KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Anabilim Dalı: Matematik

Danışmanı: Prof. Dr. Halis AYGÜN

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Mayıs 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 20 Haziran 2007

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Prof.Dr.Halis AYGÜN	Doç.Dr.Ahmet KÜÇÜK	Doç.Dr.Refik KESKİN
(.....................)	(.........................)	(.......................)

Mayıs 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bulanık küme kavramı ilk kez 1965 yılında Zadeh tarafından verilmiştir. Bu kümeler temel alınarak 1968 yılında Chang bulanık topolojik uzay tanımını vermiş ve genel topolojideki birçok tanımı ve özelliği bulanık topolojik uzaylara genellemiştir. Daha sonra Zadeh 1975 yılında 2. tip bulanık kümeler tanımını vermiştir ve bu kümelerin özel bir hali olarak aralık değerli bulanık kümeler tanımlamıştır. Bu kümeler üzerindeki topolojik uzaylar hakkındaki çalışmalardan önce 1976 yılında Lowen yaptığı "Bulanık Topolojik Uzaylar ve Kompaktlık" isimli makalesinde, Chang' in bulanık topolojik uzay tanımındaki eksiklikleri ortadan kaldırarak yeni bir topolojik uzay tanımı vermiştir.

Lowen' ın ardından Atanassov 1986 yılında "Sezgisel Bulanık Kümeler" tanımını vermiş ve bu kümelerin temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca 1989 yılında yayınladığı makaleyle sezgisel bulanık kümeler üzerinde kendi tanımladığı birçok operatörün özelliklerini inceledi. Daha sonra aynı yıl "Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Kümeler" kavramını vererek sezgisel bulanık kümeler kavramını genelleştirdi. Sezgisel kümeler üzerindeki topoloji kavramını 1997 yılında Çoker tanımlanmış ve süreklilik ve kompaktlık gibi temel özellikleri incelemiştir. Sezgisel bulanık kümeler üzerine 2000 yılında, Demirci sezgisel bulanık kümelerin aksiyomatik teorisiyle, aynı yıl Kumar De, Biswas ve Roy yaptıkları ortak çalışmada bir çok operatör tanımı vermiş ve bu operatörler arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Atanassov 1994 yılında, sezgisel bulanık kümeler üzerinde tanımlamış olduğu operatörleri aralık değerli sezgisel bulanık kümeler üzerinde inceleyerek bu küme teorisine genelleştirmiştir. Ardında 1996 yılında Gehrike, Carol Walker ve Elbert Walker aralık değerli bulanık kümeler üzerinde otomorfizm, t-norm, t-conorm gibi operatörleri tanımlamıştır. 1999 yılında Mondal ve Samanta yayınladıkları makaleyle aralık değerli bulanık kümeler ve aralık değerli sezgisel bulanık kümelerin topolojisini tanımlayıp, bu topolojik uzaylardaki süreklilik, kompaktlık ve Alexander Alt Taban Teoremi gibi birçok özelliği incelemişlerdir. Mondal ve Samanta 2001 yılında Atanassov' un tanımladığı aralık değerli bulanık kümelerde topolojik topoloji tanımını verip 1999 yılında yaptıkları çalışmanın bir benzerini aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylar için yapmışlardır.

Bu çalışmada Çoker ve Eş' nin 1995 yılında yayınlamış olduğu "Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda Bulanık Kompaktlık" isimli makalede tanımlamış oldukları kompaktlık çeşitleri aralık değerli bulanık ve aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylara genelleştirilmiş ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Mondal ve Samanta' nın aralık değerli bulanık topolojik uzaylar için ispatladıkları Alexander Alt Taban Teoremi ve sonlu çarpım topolojik uzaylar için Tychonoff Teoremi aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylara genelleştirilip ispatlanmıştır

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN' e yoğun çalışmaları arasında göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca tez çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Araş. Gör. A. Arzu BURAL, Sayın Araş. Gör. Salih TATAR ve Sayın Araş. Gör. Banu PAZAR’ a ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	: Evrensel niceleyici
$\exists$	: Varlıksal niceleyici
$\in$	: Eleman
$\subseteq$	: Alt küme
X, Y, Z,..	: Klasik kümeler
A,B,C,..	: Bulanık küme çeşitleri
M_{x_0}, N_{x_0},..	: Aralık değerli bulanık ve aralık değerli sezgisel bulanık noktalar
$\widetilde{1}$	: Evrensel bulanık küme
$\widetilde{0}$	: Bulanık boş küme
ϕ	: Boş küme
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$2^{(J)}$	: J kümesinin sonlu alt kümeler ailesi
I	: [0,1] kapalı aralığı
D[0,1]	: [0,1]' in tüm kapalı alt aralıkları ailesi
I^X	: Bulanık kümeler ailesi
SB(X)	: X' deki sezgisel bulanık kümeler ailesi
ADB(X)	: X' deki aralık değerli bulanık kümeler ailesi
ASB(X)	: X' deki aralık değerli sezgisel bulanık kümeler ailesi
$\bigvee$	: Supremum
$\bigwedge$	: İnfimum
f, g, h,…	: Fonksiyonlar
supp A	: Bulanık kümenin desteği
A^c	: Bulanık kümenin tümleyeni
x_α, x_p	: Bulanık noktalar
$x_p \mathrel{\tilde{\in}} A$	: x_p noktasının A bulanık kümesinin elemanı olması
μ_A	: Üye olma derecesini gösteren fonksiyon
ν_A	: Üye olmama derecesini gösteren fonksiyon
intA	: Bulanık kümenin içi
clA	: Bulanık kümenin kapanışı
φ, ψ,…	: Kümeler aileleri üzerindeki fonksiyonlar
(X, τ)	: Bulanık topolojik uzay
■	: Teoremin bittiğini gösterir

ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Anahtar Kelimeler: Bulanık kümeler, Bulanık topolojik uzaylar, Sezgisel bulanık kümeler, Sezgisel bulanık topolojik uzaylar, Lowen topoloji, Aralık değerli bulanık kümeler, Aralık değerli bulanık topolojik uzaylar, Aralık değerli sezgisel bulanık kümeler, Aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylar, Kompaktlık, Hemen hemen kompaktlık, Yakın kompaktlık.

Özet: Bu çalışmanın amacı aralık değerli bulanık kümelerin ve aralık değerli sezgisel bulanık kümelerin tanımlarını vermek ve özelliklerini inceleyerek bulanık topolojik uzayların daha genel halleri olan, aralık değerli bulanık topolojik uzaylar ve aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzayları tanıtmaktır.

Birinci bölümde öncelikle bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler tanımlanarak bulanık topolojik uzay ve sezgisel bulanık topolojik uzay yapılarıyla birlikte süreklilik ve kompaktlık gibi topolojik kavramlar kısaca incelenmiştir.

İkinci bölümde, aralık değerli bulanık kümeler temel özellikleriyle tanımlanmış ve kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Daha sonra bu kümeler üzerindeki topolojik uzaylar tanımlanarak klasik topolojik uzaylardaki temel özelliklerin bu topolojik uzaylarda da sağlandığı görülmüştür. Son olarak bazı kompaktlık çeşitleri tanımlanmış ve bu kompaktlıklar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Üçüncü bölüm ikinci bölüme benzer olarak ele alınmıştır. Öncelikle, ikinci bölümdeki gibi aralık değerli bulanık kümeler temel özellikleriyle tanımlanmış ve kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Daha sonra bu kümeler üzerindeki topolojik uzaylar tanımlanarak klasik topolojik uzaylardaki temel özelliklerin bu topolojik uzaylarda da sağlandığı görülmüştür. Son olarak bazı kompaktlık çeşitleri tanımlanmış ve bu kompaktlıklar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

INTERVAL VALUED INTUITIONISTIC FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy topology, Intuitionistic fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy topology, Lowen topolgy, Interval valued fuzzy sets, Interval valued fuzzy topology, Interval valued intuitionistic fuzzy sets, Interval valued intuitionistic fuzzy topology, Compactness, Almost compactness, Nearly compactness.

Abstract: The purpose of this study is to introduce basic concepts of interval valued fuzzy topological spaces and interval valued intuitionistic fuzzy topological spaces which are more generalizations of fuzzy topological spaces.

In the first chapter, firstly fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets were defined with their basic properties. Morever fuzzy topological spaces and intuitionistic fuzzy topological spaces were introduced and some of topological concepts were briefly studied like continuity and compactness.

In the second chapter, interval valued fuzzy sets were defined with their properties and investigated widely. After that the defination of interval valued fuzzy topological space were given and it was seen that fundamental topological properties hold with this defination. Finally some kind of compactness were defined and their relationship were considered.

The third chapter is similar to the second chapter. Firstly interval valued intuitionistic fuzzy sets were defined with their properties and investigated widely like previous chapter. After that the defination of interval valued intuitionistic fuzzy topological space were given and it was seen that fundamental topological properties hold with this defination. Finally some kind of compactness were defined and their relationship were considered.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Bulanık Kümeler ve Bazı Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: X boştan farklı bir küme ve I = [0,1] kapalı aralığı olsun. $A : X \to I$ fonksiyonuna X' in bir bulanık alt kümesi denir.

X' in bütün bulanık alt kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir. Buna göre

$I^X := \{A \mid A : X \to I \text{ bir fonksiyon}\}$ dur.

$x \in X$ ve $A \in I^X$ olmak üzere A(x) değerine x noktasının A bulanık kümesine ait olma derecesi denir.

$\{x \in X \mid A(x) > 0\} \subset X$ alt kümesine A bulanık kümesinin desteği denir ve supp(A) ile gösterilir.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi karakteristik fonksiyonu

$\chi_A : X \to \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin A \\ 1 & ; x \in A \end{cases}$$

ile X' in bir bulanık alt kümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla her klasik küme bir bulanık kümedir.

$\chi_\varnothing : X \to \{0,1\}$

$$x \to \chi_\varnothing(x) = 0$$

sabit fonksiyonu ile X' in boş bulanık kümesi ifade edilir ve $\chi_\varnothing = \widetilde{0}$ yazılır.

$\chi_X : X \to \{0,1\}$

$$x \to \chi_X(x) = 1$$

sabit fonksiyonu ile X' e karşılık gelen bulanık kümesi ifade edilir ve $\chi_X = \widetilde{1}$ yazılır. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.1.2: Eğer X' in bir A bulanık kümesi bir tek $x \in X$ noktası hariç X' in diğer bütün noktalarında 0 değerini alıyorsa bu bulanık kümeye bir bulanık nokta denir.
X' deki bir bulanık noktanın bir $x \in X$ noktasındaki değeri λ $(0 < \lambda \leq 1)$ ise bu bulanık nokta x_λ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$x_\lambda : X \to I$ olmak üzere

$$x_\lambda(y) := \begin{cases} \lambda & ; \ y = x \\ 0 & ; \ y \neq x \end{cases}$$

Bu durumda x' e x_λ bulanık noktasının desteği, λ değerine de x_λ bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir ve sırasıyla $\operatorname{supp}(x_\lambda) = x$ ve $h(x_\lambda) = \lambda$ ile gösterilir.
X' deki bütün bulanık noktaların kümesi P(X) ile gösterilir. O halde
P(X):=$\{ x_\lambda \mid x \in X, 0 < \lambda \leq 1 \}$ olur.
$A \in I^X$ ve $x_\lambda \in P(X)$ olsun. Eğer $A(x) \geq \lambda$ ise x_λ bulanık noktası A bulanık kümesine aittir denir ve $x_\lambda \in A$ yazılır, yani;
$x_\lambda \in A :\Leftrightarrow A(x) \geq \lambda$ ' dır. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 1.1.3: X' deki her bulanık küme kendisine ait bütün bulanık noktaların birleşimine eşittir. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.1.4: A ve B iki bulanık küme olsun.
a) $A = B :\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $A(x) = B(x)$
b) $A \subset B :\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$
c) $A^c : X \to I$
$x \to A^c(x) := 1 - A(x)$ olarak tanımlanan A^c bulanık kümesine A bulanık kümesinin tümleyeni denir. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.1.5: $A, B \in I^X$ olsun.
a) A ile B bulanık kümelerinin birleşim işlemi
$\forall x \in X$ için $(A \cup B)(x) := \max\{A(x), B(x)\}$
biçiminde tanımlanır.

Daha genel olarak X üzerindeki bulanık kümeler ailesi $\{A_m \in I^X \mid m \in M\}$ için birleşim işlemi

$$\forall x \in X \text{ için } (\bigcup_{m\in M} A_m)(x) := \sup\{A_m(x) \mid m \in M\} = (\bigvee_{m\in M} A_m)(x)$$

biçiminde tanımlanır.

b) A ile B bulanık kümelerinin kesişim işlemi

$$\forall x \in X \text{ için } (A \cap B)(x) := \min\{A(x), B(x)\}$$

biçiminde tanımlanır.

Daha genel olarak X üzerindeki bulanık kümeler ailesi $\{A_m \in I^X \mid m \in M\}$ için kesişim işlemi

$$\forall x \in X \text{ için } (\bigcap_{m\in M} A_m)(x) := \inf\{A_m(x) \mid m \in M\} = (\bigwedge_{m\in M} A_m)(x)$$

biçiminde tanımlanır. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 1.1.6: $\{A_m \in I^X \mid m \in M\}$ X üzerindeki bulanık kümelerinin bir ailesi olsun.

a) $(\bigvee_{m\in M} A_m)^c = \bigwedge_{m\in M} A_m^c$

b) $(\bigwedge_{m\in M} A_m)^c = \bigvee_{m\in M} A_m^c$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.1.7: X ve Y iki klasik küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$A \in I^X$ bulanık kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$f(A) : Y \to I \qquad f(A)(y) := \begin{cases} \sup A(x), & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases} ,(\forall y \in Y)$$

olarak tanımlanır.

$B \in I^Y$ bulanık kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(B) : X \to I \qquad f^{-1}(B)(x) := (B \circ f)(x) = B(f(x)) \ (\forall x \in X)$$

olarak tanımlanır. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 1.1.8: $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A, A_1, A_2 \in I^X$ ve $B, B_1, B_2 \in I^Y$ olsun. Bu taktirde

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$. Eğer f fonksiyonu 1-1 ise eşitlik sağlanır.

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Eğer f fonksiyonu örten ise eşitlik sağlanır.

c) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

d) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

e) $f(A^c) \supseteq (f(A))^c$

f) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

g) $\{A_m \in I^X \mid m \in M\}$ X üzerindeki bulanık kümelerin bir ailesi ise

$f(\bigvee_{m\in M} A_m) = \bigvee_{m\in M} f(A_m)$ ve

$f(\bigwedge_{m\in M} A_m) \subseteq \bigwedge_{m\in M} f(A_m)$ sağlanır.

h) $\{B_m \in I^Y \mid m \in M\}$ Y üzerindeki bulanık kümelerinin bir ailesi ise

$f^{-1}(\bigvee_{m\in M} B_m) = \bigvee_{m\in M} f^{-1}(B_m)$ ve

$f^{-1}(\bigwedge_{m\in M} B_m) = \bigwedge_{m\in M} f^{-1}(B_m)$ sağlanır.

İspat: (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

1.2. Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 1.2.1: X boştan farklı klasik bir küme ve $\tau \subset I^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ'ya X üzerinde bir (Chang) bulanık topoloji denir. (X, τ) ikilisine de (Chang) bulanık topolojik uzay denir.

C1) $\tilde{0}, \tilde{1} \in \tau$

C2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

C3) $\forall m \in M$ için $A_m \in \tau \Rightarrow \bigvee_{m\in M} A_m \in \tau$

τ ailesinin elemanlarına açık bulanık kümeleri denir.

(X, τ) bir bulanık topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. Eğer $A^c \in \tau$ ise A' ya kapalı bulanık küme denir. X' in tüm kapalı bulanık kümelerinin ailesi τ' ile gösterilir. (Chang, 1968)

Tanım 1.2.2: (X,τ) ve (Y,τ^*) iki bulanık topolojik uzay olsun.

$f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ fonksiyonu bulanık süreklidir. $\Leftrightarrow$ $\forall B\in\tau^*$ için $f^{-1}(B)\in\tau$ (Chang, 1968)

Uyarı 1.2.3: Klasik topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonlar sürekli olmasına rağmen bulanık topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların bulanık sürekli olması gerekmez. (Lowen, 1976)

Bu önemli özelliği bulanık topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen, Chang' in bulanık topoloji tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 1.2.4: X boştan farklı klasik bir küme ve $\tau\subset I^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ'ya X üzerinde bir (Lowen) bulanık topoloji denir. (X,τ) ikilisine de (Lowen) bulanık topolojik uzay denir. (Lowen, 1976)

L1) $\forall\alpha:X\to I$ (Her $x\in X$ için $\alpha(x)=\alpha$) sabit fonksiyonu için $\alpha\in\tau$

L2) $A,B\in\tau\Rightarrow A\cap B\in\tau$

L3) $\forall m\in M$ için $A_m\in\tau\Rightarrow \bigvee_{m\in M} A_m\in\tau$

Tanım 1.2.5: (X,τ) bir bulanık topolojik uzay ve $f\in I^X$ olsun.

a) $\operatorname{int}A:=\bigvee_{\substack{B\subset A\\ B\in\tau}} B$ bulanık kümesi A bulanık kümesinin içi olarak adlandırılır.

b) $\operatorname{cl}A:=\bigwedge_{\substack{A\subset B\\ B\in\tau'}} B$ bulanık kümesi A bulanık kümesinin kapanışı olarak adlandırılır. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 1.2.6: (X,τ) bir bulanık topolojik uzay ve $A\in I^X$ olsun.

a) $(\operatorname{cl}A)^c=\operatorname{int}(A^c)$

b) $(\operatorname{int}A)^c=\operatorname{cl}((A^c))$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Klasik topolojik uzaylarda bilinen iç ve kapanış özellikleri bulanık topolojik uzaylarda da geçerlidir.

Tanım 1.2.7: X üzerindeki bir τ bulanık topolojisinin bir $\beta\subset\tau$ alt kümesi τ için bir tabandır $:\Leftrightarrow \forall A\in\tau$ için $\exists\{B_i\mid i\in J\}\subset\beta$ $:A=\bigvee_{i\in J}B_i$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.2.8: X üzerindeki bir τ bulanık topolojisinin bir $\delta \subset \tau$ alt kümesi τ için bir alt tabandır :$\Leftrightarrow$ δ' nın elemanlarının sonlu infimumlarının ailesi τ için bir tabandır.

