$

bulunur ve görüldüğü gibi tüm φ,τ ve h'lar için $|q|\le 1$.

Dayanıklılığı araştırmak için birkaç tane yöntem vardır. Bunlardan biri olan harmonikler yöntemi ile bu şemanın dayanıklılığını inceleyelim. Bu dayanıklılık zorunlu koşulunu verecektir.
Homojen denkleme bakalım:

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau}=\frac{y_{j+1}^n-2y_j^n+y_{j-1}^n}{h^2}$$

$$y_j^n(\varphi)=q^n e^{ijh\varphi}$$

i, φ herhangi bir sayı, q tanımlanacak sayıdır.
Denklemde yazarak ve $e^{ijh\varphi}$'ya bölerek

$$\frac{q-1}{\tau} = \frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2} \quad \text{ve buradan}$$

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}, \qquad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

elde edilir.
Eğer herhangi bir φ için $|q| > 1$ olursa $n \to \infty$ olduğunda $y_j^n(\varphi)$ sonsuz artacaktır. Bu halde fark şemasına dayanıksız fark şeması denir. Eğer tüm φ'ler için $|q < 1|$ ise dayanıklı denir.

$|q| \le 1 \Rightarrow \left|1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}\right| < 1 \Rightarrow \gamma \le 0.5$ yani $\tau \le 0.5h^2$ koşulu içinde dayanıklıdır.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^n \tag{13}$$

$i = 1,2,\ldots,N-1, \qquad n = 0,1,\ldots,K-1$

$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \qquad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \qquad n = 0,1,\ldots,K-1$

$y_i^0 = u_0(x_i), \qquad i = 0,1,\ldots,K-1$

$\gamma . y_{i+1}^{n+1} - (1+2\gamma) y_i^{n+1} + \gamma . y_{i-1}^{n+1} = -F_i^n, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1$

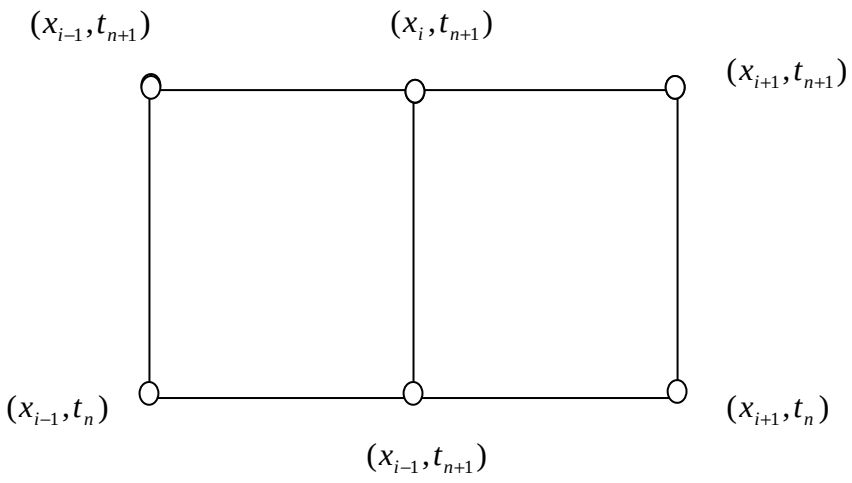
$\gamma = \tau / h^2, \qquad F_i^n = y_i^n + \tau\varphi_i^n$

Takip yöntemi ile çözülür.
Yine benzer şekilde harmonikler yöntemini uygularsak

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^n$$

$$q = (1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2})^{-1}, \qquad \gamma = \frac{\tau}{h^2}, \qquad |q| \le 1$$

$\forall h, \tau$'lar mutlak dayanıklılıktır. τ istenildiği kadar büyük seçilebilir.
Altı noktalı simetrik şema aşağıda gösterilmiştir.



$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}(y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + y_{\bar{x}x,i}^n) + \varphi_i^n$$

Bu şema, h ve τ'ya göre 2. mertebeden yaklaşımı vardır. Eğer $\varphi_i^n = f(x_i, t_n + 0.5\tau) + O(\tau^2 + h^2)$ ise, mutlak dayanıklıdır ve takip yöntemi ile çözülür. Bağımsız bu üç şemayı genel olarak çeki parametreli şemalar ailesi olarak yazılır.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \delta y_{\bar{x}x}^{n+1} + (1-\delta) y_{\bar{x}x}^n + \varphi_i^n$$

$i = 1,2,..., N-1,$ $\qquad n = 0,1,..., K-1$

$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),$ $\qquad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),$ $\qquad n = 0,1,..., K-1$

$y_i^0 = u_0(x_i),$ $\qquad i = 0,1,..., N$

Eğer,
$\delta = 0$ ise açık şema, $\delta = 1$ kapalı şema ve $\delta = 0.5$ ise simetrik şema olarak isimlendirilir.
Aynı zamanda,

$$\delta = \delta_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau},$$

$$\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{h^2}{12} f''(x_i, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + h^4)$$

ise (12) şeması τ'ya göre 2. , h'a göre 4. mertebeden yaklaşım ifadesidir ve mutlak dayanıklıdır. Genellikle $\delta \geq 0.5$ koşullu tüm şemalar mutlak dayanıklıdır.

