KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LYAPUNOV-SCHMİDT İNDİRGEME METODU ile ELDE EDİLEN İNDİRGENMİŞ BİFURKASYON DENKLEMİ ve ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Ali DEMİR

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Danışman : Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

KOCAELİ, 2007

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LYAPUNOV-SCHMİDT İNDİRGEME METODU ile ELDE EDİLEN İNDİRGENMİŞ BİFURKASYON DENKLEMİ ve ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Ali DEMİR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Ocak 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 07 Şubat 2007

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU	Prof. Dr. Halis AYGÜN	Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ
(..............................)	(..............................)	(..............................)

Üye	Üye
Prof. Dr. Elşen VELİ	Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV
(..............................)	(..............................)

KOCAELİ, 2007

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bilindiği üzere üretimde kesici aletin yaptığı titreşimler üretim kalitesini düşürmektedir. Bu yüzden uzun zamandır bu titreşimleri en aza indirgemek veya yok etmek için bu konu üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalardan biride kesici aletin hareketinin periyodik olarak değiştirilmesiyle bu titreşimlerin en aza indirgenmesi veya tamamen yok edilmesidir.

Matematiksel olarak olaya bakarsak kesici alet titreşimler sırasında kararsız bir yapıya sahiptir. Bu yüzden kesici aletin kararlı bir yapıya sahip olması için aletin hareketi periyodik olarak tedirgin edilmektedir. Bu yöntemde akla gelen ilk soru verilen periyodik tedirginlik hangi frekans ve genlik de olacağıdır. Bu çalışmada bu yöntem matematiksel olarak analiz edilip hareketin kararlılığı incelenmiş ve kararlılık sınırları bulunmuştur.

Bir sistemi matematiksel olarak analiz etmek için önce o sistemin matematiksel modeli oluşturulmalıdır. Bu çalışmada, Hanna ve Tobias tarafından verilen, matematiksel model analitik olarak incelenmiştir. Bu matematiksel model kesici aletin periyodik tedirginlikler altındaki hareketinin matematiksel modelidir. Bu model, periyodik zaman gecikmeleri içeren ve otonom olmayan bir modeldir.

Zaman gecikmeleri, biyolojik sistemlerin doğal bir elemanıdır. Zaman gecikmelerini matematiksel modellere koymamızın, kendini yenileme zamanı, gelişim zamanı, reaksiyon zamanı gibi bir çok nedeni vardır. Bu nedenle bazı uygulamalarda Adi Diferansiyel Denklemlerin yerine Fonksiyonel Diferansiyel Denklemleri kullanmak daha gerçekçi bir yaklaşımdır. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin bir türüdür.

Hopf Bifurkasyon teoremi, adi diferansiyel denklemlerle veya, gecikmeli diferansiyel denklemlerle verilmiş olan sistemin denge noktasından bifurke eden periyodik çözümleri incelemek için kullanılır. Bu çalışmada denge noktası civarında oluşan periyodik çözümlerin küçük tedirginlikler altında hala var olup olmadığını analiz edilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın bilim dünyasına ve bu konu üzerinde yapılacak olan yeni çalışmalara faydalı olup yol göstereceğini umuyorum. Amerika da başladığım bu çalışamama Türkiye de devam etmemi sağlayan ve beni iyi bir bilim adamı olmaya teşvik eden değerli hocam sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU'na, bana doktoram sırasında yardımcı olan değerli hocalarım sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'a, Doç. Dr Zahir MURADOĞLU'na ve Kocaeli Üniversitesinin diğer değerli hocalarına, arkadaşlarım Burhan PEKTAŞ'a, Arzu ERDEM'e, Salih TATAR'a ve Ersin EMİR'e teşekkürü borç bilirim. Ayrıca Kocaeli Üniversitesin de bilimsel çalışmalarıma devam etmem için bana destek olan hocam sayın Prof. Dr. Özer KENAR'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER

B	: Operatör,
$N(B)$	: operatörün çekirdeği,
$N(B)^{\perp}$	: operatörün çekirdeğinin dikleyeni
$R(B)$	: operatörün değer kümesi,
$R(B)^{\perp}$	: değer kümesinin ortagonal tamlayanı,
$\dim(N(B))$	: çekirdeğin boyutu,
$\operatorname{codim}(R(B))$	: değer kümesini tamlayan uzayın boyutu,
$\operatorname{ind}(B)$	: operatörün indisi,
$\operatorname{rank}(B)$	: operatörün rankı,
$\|B\|$	: operatörün normu,
B^*	: operatörün eşleneği,
X^*	: eşlenik uzay,
$< y^*, x >$	: bilineer form,
P_N :	: çekirdek üzerine tanımlı projeksiyon,
E	: projeksiyon,
α	: bifurkasyon parametresi,
$g(z,\alpha)$	: indirgenmiş bifurkasyon fonksiyonu,
$w(\alpha)i + \sigma(\alpha)$	: özdeğer,
τ	: parametre,
$C_{2\pi}$	: 2π periyotlu periyodik fonksiyonlar uzayı,
$C^1{}_{2\pi}$	: diferansiyeli sürekli olan 2π periyotlu periyodik fonksiyonlar uzayı,
$\Phi(u,\alpha,\tau)$	: lineer olmayan operatör,
S^1	: çember grubu,
$\eta(\theta)$	: sınırlı değişim fonksiyonu,
$T(t)$	: semi-gurup operatörü,
$C([\alpha,\beta],R^n)$	: $[\alpha,\beta]$ kapalı aralığından R^n üzerine tanımlanmış olan sürekli fonksiyonlar uzayı,
$A\varphi$	: semi-gurup operatörünün tanımlayıcısı,
$\rho(T)$	: resolvent küme,
$\sigma(T)$	: spektrum,
$R\sigma(T)$	: kalan spektrum,
$C\sigma(T)$	: sürekli spektrum,
$P\sigma(T)$	: nokta spektrumu,
λ	: öz-değer,
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi,

$M_{\lambda}(B)$	: $\lambda \mathrm{I} - B$ operatörünün kuvvetlerinin çekirdeklerinin bileşiminin oluşturduğu alt uzay,
$\Delta(\lambda)$	:karakteristik fonksiyon,

Kısaltmalar

GDD	: Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

LYAPUNOV-SCHMİDT İNDİRGEME METODU İLE ELDE EDİLEN İNDİRGENMİŞ BİFURKASYON DENKLEMİ VE ANALİZİ

Ali DEMİR

Anahtar Kelimeler. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Hopf Bifurkasyonu, Lyapunov-Schmidt İndirgeme Metodu,

Özet: Bu çalışmada periyodik zaman gecikmeleri içeren matematiksel model ele alınarak sistemin hareketinin kararlılığı incelenmiştir. Otonom olmayan sisteme iki yeni durum değişkeni eklenerek sistem önce durum değişkenleri içeren gecikmeli diferansiyel denklem sistemi formuna getirilmiştir. İkinci adımda Taylor seri açılımı kullanılarak modelimiz sabit gecikme terimi içeren diferansiyel denklem sistemi olarak yazılmıştır. Bu aşamadan sonra matematiksel modelimiz Banach uzayında fonksiyonel diferansiyel denklem olarak ifade edilmiştir. Sistemimiz rezonans olmayan bir sistem olarak kabul edilmiştir. Amacımız sistemin periyodik çözümlerini bulmak olduğundan fonksiyonel diferansiyel denklemimiz 2π periyotlu sürekli fonksiyonların ve $2\pi/\nu$ periyotlu sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzayların direk toplamı olan uzay üzerinde yani $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/\nu}$ uzayı üzerinde analiz edilmiştir. Sistemimiz sonsuz boyutlu uzayda olduğu için Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu uygulanarak sonsuz boyuttaki fonksiyonel diferansiyel denklem sistemi sonlu sayıda cebirsel denklemlere indirgenmiştir. Bu cebirsel denklemlere indirgenmiş bifurkasyon denklemi denir. Elde edilen indirgenmiş bifurkasyon denklemi önce simetri özellikleri kullanılarak daha basite indirgenmiştir. En sonunda basit forma indirgenmiş olan bifurkasyon denklemi analiz edilerek sistemin hareketi ve kararlılığı analiz edilmiştir.

REDUCED BİFURCATİON EQUATİON OBTAİNED BY LYAPUNOV-SCHMİDT REDUCTİON METHOD AND ITS ANALYSİS

Ali DEMİR

Keywords. Delay Differential Equations, Hopf Bifurcation, Lyapunov Schmidt Reduction Method.

Abstract: In this study the mathematical model including periodic time delays is considered and the stability of the system is analyzed. First nonaoutomous system is transformed into a delay differential equation system whose delay terms include state variables by introducing two new state variables. At the second step our mathematical model is converted into a delay differential equations system whose delay terms are constant by making use of Taylor series expansion. After this step our mathematical model is written as a functional differential equation on the Banach space. Our system is assumed to be nonrezonant. Since our goal is to find the periodic functions in the neighborhood of a critical point, the functional differential equation is analyzed on the direct summation of the space of 2π periodic functions and $2\pi/\nu$ periodic functions, i.e. on the space $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/\nu}$. By making use of Lyapunov-Schmidt reduction method the functional differential equations system on infinite dimensional space is reduced to algeabric equations on finite dimensional subspace. These algeabric equations are called reduced bifurcation equations. The obtained reduced bifurcation equation is written in a simpler form by using the symmetry properties of the system. Finally the behavior and stability of the simplified reduced bifurcation equation is analyzed.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dinamik sistemler teorisi, temelleri geçen yüzyılda atılmış olan modern bir alandır.Bugün bu alan üzerinde, teorik ve uygulamalı olmak üzere yoğun çalışmalar yapılmakta ve her geçen gün daha da gelişmektedir. Dinamik sistemler teorisini bu kadar çekici kılan mekanikten ekonomiye kadar olan her alanda incelenen sistemlerin matematiksel modellerinin geliştirilmesi ve bu modellerin incelenmesinde dinamik sistemler teorisi kullanılarak, sistemin nitel davranışları hakkında sonuçlar elde edilmesidir. Bifurkasyon teorisi, dinamik sistemler teorisinin bir alanıdır.

Bifurkasyon (Dallanma) olayı doğal bilimlerde çok önemli bir rol oynamaktadır. Doğal bilimlerde nitel hareketi değişen birçok sistem vardır. Nitel hareketin değişimi, sistemin denge noktalarının sayısının veya sistemin karalılığının değişimini ifade etmektedir ((Stone ve Campbell, 2004), (Kim ve diğ., 2006)). Bu değişimler sistemin içerdiği parametrelerin kritik değerlerinde meydana gelir. Sistemde değişime neden olan kritik parametre değerlerine bifurkasyon noktaları denir. Bifurkasyon, sistemin nitel hareketini değiştirmesi olayıdır. Nitel harekete göre bifurkasyonu sınıflandırabiliriz. Sonuç olarak doğal bilimlerde, sistemler genelde bir veya birden fazla parametre içerdiğinden, bifurkasyon problemini içeren birçok olayla karşılaşırız. Örneğin, bir eksen etrafında dönen bir akışkanı düşünelim. Bu akışkanının belli açısal hızlarda daha önceden var olan denge durumunu değiştirerek yeni denge durumları oluşturduğunu, yani hareketini değiştirdiğini gözlemleriz. Burada akışkanın açısal hızını sistemin parametresi olarak düşünebiliriz. Bu durumda akışkanın denge durumunu değiştiren açısal hız değerleri de bu sistemin bifurkasyon noktalarıdır. Bu olay bifurkasyon olayını açıklamak için kullanılan iyi bir örnek olup, bu teorinin oluşturulduğu ilk yıllarda çok incelenmiş olan bir olaydır. Bir çubuğun deformasyonuna neden olan kritik kuvvetlerin analizi de bifurkasyon problemini içeren bir diğer örnektir. Ayrıca kimyasal reaksiyonlar birçok bifurkasyon olayını içermektedir. Buna örnek olarak ani renk değişimlerini verebiliriz. Özetlersek doğal bilimlerde birçok sistemin matematiksel modelini analiz ettiğimiz zaman bifurkasyon problemi ile karşılaştığımızı görürüz.

Sistemlerin matematiksel modelleri genelde bir veya daha fazla parametreye bağlıdır. Bu sistemler nitel davranışlarını söz konusu parametrelerin belli kritik değerlerinde değiştirmektedir. Bu kritik parametre değerlerine sistemin bifurkasyon noktaları denir. Nitel davranıştaki değişikliğe göre bifurkasyon, “pitchfork” bifurkasyonu, “transcritical” bifurkasyonu, “saddle-node” bifurkasyonu gibi sınıflara ayrılmıştır, yani her bir bifurkasyon sınıfında sistemin kritik parametre değerlerinde gösterdiği davranış bifurkasyonun sınıfını belirlemektedir. Örneğin, “transcritical” bifurkasyonda sistemin kararlılığı değişmekte iken, “saddle-node” bifurkasyonunda ise sistemin sabit noktalarının sayısı değişmektedir. Sistemin periyodik davranışlarının belli bir parametre değerinde yok olması veya var olması da bir bifurkasyondur. Hopf bifurkasyonu sistemin sabit bir noktasından bifurke eden periyodik çözümlerini inceler ((Golubitsky ve Langford, 1981), (Chow ve Hale, 1982), (Hassard ve diğ., 1983), (Golubitsky ve Stewart, 2004)). Bifurkasyon teorisi ve bununla ilgili Fredholm operatörleri ((Zeidler, 1986a), (Zeidler, 1995)) 2. Bölümde tanıtılmıştır.

Dinamik sistemlerde genelde incelenen matematiksel modeller çok büyük veya sonsuz boyutlu uzaylarda olduğunda böyle sistemlerin incelenmesi zor olur. Matematiksel modellerin yerel analizinde, yani belli bir denge noktasının komşuluğunda incelenmesinde, indirgeme yöntemleri çok önemli rol oynamaktadırlar (Hale ve diğ., 2002). İndirgeme metodu ile matematiksel model sonlu bir boyuta indirgenmekte veya modelin davranışına katkısı olmayan terimler yok edilmekte ve bunun sonucunda analizi daha kolay olan bir sistem elde edilmektedir. Merkez Manifold (Center Manifold) indirgeme metodu, Normal Form teorisi ve Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu dinamik sistemlerde çok kullanılan indirgeme metotlarıdır. Bir bifurkasyonun Normal Formu ile çözümlerdeki nitel değişimi sergileyecek olan en basit sistem kast edilmektedir (Faria ve Magalhaes, 1995). Orijinal sistemdeki denklemeler yerel bir bifurkasyon noktası civarında Normal Forma her zaman transfer edilebilmektedirler. Yerel bifurkasyonlar her zaman hiperbolik olmayan sabit noktaların komşuluğunda meydana geldiğinden, Merkez manifolddaki özvektörler bifurkasyon noktası civarında sistemin dinamiği hakkında bilgi verirler. Merkez manifold teorisinde sistemin merkez manifold üzerindeki projeksiyonuna bakılır ve normal form teorisi kullanılarak sistemin denklemleri daha basit hale indirgenir (Namachchivaya ve Van Roessel, 2003). Büyüklüğü ne olursa olsun her sistem bifurkasyon noktasında normal formuna indirgenebilir. Sistemin normal formuna bakarak sistemin genel nitel davranışı hakkında bilgi edinebiliriz. Bu çok büyük boyutlu sistemlerin analizini kolaylaştırır. Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu ise genelde sistemin periyodik çözümleri üzerinde yoğunlaşır ve sistemin diğer dinamik hareketlerini gözardı eder ((Hale, 1979), (Golubitsky ve Sheaffer, 1985), (Wiggins, 1988)). Zaten bu noktada merkez manifold teorisinden ayrılır. Verilen sistemin periyodik çözümlerinin varlık problemlerini cebirsel denklemlere indirger. Elde edilen cebirsel denklemler çember simetrisine ($S0(2)$-simetrisine) sahiptirler ((Golubitsky ve Sheaffer, 1985), (Golubitsky ve Stewart, 2004)). Çember simetrisi, verilen sistemin lineerleştirilmiş kısmının "semisimple" kısmı tarafından üretilmektedir. Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu ile Hopf bifurkasyonu 3.Bölümde tanıtılmıştır.

Gecikmeli Diferansiyel Denklemler (GDD), ekonomi, mekanik, fizik, tıp, mühendislik gibi bir çok alanda bilimsel olayları matematiksel olarak tanımlamakta kullanılır. Zaman gecikmeleri gerçek dünyadaki etkileşimlerin vazgeçilmez bir parçasıdır. Bu nedenle bilimsel olayların matematiksel modellerinin GDD ile verilmesi en iyi yaklaşımı vermektedir. Adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemelerde sistemin gelecekteki davranışı, geçmişteki davranışları hesaba katılarak değil, sadece o anki davranışı hesaba katılarak belirlenir (Driver, 1977). Buna rağmen bir çok sistemin gerçek modelinde sistemin geçmişinin hesaba katıldığını görürüz. Örneğin makinenin kesici aletinin titreşimleri, kesici aletin bir önceki kesmede oluşturduğu yüzeye bağlıdır. Böyle bir olayın modellenmesinde zaman gecikmelerini hesaba katmak zorundayız. Bu durumda zaman gecikmesi olarak kesici aletin tam bir dönme zamanını almalıyız. Eğer kesici aletin hızını periyodik olarak değiştiriyorsak bu durumda bu periyodik değişimi de zaman gecikmesi olarak modele eklemeliyiz.

GDD`in genel teorisi ve basit sonuçları geçmiş yıllarda bir çok matematikçi tarafından elde edilmiş ve sunulmuştur ((Bellman ve Cooke, 1963), (Hale, 1977), (Driver, 1977), (Hale ve Lunel, 1993)). Buna rağmen birçok gecikmeli diferansiyel denklemin analitik metotlarla çözümü hala elde edilememektedir. Zaman değişkenine bağlı olan katsayılar çözümlerin açık olarak ifade edilmesini veya varlığını engelleyen en büyük etkendirler. Bunların çözümünü elde etmek daha derin matematiksel analiz gerektirmektedir. GDD`in periyodik çözümlerinin varlığı, bu alanda yapılan çalışmaların en önemli konularından bir tanesidir (Stech, 1985). Belli sınıflardaki GDD`in periyodik çözümlerinin varlığını, kararlılığını ve parametreye olan bağlılığı konusunda elde edilmiş olan bir çok temel sonuç ve değişik metotlar vardır ((Nussbaum, 1974), (Hale, 1979)). 4.Bölümde sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklemler tanıtılarak bunların temel özellikleri verilmiştir.

5.Bölüm de lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklem şeklinde verilen matematiksel model ele alınmış ve önceki bölümlerde tanıtılmış olan metot ve teoriler kullanılarak problem incelenmiştir. Üzerinde çalışılan matematiksel model makinenin kesici aletinin titreşimlerinin dinamiğini yansıtmaktadır ((Tobias, 1965), (Sexton ve diğ., 1977), (Namachchivaya ve Beddinni, 2003)). Daha açık bir ifade ile, bu matematiksel model kesici aletin periyodik pertübasyonlar altındaki hareketinin matematiksel modelidir. Burada analiz edilen matematiksel model, zamana açık olarak bağlı olan periyodik zaman gecikmelerini içerdiğinden söz konusu sistem otonom değildir. Modele sonradan eklenen iki yeni değişkenle sistem otonom hale getirilmiş ve periyodik zaman gecikmeli terimlerin genliğinin çok küçük olması kullanılarak sabit zaman gecikme terimleri içeren bir matematiksel model elde edilmiştir. Fonksiyonel diferansiyel denklemler teorisi, ve Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu kullanılarak matematiksel modelin denge noktası komşuluğunda analizi yapılarak, rezonans olmayan durumda sistemin kararlılığı incelenmiş ve periyodik çözümleri tespit edilmiştir ((Hale, 1977), (Hale ve Lunel, 1993)). Ele alınan modelin hem analizi hem de uygulamaları açısından özgün sonuçlar elde edilmiştir (Demir ve diğ., 2002, 2005, 2006).

BÖLÜM 2. BİFURKASYON TEORİSİ

2.1. Giriş

Bifurkasyon, bir matematiksel modelin bir veya daha fazla parametresinin değişimi sırasında çözümlerinin davranışlarında meydana gelen nitel değişime denir. Bu değişimin olduğu parametre noktalarına bifurkasyon noktaları denir. Eğer bu nitel değişimler matematiksel modelin sabit noktası veya periyodik çözümlerinin komşuluğunda meydana geliyorsa buna yerel bifurkasyon denir. Bir veya daha fazla kontrol parametresinin değişimi sırasında modelin sabit noktası belli parametre değerinde hiperbolik olmazsa bu nokta bifurkasyon noktası ve çözümlerdeki nitel değişime de yerel bifurkasyon denir. Kısaca yerel bifurkasyonlar hiperbolik olmayan sabit noktaların komşuluğunda meydana gelirler. Çözümlerdeki diğer nitel değişimlere ise global bifurkasyon denir.

Bir bifurkasyonun olması için gerekli olan minimum parametre sayısına bifurkasyonunun tamlayan boyutu (codimension) denir. Eğer bir bifurkasyonun tamlayan boyutu n ise bifurkasyonun olması için en az n tane birbirinden bağımsız parametrenin belirlenmesi gerekmektedir.

Biz bu bölümde önce bifurkasyon problemlerinin çözümünde sık kullanılan teorem ve tekniklerden bahsedeceğiz.

