

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TTF (TRACE TYPE FUNCTIONAL) YÖNTEMİNİN BİR  
BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI**

**YÜKSEK LİSANS**

**Matematikçi Filiz BURHAN ENGİN**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Aylin BAYRAK**

**KOCAELİ, 2008**

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TTF (TRACE TYPE FUNCTIONAL) YÖNTEMİNİN BİR  
BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Filiz BURHAN ENGİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih: 7 Temmuz 2008

Tez Danışmanı

Üye

Üye

Yrd.Doç.Dr. M.Aylin BAYRAK Doç.Dr. Serdal PAMUK Yrd.Doç.Dr. Selmahan SELİM

()

()

()

KOCAELİ, 2008

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde başlangıç, sınır ve ek koşullar kullanılarak bilinmeyen katsayıların bulunması ve modellemelerinin yapılması uygulamalı bilimlerin güncel problemlerden biridir. Bu tip problemlerin modellenmesi çalışmalarda daha ekonomik sonuçlar vermiştir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve destekleyen danışmanım, sayın Yrd.Doç. Dr. M.Aylin Bayrak'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., MATEMATİK BÖLÜMÜ) ve sayın Yrd.Doç.Dr. Emine Can'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., FİZİK BÖLÜMÜ) yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	iii
TABLolar DİZİNİ .....	iv
ÖZET.....	v
İNGİLİZCE ÖZET.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. PROBLEMİN TANIMLANMASI.....	21
2.1. Trace-Type-Functional (TTF) Formülasyonu.....	21
2.2. Fixed Point Projection (FPP) Metodu .....	23
3. PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	25
3.1. Takip Yöntemi (Tridiagonal Matrix Algorithm)..	25
3.2. Sonlu Fark Şemaları.....	27
3.2.1. Açık şema .....	28
3.2.2. Kapalı şema.....	30
3.2.3. Crank-Nicolson şeması.....	32
4. SAYISAL ÖRNEKLER.....	35
4.1. Örnek 1 .....	35
4.2. Örnek 2 .....	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	44
KAYNAKLAR.....	46
KİŞİSEL YAYINLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	50

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1: $\Omega_{h\tau}$ kafesi.....	28
Şekil 3.2: Açık şema.....	29
Şekil 3.3: Kapalı şema.....	31
Şekil 3.4: Crank-Nicolson şema.....	32
Şekil 4.1: Kapalı şema; N=50, M=5 için a(x)değerleri.....	37
Şekil 4.2: Crank-Nicolson şema; N=50, M=5 için a(x) değerleri.....	38
Şekil 4.3: Kapalı şema; N=50, M=5, d=0.0005 ve $\varepsilon = 0.001$ için a(x)'deki random hatalar.....	38
Şekil 4.4: Kapalı şema; N=50, M=5, d=0.0001 ve $\varepsilon = 0.001$ için a(x)'deki random hatalar.....	39
Şekil 4.5: Kapalı şema; N=50, M=5 için a(x) değerleri.....	41
Şekil 4.6: Crank-Nicolson şema; N=50, M=5 için a(x) değerleri.....	42
Şekil 4.7: Kapalı şema; N=50, M=5, d=0.0005 ve $\varepsilon = 0.001$ için a(x)'deki random hatalar.....	42
Şekil 4.8: Kapalı şema; N=50, M=5, d=0.0001 ve $\varepsilon = 0.001$ için a(x)'deki random hatalar.....	43

## TABLULAR DİZİNİ

Tablo 4.1: $N=21$ ve $M=10001$ için gerçek $a(x)$ değerleri ve şemaların mutlak hataları.....	36
Tablo 4.2: $N=21$ ve $M=10001$ için gerçek $a(x)$ değerleri ve şemaların mutlak hataları.....	40

# TTF (TRACE TYPE FUNCTIONAL) YÖNTEMİNİN BİR BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI

Filiz BURHAN ENGİN

**Anahtar Kelimeler:** Parabolik denklemler, Isı Denklemi, Ters problemler, Bilinmeyen Ana katsayılar, Sonlu fark şemaları

**Özet:** Bu çalışmada, parabolik denklemde son ölçüm noktasından ana katsayının belirlenmesi ters problemi ele alınmıştır. Denklemde yeni değişkenin çıkmasıyla, problem başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte klasik olmayan parabolik denklem olarak yeniden formüle edilmiştir.

Yapılan bu çalışmada, problemin çözümü için TTF (Trace-Type-Functional) formülasyonu kullanılmıştır. Metodun amacı, ele alınan problemlerdeki kısmi diferansiyel denklemden bilinmeyen ana katsayıyı ek koşul yardımı ile ortadan kaldırarak, problemi yeniden başlangıç ve sınır değer problemi olarak ifade etmektir. Yeni formüle edilmiş problemi çözmek için FPP (Fixed Point Projection) iteratif algoritması uygulanmıştır.

Ele alınan probleme açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemaları uygulanarak, bu şemaların karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

# APPLICATION OF TTF (TRACE TYPE FUNCTIONAL) METHOD FOR ONE DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS

Filiz BURHAN ENGİN

**Keywords:** Parabolic equations, Heat equation, Inverse problems, Unknown leading coefficients, Finite difference schemes

**Abstract:** In this work, the inverse problem of determination of a leading coefficient in the parabolic equation from the final measurement is considered. After introducing a new variable, the problem is reformulated as a nonclassical parabolic equation along with the initial and boundary conditions.

Here, the solution of this problem is obtained by using TTF (Trace- Type-Functional) formulation. The strategy of method is to use additional specification to eliminate the unknown function from the partial differential equation and to can reformulate the considered problem as a initial-boundary value problem, then FPP (Fixed Point Projection) iterative algorithm is applied to solve the reformulated problem.

The finite difference schemes are used for solution of the problem such as Explicit, Implicit and Crank-Nicolson schemes.



## 1. GİRİŞ

Doğa olaylarının pek çoğu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu tip problemler hiperbolik, parabolik veya eliptik tipte denklemlerdir.

Fiziksel olayların birçoğu genellikle kısmi diferansiyel denklemlerde ters problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin uzayda gönderilen elektromanyetik dalgaların saçılmasına dayanarak sınır ölçüm sonuçlarını kullanarak yeraltı kaynaklarının bulunması, gözenekli bir ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, radyoaktif izotopların bozunumu ve ısı kaynağının belirlenmesine yönelik bilinmeyen kaynak teriminin veya kapasite teriminin belirlenmesi v.s. ters problemlerle ifade edilmektedir (Bellassoued ve Yamamoto, 2006).

Hadamard'a göre; aşağıdaki koşulları sağlayan probleme iyi formüle edilmiş (well-posed) problem denir.

- a-) Problemin çözümü vardır.
- b-) Problemin yalnız bir çözümü vardır.
- c-) Çözüm giriş verilerine sürekli bağlıdır; yani çözüm kararlıdır.

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa problem iyi formüle edilmemiş (ill-posed) problemidir. Ters problem, çoğu zaman çözümün kararsızlığı ile ilişkili olarak doğru formüle edilmemiş (ill-posed) problemidir. Bu problemlerin çözümü için Tikhonov regularizasyon yöntemi, Freidman iterasyon yöntemi ve benzeri gibi özel yöntemler gerekmektedir.

Ters katsayı problemleri 1955 yılında Lehner ve Wing, 1957 yılında Bykhovsky, 1959-1960 yıllarında Lax ve Phillips, 1961 yılında Sobolevsky, 1962 yılında B.F. Jones, Kato ve Fujita tarafından ele alınmıştır. Daha sonra J.R. Cannon ve P.C.

DuChateau da dahil çok sayıda bilim adamı tarafından araştırılmış ve bu konuda yüzlerce yayınlanmış makaleler vardır. Parabolik denklemlerin uygulaması ve analiz edilmesi, kaynak kontrol parametresinin geliştirilmesinde sürekli dikkat çekmektedir. Ters problemlerin pratik uygulamaları için, deneysel bulgular son derece büyük önem taşır. Bazı fiziksel parametreler (onlara  $x$  diyelim) doğrudan deneysel olarak elde edilemez, yalnız onların etkisi olan  $y$  fonksiyonu ölçülebilen bir değer olabilir.  $x$  ve  $y$  arasında fiziksel kurallara dayanan bir ilişki, genel olarak

$$Ax = y \quad (1.1)$$

denklemleri ile ifade edilmektedir. Bu denklemde  $A$  operatördür;  $x$  verildiği zaman  $y$ 'nin hesabı düz problem olarak,  $y$  verildiği zaman  $x$ 'in belirlenmesi ise ters problem olarak isimlendirilir.

Bu problemler deneysel olarak ölçülebilen bir niceliği varsayarak deneysel olarak ölçülemeyen ve denklemler ile ifade edilen başka bir niceliğin bulunmasını içerir.

En genel halde parabolik denklemler,

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, a) \quad (1.2)$$

olarak ifade edilir.

Parabolik denklemlerle ısı transferi, difüzyon olayları ve popülasyon dinamiği gibi problemler ifade edilmektedir.

(1.2) denklemindeki  $a$  giriş verileri, denklemin katsayıları veya bu denklemin çözümünün var ve tek olması için verilen sınır ve başlangıç koşulları olabilir. (1.2) denkleminin düzgün formüle edilmesi için, yeterli bir teori vardır.  $a$  bilinmiyorsa, bu fonksiyonu elde edilmek için ek koşula ihtiyaç vardır.

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar, iç noktalarda ve sadece çözümün arandığı bölge sınırlarında olmak üzere iki türlü verilebilir. Bazı durumlarda ek koşulların iç noktalarda elde edilmesi imkansız olduğundan, sadece sınırda verilen koşullarda problem çözülmektedir. Ele alınan fiziksel süreçte çeşitli ölçme şekilleri olabilir.

Bazı durumlarda ek koşul için yapılan ölçüm şekli seçilebilir. Bu ek koşullar çoğu zaman lokal özelliğe sahiptirler. Üç farklı tip vardır:

i) Dirichlet tipi,  $u(x_0, t) = h(t)$   $0 \leq t \leq T$

ii) Neumann tipi,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h(t)$   $0 \leq t \leq T$

iii) Robin tipi,  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit olmak üzere  $\alpha u(x_0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h(t)$   $0 \leq t \leq T$

Parabolik denklemlerin uygulamalarına örnekler olarak;

Isı İletimi:  $u_t - \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} u) = f$

Kimyasal Kinetik:  $u_t - D_1 u_{xx} = f_1(u, v)$

$$v_t - D_2 v_{xx} = f_2(u, v)$$

Nüfus Dinamiği:  $\frac{dP}{dt} = \alpha P$  veya  $\frac{\partial P}{\partial t} - DP_{xx} = f(P)$

verilebilir.

Burada  $D$  difüzyon katsayısı ve  $f$  kaynak terimidir. Yukarıdaki hallerin hepsinde, standart başlangıç ve sınır koşulları verilir.

Eğer  $D$  tek başına  $u$ 'nun bir fonksiyonu ise, bazı hallerde bir tek sınır ölçmesinin yeterli olduğu gösterilebilir. Bu problemlerin her birinde kullanılan yöntemler tamamen farklıdır.

Eğer  $D = D(t), D = D(x)$  veya  $D = D(u)$  bağıllığını biliyorsak, modeli bu bağlantıya göre oluşturabiliriz.

Bir ilk yaklaşım için  $D$ 'ye ait bir açılımda ilk birkaç terime karşılık gelmek üzere

$$D(x, t, u) \approx D_1(x) + D_2(u) + D_3(t) \quad (1.3)$$

düşünülebilir. Eğer terimlerden biri diğerlerinden üstün ise, bir ön bağıntı elde edebiliriz ve mümkün şekilde ana bağıllığın biçimini sabit tuttuktan sonra diğer terimleri yeniden elde edebiliriz.

Fiziksel süreci ifade eden matematiksel modeldeki değişmeyen terimler ihmal edilirler. Basitleştirilen modelin doğruluğu ancak deney yapma ile veya veriye uygun yaparak test edilebilir. Belirli parametre bölgesinde, basitleştirilen model uygun olabilir, ama geçerlilik limitleri genişletildiğinde, söz konusu sürece dönülmelidir ve model yeniden ele alınmalıdır (Cannon ve diğ., 1992).