Diğer bir deyişle $\beta = \{\bigwedge_{S \in T} S \mid T \subset \delta \text{ sonlu}\}$ ailesi τ için bir tabandır. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.2.9: (X, τ) bulanık topolojik uzayı (Chang) kompakttır : $\Leftrightarrow$ $\vee_{A \in \beta} A = \tilde{1}$ olan her $\beta \subset \tau$ ailesi için $\vee_{A \in \beta_0} A = \tilde{1}$ olacak şekilde bir $\beta_0 \subset \beta$ sonlu bir alt ailesi vardır. (Chang, 1968)

Örnek 1.2.10: X=I ve $r \in (0,1)$ için

$$G_r(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{r} & x \in (0, r) \\ 0 & x \in [r,1] \end{cases},$$

olmak üzere $\tau = \{G_r : r \in (0,1)\} \cup \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ ailesi X üzerinde bir bulanık topolojidir ve (X, τ) topolojik uzayı (Chang) kompakttır.

Tanım 1.2.11: (X, τ) bir bulanık topolojik uzay olsun.

$B \in I^X$ bulanık kümesi Lowen kompakttır : $\Leftrightarrow$ $\vee_{A \in \beta} A \geq B$ olan her $\beta \subset \tau$ ailesi ve her $\varepsilon > 0$ için $\vee_{A \in \beta_0} A \geq B - \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\beta_0 \subset \beta$ sonlu alt ailesi vardır.

Tanım 1.2.12: (X, τ) bulanık topolojik uzayı Lowen kompakttır : $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in I^X$ sabit bulanık kümesi Lowen kompakttır.

1.3. Sezgisel Bulanık Kümeler

Bulanık kümelerin genellemesi olarak 1983 yılında Atanassov sezgisel bulanık küme kavramını tanımladı. Daha sonra, Çoker (1997) tarafından sezgisel bulanık topolojik uzay tanımlandı. Bu bölümde sezgisel bulanık topolojik uzaylara kısaca giriş yapılacaktır.

Tanım 1.3.1: X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde $A=\{<x,\mu_A(x),\nu_A(x)>: x\in X\}$ kümesine X' de bir sezgisel bulanık (veya SB küme) küme denir. Burada, $\mu_A: X\to I$ fonksiyonu her bir $x\in X$ için x' in A' ya ait olma derecesini ve $\nu_A: X\to I$ fonksiyonu A' ya ait olmama derecesini gösteren bulanık kümelerdir ve her $x\in X$ için $0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$' dir. (Atanassov, 1986) Kolaylık olması açısından X' deki tüm sezgisel bulanık kümeler ailesini SB(X) olarak gösterilecektir.

Uyarı 1.3.2: A bir bulanık küme olmak üzere her bir $x\in X$' in A' ya ait olma derecesi A(x), ait olmama derecesi 1-A(x) olarak düşünüldüğünde bu A bulanık kümesi bir sezgisel bulanık küme olarak göz önüne alınabilir. Yani A bulanık kümesi özel olarak;
$A^*=\{<x,A(x),1-A(x)>: x\in X\}$ sezgisel bulanık kümesi şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.3.3: X boştan farklı bir küme ve A,B iki sezgisel bulanık küme olsun. Buna göre

a) $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$ ve $\nu_A(x)\ge\nu_B(x)$' dir.

b) A=B $\Leftrightarrow$ $A\subseteq B$ ve $B\subseteq A$

c) $A^c=\{<x,\nu_A(x),\mu_A(x)>: x\in X\}$,

d) $\tilde{0}_X=\{<x,1,0>: x\in X\}$ ve $\tilde{1}_X=\{<x,0,1>: x\in X\}$,

e) $A\cap B=\{<x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)>: x\in X\}$,

f) $A\cup B=\{<x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)>: x\in X\}$,

g) $\bigcap A_i=\{<x,\wedge\mu_{A_i}(x),\vee\nu_{A_i}(x)>: x\in X\}$,

h) $\bigcup A_i=\{<x,\vee\mu_{A_i}(x),\wedge\nu_{A_i}(x)>: x\in X\}$. (Çoker ve Eş, 1995)

Tanım 1.3.4: X ve Y boştan farklı iki küme ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) B, Y' de sezgisel bulanık küme olmak üzere B' nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(B)$ ile gösterilir ve

$f^{-1}(B)=\{<x,f^{-1}(\mu_B)(x),f^{-1}(\nu_B)(x)>: x\in X\}$

şeklinde tanımlanır. Böylece $f^{-1}(B)$ de X de sezgisel bulanık kümedir.

(b) A X’ de sezgisel bulanık küme olmak üzere A’ nın f altındaki görüntüsü f(A) ile gösterilir ve

$f(A)=\{<y, f(\mu_A)(y), f_-(\nu_A)(y)>: y\in Y\}$

şeklinde tanımlanır. Burada

$f_-(\nu_A)(y)=(1-f(1-\nu_A))(y)$ ’ dir.

f(A) da Y’ de sezgisel bulanık kümedir. (Çoker, 1997)

Sonuç 1.3.5: $f: X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $A_1, A_2 \in SB(X)$ için $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$ ’ dir.

b) $B_1, B_2 \in SB(Y)$ için $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$ ’ dir.

c) $\forall A\in SB(X)$ için $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$ dir. Eğer f 1-1 ise eşitlik sağlanır.

d) $\forall B\in SB(Y)$ için $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$ dir. Eğer f örten ise eşitlik sağlanır.

e) $\forall B_i \in SB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\Delta} B_i\right)=\bigcup_{i\in\Delta}\big(f^{-1}(B_i)\big)$ dir.

f) $\forall B_i \in SB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\Delta} B_i\right)=\bigcap_{i\in\Delta}\big(f^{-1}(B_i)\big)$ dir.

g) $\forall A_i \in SB(X)$ için $f\left(\bigcup_{i\in\Delta} A_i\right)=\bigcup_{i\in\Delta}\big(f(A_i)\big)$ dir.

h) $\forall A_i \in SB(X)$ için $f\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\Delta}\big(f(A_i)\big)$ dir. Eğer f birebir ise eşitlik sağlanır.

i) $\forall B\in SB(Y)$ için $f^{-1}\big(B^c\big)=[f^{-1}(B)]^c$ ’ dir.

j) $f^{-1}(\widetilde{1}_Y)=\widetilde{1}_X$ ’ dir.

k) $f^{-1}(\widetilde{0}_Y)=\widetilde{0}_X$ ’ dir. (Çoker, 1997)

1.4. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 1.4.1: X boştan farklı bir küme olsun. $\tau\subset SB(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ’ ya X kümesi üzerinde sezgisel bulanık topoloji (veya kısaca SB topoloji) denir.

(1) $\widetilde{0}, \widetilde{1}\in\tau$,

(2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,

(3) $\forall i \in \Delta$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in\Delta} A_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de sezgisel bulanık topolojik uzay denir. τ' nun elemanlarına açık SB küme denir. Ayrıca

Eğer $B^c \in \tau$ ise $B \in SB(X)$ kümesine kapalı SB küme denir. (Çoker, 1997)

Uyarı 1.4.2: Uyarı 1.3.2 den her bulanık küme bir sezgisel bulanık küme olarak göz önüne alınabileceğinden her bulanık topoloji bir sezgisel bulanık topoloji olarak düşünülebilir.

Tanım 1.4.3: (X, τ) bir SB topolojik uzay ve $A \in SB(X)$ olsun.

a) $\operatorname{int} A := \bigcup_{\substack{G\subset A \\ G\in\tau}} G$ SB kümesi A kümesinin içi olarak adlandırılır.

b) $clA := \bigcap_{\substack{A\subset F \\ F-\text{kapalı}}} F$ SB kümesi A kümesinin kapanışı olarak adlandırılır. (Çoker, 1997)

Tanım 1.4.4: (X, τ) ve (Y, τ^*) iki SB topolojik uzay olsun.

$f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ fonksiyonu SB süreklidir: $\Leftrightarrow$ $\forall B \in \tau^*$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ (Çoker, 1997)

Tanım 1.4.5: (X, τ) bir SB topolojik uzay olsun.

(a) $\beta \subset \tau$ ailesi $\tilde{1}_X = \bigcup_{w\in\beta} w$ koşulunu sağlıyorsa bu β ailesine X' in bir açık örtümü denir.

(b) X' in her açık örtümü sonlu bir alt örtüme sahipse, (X, τ) SB topolojik uzayına kompakttır denir. (Çoker ve Eş, 1995)

Örnek 1.4.6: X=I ve $\{G_n : n = 2,3,4,...\}$ SB kümeler ailesi olsun. Burada G_n ve G SB kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\mu_{G_n}(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 0 \text{ ise} \\ nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$v_{G_n}(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \text{ ise} \\ 1 - nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 0 \text{ ise} \\ 1, & x \neq 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$v_G(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \text{ ise} \\ 0, & x \neq 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

Bu durumda $\tau = \{0_X, 1_X, G\} \cup \{G_n : n = 2,3,4,...\}$ bir SB topolojidir ve (X, τ) SB topolojik uzayı kompakttır.

BÖLÜM 2

ARALIK DEĞERLİ BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümün birinci kısmında aralık değerli bulanık kümeler tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir. İkinci kısımda aralık değerli bulanık topolojik uzaylar tanımlanacak daha sonra sürekli fonksiyonlar ve çarpım topolojisi gibi temel kavramlar incelenecektir. Üçüncü kısımda ise kompaktlıklar tanımlanacaktır.

2.1. Aralık Değerli Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1: D[0,1], [0,1]' in tüm kapalı alt aralıklarının ailesi olsun. D[0,1]' in elemanlarını M,N, ... olarak gösterelim. $M \in D[0,1]$ için M=[M^L, M^U] olsun. Burada M^L aralığın alt sınırı M^U ise aralığın üst sınırıdır. Burada,

$$M = N \Leftrightarrow M^L = N^L \text{ ve } M^U = N^U,$$

$$M \le N \Leftrightarrow M^L \le N^L \text{ ve } M^U \le N^U,$$

ayrıca M' nin tümleyeni,

$M^c = 1 - M = [1 - M^U, 1 - M^L]$ olarak tanımlanır. (Mondal ve Samanta, 1999)

Tanım 2.1.2: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $A : X \to D[0,1]$ fonksiyonuna X' de bir aralık değerli bulanık küme (veya kısaca ADB küme) denir.

Böylece $\forall x \in X$ için A(x) alt sınırı $[A(x)]^L$ üst sınırı $[A(x)]^U$ olan kapalı bir aralıktır. X' deki tüm aralık değerli bulanık kümelerin oluşturduğu aile ADB(X) olarak gösterilir. Açıktır ki X' deki her bulanık küme bir aralık değerli bulanık kümedir. Her $x \in X$ için $A(x) = [a, b]\ (\subset [0,1])$ ise bu A aralık değerli bulanık kümeye sabit ADB küme denir ve bu küme $[\widetilde{a,b}]$ ile gösterilir. a=b durumunda bu ADB kümesi $\widetilde{a}$ ile gösterilir.

Özel durumda bir ADB kümesi sadece bir $x_0 \in X$ için M=[a,b] değerini alıyor ve diğer elemanlar için 0 değerini alıyorsa bu ADB kümesine aralık değerli bulanık nokta (veya ADB noktası) denir ve M_{x_0} veya $[a,b]_{x_0}$ olarak gösterilir. Burada eğer a=b ise ADB noktası a_{x_0} olarak gösterilir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Tanım 2.1.3:

(a) φ dönüşümü her A aralık değerli bulanık kümesini, her $x \in X$ için

$\mu_B(x) = \inf A(x), \quad \nu_B(x) = 1 - \sup A(x)$ olmak üzere B=$\varphi(A)$ sezgisel bulanık kümesine taşıyan dönüşüm olarak tanımlanır.

(b) ψ dönüşümü her B sezgisel bulanık kümesini, her $x \in X$ için

$A(x) = [\mu_A(x), 1 - \nu_A(x)]$ olmak üzere A=$\psi(B)$ aralık değerli bulanık kümesine taşıyan dönüşüm olarak tanımlanır. (Atanassov ve Gargov, 1989)

Önerme 2.1.4:

(a) Her $A \in$ ADB(X) için $\psi(\varphi(A))$=A' dır.

(b) Her $B \in$ SB(X) için $\varphi(\psi(B))$=B' dir.

İspat: (a) $A \in$ ADB(X) olsun. O halde her $x \in X$ için

$$\psi(\varphi(A))(x) = [\mu_{\varphi(A)}(x), 1 - \nu_{\varphi(A)}(x)] = [\inf A(x), 1 - 1 + \sup A(x)] = A(x)$$

(b) $B \in$ SB(X) olsun. O halde her $x \in X$ için

$\mu_{\varphi(\psi(B))}(x) = \inf \psi(B)(x) = \inf[\mu_B(x), 1 - \nu_B(x)] = \mu_B(x)$ ve

$\nu_{\varphi(\psi(B))} = 1 - \sup \psi(B)(x) = 1 - \sup[\mu_B(x), 1 - \nu_B(x)] = \nu_B(x)$ olur.

Bu önerme gösterir ki her sezgisel bulanık küme bir aralık değerli bulanık küme ve her aralık değerli bulanık küme ise bir sezgisel bulanık küme olarak göz önüne alınabilir. ■ (Atanassov ve Gargov, 1989)

Tanım 2.1.5: $A,B \in ADB(X)$ olsun.

(a) $A \subset B :\Leftrightarrow \ \forall x \in X \ \left[A(x)\right]^L \leq \left[B(x)\right]^L, \left[A(x)\right]^U \leq \left[B(x)\right]^U$

(b) A=B $:\Leftrightarrow \ \forall x \in X \ \left[A(x)\right]^L = \left[B(x)\right]^L, \left[A(x)\right]^U = \left[B(x)\right]^U \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$

(c) A ADB kümesinin tümleyeni A^c ile gösterilir ve

$\forall x \in X$ için $[A^c(x)]^L = 1 - [A(x)]^U$ ve $[A^c(x)]^U = 1 - [A(x)]^L$ olarak tanımlanır.

(d) ADB kümelerinin bir $\{A_i : i \in I\}$ ailesinin birleşimi $G = \bigcup A_i$ ve kesişimi

$F = \bigcap A_i$ ADB kümeleri sırasıyla,

$[G(x)]^L = \sup_i [A_i(x)]^L, [G(x)]^U = \sup_i [A_i(x)]^U \quad (\forall x \in X)$ ve

$[F(x)]^L = \inf_i [A_i(x)]^L, [F(x)]^U = \inf_i [A_i(x)]^U \quad (\forall x \in X)$

şeklinde tanımlanır.

(e) M_{x_0} ADB noktasına bir A kümesine aittir denir (sembolik olarak $M_{x_0} \tilde{\in} A$

yazılır) $:\Leftrightarrow \ M^L \leq \left[A(x_0)\right]^L$ ve $M^U \leq \left[A(x_0)\right]^U$.

(f) $\tilde{0}$ ve $\tilde{1}$ ADB kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\tilde{0} = [0,0]$, $\tilde{1} = [1,1]$. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.1.6. Her $A, B, C, A_i B_i \in ADB(X)$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\tilde{0} \subset A \subset \tilde{1}$,

(ii) $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$,

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

(iv) $A, B \subset A \cup B; A \cap B \subset A, B$.

(v) $A \cap \left(\bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i (A \cap B_i)$.

(vi) $A \cup \left(\bigcap_i B_i \right) = \bigcap_i (A \cup B_i)$.

(vii) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

(viii) $(\tilde{0})^c = \tilde{1}; (\tilde{1})^c = \tilde{0}$.

(ix) $(A^c)^c = A$.

(x) $\left(\bigcap_i A_i \right)^c = \bigcap_i A_i^c$.

(xi) $\left(\bigcup_i A_i \right)^c = \bigcap_i A_i^c$.

(xii) $\forall A \in ADB(X)$ için $A = \bigcup \{ M_x : M_x \,\tilde{\in}\, A \}$ dir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Uyarı 2.1.7: Klasik bulanık kümelerde; A,B iki klasik bulanık küme ve x_λ bulanık nokta olmak üzere olmak üzere $x_\lambda \in A \cup B \Leftrightarrow x_\lambda \in A$ veya $x_\lambda \in B$ sağlanır. Fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi ADB kümelerinde bunun her zaman sağlanması gerekmez.

Örnek 2.1.8: $X = \{x_1, x_2\}, A_1 = \widetilde{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]}$ ve $A_2 = \widetilde{\left[0, \frac{3}{4}\right]}$ olsun. O halde

$M_{x_1} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]_{x_1}$ ADB noktası için $M_{x_1} \in A_1 \cup A_2$ dir. Fakat $M_{x_1} \notin A_1$ ve $M_{x_1} \notin A_2$ dir.

Teorem 2.1.9: $A, B \in ADB(X)$ ve P_x bir ADB noktası olsun. Bu takdirde $P_x \in A \cup B \Rightarrow \exists M_x \tilde{\in} A, N_x \tilde{\in} B:\ M_x \cup N_x = P_x$

sağlanır.

İspat: $x \in X$ $P_x = ([a,b])_x$, $A(x) = ([a_1, b_1])$ ve $B(x) = ([a_2, b_2])$ olsun. O halde $M_x = \left([a \wedge a_1, b \wedge b_1]\right)_x$ ve $N_x = \left([a \wedge a_2, b \wedge b_2]\right)_x$ olarak alınırsa $M_x \tilde{\in} A, N_x \tilde{\in} B$ ve $M_x \cup N_x = P_x$ olur. ■

Tanım 2.1.10: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \in ADB(X)$ olsun. Bu durumda,

(a) A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü $f(A)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

Her $y \in Y$ için,

$$[f(A)(y)]^L = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \left\{[A(x)]^L\right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases},$$

$$[f(A)(y)]^U = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \left\{[A(x)]^U\right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}.$$

f(A) Y' de bir ADB kümesidir.

(b) $B \in ADB(Y)$ olmak üzere B kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(B)$ aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $x \in X$ için,

$[f^{-1}(B)(x)]^L = [B(f(x))]^L$ ve $[f^{-1}(B)(x)]^U = [B(f(x))]^U$.