Kapalı fonksiyon teoremi (İmplicit function theorem) bifurkasyon problemlerinin analizinde çok sık kullanılan bir teoremdir. Şimdi bu teoremin bifurkasyon problemi ile ilişkisini daha iyi anlamak için aşağıdaki gerçel denklemi düşünelim:

$$F(\mu, x) = 0 \tag{2.1}$$

burada F fonksiyonu, (μ_0, x_0) noktasının komşuluğunda tanımlanmış olan bir C^1 fonksiyonudur. Eğer (μ_0, x_0) noktasında $F(\mu_0, x_0) = 0$ ise ve

$$F_x(\mu_0, x_0) \neq 0$$

koşulu sağlanıyorsa, kapalı fonksiyon teoremi kullanılarak (2.1) denkleminin (μ_0, x_0) noktasının komşuluğunda tek bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Eğer

$$F_x(\mu_0, x_0) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (μ_0, x_0) noktasında bir bifurkasyon olayı olma ihtimali vardır. Yani bu noktada (2.1) denkleminin çözümü birden fazla çözüme dallanabilir. Bu olaya en basit örnek olarak $F(\mu, x) = (\mu - \mu_0)^2 - (x - x_0)^2$ fonksiyonunu verebiliriz.

Şimdi bifurkasyon teorisinde çok sık kullanılan "blowing-up" tekniğini anlatmak için aşağıdaki analitik denklemi ele alalım:

$$0 = F(\varepsilon, s) = a\,\varepsilon\, s + s\big(0(s) + 0(\varepsilon^2)\big)$$

burada $a \neq 0$. $F(0,0) = 0$ olduğu tanımdan açıktır. $F_\varepsilon(0,0) = 0$ olduğu için kapalı fonksiyon teoremini direk olarak uygulayamayız. Ama s değişkenine böldüğümüz zaman

$$0 = G(\varepsilon, s) = a\,\varepsilon + 0(s) + 0(\varepsilon^2)$$

denklemini elde ederiz. $G(\varepsilon, s)$ fonksiyonunun tanımından $G(0,0) = 0$ olarak hesaplanır. Ayrıca $G_\varepsilon(0,0) \neq 0$ olduğu için kapalı fonksiyon teoremini uygulayarak yukarıdaki denklemi ε için çözebiliriz. Yani kapalı fonksiyon teoremini kullanarak denklemin 0 noktası komşuluğunda $\varepsilon(0) = 0$ olacak şekilde tek bir $\varepsilon(s)$ çözümünün olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi de aşağıdaki yarı-lineer denklemi düşünelim:

$$Lx = G(x, p)$$

burada L operatörü lineer bir operatör p ise denklemin parametresidir. Eğer

$$Lx = 0$$

lineer denklemi sadece $x = 0$ basit çözümüne sahipse yarı-lineer denklemimizin tek çözümü vardır ve problemimiz sabit nokta problemine indirgenir yani:

$$x = L^{-1}G(x, p)$$

problemini çözeriz. Aksi durumda eğer $Lx_1 = 0$ olacak şekilde bir $x_1 \neq 0$ basit olmayan çözümü varsa o zaman yarı-lineer denklemimizin dallanan çözümlerinin varlığından bahsedebiliriz. Bu iki durum arasındaki fark fizik ve doğal bilimleri için çok önemlidir. Şimdi bunun neden önemli olduğunu açıklayalım: x değişkenini mekanik sistemlerde durum değişkeni olarak ele alalım. Eğer sistemin lineer kısmı sadece $x = 0$ basit çözümüne sahip olsaydı $G(x, p)$ dış kuvvetlerinde oluşacak küçük değişimler sistemin denge durumunda küçük değişimlere neden olacaktır. Aksine lineer denklemin $x = 0$ basit çözümünden başka çözümleri varsa yani $x_1 \neq 0$ olacak şekilde çözümleri varsa $G(x, p)$ dış kuvvetlerinde oluşacak küçük bir değişim sistemin denge durumunda büyük değişimlere neden olacaktır.

Şimdi de basit bir örnekle önemli bir çözüm tekniğini açıklamak için

$$x = \varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon^3 x\,,\ \ x, \varepsilon \in K$$

denklemini ele alalım. Burada $K = R, C$. Eğer bu denklemi $F(x, \varepsilon) = 0$ formunda yazarsak, $F(0,0) = 0$ ve $F_x(0,0) \neq 0$ olduğunu görürüz. Kapalı fonksiyon teoremini uygulayarak denklemi x için çözebiliriz. $x = x(\varepsilon)$ çözümünü sıfır noktasının komşuluğunda kuvvet serisine açarsak

$$x = c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \cdots$$

serisini elde ederiz. Bu seri çözümünü denklemde yerine koyup kıyasladığımız zaman c_i katsayılarını bulabiliriz. Sonuç olarak

$$x = \varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$$

çözümünü elde ederiz. Genel olarak bu tip denklemlerin çözümünde daha hızlı ve açık olan ardışık yaklaşımlar metodu kullanılır. Bu metotta

$$x_{n+1} = \varepsilon + \varepsilon x_n + \varepsilon^3$$

ve $x_0 = 0$ olarak alınır. Yukarıdaki denklemi bu metoda göre çözersek

$$x_1 = \varepsilon + \varepsilon^3, \quad x_2 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz. Eğer $x(.)$ çözümünü n. dereceye kadar bulmak istiyorsak ardışık yaklaşımlar yöntemini n defa uygularız. x_n yaklaşık seri çözümündeki terimler, tam çözümün seri açılımındaki terimlerle aynıdır. Bu metotta $x_k, k = 1,2,\dots,n$ yaklaşık çözümlerini sadece n. dereceye kadar hesaplayarak aşırı hesaplamalardan kaçınırız. Örneğin yukarıdaki denklemi çözerken, yaklaşık çözümü

$$x_1 = \varepsilon + \cdots, \quad x_2 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots, \quad x_3 = \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \cdots$$

olarak hesaplayıp genel çözümü aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$x = \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Bir sonraki adım olarak

$$x = f(x,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}\, \varepsilon^n x^m$$

genel denklemini düşünelim. Burada $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında analitiktir. Yani $(0,0)$ noktasının komşuluğunda $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonunu seri açılımı yakınsaktır. Bu denkleme kapalı fonksiyon teoremini uygulayabilmek için

$$f(0,0) = f_x(0,0) = 0\,; \; a_{00} = a_{01} = 0$$

koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşullar $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonunu sabit terimi ve x değişkenine göre lineer terim içermemesi anlamına gelmektedir. Yani $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonunun yapısal formu üzerinde kısıtlamalar getirmektedir.

2.2. Bifurkasyon Noktasının Varlığı için Gerek Koşul

Bu bölümde bifurkasyon noktasının varlığı için gerekli olan koşulları inceleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki operatör denklemini düşünelim:

$$F(\mu, x) = 0, \quad \mu \in K, x \in X \tag{2.2}$$

Tanım 2.1. (Zeidler, 1990) X bir Banach uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (μ_0, x_0) noktasına (2.2) denkleminin bir bifurkasyon noktasıdır denir.

(i) $F(\mu_0, x_0) = 0$,

(ii) (2.2) denkleminin her bir $n = 1,2,\dots$ için $x_n \neq y_n$ olacak şekilde $\{(\mu_n, x_n)\}$ ve $\{(\mu_n, y_n)\}$ seri çözümleri (μ_0, x_0) çözümüne yakınsamaktadırlar.

Önerme 2.1. (Zeidler, 1990) (Gerek Bifurkasyon Koşulu) X ve Y Banach uzayları ve $F : U(\mu_0, x_0) \subseteq K \times X \to Y$ (μ_0, x_0) noktasının komşuluğunda tanımlanmış C^1 operatörü olsun. Eğer (μ_0, x_0) noktası, (2.2) denkleminin bir bifurkasyon noktası ise $F_x(\mu_0, x_0)^{-1}$ ters operatörü Y Banach uzayı üzerinde tanımlı değildir.

Bu önerme kapalı fonksiyon teoreminin bir sonucudur. Şimdi çok sık karşılaşılan iki durumu inceleyelim. Önce

$$x = \mu(Lx + Nx), \quad \mu \in K, x \in X \tag{2.3}$$

lineer olmayan öz-değer problemini ele alalım.

Örnek 2.1. (Zeidler, 1986b). $L : X \to X$ bir kompakt lineer operatör olsun. $N : U(0) \subseteq X \to X$ lineer olmayan operatörü sıfırın komşuluğunda $\|Nx\| / \|x\| \to 0$, $\|x\| \to 0$ olacak şekilde tanımlansın. Eğer $(\mu, 0)$ noktası (2.3) denkleminin bir bifurkasyon noktası ise μ sayısı $x = \mu Lx$ lineer denkleminin karakteristik sayısıdır.

Çözüm. $x = 0$, (2.3) denkleminin basit bir çözümü olduğundan $(\mu, 0)$ noktasının (2.3) denkleminin bifurkasyon noktası olması $(\mu_n, x_n) \to (\mu, 0)$, $n \to \infty$ olacak şekilde (2.3) denkleminin $x_n \neq 0$ olmak üzere $\{(\mu_n, x_n)\}$ formunda seri çözümleri vardır. Eğer μ sayısı L lineer operatörünün bir karakteristik sayısı değilse X Banach uzayı üzerinde tanımlanmış olan $R = (I - \mu L)^{-1}$ lineer operatörü süreklidir. (2.3) denkleminden

$$x_n = (\mu_n - \mu) R L x_n + \mu_n R N x_n$$

denklemini elde ederiz. Bu ise

$$1 \leq |\mu_n - \mu| \, \|R L\| + |\mu_n| \, \|R\| \, \|N x_n\| / \|x_n\| \to 0 \, , \; n \to \infty$$

çelişkisine neden olur.

Örnek 2.2. (Zeidler, 1990) $X = R^2$ ve $x = (\xi, \eta)$ olsun. $\mu = 1$ sayısı $x = \mu x$ lineer probleminin bir karakteristik sayısı olmasına rağmen $\mu = 1$, $x = 0$ noktası

$$\begin{aligned} \xi &= \mu(\xi - \eta^3), \quad \mu \in R, x \in X \\ \eta &= \mu(\eta + \xi^3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

denklem sisteminin bir bifurkasyon noktası değildir.

Çözüm. (2.4) denklem sistemi her bir x çözümü için denklemin ilk satırını $-\eta$ ile ikinci satırını ξ ile çarpıp toplarsak $\mu(\eta^4 + \xi^4) = 0$ sonucunu elde ederiz. Buradan da $\mu \neq 0$ için $\xi = \eta = 0$ sonucunu elde ederiz. Yani her bir $\mu_n \neq 0$ için $(\mu_n, x_n) \to (\mu, 0)$, $n \to \infty$ olacak biçimde $x_n \neq 0$ çözümleri bulamayız.

Örnek 2.3. (Zeidler, 1990)

$$F(\varepsilon, x) = 0, \quad \varepsilon \in K, x \in X \tag{2.5}$$

denklemini ele alalım. Burada sıfırın komşuluğundaki her bir ε için $F(\varepsilon, 0) = 0$ olsun. Ayrıca $(0,0)$ noktası da (2.5) denkleminin bifurkasyon noktası olsun. Yani (2.5) denkleminin $(\varepsilon_n, x_n) \to (0,0)$, $n \to \infty$ ve $x_n \neq 0$ olacak şekilde $\{(\varepsilon_n, x_n)\}$ seri çözümleri vardır. Buna ek olarak

$$G(\mu, y) = 0, \quad \mu \in K, y \in X \tag{2.6}$$

denklemini düşünelim. Burada $G(\mu_0, y_0) = 0$ ve $\mu \mapsto y(\mu)$, μ_0 noktasının komşuluğunda tanımlanmış $y(\mu_0) = y_0$ koşulunu sağlayan (2.6) denkleminin bir çözümü olsun.

$\mu = \mu_0 + \varepsilon$, $y = y(\mu) + x$, ve $F(\varepsilon, x) = G(\mu_0 + \varepsilon, y(\mu_0) + x)$

olarak tanımlayalım. Bu tanımlar altında sıfırın komşuluğundaki her bir ε için $x = 0$, (2.5) denkleminin basit bir çözümüdür. Ayrıca eğer (0,0) noktası (2.5) denkleminin bifurkasyon noktası ise, (μ_0, y_0) noktası (2.6) denkleminin bifurkasyon noktasıdır.

2.3. Fredholm Operatörleri

Bifurkasyon teorisinde sistemlerin lineer kısımlarının çözümlerinin özellikleri ve spektral özellikleri çok önemlidir. Bu nedenle bu bölümde Fredholm operatörlerinin lineer fonksiyonel analizini inceleyeceğiz.

$$Bx = y, \quad x \in X \tag{2.7}$$

lineer operatör denklemini ele alalım. Bu denklemin eşlenik denklemini her bir $y^* \in X^*$ için

$$B^* x^* = y^*, \quad x^* \in Y^* \tag{2.8}$$

formunda yazabiliriz. Biz $X = R^n, Y = R^m$ de tanımlanmış olan klasik lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin en önemli özelliklerini içeren lineer operatörler sınıfını bulmak istiyoruz. Fredholm operatörlerinden oluşan sınıf bu özellikleri barındırmaktadır.

Tanım 2.2. (Zeidler, 1986a) X, Y Banach uzayları olsun.

(a) Eğer B lineer operatörü sürekli, $\dim(N(B))$ ve $\operatorname{codim}(R(B))$ sonlu ise $B: X \to Y$ operatörüne lineer Fredholm operatörü denir. Burada $N(B)=\{x \in X : Bx = 0\}$ ve $R(B)=B(X)$ olarak tanımlanmıştır.

Ayrıca

$$\operatorname{ind}(B) = \dim(N(B)) - \operatorname{codim}(R(B))$$

sayısına da B operatörünün indisi denir. B operatörünün rankı ise $\operatorname{rank}(B) = \dim(R(B))$ olarak tanımlanır.

(b) Eğer $U \subseteq X$ açık kümesi üzerinde tanımlanmış olan lineer olmayan $F: U \subseteq X \to Y$ operatörü C^1 operatörü ise ve her bir x için $F'(x): X \to Y$ lineer operatörü Fredholm operatörü ise F operatörüne Fredholm operatörü denir. Her bir $x \in U$ için $ind(F'(x))$ sabit ise bu sayıya F operatörünün indisi denir ve $ind(F)$ ile gösterilir.

Fredholm operatörleri konusu Banach manifoldlarına da genişletilebilir. M, N C^1 Banach manifoldları olsun. Eğer $F: M \to N$ operatörü C^1 operatörü ise ve her bir x için $TF(x): TM_x \to TN_{F(x)}$ lineer Fredholm operatörü ise F operatörüne Fredholm operatörü denir.

Önerme 2.2. (Zeidler, 1986b) $B: X \to Y$ lineer Fredholm operatörü için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) Eğer $\operatorname{ind}(B) = 0$ ve $N(B) = \{0\}$ ise, (2.7) denkleminin her bir $y \in Y$ için sadece bir tane çözümü vardır ve $B^{-1} \in L(Y,X)$.

(2) $R(B)$ değer kümesi kapalıdır. Ayrıca her bir sabit $y \in Y$ için eğer $< x^*, y >= 0$ koşulu her bir $x^* \in N(B^*)$ için doğruysa (2.7) denkleminin bir çözümü vardır.

(3) Eğer $C \in L(X,Y)$ operatörü aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa $B + C$ operatörü Fredholm operatörüdür.

(a) C operatörü kompakttır.

(b) C operatörünün normu $\|C\|$, B operatörüne bağlı pozitif bir sayıdan küçüktür.

(4) B^* eşlenik operatörü de bir Fredholm operatörü olup

$$\dim(\mathrm{N}(\mathrm{B}^*)) = \mathrm{codim}(R(B)), \quad \mathrm{codim}(R(B^*)) = \dim(\mathrm{N}(\mathrm{B}))$$

koşullarını ve $\mathrm{ind}(B^*) = -\mathrm{ind}(B)$ koşulunu sağlar. Eğer her bir sabit $y^* \in X^*$ için $< y^*, x >= 0$ koşulu her bir $x \in N(B)$ için sağlanıyorsa, (2.8) eşlenik denkleminin bir çözümü vardır.

Örnek 2.4. (Zeidler, 1986) $X = K^n$ ve $Y = K^m$ olmak üzere her bir lineer operatör $B : X \to Y$, indisi $\mathrm{ind}(B) = n - m$ olan bir Fredholm operatörüdür. Bu nedenle eğer X ve Y uzayları sonlu boyutlu Banach uzayları ise, açık bir U kümesi üzerinde tanımlanmış olan her bir C^1 operatörü $F : U \subseteq X \to Y$ indisi $\mathrm{ind}(F) = \dim(X) - \dim(Y)$ olan bir Fredholm operatörüdür.

Çözüm. $r = \mathrm{rank}(B)$ olsun. İndisi hesaplamak için X ve Y uzaylarını aşağıdaki formlarda yazalım:

$$X = N(B) \oplus N(B)^{\perp}, \; Y = R(B) \oplus R(B)^{\perp}$$

$B : N(B)^{\perp} \to R(B)$ şeklinde tanımlanmış olan lineer operatörün bire-bir ve üstüne olduğundan $\dim(N(B)^{\perp}) = r$ sonucuna varırız. Bu nedenle

$$\dim(N(B)) = \dim(X) - r, \quad \mathrm{codim}(R(B)) = \dim(Y) - r$$

sonuçlarını elde ederiz. Bu sonuçlarda bizi

$$\mathrm{ind}(B) = \dim(X) - \dim(Y)$$

sonucuna götürür.

X ve Y uzayları arasında $d = \dim(N(B)), c = \mathrm{codim}(R(B))$ olarak tanımlanmış $B : X \to Y$ lineer Fredholm operatörünü analiz edelim. Bu operatörün indisinin $\mathrm{ind}(B) = d - c$ olduğu açıktır. Şimdi biz bu operatörün önemli özelliklerinden bahsedeceğiz. Fredholm operatörlerinin en önemli özelliği (2.7) denkleminin homojen kısmının sonlu sayıda lineer bağımsız çözümünün olmasıdır. Bu denklemin tam olarak d tane yani $B: X \to Y$ lineer Fredholm operatörünün çekirdeğinin boyutu kadar lineer bağımsız çözümü vardır.

Buna ek olarak (2.7) denkleminin çözülebilir olması için sonlu sayıda lineer bağımsız çözülebilirlik koşulları vardır. Bu koşullar tam olarak c tane yani $B: X \to Y$ lineer Fredholm operatörünün değer kümesinin tamlayanının boyutu kadardır.

Eğer $\{x_1^*, \ldots, x_c^*\}$ kümesi $N(B^*)$ alt uzayının baz elemanlarını temsil etsin. Bu durumda (2.7) denkleminin çözülebilir olması için

$$< x_j^*, y >= 0\,,\ j = 1, \ldots, c$$

koşulunun sağlanması gerekir.

$$c = d - \text{ind}(B)$$

formülünden çözülebilirlik için kaç tane koşul gerektiğini bulmak için operatörün indisinin ve çekirdeğinin boyutunun bilinmesinin yeterli olduğu anlaşılmaktadır. Şimdi farz edelim ki (2.7) denkleminin çözümü için c tane lineer bağımsız çözülebilirlik koşulumuz var yani $x_1^*, \ldots, x_c^* \in Y^*$ olacak şekilde c tane lineer bağımsız fonksiyonelimiz var öyle ki her bir $x \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyor:

$$< x_j^*, Bx >= 0\,,\ j = 1, \ldots, c$$

Yukarıdaki denklemden her bir $x \in X$ için $< B^* x_j^*, x >= 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemden $B^* x_j^* = 0$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuç bizi her bir x_j^* fonksiyonelinin $N(B^*)$ alt-uzayının bir baz elemanını olduğu sonucuna götürür. Böylece (2.7) denkleminin çözümü için

$$< x_j^*, y >= 0\,,\ j = 1, \ldots, c$$

koşulunun sağlandığını göstermiş olduk.

Şimdi bifurkasyon problemlerinin indirgenmesinde özellikle Lyapunov-Schmidt metodunda kullanılan projeksiyonların nasıl tanımlandığından bahsedeceğiz. $d < \infty$ ve $c < \infty$ olduğu için $N(B)$ çekirdeğinin X uzayında $R(B)$ değer kümesinin de Y uzayında tamlayanları vardır yani

$$X = N(B) \oplus N(B)^{\perp}, \; Y = R(B) \oplus R(B)^{\perp}$$

olacak şekilde direk topolojik toplamlar vardır. Bu $P_N : X \to N(B)$, $P_R : Y \to R(B)$ projeksiyon operatörlerinin ve $N(B)^{\perp}$, $R(B)^{\perp}$ tamlayan uzaylarının oluşturulmasının mümkün olduğunu gösterir. Bu projeksiyonları oluşturmak için önce $N(B)$ çekirdeğinin $\{x_1, \ldots, x_d\}$ baz elemanlarını seçeriz daha sonrada buna bağlı olarak $y_j^* \in X^*$ olacak şekilde $\{y_j^*, x_j\}$ orta-normal sistemini oluştururuz. Bu orta-normal sistemi kullanarak

$$P_N x \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{d} < y_j^*, x > x_j$$

projeksiyonunu tanımlarız. $N(B)^{\perp} = (I - P_N)(X)$ olduğundan $I - P_N$ operatörü de X Banach uzayından $N(B)^{\perp}$ tamlayan uzayı üzerine bir projeksiyon tanımlar.