Genelde, katsayılar fiziksel önemi olan ölçümlenmeleri ve parametreleri (örneğin, genlikleri, frekansları) yansıtırlar. Sadece, bir (veya mümkün olabilen birkaç) parametrenin değiştiği deneylerin kurulmasına çalışılır ve tekrarlanan gözlem ile bilinmeyen katsayıların bağıllık biçimini yeniden elde etmek gerekir. Maalesef; fiziksel kanunları ifade eden çoğu denklem gerçekte lineer olmayan denklemdir.

Örneğin; nüfus dinamiği ile ilgili klasik problemi göz önüne alalım:

$\lambda$  sabit bir çoğalma hızı ise

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \quad (1.4)$$

çoğalma kanununa götürür. Daha akla uygun bir model, kısıtlı çoğalmaya yol açan

$$\frac{du}{dt} = \lambda(u - \alpha u^2) = \lambda(1 - \alpha u)u = (\lambda - \alpha\lambda u)u$$

mantıksal denklemdir. Gerçekte, nüfus

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

formlu daha karmaşık bir çoğalma kanununa sahip olabilir.

Eğer bir  $t_1 < t < t_2$  zaman aralığı üzerinde bu adi diferansiyel denklemin  $u$  çözümünü kontrollü izleyebilirsek,  $f$ 'i elde edebiliriz. Örneğin  $t_1 < t < t_2$  aralığında

$$u(t) = h(t) \text{ ise,}$$

$$\frac{dh}{dt} = f(h(t))$$

elde ederiz ve buradan

$$f(\xi) = \frac{dh}{dt}(h^{-1}(\xi))$$

ifade edilebilir. Bu gözlem, zaman bağıllığı ek koşulunu verildiği sınır yakınında uzay bağıllığından çok üstün olduğu, yani  $|u_{xx}(x_0, t)| \ll |u_t(x_0, t)|$  olduğu, parabolik halde yakınsama sonuçlarının çoğuna temel teşkil eder (Pilant ve diğ., 1987a, 1987b, 1987c, 1988).

Parabolik denklemler için ters problemin klasik örnekleri şunlardır:

$c(u)u_t = u_{xx} + \gamma(x, t),$	$c \geq c_0 > 0$	bilinmeyen özgül ısı
$u_t = \partial_x(k(u)\partial_x u) + \gamma(x, t)$		bilinmeyen iletkenlik
$u_t = u_{xx} + f(u) + \gamma(x, t)$		bilinmeyen reaksiyon terimi
$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F(u(0, t))$		bilinmeyen sınır koşulu

Bunlar kanonik tek katsayılı ters problemlerdir. Katsayılar  $R^1$ 'den  $R^1$ 'e fonksiyonlardır.

Fonksiyonel bağıllığı elde etmek için doğru boyutlukta ilave veriler kullanmalıyız.

İlave veriler  $\Omega \times [0, T]$ 'nin bir alt kümesini  $R^1$ 'e ifade etmelidir. Bu problemler,

$$u_t = a(t)\Delta u + \gamma(x,t)$$

$$u_t = \vec{\nabla} \cdot (a(x)\vec{\nabla} u) + \gamma(x,t)$$

$$u_t = \Delta u + f(x,t)$$

$$u_t = \Delta u + p(x)u$$

bilinmeyen katsayının  $x$  veya  $t$ 'ye bağlı olduğu ama  $u$ 'ya bağlı olmadığı gibi ters problemlerin çözüm tekniklerine göre farklı problemlerdir (Cannon ve diğ., 1991).

Eğer problemlerde  $x \in \Omega \subset R^n$  ise, bu problemler bilinmeyen katsayının birden fazla değişkenli bir fonksiyonu olduğu problemlerdir. Bu problemlerin örnekleri Cannon (1984)'de verir.

Ters problemlerin çözüm yöntemlerini açıklamak için

$$u_t - u_{xx} = f(u) \tag{1.5}$$

$$u_x(0,t) = g_0(t), \quad u_x(1,t) = g_1(t) \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{1.7}$$

ve

$$u(0,t) = h(t) \tag{1.8}$$

ek koşuluyla verilen başlangıç sınır değer problemini ele alalım. Diğer katsayı problemleri Cannon ve diğ., (1978, 1980, 1992) ve Pilant ve diğ., (1986, 1987a, 1987c, 1988) tarafından ele alınmıştır.

Bu ters problemin çözümü  $h$  verildiğinde  $f$  için yazılan

$$R[f] = u(0,t; f) - h(t) = 0 \tag{1.9}$$

denkleminin çözümüne denktir. Başka deyişle, düz problemi ifade eden  $f \mapsto h$  eşleşmesinin tersi olan  $h \mapsto f$  eşleşmesini elde etmemiz gerekir. Bu ters problemin çözümü için çoğu artık algoritmalar

$$u(x, t) = \psi(x, t) + \iint K(x, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.10)$$

Green fonksiyonları temsiline dayandırılır. Burada (1.9) denklemini çözmek için gereken koşul  $\frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial f}$ , 'in tekil olmamasıdır. (1.10) denklemini  $x = x_0$  noktasında yazarsak

$$u(x_0, t) = \psi(x_0, t) + \iint K(x_0, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.11)$$

elde ederiz. (1.10)-(1.11) denklemler sistemi I.tür lineer olmayan Volterra integral sistemidir. Bu sistem tüm (1.5)-(1.8) bilgilerini içermektedir; ama sistemi bu şekilde çözmek zordur.

Kısmi diferansiyel denklem şeklinde yazıldığı zaman

$$u_t(0, t) - u_{xx}(0, t; f) = f(u(0, t))$$

veya  $u(0, t) = h(t)$  olduğuna göre

$$f(h(t)) = h'(t) - u_{xx}(0, t; f)$$

$$u_t(0, t) - u_{xx}(0, t; f) = h'(t) - \psi_{xx}(0, t) - \iint K_{xx}(0, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.12)$$

elde edilir. Bu problem Lipschitz koşulunu sağlıyor ise elde edilen  $f$  ele alınan ters problemin çözümüdür (Pilant ve diğ., 1987c).

(1.9) artık denklemin çözümü için uygulanan iki tip yöntem parametre tipli yöntemlerdir. Bu yöntemlerde  $f$ 'in sonlu  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  parametreler kümesiyle ifade edildiği, yani  $f = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  olduğu kabul edilmektedir.

Örneğin  $f(\xi) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \phi_i(\xi)$  burada  $\phi_i(\xi)$  temel fonksiyonlardır. Bu yöntemler aşağıda ele alınmıştır.

#### a) Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi

Ölçümlerin sayısı  $M$ , parametre uzayının boyutunu aşarsa bunun sonucunda aşırı tayin edilmiş olur. Yukarıdaki şekilde  $f$ 'ler için,

$$\min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^M w_i R[t_i]^2 \right\} = \min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^M w_i |u(x_0, t_i, f(\alpha_j)) - h(t_i)|^2 \right\} \quad (1.13)$$

problemi çözülür. Burada  $w_i > 0$  ağırlıklardır. Fonksiyonel çok sayıda lokal minimuma sahipse bu zor bir optimizasyon problemidir. Bu da en küçük kareler tipli yöntemlerin zorluklarından biridir.

#### b) Sıralama Yöntemi

Bu yöntem temel fonksiyonları değişmez yapar ve problemi aşağıdaki lineer olmayan cebirsel sisteme indirger.

$$R[f(\alpha_j)](t_j) = u(0, t_j, f(\alpha_j)) - h(t_j) = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Bu yöntem sonlu sayıda sıralanmış noktalarda farkı sıfırlayarak elde edildiğine göre sıralama yöntemi olarak isimlendirilir.



Ele alınan problemin çözümü için kullanılan yöntemlerden diğer bir sınıf iterasyon tipli yöntemlerdir. Bu yöntemler  $u$ 'nun  $f$ 'e göre Gateaux türevi ile bağlıdır. Gateaux türevi lineer kısmi diferansiyel denklemi sağlar;  $u$  fonksiyonunun  $f$  katsayısına nasıl bağlı olduğunu görmek için,  $u(x, t; f + s\phi)$  niceliği oluşturulur.  $u(x, t; f + s\phi)$  fonksiyonu aşağıdaki sınır değer problemini sağlar.

$$u_t - u_{xx} = f(u) + s\phi(u) \quad (1.14)$$

$$u_x(0, t) = g_0(t) \quad (1.15)$$

$$u_x(1, t) = g_1(t) \quad (1.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.17)$$

$\hat{u} \equiv \frac{\partial}{\partial s} u(x, t; f + s\phi)|_{s=0} \equiv J[f]\phi$  ile Gateaux türevi tanımlanır,  $\hat{u}$  nın aşağıdaki

denklemini kolayca sağladığı görülür:

$$\hat{u}_t - \hat{u}_x = f'(u)\hat{u} + \phi(u) \quad (1.18)$$

$$\hat{u}_t(0, t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\hat{u}_x(1, t) = 0 \quad (1.20)$$

$$\hat{u}(x, 0) = 0 \quad (1.21)$$

burada  $u = u(x, t; f)$  Gateaux türevi  $L_x = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  şeklinde tanımlı Frechet türevine eşdeğer olsun diye yeterince pürüzsüz olduğu kabul edilir.  $f$  ve  $\phi$  fonksiyonlarının bilinmesi (1.12) kısmi diferansiyel denklemini ve onun çözümünü belirler. Gerçekten bu durumda  $\hat{u}(x, t)$  çözümü için

$$\hat{u}(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \hat{K}(x, y, t - \tau) \phi(u(y, \tau)) dy d\tau$$

elde edilir. Burada  $\hat{K}$ ,  $\partial_t - \partial_{xx} - f'(u)$  operatörü için Green fonksiyonudur.

Yöntemlerin (1.5)-(1.8) problemine uygulaması aşağıdaki iterasyon formülü ile yapılmaktadır:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= f^{(n)} + F[R(\dots, f^{(n)})] \\ &= f^{(n)} + F[u(0, t; f^{(n)}) - h(t)] \end{aligned}$$

burada  $F$ , sadece orijinde sıfır olan bir fonksiyondur. Ancak ve ancak  $R \equiv 0$  ise bir çözüme ve yakınsaklığa sahip olunur. Ardışık iterasyon dizisi

$$f = T[f] = [I + FoRouo]f$$

eşleminin sabit noktasının bulunmasına eşdeğerdir. Bu iterasyon

$$f^{(n)} \mapsto u^{(n)} \mapsto R^{(n)} \mapsto F \mapsto f^{(n+1)}$$

şeklinde bilinir. Bu dizinin yakınsaklığı  $F$  dönüşümünün Frechet türevine bağlıdır.

Eğer  $\left| I + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial f} \right| < 1$  sağlanırsa, o zaman yakınsaklık belirlenebilir. İterasyonun

yakınsaklığını garanti etmek için,  $F$  seçilebilir olmalıdır.  $F'$  in seçimi iterasyonun yakınsaklığını sağlar ve farklı iterasyon şemasını doğurur. Bu iterasyon şemaları:

a) Newton-Raphson

Bu yöntemle  $R[f] = u(0, t; f) - h(t) = 0$  lineer olmayan denklemin çözümü

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - \left( \frac{\partial R}{\partial f} \right)^{-1} (f^{(n)}) . R[f^{(n)}]$$

iterasyonu ile yapılır.  $J \equiv \frac{\partial R}{\partial f}$  olarak

$$f_{n+1} = f_n - J[f_n]^{-1} .R[f_n] = f_n - J[f_n]^{-1} (u(0,t; f_n) - h(t)) \quad (1.22)$$

yazılabilir. Tekrar düzenleyerek,

$$J[f_n] (f_{n+1} - f_n) = h(t) - u(0,t; f_n)$$

olur. Bu denklemden  $f_{n+1}$  elde edilebilir.  $\hat{u} \equiv J[f_n] (f_{n+1} - f_n)$  alınarak,  $\hat{u}$  'nun

$$\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} = f_n'(u_n) \hat{u} + f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \quad (1.23)$$

$$\hat{u}_x(0,t) = 0 \quad (1.24)$$

$$\hat{u}_x(1,t) = 0 \quad (1.25)$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \quad (1.26)$$

sistemini ve  $x = 0$  'daki

$$\hat{u}(0,t) = h(t) - u(0,t; f_n) \quad (1.27)$$

ek koşulunu sağladığı gösterilebilir. Buradan,

$$\hat{u}(0,t; f) = \int_0^t \int_0^1 \hat{K}(0,y,t-\tau) [f_{n+1}(u_n(y,\tau))] dy d\tau$$

olduğu bellidir. Burada  $\hat{K}, \partial_t - \partial_{xx} - f_n'(u_n)I$  operatörü için Green fonksiyonudur.