$f^{-1}(B)$ X' de bir ADB kümesidir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.1.11: $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\forall B \in ADB(Y)$ için $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$,

(ii) $\forall A \in ADB(X)$ için $\left(f(A)\right)^c \subset f(A^c)$,

(iii) $B_1, B_2 \in ADB(Y)$ için $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,

(iv) $A_1, A_2 \in ADB(X)$ için $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$,

(v) $\forall B \in ADB(Y)$ için $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ dir. Eğer f örten ise eşitlik sağlanır.

(vi) $\forall A \in ADB(X)$ için $f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A$ dir. Eğer f birebir ise eşitlik sağlanır.

(vii) $\forall B_i \in ADB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i \left(f^{-1}(B_i)\right)$ dir.

(viii) $\forall B_i \in ADB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i \left(f^{-1}(B_i)\right)$ dir.

(ix) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun.

$\forall C \in ADB(Z)$ için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ dir.

(x) $\forall x \in X$ için $f(M_x) = M_{f(x)}$ dir.

İspat: (v) in ispatını vereceğiz diğerleri de benzer şekilde yapılır.

$y \in Y$ alalım. İki durum söz konusudur.

1.Durum: $f^{-1}(y) \neq \phi$.

2.Durum: $f^{-1}(y) = \phi$.

1.Durumda ;

$$[f(f^{-1}(B))(y)]^L = \sup_{y=f(x)}[f^{-1}(B)(x)]^L = \sup_{y=f(x)}[B(f(x))]^L = [B(y)]^L.$$

Benzer olarak $[f(f^{-1}(B))(y)]^U = [B(y)]^U$.

2.Durumda ;

$$[f(f^{-1}(B))(y)]^L = 0,\ [f(f^{-1}(B))(y)]^U = 0$$

olur. Bu durumda ifadenin sağlandığı açıktır.

Görüldüğü gibi iki durumda da ifade sağlanır. Ayrıca f örten olduğunda $f^{-1}(y) \neq \phi$ olur. Yani yine 1. Durum geçerli olur. Eşitlik sağlanır. ■

2.2. Aralık Değerli Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1: X boştan farklı bir küme olsun. $\tau \subset ADB(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ' ya X kümesi üzerinde aralık değerli bulanık topoloji (veya kısaca ADB topoloji) denir.

(1) $\widetilde{0}, \widetilde{1} \in \tau$,

(2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,

(3) $\forall i \in \Delta$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in \Delta} A_i \in \tau$.

(X,τ) ikilisine de aralık değerli bulanık topolojik uzay (veya kısaca ADB topolojik uzay) denir. τ' nun elemanlarına ADB açık küme denir. Eğer $B^c \in \tau$ ise $B \in ADB(X)$ kümesine ADB kapalı küme denir. Sadece $\widetilde{0}$ ve $\widetilde{1}$ kümelerini içeren topolojiye basit (trivial) topoloji, tüm ADB kümelerini içeren topolojiye de ayrık (diskret) topoloji denir ve sırasıyla τ^0 ve τ^1 olarak gösterilir.

Eğer τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki ADB topoloji ve $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_2' ye τ_1 den daha güçlü veya daha ince denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Uyarı 2.2.2: Önerme 2.1.4' den her sezgisel bulanık küme bir aralık değerli bulanık küme olarak düşünülebileceğinden her sezgisel bulanık topolojik uzay bir aralık değerli bulanık topolojik uzay olarak göz önüne alınabilir.

Teorem 2.2.3: $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ X üzerindeki ADB topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_i \{\tau_i : i \in \Delta\}$ ailesi de X üzerinde bir ADB topolojidir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.4: $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ X üzerinde ADB topolojilerinin bir ailesi olsun. O halde $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ ailesi kesişim işlemine göre en küçük elemanı τ^0, en büyük elemanı τ^1 olan bir tam latistir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.5: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ de bu uzaydaki tüm kapalı ADB kümelerin oluşturduğu aile olsun. O halde

(1) $\widetilde{0},\widetilde{1} \in \mathcal{F}$

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}, \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

(3) $\forall i \in \Delta$ için $F_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in \Delta} F_i \in \mathcal{F}$.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Tanım 2.2.6: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve $\mathcal{B}\subset\tau$ olsun. Eğer τ' nun her elemanı $\mathcal{B}$ ' nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ' ye τ' nun bir tabanı denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Tanım 2.2.7: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve $\delta\subset\tau$ olsun. Eğer δ' nin elemanlarının tüm sonlu arakesitleri τ için taban oluyorsa δ ye τ' nun bir alt tabanı denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.8: $\mathcal{B}$, X' de ADB kümelerinin bir ailesi ve $\tilde{0},\tilde{1}\in\mathcal{B}$ olsun. Eğer her $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ ve $\forall M_x \tilde{\in} B_1\cap B_2$ için $\exists W\in\mathcal{B}$: $M_x \tilde{\in} W\subset B_1\cap B_2$ sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ ailesi, X üzerindeki bir topolojinin tabanıdır.

İspat: τ, elemanları $\mathcal{B}$ ' nin elemanlarının keyfi birleşimlerinden oluşan aile olsun.

(1) $\tilde{0},\tilde{1}\in\tau$,

(2) τ keyfi birleşime göre kapalıdır.

(3) $U,V\in\tau$ alalım.

$$\Rightarrow U=\bigcup_{i\in I}U_i,\ V=\bigcup_{j\in J}V_j .$$

$$\Rightarrow U\cap V=\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J}V_j\right)=\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}U_i\cap V_j \qquad \text{(Teorem 2.1.6 (v)' den)}$$

Şimdi $\forall M_x \tilde{\in} U_i\cap V_j$ için hipotezden $\exists W\in\mathcal{B}$: $M_x \tilde{\in} W\subset U_i\cap V_j$ olur.

$U_i\cap V_j=\bigcup\{M_x : M_x \tilde{\in} U_i\cap V_j\}\subset\bigcup W_x\subset U_i\cap V_j$ olur. Buradan $U\cap V$' nin $\mathcal{B}$ ' nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabildiği görülür.

Sonuç olarak τ tabanı $\mathcal{B}$ olan bir topolojidir. ■

Uyarı 2.2.9: Bu teoremin tersi genel olarak doğru değildir. Aşağıdaki örnekle bu gösterilmektedir.

Örnek 2.2.10: X boştan farklı bir küme olsun.

$$A_1 = \widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}, A_2 = \widetilde{\left[0,\frac{3}{4}\right]}, A_1 \cup A_2 = \widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}, A_1 \cap A_2 = \widetilde{\left[0,\frac{1}{2}\right]}, B_1 = \widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{4}{5}\right]},$$

$$B_2 = \widetilde{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]},\ B_1 \cup B_2 = \widetilde{\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]}, A_1 \cup B_1 = \widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{4}{5}\right]} \text{ ve } B_1 \cap B_2 = \widetilde{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]} = A_1 \cup A_2$$

olmak üzere,

$\tau = \{\widetilde{0},\widetilde{1},A_1,A_2,B_1,B_2,A_1 \cup A_2,A_1 \cap A_2,B_1 \cup B_2,A_1 \cup B_1\}$ ailesi X üzerinde bir ADB topolojidir. Ayrıca $\mathcal{B} = \{\widetilde{0},\widetilde{1},A_1,A_2,B_1,B_2,A_1 \cap A_2\}$ ailesi τ için bir tabandır.

Buradan $\widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]}_x$ ADB noktası $B_1 \cap B_2$ ye ait olmasına rağmen $\widetilde{\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]}_x \,\widetilde{\in}\, W \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{B}$ mevcut değildir.

Tanım 2.2.11: (X,τ) bir ADB topolojik uzay, $B \in ADB(X)$ ve M_x X' de bir ADB noktası olsun.

B kümesine M_x noktasının komşuluğu denir : $\Leftrightarrow \exists O \in \tau$ öyle ki $M_x \,\widetilde{\in}\, O \subset B$ sağlanır. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.12: Bir (X,τ) ADB topolojik uzay olsun.

$A \in \tau \Leftrightarrow$ A kümesi A' ya ait tüm ADB noktalarının komşuluğudur.

İspat: Tanımdan görülür.

Tanım 2.2.13: $0 \le a \le b \le 1$ ve $(a,b) \neq (0,0)$ olsun. (δ,η) ikilisi,

(i) $\delta \ge 0, \eta > 0$,

(ii) $a = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$,

(iii) $0 \le a - \delta < b - \eta$

koşullarını sağlıyorsa bu ikiliye (a,b) için uygun ikili denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.14: (X, τ) bir ADB topolojik uzay olsun. Her M_x ADB noktası için $N(M_x)$ bu noktanın tüm komşuluklarının bir ailesi olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(N1) $\widetilde{1} \in N(M_x)$ ve $A \in N(M_x)$ için $M_x \,\widetilde{\in}\, A$.

(N2) $A, B \in N(M_x) \Rightarrow A \cap B \in N(M_x)$.

(N3) $A \subset B$ ve $A \in N(M_x) \Rightarrow B \in N(M_x)$.

(N4) (a,b) ile uygun olan her (δ, η) ikilisi için

$A \in N([a-\delta, b-\eta]_x) \Rightarrow A \in N([a,b]_x)$.

(N5) $A \in N(M_x)$, $B \in N(P_x) \Rightarrow A \cup B \in N(M_x \cup P_x)$.

(N6) $A \in N(M_x) \Rightarrow \exists S \in N(M_x)$ öyle ki $S \subset A$ ve $\forall P_y \,\widetilde{\in}\, S$ için $S \in N(P_y)$.

İspat: (N1)-(N3) tanımlardan açıktır.

(N4) (a,b) ile uygun olan her (δ, η) ikilisi için $A \in N([a-\delta, b-\eta]_x)$ olsun. Bu durumda

$\forall(\delta, \eta)$ için $\exists O_{(\delta,\eta)} \in \tau : [a-\delta, b-\eta]_x \,\widetilde{\in}\, O_{(\delta,\eta)} \subset A$

sağlanır. Buradan

$O := \bigcup_{\delta,\eta} O_{(\delta,\eta)}$ olarak seçersek $O \in \tau$ ve $O \subset A$ olur. Ayrıca,

$$\bigcup_{\delta,\eta}[a-\delta, b-\eta]_x = [a,b]_x \subset \bigcup_{\delta,\eta} O_{(\delta,\eta)} = O \subset A$$

olur. Buradan

$[a,b]_x \mathrel{\tilde{\in}} O \subset A$ olur. Yani $A \in N([a,b]_x)$ olur.

(N5) $A \in N(M_x)$ ve $B \in N(P_x)$ olsun.

$\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \tau : M_x \mathrel{\tilde{\in}} O_1 \subset A$ ve $P_x \mathrel{\tilde{\in}} O_2 \subset B$

$\Rightarrow M_x \cup P_x \mathrel{\tilde{\in}} O_1 \cup O_2 \subset A \cup B$, ($M_x \cup P_x$ yine bir ADB noktasıdır.)

$\Rightarrow A \cup B \in N(M_x \cup P_x)$ olur.

(N6) $A \in N(M_x) \Rightarrow \exists S \in \tau : M_x \mathrel{\tilde{\in}} S \subset A$ sağlanır.

$S \in \tau$ olduğundan S tüm noktalarının komşuluğudur. Yani $\forall P_y \mathrel{\tilde{\in}} S$ için $S \in N(P_y)$ dir.

Buradan $A \in N(P_x)$ $\Rightarrow$ $\exists S \in N(M_x)$ vardır öyle ki $S \subset A$ ve $\forall P_y \mathrel{\tilde{\in}} S$ için $S \in N(P_y)$ olur. ■

Teorem 2.2.15: X boştan farklı bir küme ve X' deki her M_x noktası için (N1)-(N6) koşullarını sağlayan bir $N(M_x)$ ailesi mevcut olsun. Bu durumda

$$\tau = \{A \in ADB(X) : \forall P_x \mathrel{\tilde{\in}} A \text{ için } A \in N(P_x)\}$$

ailesi X üzerinde bir ADB topolojidir ve $N(M_x)$ de M_x noktasının komşuluk sistemidir.

İspat: (1) $\tilde{0} \in \tau$ dolaylı olarak sağlanır. Ayrıca (N1)' den dolayı $\tilde{1} \in \tau$ sağlanır.

(2) $A, B \in \tau$ ve $M_x \in A \cap B$ alalım.

$\Rightarrow A, B \in N(M_x)$, (τ ' nun yapısından)

$\Rightarrow$ (N2)' den $A \cap B \in N(M_\xi)$ olur.

O halde $A \cap B \in \tau$ olur.

(3) $\forall i \in J$ için $A_i \in \tau$ ve $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ ve $x \in X$ için $[A(x)]^L = a$, $[A(x)]^U = b$ olsun.

1. Durum: $0 < a < b$ ve $M_x = [a, b]_x$ olsun. O halde $M_x \tilde{\in} A$. $0 < a - \varepsilon < b - \eta$ olacak şekilde $\varepsilon > 0, \eta > 0$ sayılarını seçelim.

$M_x(\varepsilon, \eta) = [a - \varepsilon, b - \eta]_x$ ADB noktası için $\exists i_0, j_0 \in J$ öyle ki

$[A_{i_0}(x)]^L > a - \xi$, $[A_{j_0}(x)]^U > b - \eta$ olur.

Buradan $M_x(\varepsilon, \eta) \tilde{\in} A_{i_0} \cup A_{j_0}$ dır.

$A_{i_0, j_0} := A_{i_0} \cup A_{j_0}$ diyelim.

Şimdi $P_y = [c, d]_y \tilde{\in} A_{i_0, j_0}$ keyfi noktasını alalım. O halde,

$c \leq \max\{[A_{i_0}(y)]^L, [A_{j_0}(y)]^L\}$ ve

$d \leq \max\{[A_{i_0}(y)]^U, [A_{j_0}(y)]^U\}$ dir.

Genelliği bozmaksızın $c \leq [A_{i_0}(y)]^L$, $d \leq [A_{j_0}(y)]^U$ olarak alalım.

O halde $[c, \min\{d, [A_{i_0}(y)]^U\}]_y \tilde{\in} A_{i_0}$ ve $[0, d]_y \tilde{\in} A_{j_0}$ olur.

Buradan,

$A_{i_0} \in N([c, \min\{d, [A_{i_0}(y)]^U\}]_y)$ ve $A_{j_0} \in N([0, d]_y)$ dir.

Buradan, (N5) özelliğinden

$$
\begin{aligned}
A_{i_0} \cup A_{j_0} &\in N([c, \min\{d, [A_{i_0}(y)]^U\}]_y \cup [0,d]_y) \\
&= N([c,d]_y) \\
&= N(P_y) \quad \text{olur.}
\end{aligned}
$$

Böylece $M_x(\varepsilon,\eta) = [a-\varepsilon, b-\eta]_x$ noktası için $\exists A_{i_0,j_0}$ öyle ki $\forall P_y \tilde{\in} A_{i_0,j_0}$ için $A_{i_0,j_0} \in N(P_y)$ ve $M_x(\varepsilon,\eta) \tilde{\in} A_{i_0,j_0} \subset A$ olur.

Buradan da $\forall(\varepsilon,\eta)$ ikilisi için $A \in N(M_x(\varepsilon,\eta))$ olduğundan (N4) özelliğinden $A \in N(M_x)$ olur. Buradan da $A \in \tau$ bulunur.

2. Durum: $a = 0 < b$ ve $M_x(\eta) = [0, b-\eta]_x$ noktasını alalım.

Böylece $\exists j_0 \in J$ için $M_x(\eta) \tilde{\in} A_{j_0}$ olur. Buradan $A \in N(M_x(\eta))$ olur (çünkü $A_{j_0} \subset A$ dır) . Aynı şekilde $\forall \eta > 0$ uygun sayısı için bu doğru olduğundan (N4) özelliğinden $A \in N(M_x)$ olur. Buradan da $A \in \tau$ bulunur.

Böylece 1. ve 2. durumlarda $A \in \tau$ olur. Sonuç olarak, τ X üzerinde bir ADB topolojidir ve (X,τ) ADB topolojik uzayındaki her M_x noktasının komşuluk sistemi $N(M_x)$ dir. ■

Tanım 2.2.16: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve $A \in ADB(X)$ olsun.

Eğer $A \in N(P_x)$ ise P_x ADB noktasına A' nın bir iç noktası denir.

A kümesinin tüm iç noktalarının birleşimine A kümesinin içi denir ve intA ile gösterilir.

Yani, $\operatorname{int} A := \bigcup_{A \in N(P_x)} P_x$ dir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.17: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve $A \in ADB(X)$ olsun.

(i) intA ADB kümesi A kümesinin kapsadığı en geniş açık kümedir.

(ii) A açıktır $\Leftrightarrow$ A=intA.

İspat: P_x A kümesinin bir iç noktası olsun. Burada $A \in N(P_x)$ dir. O halde $P_x \,\tilde{\in}\, O \subset A$ olacak şekilde bir $O \in \tau$ vardır. Buradan

$\bigcup_{A \in N(P_x)} P_x \subset \bigcup O \subset A$ bulunur. Buradan da int$A \subset \bigcup O \subset A$ olur.

$\bigcup O$ açık olduğundan $\bigcup O$' nun tüm noktaları A' nın bir iç noktasıdır ve dolayısı ile intA kümesine aittir. Bu yüzden $\bigcup O \subset$ intA. O halde intA=$\bigcup O$ olur. Buradan intA açıktır ve A kümesinin kapsadığı en geniş açık kümedir.

Buradan da,

A açıktır $\Leftrightarrow$ intA=A olur. ■

Tanım 2.2.18: (X, τ) bir ADB topolojik uzay ve $A \in ADB(X)$ olsun. $\bigcap \{B \in ADB(X) : B$ kapalı ve $A \subset B\}$ ADB kümesine A kümesinin kapanışı denir ve clA ile gösterilir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.19: (X, τ) bir ADB topolojik uzay ve $A, B \in ADB(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(i) $cl(\phi) = \phi$.

(ii) cl(X)=X.

(iii) $A \subset clA$.

(iv) clA kapalıdır.

(v) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ clA=A.

(vi) $cl(A \cup B) = clA \cup clB$.

(vii) cl(clA)=A.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.20: $\forall A \in ADB(X)$ için $clA = [\,int(A^c)]^c$ dir.

İspat: Tanımlardan görülür.

Tanım 2.2.21: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \in ADB(X)$ olsun.

(a) int(cl(A))=A ise A' ya X' in ADB düzenli açık alt kümesi denir.