Benzer yolla $N(B^*)$ çekirdeği için $\{x_1^*, \ldots, x_c^*\}$ baz elemanları seçilerek $y_i \in Y$ olacak şekilde $\{x_i^*, y_i\}$ orta-normal sistemini oluşturarak

$$Qy = \sum_{j=1}^{d} < x_i^*, y > y_i$$

projeksiyonunu inşa ederiz. Yukarıda olduğu gibi $P_R = I - Q$ bir projeksiyon tanımlar. Bu projeksiyon Q projeksiyonuna dik bir projeksiyondur.

BÖLÜM 3. LYAPUNOV-SCHMIDT İNDİRGEME YÖNTEMİ

3.1. Giriş

Dinamik sistemlerde incelenen bazı matematiksel modeller sonsuz boyutlu uzaylarda verildiği için ve sonsuz boyuttaki matematiksel problemleri analiz etmek zor olduğu için genelde indirgeme metotları kullanılarak bu matematiksel modeller sonlu boyuta indirgenerek analiz edilir. Bu indirgeme olayı projeksiyon metotları kullanılarak yapılır ve problem sonlu sayıda değişken içeren sonlu sayıda lineer olmayan denklemlere indirgenir. Dinamik sistemlerde Merkez manifold indirgeme metodu, Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu gibi değişik indirgeme metotları vardır. Bu bölümde Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu inceleyeceğiz.

Lyapunov-Schmidt indirgeme metodundaki amaç

$g(x,\lambda)=0$

$g:V\to V$ ve $V=\ker(dg)_{0,0}$ formatında verilen denklemin $x(\lambda)$ çözümünü bulmaktır.

Bu bölümde iki klasik tip bifurkasyon incelenecektir: genel düzgün durum bifurkasyonu ve genel Hopf bifurkasyonu. Düzgün durum bifurkasyonu denge noktalarının(kritik noktaların) yerel varlığını tanımlar. Hopf Bifurkasyonu ise bir denge noktasının komşuluğunda yerel periyodik çözümlerin varlığını tanımlar. Düzgün durum bifurkasyonunu incelememizin amacı Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunun özünü daha iyi anlayabilmektir.

3.2. Düzgün Durum Bifurkasyonu

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$\dot{y} = F(y,\alpha)$

Burada $F(y,\alpha)$ fonksiyonu $F: \mathrm{R}^n x R^l \to \mathrm{R}^n$, $F(0,0)=0$ olarak tanımlanmış olup $(dF)_{0,0}$ tekildir. Yani $(dF)_{0,0}$ lineer operatörünün çekirdeğinin sıfırdan farklı elemanları vardır. R^n uzayını iki ayrı alt uzayın direk toplamı şeklinde yazalım:

$\mathrm{R}^n = K \oplus \hat{K}$, $\mathrm{R}^n = R \oplus \hat{R}$

burada $K = \ker(dF)_{0,0} \neq \{0\}$, ve $R = \mathrm{range}(dF)_{0,0}$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $\hat{K}$ alt-uzayı K alt uzayının $\hat{R}$ alt-uzayı da R alt-uzayının R^n uzayındaki tamlayanlarıdır. Bu tamamlayıcı alt-uzaylar tek olarak tanımlanmazlar yani bir alt uzay için birden fazla tamlayıcı alt-uzay bulanabilir.

Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu aşağıdaki incelemeyi gerektirir:

$$F(x,w,\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E\,F(x,w,\alpha) = 0, \\ (I-E)\,F(x,w,\alpha) = 0 \end{cases}$$

burada $x \in K$ ve $w \in \hat{K}$. Ayrıca E ve $(I-E)$ lineer fonksiyonları $E: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to R$ ve $(I\text{-}E): \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \hat{R}$ olarak tanımlanmış doğal projeksiyonlardır.

Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunda ilk önce $E\,F(x,w,\alpha) = 0$ denklemi analiz edilir. $E\,F(x,w,\alpha)$ fonksiyonunu w değişkenine göre türevini aldığımızda

$$\frac{d}{dw} EF\,\Big|_{0,0,0} = E\frac{d}{dw} F\,\Big|_{0,0,0} = d_{\hat{K}}\,F\,\Big|_{0,0,0}$$

sonucunu elde ederiz. Bu sonuçtan bu türevin tekil olmadığı açıktır. Böylece kapalı fonksiyon teoremini $E\,F(x,w,\alpha) = 0$ denklemine uygulayarak $w(0,0) = 0$ olacak şekilde $w(x,\alpha)$ tek yerel çözümünü elde ederiz. (0,0,0) noktası komşuluğunda sırasıyla

$$F(x,w,\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,\alpha):=(I-E)F(x,w(x,\alpha),\alpha)=0$$

denklemlerini elde ederiz.

$R=F(\hat{K})$ ve $F|\hat{K}$ tekil olmadığından $\dim R=\dim\hat{K}$ ve $\dim K=\dim\hat{R}$ sonuçlarını elde ederiz. K alt uzayını R^m uzayı olarak alırsak

$$f:\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^m, \quad f(0,0)=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme indirgenmiş bifurkasyon denklemi denir.

Bir parametreli vektör alanları ailesinde $\dim K=1$ olduğu zaman $f:\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ fonksiyonu

$$f(x,\alpha)=\alpha+a(\alpha)x+b(\alpha)x^2+\ldots$$

olarak elde edilir. Burada $a(0)=0$ ve genel kabuller olarak $a'(0)\neq 0$ ve $b(0)\neq 0$ koşulları tanımlanır.

Bir parametreli vektör alanları ailesinde her bir vektör alanının $-I$ ile değişkenlik özeliğine sahip olduğunu varsayalım yani $F(-y,\alpha)=-F(y,\alpha)$ koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda eğer $y(t)$ bir çözümse $-y(t)$ de bir çözümdür.

$\dim K=1$ olduğu zaman $f:\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ fonksiyonu

$$f(x,\alpha)=x(\alpha+a(\alpha)x^2+\ldots)$$

ve $a(0)\neq 0$ olarak elde edilir. Burada f fonksiyonu da $f(-x,\alpha)=-f(x,\alpha)$ koşulunu sağlar yani f fonksiyonu da $-I$ ile değişkenlik özeliğine sahiptir. Bu durumda çözüm kümesi $(0,0)$ noktası komşuluğunda

$$\{(x,\alpha)\in R\times R \mid f(x,\alpha)=0\}=\{(x,\alpha)\in R\times R \mid x=0\}\cup\{(x,\alpha)\in R\times R \mid x\cong\pm\sqrt{\alpha/a(\alpha)}\}$$

olarak elde edilir.

Merkez manifold indirgeme metodunun ve Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunun ortak noktası ikisinde de sistem, boyutu $\dim K$ olan bir sonlu boyutlu sisteme indirgenir. İki sistem arasındaki fark ise Merkez manifold indirgeme metodu ile sistemin orijine yakın tüm çözümleri elde edilirken Lyapunov-Schmidt indirgeme metodu ile sadece düzgün durum çözümleri elde edilir.

3.3. Hopf Bifurkasyonu

Bu bölümde Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu kullanarak Hopf bifurkasyonunu analiz edeceğiz. Burada orijine yakın olan periyodik çözümleri bulacağız.

$$\frac{d}{dt}u + F(u,\alpha) = 0 \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $F : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^l \to \mathrm{R}^n$ olarak tanımlanmıştır.

$$A(\alpha) = (d_{\mathrm{R}^n}\, F)_{0,\alpha}$$

lineer fonksiyonunu tanımlayalım. Burada α, l boyutlu parametredir yani $\alpha = (\lambda, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$ olarak tanımlanmıştır.

Teorem 3.1. (Golubitsky ve Stewart, 2004) Eğer (3.1) denkleminde $A(0) = (d_{\mathrm{R}^n}\, F)_{0,0}$ lineer operatörü

(a) $\pm i$ basit öz-değerlerine sahipse,

(b) Sanal eksen üzerinde başka öz-değerlere sahip değilse,

o zaman

$$g(z^2,\alpha) = r(z^2,\alpha)z\,,\ r(0,0) = 0$$

şeklinde tanımlanmış olan bir fonksiyon vardır öyle ki $g(z,\alpha) = 0$, $z \geq 0$ denkleminin (0,0) noktasının komşuluğunda elde edilen çözümleri, (3.1) diferansiyel denkleminin yaklaşık olarak 2π periyotlu olan küçük periyodik çözümlerine karşılık gelir.

$g(z,\alpha)=0$ denklemine indirgenmiş bifurkasyon denklemi denir.

Teorem 3.2. (Golubitsky ve Stewart, 2004) Eğer (3.1) denkleminde $A(\alpha)=(d_{\mathbb{R}^n}\, F)_{0,\alpha}$ lineer operatörü, bir $\varepsilon>0$ parametresi için $|\alpha|\leq\varepsilon$ olduğu zaman aşağıdaki koşulları sağlıyorsa l boyutlu parametre ailesine sahip olan periyodik çözümler ailesi $u=0, \alpha=0$ denge noktasından bifurke eder:

(a) $w(0)=1, \sigma(0)=0$ ve $\dfrac{d\sigma}{d\lambda}\neq 0$ koşullarını sağlayan $\pm w(\alpha)i+\sigma(\alpha)$ basit öz-değerlerine sahiptir.

(b) Sanal ekseni kesen başka bir öz-değere sahip değildir.

Kritik noktası 0 olan bir parametreli (λ) vektör alanları ailesini düşünelim. Bu vektör alanlarının lineer kısmının $\lambda=0$ değerinde $\pm i\,w$ öz-değerlerine sahip olduğunu varsayalım. O zaman yukarıdaki bilgilerden yola çıkarak $\lambda\to 0$ olduğu zaman 0 kritik noktası komşuluğunda periyodu yaklaşık olarak $2\pi/w$ olan periyodik çözümlerin olacağını söyleyebiliriz. Bu çözümlerin genlikleri ise $x=\sqrt{\pm\lambda}$ olup $\lambda\to 0$ olduğu zaman $x\to 0$ olacağını elde ederiz. Burada $\pm$ işaretleri Hopf bifurkasyonunun üst veya alt kritik olmasına bağlıdır.

3.4. Lyapunov Schmidt İndirgeme Metodu

Bu bölümde amacımız $\Phi=0$ operatör denkleminin, çözümleri (3.1) denkleminin çözümlerine karşılık gelen bir Φ operatörü tanımlamaktır. Bir sonraki adım olarak da Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu Φ operatörüne uygulayarak indirgenmiş bifurkasyon denklemini elde etmektir.

Φ operatörünü tanımlayabilmek için (3.1) diferansiyel denklemini periyodik fonksiyonlar uzayında tanımlanmış olan bir operatör olarak düşüneceğiz. Genel olarak iki periyodik fonksiyonun toplamı periyodik bir fonksiyon olmadığından periyodik fonksiyonlar uzayını lineer bir uzay olarak düşünemeyiz. Bu problemi çözmek için yeni bir τ parametresi tanımlayalım. Bu parametreyi kullanarak $s=(1+\tau)t$ değişkenini tanımlarsak (3.1) denklemine denk olan

$$(1+\tau)\frac{du}{ds}+F(u,\alpha)=0 \tag{3.2}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Amacımız (3.2) denkleminin 2π periyotlu periyodik çözümlerini bulmaktır. $C_{2\pi}$ ile $\mathrm{R}\to\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ olan 2π periyotlu periyodik fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bu uzay

$$\|u\| = \max_{s}|u(s)|$$

normu altında bir Banach uzayıdır. Yine $C^{1}{}_{2\pi}$ ile normu

$$\|u\|_1 = \|u\| + \left\|\frac{du}{ds}\right\|$$

olan ve diferansiyeli sürekli fonksiyonlardan oluşan Banach uzayını gösterelim.

Bu uzayları ve (3.2) diferansiyel denklemini kullanarak $\Phi : C^{1}_{2\pi}\times \mathrm{R}^{l}\times\mathrm{R}\to \mathrm{C}_{2\pi}$ operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Phi(u,\alpha,\tau)=(1+\tau)\frac{du}{ds}+F(u,\alpha)$$

Bu durumda $u\in C^{1}_{2\pi}$ fonksiyonu

$$\Phi(u,\alpha,\tau)=0$$

denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna (3.2) denkleminin 2π periyotlu çözümüdür denir.

Burada en önemli nokta Φ operatörünün S^1 denkliğine sahip olmasıdır. $S^1 \cong [0,2\pi)$ çember gurubunun $C_{2\pi}$ Banach uzayı üzerindeki etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(\theta.u)(s)=u(s-\theta),\ \theta\in[0,2\pi)$$

O zaman Φ operatörü aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\Phi(\theta.u,\alpha,\tau)=\theta\Phi(u,\alpha,\tau)$$

Bu durumda

$$\frac{d(\theta.u(s))}{ds}=\frac{du(s-\theta)}{ds}=\theta\cdot\frac{du(s)}{ds}$$

ve

$$F(\theta.u,\alpha)=\theta.F(u,\alpha)$$

eşitliklerini elde ederiz. İkinci eşitlik F fonksiyonunun s değişkenine dolaylı olarak bağlı olan bir fonksiyon olmasının sonucudur. Φ operatörü S^1 denkliğine sahip olduğu için bu operatör denklemin her bir $u(s)$ çözümü ve her bir θ değeri için elde edilen $u(s-\theta)$ fonksiyonu da aynı operatör denkleminin bir çözümüdür. Bu sonuç (3.2) diferansiyel denkleminin otonom olması yani F fonksiyonun s değişkenine direk olarak bağlı olmamasının sonucudur.

Φ operatörünü $(u,\alpha,\tau)=(0,0,0)$ noktası komşuluğunda lineerleştirirsek

$$Lu:=\frac{du}{ds}+A(0)u$$

şeklinde tanımlanmış $L:C^1_{2\pi}\to C_{2\pi}$ lineer operatörünü elde ederiz. Burada $A(\alpha)=(d_{\mathrm{R}^n}F)_{0,\alpha}$ olarak tanımlanmıştır.

$A(0)$ lineer fonksiyonu iki tane basit öz-değere sahip olduğundan L lineer operatörünün çekirdeği iki boyutludur yani $\dim\ker L=2$.

$S^1\cong[0,2\pi)$ in $\ker L$ üzerindeki etkisi

$$\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $(x,y)=xv_1+yv_2$ olup v_1 ve v_2 vektörleri, $\ker L$ çekirdeğinin baz elemanlarıdır.

$C_{2\pi}$ ve $C^1_{2\pi}$ Banach uzayları sırasıyla L lineer operatörünün çekirdeği ve değer kümesi ve tamlayanlarının direk toplamı olarak aşağıdaki formda yazılabilirler:

$$C_{2\pi} = rangeL \oplus \ker L, \quad C^1_{2\pi} = M \oplus \ker L$$

burada $M = rangeL \cap C^1_{2\pi}$ olarak tanımlanmıştır.

Bu direk toplamları kullanarak sonsuz boyutta verilmiş olan operatör denklemi, biri sonsuz boyutta diğeri ise sonlu boyutta olmak üzere iki ayrı operatör denklem olarak aşağıdaki formatta ifade edebiliriz:

$$\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E\Phi = 0, \\ (I - E)\Phi = 0 \end{cases}$$

Burada E ve $(I - E)$ lineer operatörleri $E : C_{2\pi} \to rangeL$ ve $(I - E) : C_{2\pi} \to \ker L$ olarak tanımlanmış olan projeksiyonlardır. Sonsuz boyuttaki $E\Phi = 0$ operatör denkleminin çözümü $w : \ker L \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R} \to \mathrm{M}$ olarak tanımlanmış olan $w(v, \alpha, \tau)$ tek yerel çözümünü verir. Bu çözümü sonlu boyuttaki operatör denkleminde yerine koyarak

$$\phi(v, \alpha, \tau) = 0$$

denklemini elde ederiz. Burada $\phi : \ker L \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R} \to \ker L$ operatörü

$$\phi(v, \alpha, \tau) = (I - E)\,\Phi(v, w(v, \alpha, \tau), \alpha, \tau)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu operatör denklemine indirgenmiş bifurkasyon denklemi denir.

$C_{2\pi}$ ve $C^1_{2\pi}$ Banach uzaylarının direk toplamları $S^1 \cong [0, 2\pi)$ çember gurubunun etkisi altında sabit kaldığından yani S^1-değişmez olduğu için $\phi(v, \alpha, \tau)$ operatörü

$$\theta.\phi(v, \alpha, \tau) = \phi(\theta.v, \alpha, \tau)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik $\phi = 0$ operatör denkleminin S^1 denkliğine sahip olduğunu ima eder. S^1 denkliği çözümün elde edilmesinde büyük kolaylıklar sağlar. $\phi(v,\alpha,\tau)$ operatörü

$$\phi(x,y,\alpha,\tau) = p(x^2+y^2,\alpha,\tau)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2+y^2,\alpha,\tau)\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

formunda ifade edilir. Burada

$$p(0,0,0) = q(0,0,0) = \frac{dp}{d\tau}(0,0,0) = 0\,,\ \frac{dq}{d\tau}(0,0,0) = -1$$

koşulları sağlanmaktadır. Şimdi

$$p(x^2+y^2,\alpha,\tau)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2+y^2,\alpha,\tau)\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

indirgenmiş bifurkasyon denklemini analiz edersek, çözümlerin $x = y = 0$ veya $p = q = 0$ denklemlerini sağlayan çözümler olduğu sonucuna varırız. $x = y = 0$ çözümü basit çözüm olup kritik çözüme (denge çözümüne) karşılık gelir. $p = q = 0$ denklemlerine karşılık gelen çözümler ise kritik noktanın komşuluğundaki periyodu yaklaşık olarak 2π olan periyodik çözümlere karşılık gelir. S^1 denkliği p ve q fonksiyonlarının $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$) değişkenin fonksiyonları olduğunu ima eder. Böylece

$$\phi(x,y,\alpha,\tau) = 0\ \ \Lambda(x,y) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad p(z^2,\alpha,\tau) = 0\,,\ q(z^2,\alpha,\tau) = 0$$

denklemlerini elde ederiz. $\frac{dp}{d\tau}(0,0,0) \neq 0$ olduğu için $q(z^2,\alpha,\tau) = 0$ denklemini τ parametresi için çözebiliriz. Böylece (z^2,α) değişkenlerinin $(0,0)$ komşuluğunda $\tau(z^2,\alpha)$ çözümünü elde ederiz. Bu çözümü kullanarak

$$r(z^2,\tau) := p(z^2,\alpha,\tau(z^2,\alpha))$$

fonksiyonunu tanımlarız. Bu durumda $x = y = 0$ ($\Leftrightarrow z = 0$) çözümü ve $r(z^2, \tau) = 0$ denkleminin çözümleri indirgenmiş bifurkasyon denkleminin çözümleridir. Bu sonuç bize

$$\phi = 0 \Leftrightarrow g(z^2, \tau) = zr(z^2, \tau) = 0$$

sonucunu verir.

BÖLÜM 4. SABİT KATSAYILI LİNEER GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. Giriş

$C([\alpha,\beta],R^n)$ ile $[\alpha,\beta]$ kapalı aralığından R^n üzerine tanımlanmış olan sürekli fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bu uzayda verilen herhangi $\varphi \in C([\alpha,\beta],R^n)$ fonksiyonunun normunu

$$\|\varphi\| = \sup|\varphi(\theta)|$$

olarak tanımlayalım. Bu norm altında $C([\alpha,\beta],R^n)$ fonksiyon uzayı Banach uzayıdır. Verilen herhangi bir $r \geq 0$ sayısı için $-r \leq u \leq A$ kapalı aralığında tanımlanmış olan $x(u)$ fonksiyonu için $0 \leq t \leq A$ olacak şekilde herhangi bir t sayısı için $-r \leq \theta \leq 0$ aralığında $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ olarak tanımlanmış fonksiyonu x_t ile gösterelim. x_t fonksiyonu aslında $x(u)$ fonksiyonun bir kesitidir. Yani x_t fonksiyonun değer kümesi $x(u)$ fonksiyonun değer kümesinin bir alt kümesidir.

Şimdi $X(\varphi,t) \in R^n$, her bir $\|\varphi\| \leq H$ olacak şekilde $\varphi \in C([\alpha,\beta],R^n)$ fonksiyonu için tanımlanmış olan bir fonksiyon olsun. Burada $H \geq 0$ ve $t \in [0,\infty)$ olacak şekilde alınmıştır. $\dot{x}(t)$ ile de $x(u)$ fonksiyonunun $u = t$ noktasındaki sağ türevini gösterelim. Bu tanımlamalar altında

$$\dot{x}(t) = X(x_t,t) \tag{4.1}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemini düşünelim.

Tanım 4.1. (Hale, 1977) t_0 pozitif bir sayı olsun ve $\varphi \in C([-r,0],R^n)$ fonksiyonu da $\|\varphi\| \leq H$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi bir $A \geq 0$

sayısı için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $x(t_0,\varphi)$, fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu φ fonksiyonu olan (4.1) denkleminin çözümüdür denir:

(i) $t_0 \le t \le t_0 + A$ olacak şekilde her bir t sayısı için $x_t(t_0,\varphi) \in C([-r,0],R^n)$ fonksiyonu tanımlıdır ve $\|x_t(t_0,\varphi)\| \le H$.

(ii) $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$.

(iii) $x(t_0,\varphi)$ fonksiyonu (4.1) denklemini her bir $t_0 \le t \le t_0 + A$ için sağlar.