Bu I. tip Volterra integral denklemidir.  $x=0$  sınırı üzerinde (1.23) denklemi ve (1.27) sınır koşulu kullanılarak  $f_{n+1}$  'i elde etmek için

$$h'(t) - u_t(0,t; f_n) - \hat{u}_{xx}(0,t; f^{(n+1)}) =$$

$$f_n'(u_n(0,t))(h(t) - u_n(0,t)) + f_{n+1}(u_n(0,t)) - f_n(u_n(0,t)).$$

denklemi elde edilir. Bu  $f_{n+1}$  için lineer olmayan denklemidir ve iterasyonla çözülür.

b) Quasi-Newton

Bu yöntemle  $J[f_n]^{-1}$ 'in yerine sabit  $K$  operatörü alınır ve bunun sonucunda

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - K.R[f^{(n)}]$$

elde edilir. Doğal Quasi-Newton yöntemi (1.22) içinde  $f'_n(u_n)$ 'nin  $f'_n(h)$  ile değiştirilmesiyle tanımlanmaktadır. Başka mümkün şema  $J[f_n]$ 'in bazı iterasyonlar için sabit tutulmasıyla elde edilmektedir.

(1.5)-(1.8) ters problemine farklı bir yaklaşım (1.12)'yi  $h$  cinsinden  $f$  için çözersek elde edilir.

$$f(s) = h'(h^{-1}(s)) - u_{xx}(0, h^{-1}(s)) \quad (1.28)$$

(1.5)'den (1.28)'i kullanarak  $f$ 'i ortadan kaldırırsak

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = h'(h^{-1}(u(x, t))) - u_{xx}(0, h^{-1}(u(x, t))) \quad (1.29)$$

Trace Type Functional (TTF) denklemine ulaşırız. Bu denklemin düzgün tanımlı olması için ek koşul  $0 \leq h^{-1}(u(x, t)) \leq t$  kısıtlamasını sağlamak zorundadır. Böylece (1.29) düz problemi, (1.28)'den elde edilen  $f$  ile  $u(x, t)$  için çözülmektedir (Fatullayev ve Can, 2000).

Bu yöntemin zorluğu elde edilen denklemin lineer olmayan denklem olmasından kaynaklanır. Bu yöntemle ilgili bazı sonuçlar zamana bağlı değişken için sonlu farklar uygulanarak Cannon (1990)'da elde etmiştir. Eğer (1.12)'den aşağıdaki temsili

$$u(x, t) = \psi(x, t) + \iint K(x, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau$$

kullanılarak  $u$  yok edilirse

$$f(h(t)) = h'(t) - \psi(0, t) - \iint K_{xx}(0, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.30)$$

Fixed Point Projection (FPP) yöntemi elde edilir. FPP, TTF ve “sıralama” yöntemleri arasında bağlantı vardır. TTF denklemini için tam kapalı şema aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = h'(h^{-1}(u^{(n+1)}(x, t))) - u_{xx}^{(n+1)}(0, h^{-1}(u^{(n+1)}(x, t))). \quad (1.31)$$

Bu ise aşağıdaki iki denklem çiftine ayrılabilir:

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = f^{(n+1)}(u^{(n+1)})$$

$$f^{(n+1)}(h(t)) = f'(t) - u_{xx}^{(n+1)}(0, t)$$

$0 \leq t \leq t_j$  için bu yöntemle TTF denkleminin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilen monotonluğu ve aralık üzerinde verilen koşuldan dolayı  $f^{(n+1)}$ 'in  $[h(t_j), h(t_{j+1})]$  aralığında değiştiği görülebilir. Bu ise (1.30)'daki lineer olmayan Volterra integral denkleminin  $t > t_j$  için çözülmesi olarak yorumlanabilir.

$$f(h(t)) = h'(t) - \psi(0, t) - \int_0^{t_j} \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_{j+1} - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau - \int_{t_j}^t \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_{j+1} - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau. \quad (1.32)$$

$0 \leq t \leq t_j$  için  $u(x, t) \in [h(t_0), h(t_j)]$  olduğundan dolayı bu denklemin sağ tarafından ilk üç terim bilinmektedir.  $\bar{f}$  için  $u_t(0, t_j, \bar{f}) = h'(t_j)$  olacak şekilde  $h'(t)$  düzenlenirse o zaman ,

$$\bar{f}(\bar{u}(t_j)) = h'(t_j) - \psi(0, t_j) - \int_0^{t_j} \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_j - \tau) \bar{f}(\bar{u}(y, \tau)) dy d\tau$$

elde edilir.

Bir boyutlu durumda ek koşul ve sınır verilerin etkisini görmek ve modeli ona göre yapmak mümkündür. Yüksek boyutluda, bu strateji çalışmaz. Aşağıdaki ters kaynak problemi;

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \Omega \times [0, T] \quad (1.33)$$

denkleminde

$$u = h \quad \partial\Omega \times [0, T] \quad (1.34)$$

sınır koşulunu ve ek Neumann koşulunu

$$\frac{\partial \psi(x_0, t)}{\partial \nu} = g_0(t) \quad (1.35)$$

kullanarak  $f(u)$  'nun bulunması problemini ele alalım.

Ek koşul, bir boyutlu eğri üzerinde verilmiştir. (1.10) temsilini kullanarak,

$$g_0(t) = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi(x_0, t)}{\partial \nu} + \iint \frac{\partial K(x_0, y, t - \tau)}{\partial \nu} f(u(y, \tau)) dy d\tau$$

Bu Neumann veri-katsayı dönüşümü olup  $f(u)$  için I. tip lineer olmayan integral denklemdir. Herhangi basit yöntemle bunun II. tipe nasıl dönüşeceğini görmek açık değildir. Jakobi iterasyon yönteminde benzeşim ile diagonal terimleri çıkarmak II. tip denklemini elde etmek için mümkündür;

$$\int_0^t k(t - \tau) f(h(\tau)) d\tau = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - g(t) + \iint \frac{\partial K}{\partial \nu} (f(h(\tau))) - f(u(y, \tau)) dy d\tau$$

burada  $k(t) = \int_0^1 K(x_0, y, t) dy$  ile ifade edilir. Genelde bu, kesirli mertebeli çekirdeğe sahip integral denklemlerinin tersine götürür ki bunların tersi lokal diferansiyel operatör değildir.

(1.5)-(1.7) denklemlerini

$$E(t) = \int_0^t u(x, t) dx$$

ek koşulu ile ele alalım.  $[0,1]$  üzerinde (1.5)'i integre edersek

$$E'(t) = g_1(t) - g_0(t) - \int_0^1 f(u(y, t)) dy \quad (1.36)$$

elde edilir. Bu  $K = 1$  pürüzsüz çekirdeği ile, I. tip lineer olmayan Fredholm integral denklemdir. Bu durum iyi değildir; ama  $f_1 > f_2 \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow E_1 > E_2$  olduğu kolayca görülür ve  $E$   $f$ 'in monoton fonksiyonudur. Bu ise sıralama yöntemiyle,

$$E(t_j) = \int_0^1 \bar{f}(u(x, t_j)) dx$$

koşulunu sağlayan bir tek parça parça lineer  $\bar{f}$  fonksiyonu verecektir.

Eğer  $u$ , bilinmeyen katsayı  $f$ 'in artan bir fonksiyonu ve  $f_1 > f_2$  ise,  $u(x_0, t; f_1) > u(x_0, t; f_2)$ . Bu yöntemle sıralama yöntemleri oldukça kullanışlıdır. Eğer ilk değer  $f_0$  bilirse,  $u_0 < u < u_1$  aralığında  $f(u) \approx f_0 + M(u - u_0)$  yazılabilir ki burada  $M$ ,  $u(0, t_1; f) = h(t_1)$  koşulunu sağlamasından elde edilmiş bir eğimdir.

Monotonluk yüzünden bu denklemleri sağlayan birden fazla olamayan  $M_0$  değeri vardır. Bu yolla  $M_i$ 'nin ardışık değerleri bulunur.

Düz problem lineer olmayan problem oldukları için  $f \mapsto u|x, t; f|$  dönüşümü üzerinde hesaplar çok kesin olmalıdır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinde sınır değerlendirilmesinde tekil integral denklemler

teorisi kullanılmalıdır. Bu zorluk yüzünden, sayısal simülasyonlar çok faydalıdır. Problemleri sonlu boyuta indirgemek zorlukları tam olarak kaldırmaz; ama gerçek veriler çoğu zaman kesikli oldukları için daha avantajlıdır.

Tezde, başlangıç sınır değer koşullarıyla birlikte son zaman adımı  $t = T$  'de ek koşulla verilen bazı uzay değişkenine bağlı bilinmeyen katsayıların parabolik denklemden bulunması ters problemlerinden bahsedilecektir. Problemde ek koşul, zaman değişkenine bağlı çözüm fonksiyonu içeren lineer olmayan parabolik denkleme dönüştürmek için kullanılır. Bu dönüşüm, Schauder sabit nokta teoremini uygulayarak bu tip ters problemlerin varlık koşulunu ispatlamayı sağlar (Chadam ve Yin, 1990).

$u(x, t)$  'nin yanında  $b(x), c(x)$  ve  $d(x)$  gibi katsayıların birinin bulunması problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$u_t = \Delta u + b(x)b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + d(x)f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (1.37)$$

$$u(x, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in S_T = S \times (0, T] \quad (1.38)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.39)$$

ve ek koşul

$$u(x, T) = u_1(x) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.40)$$

Burada  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $\Omega \subset R^n$  'de sınırlanmış bir bölge  $S = \partial\Omega$  bu bölgenin sürekli sınırı ve  $i = \overline{1, n}$  ' dir.

Son zamanlarda, bu tip parabolik denklemler çok fazla dikkat çekmeye başlamıştır. Bilinmeyen fonksiyonların sadece zaman değişkenine bağlı olduğu denklemlerle ve bu problemlerin iyi tanımlılığı üzerinde Jones (1962, 1963), Cannon (1964), Cannon ve Zachman (1982), gibi daha pek çok bilim adamı çalışmıştır. Bazı bilim adamları bu tip problemleri oldukça farklı bir bakış açısıyla ele almışlardır (Cannon ve Yin,



1989a). Problemede verilen ek koşul, bilinmeyen katsayıyı uzay değişkenine bağlı çözüm fonksiyonu aracılığıyla yazmak için kullanılır. Böylece klasik olmayan parabolik denklemlerle normal başlangıç sınır değer problemi elde edilir.

$$u_t(x,t) = F(x,t,u,u_x,u_{xx},u(x_0,t),u_x(x_0,t),u_{xx}(x_0,t)) \quad (1.41)$$