EK-2

Takip Yöntemi (Tridiagonal Matrix Algoritm)

Bu yöntem,

$Ay = f$

denklem sisteminde $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ üç köşegenli matris denklemlerinin çözümü için kullanılır; yani $j > i-1$ ve $j < i-1$ olduğunda $a_{ij} = 0$ olacaktır.
Genel halde bu sistem

$$\begin{bmatrix} c_0 & b_0 & & & & \\ a_1 & c_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & c_2 & b_2 & & \\ & & & & & \\ & & & & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \\ \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

gösteriminde ve

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j \tag{1}$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2 \tag{2}$$

şeklinde olacaktır. (1) denkleminin çözümünü

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \qquad j = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3}$$

şeklinde arayacağız; $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ bilinmeyen katsayılardır. Bu çözümden yola çıkarak,

$$y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j \tag{4}$$

elde edilir. (3) denklemini (4)'de yerleştirirsek,

$$y_{j-1} = \alpha_j(\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j \alpha_j y_{j+1} + \alpha_j \beta_{j+1}, \qquad j = \overline{1, N-1} \tag{5}$$

ifadesini bulmuş oluruz. Bütün bunları (2)'de yazdığımızda

$$\left[\alpha_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + b_j\right]y_{j+1} + \left[\beta_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + a_j\beta_j + f_j\right] = 0, \qquad j = \overline{1, N-1}$$

denkleminin sonucu sağlaması için α_{j+1} ve β_{j+1} katsayıları öyle seçilmelidir ki parantezler içi sıfıra eşit olsun; o zaman

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j\alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j\beta_j + f_j}{c_j - a_j\alpha_j}, \qquad j = \overline{1, N-1} \tag{6}$$

olmalıdır ve α_j, β_j $(j > 1)$'lerin bulunması için başlangıç α_1 ve β_1 değerlerinin verilmesi gerekiyor. (3) denkleminde $j = 0$ olduğunda,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1 \tag{7}$$

bulunur ki; bu durumda $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \mu_1$ elde ederiz. Dolayısıyla (6) ve (7) ifadeleri ile α_{j+1} ve β_{j+1} katsayılarını buluruz ve buna takip yönteminin (TDMA) düz gidişi denir. Eğer tersine takip yöntemini kullanacaksak önce y_N'yi bilmemiz gerekir. (7) denkleminde $N \to N-1$ yazarsak

$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$

bulunur ve buradan,

$$y_N = \frac{\chi_2\beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2\alpha_N} \tag{8}$$

elde edilir. y_N bilindikten sonra (7) formülü ile tüm y_j'lerin bulunmasına ters takip denir.

Takip (TDMA) yönteminin kullanılabilmesi için,

$$a_j \neq 0, \;\; b_j \neq 0, \;\; |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \qquad j = 1,2,\ldots,N-1 \tag{9}$$

ve

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 2 \tag{10}$$

koşullarını sağlaması gerekir.

EK-3

Bilgisayar Programları

A) Algoritma I'e göre hatasız olarak yapılan h=1/50 değeri sabit tutuldu. a12.dat(M=10001, N=51), a210.dat(M=10001, N=51) ve a310.dat(M=10001, N=51) değerlerinde yapılan programlarda datalar elde edilmiştir. Bu programda $p(t) = 10\,t\exp(-t^2)$, $q = 0$ ve $u(x,t) = t\sin(x) + 1$ alınmıştır.

Algoritma I ile yapılan ileri fark açık şema program

Bu program u(x,t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension x(51), t(10001), u(51,10001), f(51,10001), p(10001)
*,ug(51,10001), q(10001), Gp(10001)
open(unit=1,file='a12.dat')
read(*,*) m,n
tau=1./(m-1)
h=1./(n-1)
ms=n/15
ny=0.26/h
do 5 i=1,n
5  x(i)=(i-1)*h
do 7 j=1,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*tau
7  continue
do 10 i=1,n
10u(i,1)=1.
do 15 j=1,m
p(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
u(1,j)=1.
15  u(n,j)=t(j)*sin(1.)+1.
17  continue
do 20 j=1,m
do 25 i=2,n-1
f(i,j)=sin(x(i))*(1.+t(j)-p(j)*t(j))-
* p(j)-q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
u(i,j+1)=u(i,j)+tau*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))/h**2
* +tau*p(j)*u(i,j)+tau*(q(j-1)*(u(i+1,j)-u(i-1,j)))/(2*h)+tau*f(i,j)
akk=((u(i,j+1)-u(i,j))/tau-(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))
*/h**2-q(j-1)*(u(i+1,j)-u(i-1,j))/(2*h)-f(i,j))/u(i,j)
p(j)=akk
25  continue
20  continue
```