Eğer $t_0 = 0$ ise $x(t_0,\varphi)$ fonksiyonu $x(\varphi)$ ile gösterilir. $X(\varphi,t)$ fonksiyonu φ fonksiyonuna göre sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, t değişkenine göre de sürekli ise (4.1) denkleminin çözümü vardır ve bu çözüm her bir φ başlangıç fonksiyonu için tektir. Ayrıca $x(t_0,\varphi)$ fonksiyonu φ fonksiyonuna sürekli olarak bağlıdır.

(4.1) denkleminde, $X(\varphi,t) = f(\varphi)$ fonksiyonu homojen ve toplanabilir ise yani lineer ise denklemimiz sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklemdir. Eğer $f(\varphi)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ise Riesz teoremini kullanarak bu fonksiyonu

$$f(\varphi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\varphi(\theta)$$

formunda ifade edebiliriz. Burada $\eta(\theta)$, elemanları sınırlı değişim fonksiyonu $n \times n$ matrisidir. Bu formülden anlaşılacağı üzere sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklemler kümesi sabit katsayılı lineer fark diferansiyel denklemler kümesini içerir.Bu kümedeki denklemleri aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k x(t - \tau_k)\,,\ \tau_k \ge 0$$

4.2. Sabit Katsayılı Lineer Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Temel özellikleri

Sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{4.2}$$

formunda ifade edilir. Burada f fonksiyonu $C([-r,0],R^n)$ fonksiyon uzayından R^n tanımlı lineer fonksiyondur. Bu şekilde verilmiş olan herhangi bir $f(\varphi)$ fonksiyonunu uygun bir $\eta(\theta)$ sınırlı değişim fonksiyonu kullanarak

$$f(\varphi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\varphi(\theta) \tag{4.3}$$

formunda yazılabilir.

Eğer verilen her bir $\varphi \in C([-r,0],R^n)$ fonksiyonu için $x(\varphi)$ fonksiyonu, φ başlangıç fonksiyonu ile verilmiş olan (4.2) denkleminin tek bir çözümü ise,biz

$$x_t(\varphi) = T(t)\varphi \tag{4.4}$$

ilişkisini sağlayan $C([-r,0],R^n)$ fonksiyon uzayından $C([-r,0],R^n)$ fonksiyon uzayına tanımlı olan $T(t)$ operatörünü tanımlarız. Burada $x_t(\varphi)$ fonksiyonu $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayında $x_t(\varphi)(\theta) = x(\varphi)(t+\theta)$ ilişkisini sağlayan bir fonksiyondur.

Lemma 4.1. (Hale, 1977) (4.4) ilişkisi ile verilen ver her bir $t \geq 0$ için $C([-r,0],R^n)$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlanmış olan $T(t)$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:
(i) $T(t)$ operatörü, $\forall\ t \geq 0$ için sınırlı ve lineer bir operatördür.
(ii) $T(0) = \mathrm{I}$ ve $T(t)$ operatörü $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli bir operatördür yani her bir $t \geq 0$ ve $\varphi \in C([-r,0],R^n)$ için

$$\lim_{\tau \to t} \| T(\tau)\varphi - T(t)\varphi \| = 0$$

koşulunu sağlar.

(iii) $\{T(t), t \geq 0\}$ operatörler ailesi semi-guruptur yani

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall\ t \geq 0,\ s \geq 0$$

koşulunu sağlar.

(iv) $T(t)$ operatörü her bir $t \geq r$ için kompakttır yani $T(t)$ operatörü her bir $t \geq r$ için kapalı sınırlı kümeleri kompakt kümelere götürür.

İspat. (i) $T(t)$ operatörünün lineer olduğu açıktır.Eğer $f(\varphi)$ fonksiyonu sürekli ve lineer ise $|f(\varphi)| \leq L\|\varphi\|$ eşitsizliğini her bir $\varphi \in C([-r,0], R^n)$ için sağlayan bir L sayısı vardır. Verilen herhangi bir sabit $t \geq 0$ değeri için $T(t)$ operatörünün tanımından

$$T(t)\varphi(\theta) = \varphi(t+\theta),\ t+\theta \leq 0 \tag{4.5}$$

$$T(t)\varphi(\theta) = \varphi(0) + \int_0^{t+\theta} f(T(\tau)\varphi)d\tau,\ t+\theta \geq 0,\ -r \leq \theta \leq 0 \tag{4.6}$$

olduğu açıktır. $|f(\varphi)| \leq L\|\varphi\|$ olduğu için

$$|f(\varphi)| \leq e^{Lt}\|\varphi\|,\ t \geq 0,\ \varphi \in C([-r,0], R^n)$$

eşitsizliğini, Gronwall eşitsizliğini kullanarak elde ederiz.

(ii) $T(t)$ operatörünün sürekli ve $T(0) = \mathrm{I}$ olduğu (4.5) ve (i) den görülmektedir:

$T(0)\varphi(\theta) = \varphi(\theta) \Rightarrow T(0) = \mathrm{I}$,

(iii) $x_{t+s}(\varphi) = T(t+s)\varphi \Leftrightarrow x_t(x_s(\varphi)) = T(t)(T(s)\varphi) \Leftrightarrow T(t+s) = T(t)(T(s), \forall t, s > 0$

(iv) S kümesini $S = \{\varphi \in C([-r,0], R^n) \,|\, \|\varphi\| \leq R\}$ olarak tanımlarsak her $t \geq r$ için

$$T(t)S \subset S_1 = \{\psi \in C([-r,0], R^n) \,|\, \dot{\psi} \in C([-r,0], R^n), \|\psi\| \leq e^{Lt}, \|\dot{\psi}\| \leq Le^{Lt}R\},$$

olduğunu gözlemleriz. S_1 kümesi kompakt ve $T(t)$ operatörü sürekli olduğundan $T(t)$ operatörünün kompakt olduğu sonucuna varılır.

Bir B Banach uzayından kendisine tanımlı olan semi-gurup operatörü $T(t)$ için, bu operatörün tanımlayıcısı A aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir:

$$A\varphi = \lim_{t \to o^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi - \varphi]$$

Bu bağıntı yukarıdaki limitin var olduğu her bir φ için tanımlanmıştır. Bu limit B Banach uzayında norma göre yakınsaklığın önemini vurgular.

Bir B Banach uzayından kendisine tanımlı olan herhangi bir T operatörü için "resolvent" küme $\rho(T)$ kompleks düzlemdeki öyle λ değerlerinden oluşmuştur ki $\lambda I - T$ operatörünün tanım kümesi yoğun olan bir sınırlı tersi vardır. Kompleks düzlemde $\rho(T)$ kümesinin tamlayan kümeye T operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. Bir operatörün spektrumunu 3 ayrı sınıftan oluşur: Kalan spektrum (Residual spectrum) $R\sigma(T)$, Sürekli spektrum (Continuous spectrum) $C\sigma(T)$ ve Nokta spektrumu (Point spectrum) $P\sigma(T)$. Kalan spektrum $R\sigma(T)$ öyle λ değerlerinden oluşur ki $(\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$ operatörünün tanım kümesi $D(\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$, B Banach uzayında yoğun değildir. Sürekli spektrum $C\sigma(T)$ ise öyle λ değerlerinden oluşur ki $(\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$ operatörünün tanım kümesi $D(\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$, B Banach uzayında yoğundur ama kendisi sınırlı değildir. Son olarak Nokta spektrumu $P\sigma(T)$ öyle λ değerlerinden oluşur ki $(\lambda \mathrm{I} - T)$ operatörünün ters operatörü yoktur. Nokta spektrumu $P\sigma(T)$ kümesindeki her bir λ değerine T operatörünün öz-değeri denir ve $(\lambda \mathrm{I} - T)\varphi = 0$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı her hangi bir φ fonksiyonuna da bu λ öz-değerine karşılık gelen öz-fonksiyon adı verilir.

Şimdi $\sigma(T(t))$ ve $\sigma(A)$ kümelerinin yapılarını ve bu yapılar arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Bu sayede $T(t)$ operatörüne hangi anlamda e^{At} operatörü ile yaklaşım yapabileceğimizi analiz edeceğiz. $r = 0$ durumunda yani gecikme teriminin olmaması durumunda (4.2) denklemi adi diferansiyel denklem olup $f(\varphi) = A\varphi(0)$ olduğundan $T(t)$ operatörü e^{At} olarak bulunur.

Lemma 4.2. (Hale, 1977) Eğer her bir $t \geq 0$ için $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayından $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayına tanımlanmış olan $T(t)$ semi-gurup operatörleri sürekli ise $T(t)$ operatörünün tanımlayıcısı (infinitesimal generator) A operatörünün tanım kümesi $D(A)$, $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayında yoğundur ve değer kümesi $R(A)$ $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayındadır. Ayrıca her bir $\varphi \in D(A)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi \tag{4.7}$$

Şimdi en küçük tanımlayıcı olan A operatörü için (4.2) sistemi cinsinden özel bir formül elde edelim. $x(\phi)$ (4.2) sistemini sağladığı için $T(t)\varphi$ operatörünün (4.5) ve (4.6) eşitliklerini sağladığı $T(t)$ operatörünün tanımından açıktır. Sonuç olarak $-r \leq \theta \leq 0$ kapalı aralığındaki θ değeri için

$$\lim_{t \to o^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi(\theta) - \varphi(\theta)] = \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$$

eşitliğini elde ederiz. $\theta = 0$ durumunda ise

$$\lim_{t \to o^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi(0) - \varphi(0)] = \lim_{t \to 0^+}[\frac{1}{t}\int_0^t f(x_\tau)d\tau]$$

$$= f(x_0) = f(\varphi) = \int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]\varphi(\theta)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$A\varphi = \lim_{t \to o^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi - \varphi]$$

tanımı, $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayında norm yakınsaklığının önemini ortaya çıkarır. $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayındaki norm tanımına göre bu yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır ve $A\varphi \in C([-r,0],R^n)$ sonucunu ima eder. Bu sonuçtan da $A\varphi(0) = f(\varphi) = \dfrac{d\varphi(0)}{d\theta}$ sonucuna varılır. Elde edilen bu sonuçları aşağıdaki lemma ile özetleyelim.

Lemma 4.3. (Hale ve Lunel, 1993) Eğer $C([-r,0],R^n)$ Banach uzayında $T(t)$, $t \geq 0$, operatörler ailesi (4.4) eşitliği ile tanımlanmış ise $T(t)$ operatörünün en küçük tanımlayıcısı olan A operatörü aşağıdaki formda tanımlanır:

$$A\varphi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta}, & -r \leq \theta \leq 0, \\ \dfrac{d\varphi(0)}{d\theta} = \int\limits_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]d\varphi(\theta) = f(\varphi), & \theta = 0 \end{cases}$$

Lemma 4.4. (Hale ve Lunel, 1993) Her bir $t \geq r$ için $\sigma(T(t))$ spektrum kümesi kompleks düzlemde sayılabilir kompakt bir kümedir. $\sigma(T(t))$ spektrum kümesinin tek yığılma noktası 0 noktasıdır ve her bir $\mu \in \sigma(T(t))$ için $\mu \neq 0$ ise $\mu \in P\sigma(T(t))$.

$N(T)$ ile T operatörünün çekirdeğini, yani $T\varphi = 0$ koşulunu sağlayan φ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim.

Lemma 4.5. (Hale, 1977) Her bir $t \geq r$ için $\mu = \mu(t)$, $\mu \neq 0$ ve $P\sigma(T(t))$ nokta spektrumunun elemanı olsun. Bu durumda her bir pozitif k sayısı için $\mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^k$ kümesi sonlu boyutludur ve $k, l \geq n_0$ sayıları için

$$\mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^k = \mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^l$$

eşitliğini sağlayan en küçük bir n_0 tamsayısı vardır.

Eğer $\mathrm{M}_\mu(T(t)) = \mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^{n_0}$ ise

$$T(t)\mathrm{M}_\mu(T(t)) \subset \mathrm{M}_\mu(T(t))$$

bağlantısı sağlanır.

Lemma 4.6. (Hale, 1977) Her bir $t \geq r$ için $P\sigma(T(t))$ nokta spektrumu için $P\sigma(T(t)) = \exp[tP\sigma(A)]$ bağlantısı sağlanır ve dahası $\{0\}$ elemanını da içerebilir. Bunu daha da açarsak eğer $\mu = \mu(t)$ herhangi sabit bir t değeri için $P\sigma(T(t))$ kümesinin bir elemanı ise ve $\mu \neq 0$ ise $P\sigma(A)$ kümesinde öyle bir λ değeri vardır ki $e^{\lambda t} = \mu$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $\mathrm{N}(\mu \mathrm{I} - T(t))^k$, $\mathrm{N}(\lambda_n \mathrm{I} - A)^k$ lineer bağımsız manifoldlarının lineer genişlemesidir.

B Banach uzayı üzerinde tanımlanan herhangi bir B operatörü ve $\lambda \in P\sigma(B)$ için $M_\lambda(B)$ uzayı, B Banach uzayının $\lambda \mathrm{I} - B$ operatörünün kuvvetlerinin çekirdeklerinin birleşimidir.

Lemma 4.7. (Hale, 1977) Eğer A operatörü, (4.4) denklemi ile tanımlanmış olan operatörler ailesinin en küçük tanımlayıcısı ise ve $\lambda \in P\sigma(A)$ ise $M_\lambda(A)$, $C([-r,0], R^n)$ Banach uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayıdır. Ayrıca öyle bir β gerçel sayısı vardır ki $\mathrm{Re}(\lambda) \le \beta$ eşitsizliği her bir $\lambda \in P\sigma(A)$ için sağlanır ve verilen herhangi bir γ gerçel sayısı için $P\sigma(A)$ kümesinde $\gamma \le \mathrm{Re}\lambda$ eşitsizliğini sağlayan sonlu sayıda λ elemanı vardır.

Bu lemma, lemma 4.4. ve lemma 4.6`nın bir sonucudur.

$T(t)$ operatörünün ve onun en küçük tanımlayıcısı A operatörünün nokta spektrumu arasındaki özel ilişki lemma 4.6. da verilmiştir. Aslında 0 noktası hariç $P\sigma(T(t))$ nokta spektrumu tamamen $P\sigma(A)$ spektrumu tarafından oluşturulmuştur. Bu yüzden $P\sigma(A)$ nokta spektrumunun açık bir ifadesini oluşturacağız. Eğer $\lambda \in P\sigma(A)$ ise

$$A\varphi = \lambda\varphi$$

denklemini sağlayan sıfırdan farklı bir $\varphi \in C([-r,0], R^n)$ fonksiyonu vardır. A operatörünün tanımını kullanarak yukarıdaki denklem

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta} = \lambda\varphi(\theta), & -r \le \theta \le 0, \\ \dfrac{d\varphi(0)}{d\theta} = \displaystyle\int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] d\varphi(\theta), & \theta = 0 \end{cases}$$

formunda yazılır. Yukarıdaki ilk denklemden $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta} b$, $-r \le \theta \le 0$ çözümü elde edilir. Buradaki b vektörü

$\Delta(\lambda)b = 0$

koşulunu sağlar ve $\Delta(\lambda)$ yukarıdaki ikinci denklemden

$$\Delta(\lambda) = (\lambda\mathrm{I} - \int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]e^{\lambda\theta})$$

olarak bulunur. Şimdi bu sonuçları aşağıdaki lemma ile özetleyelim:

Lemma 4.8. (Hale, 1977) A operatörünün nokta spektrumu $P\sigma(A) = \{\lambda | \det\Delta(\lambda) = 0\}$ olarak tanımlanır. (4.2) denkleminin karakteristik denkleminin köklerinin, $\det\Delta(\lambda) = 0$, gerçel kısmı üstten sınırlıdır ve verilen sabit bir sayı için $P\sigma(A)$ kümesinde gerçel kısmı bu sabitten büyük olan sonlu sayıda elemanı vardır.

(4.2) denkleminin karakteristik denklemi, adi diferansiyel denklemin karakteristik denklemini bulmak için kullandığımız yöntemle bulunur: (4.2) denkleminin $x(t) = e^{\lambda t}b$ formunda çözümü olduğu kabul edilir ve denklemde yerine konulur. Karakteristik denklemin kökleri (4.2) denkleminin çözümlerinin davranışları hakkında bilgi vereceğinden bunların doğal yapısını analiz etmek son derece önemlidir. Bu sayede denklemin çözümlerini bulmadan bu çözümlerin davranışlarının nasıl olacağını tespit edebiliriz.

Eğer $\lambda \in P\sigma(A)$ ise her bir k değeri için $\mathrm{N}(\lambda\mathrm{I} - A)^k$ alt-uzayının sonlu boyutlu olduğu ve her bir $k \geq n_0$ tamsayısı için $\mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^k = \mathrm{N}(\mu\mathrm{I} - T(t))^{n_0}$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısının olduğu lemma 4.7. de belirtilmiştir.

$M_\lambda(A) = N(A - \lambda\mathrm{I})^{n_0}$

sonlu boyutlu olduğu için, kabul edelim ki $\dim(M_\lambda(A)) = \mathrm{d}$, bu durumda $M_\lambda(A)$ alt-uzayının $\varphi_1, ..., \varphi_d$ olacak şekilde baz elemanları mevcuttur. Ayrıca $AM_\lambda(A) \subset M_\lambda(A)$ olduğu için

$A\Phi = \Phi B$, $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_d)$

denklemini sağlayan dxd boyutunda sabit bir B matrisi vardır. Bu matrisin bütün öz-değerleri λ öz-değerine eşittir.

Buradaki en önemli noktalardan biri çözümün doğal yapısının $T(t)\Phi$ ile verildiğidir. Şimdi bunu analiz edelim. Lemma 4.2 yi kullanarak

$$\frac{d}{dt}[T(t)\Phi] = T(t)A\Phi = T(t)\Phi B$$

denklemini elde ederiz. Buradan da

$$T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$$

sonucuna varırız. Bu sonuçları aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 4.1. (Hale, 1977) $T(t), t \geq 0$, (4.4) ile tanımlanmış olan sürekli semigurup operatörleri ve A operatörü de $T(t)$ operatörlerinin en küçük tanımlayıcısı olsun. Farz edelim $\lambda \in P\sigma(A)$ ve $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_d)$ de $M_\lambda(A)$ alt-uzayının baz elemanları olsun. Eğer a sabit bir vektör ise bütün öz-değerleri λ olan sabit bir B vektörü için $T(t)\Phi a = \Phi e^{Bt} a$ olarak tanımlanır.Eğer sabit bir t değeri için $\mu = \mu(t) \neq 0$, $P\sigma(T(t))$ nokta spektrumun elemanı ise $P\sigma(A)$ nokta spektrumunda $e^{\lambda_i t} = \mu$ denklemini sağlayan $\{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ elemanları vardır, ve $\Phi = (\Phi_1,...,\Phi_d)$ dir. Burada her bir Φ_j, boyutu d_j olan $M_{\lambda_j}(A)$ alt-uzayının baz elemanlarından oluşan bir matrisi temsil etsin. Herhangi bir $\varphi \in M_\mu(T(t))$ elemanı için $\varphi = \Phi a$ olacak şekilde boyutu $d = d_1 + ... + d_p$ olan sabit bir a vektörü vardır ve $T(t)$ operatörünün $\varphi \in M_\mu(T(t))$ üzerindeki hareketi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$T(t)\varphi = \Phi e^{Bt} a \tag{4.8}$$

burada B matrisi dxd boyutunda sabit bir matrisidir ve $A\Phi_j = \Phi_j B_j$ eşitliğini sağlayan B_j matrisleri cinsinden $B = diag(B_1,...,B_p)$ olarak tanımlanır.

Bu teorem göstermektedir ki $M_{\mu}(T(t))$ alt uzayı üzerinde (4.2) fonksiyonel diferansiyel denkleminin yapısı sabit katsayılı adi diferansiyel denklemin yapısı ile aynıdır. (4.7) eşitliğindeki B matrisinin boyutu $\mu(t) \in P\sigma(T(t))$ öz-değerinin çarpanları ile belirlendiğinden B matrisinin boyutu ile (4.2) fonksiyonel diferansiyel denkleminin boyutu arasında bir ilişki olmayabilir. $\mu(t) \in P\sigma(T(t))$ öz-değerlerinin çarpanları t değişkenine bağlı olarak değişmektedir. Bunu bir örnek ile göstermek istersek

$$\dot{x} = Ax\,,\ A = \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$$

adi diferansiyel denklemini düşünelim. Bu denklem için $T(t)$ operatörünü $T(t) = e^{At}$ ve nokta spektrumunu $P\sigma(T(t)) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i t} & e^{-2\pi i t} \end{pmatrix}$ olduğu açıktır. Her bir $t = n$ tamsayısı için nokta spektrumu $P\sigma(T(n)) = \{1\}$ olur ama diğer durumlarda $P\sigma(T(t))$ kümesi iki farklı eleman içerir. Diğer taraftan $P\sigma(A)$ kümesinin elemanlarının çarpanları değişmediğinden (4.2) fonksiyonel diferansiyel denkleminin çözümlerini bulmak için $M_{\lambda}(A)$ alt-uzayını tanımlayabiliriz

Kısaca özetlersek (4.2) fonksiyonel diferansiyel denklemini $M_{\lambda}(A)$ alt-uzayı üzerinde adi diferansiyel denklemler sistemine dönüşüyor ve bu alt-uzayda denklemimizin çözümleri $T(t)$ operatörünün davranışını belirliyor.