Burada  $x_0 \in \overline{\Omega}$  'da sabit bir noktadır. Bu problemin varlık ve teklifi Cannon ve Yin (1989a, 1989b), Yin (1989) tarafından incelenmiştir. Parabolik denklemlerde bilinmeyen katsayılar uzay değişkenine bağlı olduğunda problem çok daha zor ve karmaşık hale gelir. Birkaç bilim adamı, kısmen uzay değişkenine  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ( $m < n$ ) bağlı bilinmeyen parametre problemi üzerinde çalışmış ve varlıkla ilgili sonuçlar için yeterli koşullar vermiştir (Beznoshchenko, 1975, 1983). (1.37)'de bir boyutlu denklemden  $c(x)$ 'in belirlenmesinde (1.38)-(1.39) başlangıç, sınır koşulu ve

$$u(x_0,t) = g(t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \in [0,1]$$

ek koşulu kullanılarak Pierce (1979) ve Suzuki (1985) Gelfand-Levitan teorisiyle problemin teklifiğini ispatlamışlardır. Rundell (1980, 1983) farklı ek koşullarla benzer sonuçlar elde etmiştir. (1.40)'daki ek koşul verildiğinde Rundell (1987), pozitif fonksiyonlar sınıfında çözümün teklifiğinin değişik bir ispatını verir ve bu problemin varlığını açık soru olarak bırakır. Varlık teoremi yeterli koşullar altında elde edilmiştir (Prilepko ve Solov'ev, 1987). Fakat bu koşullar bilinen veriye bağlıdır ve ispatlanması zordur.(1.37)'de  $d(x)$ 'in belirlenmesinde Cannon (1968),  $f(x,t) \equiv 1$  olması halinde problemin teklifiğini göstermiştir. Daha sonra bu sonuç Cannon ve Ewing (1976), tarafından  $f(x,t) \equiv f(x)$  ile daha genel lineer parabolik denklem için genelleştirilmiştir. Rundell (1980), analitik yarı gruplarla  $f(x,t) \equiv 1$  için varlık ve teklifiği göstermiştir. Bilinen veriler üzerinde bazı kısıtlamalarla genel  $f(x,t)$  ile bu problemin teklifiğine ek olarak varlığı da elde edilmiştir (Prilepko ve Solov'ev, 1987). Parabolik ters problemlerde çözümün teklifiği ile ilgili başka sonuçlar da bulunmuştur (Isakov, 1982). Şu anki bilgilere göre  $b(x)$ 'in bulunması için hiçbir varlık teoremi yoktur. Burada bilinmeyen katsayılar  $b(x), c(x)$  ve  $d(x)$ 'in denklemden yok edilmesinde yeni bir yol uygulanır. Problemler, zaman değişkeniyle çözüm

fonksiyonunu içeren klasik olmayan parabolik denklemlere dönüştürülür (Cannon ve Yin, 1989a). Ayrıca bu durumdaki başlangıç koşulu, başlangıç ve son zaman adımımda değerler içeren bir bağıntı ile verilir. Yardımcı problem ele alınarak bir operatör tanımlanır ve operatörün Schauder sabit nokta teoremiyle bir sabit noktayı içerdiği gösterilir.

$$u_t = \Delta u + b(x)b_i(x)u_{x_i} \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.42)$$

denklemini ve (1.38)-(1.40) başlangıç ve sınır koşulları ile bilinmeyen katsayı  $b(x)$  ve çözüm fonksiyonu  $u(x,t)$  nin bulunması problemi ele alınsın.

$$v(x,t) = u_t(x,t). \quad (x,t) \in \overline{Q_T}$$

dönüşümü uygulanıp (1.42)'de t üzerinden diferansiyellenirse;

$$v_t = \Delta v + b(x)b_i(x)v_{x_i} \quad (1.43)$$

elde edilir.

Ek koşul (1.40) ve  $\sum_{i=0}^n b_i(x)u_{1x_i} \neq 0 \quad x \in \overline{\Omega}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{u_t(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{1x_i}(x)} \\ &= \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{1x_i}} \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Böylece (1.42) problemi aşağıdaki probleme eşdeğer olur.

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{1x_i}} b_i(x)v_{x_i} \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.45)$$

$$v(x,t) = g_t(x,t) \quad (x,t) \in S_T \quad (1.46)$$

$$v(x,0) = \Delta u_0(x) + k(x)[v(x,T) - \Delta u_1(x)] \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.47)$$

Burada  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $0 < k(x) < 1$  ve  $k(x) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{0x_i}(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{1x_i}(x)}$ 'dir.

(1.45) denklemi  $v(x, T)$  yi içerdiğinden ve (1.47) deki farklı başlangıç koşulundan dolayı klasik değildir. Bu klasik olmayan denklemin varlığı Schauder sabit nokta teoremiyle gösterilebilir.

$$u_t = \Delta u + c(x)u \quad (1.48)$$

denklemi ve (1.38)-(1.40) başlangıç ve sınır koşulları ile bilinmeyen katsayı  $c(x)$  ve çözüm fonksiyonu  $u(x, t)$ 'nin bulunması problemi ele alınsın.

Böylece, (1.48) problemi

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x, T) - \Delta u_1(x)}{u_1(x)} v \quad (x, t) \in Q_T \quad (1.49)$$

$$v(x, t) = g_t(x, t) \quad (x, t) \in S_T \quad (1.50)$$

$$v(x, 0) = \Delta u_0(x) + \frac{v(x, T) - \Delta u_1(x)}{u_1(x)} u_0(x) \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u_1(x) \neq 0 \quad (1.51)$$

eşdeğer problemi haline dönüşür.

Çözümün varlığını elde etmek için, klasik olmayan (1.49)-(1.51) probleminden keyfi bir başlangıç koşulu  $u_0(x)$  ile yeterli koşulları vermek zordur. Burada sadece  $u_0(x) \equiv 0$  için özel koşul ele alınabilir.

Son olarak  $u(x, t)$  ve  $d(x)$ 'in bulunması problemi aşağıdaki gibi gösterilir.

$$u_t = \Delta u + d(x)f(x, t) \quad (1.52)$$

Başlangıç ve sınır koşulları (1.38)-(1.40)'da verildiği gibidir. (1.52) probleminin eşdeğer formu şöyledir:

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{f(x,T)} f_t(x,t) \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.53)$$

$$v(x,t) = g_t(x,t) \quad (x,t) \in S_T \quad (1.54)$$

$$v(x,0) = \Delta u_0(x) + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{f(x,T)} f(x,0) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.55)$$

Maksimum prensibini uygulamak için, çok iyi bilinen  $v(x,t) = e^{\beta t} w(x,t)$ ,  $(x,t) \in \overline{Q_T}$  dönüşümü yapılır. Burada  $\beta$  sabit bir sayıdır.  $w(x,t)$  için denklem şöyle yazılır:

$$w_t = \Delta w - \beta w + \frac{w(x,T) e^{\beta T} - \Delta u_1(x)}{f(x,T)} e^{-\beta t} f_t(x,t) \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.56)$$

$$w(x,t) = e^{-\beta t} g_t(x,t) \quad (x,t) \in S_T \quad (1.57)$$

$$w(x,0) = \Delta u_0(x) + \frac{w(x,T) e^{\beta T} - \Delta u_1(x)}{f(x,T)} f(x,0) \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.58)$$

Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. bölümde, ısı denkleminde bilinmeyen ana katsayının bulunması problemi tanımlanarak, problemin çözümü için uygulanan TTF (Trace Type Functional) ve FPP (Fixed Point Projection) metodu ele alınmış bu çözüm metotlarının uygulanması hakkında gerekli açıklamalara yer verilmiştir.
3. bölümde, problemin çözümünde kullanılan TDMA (Tridiagonal Matris Algoritması) yöntemi açıklanarak; sonlu fark şemaları ve şemaların kararlılıkları ile ilgili bilgiler verilmiştir.
4. bölümde, ele alınan problemle ilgili sayısal örnekler verilerek, çözüme ilişkin sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.
5. bölümde, ele aldığımız problemin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiştir.

## 2. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Bu bölümde, ısı denkleminde ana katsayı  $a(x)$  ve sıcaklık fonksiyonu  $u(x,t)$  nin bulunması ters problemi ele alınmıştır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.2)$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$u(l,t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

ve ek koşul

$$u(x,T) = u_1(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.5)$$

(2.1)-(2.5) probleminin tekliği üzerinde çalışılmıştır (Rundell, 1987). Problemin varlığı ise Schauder fixed-point teoremiyle gösterilmiştir (Hu ve Yin, 1993). Bazı bilim adamları ısı denkleminde ek koşuldan ana katsayıyı belirleme problemi üzerinde çalışmıştır (Jiang ve Tao, 2001).

### 2.1 Trace-Type-Functional (TTF) Formülasyonu

Parabolik denklemler için yazılı bilinmeyen özgül ısı, bilinmeyen iletkenlik, bilinmeyen reaksiyon terimi ve bilinmeyen sınır koşulu gibi ters problemler verilen ek koşula bağlı TTF formülasyonu ile çözülebilmektedir (Can, 2000).

Bu yöntemde ele alınan problemlerdeki bilinmeyen katsayı ek koşul yardımı ile ortadan kaldırılır (Aslan, 2007). Problem yeniden başlangıç ve sınır değer problemi olarak ifade edilir ve standart çözüm yöntemleri uygulanır (Can, 2005)

Bu çalışmada, ana katsayı  $a(x)$  ek koşul yardımıyla çekilip, (2.1)-(2.5) problemi yeniden formüle edilir.

$v(x, t) = u_t(x, t)$  olsun. Ek koşul (2.1) denkleminde uygulanır.

$$v(x, T) = a(x) u_{xx}|_{t=T} \quad (2.6)$$

$$u_{xx}|_{t=T} = u_{xx}(x, T) = u_{1xx}(x) \quad (2.7)$$

$$v(x, T) = a(x) u_{1xx}(x) \quad (2.8)$$

$$a(x) = \frac{v(x, T)}{u_{1xx}(x)}, \quad (u_{1xx}(x) \neq 0) \quad (2.9)$$

(2.1) denklemi  $t$ 'ye göre diferansiyellenirse

$$v_t = \frac{v(x, T)}{u_{1xx}(x)} v_{xx} \quad (x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T] \quad (2.10)$$

ana katsayıyı Trace Type Functional olarak içeren (2.10) lineer olmayan parabolik denklemi elde edilir (Azari, 2007).

$$v(0, t) = g_{1t}(t) \quad t \in (0, T) \quad (2.11)$$

$$v(1, t) = g_{2t}(t) \quad t \in (0, T) \quad (2.12)$$

$$v(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)|_{t=0} \quad x \in (0, 1) \quad (2.13)$$

$t = 0$  için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$v(x, 0) = \frac{v(x, T)}{u_{1xx}(x)} u_{0xx} = \frac{u_{0xx}(x)}{u_{1xx}(x)} v(x, T), \quad x \in (0, 1) \quad (2.14)$$

Lokal olmayan terim  $v(x, T)$ 'den dolayı (2.10) denklemi klasik değildir. Ayrıca başlangıç koşulu (2.14) bilinmemektedir.

Kolayca gösterilebilir ki eğer  $u(x,t), a(x)$  (2.1)-(2.5) probleminin çözümüyse  $v(x,t)$  (2.10)-(2.14) probleminin çözümüdür. Tam aksine  $v(x,t)$  (2.10)-(2.14)'ün çözümüyse,  $v(x,t) = u_t(x,t)$  ifadesi 0'dan  $t$ 'ye integralenir.

$$\int_0^t v(x, \tau) d\tau = u(x, t) - u(x, 0) \quad (2.15)$$

ve (2.2)'den

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t v(x, \tau) d\tau \text{ olduğu görülür.}$$

## 2.2. Fixed Point Projection (FPP) Metodu

Yeni formüle edilmiş problemi çözmek için FPP metodu kullanılabilir.(2.10)-(2.14) sistemine sonlu fark şeması uygulanır.  $\tau = \Delta t > 0$  ve  $h = \Delta x > 0$  zaman ve uzay adımları olmak üzere,  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$  ve  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ . Burada;  $t_j = j\tau, x_i = ih$  sırasıyla  $[0, T]$  ve  $[0, 1]$  kafeslerini gösterir. Aynı zamanda  $v_i^j, u(x_i, t_j)$ 'ye yaklaşım olsun. (2.10)-(2.14) sistemine kapalı sonlu fark şeması uygulanınca aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau} = \frac{v_i^M}{u_{1xx}(x_i)} \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2}, \quad j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.16)$$

$$v_0^j = g_{1t}(t_j), \quad v_N^j = g_{2t}(t_j) \quad j = \overline{0, M}, \quad (2.17)$$

$$v_i^0 = \frac{u_{0xx}(x_i)}{u_{1xx}(x_i)} v_i^M, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.18)$$

(2.16)-(2.18) sistemini çözmek için FPP (Fixed Point Projection) iteratif algoritması kullanılır.