(b) cl(int(A))=A ise A' ya X' in ADB düzenli kapalı alt kümesi denir.

Tanım 2.2.22: (X, τ_1), (Y, τ_2) ADB topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall B \in \tau_2$ için $f^{-1}(B) \in \tau_1$ ise f fonksiyonuna süreklidir denir. Eğer $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ ve $g:(X,\tau_2) \to (Y,\tau_3)$ fonksiyonları sürekli ise her $C \in \tau_3$ için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ olduğundan $g \circ f$ ' de süreklidir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.23: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki ADB topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) f süreklidir.

(b) (Y, τ_2) ' deki kapalı kümelerin f altındaki ters görüntüsü (X, τ_1) 'de kapalıdır.

(c) X' deki her M_x ADB noktası ve her $V \in N(f(M_x))$ için $f^{-1}(V) \in N(M_x)$ dir.

(d) X' deki her M_x ADB noktası ve her $V \in N(f(M_x))$ için $\exists W \in N(M_x)$ öyle ki $f(W) \subset V$ sağlanır.

(e) $\forall A \in ADB(X)$ için $f(cl(A)) \subset cl(f(A))$.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Önerme 2.2.24: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki ADB topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ sürekli fonksiyondur.

(b) $\forall B \in ADB(Y)$ için $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(B))$

(c) $\forall B \in ADB(Y)$ için $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl(B))$

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.25: δ, X' deki ADB kümelerinin bir ailesi ve $\widetilde{0},\widetilde{1} \in \delta$ olsun. Bu durumda δ ailesi, $\forall i,k$ için $S_{i,k} \in \delta$ olmak üzere

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i\in\Delta}\left(\bigcap_{k\in J} S_{i,k} \right) : \Delta - \text{keyfi indeks kümesi}, J - \text{sonlu indeks kümesi} \right\}$$

topolojisinin alt tabanıdır.

İspat: Tanımlardan görülür.

Tanım 2.2.26: X boştan farklı bir küme ve $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ADB topolojik uzayların bir ailesi olmak üzere, $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ fonksiyonlar ailesini ele alalım. O halde $\delta = \{f_i^{-1}(O) : O \in \tau_i, i \in \Delta\}$ alt tabanıyla üretilen τ topolojisine $\{f_i\}_{i\in\Delta}$ fonksiyonları ile üretilen ADB başlangıç topolojisi denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.27: X üzerindeki, $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ailesiyle üretilen başlangıç topolojisi her bir $f_i : (X,\tau) \to (Y_i, \tau_i)$ fonksiyonunu sürekli yapan en kaba topolojidir.

İspat: Tanımlardan görülür.

Tanım 2.2.28. $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ADB topolojik uzayların bir ailesi olsun. O halde $X\left(= \prod_{i\in\Delta} X_i \right)$ üzerindeki $\{p_i : X \to (X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ izdüşüm fonksiyonlarıyla üretilen ADB başlangıç topolojisine X üzerindeki ADB çarpım topolojisi denir ve bu topoloji $\prod_{i\in\Delta} \tau_i$ ile de gösterilebilir.

Tanımdan açıkça görülür ki izdüşüm fonksiyonları ADB çarpım topolojisinin tanımından dolayı sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 2.2.29: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Delta}$ ADB topoloji ailesi ve τ da $X\left(=\prod_{i \in \Delta} X_i\right)$ üzerindeki çarpım topolojisi olsun. (Y, τ') bir ADB topolojisi ve $f : X \to Y$ fonksiyonu veriliyor. Bu durumda,

$f : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $p_i \circ f : (Y, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ süreklidir.

İspat: $\forall i \in \Delta$ için $p_i \circ f : (Y, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ sürekli olsun. f' nin sürekli olduğunu göstermek için τ ' nun alt tabanındaki her O elemanı için $f^{-1}(O) \in \tau'$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$G \in \tau_{i_0}$ olmak üzere $O = p_{i_0}^{-1}(G)$ olsun.

$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(p_{i_0}^{-1}(G)\right) = \left(p_{i_0} \circ f\right)^{-1}(G) \in \tau$ (çünkü $p_{i_0} \circ f$ süreklidir)

Buradan f sürekli olur.

Ters taraf ise açıktır. ■

Uyarı 2.2.30: Dikkat edilmelidir ki izdüşüm fonksiyonlarının açık olması gerekmez. Şimdiki örnekle bu gösterilmektedir.

Örnek 2.2.31: $X_1 = \{x_1, x_2\} = X_2$ ve bu küme üzerindeki A ve B ADB kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$A : X_1 \to D[0,1], \quad A(x_1) = 0.4, \quad A(x_2) = 0.6,$

$B : X_2 \to D[0,1], \quad B(x_1) = 0.8, \quad B(x_2) = 0.3.$

Buna göre X_1 üzerinde $\tau_1 = \{\tilde{0}_{X_1}, \tilde{1}_{X_1}, A\}$ ve X_2 üzerinde $\tau_2 = \{\tilde{0}_{X_2}, \tilde{1}_{X_2}, B\}$ ADB topolojilerini alalım.

$u_1 = p_1^{-1}(A), u_2 = p_2^{-1}(B)$ olmak üzere $X_1 x X_2$ çarpım kümesindeki $\tau = \{\widetilde{0}_{X_1 x X_2}, \widetilde{1}_{X_1 x X_2}, u_1, u_2, u_1 \cap u_2, u_1 \cup u_2\}$ ADB çarpım topolojisi için $p_2(u_1) \notin \tau_2$ ve $p_1(u_2) \notin \tau_1$ dir. Yani p_1 ve p_2 izdüşüm fonksiyonları açık değildir.

Tanım 2.2.32: (X, τ) bir ADB topolojik uzay olsun. Eğer X' deki tüm sabit ADB kümeleri τ' ya ait ise τ' ya Lowen-tip ADB topoloji denir. (Mondal ve Samanta, 1999)

Teorem 2.2.33: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Delta}$ Lowen-tip ADB topolojik uzaylar ailesi ve τ da $X\left(= \prod_{i \in \Delta} X_i\right)$ üzerindeki ADB çarpım topolojisi olsun. O halde $\forall i \in \Delta$ için $p_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ izdüşüm fonksiyonları açıktırlar.

İspat: $v = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(u_i)$ olsun.

$\forall i = 1,2,..,n$, $\beta(\neq \alpha_i)$ ve $x_\beta \in X_\beta$ için

$$
\begin{aligned}
[p_\beta(v)]^L(x_\beta) &= \sup_{x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)} [v(x)]^L = \sup_{x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)} \left(\min_{1 \le i \le n} [(p_{\alpha_i}^{-1}(u_i))(x)]^L \right) \\
&= \sup_{x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)} \left(\min_{1 \le i \le n} [u_i(p_{\alpha_i}(x))]^L \right) = \min_{1 \le i \le n} \left(\sup_{\xi \in X_{\alpha_i}} [u_i(\xi)]^L \right) \\
&= a \qquad \text{(diyelim).}
\end{aligned}
$$

(Bu a değeri, [0,1) aralığındadır ve $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.)

(Çünkü $\xi_i \in X_{\alpha_i}$,(i=1,2,…,n), için $\exists x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)$ bulunabilir öyle ki $p_{\alpha_i}(x) = \xi_i$ olur. (Gerçekten x, Δ indis kümesi üzerinde $x(\alpha_i) = \xi_i$ ve diğer her indis için $x(i) \in X_i$ olarak seçilebilir.))

Bezer olarak, $[p_\beta(v)]^U(x_\beta) = \min_{1 \le i \le n} \left(\sup_{\xi \in X_{\alpha_i}} [u_i(\xi)]^U \right) = b$ (diyelim). Bu değerde $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.

Açıkça görüldüğü gibi $a \le b$ dir.

Ayrıca $i_0 \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere $\beta = i_{k_0}$ için

$$[p_\beta(v)]^L(x_\beta) = \sup_{x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)} \left(\min_{1\le i\le n} [u_i(p_{\alpha_i}(x))]^L \right)$$

$$= \left(\min_{1\le i(\ne i_0)\le n} \left[\sup_{\xi \in X_{\alpha_i}} (u_i(\xi)) \right]^L \right) \wedge [u_{i_0}(x_\beta)]^L$$

$$= a' \wedge [u_{i_0}(x_\beta)]^L .$$

Burada $a' = \min_{1\le i(\ne i_0)\le n} \left[\sup_{\xi \in X_{\alpha_i}} (u_i(\xi)) \right]^L$ dir.

Benzer olarak, $b' = \min_{1\le i(\ne i_0)\le n} \left[\sup_{\xi \in X_{\alpha_i}} (u_i(\xi)) \right]^U$ olmak üzere

$[p_\beta(v)]^U(x_\beta) = b' \wedge [u_{i_0}(x_\beta)]^U$ dir.

O halde $p_\beta(v) = [a', b'] \cap u_{i_0}$ sabit ADB kümesi ile u_{i_0} açık ADB kümesinin kesişimi olur ki bu ise Lowen-tip topolojide açık bir kümedir. Dolayısıyla p_β izdüşüm fonksiyonları açıktır. ■

2.3. Aralık Değerli Bulanık Topolojik Uzaylarda Kompaktlıklar

Bu bölümde, Çoker ve Eş (1995)' de tanımlanan kompaktlık çeşitleri aralık değerli bulanık topolojik uzaylara genelleştirilerek incelenecektir

Tanım 2.3.1: (X,τ) bir ADB topolojik uzay olsun.

(a) $\beta \subset \text{ADB}(X)$ ailesi $\tilde{1}_X = \bigcup_{w\in\beta} w$ koşulunu sağlıyorsa bu β ailesine X' in bir örtümü denir. β ' nın elemanları açık kümeler ise β ' ya bir açık örtüm denir. β ' nın bir β^* alt ailesi için $\tilde{1}_X = \bigcup_{w\in\beta^*} w$ sağlanıyorsa β^* ' a bir alt örtüm denir.

(b) $\delta \subset ADB(X)$ ailesinin her sonlu $\{K_i : i = 1,2,..,n\} \subset \delta$ alt ailesi $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \widetilde{0}_X$ özelliğini sağlıyorsa bu aile sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

(c) X' in her açık örtümü sonlu bir alt örtüme sahipse, (X, τ) ADB topolojik uzayına kompakttır denir.

(d) X' in her açık $\{G_i : i \in J\}$ örtümünün $\bigcup_{\substack{i \in F \\ F-\text{sonlu}}} cl(G_i) = \widetilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i \in F\}$ alt örtümü varsa (X, τ) ADB topolojik uzayına hemen hemen kompakttır denir.

(e) X' in her açık $\{G_i : i \in J\}$ örtümünün $\bigcup_{\substack{i \in F \\ F-\text{sonlu}}} int(cl(G_i)) = \widetilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i \in F\}$ alt örtümü varsa (X, τ) ADB topolojik uzayına yakın kompakttır denir.

Açıkça görülebilir ki kompaktlıklar arasında,

kompakt $\Rightarrow$ yakın kompakt $\Rightarrow$ hemen hemen kompakt

ilişkisi vardır.

Örnek 2.3.2: X boştan farklı keyfi bir küme ve her $n \in IN$ için $G_n := \left(\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]\right)$ (her $x \in X$) olmak üzere $\tau = \{G_n : n = 1,2,...\} \cup \{\widetilde{1}_X, \widetilde{0}_X\}$ ailesi X üzerinde bir ADB topolojidir.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \widetilde{1}_X$ olduğundan $\{G_n : n = 1,2,...\}$ ailesi X' in bir açık örtümüdür. Fakat bu örtümün sonlu bir alt örtümü yoktur. Yani (X, τ) ADB topolojik uzayı kompakt değildir.

Diğer taraftan her $n \in IN$ için $cl(G_n) = \widetilde{1}_X$ ve $int(cl(G_n)) = \widetilde{1}_X$ olduğundan (X, τ) ADB topolojisi yakın kompakttır.

Örnek 2.3.3: X boştan farklı keyfi bir küme ve $\left\{G_\lambda : \lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ ADB küme ailesi olsun. Burada

$G_\lambda = \left(\left[\lambda - \frac{1}{2}, \lambda\right]\right)$ dir. Bu durumda $\tau = \left\{G_\lambda : \lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right]\right\} \cup \{\widetilde{1}_X, \widetilde{0}_X\}$ ailesi X üzerinde bir ADB topolojidir. Bu topolojide ki her örtüm $\widetilde{1}_X$ kümesini içereceğinden bu (X,τ) ADB topolojik uzayı kompakttır.

Teorem 2.3.4: (X,τ) ADB topolojik uzayı hemen hemen kompakttır $\Leftrightarrow$ X' de sonlu arakesit özelliğine sahip açık kümelerin $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i\in I} cl(G_i) \neq \widetilde{0}_X$ dır.

İspat: "$\Rightarrow$:" (X,τ) hemen hemen kompakt ve X' de sonlu arakesit özelliğine sahip $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i\in I} cl(G_i) = \widetilde{0}_X$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$\widetilde{1}_X = \left(\bigcap_{i\in I} cl(G_i)\right)^c = \bigcup_{i\in I} int(G_i^c)$ olur.

(X,τ) hemen hemen kompakt olduğundan $\widetilde{1}_X = \bigcup_{i=1}^{n} cl(int(G_i^c))$ olacak şekilde $\{G_i : i = 1,...,n\}$ sonlu alt ailesi vardır. Burada da,

$\widetilde{1}_X = \bigcup_{i=1}^{n} cl((cl(G_i))^c) = \bigcup_{i=1}^{n} (int(cl(G_i)))^c \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} int(cl(G_i)) = \widetilde{0}_X$ olur. Fakat

$G_i = int(G_i) \subseteq int(cl(G_i))$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \widetilde{0}_X$ elde edilir.

Bu ise $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olmasıyla çelişir.

"$\Leftarrow$:" $\beta = \{G_i : i \in I\}$ X' in ADB açık örtüsü olsun. β ' nın kapanışlarının X' i örten sonlu alt örtümünün bulunmadığını kabul edelim. $(cl(G_i))^c = int(G_i^c)$ olduğundan $K = \{(cl(G_i))^c\}_{i\in I}$ sonlu arakesit özelliğine sahip ADB açık kümeler ailesidir. Böylece hipotezden

$\bigcap_{i\in I} cl((cl(G_i))^c) \neq \widetilde{0}_X \Rightarrow \bigcup_{i\in I} (cl((cl(G_i))^c))^c \neq \widetilde{1}_X \Rightarrow \bigcup_{i\in I} int(cl(G_i)) \neq \widetilde{1}_X$

elde edilir. $\forall i \in I$ için $G_i \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i))$ olduğundan $\bigcup_{i\in I} G_i = \tilde{1}_X$ ile çelişki elde edilir. Buradan (X,τ) hemen hemen kompakt olur. ■

Teorem 2.3.5: (X,τ) bir ADB topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (X,τ) hemen hemen kompakttır.

(b) ADB düzenli kapalı kümelerin $\bigcap_{i\in I} G_i = \tilde{0}_X$ özelliğini sağlayan her $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(G_i) = \tilde{0}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i = 1,\ldots,n\}$ alt ailesi vardır.

(c) Sonlu arakesit özelliğine sahip ADB düzeli açık kümelerin her $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i\in I} \operatorname{cl}(G_i) \neq \tilde{0}_X$ dir.

(d) X' in her ADB düzenli açık örtümünden, kapanışları X' i örten sonlu alt aile elde edilir.

İspat: (a)$\Rightarrow$(b) $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi $\bigcap_{i\in I} G_i = \tilde{0}_X$ özelliğini sağlayan ADB düzenli kapalı kümelerden oluşan bir aile olsun. O zaman $\tilde{1}_X = \bigcup_{i\in I} G_i^c$ olur.

$G_i^c = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i^c))$ olduğundan $\tilde{1}_X = \bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i^c))$ olur. (X,τ) ADB hemen hemen kompakt olduğundan $\tilde{1}_X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i^c)))$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i = 1,\ldots,n\}$ alt ailesi vardır. Böylece

$$\tilde{0}_X = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i^c)))\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int}(G_i)))) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(G_i)$$

elde edilir.

(b)$\Rightarrow$(c) $\beta = \{G_i : i \in I\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip ADB düzenli açık kümelerin ailesi için $\bigcap_{i\in I} \operatorname{cl}(G_i) = \tilde{0}_X$ olduğunu kabul edelim. $\{\operatorname{cl}(G_i) : i \in I\}$ ADB düzenli kapalı kümelerin bir ailesi olduğundan hipotezden sonlu bir $\{\operatorname{cl}(G_i) : i = 1,\ldots,n\}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \tilde{0}_X$$

olur. Bu ise $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir.

(c) $\Rightarrow$(d) $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi X' in ADB düzenli açık örtüsü olsun. β ' nın her sonlu alt ailesi için $\bigcup_{i \in F} \operatorname{cl}(G_i) \neq \tilde{1}_X$ olduğunu kabul edelim. O halde $\{(\operatorname{cl}(G_i))^c : i \in I\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip ADB düzenli açık bir ailedir. Böylece

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{cl}\left((\operatorname{cl}(G_i))^c\right) \neq \tilde{0}_X \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \left(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i))\right)^c \neq \tilde{0}_X$$

elde edilir. Buradan

$\bigcup_{i \in I} \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i)) \neq 1_X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \neq 1_X$ olur. Bu ise $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesinin bir örtüm olmasıyla çelişir.

(d)$\Rightarrow$(a) $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi X' in açık bir örtüsü olsun. $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i))$ düzenli açık ve $G_i \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_i)) \subset \operatorname{cl}(G_i)$ olduğundan istenen kolayca görülür. ■

Teorem 2.3.6: (X, τ) ve (Y, ϕ) iki ADB topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer (X, τ) hemen hemen kompakt ise (Y, ϕ) da hemen hemen kompakttır.