BÖLÜM 5. LYAPUNOV-SCHMİDT YÖNTEMİ İLE ELDE EDİLEN İNİDRGENMİŞ BİFURKASYON DENKLEMİ

5.1 Giriş

Zaman gecikmeleri, biyolojik sistemlerin doğal bir elemanıdır. Zaman gecikmelerini matematiksel modellere koymamızın, kendini yenileme zamanı, gelişim zamanı, reaksiyon zamanı gibi bir çok nedeni vardır. Bu nedenle bazı uygulamalarda adi diferansiyel denklemlerin yerine fonksiyonel diferansiyel denklemleri kullanmak daha gerçekçi bir yaklaşımdır. GDD, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir türüdür. GDD de zamana göre türev, değişkenin o andaki değerine ve geçmişteki değerine bağlı olabilir.

Hopf Bifurkasyon teoremi, adi diferansiyel denklemlerle veya, GDD ile verilmiş olan sistemin parametresi değişirken denge noktasından bifurke eden periyodik çözümleri incelemek için kullanılır. Bizim amacımız bu denge noktası civarında oluşan periyodik çözümlerin küçük periyodik tedirginlikler altında hala var olup olmadığını analiz etmektir.

Fonksiyonel diferansiyel denklemler teorisi de GDD'in analizini yapmak için yeterince geliştirilmiştir ((Hale, 1977), (Hale, 1979), (Hassard ve Kazarinoff, 1983)). Varsayalım $r_0 \geq 0$ bir sayı olsun ve R^n, $\|.\|$ normu ile tanımlanmış n-boyutlu gerçel lineer vektör uzayını temsil etsin. $C([-r_0,0],R^n)$ ile $[-r_0,0]$ kapalı aralığından R^n'e tanımlanmış sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayını gösterelim. Bu uzay üzerinde tanımlanmış olan normu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\|x\| = \mathrm{Sup}\ \{|x(\theta)|:\theta \in [-r_0,0]\}$$

Bu Banach uzayı üzerindeki sürekli fonksiyonları $x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -r_0 \leq \theta \leq 0$ olarak tanımlayalım. Bu tanıma göre, her bir $t \geq 0$ parametresi için sürekli bir fonksiyon elde ederiz. Bu tanımlamalardan sonra, GDD'in en genel halini aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\dot{x}(t) = F(x_t) \tag{5.1}$$

Burada $F : C([-r_0, 0], R^n) \rightarrow R^n$ bir sürekli operatördür. (5.1) denkleminin denge noktası $c \in C([-r_0, 0], R^n)$:

$$F(c) = 0 \tag{5.2}$$

koşulunu sağlayan sabit bir fonksiyondur. Kolaylık açısından $c = 0$ sabit fonksiyonunu denge noktası olarak alıyoruz. Bu çalışmada, (5.1) denkleminin çözümlerinin davranışlarını, başlangıç durumunun küçük bir komşuluğunda inceleyeceğiz yani lokal analiz yapacağız. Bunu yapmak için aşağıdaki lineer operatörü tanımlayalım:

$$L\Phi = F'(0)\Phi \tag{5.3}$$

burada $F'(0)$, $F(x_t)$ operatörünün $x_t = 0$ noktasındaki Frechet türevidir. (5.3) deki lineer fonksiyonel Riesz teoremi kullanılarak aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ((Hale, 1977), (Hale ve Lunel, 1993)):

$$L(x_t) = \int_{-r_0}^{0} d\eta(\theta) x_t(\theta) \tag{5.4}$$

burada $\eta(\theta)$ sınırlı değişim fonksiyonudur ve $\eta(0) = 0$ normalleştirme koşuludur. $L(x_t)$ lineer operatörünün karakteristik matrisi de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\Delta(\alpha) = \alpha I - \int_{-r_0}^{0} e^{\alpha\theta} d\eta(\theta) \tag{5.5}$$

Karakteristik matrisin determinantını sıfıra eşitleyip çözdüğümüz zaman bunun sonsuz sayıda çözümünün olduğunu görürüz. Bu da sonsuz boyutlu uzay üzerinde çalışmamız gerektiğini gösterir.

Herhangi bir $x_0(\theta)=\Psi(\theta)\in C([-r_0,0],R^n)$ başlangıç koşulu için GDD`in çözümü $x_t$ başlangıç koşulunu ve (5.1) denklemini her bir $t\geq 0$ için sağlayan ve sürekli türeve sahip olan bir fonksiyondur. GDD`in periyodik çözümü ise $C([-r_0,0],R^n)$ Banach uzayında kapalı bir eğridir.

5.2. Problemin Tanıtımı ve Otonom Sistem olarak Düzenlenmesi

Üzerinde çalışacağımız matematiksel model, ikinci basamaktan GDD olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}&\ddot{X}(t)+A(\alpha)\dot{X}(t)+B(\alpha)X(t)+C(\alpha)X(t-r_0-\varepsilon\rho(t))\\&=f(\alpha,X(t),X(t-r_0-\varepsilon\rho(t)))\end{aligned}\tag{5.6}$$

burada t zaman değişkeni, α ise bifurkasyon parametresidir.

Yukarıdaki matematiksel model makinenin kesici aletinin titreşimlerinin dinamiğini temsil etmektedir. Kesici aletin kesme hızı periyodik olarak değiştirilmektedir. Bu değişimi matematiksel modelimizde $\rho(t)=\mu Cos(\upsilon t)$ olarak almaktayız. Kesici aletin titreşimleri kesme kalınlığına dolayısı ile kesici aletin bir önceki kesmede oluşturduğu yüzeye bağlı olduğundan matematiksel modelimiz gecikmeli diferansiyel denklem olarak ifade edilmiştir. Bu matematiksel model Hanna ve Tobias tarafından verilmiş olan bir modeldir (Hanna ve Tobias, 1974).

$X_1(t)=X(t)$ ve $X_2(t)=\dot{X}(t)$ değişkenlerini tanımlayarak (5.6) denklemini birinci basamaktan bir denklem sistemi olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\dot{X}_1(t)\\ \dot{X}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -B(\alpha) & -A(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\end{pmatrix}+\\&\begin{pmatrix}0 & 0\\ -C(\alpha) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(t-r_0-\varepsilon\rho(t))\\ X_2(t-r_0-\varepsilon\rho(t))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.7}$$

burada gecikme terimi olan $\rho(t)$, zamana bağlı olarak $\mu Cos(\upsilon t)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu terimden kurtulmak için

$X_3(t) = \mu Cos(\upsilon t)$, $X_4(t) = \mu Sin(\upsilon t)$

durum değişkenlerini tanımlayalım. Bu durumda ikisi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\dot{X}_3(t) = -\upsilon X_4(t),\ \ \dot{X}_4(t) = \upsilon X_3(t) \tag{5.8}$$

$X_3(t)$ ve $X_4(t)$ durum değişkenlerini (5.7) sistemine ekleyerek otonom yani zaman değişkenini açık olarak içermeyen bir sistem elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{X}_3(t) \\ \dot{X}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\upsilon \\ 0 & 0 & \upsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t - r_0 - \varepsilon X_3(t)) \\ X_2(t - r_0 - \varepsilon X_3(t)) \\ X_3(t - r_0 - \varepsilon X_3(t)) \\ X_4(t - r_0 - \varepsilon X_3(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Burada $|\varepsilon| \leq 1$ olacak şekilde alınmıştır. Yukarıdaki sistem Taylor seri açılımı kullanılarak sabit gecikme terimli bir sistem haline getirilir. εX_3 terimi ε terimi yeterince küçük alınarak küçültülebileceği için Taylor seri açılımı sabit gecikmeli denklem elde etmek için kullanılabilir. Taylor seri açılımı kullanılarak $X(t - r_0 - \varepsilon X_3(t))$ terimi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$X(t - r_0 - \varepsilon X_3(t)) = X(t - r_0) - \varepsilon \dot{X}(t - r_0) X_3(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \ddot{X}(t - r_0) X_3{}^2(t) + h.o.t.$$

$X(t - r_0 - \varepsilon X_3(t))$ teriminin yukarıdaki Taylor seri açılımı (5.9)'da yerine yazılarak sistem aşağıdaki gibi sabit gecikme terimli sistem haline getirilir:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{X}_3(t) \\ \dot{X}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-r_0) \\ X_2(t-r_0) \\ X_3(t-r_0) \\ X_4(t-r_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Burada $g_1 = 0$ ve g_2 ise Ek-A da açık olarak verilmiştir. Yukarıdaki sistem sürekli fonksiyonların oluşturduğu $C([-r,0],R^4)$ Banach uzayında fonksiyonel diferansiyel denklemler olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\dot{X}_t(\theta) = A(\alpha)X_t(\theta) + \begin{cases} 0, & -r_0 \le \theta < 0, \\ \underline{g}, & \theta = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

burada $X_t(\theta)$ ve $\underline{g}$ vektörleri aşağıdaki formlarda tanımlanırlar:

$$X_t(\theta) = \begin{pmatrix} X_{1t}(\theta) \\ X_{2t}(\theta) \\ X_{3t}(\theta) \\ X_{4t}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A(\alpha)$ operatörü aşağıdaki formda tanımlanır:

$$A(\alpha)X_t(\theta) = \begin{cases} \dfrac{dX_t(\theta)}{d\theta}, & -r_0 \le \theta < 0, \\ L(\alpha)X_t(\theta) = \displaystyle\int_{-r_0}^{0} [d\eta(\alpha,\theta)]X_t(\theta), & \theta = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Burada $\eta(\alpha,\theta)$ sınırlı değişim fonksiyonu matris değerli bir fonksiyon olup açık hali Ek-B kısmında verilmiştir. Lineer olmayan terimlerin kararsızlık yaratacak değişimlerinin sistem üzerindeki etkisini analiz edeceğiz. Burada $L(\alpha)$ sürekli lineer bir operatör olup Banach uzayı $C([-r,0],R^4)$'dan R^4'de tanımlanmıştır. Riesz teoremini kullanarak $L(\alpha)$ sürekli lineer operatörünü sınırlı değişim fonksiyonu $\eta(\alpha,\theta)$ cinsinden yazabiliriz.

Kabul 5.1. (Rezonanssız Durum) : Periyodik tedirginlik olmadığı zaman $(\varepsilon = 0)$, GDD, (5.11) sistemi kritik parametre değeri α=0'da Hopf bifurkasyonuna sahip olur. Burada sistemin sanal eksen üzerinde $\pm i$ öz-değerlerinden başka öz-değeri yoktur. Periyodik tedirginlik olduğu zaman ise sistemin sanal eksen üzerinde rezonans olmayan $\pm i$ ve $\pm \nu i$ öz-değerlerinden başka öz-değer yoktur. Yani α =0'da, sanal eksen üzerinde iki çift öz-değer vardır ve bunlar arasında $1/\nu = k$ olacak şekilde bir k rasyonel sayısı yoktur.

$\alpha_c = 0$ kritik değerinde $A(\alpha)$ operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$A(0)X_t(\theta) = \begin{cases} \dfrac{dX_t(\theta^+)}{d\theta}, & -r_0 \le \theta < 0, \\ LX_t(\theta) = \displaystyle\int_{-r_0}^{0} [d\eta(\theta)]X_t(\theta), & \theta = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

$A(0)$ operatörünün eşlenik operatörü $A^*(0)$ operatörü ise aşağıdaki formda tanımlanır:

$$A^*(0)\underline{\psi}(\tau) = \begin{cases} -\dfrac{d\underline{\psi}(\tau)}{d\theta}, & 0 \le \tau < r_0, \\ L^*\underline{\psi}(\tau) = \displaystyle\int_{-r_0}^{0} \left[d\eta(-\tau)\right]^T \underline{\psi}(-\tau), & \tau = 0 \end{cases}$$

Burada Banach uzayı $C([0,r_0],R^4)$ den R^4 tanımlanmış olan L^* operatörü, L sürekli lineer operatörünün eşlenik operatörüdür. $A^*(\alpha)$ eşlenik operatörünü belirleyen bilineer form aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\left\langle \underline{\psi}_i, \underline{\psi}_j \right\rangle = \left(\underline{\psi}_i(0), \underline{\psi}_i(0)\right) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \underline{\psi}_i^{\,T}(\xi-\theta)\left[d\eta(\theta)\right]\underline{\psi}_j(\xi)d\xi \tag{5.14}$$

Burada (.,.) Hermite iç çarpımını temsil eder. $[A(0)-iI]$ ve $[A(0)-\nu i]$ operatörlerinin çekirdeğinin baz elemanları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos(\nu\theta)\\ \sin(\nu\theta)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sin(\nu\theta)\\ -\cos(\nu\theta)\end{pmatrix}\right\}$$

Hopf bifurkasyonun olduğu sistemin denge noktasının küçük bir komşuluğunda sistemin periyodik çözümlerinin olduğu bilinmektedir. Bu çalışmanın amacı bu periyodik çözümlerin küçük periyodik tedirginlikler altında hala var olup olmadığını analiz etmektir. Bu amaçtan dolayı biz çalışacağımız uzayı 2π periyotlu sürekli fonksiyonların ve $2\pi/\nu$ periyotlu sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzayların direk toplamı olan uzay olarak alacağız yani $C_{2\pi}\oplus C_{2\pi/\nu}$ uzayı üzerinde sistemi analiz edeceğiz. Buradaki en önemli nokta ise rezonans olmama durumudur. Eğer $\pm i$ ve $\pm \nu i$ öz-değerleri rezonans olsalar idi yani bunlar arasında $1/\nu = k$ ilişkisini sağlayacak bir k rasyonel sayısı olsa idi o zaman $C_{2\pi}\oplus C_{2\pi/\nu}$ uzayı yerine $C_{2\pi}$ uzayını alabilirdik çünkü bu durumda $C_{2\pi/\nu}$ uzayı $C_{2\pi}$ uzayının bir alt uzayı olacaktı. Biz burada Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu kullanarak indirgenmiş bifurkasyon denklem sistemini elde ederek bu sistemi sıfır yapan çözümleri arayacağız. Bu çözümler bizim periyodik tedirginlik altında, orijinal sistemimizin denge noktası civarındaki periyodik çözümleri olacaktır.

5.3. Lyapunov-Schmidt İndirgeme Metodu

Sistemin denge noktası civarında periyodik ve yarı-lineer periyodik çözümlerini aradığımız için Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu kullanacağız. Bu metot bir denge noktasından bifurke eden periyodik çözümleri analiz etmek için kullanılan en uygun metottur. Bifurkasyon parametresi α değiştikçe periyodik çözümlerin periyodikliği de değişeceğinden β yardımcı parametresini kullanarak periyodikliği sabit tutabiliriz. Sistemimizin sadece ilk iki denklemi α bifurkasyon parametresine bağlı olduğu için genelliği bozmadan β yardımcı parametresini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\beta = \begin{cases} \beta, & i = 1,2, \\ 0, & i = 3,4, \end{cases}$$

Burada i parametresi $X_t(\theta)$ vektörünün bileşen numarasını gösterir. Yardımcı β parametresine bağlı olarak zaman değişkenini aşağıdaki gibi ölçeklendirebiliriz:

$$s = \begin{cases} s_1 := (1+\beta)t, & i = 1,2, \\ s_2 := t, & i = 3,4, \end{cases}$$

Burada β parametresi $|\beta| < 1$ eşitsizliğini sağlayan ve negatif veya pozitif olabilen küçük bir parametredir. Eğer β parametresi negatif ise s_1 değişkeni yavaş zaman değişkeni olur ve eğer β parametresi pozitifse s_1 değişkeni hızlı zaman değişkeni olur. Bu ölçeklendirme altında denklemimiz aşağıdaki formda yazılabilir:

$$(1+\beta)\frac{du_{s,\beta}(\theta)}{ds} = A(\alpha)u_{s,\beta}(\theta) + R(u_{s,\beta}(\theta),\alpha,\varepsilon) \tag{5.15}$$

burada $u_{s,\beta}(\theta) \overset{\text{def}}{=} X(s + (1+\beta)\theta/(1+\beta))$ ve

$$R(u_{s,\beta}(\theta),\alpha) = \begin{cases} F, & \theta = 0, \\ \overline{\theta}, & -r_0 \le \theta < 0. \end{cases}$$

olarak tanımlanırlar. Ayrıca $F = \begin{pmatrix}0 & \bar{f} & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ ve $\overline{\theta} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ olarak tanımlanır. Şimdi $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ fonksiyon uzaylarını açık olarak tanımlayalım:

$C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v} = \{ f : R^4 \to R^4; \quad f = f_1 + f_2 \quad f_1$ ve f_2, 2π ve $\dfrac{2\pi}{\nu}$ periyotlu sürekli fonksiyonlar$\}$

ve

$C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} = \{ f \in C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}; \quad f$ sürekli diferansiyellenebilir$\}$.

Bu uzayların normları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\| = \sup_s |u(s)|, \quad \text{ve} \qquad \|u\|_1 = \|u\| + \left\|\frac{du}{ds}\right\|$$

$C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ uzayları bu normlar altında Banach uzaylardır.

Şimdi lineer olmayan $N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in)$ operatörünü tanımlayalım:

$$N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in) = -(1+\beta)\frac{du_{s,\beta}(\theta)}{ds} + F(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in)$$

burada $F(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in) = A(\alpha)u_{s,\beta}(\theta) + R(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \varepsilon)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda (5.15) denklemimizi $N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in)$ operatörü cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in) \overset{\text{def}}{=} 0, \quad u \in C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} \tag{5.16}$$

(5.16) operatör denkleminin $\alpha = \beta = 0$ da lineer kısmı aşağıdaki gibidir:

$$J(u_{s,\beta}(\theta)) \overset{\text{def}}{=} -\frac{du_{s,\beta}(\theta)}{ds} + A(0)u_{s,\beta}(\theta) \tag{5.17}$$

Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu uygulayabilmek için $J(u_{s,\beta}(\theta)) : C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} \to C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ sınırlı lineer operatörünün Fredholm operatörü olması gerekir. Bu operatörün çekirdeği sonlu boyutlu, değer kümesi kapalı ve değer kümesinin tamlayanı sonlu boyutlu olduğundan, $J(u_{s,\beta}(\theta))$ operatörü indisi sıfır olan Fredholm operatörüdür.

$J(u_{s,\beta}(\theta))$ operatörünün $J^*(u_{s,\beta}(\theta))$ eşlenik operatörünü hesaplayabilmek için $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ Banach uzayları arasında bir bilineer form tanımlamamız gerekiyor. Bu bilineer formu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\langle\langle .,. \rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{v}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/v} \langle .,. \rangle \, ds_2 \, ds_1$$

Bu bilineer form altında $J^*: C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} \to C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ eşlenik operatörü aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$J^*(u_{s,\beta}(\theta)) = -\frac{du_{s,\beta}(\theta)}{ds} - A^*(0)u_{s,\beta}(\theta)$$

$J(u_{s,\beta}(\theta))$ operatörü Fredholm operatörü olduğundan, bu operatörün değer kümesi ile eşlenik operatörün çekirdeği arasındaki ilişki $R(J) = N^{\perp}(J^*)$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $N(J) \cap R(J) = \emptyset$ ilişkisi de $J(u_{s,\beta}(\theta))$ operatörünün Fredholm operatörü olması ile açıklanır. Bu ilişkiler $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ Banach uzaylarının ayrık alt uzayların direk toplamı biçiminde yazılmasında yardımcı olurlar. Daha sonra bu ayrık uzayların üzerine Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunda kullanmak üzere projeksiyonlar tanımlarız.

$J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün çekirdeğinin baz elemanlarını $\overline{\phi}_1 = \overline{\omega}_1(\theta + s_1), \overline{\overline{\phi}}_1 = \overline{\overline{\omega}}_1(\theta + s_1), \overline{\phi}_2 = \overline{\omega}_2(\theta + s_2), \overline{\overline{\phi}}_2 = \overline{\overline{\omega}}_2(\theta + s_2)$ şeklinde, $J^*(u_{s,\beta}(\theta))$ eşlenik operatörünün çekirdeği baz elemanlarını ise $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\overline{\psi}}_1, \overline{\overline{\psi}}_2$ olarak tanımlayalım. Eğer $h(s) \in C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ fonksiyonu $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün tanım alanında ise o zaman $R(J) = N^{\perp}(J^*)$ ilişkisinden $\langle\langle h(s), \overline{\psi}_i \rangle\rangle = 0\,, \langle\langle h(s), \overline{\overline{\psi}}_i \rangle\rangle = 0 \;\; i = 1,2$ koşullarını elde ederiz. Ayrıca bu baz elemanlarını $\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle = I$ olacak şekilde düzenleyebiliriz. Burada $\phi = \left[\overline{\phi}_1, \overline{\overline{\phi}}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\overline{\phi}}_2\right]$ ve $\psi = \left[\overline{\psi}_1, \overline{\overline{\psi}}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\overline{\psi}}_2\right]$ dır. Dolayısıyla $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ Banach uzayını aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v} = N(J) \oplus R(J) \tag{5.18}$$

Burada $R(J) = R_1(J) \oplus R_2(J)$ ve $R_1(J) \subseteq C_{2\pi}$, $R_2(J) \subseteq C_{2\pi/v}$ dir. $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$'nin yukarıdaki gibi yazılması ve J lineer operatörünün çekirdeği üzerinde tanımlanmış olan baz elemanları $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ uzayları arasındaki bilineer ilişkiyi kullanarak $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün çekirdeği üzerine projeksiyon P yi tanımlayabiliriz. Benzer şekilde $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün $R(J)$ tanım alanı üzerindeki $Q: C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v} \to R(J)$ projeksiyonu da P projeksiyonunu kullanarak $Q = I - P$ şeklinde tanımlanır. O zaman $N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in)$ operatörünün $R(J)$ üzerine projeksiyonu $Q \circ N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in) = (I - P) \circ N(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in)$ şeklinde verilir. Q operatörünün tanımdan açıkça görülmektedir ki $Q \circ J = J$.