Başlangıç zaman adımında  $v_i^{M,0}$  ifadesini  $v_0^M = g_{1t}(t_M)$  ve  $v_N^M = g_{2t}(t_M)$ 'nin lineer interpolasyonu olarak  $v_i^{M,0} = g_{1t}(t_M) + (g_{2t}(t_M) - g_{1t}(t_M))x_i, i = 1, 2, \dots, N-1$

biçiminde yazılır. Bir sonraki değer  $v_i^{M,1}$ 'yi bulmak için aşağıdaki sistem çözülür.  $s$  iterasyon sayısını göstermek üzere;

$s = 1$  için;

$$\frac{v_i^{j,s} - v_i^{j-1,s}}{\tau} = \frac{v_i^{M,s-1}}{u_{1xx}(x_i)} \frac{v_{i+1}^{j,s} - 2v_i^{j,s} + v_{i-1}^{j,s}}{h^2}, \quad j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.19)$$

$$v_0^{j,s} = g_{1t}(t_j), \quad v_N^{j,s} = g_{2t}(t_j) \quad j = \overline{0, M}, \quad (2.20)$$

$$v_i^{0,s} = \frac{u_{0xx}(x_i)}{u_{1xx}(x_i)} v_i^{M,s-1} \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.21)$$

Verilen  $\varepsilon$  ve bazı  $s$ 'ler için;

$$\max_i |v_i^{M,s} - v_i^{M,s-1}| \leq \varepsilon \quad (2.22)$$

koşulu sağlanıncaya kadar işleme devam edilir. Daha sonra;

$$a_h(x_i) = \frac{v_i^{M,s}}{u_{1xx}(x_i)}$$

bulunur.





şeklinde aranır;  $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$  bilinmeyen katsayılardır. Bu çözümden yola çıkarak,

$$y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) denklemini (3.5)'de yerleştirilirse,

$$y_{j-1} = \alpha_j (\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + \alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.6)$$

ifadesi bulunur. Bütün bunlar (3.2)'de yazıldığında

$$[\alpha_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + b_j] y_{j+1} + [\beta_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + a_j \beta_j + f_j] = 0, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.7)$$

denklemini elde edilir. Eşitliğin sağlanması için  $\alpha_{j+1}$  ve  $\beta_{j+1}$  katsayıları öyle seçilmelidir ki parantezler içi sıfıra eşit olsun; o zaman

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - a_j \alpha_j}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.8)$$

olmalıdır ve  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j > 1$ )'lerin bulunması için başlangıç  $\alpha_1$  ve  $\beta_1$  değerlerinin verilmesi gerekir. (3.4) denkleminde  $j = 0$  olduğunda,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1 \quad (3.9)$$

bulunur ki; bu durumda  $\alpha_1 = \chi_1, \beta_1 = \mu_1$  elde edilir. Dolayısıyla (3.8) ifadesi ile  $\alpha_{j+1}$  ve  $\beta_{j+1}$  katsayıları bulunur ve buna takip yönteminin (TDMA) düz gidişi denir. Eğer ters takip yöntemi kullanılacaksa önce  $y_N$ 'nin bilinmesi gerekir. (3.4) denkleminde  $j = N-1$  yazılırsa  $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$  bulunur ve buradan,

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N} \quad (3.10)$$

elde edilir.  $y_N$  bilindikten sonra (3.8) formülü ile tüm  $y_j$ 'lerin bulunmasına ters takip denir. Takip (TDMA) yönteminin kullanılabilmesi için,

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

ve

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 2 \quad (3.12)$$

koşullarının sağlanması gerekir.

### 3.2 Sonlu Fark Şemaları

$\tau$  zamana bağlı adım uzunlukları,  $h$  uzay koordinatları,  $M$  ve  $N$  tamsayılar olmak üzere,

$x$  değişkeni için  $\Omega_h$  kafesi

$$\Omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}$$

$t$  değişkeni için  $\Omega_\tau$  kafesi

$$\Omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M\tau = T\}$$

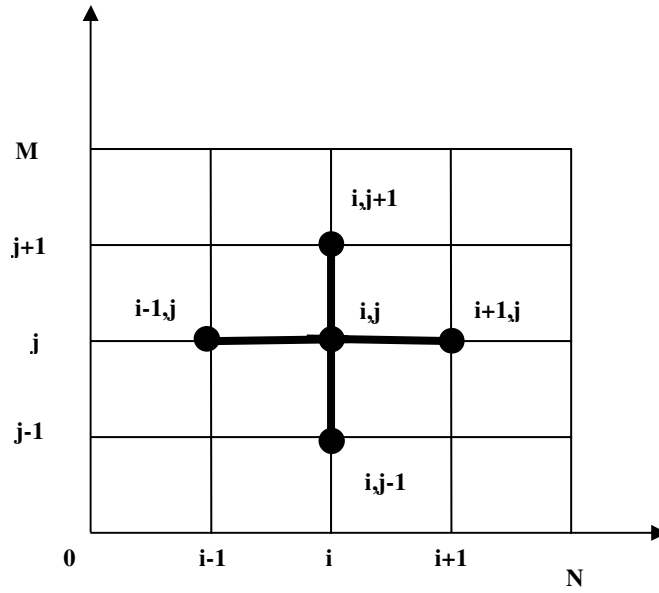
şeklinde oluşturulur.

$(x_i, t_j)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$  noktaları,  $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$  şebekelerinin noktaları olmak üzere

$$\tau = \Delta T > 0, \quad h = \Delta x > 0$$

$$\Omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = ih, \quad t_j = \tau j, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}, \quad h = \frac{1}{N}, \quad \tau = \frac{T}{M} \right\} \quad (3.13)$$

kafesi yazılır ve Şekil 3.1 deki gibi gösterilir.



Şekil 3.1:  $\Omega_{h\tau}$  kafesi

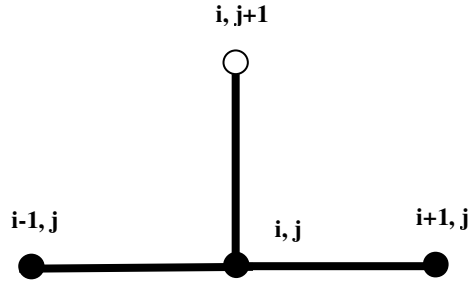
$(x_0, t_j), (x_1, t_j), \dots, (x_N, t_j)$  noktaları kümesine  $j$ . katman denir.

### 3.2.1 Açık şema

Zamana bağlı ileri fark  $t_j$  ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark  $x_i$  kullanılarak ele aldığımız (2.10) denklemi

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{v_i^M}{u_{1,xx}(x_i)} \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} \quad (3.14)$$

biçiminde yazılır.



Şekil 3.2: Açık şema

Şekil 3.2 deki sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (3.14) denkleminin başlangıç koşulu

$$v_i^0 = \frac{u_{0,xx}(x_i)}{u_{1,xx}(x_i)} v_i^M \quad i = \overline{1, N-1} \quad (3.15)$$

ve sınır koşulları

$$v_0^j = g_{1t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.16)$$

$$v_N^j = g_{2t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$a_i = \frac{v_i^M}{u_{1,xx}(x_i)}$  ve  $s = \frac{\tau}{h^2}$  şeklinde tanımlanırsa (3.14) denklemini aşağıdaki şekilde yazılır.

$$v_i^{j+1} = v_i^j + s a_i (v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j) \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq M-1 \quad (3.18)$$

Açık şemanın dayanıklılık koşulu için harmonikler yöntemi kullanılır.

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \tilde{a} \frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2}, \quad (\tilde{a} = a^2) \quad (3.19)$$

denkleminin  $y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi}$  biçiminde özel çözümü (3.18)'de yerine yazılır.

$$\frac{q-1}{\tau} = \tilde{a} \frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2} \text{ ve buradan}$$

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}, \quad \gamma = \frac{\tau \tilde{a}}{h^2} \quad (3.20)$$

bulunur. Eğer tüm  $\varphi$ 'ler için  $|q| \leq 1$  sağlanırsa o zaman (3.20) şekilli tüm çözümler sınırlıdır ve fark denklemi dayanıklıdır;

$$|q| \leq 1 \Rightarrow \left| 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} \right| \leq 1, \quad \left| 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} \right| \leq 2 \Rightarrow \gamma \leq 0.5 \Rightarrow \tau \leq 0.5 \frac{h^2}{\tilde{a}}$$

yani, (3.19) fark şeması, zaman adımı  $\tau$  ve uzay adımı  $h$  olmak üzere belli bir sınırlamalar içinde dayanıklıdır. Onun için (3.19) şemasına koşullu dayanıklı şema denir.

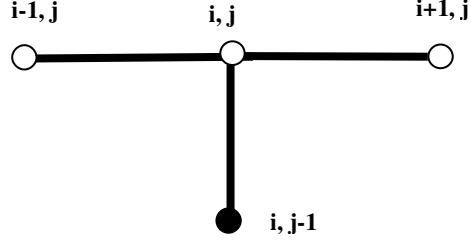
Açık şema,  $0 < s \leq \frac{1}{2}$  aralığında kararlılık gösterir. Açık şema küçük zaman adımlarında iyi sonuç vermektedir. Sayısal hataları, zaman adımı ve uzay adımının karesine bağlı olarak değişmektedir (Dehghan, 2001).

### 3.2.2. Kapalı şema

Zamana bağlı geri fark  $t_j$  ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark  $x_i$  kullanılarak (2.10) denklemi

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau} = \frac{v_i^M}{u_{1,xx}(x_i)} \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.3: Kapalı şema

Şekil 3.3 sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (3.21) denkleminin başlangıç koşulu

$$v_i^0 = \frac{u_{0,xx}(x_i)}{u_{1,xx}(x_i)} v_i^M \quad i = \overline{1, N-1} \quad (3.22)$$

ve sınır koşulları

$$v_0^j = g_{1t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.23)$$

$$v_N^j = g_{2t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Burada

$$a_i = \tau \frac{v_i^M}{u_{1,xx}(x_i)} \text{ alınarak, denklem TDMA katsayılarına göre düzenlenirse}$$

$$a_i v_{i-1}^j - (2a_i + h^2) v_i^j + a_i v_{i+1}^j = -(h^2 v_i^{j-1}) \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-1 \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. Kapalı şemanın kararlılığı için benzer şekilde harmonikler yöntemi uygulanır.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} \quad (3.26)$$

$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi}$  biçimindeki özel çözüm (3.26)'de yerine yazılır.

$$\frac{q-1}{\tau} = \tilde{a} q \frac{(e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi})}{h^2} \text{ ve buradan}$$

$$q = (1 + 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2})^{-1}, \quad \gamma = \frac{\tau \tilde{a}}{h^2}, \quad |q| \leq 1 \text{ bulunur.}$$

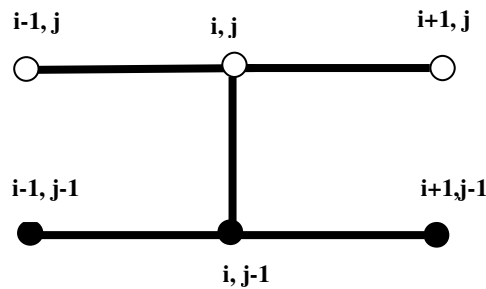
Kapalı şema koşulsuz kararlılık göstermektedir ve yakınsaktır. Açık şema metoduna göre daha fazla sayısal işlem gerektirir. Bundan dolayı kapalı şemayı probleme uygulamak daha zor ve yavaştır. Çünkü her adımda denklem sisteminin çözülmesi gerekmektedir (Dehghan, 2005).

### 3.2.3. Crank-Nicolson şeması

$t_j$  ve  $t_{j-1}$  zamanlarının her ikisini ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark  $x_i$  kullanılarak (2.10) denklemi

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau} = \frac{v_i^M}{2u_{1,xx}(x_i)} \left( \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + \frac{v_{i+1}^{j-1} - 2v_i^{j-1} + v_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.4: Crank-Nicolson şema



Şekil 3.4 sonlu fark şemasına uygun olarak yazılan (3.27) denkleminin sınır başlangıç koşulu

$$v_i^0 = \frac{u_{0,xx}(x_i)}{u_{1,xx}(x_i)} v_i^M \quad i = \overline{1, N-1} \quad (3.28)$$

ve sınır koşulları

$$v_0^j = g_{1t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.29)$$

$$v_N^j = g_{2t}(t_j), \quad j = \overline{0, M-1} \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada

$a_i = \frac{\tau v_i^M}{2 u_{1,xx}(x_i)}$  alınarak, denklem TDMA katsayılarına göre düzenlenirse

$$a_i v_{i-1}^j - (2a_i + h^2) v_i^j + a_i v_{i+1}^j = -(h^2 v_i^{j-1} + a_i (v_{i+1}^{j-1} - 2v_i^{j-1} + v_{i-1}^{j-1})) \quad (3.31)$$

$$1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-1$$

denklemini elde edilir.