İspat: $\mathcal{H} = \{H_i : H_i \in \phi, i \in J\}$ Y' nin bir ADB açık örtüsü olsun. f sürekli olduğundan $\mathcal{G} = \{f^{-1}(H_i) : H_i \in \phi, i \in J\}$ X' in bir açık örtüsüdür. (X, τ) hemen hemen kompakt olduğundan,

$\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl}(f^{-1}(G_i)) = \tilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu $\{H_i : H_i \in \phi, i = 1, \ldots, n\}$ ADB açık kümeler ailesi vardır. Buradan, f örten ve sürekli olduğundan Teorem 2.2.23' den

$$\tilde{1}_Y = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl}(f^{-1}(G_i))\right) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(\operatorname{cl} G_i))\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{cl} G_i)\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{cl} G_i) \text{ olur.}$$

Buradan da,

$$\tilde{1}_Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{cl} G_i) \text{ olur.}$$

Böylece (Y, ϕ) hemen hemen kompakttır. ■

Teorem 2.3.7: (X,τ) ve (Y,ϕ) iki ADB topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) kompakt ise (Y,ϕ) da kompakttır.

İspat: Bir önceki ispata benzer olarak yapılır.

(X,τ) ve (Y,ϕ) Lowen anlamında iki ADB topolojik uzaylar olsun. C=([a,b]) ($a \neq 0$) sabit kümesi verilsin. Bu durumda $\varepsilon \leq a$ olmak üzere C-ε sabit ADB kümesi $C-\varepsilon = ([a-\varepsilon, b-\varepsilon])$ şeklinde tanımlanır. Eğer C=([0,b]) ise $\varepsilon \leq b$ olmak üzere $C-\varepsilon = ([0, b-\varepsilon])$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.8: (X,τ) bir ADB topolojik uzay olsun. Her C=([a,b]) (burada $b \neq 0$) sabit ADB kümesinin her β açık örtümü ve her $\varepsilon > 0$ için $C-\varepsilon \subseteq \bigcup_{G\varepsilon\beta_0} G$ olacak şekilde sonlu bir $\beta_0 \subset \beta$ alt ailesi varsa (X,τ) ' ya Lowen kompakttır denir.

Tanım 2.3.1 (c) ve tanım 2.3.8 karşılaştırıldığında Lowen kompakt topolojik uzayın kompakt olduğu görülür.

Teorem 2.3.9: (X,τ) ve (Y,ϕ) ADB topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) Lowen kompaktsa (Y,ϕ) da Lowen kompakttır.

İspat: C=([a,b]]) Y de keyfi sabit bir ADB kümesi olsun ve β da C' nin keyfi bir açık örtümü ve $\varepsilon > 0$ olsun.

İki durum söz konusu olur.

1. durum: C=([a,b]) ($a \neq 0$)

2. durum: C=([0,b])

1. durumda $C-\varepsilon = ([a-\varepsilon, b-\varepsilon])$ olarak alınır.

2. durumda $C-\varepsilon = ([0, b-\varepsilon])$ olarak alınır.

İki durumda da ispat aynı şekilde yapılır.

C,B keyfi iki sabit ADB küme olmak üzere f(C)=C ve $f^{-1}(B) = B$ olduğu açıktır.

$\beta \subset \phi$ olduğundan $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(G) : G \in \beta\} \subset \tau$ dir. O halde

$C \subseteq \bigcup \{G : G \in \beta\}$

$\Rightarrow\ f^{-1}\left(\bigcup\{G : G \in \beta\}\right) = \bigcup\{f^{-1}(G) : G \in \beta\} \supseteq f^{-1}(C) = C$

$f^{-1}(G) \in \tau$ olduğundan ve (X,τ) Lowen kompakt olduğundan $\bigcup\{f^{-1}(G) : G \in \beta_0\} \supseteq C - \varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $\beta_0 \subset \beta$ alt ailesi vardır. Buradan,

$f\left(\bigcup\{f^{-1}(G) : G \in \beta_0\}\right) \supseteq f^{-1}(C - \varepsilon) = C - \varepsilon$

$\Rightarrow f\left(f^{-1}\left(\bigcup\{(G) : G \in \beta_0\}\right)\right) \supseteq f(C - \varepsilon) = C - \varepsilon$

$\Rightarrow \bigcup\{(G) : G \in \beta_0\} \supseteq C - \varepsilon$

olur. Buradan (Y,ϕ) Lowen kompakt olur. ■

Şimdi ADB topolojik uzaylarda Alexander Teoremi'ni verelim.

Teorem 2.3.10: (X,τ) bir ADB topolojik uzay ve δ τ' nun bir alt tabanı olsun. Eğer δ' nın elemanlarından oluşan her örtümün sonlu bir alt örtümü varsa (X,τ) kompakttır.

İspat: ADB kümelerinin bir ailesi eğer X' i örtemiyorsa bu aileye yetersizdir denir. Eğer sonlu hiçbir alt ailesi örtemiyorsa bu aileye sonlu yetersizdir denir. Böylece X' in kompakt olması için gerek ve yeter şart ADB kümelerinin her sonlu yetersiz açık ailesinin yetersiz olmasıdır. Zorn Lemmasından ADB kümelerinin her sonlu yetersiz ailesini içeren bir maksimal sonlu yetersiz aile vardır. Bu maksimal β ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Eğer C açık bir küme ve $C \notin \beta$ ise maksimallikten β' nin $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ alt ailesi vardır öyle ki $\{A_1, A_2, ..., A_n, C\}$ ailesi X' i örter. Benzer olarak $D \notin \beta$ ise maksimallikten β' nin $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ alt ailesi vardır ve $\{B_1, B_2, ..., B_m, D\}$ X' i örter. Buradan da $\{A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m, C \cap D\}$ ailesi X' i örter. Bu yüzden $C \cap D \in \notin \beta$ dir.

B, ADB kümelerinin sonlu yetersiz açık bir ailesi olsun. O halde *B*' yi kapsayan ADB açık kümelerden oluşan maksimal sonlu yetersiz bir β ailesi vardır. Burada bulunan β ailesinin yetersiz olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\delta \cap \beta$ sonlu yetersiz bir ailedir buradan da yetersizdir. β nin yetersiz oluğunu göstermek için aksini varsayalım. Yani β yetersiz olmasın. O halde β X' i örter. $x \in X$ olsun. Bu durumda $\varepsilon>0$ için $\exists A \in \beta$ öyle ki $[A(x)]^L > 1-\frac{\varepsilon}{2}$ dir. A açık olduğundan $\exists \{B_i\}_{i\in\Delta}$ taban elemanlarından oluşan ailesi için $A = \bigcup_{i\in\Delta} B_i$ ve her B_i için $\exists J_i$ sonlu indeks kümesi vardır öyle ki $C_j \in \delta, j \in J_i, i \in \Delta$ olmak üzere $B_i = \bigcap_{j\in J_i} C_i$ dir. Şimdi $i \in \Delta$ için $\bigcap_{j\in J_i} C_j = B_i \subset A$ ve β maksimaldir. $A \in \beta$ olduğundan $\exists j = j_i \in J_i$ vardır öyle ki $C_{j_i} \in \beta$ dir. Ayrıca $B_i = \bigcap_{j\in J_i} C_j \subset C_{j_i} \in \beta$ dir. $A = \bigcup_{i\in\Delta} B_i$ olduğundan $\exists B_{i_0}$ vardır öyle ki $[B_{i_0}(x)]^L > [A(x)]^L - \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Bu yüzden $[C_{j_{i_0}}(x)]^L \geq [B_{i_0}(x)]^L > 1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$ olur.

$\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $\bigcup \{C_j^L(x) : C_j \in \delta \cap \beta\} \geq 1$ olur. Bu ise $\delta \cap \beta$ yetersiz olmasıyla çelişir. ■

Teorem 2.3.11: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ kompakt ADB topolojik uzayların sonlu bir ailesi olsun. $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ve $\tau = \prod_{i=1}^n \tau_i$ olmak üzere (X, τ) ADB çarpım topolojik uzayı kompakttır.

İspat: β, τ' nun alt taban elemanlarından oluşan sonlu yetersiz açık bir aile olsun. $\beta_i = \{w \in \tau_i : p_i^{-1}(w) \in \beta\}\ (i = 1,...,n)$ ailesini ele alalım. β_i, (X_i, τ_i)' de sonlu yetersiz bir ailedir. (X_i, τ_i) kompakt olduğundan β_i de yetersizdir. Buradan $\exists x_i \in X_i$ için $r_i = \vee\{w^L(x_i) : w \in \beta_i\} < 1$ olur(i=1,...,n).

$x = (x_1,...,x_n) \in X$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\vee \{U^L(x) : U \in \beta\} &= \vee_{i=1}^{n} \{\vee\{[p_i^{-1}(w)]^L(x) : w \in \beta_i\}\} \\
&= \vee_{i=1}^{n} \{\vee\{[w(p_i(x))]^L : w \in \beta_i\}\} \\
&= \vee_{i=1}^{n} \{\vee\{[w(x_i)]^L : w \in \beta_i\}\} \\
&= \vee_{i=1}^{n} (r_i) < 1
\end{aligned}$$

olur. O halde β yetersizdir. Buradan da Teorem 2.3.10 den dolayı (X, τ) kompakttır.

■

Fakat bu Teorem sonsuz sayıda uzay için geçerli olmayabilir. Aşağıdaki örnekle bu gösterilmektedir.

Örnek 2.3.12: $\forall i \in IN^{+}$ için $X_i = [0,1]$ ve $A_i(x) = \dfrac{i}{i+1}$ $(\forall x \in X)$ olmak üzere $\tau = \{\widetilde{0}_X, \widetilde{1}_X, A_i\}$ topolojilerini göz önüne alalım. Bu durumda her i için (X_i, τ_i) topolojik uzayları kompakttır.

$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ve X üzerindeki $\tau = \prod_{i=1}^{n} \tau_i$ ADB çarpım topolojisini alalım. Her x için

$$\left[\bigvee_{i=1}^{\infty}(p_i^{-1}(A_i))\right](x) = \bigvee_{i=1}^{\infty}(A_i p_i(x)) = \bigvee_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1} = 1$$

olduğundan $\{p_i^{-1}(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ X' in bir açık örtüsüdür. Fakat bu örtümün hiçbir sonlu alt örtümü yoktur.

BÖLÜM 3

ARALIK DEĞERLİ SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümün birinci kısmında aralık değerli sezgisel bulanık kümeler tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir. İkinci kısımda aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylar tanımlanacak daha sonra sürekli fonksiyonlar ve çarpım topolojisi gibi temel kavramlar incelenecektir. Üçüncü kısımda ise kompaktlıklar tanımlanacaktır.

3.1. Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme ve D[0,1], elemanları [0,1] aralığının tüm kapalı alt aralıklarının oluşturduğu küme olsun. Bu durumda;

$\mu_A : X \to D[0,1]$ ve $\nu_A : X \to D[0,1]$ fonksiyonları (veya ADB kümeleri) ve $\forall x \in X$ için $0 < \sup \mu_A(x) + \sup \nu_A(x) \leq 1$ koşulunu sağlamak üzere $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X\}$ kümesine X' de aralık değerli sezgisel bulanık küme (veya kısaca ASB küme) denir.

Burada $x \in X$ için $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ aralıkları sırasıyla x elemanının A kümesine ait olma ve ait olmama derecelerinin aralıklarını göstermektedir.

Böylece, her bir $x \in X$ için $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ aralıkları alt ve üst sınırları sırasıyla $[\mu_A(x)]^L, [\mu_A(x)]^U$ ve $[\nu_A(x)]^L, [\nu_A(x)]^U$ olan kapalı aralıklardır. X' deki tüm aralık değerli sezgisel bulanık kümelerin oluşturduğu aileyi ASB(X) olarak gösterelim. Tanımlar karşılaştırıldığında ASB kümelerinin sezgisel bulanık kümelerin (Tanım 1.3.1) ve aralık değerli bulanık kümelerin (Tanım 2.1.2) bir genelleştirmesi olduğu görülür.

Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = [a,b]$ ve $\nu_A(x) = [c,d]$ $(b+d \leq 1)$ ile tanımlanan ASB kümesine sabit ASB kümesi denir ve kısaca ([a,b],[c,d]) olarak gösterilir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Tanım 3.1.2: $A,B \in ASB(X)$ olsun.

(a) $A \subset B :\Leftrightarrow \ \forall x \in X \ [\mu_A(x)]^L \leq [\mu_B(x)]^L, [\mu_A(x)]^U \leq [\mu_B(x)]^U$ ve

$$[\nu_A(x)]^L \geq [\nu_B(x)]^L, [\nu_A(x)]^U \geq [\nu_B(x)]^U$$

(b) A=B: $\Leftrightarrow$ $A \subset B$ ve $B \subset A$

(c) Bir A ASB kümesinin tümleyeni A^c ile gösterilir ve

$\forall x \in X$ için $\mu_{A^c}(x) = \nu_A(x)$ ve $\nu_{A^c}(x) = \mu_A(x)$ olarak tanımlanır.

Yani,

$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X\}$ olmak üzere $A^c = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X\}$ dir.

(d) ASB kümelerinin bir $\{A_i : i \in I\}$ ailesinin birleşimi $\bigcup A_i$ ve kesişimi $\bigcap A_i$ sırasıyla,

$$\bigcup A_i = \left\{ \left\langle x, [\underset{i}{\vee}[\mu_{A_i}(x)]^L, \underset{i}{\vee}[\mu_{A_i}(x)]^U], [\underset{i}{\wedge}[\nu_{A_i}(x)]^L, \underset{i}{\wedge}[\nu_{A_i}(x)]^U] \right\rangle \right\} \quad \text{ve}$$

$$\bigcap A_i = \left\{ \left\langle x, [\underset{i}{\wedge}[\mu_{A_i}(x)]^L, \underset{i}{\wedge}[\mu_{A_i}(x)]^U], [\underset{i}{\vee}[\nu_{A_i}(x)]^L, \underset{i}{\vee}[\nu_{A_i}(x)]^U] \right\rangle \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

(e) Aşağıdaki şekilde tanımlanan P ASB kümesine bir aralık değerli sezgisel nokta (veya kısaca ASB nokta) denir.

$\exists x \in X$ için $[\mu_A(x)]^U > 0$ ve $\forall y (\neq x) \in X$ için $[\mu_A(x)]^U = 0$ ve $[\nu_A(x)]^L = 1$

Bu şekilde tanımlanan ASB noktası P_x olarak gösterilir.

(f) P_x noktasına bir A ASB kümesine aittir denir (sembolik olarak $P_x \tilde{\in} A$ yazılır) $:\Leftrightarrow$ $[\mu_A(x)]^L \le [\mu_B(x)]^L, [\mu_A(x)]^U \le [\mu_B(x)]^U$ ve

$[\nu_A(x)]^L \ge [\nu_B(x)]^L, [\nu_A(x)]^U \ge [\nu_B(x)]^U$ dır.

$P_x = ([a,b],[c,d])_x$ ASB notası için P_x^c ASB noktası $([c,d],[a,b])_x$ olarak gösterilir.

(g) $\tilde{0}$ ve $\tilde{1}$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\tilde{0} = ([0,0],[1,1])$, $\tilde{1} = ([1,1],[0,0])$ (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.1.3: $\forall A \in ASB(X)$ için $A = \bigcup \{P_x : P_x \tilde{\in} A\}$ dir.

İspat: $x \in X$ ve $[\mu_A(x)]^L = a$, $[\mu_A(x)]^U = b$, $[\nu_A(x)]^L = c$, $[\nu_A(x)]^L = d$ olsun. Bu durumda $P_x := ([a,b],[c,d])_x \tilde{\in} A$ dır. O halde $A \subset \bigcup \{P_x : P_x \tilde{\in} A\}$ sağlanır. Açıktır ki $\bigcup \{P_x : P_x \tilde{\in} A\} \subset A$ sağlanır. Buradan $A = \bigcup \{P_x : P_x \tilde{\in} A\}$ bulunur. ■

Teorem 3.1.4: Her $A, B, C, A_i B_i \in ASB(X)$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\tilde{0} \subset A \subset \tilde{1}$.

(ii) $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$.

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(iv) $A, B \subset A \cup B; A \cap B \subset A, B$.

(v) $A \cap \left(\bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i (A \cap B_i)$.

(vi) $A \cup \left(\bigcap_i B_i \right) = \bigcap_i (A \cup B_i)$.

(vii) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

(viii) $\left(\widetilde{0}\right)^c = \widetilde{1}; \left(\widetilde{1}\right)^c = \widetilde{0}$.

(ix) $\left(A^c\right)^c = A$.

(x) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$.

(xi) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$.

İspat: Sadece (v)' in ispatı verilecektir. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

(v) $B = \bigcup_i B_i, C_i = A \cap B_i, D = A \cap \left(\bigcup_i B_i\right) = A \cap B, E = \bigcup_i \left(A \cap B_i\right) = \bigcup_i C_i$

olsun.

$x \in X$ alalım. O halde,

$[\mu_D(x)]^L = [\mu_A(x)]^L \wedge [\mu_B(x)]^L = [\mu_A(x)]^L \wedge \left(\vee_i [\mu_{B_i}(x)]^L\right) = \vee_i \left([\mu_A(x)]^L \wedge [\mu_{B_i}(x)]^L\right)$
Benzer olarak, $[\mu_D(x)]^U = \vee_i \left([\mu_A(x)]^U \wedge [\mu_{B_i}(x)]^U\right)$.

$[\nu_D(x)]^L = [\nu_A(x)]^L \vee [\nu_B(x)]^L = [\nu_A(x)]^L \vee \left(\wedge_i [\nu_{B_i}(x)]^L\right) = \wedge_i \left([\nu_A(x)]^L \vee [\nu_{B_i}(x)]^L\right)$
.Benzer olarak, $[\nu_D(x)]^U = \wedge_i \left([\nu_A(x)]^U \vee [\nu_{B_i}(x)]^U\right)$.

Aynı şekilde, $[\mu_E(x)]^L = \vee_i [\mu_{C_i}(x)]^L = \vee_i \left([\mu_A(x)]^L \wedge [\mu_{B_i}(x)]^L\right)$.

Benzer olarak, $[\mu_E(x)]^U = \vee_i [\mu_{C_i}(x)]^U = \vee_i \left([\mu_A(x)]^U \wedge [\mu_{B_i}(x)]^U\right)$.

$[\nu_E(x)]^L = \wedge_i [\nu_{C_i}(x)]^L = \wedge_i \left([\nu_A(x)]^L \vee [\nu_{B_i}(x)]^L\right)$.

Benzer olarak, $[\nu_E(x)]^L = \wedge_i \left([\nu_A(x)]^U \vee [\nu_{B_i}(x)]^U\right)$.