$C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ Banach uzayının (5.18) formunda yazılmasını ve $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} \subseteq C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v}$ dikkate alarak $C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v}$ Banach uzayını da aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$C^1_{2\pi} \oplus C^1_{2\pi/v} = N(J) \oplus W$$

burada $W = \left\{ w \in C^1_{2\pi} \oplus C^2_{2\pi/v};\ \langle\langle w, \overline{\psi}_i \rangle\rangle = 0 \quad \langle\langle w, \overline{\overline{\psi}}_i \rangle\rangle = 0,\ i = 1,2 \right\}$ olarak tanımlanır.

$P: C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/v} \to N(J)$ operatörünü de açık olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$P \circ (.) = P^1 \circ (.) + P^2 \circ (.)$$

burada

$$P^1 \circ (.) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle \overline{\psi}_1, . \rangle\rangle \overline{\phi}_1 + \langle\langle \overline{\overline{\psi}}_1, . \rangle\rangle \overline{\overline{\phi}}_1,$$
$$P^2 \circ (.) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle \overline{\psi}_2, . \rangle\rangle \overline{\phi}_2 + \langle\langle \overline{\overline{\psi}}_2, . \rangle\rangle \overline{\overline{\phi}}_2$$

olarak tanımlanırlar. Ayrıca $P^1: C_{2\pi} \to N_1(J)$ ve $P^2: C_{2\pi/v} \to N_2(J)$ şeklinde tanımlanmış alt operatörlerdir. Burada $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün çekirdeğinin $N_1(J) \subseteq C_{2\pi}$, $N_2(J) \subseteq C_{2\pi/v}$ olacak şekilde $N(J) = N_1(J) \oplus N_2(J)$ tanımlanır.

(5.16) operatör denklemi otonom olduğu için, bu denklemin çözümleri faz değişimi altında değişmezler, yani

$$N\left(\Gamma(\gamma) u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in\right) = \Gamma(\gamma) N\left(u_{s,\beta}(\theta), \alpha, \beta, \in\right)$$

burada $\Gamma(\gamma)u_{s,\beta}(\theta)=u_{s+\gamma,\beta}(\theta)$. Faz değişim simetrisi ve rezonans olmama durumları kullanılarak (5.16) operatör denkleminin $N(J)$ çekirdeği üzerindeki çözümünü $\alpha_1\overline{\phi}_1+\alpha_2\overline{\phi}_2$ formunda yazabiliriz. Yani dört tane baz elemanından iki tanesini yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı eleyebiliriz ama bu $N(J)$ çekirdeğinin boyutunu değiştirmez yani $N(J)$ çekirdeğinin boyutu dörttür. O zaman $u_{s,\beta}(\theta)$ çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$u_{s,\beta}(\theta)=\alpha_1\overline{\phi}_1+\alpha_2\overline{\phi}_2+w$$

burada $w\in W$ ve $\alpha_2=\mu$. Q projeksiyonun tanımından görülebileceği gibi $Q\circ N(\alpha_1\overline{\phi}_1+\alpha_2\overline{\phi}_2+w)$ operatörünün w vektörüne göre Frechet türevi, $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün W alt-uzayı üzerine kısıtlanmasıdır. $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün W alt-uzayına kısıtlanmasıyla elde edilen operatör bire bir ve üstüne bir operatör olup tersi vardır ve sınırlıdır. Böylece kapalı fonksiyon teoremini kullanarak

$$Q\circ N\left(\alpha_1\overline{\phi}_1+\alpha_2\overline{\phi}_2+w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta)\right)=0 \tag{5.19}$$

denkleminden $w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta)$ vektör fonksiyonunu tek olarak elde edebiliriz. $w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta)$ vektör fonksiyonu, çözümün $J(u_{s,\beta}(\theta))$ lineer operatörünün çekirdeğinin tamlayanı üzerindeki parçasıdır. (5.19) ile verilen denklem sistemi sonsuz boyutludur. Bu durumda elimizdeki çözülmesi gereken tek denklem :

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in)=P\circ N(\alpha_1\overline{\phi}_1+\alpha_2\overline{\phi}_2+w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta))=0 \tag{5.20}$$

denklemidir. Bu denkleme İndirgenmiş Bifurkasyon Denklemi denir. (5.20) ile verilen denklem sistemi dört boyutlu uzay üzerinde tanımlanmıştır. Böylece Lyapunov-Schmidt indirgeme metodunu kullanarak denklem sistemimizi bir tanesi sonsuz boyutta (denklem (5.19)) diğeri de sonlu boyuta (denklem (5.20)) olmak üzere iki ayrı denklem sistemi biçiminde yazdık. Bundan sonraki amacımız (5.19) denklem sisteminden $w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta)$ bularak bunu (5.20) denklem sisteminde yerine koyup indirgenmiş bifurkasyon denklemini çözmektir. (5.19) denklem sistemini analitik olarak çözmek mümkün olmayacağından $w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\in,s,\theta)$ vektör fonksiyonunun seri çözümünü bulacağız. Amacımız serinin sıfırdan farklı ilk terimini bulmaktır çünkü bu terimi bulmak sistemin çözümünün yerel analizini yapmak için yeterlidir.

5.4. İndirgenmiş Bifurkasyon Denklemi

İndirgenmiş bifurkasyon denklemindeki $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonu için tam bir formülün elde edilemeyeceği açıktır. Ancak $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun bifurkasyon noktasında türevlerini hesaplayarak, $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun bifurkasyon noktası komşuluğunda yerel gösterimini elde etmek mümkündür. (5.20) deki $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonun bileşenlerini aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} g^1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) &= \left\langle\!\left\langle \zeta^{*1}(s,\tau), N(J(u_{s,\beta}(\theta)),\alpha,\beta,\varepsilon)\right\rangle\!\right\rangle \\ &= g_1^1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) - i g_2^1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} & g^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) \\ &= \left\langle\!\left\langle \zeta^{*2}(s,\tau), N(J(u_{s,\beta}(\theta)),\alpha,\beta,\varepsilon)\right\rangle\!\right\rangle \\ &= g_1^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) - i g_2^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.22}$$

burada

$$\zeta^{*1}(s_1,\tau) = \frac{1}{i(A_0 r_0 + 2) + A_0 - r_0(1-B_0)}\Big((A_0 - i)e^{i(\tau+s_1)}, ie^{i\theta}e^{i(\tau+s_1)}, 0, 0\Big)^{\mathrm{T}}$$

$$\zeta^{*2}(s_2,\tau) = \frac{e^{iv(\tau+s_2)}}{2}(0,0,1,-i)^{\mathrm{T}}$$

ve

$$\mathrm{Re}(\zeta^{*1}(s_1,\tau)) = \overline{\psi}_1, \quad \mathrm{Im}(\zeta^{*1}(s_1,\tau)) = \overline{\overline{\psi}}_1$$
$$\mathrm{Re}(\zeta^{*2}(s_2,\tau)) = \overline{\psi}_2, \quad \mathrm{Im}(\zeta^{*2}(s_2,\tau)) = \overline{\overline{\psi}}_2$$

olarak tanımlamıştır. Önce $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun değişik türevlerini hesaplayıp bunların bifurkasyon noktasındaki değerlerini bulacağız.

$$g_{\alpha_1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) = P \circ \left(-(1+\beta)\frac{d}{ds}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1}) + F_u(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1}) \right)$$

$$g_{\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) = P \circ \left(-\frac{d}{ds}(\overline{\phi}_1) + A(0)(\overline{\phi}_1) \right) = 0 \tag{5.23}$$

$$g_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) = P \circ \left(-\frac{d}{ds} w_{\alpha_1\alpha_1} + F_{uu}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1})^2 + F_u(w_{\alpha_1\alpha_1}) \right)$$

$$g_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) = 0 \tag{5.24}$$

$$g_{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) = P \circ \left(-(1+\beta)\frac{d}{ds} w_{\alpha} + F_{\alpha} u + F_u(w_{\alpha}) \right)$$

$$g_{\alpha}(0,0,0,0,\varepsilon) = 0 \tag{5.25}$$

burada g_α ve g_{α_1} sırasıyla $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunu α, α_1 değişkenlerine göre birinci türevlerini temsil etmektedirler. (5.23), (5.24) ve (5.25) de hesaplandığı gibi $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun bu türevlerinin bifurkasyon noktasındaki değerleri sıfırdır:

$$g(0,0,0,0,\varepsilon) = g_{\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) = g_{\alpha}(0,0,0,0,\varepsilon) = g_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) = 0$$

Şimdi $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun bifurkasyon noktasında sıfırdan farklı değer alan türevlerini bulmak için yüksek dereceden türevlerini hesaplayalım:

$$g_{\alpha_1\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) = P \circ \left(-(1+\beta)\frac{d}{ds} w_{\alpha_1\alpha} + F_{u\alpha}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1}) + F_u(w_{\alpha_1\alpha}) \right)$$

$$g^1_{\alpha_1\alpha}(0,0,0,0,\varepsilon) = \sigma_\alpha(0) + i w_\alpha(0) \tag{5.26}$$

$$g_{\alpha_1\beta}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) = P \circ \left(-(1+\beta)\frac{d}{ds} w_{\alpha_1\beta} - \frac{d}{ds}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1}) + F_{uu}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1})^2 + F_u(w_{\alpha_1\beta}) \right)$$

$$g^1_{\alpha_1\beta}(0,0,0,0,\varepsilon) = -i \tag{5.27}$$

$$g^1{}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$$

$$= P \circ \left(-\frac{d}{ds} w_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1} + F_{uuu}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1})^3 + 3F_{uu}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1}) w_{\alpha_1\alpha_1} \right)$$

$$g^1_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) = P \circ \left(F_{uuu}(\overline{\phi}_1)^3 + 3F_{uu}(\overline{\phi}_1) w_{\alpha_1\alpha_1} \right) \tag{5.28}$$

Yukarıdaki hesaplamalarda projeksiyon operatörünün $P = P^1 + P^2$ şeklinde yazıldığını ve P^2 tanım kümesi üzerine yapılan projeksiyonun sıfır olduğuna dikkat edelim. Ayrıca 1 üst indisi (5.21) de olduğu gibi g fonksiyonun birinci bileşenini temsil eder.

İkinci adım olarak (5.19) denklemi kullanılarak w fonksiyonunun ilk türevleri hesaplanır ve bunların sıfır olduğu gözlemlenir:

$$w_{\alpha_1} = w_{\alpha_2} = w_{\alpha} = w_{\beta} = 0$$

Ek-C de gösterildiği gibi (5.19) denklemi kullanılarak $w_{\alpha_1\alpha_1}$ bifurkasyon noktasında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} & w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,\varepsilon,s,\theta) \\ & = \left(\xi_{21}(0),\xi_{22}(0),\xi_{23}(0),\xi_{24}(0)\right)^{\mathrm{T}} e^{2i(\theta+s)} \\ & + \left(\hat{\xi}_{21}(0),\hat{\xi}_{22}(0),\hat{\xi}_{23}(0),\hat{\xi}_{24}(0)\right)^{\mathrm{T}} + \left(\hat{\xi}_{21}(0),\hat{\xi}_{22}(0),\hat{\xi}_{23}(0),\hat{\xi}_{24}(0)\right)^{\mathrm{T}} e^{-2i(\theta+s)} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Bu aşamada $F_{uu}(\overline{\phi}_1)w_{\alpha_1\alpha_1}$ fonksiyonun bifurkasyon noktasındaki değeri artık hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} & F_{uu}(0,0)\left[\overline{\phi}_1(s_1,\theta)\right]\left[w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,\varepsilon,s,\theta)\right] \\ & = \begin{cases} \overline{0}, & r_0 \le \theta \le 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2f_{11}Q(0)\cos(s_1) + f_{12}Q(r_0)\cos(s_1) \\ + f_{12}Q(0)\cos(s_1-r_0) + 2f_{12}Q(r_0)\cos(s_1-r_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \theta = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.30}$$

burada $\overline{0}$, sıfır vektörünü temsil etmektedir. Ayrıca $Q(0)$ ve $Q(r_0)$ açık olarak aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$Q(0) = \xi_{21}(0)e^{2is_1} + \hat{\xi}_{21}(0) + \overline{\xi}_{21}(0)e^{-2is_1}$$
$$Q(r_0) = \xi_{21}(0)e^{2i(s_1-r_0)} + \hat{\xi}_{21}(0) + \overline{\xi}_{21}(0)e^{-2i(s_1-r_0)}$$

$g_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon)$ türevinin hesaplanmasından aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon) &= \left(f_{122} + \frac{f_{12}(2f_{22}+f_{12})}{B_0+C_0} + \frac{2f_{12}f_{22}+f_{12}f_{11}+2f_{11}f_{22})}{2iA_0-4+B_0+C_0e^{-2ir_0}} \right)\frac{e^{-2ir_0}}{N} \\
&+ \left(f_{112} + \frac{f_{12}(2f_{12}+2f_{11})}{B_0+C_0} + \frac{f_{12}f_{11}}{2iA_0-4+B_0+C_0e^{-2ir_0}} \right)\frac{e^{ir_0}}{N} \\
&+ \left(3f_{222} + 2f_{112} + \frac{4f_{22}^2+f_{12}^2+4f_{11}f_{22}+4f_{12}f_{11}+2f_{12}f_{22}}{B_0+C_0} + \frac{2f_{11}f_{22}+2f_{12}f_{11}+2f_{12}f_{22}}{2iA_0-4+B_0+C_0e^{-2ir_0}} \right)\frac{e^{ir_0}}{N}\frac{3f_{111}+2f_{122}}{N} \\
&+ \left(\frac{4f_{11}f_{22}+f_{12}^2+f_{11}^2+2f_{12}f_{11}+4f_{12}f_{22}}{B_0+C_0} \right) \\
&+ \left(\frac{2f_{22}^2e^{-3ir_0}+f_{12}^2e^{-3ir_0}+f_{12}f_{22}e^{-4ir_0}+2f_{11}^2+f_{12}^2}{N(2iA_0-4+B_0+C_0e^{-2ir_0})} \right).
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Üçüncü adım olarak, periyodik tedirginliğinin sistemin davranışına olan etkilerini analiz edelim. Bunun için lineer olamayan operatörün, lineer operatörün çekirdeği üzerindeki projeksiyonu olan $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun α_2 değişkenine göre yüksek dereceden türevlerini hesaplayıp bunların bifurkasyon noktasındaki değerlerini bulalım:

$$
\begin{aligned}
& g_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) \\
&= P\circ\left(-(1+\beta)\frac{d}{ds}w_{\alpha_1\alpha_2} + F_u(w_{\alpha_1\alpha_2}) \right) + F_{uu}(\bar{\phi}_1+w_{\alpha_1})(\bar{\phi}_2+w_{\alpha_2}) \\
& g_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon) = 0
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon) \\
&= P\circ\left(-(1+\beta)\frac{d}{ds}w_{\alpha_1\alpha_2\alpha} + F_u(w_{\alpha_1\alpha_2\alpha_2}) \right) + 2F_{uu}(w_{\alpha_1\alpha_2})(\bar{\phi}_2+w_{\alpha_2}) \\
&+ F_{uu}(\bar{\phi}_1+w_{\alpha_1})(w_{\alpha_2\alpha_2}) + F_{uuu}(\bar{\phi}_1+w_{\alpha_1})(\bar{\phi}_2+w_{\alpha_2})^2 \\
& g^1_{\alpha_1\alpha_2\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon) = 2F_{uu}(w_{\alpha_1\alpha_2})(\bar{\phi}_2) + F_{uuu}(\bar{\phi}_1)(\bar{\phi}_1)^2
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

(5.32) açık olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
& \left\langle\!\left\langle \zeta^*(s,\tau), R_{uu}(0,0,\varepsilon)\ \left[\bar{\phi}_2(s,\theta)\right]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}(0,0,0,0,0,s,\theta)\right] \right\rangle\!\right\rangle = \\
& -\frac{\varepsilon C_0 e^{-ir_0}}{8N}\times\left(\frac{C_0e^{-i(1+v)r_0}(1+v)}{-(1+v)^2+B_0+iA_0(1+v)+C_0e^{-i(1+v)r_0}} \right) \\
& -\frac{\varepsilon C_0 e^{-ir_0}}{8N}\times\left(\frac{C_0e^{-i(1-v)r_0}(1-v)}{-(1-v)^2+B_0+iA_0(1-v)+C_0e^{-i(1-v)r_0}} \right)
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

burada $N = A_0 + 2i - r_0C_0e^{-ir_0}$ ve $w_{\alpha_1\alpha_2}$ Ek-D de açık olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde aşağıdaki sonucu elde edebiliriz:

$$\left\langle\left\langle \zeta^*(s,\tau), R_{uu}(0,0,\varepsilon)\left[\overline{\phi}_1(s,\theta)\right]\left[\overline{\phi}_1(s,\theta)\right]\left[\overline{\phi}_1(s,\theta)\right]\right\rangle\right\rangle$$
$$= \frac{\varepsilon^2\, C_0\, \xi^1_{22}(0)}{8N} e^{-i(1+v)r_0} + \frac{\varepsilon^2\, C_0\, \xi^1_{22}(0)}{8N} e^{-i(1-v)r_0} \tag{5.35}$$

Son olarak $g^1_{\alpha_1\alpha_2\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon)$ fonksiyonu da aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$g^1_{\alpha_1\alpha_2\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon)$$
$$= \frac{C_0 e^{-ir_0}}{N} \times \sum_{n\neq 0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0(1+nv)e^{-i(1+nv)r_0}}{B_0 - (1+nv)^2 + C_0 e^{-i(1+nv)r_0} + i(1+nv)A_0} \right) \tag{5.36}$$

Şimdi yukarıdaki sonuçları özetleyecek olursak: $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonu için tam bir formül elde etmek mümkün olmadığından, $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun bifurkasyon noktası civarında Taylor seri açılımını için $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun değişik türevlerinin değerlerini bifurkasyon noktasında hesapladık. (5.23)-(5.25) de gözlemlendiği üzere $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki lineer terimleri sıfıra eşittir. $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha,\beta,\varepsilon)$ fonksiyonunu bifurkasyon noktasında Taylor açılımındaki sıfırdan farklı olan üçüncü derece ve dördüncü derece katsayıları (5.26)-(5.28), (5.31) ve (5.36) da verilmiştir.

5.5. Bifurkasyon Denkleminin Analizi

Bu bölümde bifurkasyon denklemini basit hale getirip indirgenmiş lineer olamayan sistemin bifurkasyon çözümü için açık bir formül elde edeceğiz. İndirgenmiş bifurkasyon denkleminin iki tane genlik (amplitude) denklemi ve iki tanede bir birine eş olamayan faz denklemi vardır. Faz denklemlerinin eş olmamasının sebebi sistemin rezonans olmamasıdır. Genlik denklemlerinin sıfırdan farklı çözümleri sistemin periyodik ve yarı lineer-periyodik çözümlerine karşılık gelmektedir. Genlik denklemlerinin analizinde denklemlerin $SO(2)\times SO(2)$ simetri özelliği kullanılarak denklem daha da basit bir yapıya indirgenir. Bu sonuçlar EK E da kullanılarak indirgenmiş bifurkasyon denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha,\varepsilon)\alpha_1 = 0 \tag{5.37}$$

Bu denklemin çözümleri ile orijinal denklemin periyodik çözümleri arasında birebirlik vardır yani (5.37) denkleminin her bir çözümü orijinal denklemin bir periyodik çözümüne karşılık gelmektedir. $\alpha_2 = 0$ olduğu zaman lineer olmayan ve tedirgin edilmemiş bir sisteme sahip oluyoruz ve bu sistem Hopf bifurkasyonuna sahiptir. Bu durumda sistemin çözümleri orijinal sistemin periyodu 2π ye yakın olan periyodik çözümlerine karşılık gelmektedir. $\alpha_2 \neq 0$ olduğu zaman periyodik olarak tedirgin edilen lineer olamayan bir sistem elde ediyoruz. Bu sistem rezonans olmayan çift Hopf bifurkasyonuna sahiptir. Bu durumda sistemin sıfırdan farklı çözümleri orijinal sistemin yarı-lineer periyodik çözümlerine karşılık gelmektedir. Eğer $\alpha_1 = 0$ ise (5.37) denklemi sağlanır. $\alpha_1 \neq 0$ durumunda ise

$$H(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha, \varepsilon) = 0 \tag{5.38}$$

denkleminin çözümlerini arayacağız. Bunun için önce $z_1 = \alpha_1^2$ ve $z_2 = \alpha_2^2$ yeni değişkenlerini tanımlayalım. Bu durumda EK-E da verilen P_1, P_2 ve H fonksiyonlarının Taylor açılımları bu değişkenler cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
&P_1(z_1, z_2, \alpha, \beta, v, \varepsilon) = \sum \begin{cases} p_{ijkl}(\varepsilon) z_1^i z_2^j \alpha^k \beta^l, & j = 0, \\ p_{ijkl}(\varepsilon, v) z_1^i z_2^j \alpha^k \beta^l, & j \neq 0 \end{cases} \\
&P_2(z_1, z_2, \alpha, \beta, \varepsilon) = \sum q_{ijkl}(\varepsilon) z_1^i z_2^j \alpha^k \beta^l \\
&H(z_1, z_2, \alpha, v, \varepsilon) = \sum \begin{cases} h_{ijk}(\varepsilon) z_1^i z_2^j \alpha^k, & j = 0, \\ h_{ijk}(\varepsilon, v) z_1^i z_2^j \alpha^k, & j \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Yukarıdaki Taylor açılımındaki katsayılar arasındaki ilişkiler aşağıda verilen formüller vasıtası ile hesaplanır:

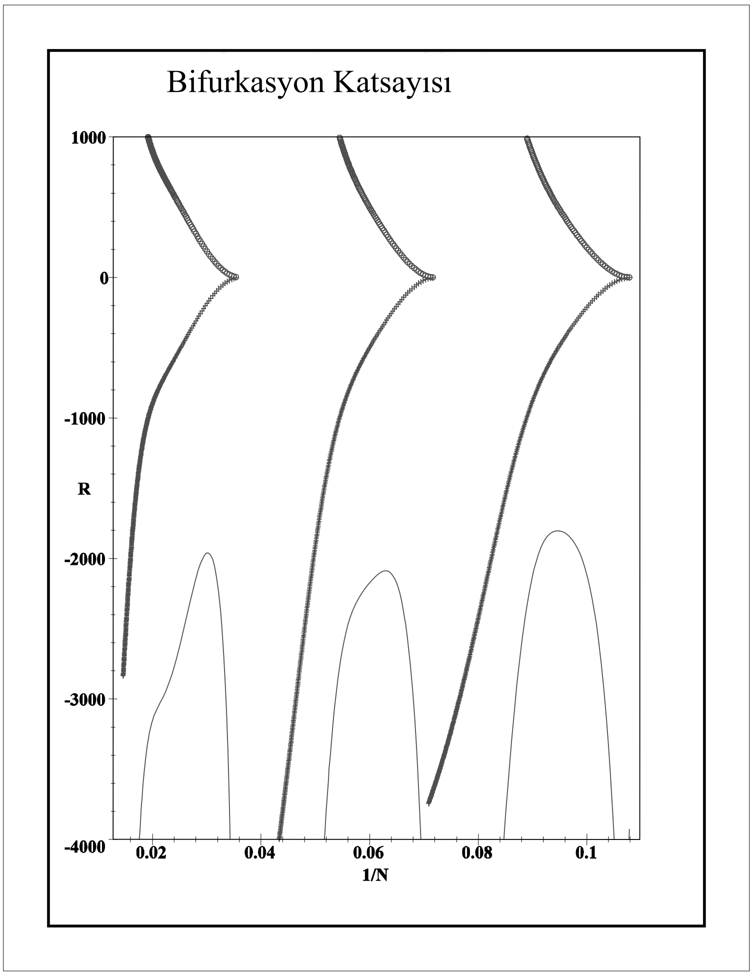
$$\begin{aligned}
&h_{000}(\varepsilon) = 0, \quad h_{100}(\varepsilon) = p_{1000}(\varepsilon), \\
&h_{010}(\varepsilon, v) = p_{0100}(\varepsilon, v), \quad h_{001}(\varepsilon) = p_{0010}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

burada katsayılar

$$\begin{aligned}
&p_{1000}(\varepsilon) = \Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Re}\left[(g^1_{\alpha_1\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon))\right] \\
&p_{0100}(\varepsilon) = \mathrm{R}(r_0) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Re}\left[(g^1_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon))\right]
\end{aligned}$$

$$p_{0010}(\varepsilon) = \mathrm{Re}\left[(g^{1}_{\alpha_1\alpha}(0,0,0,0,\varepsilon))\right] = \sigma_\alpha(0)$$

olarak ifade edilirler.

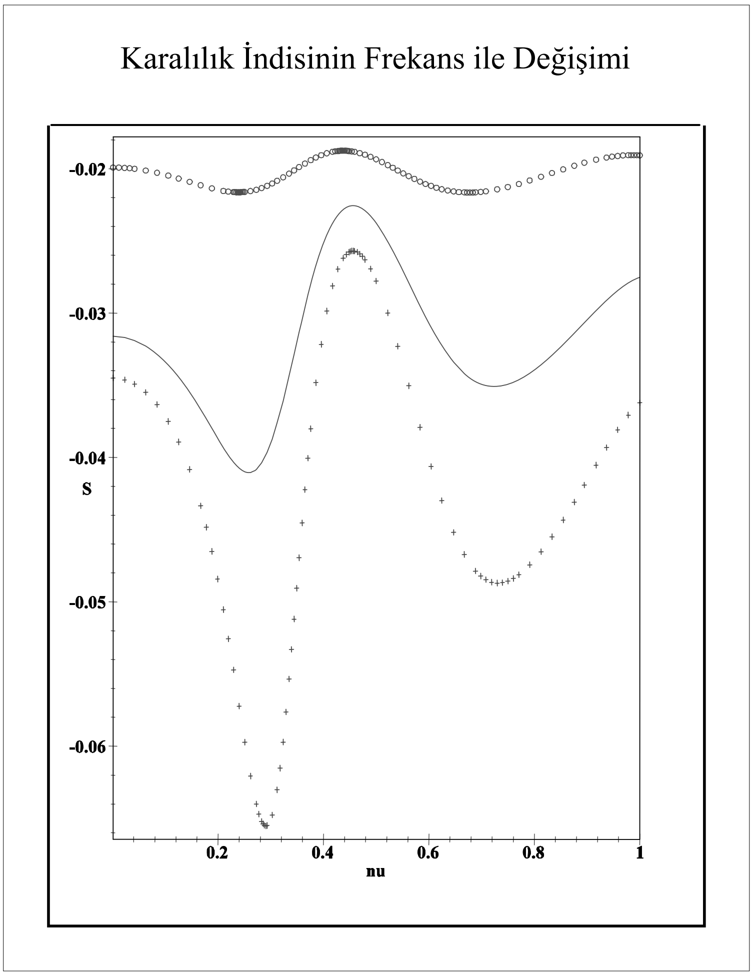


Şekil 5.1 $\Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0)$ bifurkasyon katsayısının davranışı

(5.23) deki ifadeyi $\Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0)$ bifurkasyon katsayısında yerine yazarak, bu katsayının davranışını analiz edebiliriz. Şekil 1. $\Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0)$ bifurkasyon katsayısının davranışını göstermektedir. $\mathrm{R}(r_0, v)$ fonksiyonunun gerçel kısmı aşağıdaki formdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{R}(r_0, v) = \sum_{\substack{n\neq 0 \\ -1}}^{1} \frac{A_n^c \cos(nvr_0) + A_n^s \sin(nvr_0) + A_n^0}{B_n^c \cos(nvr_0) + B_n^s \sin(nvr_0) + B_n^0} \tag{5.40}$$

burada A_n ve B_n katsayıları Ek-E de verilmiştir.



Şekil 5.2. $\mathrm{R}(r_0, \nu)$ bifurkasyon katsayısının davranışı

Yukarıdaki denklemlerden $\mathrm{R}(r_0, \nu)$ bifurkasyon katsayısının frekansı ν olan periyodik tedirginliklerin fonksiyonu olduğunu gözlemleriz. A_n ve B_n katsayıları çok uzun olduğu için ve ν frekansının değişik kuvvetlerini içerdiği için ν frekansının optimal değerini hesaplamak uzun ve sıkıcı bir iştir. Geçiş koşulu $\sigma_\alpha(0)$ için gerekli olan formül Ek-E de açık olarak verilmiştir. τ_C kritik gecikme parametreleri için $\mathrm{R}(r_0, \nu)$ bifurkasyon katsayısının değerini hesaplayarak, bu katsayının davranışını analiz edebiliriz. Şekil 2 de $\mathrm{R}(r_0, \nu)$ bifurkasyon katsayısının değişik τ_C değerleri için davranışı verilmiştir. P_1 ve g_1^1 fonksiyonlarını aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$P_1 = (h_{100}(\varepsilon)z_1 + h_{010}(\varepsilon,v)z_2 + \sigma_\alpha(0)\alpha) = (h_{100}(\varepsilon)\alpha_1^2 + h_{010}(\varepsilon,v)\alpha_2^2 + \sigma_\alpha(0)\alpha)$$
$$g_1^1 = (h_{100}(\varepsilon)z_1 + h_{010}(\varepsilon,v)z_2 + \sigma_\alpha(0)\alpha)\alpha_1 = (h_{100}(\varepsilon)\alpha_1^2 + h_{010}(\varepsilon,v)\alpha_2^2 + \sigma_\alpha(0)\alpha)\alpha_2$$

$\alpha_2 = 0$ durumunda, $g_1^1 = 0$ indirgenmiş bifurkasyon denkleminden

$$g_1^1 = (h_{100}(\varepsilon)\alpha_1^2 + \sigma_\alpha(0)\alpha)\alpha_1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem α bifurkasyon parametresi için çözüldüğü zaman

$$\alpha = -\frac{h_{100}(\varepsilon)}{\sigma_\alpha(0)}\alpha_1^2 \tag{5.41}$$

çözümünü elde ederiz. Burada $h_{100}(\varepsilon)$ katsayısı sıfırdan farklı olduğu için, buradaki bifurkasyon, Z_2 simetrisine sahip olan pitchfork bifurkasyonuna denktir. $h_{100}(\varepsilon)\sigma_\alpha(0) > 0$ olduğu zaman pitchfork bifurkasyonu alt-kritik, $h_{100}(\varepsilon)\sigma_\alpha(0) < 0$ olduğu zaman ise üst-kritik olur. $\sigma_\alpha(0) \neq 0$ koşulundan dolayı, α_1 sıfırın komşuluğunda iken $\alpha(0) = 0$ olacak şekilde düzgün bir $\alpha = \alpha(\alpha_1^2)$ yüzeyi vardır.

$\alpha_2 \neq 0$ olduğu durumda ise $g_1^1 = 0$ indirgenmiş bifurkasyon denkleminden

$$g_1^1 = \left(h_{100}(\varepsilon)\alpha_1^2 + h_{010}(\varepsilon,v)\alpha_2^2 + \sigma_\alpha(0)\alpha\right)\alpha_1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi aşağıdaki formda düzenleyebiliriz:

$$\alpha + \frac{h_{010}(\varepsilon,v)}{\sigma_\alpha(0)}\alpha_2^2 = -\frac{h_{100}(\varepsilon)}{\sigma_\alpha(0)}\alpha_1^2 \tag{5.42}$$

Burada sistemimiz eğer $h_{100}(\varepsilon)\sigma_\alpha(0) > 0$ ise alt-kritik bifurkasyonuna, eğer $h_{100}(\varepsilon)\sigma_\alpha(0) < 0$ ise üst-kritik bifurkasyonuna sahip olur.

Böylece basit çözümün kararlılık sınırı

$$\alpha_{cr} = -\frac{h_{010}(\varepsilon.v)}{\sigma_\alpha(0)}\alpha_2^2 \tag{5.43}$$

olarak bulunur. (5.43) den görüldüğü gibi $\alpha_2 = 0$ durumunda $\alpha_{cr} = 0$ olur. Bu bifurkasyonları kararlılık açısından ele alırsak $\alpha_2 \neq 0$ ve $h_{010}(\varepsilon, v)\sigma_\alpha(0) < 0$ olduğunda sistemin kararlı bir davranış gösterdiğini gözlemleriz. $h_{010}(\varepsilon, v)\sigma_\alpha(0) > 0$ durumunda ise sistemin davranışının kararsızlaştığını görürüz. Yani alt-kritik bifurkasyona sahip olan bir sistemin kararsız davranış gösterirken üst-kritik bifurkasyona sahip bir sistem ise kararlı bir davranış gösterir.

g_1^1 indirgenmiş bifurkasyon fonksiyonu $SO(2) \times SO(2)$ simetrisine sahip olduğu için Ek-F de deki sonuçları kullanarak aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
& g_1^1(\theta_{12}(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon)) = \theta_{12} g^1(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon) \\
& = P_1(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2, \alpha, \beta)\alpha_1, \varepsilon)\theta_{12}(\alpha_1, 0, 0, 0) \\
& = P_1(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2, \alpha, \beta, \varepsilon)\,(x_1, x_2, 0, 0)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

Böylece g_1^1 indirgenmiş bifurkasyon fonksiyonunu

$$
\begin{aligned}
& g_1^1(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) \\
& = \left(h_{100}(x_1^2 + x_2^2, \varepsilon) + h_{010}(x_3^2 + x_4^2, \varepsilon) + \sigma_\alpha(0)\alpha\right)(x_1, x_2, 0, 0)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

olarak yazabiliriz. $H(0,0,0,\varepsilon) = 0$ ve $H_\alpha(0,0,0,\varepsilon) \neq 0$ olduğu için kapalı fonksiyon teoremini kullanarak, α parametresini z_1 ve z_2 değişkenleri cinsinden $\alpha = \alpha(z_1, z_2, \varepsilon)$ veya $\alpha = \alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon)$ olarak yazabiliriz. $\alpha = \alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon)$ parametresini Taylor serisine açarsak:

$$
\alpha = \mu_1(\varepsilon)\alpha_1^2 + \mu_2(\varepsilon)\alpha_2^2 + \ldots
$$

Taylor seri açılımını elde ederiz. Burada katsayılar

$$
\mu_1(\varepsilon) = \frac{-H_{z_1}(0,0,0,\varepsilon)}{H_\alpha(0,0,0,\varepsilon)}
$$

$$
\mu_2(\varepsilon) = \frac{-H_{z_2}(0,0,0,\varepsilon)}{H_\alpha(0,0,0,\varepsilon)}
$$

olarak hesaplanırlar. Ayrıca $-r_0 \leq \theta \leq 0$ olduğu zaman α bifurkasyon parametresi ve β yardımcı parametresi 0 değerini alır. α ve β parametreleri için yukarıda yapılan hesaplamalar $\theta = 0$ olduğu zaman geçerli olan hesaplamalardır. Yani bifurkasyon parametresi α aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & -r_0 \leq \theta \leq 0, \\ \mu_1(\varepsilon)\alpha_1^2 + \mu_1(\varepsilon)\alpha_2^2 + \ldots, & \theta = 0 \end{cases} \tag{5.44}$$

Bu durumda $g^1\left(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon), \varepsilon\right) = 0$ denkleminin çözümü, α_1, α_2 ve ε parametreleri sıfırın küçük bir komşuluğunda değer aldıkları zaman vardır. Bu da $g^1 = 0$ denkleminin çözümlerinin, sıfırın komşuluğunda $\alpha = \alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon)$ grafiğinin üzerinde olduğunu ima eder.

Burada yaptıklarımızı özetlersek, bu problemde sıfırdan farklı çözümler gecikmeli Hopf bifurkasyonunun varlığını ima eder. $\alpha = \alpha(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \varepsilon)$ bifurkasyon parametresinin açılımındaki $\mu_1(\varepsilon)$ katsayısının işareti α_{cr} yeni bifurkasyon noktasının komşuluğunda sistemimizin hareketini belirler. $H_\alpha(0,0,0,\varepsilon) = \sigma_\alpha(0)$ katsayısı her zaman pozitif olduğundan, sistemimiz $\Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0) < 0$ olduğu zaman üst-kritik bifurkasyona, $\Lambda^{\mathrm{Re}}(r_0) > 0$ olduğu zaman alt-kritik bifurkasyona sahip olur. İki durumda da sistemimizin çözümleri bifurkasyon parametresi α yeni bifurkasyon değeri α_{cr} dan büyük değerler aldığı zaman kararlı bir davranış sergilemezler. Klasik bifurkasyon teorisinden bilindiği üzere alt-kritik bifurkasyon durumunda salınım genliği ufak bir tedirginlikle hızlı olarak artacağından sistemin kararlılığından bahsedilemez.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada periyodik biçimde tedirgin edilen ve ikinci basamaktan gecikmeli diferansiyel denklem ile ifade edilen bir sistemin periyodik hareketi ve Hopf bifurkasyonu incelenmiştir. Sonsuz boyutlu ve rezonans olmayan bu sistem, Lyapunov-Schmidt indirgeme yönteminden yararlanılarak, birisi yine sonsuz boyutta, diğeri ise sonlu boyutta olan iki probleme indirgenmiştir. Sonsuz boyutlu probleme kapalı fonksiyon teoremi uygulanarak çözümün buradaki parçası sonlu boyuttaki değişkenlere bağlı olarak elde edilmiştir. Bu parçadan, problemin sonlu boyutlu kısmından yararlanarak, sonlu boyutlu problemin analitik çözümü elde edilmiştir. Bu sonuçlar özgün yapıya sahip olup,

a) belli frekanslarda verilmiş olan küçük periyodik tedirginliklerin, sistemin kararlılığını artırdığını;
b) denge noktası civarında yarı-lineer periyodik çözümlerin varlığını;
c) bu tedirginliklerin, sistemde yeni kararlılık sınırlarını doğurduğunu

göstermiştir. Karalılık sınırı için (5.43) formülü elde edilmiştir.

Global analiz ve Lineer Olmayan Operatörler teorisi`nin bifurkasyon teorisi olarak tanımlanan bu çalışma hem teorik hem de uygulama yönleriyle matematik ve fiziğin bir çok dallarıyla ilgilidir. Her şeyden önce ele aldığımız sistem rezonans olmayan durumu ifade eden sistemdir. Fakat aynı yöntem rezonans durum içinde geçerlidir. Bunun için çalışacağımız fonksiyon uzayının farklı alınması gerekir. Ayrıca rezonans olmayan sistemin $SO(2)\times SO(2)$ simetrisine sahip olduğu rezonans durumunu ifade eden sisteminde $SO(4)$ simetrisine sahip olduğunu söylemek gerekir. Bu farklılıkların sonucu olarak elde edilen sonuçlar da farklı olacaktır.

Tez çalışmasında, sistemi sabit gecikme terimli hale getirmek için uyguladığımız metot, bazı durumlarda sisteme uygun durum değişkenleri ekleyerek sistemin kolayca çözülebilir ve incelenebilir yapıya getirilebileceğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

BELLMAN, R., COOKE, K.L., “Differential-Difference Equations”, **Academic Press**, Vol 6, (1963).

CHOW, S.N., Hale, J.K., “Methods of Bifurcation Theory”, **Springer-Verlag**, New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo, (1982).

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., “Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter I: reduced bifurcation equation”, **Applicable Analysis**, 84, 437-449,(2005).

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., “Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter II: Analysis of Reduced Bifurcation Equation”, **Applicable Analysis**, 84, 631-647, (2005).

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., “Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter”, **Nonlinear Mechanics**, 41, 464-474, (2006).

DEMİR, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., LANGFORD, W.F., “Nonlinear Delay Equations with Fluctuating Delay: Application to Regenerative Chatter”, **ASME**, CD-ROM (2002).

DRIVER, R.D., “Ordinary and Delay Differential Equations”, **Springer-Verlag**, Vol 20, (1977).

FARIA, T., MAGALHAES, L.T., “Normal Form for Retarded Functional Differential Equations and Applications to Bogdanov-Takens Singularity”, **Journal of Differential Equations**, 122, 201-224, (1995).

GOLUBITSKY, M., SHAEFFER, D.G., “Singularities and Groups in Bifurcations Theory”, Vol. 1, **Springer** , New York, (1985).

GOLUBITSKY, M., LANGFORD, W.F., “Classification and Unfoldings of Degenerate Hopf Bifurcations”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 41, 375-414, (1981).

GOLUBITSKY, M., STEWART, I., “Hopf Bifurcation in the Presence of Symmetry”, **Springer,** Berlin / Heidelberg, (2004).

HALE, J.K., “Theory of Functional Differential Equations”, **Springer-Verlag,** New York-Heidelberg-Berlin, (1977).

HALE, J.K., LUNEL, S.M.V., “Introduction to Functional Differential Equations”, **Springer-Verlag**, New York, (1993).

HALE, J.K., “Nonlinear Oscillations in Equations with Delays”, **Nonlinear Oscillations in Biology,** 157-185, (1979).

HALE, J.K., MAGALHAES, L.T., OLIVA, W. L., “Dynamics in Infinite Dimensions”, 2nd ed., **Springer-Verlag**, New York, (2002).

HASSARD, B.D., KAZARİNOFF, N.D., WAN, Y.H., “Theory and Applications of Hopf Bifurcation”, **London Mathematical Society Lecture Note Series**, 41, (1983).

KIM, S., CAMPBELL, S.A. and LIU, X.Z., “Stability of a Class of Linear Switching Systems with Time Delay”. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I** , 53(2), 384-393, (2006).

NAMACHCHIVAYA, N.S., BEDDINNI, R., “Spindle Speed Variation for the Suppression of Regenerative Chatter”, **Journal of The Faculty and Engineering**, 23, 13-29, (2003).

NAMACHCHIVAYA, N.S., VAN ROESSEL, H.J., “A Center Manifold Analysis of Spindle Speed Machining”, **Journal of Dynamical Systems**, 18, 245-270, (2003).

NUSSBAUM, R.D., “Periodic solutions of some nonlinear Autonomous Functional Differential Equations”, **I. Ann. Math. Pura Appl**., 101, 236-306, (1974).

SEXTON, J.S., MILINE, R.D., STONE, B.J., “The Stability of Machining with Continuously Varying Spindle Speed”, **Applied Mathematical Modelling**, 1, 311-318, (1977).