```
do 40 i=2,n-1,ms
ug(i,m)=t(m)*sin(x(i))+1.
write(*,*) x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
40  write(1,*) x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
stop
end
```

Algoritma I ile yapılan ileri fark kapalı şema program

Bu program u(x,t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension fi(10001), p(10001), a(10001), b(10001), c(10001), f(10001),
* al(10001), be(10001), Gp(10001), q(10001), u(51,10001), t(10001),
* fm1(10001), fm2(10001), x(51), e(10001), ug(51,10001)
open(unit=1,file='a210.dat')
tm=1.
xm=1.
read(*,*) m,n
ms=n/15
ta=tm/(m-1)
h=xm/(n-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10  continue
ny=0.26/h
t(1)=0
e(1)=t(1)*sin(x(ny))+1
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*ta
p(j-1)=(j-2)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
fm1(j)=1.
fm2(j)=t(j)*sin(1.)+1.
cap1=0
cap2=0
e(j)=t(j)*sin(x(ny))+1.
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
* -q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2*h)+1./h**2
c(i)= 1./ta+2./h**2-akk
b(i)=1./h**2 +q(j-1)/(2*h)
f(i)=u(i,j-1)/ta+sin(x(i))*(1.+t(j))-Gp(j)*(t(j)*sin(x(i))+1.)
```

```
* -q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
25  continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30  continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40  continue
20  continue
do 110 j=2,m-1,ms
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
110  continue
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
* -q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
p(j)=akk
do 111 i=2,n-1,ms
ug(i,m)=t(m)*sin(x(i))+1.
write(1,*)x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
111      write(*,*) x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
stop
end
```

Algoritma I ile yapılan program Crank-Nicolson şema

Bu program u(x,t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension fi(10001), p(10001), a(10001), b(10001), c(10001), f(10001),
*al(10001), be(10001), Gp(10001), q(10001), u(51,10001), t(10001),
*fm1(10001), fm2(10001), x(51),
* e(10001), ug(51,10001)
open(unit=1,file='a310.dat')
tm=1.
xm=1.
read(*,*) m,n
ms=n/15
ta=tm/(m-1)
h=xm/(n-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10  continue
ny=0.26/h
t(1)=0
```

```
e(1)=t(1)*sin(x(ny))+1
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*ta
p(j-1)=(j-2)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
fm1(j)=1.
fm2(j)=t(j)*sin(1.)+1.
cap1=0
cap2=0
e(j)=t(j)*sin(x(ny))+1.
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1)+u(ny,j)-2*u(ny,j)
*+u(ny+1,j))/(2*h**2)
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2*h)+1./(2*h**2)
c(i)= 1./ta+1./h**2-akk
b(i)=1./(2*h**2) +q(j-1)/(2*h)
f(i)=u(i,j-1)/ta+(u(i+1,j-1)-2*u(i,j-1)+u(i-1,j-1))/(2*h**2)+
* sin(x(i))*(1.+t(j))-Gp(j)*(t(j)*sin(x(i))+1.)
* -q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
25    continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30   continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40   continue
20   continue
do 110 j=2,m-1,ms
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
110  continue
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
p(j)=akk
do 111 i=2,n-1,ms
ug(i,m)=t(m)*sin(x(i))+1.
write(1,*)x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
111      write(*,*) x(i),u(i,m),ug(i,m),abs(ug(i,m)-u(i,m))
```

```
stop
end
```

B) Algoritma II'e göre hatasız olarak yapılan h=1/50değeri sabit tutuldu. a120.dat(M=10001, N=51), a21.dat(M=10001, N=51) ve a31.dat(M=10001, N=51) değerlerinde yapılan programlarda datalar elde edilmiştir. Bu programda $p(t) = 10t\exp(-t^2)$, $q = 0$ ve $u(x,t) = t\sin(x) + 1$ alınmıştır.

Algoritma II ile yapılan ileri fark açık şema program

Bu program p(t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension x(51), t(10001), u(51,10001), f(51,10001), p(10001)
*,ug(51,10001), q(10001), Gp(10001)
open(unit=1,file='a120.dat')
read(*,*) m,n
tau=1./(m-1)
h=1./(n-1)
ms=m/10
ny=0.26/h
do 5 i=1,n
5   x(i)=(i-1)*h
do 7 j=1,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*tau
7   continue
do 10 i=1,n
10    u(i,1)=1.
do 15 j=1,m
p(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
u(1,j)=1.
15   u(n,j)=t(j)*sin(1.)+1.
17    continue
do 20 j=1,m
do 25 i=2,n-1
f(i,j)=sin(x(i))*(1.+t(j)-p(j)*t(j))- p(j)-q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
u(i,j+1)=u(i,j)+tau*(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))/h**2
*+tau*p(j)*u(i,j)+tau*(q(j-1)*(u(i+1,j)-u(i-1,j)))/(2*h)+tau*f(i,j)
akk=((u(i,j+1)-u(i,j))/tau-(u(i+1,j)-2*u(i,j)+u(i-1,j))
*/h**2-q(j-1)*(u(i+1,j)-u(i-1,j))/(2*h)-f(i,j))/u(i,j)
p(j)=akk
25    continue
20    continue
do 40 j=2,m-1,ms
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
write(*,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
40        write(1,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
stop
end
```

Algoritma II ile yapılan ileri fark kapalı şema program

Bu progaram p(t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension fi(10001), p(10001), a(10001), b(10001), c(10001), f(10001), al (10001),
*be(10001), Gp(10001), q(10001),
* u(51,10001), t(10001), fm1(10001), fm2(10001), x(51),
* e(10001), ug(51,10001)
open(unit=1,file='a21.dat')
tm=1.
xm=1.
read(*,*) m,n
ms=m/10
ta=tm/(m-1)
h=xm/(n-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10  continue
ny=0.26/h
t(1)=0
e(1)=t(1)*sin(x(ny))+1
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*ta
p(j-1)=(j-2)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
fm1(j)=1.
fm2(j)=t(j)*sin(1.)+1.
cap1=0
cap2=0
e(j)=t(j)*sin(x(ny))+1.
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2*h)+1./h**2
c(i)= 1./ta+2./h**2-akk
b(i)=1./h**2 +q(j-1)/(2*h)
f(i)=u(i,j-1)/ta+sin(x(i))*(1.+t(j))-Gp(j)*(t(j)*sin(x(i))+1.)
* -q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
25    continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
```

```
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30   continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40   continue
20   continue
do 110 j=2,m-1,ms
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
p(j)=akk
write(1,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
110   write(*,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
stop
end
```

Algoritma II ile yapılan program Crank-Nicolson şema

Bu program p(t)'nin gerçek ve yaklaşık değerlerini bulmaktadır.

```
dimension fi(10001), p(10001), a(10001), b(10001),
*  c(10001), f(10001), al(10001), be(10001), Gp(10001), q(10001),
* u(51,10001), t(10001), fm1(10001), fm2(10001), x(51),
* e(10001),ug(51,10001)
open(unit=1,file='a31.dat')
tm=1.
xm=1.
read(*,*) m,n
ms=m/10
ta=tm/(m-1)
h=xm/(n-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10  continue
ny=0.26/h
t(1)=0
e(1)=t(1)*sin(x(ny))+1
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
t(j)=(j-1)*ta
p(j-1)=(j-2)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
fm1(j)=1.
fm2(j)=t(j)*sin(1.)+1.
```

```
cap1=0
cap2=0
e(j)=t(j)*sin(x(ny))+1.
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1)+u(ny,j)-2*u(ny,j)
*+u(ny+1,j))/(2*h**2)
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2*h)+1./(2*h**2)
c(i)= 1./ta+1./h**2-akk
b(i)=1./(2*h**2) +q(j-1)/(2*h)
f(i)=u(i,j-1)/ta+(u(i+1,j-1)-2*u(i,j-1)+u(i-1,j-1))/(2*h**2)+
* sin(x(i))*(1.+t(j))-Gp(j)*(t(j)*sin(x(i))+1.)
* -q(j-1)*t(j)*cos(x(i))
25    continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30   continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40   continue
20   continue
do 110 j=2,m-1,ms
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
* -q(j-1)*t(j-1)*cos(x(ny))
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2
*-q(j-1)*(u(ny+1,j-1)-u(ny-1,j-1))/(2*h)-ffin)/ u(ny,j-1)
p(j)=akk
write(1,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
110   write(*,*) t(j),p(j),Gp(j),abs(Gp(j)-p(j))
stop
end
```

KİŞİSEL YAYINLAR

Proje Çalışması

Isı transferi denkleminde kaynak kontrol parametresinin çözüm yöntemlerinin araştırılması, KOÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (2006/14).

Sempozyum

Şahin ASLAN, Emine CAN ve Aylin BAYRAK, "Determining of an unknown source parameter in a diffusion equation", Sakarya Üniversitesi II. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, pp 140, (2007).

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1999 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik bölümü'nden 2004 yılında mezun oldu. 2004-2007 yılları arasında, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.