Bu sonuçlardan, $A \cap \left(\bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i (A \cap B_i)$ sonucunu elde edilir. ■

Uyarı 3.1.5: Klasik bulanık kümelerde, bir A bulanık kümesi ve bir x_λ bulanık noktası için $x_\lambda \in A$ veya $x_\lambda^c \in A^c$ sağlanır. Fakat ASB kümelerinde böyle bir sonucun her zaman sağlanması gerekmez.

Aşağıdaki örnekle bunun her zaman sağlanmayacağını gösterilmektedir.

Örnek 3.1.6: $A \in ASB(X)$ ve $x \in X$ olsun. $0 \le b + d \le 1$ olmak üzere $A(x) = ([a,b],[c,d])$, $P_x = ([e,f],[g,h])_x$ alalım ve $[e,f] \subset (a,b), [g,h] \subset (c,d)$ olarak alalım. Açıkça görülür ki $P_x \notin A$ ve $P_x^c \notin A^c$ dir.

Uyarı 3.1.7: Klasik bulanık kümelerde, A,B iki klasik bulanık küme olmak üzere $x_\lambda \in A \cup B \Leftrightarrow x_\lambda \in A$ veya $x_\lambda \in B$ sağlanır. Fakat ASB kümelerinde bunun her zaman sağlanması gerekmez.

Aşağıdaki örnekle bunun her zaman sağlanmayacağını göstereceğiz.

Örnek 3.1.8: $X = \{x_1, x_2\}$, $A_1 = ([0.2,0.5],[0.2,0.5])$, $A_2 = ([0,0.7],[0,0.2])$ olsun. Bu durumda $P_{x_1} = ([0.2,0.6],[0,0.2])_{x_1} \,\tilde{\in}\, A_1 \cup A_2$ sağlanır fakat $P_{x_1} \,\tilde{\notin}\, A_1$ ve $P_{x_1} \,\tilde{\notin}\, A_2$ dir.

Teorem 3.1.9: $A, B \in ASB(X)$ ve P_x bir ASB noktası olsun. Bu takdirde $P_x \in A \cup B \Rightarrow \exists M_x \,\tilde{\in}\, A, N_x \,\tilde{\in}\, B : M_x \cup N_x = P_x$

sağlanır.

İspat: $P_x = ([a,b],[c,d])_x$ $(0 \le b + d \le 1)$, $A(x) = ([a_1,b_1],[c_1,d_1])$ ve

$B(x) = ([a_2,b_2],[c_2,d_2])$ olsun. O halde $M_x = ([a \wedge a_1, b \wedge b_1],[c \vee c_1, d \vee d_1])_x$

Ve $N_x = ([a \wedge a_2, b \wedge b_2],[c \vee c_2, d \vee d_2])_x$ olarak seçersek $M_x \in A, N_x \in B$ ve $M_x \cup N_x = P_x$ olur. ■

Tanım 3.1.10: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \in ASB(X)$ olsun. Bu durumda

(a) $A \in ASB(X)$ olmak üzere A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü

$f(A) = \left\{ \left\langle y, \mu_{f(A)}(y), \nu_{f(A)}(y) \right\rangle : y \in Y \right\}$ şeklinde tanımlanır. Burada, her $y \in Y$ için

$$[\mu_{f(A)}(y)]^L = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \left\{ [\mu_A(x)]^L \right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases},$$

$$[\mu_{f(A)}(y)]^U = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \left\{ [\mu_A(x)]^U \right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases},$$

$$[\nu_{f(A)}(y)]^L = \begin{cases} \inf_{y=f(x)} \left\{ [\nu_A(x)]^L \right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 1, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases},$$

$$[\nu_{f(A)}(y)]^U = \begin{cases} \inf_{y=f(x)} \left\{ [\nu_A(x)]^U \right\}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 1, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

dir.

(b) $B \in ASB(Y)$ olmak üzere B kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü,

$f^{-1}(B) = \left\{ \left\langle y, \mu_{f^{-1}(B)}(x), \nu_{f^{-1}(B)}(x) \right\rangle : x \in X \right\}$ şeklindedir. Burada,

$[\mu_{f^{-1}(B)}(x)]^L = [\mu_B(f(x))]^L, [\mu_{f^{-1}(B)}(x)]^U = [\mu_B(f(x))]^U$,
$[\nu_{f^{-1}(B)}(x)]^L = [\nu_B(f(x))]^L, [\nu_{f^{-1}(B)}(x)]^U = [\nu_B(f(x))]^U$ dir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.1.11: $f : X \to Y$ bir fonksiyon olma üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\forall B \in ASB(Y)$ için $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

(ii) $\forall A \in ASB(X)$ için $\left(f(A)\right)^c \subset f(A^c)$.

(iii) $B_1, B_2 \in ASB(Y)$ için $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(iv) $A_1, A_2 \in ASB(X)$ için $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

(v) $\forall B \in ASB(Y)$ için $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ dir. Eğer f örten ise eşitlik sağlanır.

(vi) $\forall A \in ASB(X)$ için $f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A$ dir. Eğer f birebir ise eşitlik sağlanır.

(vii) $\forall B_i \in ASB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\Delta} B_i\right) = \bigcup_{i\in\Delta}\left(f^{-1}(B_i)\right)$ dir.

(viii) $\forall B_i \in ASB(Y)$ için $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\Delta} B_i\right) = \bigcap_{i\in\Delta}\left(f^{-1}(B_i)\right)$ dir.

(ix) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$\forall C \in ASB(Z)$ için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ dir.

(x) $\forall x \in X$ için $f(P_x) = P_{f(x)}$ dir.

İspat: Sadece (v)' in ispatı verilecektir. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

$y \in Y$ alalım. İki durum söz konusudur.

1.Durum: $f^{-1}(y) \neq \phi$.

2.Durum: $f^{-1}(y) = \phi$.

1.Durumda,

$$[\mu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^L = \sup_{y=f(x)}[\mu_{f^{-1}(B)}(x)]^L = \sup_{y=f(x)}[\mu_B(f(x))]^L = [\mu_B(y)]^L.$$

Benzer olarak $[\mu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^U = [\mu_B(y)]^U$.

Ayrıca,

$[\nu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^L = \inf_{y=f(x)}[\nu_{f^{-1}(B)}(x)]^L = \inf_{y=f(x)}[\nu_B(f(x))]^L = [\nu_B(y)]^L$ olur.

Benzer olarak

$[\nu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^U = [\nu_B(y)]^U$ olur.

2.Durumda

$[\mu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^L = 0, [\mu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^U = 0$ ve

$[\nu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^L = 1, [\nu_{f(f^{-1}(B))}(y)]^U = 1$

olur. Bu durumda ifadenin sağlandığı açıktır.

Görüldüğü gibi iki durumda da ifade sağlanır. Ayrıca f örten olduğunda $f^{-1}(y) \neq \phi$ olur. Yani yine 1. Durum geçerli olur. Eşitlik sağlanır. ■

3.2. Aralık Değerli Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 3.2.1: X boştan farklı bir küme olsun. $\tau \subset D^X$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ' ya X kümesi üzerinde aralık değerli sezgisel bulanık topoloji (veya kısaca ASB topoloji) denir.

(1) $\widetilde{0}, \widetilde{1} \in \tau$,

(2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,

(3) $\forall i \in \Delta$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in \Delta} A_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzay (veya kısaca ASB topolojik uzay) denir. τ' nun elemanlarına ASB açık küme denir. Eğer $B^c \in \tau$ ise $B \in ASB(X)$ kümesine ASB kapalı küme denir. Sadece $\widetilde{0}$ ve $\widetilde{1}$ kümelerini içeren topolojiye basit (trivial) topoloji, tüm ASB kümelerini içeren topolojiye de ayrık (diskret) topoloji denir ve sırasıyla τ^0 ve τ^1 olarak gösterilir.

Eğer τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki ASB topoloji ve $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_2' ye τ_1' den daha güçlü veya daha ince denir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Uyarı 3.2.2: Her aralık değerli bulanık küme bir aralık değerli sezgisel bulanık küme olarak göz önüne alınabileceğinden her aralık değerli bulanık topoloji bir aralık değerli sezgisel bulanık topoloji olarak düşünülebilir.

Örnek 3.2.3: $X = \{a.b.c\}$ ve

$$A = \langle (a,[0.5,0.6],[0.2,0.4]),\ (b,[0.4,0.5],[0.3,0.4]),\ (c,[0.2,0.3],[0.3,0.5]) \rangle,$$
$$B = \langle (a,[0.2,0.7],[0.1,0.3]),\ (b,[0.3,0.5],[0.4,0.5]),\ (c,[0.1,0.4],[0.5,0.5]) \rangle.$$

olarak tanımlansın. O halde $\tau = \{\tilde{0}, \tilde{1}, A, B, A \cap B, A \cup B\}$ ASB küme ailesi X kümesi üzerinde bir ASB topoloji belirtir.

Teorem 3.2.4. $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ X üzerindeki ASB topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_i \{\tau_i : i \in \Delta\}$ ailesi de X üzerinde bir ASB topolojidir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.5: $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ ASB kümelerinin topolojilerinin bir ailesi olsun. O halde $\{\tau_i : i \in \Delta\}$ ailesi kesişim işlemine göre en küçük elemanı τ^0 en büyük elemanı τ^1 olan bir tam latistir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.6: (X, τ) bir ASB topolojik uzay ve F de bu uzaydaki tüm kapalı ASB kümelerin oluşturduğu aile olsun. O halde

(1) $\tilde{0}, \tilde{1} \in F$

(2) $F_1, F_2 \in F, \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in F$

(3) $\forall i \in \Delta$ için $F_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in \Delta} F_i \in \mathcal{F}$.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Tanım 3.2.7: (X, τ) bir ASB topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subset \tau$ olsun. Eğer τ' nun her elemanı $\mathcal{B}$ ' nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ' ye τ' nun bir tabanı denir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Tanım 3.2.8: (X, τ) bir ASB topolojik uzay ve $\delta \subset \tau$ olsun. Eğer δ' nin elemanlarının tüm sonlu arakesitleri τ için taban oluyorsa δ ye τ' nun bir alt tabanı denir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.9: $\mathcal{B}$, X' de ASB kümelerinin bir ailesi ve $\tilde{0}, \tilde{1} \in \mathcal{B}$ olsun. Eğer her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $\forall M_x \,\tilde{\in}\, B_1 \cap B_2$ için $\exists W \in \mathcal{B}$: $M_x \,\tilde{\in}\, W \subset B_1 \cap B_2$ oluyorsa $\mathcal{B}$ ailesi, X üzerindeki bir topolojinin tabanıdır.

İspat: Teorem 2.2.8' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Uyarı 3.2.10: Bu teoremin tersi genel olarak doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.11: X boştan farklı bir küme olsun.

$$A_1 = ([0.2,0.5],[0.3,0.4]), \quad A_2 = ([0,0.7],[0.2,0.3]),$$
$$B_1 = ([0.2,0.8],[0.1,0.2]), \quad B_2 = ([0.5,0.7],[0.2,0.3]),$$
$$A_1 \cap A_2 = ([0,0.5],[0.3,0.4]),$$
$$B_1 \cup B_2 = ([0.5,0.8],[0.1,0.2]),$$
$$A_1 \cup A_2 = ([0.2,0.7],[0.2,0.3]) = B_1 \cap B_2.$$

Bu durumda $\tau = \{\tilde{0}, \tilde{1}, A_1, A_2 B_1, B_2, A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cup B_1, B_1 \cup B_2\}$ ailesi X üzerinde bir ASB topolojidir.

$\mathcal{B} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, A_1, A_2 B_1, B_2, A_1 \cap A_2\}$ ailesi τ' nun bir tabanıdır.

$P_x = ([0.2,0.6],[0.3,0.4])_x$ ASB noktasını alalım.

$P_x \in B_1 \cap B_2$ dir. Fakat $P_x \tilde{\in} W \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{B}$ yoktur.

Tanım 3.2.12: : (X,τ) bir ASB topolojik uzay, $B \in ASB(X)$ ve M_x X' de bir ASB noktası olsun.

B kümesine M_x noktasının komşuluğu denir : $\Leftrightarrow \exists O \in \tau$ öyle ki $M_x \tilde{\in} O \subset B$ sağlanır. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.13: : Bir (X,τ) ASB topolojik uzay olsun.

$A \in \tau \Leftrightarrow$ A kümesi A' ya ait tüm ASB noktalarının komşuluğudur.

İspat: Tanımdan görülür.

Tanım 3.2.14: $0 \le a \le b(\ne 0), 0 \le c \le d$ ve $b + d \le 1$ olsun. $(\delta, \eta, \delta', \eta')$ pozitif dörtlüsü, $0 \le a - \delta < b - \eta$, $c + \delta' \le d + \eta' < 1$ ve $b - \eta + d + \eta' \le 1$ koşullarını sağlıyorsa bu dörtlüye (a,b,c,d) ile uygun dörtlü denir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.15: (X,τ) bir ASB topolojik uzay olsun. Her P_x ASB noktası için $N(P_x)$ bu noktanın tüm komşuluklarının bir ailesi olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(N1) $\tilde{1} \in N(P_x)$, $\forall P_x$ ve $A \in N(P_x) \Rightarrow P_x \in A$.

(N2) $A, B \in N(P_x) \Rightarrow A \cap B \in N(P_x)$.

(N3) $A \subset B$ ve $A \in N(P_x) \Rightarrow B \in N(P_x)$.

(N4) (a,b,c,d) ile uygun olan her $(\delta, \eta, \delta', \eta')$ dörtlüsü için

$A \in N(([a-\delta, b-\eta],[c+\delta', d+\eta])_x) \Rightarrow A \in N(([a,b],[c,d])_x)$.

(N5) $A \in N(M_x), B \in N(K_x) \Rightarrow A \cup B \in N(M_x \cup K_x)$.

(N6) $A \in N(P_x) \Rightarrow \exists S \in N(P_x)$ öyle ki $S \subset A$ ve $\forall Q_y \tilde{\in} S$ için $S \in N(Q_y)$.

İspat: (N1)-(N3) tanımlardan açıktır.

(N4) (a,b,c,d) ile uygun olan her $(\delta, \eta, \delta^{'}, \eta^{'})$ dörtlüsü için

$A \in N(([a-\delta, b-\eta],[c+\delta^{'}, d+\eta^{'}])_x)$ olsun. Bu durumda $\forall(\delta, \eta, \delta^{'}, \eta^{'})$ için

$\exists O_{(\delta,\eta,\delta^{'},\eta^{'})} \in \tau : ([a-\delta, b-\eta],[c+\delta^{'}, d+\eta])_x \widetilde{\in} O_{(\delta,\eta,\delta^{'},\eta^{'})} \subset A$ sağlanır. Buradan

$O := \bigcup_{\delta,\eta,\delta^{'},\eta^{'}} O_{(\delta,\eta,\delta^{'},\eta^{'})}$ olarak seçersek $O \in \tau$ ve $O \subset A$ olur. Ayrıca,

$$\bigcup([a-\delta, b-\eta],[c+\delta^{'}, d+\eta])_x = ([a,b],[c,d])_x \subset \bigcup O_{(\delta,\eta,\delta^{'},\eta^{'})} = O \subset A$$

olur. Buradan

$([a,b],[c,d])_x \widetilde{\in} O \subset A \Rightarrow A \in N(([a,b],[c,d])_x)$ olur.

(N5) $A \in N(M_x)$ ve $B \in N(K_x)$ olsun.

$\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \tau : M_x \widetilde{\in} O_1 \subset A$ ve $K_x \widetilde{\in} O_2 \subset B$

$\Rightarrow M_x \cup K_x \widetilde{\in} O_1 \cup O_2 \subset A \cup B$, ($M_x \cup K_x$ yine bir ASB noktasıdır.)

$\Rightarrow A \cup B \in N(M_x \cup K_x)$ olur.

(N6) $A \in N(P_x) \Rightarrow \exists S \in \tau : P_x \widetilde{\in} S \subset A$ sağlanır.

$S \in \tau$ olduğundan S tüm noktalarının komşuluğudur. Yani $\forall Q_y \widetilde{\in} S$ için $S \in N(Q_y)$ dir. Ayrıca $P_x \widetilde{\in} S$ olduğundan $S \in N(P_x)$ olur.

Bu yüzden $A \in N(P_x) \Rightarrow \exists S \in N(P_x)$ öyle ki $S \subset A$ ve $\forall Q_y \widetilde{\in} S$ için $S \in N(Q_y)$ olur. ■

Teorem 3.2.16: X boştan farklı bir küme ve X' deki her M_x noktası için (N1)-(N6) koşullarını sağlayan bir $N(M_x)$ ailesi mevcut olsun. Bu durumda

$$\tau = \{A \in ASB(X) : \forall P_\xi \,\widetilde{\in}\, A \text{ için } A \in N(P_\xi)\}$$

ailesi X üzerinde bir ASB topolojidir ve $N(M_x)$ de M_x noktasının komşuluk sistemidir.

İspat: (1) $\widetilde{0} \in \tau$ dolaylı olarak sağlanır. Ayrıca (N1)' den dolayı $\widetilde{1} \in \tau$ sağlanır.

(2) $A, B \in \tau$ ve $M_x \in A \cap B$ alalım.

$\Rightarrow A, B \in N(M_x)$, ($\tau$ ' nun yapısından)

$\Rightarrow$(N2)' den $A \cap B \in N(M_x)$ olur.

O halde $A \cap B \in \tau$ olur.

(3) $\forall i \in J$ için $A_i \in \tau$ ve $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ olsun. $x \in X$ ve $[\mu_A(x)]^L = a$, $[\mu_A(x)]^U = b$, $[\nu_A(x)]^L = c$, $[\nu_A(x)]^L = d$ olsun.($0 < b + d \leq 1$)

1. Durum: $0 < a < b$ ve $M_x = ([a, b], [c, d])_x$ olsun. O halde $M_x \,\widetilde{\in}\, A$. $(\delta, \eta, \delta', \eta')$, (a, b, c, d) için uygun dörtlü olsun. O halde $0 \leq a - \xi < b - \eta$, $0 < c + \xi' \leq d + \eta'$ ve $b - \eta + d + \eta' \leq 1$ sağlanır.