STECH, A.,” Hopf Bifurcation Calculations for Functional Differential Equations”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 109, 472-491, (1985).

STEPAN, G., “Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions”, **Harlow: Longman**, (1989).

STONE, E., CAMPBELL, S.A., “ Stability and Bifurcation Analysis of a Nonlinear DDE Model for Drilling”, **J. Nonlinear Science,** 14(1) 27-57, (2004).

TOBIAS, S.A., “Machine -Tool Vibration”, **Blackie & Son Ltd**., (1965).

WIGGINS, S., “Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods”, **Springer-Verlag**, New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo, (1988).

WIGGINS, S., “Introduction to Nonlinear Dynamical Systems and Chaos”, **Springer-Verlag**, New York, (1990).

ZEIDLER, E., “Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I:Fixed-Point Theorems”, **Springer Verlag**, New York, (1986).

ZEIDLER, E., 1990, “Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A: Linear Monotone Operators”, **Springer Verlag**, New York, (1986).

ZEIDLER, E., “Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A: Nonlinear Monotone Operators”, **Springer Verlag**, New York, (1990).

ZEIDLER, E., “Applied Functional Analysis:Applications of Mathematical Physics”, **Springer Verlag**, New York, (1995).

EK-A. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN TERİMLERİN KATSAYILARI

Lineer olmayan g^2 fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned} g^2 = {} & f_{11}(\alpha)x_1^2(t) + f_{12}(\alpha)x_1(t)x_1(t-r_0) + f_{22}(\alpha)x_1^2(t-r_0) \\ & + f_{111}(\alpha)x_1^3(t) + f_{112}(\alpha)x_1^2(s)x_1(t-r_0)\, f_{222}(\alpha)x_1^2(t-r_0) \\ & - \in \left[\mathrm{C}(\alpha)\big(x_2(t-r_0)x_3(t) + x_2(t-r_0)x_3(t)\big) + 2x_1(t-r_0)x_2(t)\right] + h.o.t. \end{aligned}$$

burada h.o.t. derecesi $\in^2$ ve $|\mathrm{x}|^4$ olan terimleri ve yüksek dereceli terimleri içermektedir. Lineer matris katsayıları da aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathrm{A}(\alpha) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\alpha, \quad \mathrm{B}(\alpha) = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1\alpha, \quad \mathrm{C}(\alpha) = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1\alpha\,,$$

EK-B. MATRİS DEĞERLİ $\eta(\alpha,\theta)$ FONKSİYONUNUN HESAPLANMASI

Matris değerli $\eta(\alpha,\theta)$ fonksiyonunu hesaplamak için aşağıdaki denklemi kullanırız :

$$\int_{-r}^{0} d\eta(\alpha,\theta)X_t(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ B(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t-r_0) \\ x_2(t-r_0) \\ x_3(t-r_0) \\ x_4(t-r_0) \end{pmatrix}$$

Burada kısmi integrasyon ve $\eta(\alpha,0)=0$ normalleştirme koşulunu kullanarak $\eta(\alpha,\theta)$ fonksiyonunu aşağıdaki formda ifade ederiz:

$$\eta(\alpha,\theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \theta \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & v & 0 \end{pmatrix} & -r_0 < \theta < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B(\alpha)-C(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \theta \leq -r_0. \end{cases}$$

Burada $\eta(\alpha,\theta)$ 'yı $\theta \leq -r_0$, için $\eta(\alpha,\theta)=\eta(\alpha,-r_0)$ ve $\theta \geq 0$ için $\eta(\alpha,\theta)=\eta(\alpha,0)$ şeklinde tanımlayarak R 'de tanımlayabiliriz. $d\eta(\alpha,\theta)$ da Dirac-Delta fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left[d\eta(\alpha,\theta)\right]=\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -B(\alpha) & -A(\alpha) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\delta(\theta)+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -C(\alpha) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\delta(\theta+r_0)\right]d\theta\,.$$

Bu durumda $\theta = 0$ değerinde

$$\dot{X}_t(\theta)=\int_{-r_0}^{0}\left[d\eta(\theta,\alpha)\right]X_t(0),$$

denklemini elde ederiz.

EK-C. $w_{\alpha_1\alpha_1}$ FONKSİYONUNUN HESAPLANMASI

$w_{\alpha_1\alpha_1}$ fonksiyonunu hesaplamak için sonsuz boyutlu olan (5.19) denkleminden yararlanırız. Kapalı fonksiyon teoreminden yararlanarak bu denklemin tek çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Bu çözüm analitik bir çözümdür. $w_{\alpha_1\alpha_1}$ fonksiyonunu hesaplamak için (5.19) denkleminin her iki yanının α_1 parametresine göre iki defa türevini alırız:

$$Q \circ (N_{\alpha_1\alpha_1}(u_{s,\beta}(\theta),\alpha,\beta,\varepsilon)) = (I-P)\left(-\frac{d}{ds}w_{\alpha_1\alpha_1} + F_{uu}(\overline{\phi}_1 + w_{\alpha_1})^2 + F_u(w_{\alpha_1\alpha_1})\right).$$

Bifurkasyon noktasında bu denklem

$$(I-P)(N_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,\varepsilon)) = J \circ (w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta)) + -\frac{d}{ds}w_{\alpha_1\alpha_1} + F_{uu}(\overline{\phi}_1)^2 = 0,$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $w_{\alpha_1\alpha_1}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$J \circ \left[w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta)\right] = \begin{cases} \overline{0}, & -r_0 \le \theta \le 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2f_{11}\cos^2(s_1) + 2f_{12}\cos(s_1)\cos(s_1 - r_0) \\ +2f_{22}\cos^2(s_1 - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \theta = 0, \end{cases}$$

burada $\overline{0}$ sıfır vektörünü temsil etmektedir. Yukarıdaki denkleme

$$\cos(s_1) = \frac{e^{is_1} + e^{-is_1}}{2},$$
$$\cos(s_1 - r_0) = \frac{e^{i(s_1 - r_0)} + e^{-i(s_1 - r_0)}}{2},$$

ve

$$w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta)=\xi_2(\theta)e^{2is}+\hat{\xi}_2(\theta)+\overline{\xi}_2(\theta)e^{-2is},$$

ifadelerini yerleştirdiğimiz zaman $\theta=0$ da çözümün katsayılarını

$$\xi_{21}(0)=-\frac{\frac{6}{4}(f_{11}+f_{12}e^{-ir_0}+f_{22}e^{-2ir_0})}{4-B_0-2iA_0-C_0e^{-2ir_0}},$$
$$\xi_{22}(0)=2i\xi_{21}(0),$$
$$\xi_{23}(0)=0,$$
$$\xi_{24}(0)=0,$$
$$\hat{\xi}_{21}(0)=\frac{3f_{11}+\frac{6}{4}f_{12}e^{-ir_0}+\frac{6}{4}f_{12}e^{ir_0}+3f_{22}}{B_0+C_0},$$
$$\hat{\xi}_{22}(0)=0,$$
$$\hat{\xi}_{23}(0)=0,$$
$$\hat{\xi}_{24}(0)=0,$$
$$\overline{\xi}_{22}(0)=-2i\overline{\xi}_{21}(0),$$
$$\overline{\xi}_{21}(0)=-\frac{\frac{6}{4}(f_{11}+f_{12}e^{ir_0}+f_{22}e^{2ir_0})}{4-B_0+2iA_0-C_0},$$
$$\overline{\xi}_{23}(0)=0,$$
$$\overline{\xi}_{24}(0)=0,$$

olarak hesaplarız. $\theta\in[r_0,0)$ durumunda

$$\frac{d}{ds}\left[\xi_2(\theta)e^{2is}+\hat{\xi}_2(\theta)+\overline{\xi}_2(\theta)e^{-2is}\right]=\frac{d}{d\theta}\left[\xi_2(\theta)e^{2is}+\hat{\xi}_2(\theta)+\overline{\xi}_2(\theta)e^{-2is}\right]$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemden de

$$\begin{aligned}
&w_{\alpha_1\alpha_1}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta)=\\
&(\xi_{21}(0),\xi_{22}(0),\xi_{23}(0),\xi_{24}(0))^T e^{2i(\theta+s)}\\
&+(\hat{\xi}_{21}(0),\hat{\xi}_{22}(0),\hat{\xi}_{23}(0),\hat{\xi}_{24}(0))^T\\
&+(\overline{\xi}_{21}(0),\overline{\xi}_{22}(0),\overline{\xi}_{23}(0),\overline{\xi}_{24}(0))^T e^{-2i(\theta+s)},
\end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz.

EK-D. $w_{\alpha_1\alpha_2}$ FONKSİYONUNUN HESAPLANMASI

$w_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonunu hesaplamak için Ek-C de olduğu gibi sonsuz boyutlu olan (5.19) denkleminden yararlanacağız. Bu denklemin önce her iki yanının α_1 ve α_2 parametrelerine göre türevini hesaplarız:

$$Q\circ(N_{\alpha_1\alpha_2}(u_{s,\beta}(\theta),\alpha,\beta))=(I-P)\left(-(1+\beta)\frac{d}{ds}w_{\alpha_1\alpha_2}+F_{uu}(\overline{\phi}_2+w_{\alpha_2}+F_u(w_{\alpha_1\alpha_2})\right).$$

Bifurkasyon noktasında bu denklem:

$$(I-P)(N_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,\varepsilon))=J\circ(w_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,0,0,s,\theta))+F_{uu}(\overline{\phi}_1)(\overline{\phi}_2)=0\,,$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $w_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonu

$$J\circ\left[w_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon,s,0)\right]=-\varepsilon\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{iC_0\,e^{-ir_0}}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\left[e^{-i(1+v)s_1}+e^{i(1-v)s_1}\right]+$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{iC_0\,e^{ir_0}}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\left[e^{-i(1+v)s_1}+e^{-i(1-v)s_1}\right]$$

denkleminden hesaplanır. Bu denklemden $w_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonu

$$w_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta)=\xi_2^1(\theta)e^{i(1+v)s}+\overline{\xi}_2^1(\theta)e^{-i(1+v)s}+\xi_2^2(\theta)e^{i(1-v)s}+\overline{\xi}_2^2(\theta)e^{-i(1-v)s}$$

biçiminde hesaplanır. $r_0\le\theta\le 0$ olduğu zaman $w_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonunun katsayıları

$$\xi_2^1(\theta)=\xi_2^1(0)\,e^{i(1+v)\theta}\,,$$
$$\overline{\xi}_2^1(\theta)=\overline{\xi}_2^1(0)\,e^{-i(1+v)}\,,$$

$$\xi_2^2(\theta) = \xi_2^2(0)\, e^{i(1-v)\theta},$$
$$\overline{\xi}_2^{\,2}(\theta) = \overline{\xi}_2^{\,2}(0)\, e^{-i(1-v)},$$

olarak hesaplanır. $\theta = 0$ olduğu durumda ise katsayılar

$$\xi_{22}^1(0) = i(1+v)\xi_{21}^1(0)\ ,$$
$$\xi_{21}^1(0) = \frac{iC_0\, e^{-ir_0}}{4[-(1+v)^2 + B_0 + i\, A_0(1+v) + C_0\, e^{-i(1+v)r_0}]},$$
$$\xi_{22}^2(0) = i(1-v)\xi_{21}^2(0)\ ,$$
$$\xi_{21}^1(0) = \frac{iC_0\, e^{-ir_0}}{4[-(1-v)^2 + B_0 + i\, A_0(1-v) + C_0\, e^{-i(1-v)r_0}]},$$
$$\xi_{23}^1(0) = 0,$$
$$\xi_{23}^1(0) = 0,$$
$$\xi_{23}^2(0) = 0,$$
$$\xi_{23}^2(0) = 0,$$

olarak hesaplanır. Burada $\overline{\xi}_2^{\,1}(0)$ ve $\overline{\xi}_2^{\,2}(0)$ katsayıları sırasıyla $\xi_2^1(0)$ ve $\xi_2^2(0)$ kompleks eşlenikleri alınarak hesaplanır. Böylece $w_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonu aşağıdaki formda ifade edilir:

$$w_{\alpha_1\alpha_2}(0,0,0,0,\varepsilon,s,\theta) =$$
$$\begin{pmatrix} \xi_{21}^1(0) \\ \xi_{22}^1(0) \\ \xi_{23}^1(0) \\ \xi_{24}^1(0) \end{pmatrix} e^{i(1+v)(s+\theta)} + \begin{pmatrix} \overline{\xi}_{21}^{\,1}(0) \\ \overline{\xi}_{22}^{\,1}(0) \\ \overline{\xi}_{23}^{\,1}(0) \\ \overline{\xi}_{24}^{\,1}(0) \end{pmatrix} e^{-i(1+v)(s+\theta)} + \begin{pmatrix} \xi_{21}^2(0) \\ \xi_{22}^2(0) \\ \xi_{23}^2(0) \\ \xi_{24}^2(0) \end{pmatrix} e^{i(1-v)(s+\theta)} + \begin{pmatrix} \overline{\xi}_{21}^{\,2}(0) \\ \overline{\xi}_{22}^{\,2}(0) \\ \overline{\xi}_{23}^{\,2}(0) \\ \overline{\xi}_{24}^{\,2}(0) \end{pmatrix} e^{-i(1-v)(s+\theta)}.$$

EK-E. KARARLILIK İNDİSİNİN KATSAYILARI

(5.40) da verilen kararlılık indisinin katsayıları A_n ve B_n aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$A_n^c = -2nvr_0(1+nv)A_0^4 + (-4nv(1+nv)B_0 - 2nv(nv+2)(1+nv))A_0^3$$
$$+(-2nvr_0(nv+2)B_0^2 + 2nvr_0(nv+2)^2 B_0 - 2nvr_0(nv+2)(1+nv))A_0^2$$
$$+(-2B_0^3 nv + 2nv(nv+3)(1+nv)B_0^2 + 2nv(1+2nv+2n^2v^2)B_0 - 6nv$$
$$(1+nv)^2)A_0 - 2r_0 B_0^4 nv + 2nvr_0(4+2nv+n^2v^2)B_0^3 - 6nvr_0(2+2nv+$$
$$n^2v^2)B_0^2 + 2nvr_0(6nv+4+3n^2v^2)^2 B_0 - 2nvr_0(1+nv)^2$$
$$A_n^s = -2(1+nv)^2 A_0^4 + (2r_0B_0n^2v^2 + 2v^2r_0n^2(1+nv))A_0^3$$
$$+((-2+2n^2v^2-2nv)B_0^2 + 2(nv+2)(2n^2v^2+2+3nv)B_0 - 2(1+nv)(4nv+3))A_0^2$$
$$+(2r_0B_0^3n^2v^2 + 2v^2r_0n^2(nv-1)B_0^2 - 2v^2r_0n^2(2nv+1)B_0 + 2v^2r_0n^2(1+nv))A_0$$
$$(4+4nv)B_0^3 - 4(1+nv)(n^2v^2+3+2nv)B_0^2 + 4(1+nv)(2n^2v^2+3+4nv)B_0$$
$$-4(1+nv)^3$$
$$A_n^0 = -nv(-2B_0^2 - 2B_0nv + 6nv + nvA_0^2 + 2 + n^3v^3 + 4n^2v^2)(A_0 + r_0 + A_0^2r_0$$
$$-2r_0B_0 + B_0A_0 + r_0B_0^2)$$
$$B_n^c = 4v(A_0^2 + 2r_0A_0 + 2A_0r_0B_0 + r_0^2 - 2r_0^2B_0 + r_0^2B_0^2 + 4 + r_0^2A_0^2)nA_0(nv+1+B_0)$$
$$B_n^s = 4(A_0^2 + 2r_0A_0 + 2A_0r_0B_0 + r_0^2 - 2r_0^2B_0 + r_0^2B_0^2 + 4 + r_0^2A_0^2)(-B_0^2 + 2B_0 +$$
$$2B_0nv + B_0n^2v^2 - 2nv - n^2v^2 - 1 - nvA_0^2 - A_0^2)$$
$$B_n^0 = 2(A_0^2 + 2r_0A_0 + 2A_0r_0B_0 + r_0^2 - 2r_0^2B_0 + r_0^2B_0^2 + 4 + r_0^2A_0^2)(2B_0^2 - 2B_0n^2v^2$$
$$-4B_0 - 4B_0nv + 2A_0^2 + 2 + n^4v^4 + 2nvA_0^2 + 4nv + n^2v^2A_0^2 + 6n^2v^2 + 4n^3v^3)$$

Kritik noktadaki geçiş koşulu $\sigma_\alpha(0)$ normalleştirilmiş öz-değerin gerçel kısmının bifurkasyon parametresi α parametresine göre türevidir. $\sigma_\alpha(0)$ değeri (5.26) denklemi kullanılarak hesaplanır ve

$$\sigma_\alpha(0) = \frac{\chi + ((\Delta - \kappa_c r_0)\cos(r_0) - \Delta + \kappa_c r_0)\omega_p^4 - 2\omega_p^2 \sin(r_0)}{(\Delta^2 + 2\Delta r_0 \kappa_c \cos(r_0) + r_0^2\kappa_c^2)\omega_p^4 - 4r_0\kappa_c\omega_p^2 \sin(r_0) + 4},$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\chi = (2 - \omega_p^2 r_0 \kappa_c \sin(r_0))\Delta\omega_p^2 \omega_c'$$

ve

$$\omega_\alpha(0) = -\frac{\omega_p^2(\omega_p^2(\Delta + \kappa_c r_0)\sin(r_0) + 2\cos(r_0) - 2)}{\Delta\omega_p^4 r_0 \kappa_c \cos(r_0) + 4 - 4 r_0 \kappa_c \omega_p^2 \sin(r_0) + r_0^2 \kappa_c^2 \omega_p^4} \text{ dır.}$$

$\omega_\alpha(0)$ ise normalleştirilmiş öz-değerin sanal kısmının bifurkasyon parametresi α parametresine göre türevidir.

EK F. BİFURKASYON DENKLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

İndirgenmiş bifurkasyon fonksiyonu $g(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \varepsilon)$, J lineer operatörünün çekirdeği üzerinde aşağıdaki formda tanımlanmıştır:

$$\left(g_1^1(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \varepsilon), g_2^1(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \varepsilon), g_1^2(x_3, x_4), g_2^2(x_3, x_4)\right).$$

Burada (x_1, x_2, x_3, x_4) J lineer operatörünün çekirdeği üzerinde verilen koordinatlar temsil eder. Çalıştığımız uzay $C_{2\pi} \oplus C_{2\pi/\nu}$ uzayı olduğundan $g(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \varepsilon)$ indirgenmiş bifurkasyon fonksiyonu $SO(2) \times SO(2)$ simetrisine sahiptir. Bu özellik

$$g\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \\ g^4 \end{pmatrix}\right)$$

denklemi ile ifade edilir. Şimdi bu denklemi kullanarak $g(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \varepsilon)$ indirgenmiş bifurkasyon fonksiyonun bileşenlerinin analizini yapacağız.
$\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_2$, $x_2 = x_3 = 0$ olduğu zaman

$$g_1^1(-\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon) = -g_1^1(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon),$$

$$g_2^1(-\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon) = -g_2^1(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha, \beta, \varepsilon),$$

eşitliklerini elde ederiz.

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_2$, $x_2 = x_3 = 0$ olduğu zaman aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$g_1^2(-\alpha_2, 0) = -g_1^2(\alpha_2, 0), \; g_2^2(-\alpha_2, 0) = -g_2^2(\alpha_2, 0),$$

$$g_1^1(\alpha_1,0,-\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon) = g_1^1(\alpha_1,0,\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon)\,,$$
$$g_2^1(\alpha_1,0,-\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon) = g_2^1(\alpha_1,0,\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon)\,,$$

Bu eşitlikler g_1^1 ve g_2^1 fonksiyonlarının α_1 parametresine göre tek fonksiyonlar, α_2 parametresine göre ise çift fonksiyonlar olduğunu ispat eder. Böylece bu fonksiyonlar aşağıdaki formda ifade edilebilirler:

$$g_1^1(\alpha_1,0,\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon) = P_1(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha,\beta,\varepsilon)\alpha_1\,,$$
$$g_2^1(\alpha_1,0,\alpha_2,0,\alpha,\beta,\varepsilon) = P_2(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha,\beta,\varepsilon)\alpha_1\,.$$

Bu sonuçlar rezonans olmayan durumda çift Hopf bifurkasyonun genel sonuçlarıdır

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., "Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter I: reduced bifurcation equation", **Applicable Analysis**, 84, 437-449,(2005).

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., "Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter II: Analysis of Reduced Bifurcation Equation", **Applicable Analysis**, 84, 631-647, (2005).

DEMİR, A., HASANOV, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., "Delay Equations with Fluctuating Delay Related to the Regenerative Chatter", **Nonlinear Mechanics**, 41, 464-474, (2006).

DEMİR, A., NAMACHCHIVAYA, N.S., LANGFORD, W.F., "Nonlinear Delay Equations with Fluctuating Delay: Application to Regenerative Chatter", **ASME**, CD-ROM (2002).

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında İzmit`de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gebze`de tamamladı.1989 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünden 1993 yılında Matematik Mühendisi olarak mezun oldu. 1995-1997 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı bursu ile gittiği Amerika`da University of Illinois at Urbana-Champaign Üniversitesinde Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2003 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Uygulamalı Matematik Bilimleri Araştırma Merkezin de Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.