Crank-Nicolson şemasının kararlılığı için de benzer şekilde harmonikler yöntemi uygulanır.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2} \right) \quad (3.32)$$

$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi}$  biçiminde özel çözümü (3.32)'de yerine yazılır.

$$\frac{q-1}{\tau} = \frac{1}{2h^2} (q(e^{ih\varphi} + e^{-ih\varphi} - 2) + (e^{ih\varphi} + e^{-ih\varphi} - 2))$$

ve buradan

$$q = \left( \frac{1 - \gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}}{1 + \gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}} \right), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad |q| \leq 1 \text{ (Courant Koşulu) bulunur.}$$

$\gamma > 0$  için Crank-Nicolson şeması koşulsuz kararlılık göstermektedir ve yakınsaktır.

Küçük zaman adımlarında çok iyi sonuç vermektedir.

## 4. SAYISAL ÖRNEKLER

### 4.1 Örnek 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

$$u(1, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.4)$$

ve ek koşul

$$u(x, T) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.5)$$

probleminde

$$u(x, t) = (x^2 - x + 1)e^t \quad (4.6)$$

alınarak, başlangıç ve sınır koşulları yerine yazıldığında;

$$u(x, 0) = x^2 - x + 1 \quad (4.7)$$

$$g_1(t) = u(0, t) = e^t \quad (4.8)$$

$$g_2(t) = u(1, t) = e^t \quad (4.9)$$

ve ek koşul

$$u(x, T) = e^T (x^2 - x + 1) \quad (4.10)$$

Ek koşul  $T = 1$  için  $u(x, 1) = e(x^2 - x + 1)$  biçiminde yazılır.

$u(x, t)$  fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevleri alır

$$u_t(x, t) = v(x, t) = (x^2 - x + 1)e^t \quad (4.11)$$

$$u_x(x, t) = (2x - 1)e^t \quad (4.12)$$

$$u_{xx}(x, t) = 2e^t \quad (4.13)$$

ve bunları (4.1) denkleminde yazarsak,

$$a(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1) \quad (4.14)$$

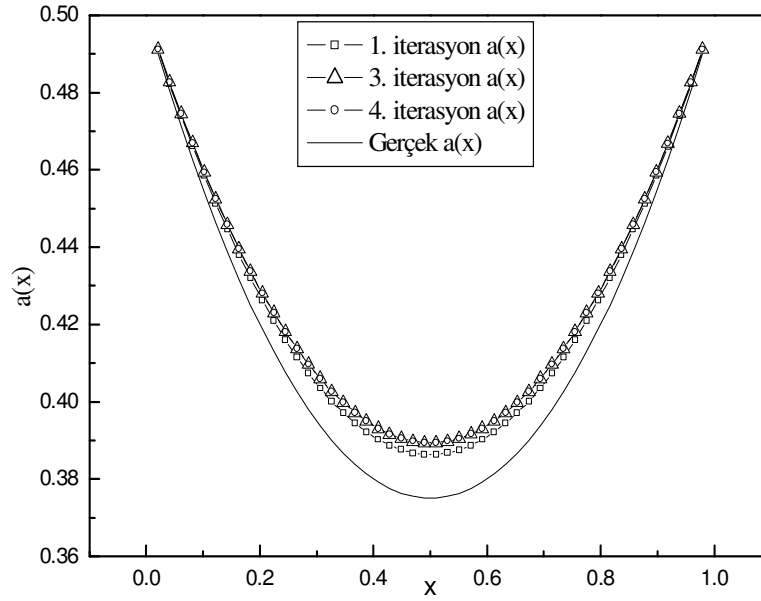
olarak bulunur. Bu probleme ait sayısal sonuçlar Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1: N=21, M=10001 için gerçek a(x) değerleri ve şemaların mutlak hataları

x	Gerçek a	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.05	$4.762 \times 10^{-1}$	$4.827 \times 10^{-6}$	$3.910 \times 10^{-5}$	$3.710 \times 10^{-5}$
0.10	$4.550 \times 10^{-1}$	$2.652 \times 10^{-6}$	$6.434 \times 10^{-5}$	$6.127 \times 10^{-5}$
0.15	$4.362 \times 10^{-1}$	$5.632 \times 10^{-6}$	$1.046 \times 10^{-4}$	$9.983 \times 10^{-5}$
0.20	$4.200 \times 10^{-1}$	$1.370 \times 10^{-6}$	$1.266 \times 10^{-4}$	$1.205 \times 10^{-4}$
0.25	$4.062 \times 10^{-1}$	$6.288 \times 10^{-6}$	$1.600 \times 10^{-4}$	$1.537 \times 10^{-4}$
0.30	$3.950 \times 10^{-1}$	$3.874 \times 10^{-7}$	$1.754 \times 10^{-4}$	$1.692 \times 10^{-4}$
0.35	$3.862 \times 10^{-1}$	$6.675 \times 10^{-6}$	$1.996 \times 10^{-4}$	$1.949 \times 10^{-4}$
0.40	$3.800 \times 10^{-1}$	$2.086 \times 10^{-7}$	$2.062 \times 10^{-4}$	$2.017 \times 10^{-4}$
0.45	$3.762 \times 10^{-1}$	$6.943 \times 10^{-6}$	$2.212 \times 10^{-4}$	$2.171 \times 10^{-4}$
0.50	$3.750 \times 10^{-1}$	$3.874 \times 10^{-7}$	$2.180 \times 10^{-4}$	$2.140 \times 10^{-4}$
0.55	$3.762 \times 10^{-1}$	$6.943 \times 10^{-6}$	$2.222 \times 10^{-4}$	$2.186 \times 10^{-4}$
0.60	$3.800 \times 10^{-1}$	$2.086 \times 10^{-7}$	$2.077 \times 10^{-4}$	$2.045 \times 10^{-4}$
0.65	$3.862 \times 10^{-1}$	$6.705 \times 10^{-6}$	$2.013 \times 10^{-4}$	$1.986 \times 10^{-4}$
0.70	$3.950 \times 10^{-1}$	$3.874 \times 10^{-7}$	$1.762 \times 10^{-4}$	$1.742 \times 10^{-4}$
0.75	$4.062 \times 10^{-1}$	$6.288 \times 10^{-6}$	$1.606 \times 10^{-4}$	$1.578 \times 10^{-4}$
0.80	$4.200 \times 10^{-1}$	$1.341 \times 10^{-6}$	$1.267 \times 10^{-4}$	$1.238 \times 10^{-4}$
0.85	$4.362 \times 10^{-1}$	$5.632 \times 10^{-6}$	$1.035 \times 10^{-4}$	$1.021 \times 10^{-4}$
0.90	$4.550 \times 10^{-1}$	$2.652 \times 10^{-6}$	$6.377 \times 10^{-5}$	$6.267 \times 10^{-5}$
0.95	$4.762 \times 10^{-1}$	$4.827 \times 10^{-6}$	$3.883 \times 10^{-5}$	$3.772 \times 10^{-5}$

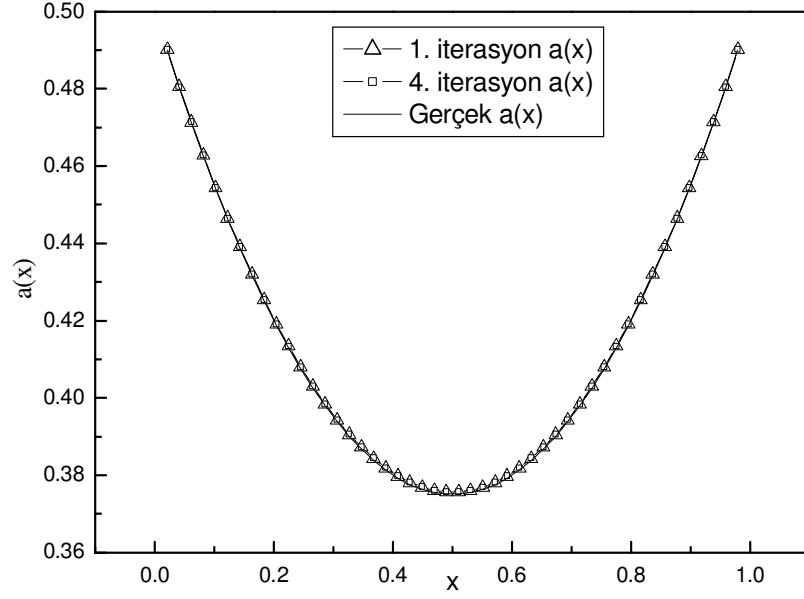
Tablo 4.1 deki sonuçlara göre problemin çözümünde en iyi sonucu sırasıyla açık şema sonra Cranc-Nicolson şeması ve son olarak kapalı şema vermiştir.

Kapalı ve Crank-Nicolson şemaları koşulsuz kararlılığa sahip olduklarından N ve M'nin daha küçük ve farklı değerlerinde de program çalışmakta ve iyi sonuçlar vermektedir. Aşağıdaki şemalar bu sonuçları göstermektedir.



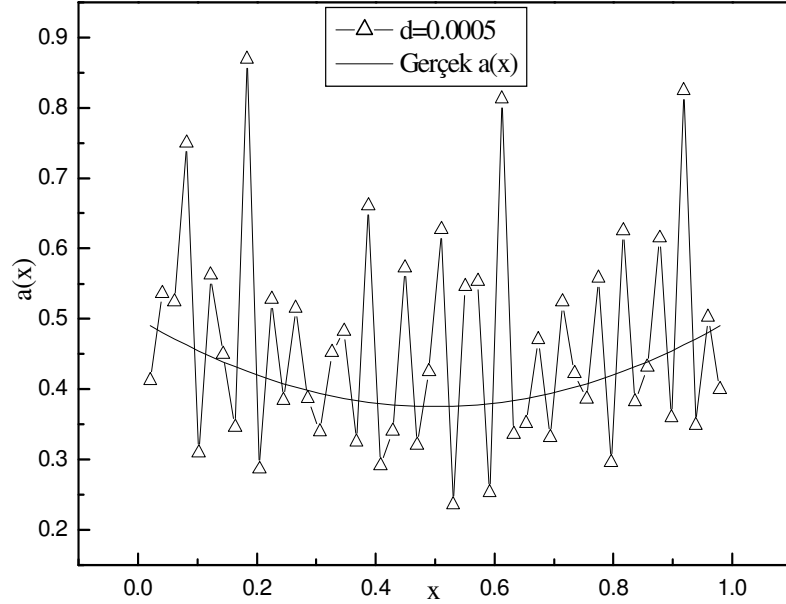
Şekil 4.1: Kapalı şema; N=50, M=5 için a(x) değerleri

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi kapalı şemada iterasyon sayısı arttıkça bulunan a(x) değerleri gerçek a(x) değerlerinden uzaklaşmaktadır.