$([a - \xi, b - \eta], [c + \xi', d + \eta])_x$ noktasını $M_x(\xi, \eta, \xi', \eta')$ olarak gösterelim. Ayrıca $M_x(\xi, \eta, \xi', \eta') \,\widetilde{\in}\, A$ olur. Buradan $\exists i_0, j_0, i_0', j_0' \in J$ için

$[\mu_{A_{i_0}}(x)]^L > a - \xi, [\mu_{A_{j_0}}(x)]^U > b - \eta, [\nu_{A_{i_0'}}(x)]^L < c + \xi', [\nu_{A_{j_0'}}(x)]^U < d + \eta'$ olur.

Bu yüzden $M_x(\delta, \eta, \delta', \eta') \,\widetilde{\in}\, A_{i_0} \cup A_{j_0} \cup A_{i_0'} \cup A_{i_0'} = A'$ (diyelim).

Şimdi $P_y = ([e, f], [g, h])_y \,\widetilde{\in}\, A'$ alalım. O halde,

$$e \leq \max\{[\mu_{A_{i0}}(y)]^L, [\mu_{A_{j0}}(y)]^L, [\mu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^L, [\mu_{A_{j0}^{'}}(x)]^L\},$$

$$f \leq \max\{[\mu_{A_{i0}}(y)]^U, [\mu_{A_{j0}}(y)]^U, [\mu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U, [\mu_{A_{j0}^{'}}(x)]^U\},$$

$$g \geq \min\{[\nu_{A_{i0}}(y)]^L, [\nu_{A_{j0}}(y)]^L, [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^L, [\nu_{A_{j0}^{'}}(x)]^L\} \quad \text{ve}$$

$$h \geq \min\{[\nu_{A_{i0}}(y)]^U, [\nu_{A_{j0}}(y)]^U, [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U, [\nu_{A_{j0}^{'}}(x)]^U\} \text{ olur.}$$

Genelliği bozmaksızın $e \leq [\mu_{A_{i0}}(y)]^L$, $f \leq [\mu_{A_{j0}}(y)]^U$, $g \geq [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^L, h \geq [\nu_{A_{j0}^{'}}(x)]^U$ olarak alalım.

$p = \min\{f, [\mu_{A_{i0}}(y)]^U, [\mu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U, [\mu_{A_{j0}^{'}}(x)]^U\}$ olsun.

O halde

$$\left([e,p][1-p,1-p]\right)_y \,\tilde{\in}\, A_{i_0}, \left([0,f],[1-f,1-f]\right)_y \,\tilde{\in}\, A_{j_0},$$
$$\left([0,p],[g, h \vee [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U]\right)_y \,\tilde{\in}\, A_{i_0^{'}} \text{ ve } \left([0,p],[h,h]\right)_y \,\tilde{\in}\, A_{j_0^{'}} \text{ olur.}$$

Buradan,

$$A_{i_0} \in N\left(\left([e,p][1-p,1-p]\right)_y\right), A_{j_0} \in N\left(\left([0,f],[1-f,1-f]\right)_y\right),$$
$$A_{i_0^{'}} \in N\left(\left([0,p],[g, h \vee [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U]\right)_y\right) \quad \text{ve}$$

$$A_{j_0^{'}} \in N\left(\left([0,p],[h,h]\right)_y\right) \text{ olur.}$$

Buradan, (N5) özelliğinden

$$A^{'} = A_{i_0} \cup A_{j_0} \cup A_{i_0^{'}} \cup A_{i_0^{'}} \in N(\left([e,p][1-p,1-p]\right)_y \cup \left([0,f],[1-f,1-f]\right)_y \cup$$
$$\cup \left([0,p],[g, h \vee [\nu_{A_{i_0}^{'}}(x)]^U]\right)_y \cup \left([0,p],[h,h]\right)_y)$$

$$= N(([e,f],[g,h])) = N(P_y) \text{ olur.}$$

Böylece $M_x(\xi,\eta,\xi^{'},\eta^{'}) = ([a-\xi, b-\eta],[c+\xi^{'}, d+\eta])_x$ noktası için $\exists A^{'}$ öyle ki $\forall P_y \mathrel{\tilde{\in}} A^{'}$ için $A^{'} \in N(P_y)$ ve $M_x(\xi,\eta,\xi^{'},\eta^{'}) \mathrel{\tilde{\in}} A^{'} \subset A$ olur. Yani her $(\xi,\eta,\xi^{'},\eta^{'})$ uygun dörtlüsü için $A \in N(M_x(\xi,\eta,\xi^{'},\eta^{'}))$ dir. (N4) özelliğinden $A \in N(M_x)$ olur.

2. Durum: $a = 0 < b$ ve $M_x = ([0,b],[c,d])_x$ olsun. $(\eta,\xi^{'},\eta^{'}),(b,c,d)$ için uygun üçlü olsun. O halde $0 < b-\eta$, $c+\xi^{'} \leq d+\eta^{'}$ ve $b-\eta+d+\eta^{'} \leq 1$ sağlanır.

1.Durumdaki aynı işlemler yapılarak $M_x(\eta,\xi^{'},\eta^{'}) = ([0, b-\eta],[c+\xi^{'}, d+\eta])_x$ noktası için $\exists A^{'}$ vardır öyle ki $\forall P_y \mathrel{\tilde{\in}} A^{'}$ için $A^{'} \in N(P_y)$ ve $M_x(\eta,\xi^{'},\eta^{'}) \mathrel{\tilde{\in}} A^{'} \subset A$ olur. Yani her $(\eta,\xi^{'},\eta^{'})$ uygun üçlüsü için $A \in N(M_x(\eta,\xi^{'},\eta^{'}))$ dir. (N4) özelliğinden $A \in N(M_x)$ olur.

Böylece 1. ve 2. Durumlarda $A \in N(M_x)$ olur. Buradan $\forall P_y \mathrel{\tilde{\in}} A^{'}$ için $P_x \subset M_x$ dir. Yani $\forall P_x \mathrel{\tilde{\in}} A$ için $A \in N(P_x)$ dir. Buradan $A \in \tau$ olur. Böylece τ, X üzerinde bir topolojidir ve (X,τ)' daki her M_x noktasının komşuluk sistemi $N(M_x)$ dir. ■

Tanım 3.2.17: (X,τ) bir ASB topolojik uzay ve $A \in ASB(X)$ olsun.

Eğer $A \in N(P_x)$ ise P_x ASB noktasına A' nın bir iç noktası denir.

A ASB kümesinin tüm iç noktalarının birleşimine A kümesinin içi denir ve intA ile gösterilir.

Yani, $\operatorname{int} A := \bigcup_{A \in N(P_x)} P_x$ dir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.18: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \in ASB(X)$ olsun.

(i) intA ASB A kümesinin kapsadığı en geniş açık kümedir.

(ii) A açıktır $\Leftrightarrow$ A=intA.

İspat: Teorem 2.2.16' ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.2.19: (X,τ) bir ASB topolojik uzay ve $A \in ASB(X)$ olsun. $\bigcap \{B \in ASB(X) : B \text{ kapalı ve } A \subset B\}$ ASB kümesine A kümesinin kapanışı denir ve clA ile gösterilir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.20: (X,τ) bir ASB topolojik uzay ve $A, B \in ASB(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(i) $cl(\phi) = \phi$.

(ii) cl(X)=X.

(iii) $A \subset clA$.

(iv) clA kapalıdır.

(v) A kapalıdır $\Leftrightarrow$ clA=A.

(vi) $cl(A \cup B) = clA \cup clB$.

(vii) cl(clA)=A.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.21: $\forall A \in ASB(X)$ için $clA = [\,int(A^c)]^c$ dir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Tanım 3.2.22: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \in ASB(X)$ olsun.

(a) int(cl(A))=A ise A' ya X' in ASB düzenli açık alt kümesi denir.

(b) cl(int(A))=A ise A' ya X' in ASB düzenli kapalı alt kümesi denir.

Tanım 3.2.23: (X,τ_1), (Y,τ_2) ASB topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall B \in \tau_2$ için $f^{-1}(B) \in \tau_1$ ise f fonksiyonuna süreklidir denir. Eğer $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ ve $g:(X,\tau_2) \to (Y,\tau_3)$ fonksiyonları sürekli ise her

$C \in \tau_3$ için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ olduğundan $g \circ f$ ' de süreklidir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.24: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki ASB topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) f süreklidir,

(b) (Y, τ_2) ' deki kapalı kümelerin f altındaki ters görüntüsü (X, τ_1) 'de kapalıdır.

(c) X' deki her M_x ASB noktası ve her $V \in N(f(M_x))$ için $f^{-1}(V) \in N(M_x)$ olur.

(d) X' deki her M_x ASB noktası ve her $V \in N(f(M_x))$ için $\exists W \in N(M_x)$ öyle ki $f(W) \subset V$ sağlanır.

(e) $\forall A \in ASB(X)$ için $f(cl(A)) \subset cl(f(A))$.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Önerme 3.2.25: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki ASB topoloji olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.
(a) $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ ASB sürekli fonksiyondur.
(b) $\forall\, B \in ASB(Y)$ için $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(B))$
(c) $\forall\, B \in ASB(Y)$ için $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl(B))$

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.26: δ, X' deki ASB kümelerinin bir ailesi ve $\tilde{0}, \tilde{1} \in \delta$ olsun. Bu durumda δ ailesi, $\forall i, k$ için $S_{i,k} \in \delta$ olmak üzere

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in \Delta} \left(\bigcap_{k \in J} S_{i,k} \right) : \Delta - \text{keyfi indeks kümesi, } J - \text{sonlu indeks kümesi} \right\}$$

topolojisinin alt tabanıdır.

İspat: Tanımlardan görülür.

Tanım 3.2.27: X boştan farklı bir küme ve $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ASB topolojik uzayların bir ailesi olmak üzere, $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ fonksiyonlar ailesini ele alalım. O halde $\delta = \{f_i^{-1}(O) : O \in \tau_i, i \in \Delta\}$ alt tabanıyla üretilen τ topolojisine $\{f_i\}_{i\in\Delta}$ fonksiyonları ile üretilen ASB başlangıç topolojisi denir.

Teorem 3.2.28: X üzerindeki, $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ailesiyle üretilen ASB başlangıç topolojisi $f_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ fonksiyonlarını sürekli yapan en kaba topolojidir.

İspat: Tanımlardan görülür.

Tanım 3.2.29: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ASB topolojik uzayların bir ailesi olsun. O halde $X\left(=\prod_{i\in\Delta} X_i\right)$ üzerindeki $\{p_i : X \to (X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ izdüşüm fonksiyonlarıyla üretilen başlangıç topolojisine X üzerindeki çarpım topolojisi denir.

Bu topoloji $\prod_{i\in\Delta} \tau_i$ ile de gösterilir.

Tanımdan açıkça görülür ki izdüşüm fonksiyonları ADB çarpım topolojisinin tanımından dolayı sürekli fonksiyonlardır. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.30: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ ASB topoloji ailesi ve τ da $X\left(=\prod_{i\in\Delta} X_i\right)$ üzerindeki çarpım topolojisi olsun. $(Y, \tau^{'})$ bir ASB topolojisi ve $f : X \to Y$ fonksiyonu veriliyor. Bu durumda,

$f_i : (Y, \tau^{'}) \to (X, \tau)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ $p_i \circ f : (Y, \tau^{'}) \to (X_i, \tau_i)$ süreklidir.

İspat: Teorem 2.2.29' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Uyarı 3.2.31: Dikkat edilmelidir ki izdüşüm fonksiyonlarının açık olması gerekmez. Aşağıdaki örnekle bu gösterilmektedir.

Örnek 3.2.32: X={x,y} ve bu küme üzerindeki A_1 ve A_2 ASB kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A_1(x) = ([0.1,0.4],[0.3,0.5]), A_1(y) = ([0.5,0.6],[0.2,0.4]),$$
$$A_2(x) = ([0.3,0.8],[0.1,0.2]), A_2(y) = ([0.1,0.3],[0.2,0.6]).$$

Buna göre $\tau_1 = \{\widetilde{0},\widetilde{1},A_1\}$ ve $\tau_2 = \{\widetilde{0},\widetilde{1},A_2\}$ topolojileri veriliyor. Buradan $u = p_1^{-1}(A_1)$ ve $v = p_2^{-1}(A_2)$ olmak üzere XxX üzerindeki çarpım topolojisi $\tau = \{\widetilde{0}_{XxX},\widetilde{1}_{XxX},u,v,u\cap v,u\cup v\}$ olur. Fakat $p_2(u) = ([0.5,0.6],[0.2,0.4]) \notin \tau_2$ ve $p_1(v) = ([0.3,0.8],[0.1,0.2]) \notin \tau_1$ olur. Yani izdüşüm fonksiyonlarının açık olması gerekmez.

Tanım 3.2.33: (X,τ) bir ASB topolojik uzay olsun. Eğer X' deki tüm sabit ASB kümeleri τ' ya ait ise τ' ya Lowen-tip ASB topoloji denir. (Mondal ve Samanta, 2001)

Teorem 3.2.34: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\Delta}$ Lowen-tip ASB topolojik uzaylar ailesi ve τ da $X\left(=\prod_{i\in\Delta} X_i\right)$ üzerindeki çarpım topolojisi olsun. O halde $\forall i\in\Delta$ için $p_i:(X,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ izdüşüm fonksiyonları açıktırlar.

İspat: $v = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(u_k)$ olsun.

$\forall k = 1,2,..,n$, $\beta(\neq i_k)$ ve $x_\beta \in X_\beta$ için

$$[(\mu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^L = \sup_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)} [\mu_v(x)]^L = \sup_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)} \left(\min_{1\le k\le n}[(\mu_{p_{i_k}^{-1}(u_k)})(x)]^L\right)$$

$$= \sup_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)} \left(\min_{1\le k\le n}[\mu_{u_k}(p_{i_k}(x))]^L\right) = \min_{1\le k\le n}\left(\sup_{\xi\in X_{i_k}}[\mu_{u_k}(\xi)]^L\right) = a \quad \text{(diyelim)}$$

Bu a değeri, [0,1) aralığındadır ve $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.

(Çünkü $\xi_k \in X_{i_k}$,(i=1,2,…,n), için $\exists x \in p_\beta^{-1}(x_\beta)$ bulunabilir öyle ki $p_{i_k}(x)\xi_k$ olur. (Gerçekten x, Δ indis kümesi üzerinde $x(\beta)=\beta$, $x(i_k)=\xi_k$ ve diğer her indis için $x(i)\in X_i$ olarak seçilebilir.))

Bezer olarak, $[(\mu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^U = \min\limits_{1\le k\le n}\left(\sup\limits_{\xi\in X_{i_k}}[\mu_{u_k}(\xi)]^U\right) = b$ (diyelim). Bu değerde $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.

Açıkça görüldüğü gibi $a \le b$ dir.

Benzer şekilde,

$$[(\nu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^L = \inf_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)}[\nu_v(x)]^L = \inf_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)}\left(\max_{1\le k\le n}[(\nu_{p_{i_k}^{-1}(u_k)})(x)]^L\right)$$
$$= \inf_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)}\left(\max_{1\le k\le n}[\nu_{u_k}(p_{i_k}(x))]^L\right) = \max_{1\le k\le n}\left(\inf_{\xi\in X_{i_k}}[\nu_{u_k}(\xi)]^L\right)$$
$$= c \qquad \text{(diyelim)},$$

Bu c değeri, [0,1) aralığındadır ve $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.

Bezer olarak, $[(\nu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^U = \max\limits_{1\le k\le n}\left(\inf\limits_{\xi\in X_{i_k}}[\nu_{u_k}(\xi)]^U\right) = d$ (olsun). Bu değerde $x_\beta \in X_\beta$ ye bağlıdır.

Bu durumda

$k_0 \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere $\beta = i_{k_0}$ için

$$[(\mu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^L = \sup_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)}\left(\min_{1\le k\le n}[\mu_{u_k}(p_{i_k}(x))]^L\right)$$
$$= \left(\min_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\sup_{\xi\in X_{i_k}}(\mu_{u_k}(\xi))\right]^L\right)\wedge[\mu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^L = a' \wedge [\mu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^L$$

Burada $a^{'} = \min_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\sup_{\xi\in X_{i_k}}(\mu_{u_k}(\xi))\right]^L$ dir.

Benzer olarak, $b^{'} = \min_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\sup_{\xi\in X_{i_k}}(\mu_{u_k}(\xi))\right]^U$ olmak üzere

$[(\mu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^U = b^{'} \wedge [\mu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^U$ dir.

Benzer şekilde,

$$[(\nu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^L = \inf_{x\in p_\beta^{-1}(x_\beta)}\left(\max_{1\le k\le n}[\nu_{u_k}(p_{i_k}(x))]^L\right)$$

$$= \left(\max_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\inf_{\xi\in X_{i_k}}(\nu_{u_k}(\xi))\right]^L\right) \vee [\nu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^L$$

$$= c^{'} \vee [\nu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^L.$$

Burada $c^{'} = \max_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\inf_{\xi\in X_{i_k}}(\nu_{u_k}(\xi))\right]^L$ dir.

Benzer olarak, $d^{'} = \max_{1\le k(\ne k_0)\le n}\left[\inf_{\xi\in X_{i_k}}(\nu_{u_k}(\xi))\right]^U$ olmak üzere

$[(\nu_{p_\beta(v)}(x_\beta))]^U = b^{'} \vee [\nu_{u_{k_0}}(x_\beta)]^U$ dir.

O halde $p_\beta(v) = ([a^{'},b^{'}],[c^{'},d^{'}]) \cap u_{k_0}$ sabit ASB kümesi ile açık u_{k_0} kümesinin kesişimi olur ki bu ise Lowen-tip topolojide açık bir kümedir. Dolayısıyla p_β izdüşüm fonksiyonları açıktır. ■

3.3. Aralık Değerli Sezgisel Topolojik Uzaylarda Kompaktlıklar

Bu bölümde, Çoker ve Eş (1995)' de tanımlanan kompaktlık çeşitleri aralık değerli sezgisel bulanık topolojik uzaylara genelleştirilerek incelenecektir.

Tanım 3.3.1: (X,τ) bir ASB topolojik uzay olsun.

(a) $\beta \subset ASB(X)$ ailesi $\widetilde{1}_X = \bigcup_{w\in\beta} w$ koşulunu sağlıyorsa bu β ailesine X' in bir örtümü denir. β ' nın elemanları açık kümeler ise β ' ya bir açık örtüm denir. β ' nın bir β^* alt ailesi için $\widetilde{1}_X = \bigcup_{w\in\beta^*} w$ sağlanıyorsa β^* ' a bir alt örtüm denir.

(b) $\delta \subset ASB(X)$ ailesinin her sonlu alt ailesi $\bigcap_{\substack{i=1\\ K_i\in\delta}} K_i \neq \widetilde{0}_X$ özelliğini sağlıyorsa bu aile sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

(c) X' in her açık örtümü sonlu bir alt örtüme sahipse, (X,τ) ASB topolojik uzayına kompakttır denir.

(d) X' in her açık $\{G_i : i \in J\}$ açık örtümünün $\bigcup_{\substack{i\in F\\ F-\text{sonlu}}} cl(G_i) = \widetilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i \in F\}$ alt örtümü varsa (X,τ) ASB topolojik uzayına hemen hemen kompakttır denir.

(e) X' in her açık $\{G_i : i \in J\}$ örtümünün $\bigcup_{\substack{i\in F\\ F-\text{sonlu}}} int(cl(G_i)) = \widetilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i \in F\}$ alt örtümü varsa (X,τ) ASB topolojik uzayına yakın kompakttır denir.

Açıkça görülebilir ki kompaktlıklar arasında,

kompakt$\Rightarrow$ yakın kompakt$\Rightarrow$hemen hemen kompakt

ilişkisi vardır.

Örnek 3.3.2: X boştan farklı keyfi bir küme ve $\{G_n : n = 1,2,...\}$ ASB kümeler ailesi olsun. Burada her $x \in X$ için $G_n = \left(\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right], \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right)$ dir.

$\tau = \{G_n : n = 1,2,...\} \cup \{\widetilde{1}_X, \widetilde{0}_X\}$ ailesi X üzerinde bir ASB topolojidir.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \widetilde{1}_X$ olduğudan $\{G_n : n = 1,2,...\}$ ailesi X' in bir örtümüdür.

$cl(G_n) = \widetilde{1}_X \Rightarrow int(cl(G_n)) = \widetilde{1}_X$

olduğundan (X, τ) ASB topolojik uzayı yakın kompakttır. Fakat $\{G_n : n = 1,2,...\}$ örtümünün sonlu bir alt örtümü yoktur. Yani (X, τ) ASB topolojisi kompakt değildir.

Örnek 3.3.3: X boştan farklı keyfi bir küme ve $\left\{G_\lambda : \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$ ASB küme ailesi olsun. Burada

$G_\lambda = \left(\left[\lambda - \frac{1}{2}, \lambda\right], [0, 1-\lambda]\right)$ dir. Bu durumda $\tau = \left\{G_\lambda : \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\} \cup \{\widetilde{1}_X, \widetilde{0}_X\}$ ailesi X üzerinde bir ASB topolojidir. Bu topolojide ki her örtüm $\widetilde{1}_X$ kümesini içereceğinden bu topoloji kompakttır.

Teorem 3.3.4: (X, τ) ASB topolojik uzayı hemen hemen kompakttır $\Leftrightarrow$ X' de sonlu arakesit özelliğine sahip açık kümelerin $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i \in I} cl(G_i) \neq \widetilde{0}_X$ dır.

İspat: Teorem 2.3.4' ün ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 3.3.5: (X, τ) bir ASB topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (X, τ) hemen hemen kompakttır.

(b) ASB düzenli kapalı kümelerin $\bigcap_{i \in I} G_i = \widetilde{0}_X$ özelliğini sağlayan her $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i=1}^{n} int(G_i) = \widetilde{0}_X$ olacak şekilde sonlu bir $\{G_i : i = 1,...,n\}$ alt ailesi vardır.

(c) Sonlu arakesit özelliğine sahip ASB düzeli açık kümelerin her $\beta = \{G_i : i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i \in I} cl(G_i) \neq \widetilde{0}_X$ dir.

(d) X' in her belirtisiz düzenli açık örtüsünden, kapanışları X' i örten sonlu alt aile seçilebilir.

İspat: Teorem 2.3.5' ün ispatına benzer olarak yapılır. ■

Teorem 3.3.6: (X,τ) ve (Y,ϕ) iki ADB topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) kompakt ise (Y,ϕ) da kompakttır.

İspat: $\mathcal{H} = \{H_i : H_i \in \phi, i \in J\}$ Y' nin bir ADB açık örtüsü olsun. f sürekli olduğundan $\mathcal{G} = \{f^{-1}(H_i) : H_i \in \phi, i \in J\}$ X' in bir açık örtüsüdür. (X,τ) kompakt olduğundan, $\bigcup_{i=1}^{n}(f^{-1}(G_i)) = \tilde{1}_X$ olacak şekilde sonlu $\{H_i : H_i \in \phi, i = 1,...,n\}$ ADB açık kümeler ailesi vardır. Buradan,

$$\tilde{1}_Y = f\left(\bigcup_{i=1}^{n}(f^{-1}(G_i))\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Buradan da,

$\tilde{1}_Y = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ olur. Sonuç olarak (Y,ϕ) kompakttır. ■

Teorem 3.3.7: (X,τ) ve (Y,ϕ) iki ASB topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) hemen hemen kompakt ise (Y,ϕ) da hemen hemen kompakttır.

İspat: Teorem 2.3.6' ün ispatına benzer olarak yapılır.

(X,τ) ve (Y,ϕ) Lowen anlamında iki ASB topolojik uzaylar olsun. C=([a,b],[c,d]) sabit ASB kümesi verilsin. Bu durumda C-ε sabit ASB kümesini $\varepsilon \le a$ ve $d + \varepsilon \le 1$ olmak üzere $C - \varepsilon = ([a - \varepsilon, b - \varepsilon],[c + \varepsilon, d + \varepsilon])$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.8: (X,τ) bir ASB topolojik uzay olsun. Her C=([a,b],[c,d]) (burada $b \ne 0$ ve $d \ne 1$) sabit ASB kümesinin her β açık örtümü ve her $\varepsilon > 0$ için $C - \varepsilon \subseteq \bigcup_{G \varepsilon \beta_0} G$ olacak şekilde sonlu bir $\beta_0 \subset \beta$ alt ailesi varsa (X,τ)' ya Lowen kompakttır denir.

Tanım 3.3.1 (c) ve tanım 3.3.8 karşılaştırıldığında Lowen kompakt topolojik uzayın kompakt olduğu görülür.

Teorem 3.3.9: (X,τ) ve (Y,ϕ) iki ASB topolojik uzay ve $f:X\to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) Lowen kompaktsa (Y,ϕ) da Lowen kompakttır.

İspat: C=([a,b],[c,d]) Y de keyfi sabit bir ASB kümesi olsun ve β da C' nin keyfi bir örtümü olsun.

Dört durum söz konusu olur.

1. durum: C=([a,b],[c,d])
2. durum: C=([0,b],[c,d])
3. durum: C=([a,b],[c,1])
4. durum: C=([0,b],[c,1])

1. durumda $C-\varepsilon=([a-\varepsilon,b-\varepsilon],[c+\varepsilon,d+\varepsilon])$ olarak alınır.
2. durumda $C-\varepsilon=([0,b-\varepsilon],[c+\varepsilon,d+\varepsilon])$ olarak alınır.
3. durumda $C-\varepsilon=([a-\varepsilon,b-\varepsilon],[c+\varepsilon,1])$ olarak alınır.
4. durumda $C-\varepsilon=([0,b-\varepsilon],[c+\varepsilon,1])$ olarak alınır.

Üç durumda da ispat aynı şekilde yapılır.

C,B keyfi iki sabit ASB küme olmak üzere f(C)=C ve $f^{-1}(B)=B$ olduğu açıktır.

$\beta\subset\phi$ olduğundan $f^{-1}(\beta)=\{f^{-1}(G):G\in\beta\}\subset\tau$ dir. O halde

$$C\subseteq\bigcup\{G:G\in\beta\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup\{G:G\in\beta\}\right)=\bigcup\{f^{-1}(G):G\in\beta\}\supseteq f^{-1}(C)=C$$

$f^{-1}(G)\in\tau$ olduğundan ve (X,τ) Lowen anlamında kompakt olduğundan $\bigcup\{f^{-1}(G):G\in\beta_0\}\supseteq C-\varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $\beta_0\subset\beta$ alt ailesi vardır. Buradan,

$$f\left(\bigcup\{f^{-1}(G):G\in\beta_0\}\right)\supseteq f^{-1}(C-\varepsilon)=C-\varepsilon$$

$$\Rightarrow f\left(f^{-1}\left(\bigcup\{(G):G\in\beta_0\}\right)\right)\supseteq f(C-\varepsilon)=C-\varepsilon$$

$$\Rightarrow\bigcup\{(G):G\in\beta_0\}\supseteq C-\varepsilon$$

olur. Buradan (Y,ϕ) Lowen anlamında ASB kompakt olur. ■

Şimdi ASB topolojik uzaylarda Alexander Alt Taban Teoremi'ni verelim.

Teorem 3.3.10: (X,τ) bir ASB topolojik uzay ve δ τ' nun bir alt tabanı olsun. Eğer δ' nın elemanlarından oluşan her örtümün sonlu bir alt örtümü varsa (X,τ) kompakttır.

İspat: Bir ASB kümesi eğer X' i örtemiyorsa bu aileye yetersizdir denir. Eğer sonlu alt ailesi örtemiyorsa sonlu yetersizdir denir. Böylece X' in kompakt olması için gerek ve yeter şart ASB kümelerinin her sonlu yetersiz ailesi açık ailesinin yetersiz olmasıdır. Zorn Lemmasından ASB kümelerinin her sonlu yetersiz ailesini içeren bir maksimal sonlu yetersiz aile vardır. Bu maksimal β ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Eğer C açık bir küme ve $C \notin \beta$ ise maksimallikten β' nin $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ alt ailesi vardır öyle ki $\{A_1, A_2, ..., A_n, C\}$ ailesi X' i örter. Benzer olarak $D \notin \beta$ ise maksimallikten β' nin $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ alt ailesi vardır ve $\{B_1, B_2, ..., B_m, D\}$ X' i örter. Buradan da $\{A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m, C \cap D\}$ ailesi X' i örter. Bu yüzden $C \cap D \in \notin \beta$ dir.

B, ASB kümelerinin yetersiz açık bir ailesi olsun. O halde *B*' yi kapsayan yetersiz bir β ailesi vardır. Burada bulunan β ailesinin yetersiz olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\delta \cap \beta$ sonlu yetersiz bir ailedir buradan da yetersizdir. β nin yetersiz oluğunu göstermek için aksini varsayalım. Yani β yetersiz olmasın. O halde β X' i örter. $x \in X$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $\exists A_1, A_2 \in \beta$ için $[\mu_{A_1}(x)]^L > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2}$ ve $[v_{A_2}(x)]^U < \frac{\varepsilon_2}{2}$ dir.

A_1 ve A_2 açık kümeler olduğundan $\exists \{B_i\}_{i \in \Delta_1}, \{B_j\}_{j \in \Delta_2}$ taban elemanlarından oluşan aileleri için $A_1 = \bigcup_{i \in \Delta_1} B_i, A_2 = \bigcup_{j \in \Delta_2} B_j$ dir ve her B_i, B_j için $\exists J_i, J_j$ sonlu indeks kümeleri vardır öyle ki $C_k, C_l \in \delta$ olmak üzere $B_i = \bigcap_{k \in J_i} C_k, B_j = \bigcap_{k \in J_j} C_l$ dir.

$i \in \Delta_1, j \in \Delta_2$ için $\bigcap_{k \in J_i} C_k = B_i \subset A_1$ ve $\bigcap_{j \in J_j} C_k = B_j \subset A_2$ ayrıca β maksimaldir. $A_1, A_2 \in \beta$ olduğundan $\exists k = k_i \in J_i, \exists l = l_j \in J_j$ için $C_{k_i}, C_{l_j} \in \beta$' dir. Ayrıca $B_i = \bigcap_{k \in J_i} C_k \subset C_{k_i} \in \beta, B_j = \bigcap_{k \in J_j} C_l \subset C_{l_j} \in \beta$ yazılabilir. $A_1 = \bigcup_{i \in \Delta_1} B_i, A_2 = \bigcup_{j \in \Delta_2} B_j$ olduğundan $\exists B_{i_0}, B_{j_0}$ vardır öyle ki $[\mu_{B_{i_0}}(x)]^L > [\mu_{A_1}(x)]^L - \frac{\varepsilon_1}{2}$ ve $[v_{B_{j0}}(x)]^U < [v_{A_2}(x)]^U + \frac{\varepsilon_2}{2}$' dir. Buradan

$$[\mu_{C_{l_{j0}}}(x)]^L \geq [\mu_{B_{i0}}(x)]^L > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} = 1 - \varepsilon_1 \text{ ve}$$

$$[v_{C_{l_{j0}}}(x)]^U \leq [v_{B_{i0}}(x)]^U < \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2 \text{' dir.}$$

ε_1 ve ε_2 keyfi olduğundan,

$\vee \{[\mu_{C_k}(x)]^L : C_k \in \beta \cap \delta\} \geq 1$ ve $\wedge \{[v_{C_l}(x)]^U : C_l \in \beta \cap \delta\} = 0$ olur. Buradan da,

$\bigcup \{C_i : C_i \in \beta \cap \delta\} \geq \tilde{1}_X$ olur. Yani $\beta \cap \delta$ yetersiz değildir. Fakat bu ise çelişkidir. ■

Teorem 3.3.11: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ kompakt ASB topolojik uzayların sonlu bir ailesi olsun. $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ve $\tau = \prod_{i=1}^n \tau_i$ olmak üzere (X, τ) ASB çarpım topolojik uzayı kompakttır.

İspat: β, X' deki alt taban elemanlarından oluşan sonlu yetersiz açık bir aile olsun. β ailesinin yetersiz olduğunu göstermek yeterlidir. $B_i = \{w \in \tau_i : p_i^{-1}(w) \in \beta\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ailesini ele alalım. $B_i, (X_i, \tau_i)$' de sonlu yetersiz bir ailedir. (X_i, τ_i) kompakt olduğundan B_i de yetersizdir. Buradan $\exists x_i \in X_i$ için $r_i = \vee\{[\mu_w(x_i)]^L : w \in B_i\} < 1$ ve $q_i = \vee\{[v_w(x_i)]^U : w \in B_i\} > 0$' dir. Bu durumda,

$$\vee\{[\mu_U(x)]^L : U\in\beta\} = \bigvee_{i=1}^{n}\{\vee\{[\mu_{p_i^{-1}(w)}(x)]^L(x) : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}\{\vee\{[\mu_w(p_i(x))]^L : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}\{\vee\{[\mu_w(x_i)]^L : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}(r_i) < 1$$

veya

$$\vee\{[v_U(x)]^U : U\in\beta\} = \bigvee_{i=1}^{n}\{\wedge\{[v_{p_i^{-1}(w)}(x)]^U(x) : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}\{\wedge\{[v_w(p_i(x))]^U : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}\{\wedge\{[v_w(x_i)]^U : w\in B_i\}\}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n}(q_i) > 0$$

olur. O halde iki durumda da β yetersiz olur. Buradan da Teorem 3.3.10' den dolayı (X,τ) kompakttır. ■

Örnek 2.3.12: $\forall i\in \mathbb{N}^+$ için $X_i = [0,1]$ ve

$A_i = \left(\left[\frac{i}{i+2},\frac{i}{i+1}\right],\left[\frac{1}{i+2}\,\frac{1}{i+1}\right]\right)$ $(\forall x\in X)$ olmak üzere $\tau = \{\widetilde{0}_X, \widetilde{1}_X, A_i\}$

topolojilerini göz önüne alalım. Bu durumda her i için (X_i,τ_i) topolojik uzayları kompakttır.

$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ve X üzerindeki $\tau = \prod_{i=1}^{n}\tau_i$ ADB çarpım topolojisini alalım. Her x için

$$\left[\bigvee_{i=1}^{\infty}(p_i^{-1}(\mu_{A_i}))\right]^L(x) = \bigvee_{i=1}^{\infty}(\mu_{A_i}^L(p_i(x))) = \bigvee_{i=1}^{\infty}\frac{i}{i+2} = 1$$

Benzer olarak,

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{\infty}(p_i^{-1}(\nu_{A_i}))\right]^U(x) = \bigwedge_{i=1}^{\infty}(\nu_{A_i}^U(p_i(x))) = \bigvee_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+2} = 0$$

Olduğundan $\{p_i^{-1}(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ X' in bir açık örtüsüdür. Fakat bu örtümün hiçbir sonlu alt örtümü yoktur.

KAYNAKLAR

Atanassov, K., “Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 20, 87-96, (1986)

Atanassov, K., “More on Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 33, 37-45, (1989)

Atanassov, K., Gargov G., “Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 31, 343-349, (1989)

Atanassov, K., “Operators Over Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 64, 159-174, (1994)

Chang, C., L., “Fuzzy Topological Spaces”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, vol:24, no:1, 182-190 (1968)

Çoker, D., Eş, A., H., “On Fuzzy Compactness in Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces”, ***The Journal of Fuzzy Mathematics Los angeles***, vol:3, no:4, 899-909, (1995)

Çoker, D., “An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 88, 81-89, (1997)

De, S., K., Bıswas, R., Roy, A., R., “Some Operations on Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 114, 447-484, (2000)

Demirci, D., “Axiomatic Theory of Intuitionistic Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 110, 253-266, (2000)

Gehrke, M., Walker, C., Walker, E., “Some Comments on Interval Valued Fuzzy Sets”, ***International Journal of Intelligent Systems, vol:11***, 751-759, (1996)

Lowen, R., “Fuzzy Topological Spaces And Fuzzy Compactness”, ***Journal of Mathematical Analysis And Applications***, vol:56, no:3, 621-633, (1976)

Mondal, T., K., Samanta, S., K., “ Topology of Interval Valued Fuzzy Sets”, ***Indian J. Pure Appl. Math.,*** vol:30, no:1, 23-38, (1999)

Mondal, T., K., Samanta, S., K., “ Topology of Interval Valued Fuzzy Sets”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 119, 483-494, (2001)

Ying-Ming, L., Mao-Kang, L., “Fuzzy Topology”, ***World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd***, ***Uto-Print Singapore***, 32-65, (1997) Zadeh, L., A., “Fuzzy Sets”, ***Information and Control***, vol:8, no:3, 338-353, (1965)

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul' da tamamladı. 2000 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2005 yılında Fakülte birincisi olarak mezun oldu ve aynı yıl Kocaeli üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2006 yılından beri Kocaeli üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.