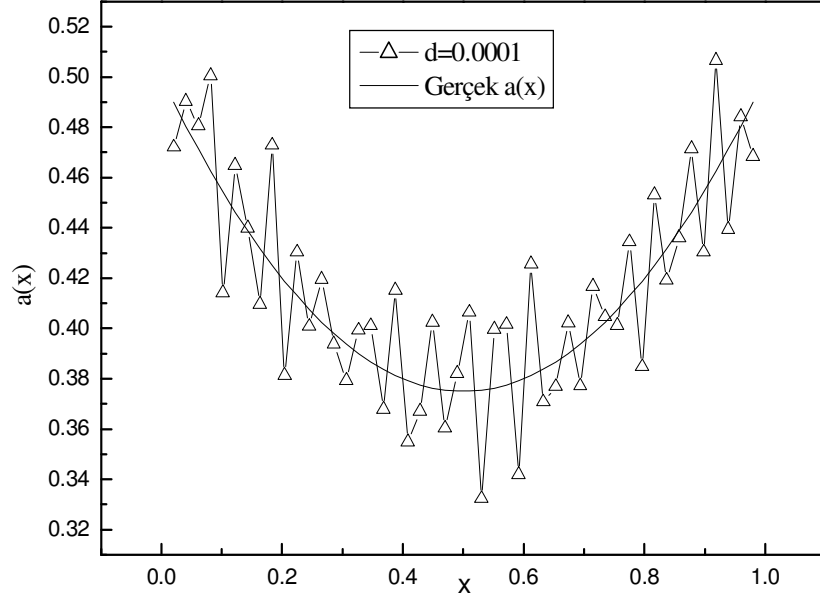


Şekil 4.2: Crank-Nicolson şema;  $N=50$ ,  $M=5$  için  $a(x)$  değerleri

Şekil 4.2'de görüldüğü gibi Crank-Nicolson şemasında iterasyon sayısına gerek kalmaksızın şemanın oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 4.3: Kapalı şema;  $N=50$ ,  $M=5$ ,  $d=0.0005$  ve  $\varepsilon = 0.001$  için  $a(x)$ 'deki random hatalar



Şekil 4.4: Kapalı şema;  $N=50$ ,  $M=5$ ,  $d=0.0001$  ve  $\varepsilon = 0.001$  için  $a(x)$ 'deki random hatalar

FPP metodunun kararlılığını göstermek için;

$u_1^*(x_i) = u_1(x)(1 + \delta(x_i, d))$   $i = 1, 2, \dots, N$ . alındı. Burada;  $\delta(x, d)$   $x$ 'in  $(-d, d)$ 'de düzgün dağılımlı random fonksiyonudur. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de görüldüğü gibi  $d$  küçüldükçe hataların da azalacağı öngörülmektedir.

## 4.2 Örnek 2

(4.1)-(4.5) probleminde

$$u(x, t) = e^{t+x^2} \quad (4.15)$$

alınarak, başlangıç ve sınır koşulları yerine yazıldığında;

$$u(x, 0) = e^{x^2} \quad (4.16)$$

$$g_1(t) = u(0, t) = e^t \quad (4.17)$$

$$g_2(t) = u(1, t) = e^{t+1} \quad (4.18)$$

ve ek koşul

$$u(x, T) = e^{T+x^2} \quad (4.19)$$

Ek koşul  $T = 1$  için  $u(x, 1) = e^{1+x^2}$  biçiminde yazılır.

$u(x, t)$  fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevleri alır

$$u_t(x, t) = v(x, t) = e^{t+x^2} \quad (4.20)$$

$$u_x(x, t) = 2x e^{t+x^2} \quad (4.21)$$

$$u_{xx}(x, t) = (2 + 4x^2) e^{t+x^2} \quad (4.22)$$

ve bunları (4.1) denkleminde yazarsak,

$$a(x) = \frac{1}{2 + 4x^2} \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Bu probleme ait sayısal sonuçlar Tablo 4.2 de verilmiştir.

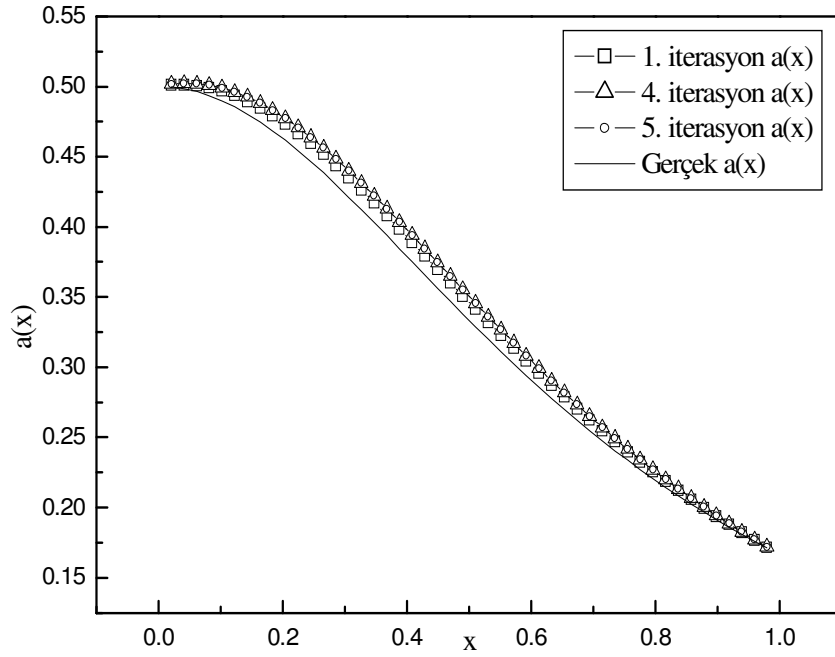
Tablo 4.2: N=21, M=10001 için gerçek a(x) değerleri ve şemaların mutlak hataları

x	Gerçek a	Açık şema hatalar	Kapalı şema hatalar	Crank-Nicolson hatalar
0.05	$4.975 \times 10^{-1}$	$6.245 \times 10^{-4}$	$7.503 \times 10^{-4}$	$7.487 \times 10^{-4}$
0.10	$4.901 \times 10^{-1}$	$6.272 \times 10^{-4}$	$8.721 \times 10^{-4}$	$8.675 \times 10^{-4}$
0.15	$4.784 \times 10^{-1}$	$6.277 \times 10^{-4}$	$9.780 \times 10^{-4}$	$9.707 \times 10^{-4}$
0.20	$4.629 \times 10^{-1}$	$6.270 \times 10^{-4}$	$1.063 \times 10^{-3}$	$1.054 \times 10^{-3}$
0.25	$4.444 \times 10^{-1}$	$6.188 \times 10^{-4}$	$1.119 \times 10^{-3}$	$1.107 \times 10^{-3}$
0.30	$4.237 \times 10^{-1}$	$6.223 \times 10^{-4}$	$1.163 \times 10^{-3}$	$1.148 \times 10^{-3}$
0.35	$4.016 \times 10^{-1}$	$6.184 \times 10^{-4}$	$1.174 \times 10^{-3}$	$1.157 \times 10^{-3}$
0.40	$3.787 \times 10^{-1}$	$6.000 \times 10^{-4}$	$1.150 \times 10^{-3}$	$1.132 \times 10^{-3}$
0.45	$3.558 \times 10^{-1}$	$5.949 \times 10^{-4}$	$1.119 \times 10^{-3}$	$1.103 \times 10^{-3}$
0.50	$3.333 \times 10^{-1}$	$5.842 \times 10^{-4}$	$1.069 \times 10^{-3}$	$1.055 \times 10^{-3}$
0.55	$3.115 \times 10^{-1}$	$5.689 \times 10^{-4}$	$1.004 \times 10^{-3}$	$9.909 \times 10^{-4}$
0.60	$2.906 \times 10^{-1}$	$5.555 \times 10^{-4}$	$9.341 \times 10^{-4}$	$9.211 \times 10^{-4}$
0.65	$2.710 \times 10^{-1}$	$5.373 \times 10^{-4}$	$8.553 \times 10^{-4}$	$8.430 \times 10^{-4}$
0.70	$2.525 \times 10^{-1}$	$5.275 \times 10^{-4}$	$7.845 \times 10^{-4}$	$7.731 \times 10^{-4}$
0.75	$2.352 \times 10^{-1}$	$5.110 \times 10^{-4}$	$7.088 \times 10^{-4}$	$7.000 \times 10^{-4}$
0.80	$2.192 \times 10^{-1}$	$4.945 \times 10^{-4}$	$6.380 \times 10^{-4}$	$6.317 \times 10^{-4}$
0.85	$2.044 \times 10^{-1}$	$4.791 \times 10^{-4}$	$5.753 \times 10^{-4}$	$5.704 \times 10^{-4}$
0.90	$1.908 \times 10^{-1}$	$4.652 \times 10^{-4}$	$5.218 \times 10^{-4}$	$5.182 \times 10^{-4}$
0.95	$1.782 \times 10^{-1}$	$4.536 \times 10^{-4}$	$4.784 \times 10^{-4}$	$4.761 \times 10^{-4}$



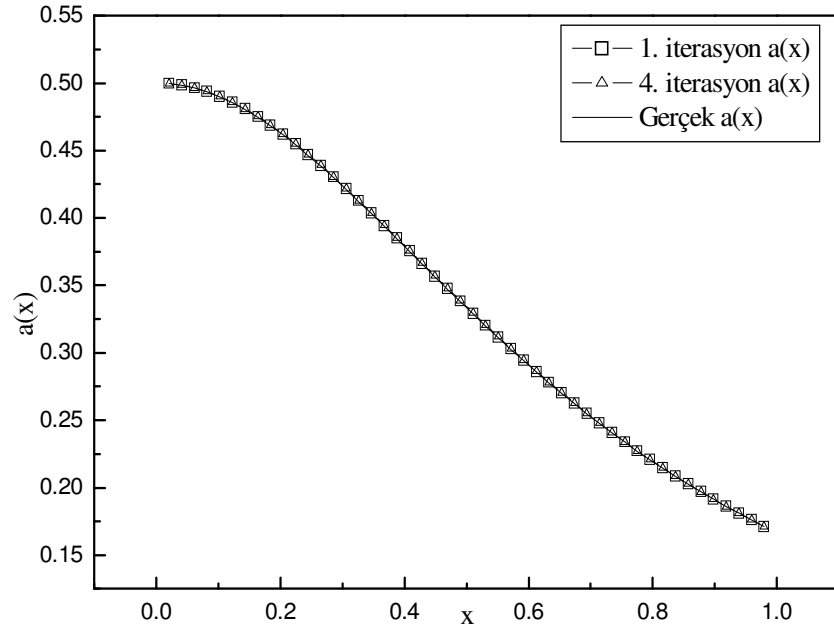
Tablo 4.2 deki sonuçlara göre problemin çözümünde en iyi sonucu sırasıyla açık şema sonra Crank-Nicolson şeması ve son olarak kapalı şema vermiştir.

Kapalı ve Crank-Nicolson şemaları koşulsuz kararlılığa sahip olduklarından N ve M'nin daha küçük ve farklı değerlerinde de program çalışmakta ve iyi sonuçlar vermektedir. Aşağıdaki şemalar bu sonuçları göstermektedir.



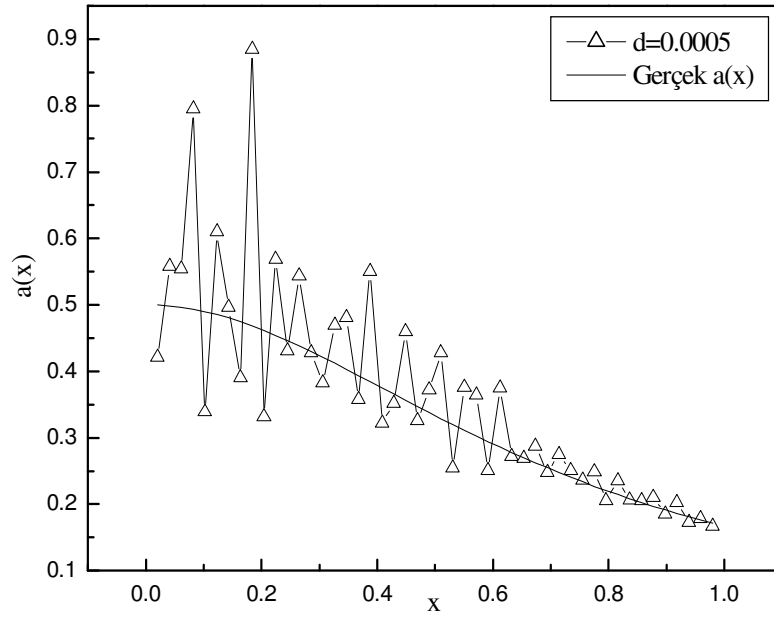
Şekil 4.5: Kapalı şema; N=50, M=5 için a(x) değerleri

Şekil 4.5'de görüldüğü gibi kapalı şemada iterasyon sayısı arttıkça bulunan a(x) değerleri gerçek a(x) değerlerinden uzaklaşmaktadır.

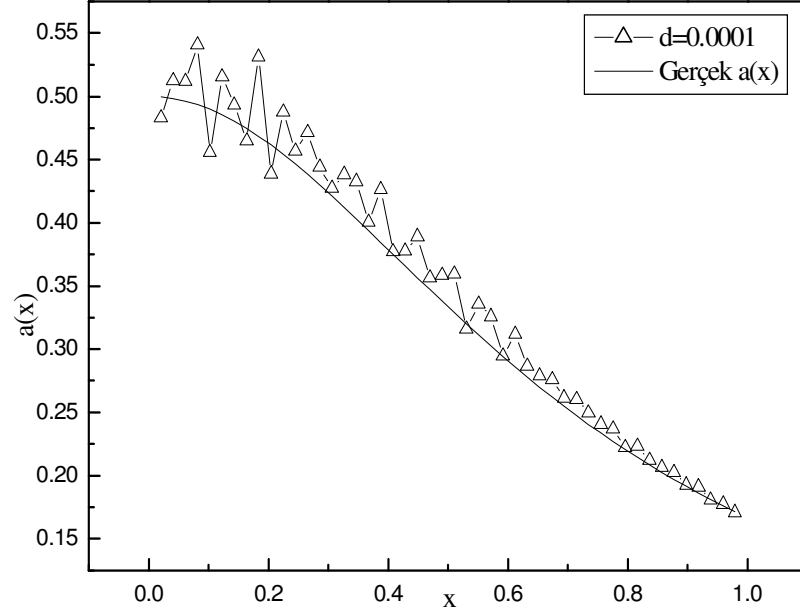


Şekil 4.6: Crank-Nicolson şema;  $N=50$ ,  $M=5$  için  $a(x)$  değerleri

Şekil 4.6’da görüldüğü gibi Crank-Nicolson şemasında iterasyon sayısına gerek kalmaksızın şemanın oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 4.7: Kapalı şema;  $N=50$ ,  $M=5$ ,  $d=0.0005$  ve  $\varepsilon = 0.001$  için  $a(x)$ ’deki random hatalar



Şekil 4.8: Kapalı şema;  $N=50$ ,  $M=5$ ,  $d=0.0001$  ve  $\varepsilon = 0.001$  için  $a(x)$ 'deki random hatalar

FPP metodunun kararlılığını göstermek için;

$u_1^*(x_i) = u_1(x)(1 + \delta(x_i, d))$   $i = 1, 2, \dots, N$  alındı. Burada;  $\delta(x, d)$   $x$ 'in  $(-d, d)$ 'de düzgün dağılımlı random fonksiyonudur. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de görüldüğü gibi  $d$  küçüldükçe hataların da azalacağı öngörülmektedir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, lineer olmayan parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen ana katsayının bulunmasına yönelik TTF (Trace Type Functional Formulation) ve FPP (Fixed Point Projection) metotları kullanıldı. Sayısal çözüm uygulamaları yapılarak, elde edilen sonuçlara göre şemalar karşılaştırıldı.

TTF yönteminin kararlılık aralığının küçüklüğü, bu yöntemde elde edilen yeniden formüle edilmiş problemin çözümünün kendisi ve ikinci mertebeden türevine tekrarlı şekilde bağlantılı olması ile ilgilidir. Bu bağlantı katsayı çözümündeki değişimlere aşırı duyarlı yapmaktadır.

FPP yöntemi her iterasyonda bir düz çözüme denktir. Çok küçük sayıda iterasyonlar için yakınsaktır.

Tablolardaki  $a(x)$  değerlerinin hataları uzaya bağlı,  $N=21$  ve zamana bağlı,  $M=10001$  tamsayı değerleri için bulunmuştur.  $N=21$  ve  $M=10001$  tamsayı değerleri çözüme en yakın sayısal değerler olup, birçok denemeler sonucunda elde edilmiştir. TTF yöntemiyle ele alınan Örnek 1 ve Örnek 2 de Açık şemanın, Kapalı ve Crank-Nicolson şemalarına göre kullanışlı olduğu, daha az CPU (Central Processing Unit) zamanına ihtiyaç duyduğu görülmektedir. Bu şemada denklemler her katmanda teker teker çözülür. Şemanın tek olumsuz özelliği koşullu kararlılık göstermesidir. Bu nedenle şema küçük zaman adımlarında iyi sonuç vermektedir.

Crank-Nicolson şeması her iki katmanı kullandığından kapalı şemaya göre iyi sonuç vermektedir. Kapalı şemanın hataları Crank-Nicolson şemasının hatalarına göre daha büyüktür. Her iki şema da her katmanda bir denklem sistemi çözmeyi gerektirdiğinden açık şema kadar ekonomik değildir. Açık şemaya göre avantajları ise daima kararlı olmalarıdır. Bu sebeple değişik zaman adımlarında da iyi sonuçlar vermektedirler. Örnek 1 ve Örnek 2 de Kapalı ve Crank-Nicolson şemasının  $N=50$  ve

M=5 değerlerinde ne kadar iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Crank-Nicolson Şeması çok iyi sonuç verdiğinden bu Şema için FPP metodunda fazla iterasyona gerek kalmaksızın gerçeğe yakın sonuçlar bulunabilmektedir. Son olarak Őemalarda görüldüğü üzere Kapalı Şema random hatalara karŐı oldukça duyarlı ve hata miktarı azaldıkça daha iyi sonuçlar vermektedir.

Yapılan bu çalışma ile ele alınan problemin iki boyutlu biçiminin çözülmesi öngörülmektedir.

## KAYNAKLAR

Aslan, Ş., “Parabolik denklemlerde bilinmeyen katsayı problemleri için sonlu fark şemaları”, Yüksek Lisans Tezi, *Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmit, 4-20, (2007).

Azari, H., “Numerical procedures for the determination of the leading coefficient  $a(x)$ ”, *Proc. Appl. Math. Mech.*, 7, 2040003-2040004, (2007).

Bellasoued, M. ve Yamamoto, M., “Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation”, *J. Inv. III-Posed Problems*, 1, 47-56, (2006).

Beznoshchenko, N., Ya., “Determination of the coefficients of the highest derivatives in parabolic equations”, *Differ Uravn*, 11, 19-26, (1975).

Beznoshchenko, N., Ya., “Sufficient conditions for the existence of solutions of the problem in the determination of coefficients of leading derivatives of parabolic equations”, *Differ Uravn*, 19, 1908-1915, (1983).

Can, E., “Isı transferi ve difüzyon olaylarında ters problemler”, Doktora Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 1-13, (2000).

Can, E., “Numerical procedures for determining of an unknown parameter in parabolic equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 162, 1219-1226, (2005).

Cannon, J.R., “Determination of certain parameter in heat conduction problems”, *J. Math. Anal. Appl.*, 8, 188-321, (1964).

Cannon, J.R., “Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data”, *SIAM J. Numer Anal.*, 5, 275-286, (1968).

Cannon, J.R., Ewing, R.E., “Determination of a source term in a linear parabolic partial differential equation”, *J. Appl. Math. Phys.*, 27, 393-401, (1976).

Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., “Determination of an unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial boundary data”, *J. Heat Transfer*, 100, 503-507, (1978).

Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., “An inverse problem for a nonlinear diffusion equation”, *SIAM J. Appl. Math.*, 39(2), 272-289, (1980).

Cannon, J.R. ve Zachman, D., "Parameter determination in parabolic differential equations from overspecified boundary data", *Int. J. Engng. Sci.*, 20, 779-788, (1982).

Cannon, J.R., "The one-dimensional heat equation", *Addison-Wesley*, (1984)

Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of nonlinear nonclassical parabolic problems", *J. Diff. Eqs*, 79, 266-288, (1989a).

Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of multidimensional nonclassical parabolic equations", in *Proc. Int. Conf. on Differential Equations and Applications*, Ohio University Pres, 122-127, (1989b).

Cannon, J.R., ve Lin, Y., "An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 145, 470-484, (1990).

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Wang, S., "Determination of source parameter in parabolic equations", *Meccanica*, 27, 85-94, (1992).

Cannon, J.R., DuChateau, P.C., ve Steube, K., "Trace type functional differential equations and the identification of hydraulic properties of porous media", *Transport Porous Media*, 6, 745-758, (1991).

Cannon, J.R., DuChateau, P.C., ve Steube, K., "Unknown Ingredient Inverse Problems and Trace-Type-Functional Differential Equation (1992).

Chadam, J.M. ve Yin, H.M., "Determination of an unknown function in a parabolic equation with an overspecified condition", *Math. Methods Appl. Sci.*, 13, 421-430, (1990).

Dehghan, M., "An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation", *Applied Mathematical Modelling*, 25, 743-754, (2001).

Dehghan, M., "Parameter determination in a partial differential equation from the overspecified data", *Mathematical and Computer Modelling*, 41, 197-213, (2005).

Fatullayev, A., ve Can, E., "Numerical procedures for determining unknown source parameter in parabolic equations", *Mathematical and Computers in simulation*, 1845, 1-9, (2000).

Hu, B: ve Yin, H.M., "Determination of the leading coefficient  $a(x)$  in the heat equation  $u_t = a(x) \Delta u$ ", *Quarterly of Applied Mathematics*, 51, 557-583, (1993).

Isakov, V., "On a class of inverse problems for parabolic equations", *Sov. Math. Dokl.*, 25, 519-521, (1982).

Jiang, L.S. ve Tao, Y., "Identifying the volatility of underlying assets from option prices", *Inverse Problems*, 17, 137-155, (2001).

- Jones, B.F., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I, Existence and uniqueness", *J. Math. Mech.*, 11, 907-918, (1962).
- Jones, B.F., "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations", *Comm. Pure and Appl. Math.*, 16, 33-34, (1963)
- Pierce, A., "Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem", *SIAM J. Control and Optimization*, 17, 494-499, (1979).
- Pilant, M.S., ve Rundell, W., "Undetermined coefficient problems for nonlinear elliptic and parabolic equations", *Inter. Ser. Num. Math.*, 77, 139-154, (1986).
- Pilant, M.S., ve Rundell, W., "Iteration schemes for unknown coefficient problems arising in parabolic equation", *Numer. Methods in P.D.E.*, 3, 313-325, (1987a).
- Pilant, M.S., ve Rundell, W., "An inverse problem for a nonlinear elliptic equation", *SIAM J. Math. Anal.*, 18, 1801-1809, (1987b).
- Pilant, M.S., ve Rundell, W., "Fixed point methods a nonlinear parabolic inverse problem", *Comm. In P.D.E.*, 13, 469-493, (1987c).
- Pilant, M.S., ve Rundell, W., "A uniqueness theorem for determining conductivity from overspecified boundary data", *Journal of Math. Anal. Appl.*, 136, 20-28, (1988).
- Prilepko, A.I. and Solov'ev, V.V., "Solvability of the inverse boundary-value problem of finding a coefficient of a lower-order derivative in a parabolic equation", *Differ Uravn*, 23, 136-143, (1987).
- Rundell, W., "Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data", *Appl. Anal.*, 10, 231-242, (1980).
- Rundell, W., "An inverse problems for a parabolic partial differential equation", *Rocky Mountain J. Math.*, 13, 679-688, (1983).
- Rundell, W., "The determination of parabolic equation from the initial and final data", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99, 637-642 (1987)
- Suzuki, T., "Gelfand-Levitian's theory, deformation formulas and inverse problems", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, Math., 32, 223-271, (1985).
- Yin, H.M., "A uniqueness theorem for a class of nonclassical parabolic equations", *Applicable Analysis*, 34, 67-68, (1989).



## **KİŞİSEL YAYINLAR**

### **Proje Çalışması**

T.T.F yönteminin bir boyutlu parabolik denklemlere uygulanması, KOÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (2007/032).

### **Bildiriler**

Filiz BURHAN ENGİN, Emine CAN ve Aylin BAYRAK, “Determining unknown coefficient in a parabolic equation”, *Sakarya Üniversitesi II. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu*, pp 104, (2007).

### **Yurtiçi Yayınlar**

Bayrak, M.A., Can, E., Burhan Engin, F., “Determining an unknown coefficient in a parabolic equation”, *Sakarya University Faculty of Arts and Science The Journal of Arts and Science*, 9,194-199,(2007)

## **ÖZGEÇMİŞ**

1979 yılında İzmit'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladı. 1997 yılında girdiği Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılından beri Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. 2006 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır.