KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN DİNAMİK ANALİZİ İÇİN ROBOT ARAÇ KUTUSUNUN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS

METİN TOZ

Anabilim Dalı: Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serdar KÜÇÜK

KOCAELİ, 2008

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN DİNAMİK ANALİZİ İÇİN ROBOT ARAÇ KUTUSUNUN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METİN TOZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih: 02 Temmuz 2008

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yrd.Doç.Dr. Serdar KÜÇÜK	Doç.Dr. Zafer BİNGÜL	Doç.Dr. Raşit KÖKER
(.........................)	(.........................)	(.........................)

KOCAELİ, 2008

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Günümüz teknolojisindeki hızlı değişim, her alanda olduğu gibi üretim faaliyetlerinde de etkili olmaktadır. Bu değişimin bir sonucu olarak endüstriyel robotların kullanım alanları gittikçe artmaktadır. Bu durum konu ile ilgili bilimsel çalışmaları ve eğitim faaliyetlerini de etkilemektedir. Örneğin üniversitelerde robot tekniği ile ilgili yeni dersler müfredata konulmaktadır. Bu tez çalışmasında endüstriyel robotların dinamik analizi üzerinde durulmuştur; ayrıca eğitim faaliyetlerinde kullanılması amacıyla endüstriyel robotlar için dinamik analiz yapan bir robot araç kutusu geliştirilmiştir.

Tez çalışmam süresince, tez konusunun belirlenmesinden tezin tamamlanmasına kadar her konuda destek aldığım, bilimsel çalışmanın disiplinini ve yöntemini öğrendiğim tez danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Serdar KÜÇÜK'e, yüksek lisans eğitimim boyunca endüstriyel robotlar ile ilgili dersler aldığım Doç. Dr. Zafer BİNGÜL'e ve bölüm hocalarımızdan Doç. Dr. İsmail ERTÜRK'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca, Türkiye'de bilim insanlarına destek veren en önemli kuruluş olan ve yüksek lisans bursiyeri olduğum TÜBİTAK'a desteğinden dolayı teşekkür ederim. Bir de çalışmam boyunca gösterdiği sabır ve verdiği destek nedeniyle eşim Güliz'e ve babasına sevgisi ile destek veren küçük kızım Berra'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

a_{i-1}	: Bağ uzunluğu
α_{i-1}	: Bağ açısı
A^T	: A matrisinin transpozu
A_i	: $i.$ bağın doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi
B_i	: $i.$ bağın açısal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi
C	: Kayma eksenine dik dönme
C_i	: $i.$ ekleme ait hız bağlaşım matrisi
$C(q,\dot{q})$	: Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü
$D(q)$	: Manipülatör atalet tensörü veya kütle matrisi
d_i	: Eklem kaçıklılığı
θ_i	: Eklem açısı
$\dot{\theta}_i$	: Dönel eklemler için eklem hızı
$\ddot{\theta}_i$	: Dönel eklemler için eklem ivmesi
$\dot{d}_i$	: Prizmatik eklemler için eklem hızı
$\ddot{d}_i$	: Prizmatik eklemler için eklem ivmesi
${}^{i+1}F_{i+1}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen cismin kütle merkezine etkiyen kuvvet
${}^{i}f_i$	: $i.$ ekleme $(i-1).$ eklem tarafından uygulanan kuvvet.
$G(q)$	: Yerçekimi ivmesi vektörü
g_i	: $i.$ bağın yerçekimi ivmesi.
Δh_i	: $i.$ ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre $i.$ bağın kütle merkezinin koordinatları
h_i	: $i.$ bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre konumu
I_i	: $i.$ bağın atalet tensörü
I_m	: Katı nesnenin atalet tensörü
${}^{C_i}I$	: $i.$ bağın kendi kütle merkezine göre atalet tensörü.
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	: Katı nesnenin atalet momenti elemanları
J_i	: $i.$ bağın jakobiyen matrisi
$K(q,\dot{q})$	: Lagrange-Euler yönteminde robotun toplam kinetik enerjisi
$L(q,\dot{q})$	: Lagrange fonksiyonu
m_i	: $i.$ bağın kütlesi.
N	: Dönme eksenine dik dönme

${}^{i+1}N_{i+1}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen cismin kütle merkezine etkiyen tork
${}^{i}n_{i}$	: $i.$ ekleme $(i-1).$ eklem tarafından uygulanan tork.
$P(q)$	: Lagrange-Euler yönteminde robotun toplam potansiyel enerjisi
${}^{i}P_{c_i}$	: $i.$ bağın kütle merkezinin konumu.
${}^{i}P_{i+1}$	: $i.$ bağın $(i+1).$ bağa göre konumu.
q	: Dönel eklemler için eklem açısı, prizmatik eklemler için bağ uzunluğu
$\dot{q}$	: Eklem hızlarını gösteren vektör
ρ	: Katı nesnenin kütle yoğunluğu
R	: Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme.
${}^{0}_{i}R$	: $i.$ bağın ana koordinat sistemine göre yönelimi
S	: Prizmatik eklem
${}^{0}_{i}T$	: $i.$ bağın ana koordinat sistemine göre dönüşüm matrisi
v_i	: $i.$ bağın doğrusal hızı
V	: Katı nesnenin hacmi
${}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen kütle merkezinin doğrusal ivmesi
${}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen eklemin doğrusal ivmesi
$\dot{v}_i$	: $i.$ bağın doğrusal ivmesi
ω_i	: $i.$ bağın açısal hızı
${}^{i+1}\omega_{i+1}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal hız
${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1}$	: Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal ivme
ξ_i	: Eklem tip değişkeni
τ	: Eyleyicilere etki eden tork
$\ddot{x}$	: Robotun uç işlevcisinin kartezyen uzaydaki ivmesi
c_1	: $\cos(\theta_1)$
c_1^2	: $\cos^2(\theta_1)$
c_2	: $\cos(\theta_2)$
c_2^2	: $\cos^2(\theta_2)$
c_3	: $\cos(\theta_3)$
c_3^2	: $\cos^2(\theta_3)$
$\mathrm{c}_{(1+2)}$	: $\cos(\theta_1+\theta_2)$
$\mathrm{c}_{(1+2)}^2$	: $\cos^2(\theta_1+\theta_2)$
$\mathrm{c}_{(2+3)}$	: $\cos(\theta_2+\theta_3)$
$\mathrm{c}_{(2+3)}^2$	: $\cos^2(\theta_2+\theta_3)$
$\mathrm{c}_{(1-2)}$	: $\cos(\theta_1-\theta_2)$

$c^2_{(1-2)}$	: $\cos^2(\theta_1 - \theta_2)$
$c_{(2-3)}$	: $\cos(\theta_2 - \theta_3)$
$c^2_{(2-3)}$	: $\cos^2(\theta_2 - \theta_3)$
s_1	: $\sin(\theta_1)$
s_1^2	: $\sin^2(\theta_1)$
s_2	: $\sin(\theta_2)$
s_2^2	: $\sin^2(\theta_2)$
s_3	: $\sin(\theta_3)$
s_3^2	: $\sin^2(\theta_3)$
$s_{(1+2)}$	: $\sin(\theta_1 + \theta_2)$
$s^2_{(1+2)}$	: $\sin^2(\theta_1 + \theta_2)$
$s_{(2+3)}$	: $\sin(\theta_2 + \theta_3)$
$s^2_{(2+3)}$	: $\sin^2(\theta_2 + \theta_3)$
$s_{(1-2)}$	: $\sin(\theta_1 - \theta_2)$
$s^2_{(1-2)}$	: $\sin^2(\theta_1 - \theta_2)$
$s_{(2-3)}$	: $\sin(\theta_2 - \theta_3)$
$s^2_{(2-3)}$	: $\sin^2(\theta_2 - \theta_3)$
GUI	: Graphic User Interface (Grafik tabanlı kullanıcı arayüzü)

ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN DİNAMİK ANALİZİ İÇİN ROBOT ARAÇ KUTUSUNUN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

METİN TOZ

Anahtar Kelimeler: Endüstriyel Robot Manipülatörleri, Dinamik Analiz, Newton-Euler Yöntemi, Lagrange-Euler Yöntemi, Robot Benzetim Programı

Özet: Endüstriyel robotların dinamik analizlerinin yapılması, bu robotların kontrolü ve benzetimi açısından son derece önemlidir. Manipülatörlerinin dinamik denklemlerinin çıkarılması konusunda günümüze kadar birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan en önemlileri şu şekilde sıralanabilir: Lagrange-Euler, rekürsif Lagrange-Euler, Newton-Euler ve d'Alembert yöntemleri. Bu tez çalışmasının ilk bölümünde seri robotların dinamiğinin Lagrange-Euler ve Newton Euler yöntemleri ile çıkarılması detaylı olarak anlatılmıştır. İkinci bölümde Huang ve Milenkovic tarafından sınıflandırılan on altı adet temel endüstriyel robotun eklem düzenleşimi ve katı gövde yapıları verilmiştir. Üçüncü bölümde bu on altı adet robotun dinamik denklemleri, Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri kullanılarak çıkarılmıştır ve her iki yöntemin aynı robot düzenleşimi için eşit tork ifadelerini ürettikleri gösterilmiştir. Dördüncü bölümde Euler bileği eklenmiş onaltı adet temel endüstriyel robot için dinamik analiz yapmak amacıyla geliştirilen robot araç kutusunun tanıtımı yapılmıştır. Beşinci bölümde ise tez çalışması sırasında elde edilen sonuçlar, karşılaşılan zorluklar ve konu ile ilgili araştırmacılara öneriler sunulmuştur.

A ROBOT SIMULATION TOOLBOX FOR DYNAMIC ANALYSIS OF INDUSTRIAL ROBOT MANIPULATORS

METİN TOZ

Keywords: Industrial Robot Manipulators, Dynamic Analysis, Newton-Euler Method, Lagrange-Euler Method, Robot Simulation Program

Abstract: Dynamic analysis is a main subject of controlling and simulating of industrial robot manipulators. Several methods have been developed for deriving the manipulator dynamics equations. The most preferred methods among them are Lagrange Euler, recursive Lagrange-Euler, Newton-Euler and d'Alembert methods. In the first chapter of this study, derivation of dynamics equations for serial industrial robot manipulators are presented in detail using Lagrange-Euler and Newton-Euler methods. The serial chain mechanisms and equivalent rigid body models of sixteen fundamental robot manipulators classified by Huang and Milenkovic have been given in the second chapter. In the following chapter dynamic equations of these robot manipulators are derived using both Newton-Euler and Lagrange-Euler methods and it is shown that both of these methods genarete same results. In fourth chapter, a simulation toolbox is developed for dynamics of industrial robot manipulators with Euler wrist. In the last chapter, results, difficulties and suggestions for researchers about this study are presented.

GİRİŞ

Endüstriyel robotların dinamik analizinin gerçekleştirilmesi robot çalışmalarının en önemli konularından birini oluşturmaktadır. Bir robotun dinamik denklemleri o robotun istenen yörüngeyi takip edebilmesi için gerekli kuvvet/tork ifadelerini üretir. Bu ifadeler robotun benzetiminde ve gerçek zamanlı kontrol uygulamalarında kullanılmaktadır. Literatürde bu analizi gerçekleştirmek için şu yöntemler öne çıkmaktadır. Lagrange-Euler [1], rekürsif Lagrange-Euler [2], rekürsif Newton-Euler [3], Kane [4] ve genelleştirilmiş d'Alembert [5] yöntemleri. Bu yöntemlerin tamamı aynı robot düzenleşimi için eşdeğer çözümler üretmektedirler. Buna rağmen yapıları birçok nedenden dolayı farklılık göstermektedir. Bu yöntemlerin bir kısmı bilgisayar benzetimi, bir kısmı robot kontrolü için bir kısmı da robot eyleyicilerinin daha hızlı sürülmesi için uygundur. Newton-Euler ve Lagrange-Euler yöntemleri seri robotlara kolay uygulanabilir olmaları, benzetim programlarında kullanılmaya uygun yapıya sahip olmaları ve hesap yükleri açısından diğerlerine üstünlük sağlamaktadırlar. Bu özellikleri nedeniyle de sıkça tercih edilmektedirler. [6]

Bilgisayar kullanılarak gerçekleştirilen benzetim programları, teknolojinin hemen her alanında kullanılmaktadır. Bir endüstriyel uygulamanın gerçekleştirilmesinden önce benzetiminin yapılması önemli avantajlar sağlar. Bunlardan bazıları şu şekilde söylenebilir; hata kontrolünün yapılması, parametre değişimine karşı sistemin cevabının önceden görülebilmesi, dış ortamdan gelen bozucu etkilere sistemin tepkisinin ölçülmesi vb. Bir araştırmacı, bir mekanik sistemi fiziksel olarak gerçekleştirmeden önce sadece bilgisayarda benzetimini yaparak birçok açıdan test edebilir. Bilgisayar desteği olmadan robot dinamik denklemlerinin üretilmesi oldukça zor ve hataya açık bir uygulamadır. Bu nedenle robot teknolojisi alanında çalışan araştırmacılar işlemlerin bilgisayar desteği ile yapılması ve benzetim programlarının kullanılması konularına özel bir önem vermişlerdir.

GUI (Graphic User Interface), bilgisayar programlarının geliştirilmesinde kullanılan grafiksel arayüzü temsil etmektedir. Bir GUI üzerinde, butonlar, menüler, pop-up menüler ve radyo butonlar gibi grafiksel nesneler bulunur. Bilgisayar ile geliştirilen benzetim programlarında GUI kullanılması kullanıcıya bir çok avantaj sağlar. Bu avantajlardan bazıları şu şekilde sıralanabilir:

•Komutlar, butonlar vb. grafiksel nesneler kullanılarak topluca çalıştırılabilir. Böylece işlemler daha kısa sürede gerçekleştirilmiş olur.
•Aynı işlemler için aynı komutlar çalıştırılacağı için hata oranı azalır.
•Tasarlanan grafiksel arayüz sistemin özelliklerine göre şekillendirilebilir. Böylece kullanım kolaylığı sağlanabilir.
•Komutlar önceden yazıldığı için kullanıcının ayrıca komut, fonksiyon ismi veya programlama dili gibi bilgileri öğrenmesine gerek kalmaz.

GUI kullanılmadan geliştirilen benzetim programlarında ise genellikle kullanıcı sistemi komut satırından komut girerek kullanmaktadır. Bu şekilde bir kullanım kullanıcının komutları öğrenmesini, her defasında tekrar girmesini, işlemler için daha fazla zaman harcanmasını gerektir.

Literatürde robot dinamik analizinin yapılması ve dinamik denklemlerinin sembolik ya da sayısal olarak üretilmesi amacıyla birçok benzetim programı hazırlanmıştır. Bunlardan yaygın olanlarından bazıları şunlardır:

DYMIR(Dynamic models of industrial robots), robotlar için dinamik denklemleri otomatik olarak üretmek için tasarlanmıştır. Açık kaynak kodlu bir yazılım olan DYMIR robotların dinamik denklemlerini üretmek için Lagrange-Euler yöntemini kullanmaktadır ve 12 serbestlik derecesine kadar olan robotlar için dinamik denklemler üretebilmektedir. [7]

ARM (The Algebraic Robot Modeller), kontrol mühendisliği uygulamalarında kullanılmak amacıyla hazırlanmıştır. Yazılımında C ve Lisp programlama dilleri kullanılmıştır ve robotların dinamik denklemlerinin üretilmesinde Lagrange-Euler yöntemi tercih edilmiştir. [8]

EMDEG (Efficient Manipulator Dynamic Equation Generator), Lagrange Christoffel formülasyonunu temel almıştır. Bu program temel olarak robotlar için ileri ve ters dinamik denklemleri üretmektedir. [9]

ARDEG(Automatic Robot Dynamic Equation Generator), Lagrange-Christoffel formülasyonunu temel almaktadır. Robot sistemlerini analiz ve kontrol edebilmek için hareket denklemlerini otomatik olarak üretmektedir. [10]

SYMORO (A System for the Symbolic Modeling of Robots), C ve Mathematica dilleri kullanılarak geliştirilmiştir. Bu program kullanıcının robotlar için ileri kinematik, ters kinematik ve dinamik denklemleri üretmesine olanak sağlar. [11]

Planar Manipulator toolbox, MATLAB programı ile tümleşik olarak kullanılır. Bu program istenilen sayıda serbestlik derecesine sahip düzlemsel robot manipülatörlerinin dinamik ve kinematik özelliklerinin modellenmesini ve benzetimini yapar. Dinamik denklemleri üretirken Lagrange-Euler formülasyonunu kullanır. Kullanıcının, yerçekimi, coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, eklem ivmeleri, uç işlevciye etki eden kuvvetler, jakobiyen matrisi ve kütle matrisi gibi değişkenleri hesaplamasını sağlar. Ancak bu program manipülatörlerde sadece dönel eklemlerin kullanımına izin verir, eğitim amacıyla geliştirilmemiştir ve GUI'nin sağladığı kolaylıkları kullanıcıya sunmaz. [12]

Robotic Toolbox for Matlab, endüstriyel robotların modellenmesi için yapısında birçok fonksiyon bulundurmaktadır. Bu fonksiyonlar kullanıcı tarafından manipülatörün modellenmesi ve analizinin yapılması amacıyla kullanılabilirler. Bu program, kinematik analiz, dinamik analiz ve yörünge planlama gibi endüstriyel robot uygulamaları için gerekli olan birçok temel özelliğin gerçekleştirilebilmesini sağlar. Dinamik denklemlerin üretilmesinde rekürsif Newton-Euler yöntemini kullanmaktadır. Bu yazılım aynı zamanda tasarımı yapılan manipülatörün benzetiminin yapılmasını sağlar ve gerçek robot uygulamalarından elde edilmiş verilerin kullanıcı tarafından analizinin gerçekleştirilmesine de imkan verir. [13]

Robotect, seri robotlar için modelleme, benzetim ve performans analizinin yapılması amacıyla tasarlanmıştır. Yapısında yer alan basit komutlar yardımıyla üç boyutlu modeller ile bu modellerin dinamik kuvvet/tork analizinin yapılmasını sağlar. Dinamik analiz yaparken Newton-Euler formülasyonunu kullanır. Robotect yapısında bir GUI bulundurmasına rağmen temel olarak eğitim amaçlı olarak tasarlanmamıştır ve kütüphanesinde temel robot düzenleşimlerini bulundurmaz. [14]

Robotica, Mathematica tabanlı bir yazılımdır ve kullanıcının bilgisayar destekli tasarım ve analiz yapmasını sağlar. Birden fazla serbestlik derecesine sahip robotlar için kinematik ve dinamik denklemlerin sembolik ve ya sayısal olarak üretilebilmesi için 30 dan fazla fonksiyon kullanır. Robotların dinamik denklemlerini sadece Lagrange-Euler yöntemini kullanarak üretir. Ayrıca grafiksel arayüz açısından da sınırlı yeteneklere sahiptir. [15]

SD/FAST, Advance Kane formülasyonu'nu temel almıştır. Bu program robot manipülatörlerinin yanında yüksek hızlı elektro-mekanik cihazlar gibi birçok mekanik sistemin dinamik analizinin yapılması amacıyla tasarlanmıştır. Genel olarak eğitim amaçlı olarak tasarlanmamıştır ve yapısında bir GUI de yer almaz. [16]

ROBOLAB, Matlab programının GUI'sini temel alarak geliştirilmiştir. Bu program altı serbestlik dercesine sahip onaltı adet temel robot düzenleşiminin ileri ve ters kinematik benzetimlerini çevrimdışı olarak gerçekleştirir. ROBOLAB bu tez çalışmasında geliştirilen araç kutusunun da temelini oluşturmaktadır. [17]

Bu tez çalışmasının temel amacı Huang ve Milenkovic tarafından sınıflandırılan temel onaltı adet endüstriyel robotun dinamik analizinin Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri ile yapılması ve bu analizi yapan bir robot araç kutusunun geliştirilmesidir. Bu amaçla aşağıdaki çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

•Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin endüstriyel robotlara uygulanmasının incelenmesi
•Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan temel onaltı adet endüstriyel robotun eklem düzenleşimlerinin ve katı gövde yapılarının gösterilmesi

•Tanımlanan robotların dinamik analizlerinin yapılması ve eşit sonuçların bulunması
•Eğitim amaçlı olarak kullanılacak ve temel endüstriyel robotların dinamik analizlerini yapan grafik tabanlı bir robot araç kutusunun geliştirilmesi.

Yukarıda verilen amaç ve hedefler doğrultusunda yapılan tez çalışmasının temel katkıları özetle şunlardır:

•Temel 16 adet endüstriyel robotun dinamik analizi Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin her ikisi ile ayrı ayrı yapılmaktadır. Aynı robot düzenleşimi için her iki yöntemle eşit tork ifadeleri elde edilmektedir.

•Endüstriyel robotların dinamik analizini iki farklı yöntem ile yapan, elde edilen sonuçları detaylı grafik ve sayısal değerler olarak kullanıcıya sunan, Matlab GUI'sini temel alan eğitim amaçlı bir yazılım gerçekleştirilmektedir.

Tez çalışması beş ana başlıktan oluşmaktadır ve aşağıdaki şekilde organize edilmiştir.

Tez çalışmasının birinci bölümünde endüstriyel robotların dinamik analizlerinin yapılmasında kullanılan Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri anlatılmıştır. Lagrange-Euler yöntemi bir sistemin toplam potansiyel enerjisi ile toplam kinetik enerjisinin farkını temel alarak dinamik denklemleri üretir. Bu bölümde sistemin toplam kinetik ve potansiyel enerjisinin, bir katı nesnenin atalet tensörünün ve eyleyicilere etki eden tork ifadelerinin bulunması anlatılmaktadır. Newton-Euler yöntemi ise bir robot kolunun doğrusal ve açısal hareketinden faydalanarak ardışık işlemler sonucunda dinamik denklemleri üretir. Bu bölümde robot'un her bir bağına etki eden kuvvet ve torkların bulunması için dışadönük ve içe dönük ardışık denklemler ve bu denklemler kullanılarak robotun eyleyicilerine etki eden tork ifadelerinin nasıl bulunduğu anlatılmıştır.

Tez çalışmasının ikinci bölümde ise Huang ve Milenkovic tarafından ikili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırmaya göre elde edilen 16 adet endüstriyel robotun düzenleşimi ve katı gövde yapısı üzerinde durulmuştur. Bu sınıflandırmaya göre mümkün olan onaltı adet eklem düzenleşimi ve bu düzenleşimlere uygun örnek katı gövde yapıları şekil olarak verilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde, Huang ve Milenkovic tarafından yapılan sınıflandırma sonucu elde edilen onaltı adet temel endüstriyel robotun dinamik denklemleri sembolik olarak üretilmiştir. Robotların katı gövde yapıları ve sembolik kütle gösterimleri şekil olarak verilmiştir. Her bir robot için Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri kullanılarak ayrı ayrı dinamik analiz yapılmıştır. Elde edilen tork ifadeleri karşılaştırılmış ve her iki yöntemin aynı robot düzenleşimi için eşit sonuçlar ürettiği gösterilmiştir. Robotların dinamik analizleri yapılırken her bir bağın kütle merkezi bağın orta noktasında kabul edilmiştir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde onaltı adet temel endüstriyel robot için dinamik analiz yapan bir araç kutusu geliştirilmiştir. Bu araç kutusunun kütüphanesinde yer alan robotlara Euler bileği eklenerek altı serbestlik derecesi elde edilmiştir ve dinamik analiz de bu altı eklemli robotlar için yapılmıştır. Araç kutusu robotların dinamik analizini Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin her ikisi ile ayrı ayrı yapabilmekte ve sonuçların karşılaştırılmasına olanak sağlamaktadır. Araç kutusunun çalışmasının anlatılması için RS robotu örnek olarak seçilmiştir. Bu robotunun dinamik analizinin aşamaları programın ekran görüntüleri kullanılarak gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise tez çalışması boyunca karşılaşılan zorluklar, elde edilen sonuçlar ve diğer araştırmacılara öneriler genel hatlarıyla yer almaktadır.

BÖLÜM 1. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN DİNAMİK ANALİZİNDE KULLANILAN LAGRANGE-EULER VE NEWTON-EULER YÖNTEMLERİ

1.1 Giriş

Bir robot kolunun dinamik modeli, robot kolunu oluşturan bağların hareketinden kaynaklanan eşitliklerin matematiksel ifadeleri şeklinde tanımlanabilir. Bu eşitlikler robot kolunun zamana göre konumu, hızı ve ivmesi ile eklemlere tahrik elemanları tarafından uygulanan moment veya kuvvet büyüklükleri arasındaki ilişkileri ifade eder. Bir robot kolunun dinamik modelinin doğru olarak ifade edilmesi o robot kolunun kontrolü açısından son derece önemlidir [6].

Robot kolunun dinamik modelinin çıkarılması konusunda günümüze kadar birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu bölümde robotların dinamik modellerinin çıkarılmasında sıkça kullanılan Newton-Euler ve Lagrange-Euler yöntemleri anlatılmıştır. Bu yöntemlerin her ikisi de birbirinden farklı olmasına rağmen sonuç olarak aynı tork ifadelerini üretmektedirler. Her iki yöntemin hesap yükleri karşılaştırıldığında, n eklem sayısı olmak üzere, Lagrange-Euler için hesap yükü n^4 (eğer en iyilenirse n^3) olurken Newton-Euler için hesap yükü n dir. Hesap yükü daha az olmasına karşın Newton-Euler yönteminin yapısında bulunan vektörel çarpım ifadeleri bu yöntemi daha zahmetli bir hale getirmektedir. Özellikle günümüz bilgisayarlarındaki işlem yapma kapasitesindeki artış ta dikkate alındığı zaman Lagrange-Euler yönteminin hesap yükünün fazla olması önemini yitirmektedir. Lagrange-Euler yönteminin bu özelliği ve yapısındaki matris işlemlerinin Newton-Euler yönteminden daha kolay gerçekleştirilmesi bu yöntemi daha çok tercih edilir hale getirmiştir. Diğer taraftan Newton-Euler yönteminin, Lagrange-Euler yönteminden farklı olarak her bir ekleme etki eden kuvvetleri vermesi de bu yöntemin Lagrange-Euler yöntemine bir üstünlüğü olarak söylenebilir [6].

1.2 Lagrange-Euler Yöntemi

Lagrange-Euler formülasyonu bir sistemin dinamik modelini çıkarırken, sistemin toplam kinetik enerjisi ile toplam potansiyel enerjisi farkından yararlanır. K ve P sırasıyla bir robot kolunun toplam kinetik enerjisi ve toplam potansiyel enerjisini ifade etsin. Bu robot kolunun kinetik ve potansiyel enerjileri arasındaki farkı ifade eden Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır [6].

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - P(q) \tag{1.1}$$

Fonksiyonda q dönel eklemler için eklem açısını prizmatik eklemler için bağ uzunluğunu temsil eder. $\dot{q} = (dq/dt)$ ise eklem hızlarını gösteren bir vektördür. Lagrange fonksiyonunda yer alan kinetik enerji (K) ifadesi robot kolunun konumu ve hızına bağlıyken, potansiyel enerji (P) ifadesi sadece robot kolunun konumuna bağlıdır. Bir robot kolu için Lagrange fonksiyonunu yazabilmek için öncelikle robot kolunun toplam kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin hesaplanması gerekir. Robot kolunun toplam kinetik enerjisini hesaplamak için, robot kolunu oluşturan her bir bağın kinetik enerjisinin hesaplanması ve elde edilen sonuçların toplanması gerekir. Robot kolunu oluşturan bağların toplam kinetik enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir [6].

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (v_i)^T m_i v_i + (\omega_i)^T I_i \omega_i \quad (n = 1,2,...) \tag{1.2}$$

Kinetik enerji ifadesinde yer alan n robotu oluşturan bağ sayısını, v_i ve ω_i sırasıyla i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre doğrusal ve açısal hızlarını, m_i, i. bağın kütlesini ve I_i ise i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine atalet tensörünü ifade etmektedir. Bir bağın atalet tensörü, bağın kütle dağılımını gösteren 3x3'lük bir matristir. Bağın atalet tensörünü ana koordinat sistemine göre tanımlayabilmek için öncelikle aynı bağın kendi kütle merkezine göre atalet tensörünün tanımlanması gerekir. Bir katı nesnenin kütle yoğunluğu ρ ve hacmi V olsun. Bu durumda katı nesnenin kendi kütle merkezine göre atalet tensörü aşağıdaki gibi olur [6].

$$I_m = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Matriste,

$$I_{xx} = \iiint \left(y^2 + z^2\right)\rho dv \; ; \; I_{xy} = \iiint xy\rho dv$$
$$I_{yy} = \iiint \left(x^2 + z^2\right)\rho dv \; ; \; I_{xz} = \iiint xz\rho dv$$
$$I_{zz} = \iiint \left(x^2 + y^2\right)\rho dv \; ; \; I_{yz} = \iiint yz\rho dv$$

I_m matrisi altı adet farklı eleman içeren simetrik bir matristir. Köşegende yer alan elemanlar atalet momenti, geri kalan simetrik elemanlar ise atalet çarpanları olarak adlandırılırlar. Atalet momenti pozitif bir büyüklük olmasına karşın atalet çarpanları hem pozitif hem negatif büyüklük olabilirler. Eğer koordinat sistemi cismin kütle merkezine yerleştirilirse prensip eksenler kuralına göre atalet çarpanları sıfır olur. Bu durumda atalet tensörü aşağıdaki gibi gösterilir [6].

$$I_m = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Basit geometrik şekillerin atalet tensörünün hesaplanması kolaylıkla yapılabilirken düzensiz şekillerin atalet tensörlerinin hesaplanması oldukça zahmetlidir ve çoğu zaman deneysel olarak hesaplanır. Bir robot bağının atalet tensörü I_i, i. bağın kütle merkezinin robotun ana koordinat sistemine göre tanımlanmasıyla bulunur. Buna göre i. bağın atalet tensörü şu şekilde olur [6].

$$I_i = {}_i^0R I_m {}_i^0R^T \tag{1.5}$$

Denklemde, ${}_i^0R$, i. bağın ana koordinat sistemine göre yönelimini, I_m ise i. bağın kendi kütle merkezine yerleştirilmiş koordinat sistemine göre tanımlanan atalet tensörünü ifade etmektedir.

Robot kolunun toplam kinetik enerjisini bulabilmek için hesaplanması gereken diğer değişkenler i. bağın kütle merkezinin açısal hızı ω_i ve doğrusal hızı v_i'dir. Bunların hesaplanması için i. bağın jakobiyen matrisinin bulunması gerekir. Bunun için i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre konumu, h_i vektörü kullanılarak tanımlanır [6].

$$h_i = {}_i^0T \Delta h_i \tag{1.6}$$

Denklemde, ${}_i^0T$ i. bağın ana koordinat sistemine göre dönüşüm matrisini, Δh_i ise i. ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre i. bağın kütle merkezinin koordinatlarını gösteren vektörü ifade etmektedir. h_i vektörü bulunduktan sonra jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır [6].

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{q_1} \dots \frac{\partial h_i}{q_i} \\ \\ \xi_1 z^1 \dots \xi_i z^i \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Denklemde, A_i doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisini, B_i açısal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisini, ξ_i eklem tip değişkenini ve z^i ise i. koordinat sisteminin üçüncü kolon birim vektörünü temsil eder. ξ_i dönel eklemler için 1, prizmatik eklemler için ise 0 olarak alınır. z^i ise şu şekilde bulunur [6].

$$z^i = {}_i^0R i^3 \; ; i^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{1.8}$$

A_i ve B_i vektörleri bulunduktan sonra, robot kolunun kütle merkezinin açısal ve doğrusal hızları şu şekilde ifade edilebilir [6].

$$\begin{aligned} v_i &= A_i \dot{q} \\ \omega_i &= B_i \dot{q} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sonuç olarak robot kolunun toplam kinetik enerjisini bulmak için bulunan bu değişkenler Denklem 1.2'de yerine yazılıp gereken sadeleştirmeler yapılırsa toplam kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi olur [6].

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} \left[(A_i)^T m_i A_i + (B_i)^T I_i B_i \right] \dot{q} \quad (n = 1,2,...) \tag{1.10}$$

Denklem 1.10'daki toplam kinetik enerji ifadesi eklem hızları ve manipülatör atalet tensörü $D(q)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} \tag{1.11}$$

Denklemde, $D(q)$ simetrik, pozitif tanımlı bir matristir ve aşağıdaki gibi gösterilir [6].

$$D(q) = \sum_{i=1}^{n} \left[(A_i)^T m_i A_i + (B_i)^T I_i B_i \right] (n = 1,2,...) \tag{1.12}$$

Robot kolunun Lagrange fonksiyonunu tamamen ifade etmek için robot kolunun toplam potansiyel enerji ifadesinin de tanımlanması gerekir. Robot kolunun toplam potansiyel enerjisi, yerçekimi ivmesinin var olduğu ortamda bağ kütle merkezlerinin yer değiştirmelerini sağlayan iş miktarı kadardır ve aşağıdaki gibi gösterilir [6].

$$P(q) = -\sum_{i=1}^{n} m_i g^T h_i \quad (n = 1,2,...) \tag{1.13}$$

Denklemde, $g \in R^3$ yerçekimi ivmesini, h_i ise i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre konumunu göstermektedir. Sonuç olarak robot kolunun Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + mg^T h \tag{1.14}$$

1.2.1 Lagrange-Euler dinamik modeli

Bulunan kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri Lagrange fonksiyonunda yerine yazılarak bir robot kolunun genel dinamik modeli çıkarılabilir. Bir robot kolu için Lagrange fonksiyonu Denklem 1.1' de verilmişti. Robot kolunun hareketinden dolayı oluşan denklem de şu şekilde ifade edilir [6].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=\tau \tag{1.15}$$

Denklemde, τ, eklemlere etki eden $nx1$ boyutlu tork vektörüdür. Denklem 1.15 şu şekilde yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial K}{\partial q}+\frac{\partial P}{\partial q}=\tau \tag{1.16}$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra denklem 1.16 şu hali alır [6].

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij}(q)\ddot{q}_j+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}^{i}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j+y_i(q)+b_i(\dot{q})=\tau_i \quad (n=1,2,...) \tag{1.17}$$

Denklemde, ilk terim robot bağlarının hareketlerinden üretilen kuvvet ve tork ifadelerini temsil eden ivme terimidir. İkinci terim, robot bağlarının hızlarıyla ilişkilendirilen coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörüdür ve aşağıdaki gibi ifade edilir [6].

$$C_{kj}^{i}(q)=\frac{\partial}{\partial q_k}D_{ij}(q)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}D_{kj}(q) \quad 1\le i,j,k\le n \tag{1.18}$$

Üçüncü terim yerçekimi ivmesini temsil eder ve aşağıdaki gibi gösterilir [6].

$$Y_i(q)=-\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} g_k m_j A_{ki}^{j}(q) \tag{1.19}$$

Son terim ise robot kolunun hareketine zıt olarak gerçekleşen sürtünmeyi temsil eder. Sürtünme terimi ihmal edilirse sonuç olarak bir robot kolunun eklem uzayındaki dinamik denklemi aşağıdaki gibi olur [6].

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})+G(q)=\tau_i \tag{1.20}$$

Denklemde birinci terim, robot kolunun genel atalet tensörünü veya kütle matrisini, ikinci terim coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü ve üçüncü terim yerçekimi ivmesini temsil eder.

Denklem 1.20 kartezyen değişkenler cinsinden de ifade edilebilir. Bu durumda denklem 1.20 şu şekilde olur [6].

$$D(q)\ddot{x}+C(q,\dot{q})+G(q)=F \tag{1.21}$$

Denklemde, F robotun uç işlevcisine etki eden kuvvet-tork vektörünü ve x de uç işlevcisinin konum ve yönelimini gösteren kartezyen vektörü ifade etmektedir. Diğer terimler eklem uzayında olduğu gibi, $D(q)$, kartezyen kütle matrisini, $C(q,\dot{q})$, kartezyen coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü ve $G(q)$, yerçekimi vektörünü göstermektedir. Kartezyen uzaydan eklem uzayına geçmek için aşağıdaki denklem kullanılır [6].

$$\tau = J^T(q)F \tag{1.22}$$

Denklemde, $J(q)$ robot kolunun uç işlevcisi cinsinden tanımlanan jakobiyen matrisidir.

1.3 Newton-Euler Yöntemi

Newton-Euler formülasyonu bir robot kolunun doğrusal ve açısal hareketinden faydalanarak ardışık işlemler sonucunda dinamik denklemleri üretir. Newton-Euler formülasyonu prensibine göre katı bir cisme herhangi bir kuvvet veya tork uygulanırsa, bu büyüklüklere eşit ve zıt yönlü bir kuvvet ve tork meydana gelir. Katı cisme etki eden toplam kuvvet doğrusal momentum değişimine eşittir ve aşağıdaki gibi ifade edilir [6].

$$F = m\dot{v}_c \tag{1.23}$$

Denklemde v_c cismin kütle merkezinin, cismin kendi koordinat sistemine göre hızını, m cismin kütlesini, F ise cisme etki eden harici kuvvetleri ifade etmektedir. Katı cisme etkiyen toplam tork ise açısal momentum değişim oranına eşittir ve aşağıdaki gibi ifade edilir [6].

$$N = {}^{c}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{c}I\omega \tag{1.24}$$

Denklemde, ${}^{c}I$ cismin kendi kütle merkezine göre atalet tensörünü, $\dot{\omega}$, cismin açısal ivmesini, ω, açısal hızını ve $\times$ vektörel çarpımı ifade etmektedir.

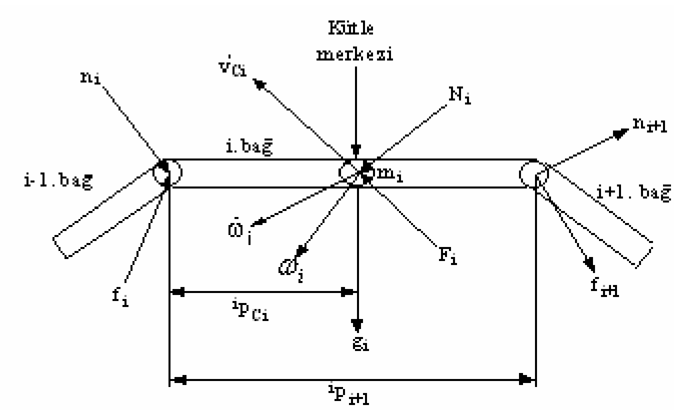
Sonuç olarak aşağıdaki Newton ve Euler denklemleri kullanılarak her bir eklemin kütle merkezine etki eden kuvvet ve tork değerleri hesaplanabilir [6].

$$F_i = m\dot{v}_{c_i} \text{ (Newton Denklemi)} \tag{1.25}$$

$$N_i = {}^{c_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{c_i}I\omega_i \text{ (Euler Denklemi)} \tag{1.26}$$

Denklem 1.24 ve 1.25'i uygulayabilmek için manipülatörün her bir ekleminin kütle merkezinin açısal hız ω_i, doğrusal ivme $\dot{v}_{c_i}$ ve açısal ivme $\dot{\omega}_i$ değişkenlerinin bulunması gereklidir. Bu işlemler 1. eklemden n. ekleme doğru gerçekleştirilir. Bu şekilde her bir cismin kütle merkezine etki eden kuvvet ve tork ifadelerini hesaplamak için ana koordinat sisteminden uç işlevcideki koordinat sistemine doğru hız ve ivme değerlerinin bulunmasını sağlayan ardışık denklemlere, dışadönük ardışık denklemler denir [6].

Eklem torklarının hesaplanması için ise n. eklemden 1. ekleme doğru kuvvet denge ve moment denge denklemlerinin yazılması gerekir. Bu denklemlere de içedönük ardışık denklemler denir. Dışadönük ve içedönük ardışık denklemler de kullanılan bazı tanımlar Şekil 1.1 ve Tablo 1.1'de verilmiştir [6].



Şekil 1.1: Newton-Euler yönteminde kullanılan tanımların şekil üzerinde gösterimi

Tablo 1.1 Newton-Euler yönteminde kullanılan tanımlamalar

$\dot{v}_i$	i. bağın doğrusal ivmesi
$\dot{v}_{Ci}$	i. bağın kütle merkezinin doğrusal ivmesi.
ω_i	i. bağın açısal hızı.
$\dot{\omega}_i$	i. bağın açısal ivmesi.
m_i	i. bağın kütlesi.
g_i	i. bağın yerçekimi ivmesi.
${}^{i+1}_{i}R$	i ile i+1. bağlar arasındaki dönme matrisi.
${}^{C_i}I$	i. bağın kendi kütle merkezine göre atalet tensörü.
${}^{i}P_{Ci}$	i. bağın kütle merkezinin konumu.
${}^{i}P_{i+1}$	i. bağın i+1. bağa göre konumu.
F_i	i. bağın kütle merkezine etkiyen kuvvet.
N_i	i. bağın kütle merkezine etkiyen tork.
f_i	i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan kuvvet.
n_i	i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan tork.

1.3.1 Dışadönük ardışık denklemler

Dışadönük ardışık denklemler ana koordinat sisteminden uç işlevcideki koordinat sistemine doğru hız ve ivme değerlerinin bulunmasını sağlarlar ve dönel eklemler ve prizmatik eklemler için farklı olarak hesaplanırlar. Denklemlerde kullanılan ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ve $(i = 0,1,2,...,n)$ 'dir. Newton-Euler yönteminde kullanılan dışadönük ardışık denklemler şunlardır [6]:

Eğer $(i+1)$. eklem dönel ise ;

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal hız,

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{1.27} $$

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal ivme,

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{1.28} $$

Eklemin doğrusal ivmesi,

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} \right) + {}^{i}\dot{v}_i \right) \tag{1.29} $$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi,

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \tag{1.30} $$

Cismin kütle merkezine etkiyen kuvvet,

$$ {}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} \tag{1.31} $$

Cismin kütle merkezine etkiyen tork,

$$ {}^{i+1}N_{i+1} = {}^{c_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{c_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\omega_{i+1} \tag{1.32} $$

Eğer $(i+1)$. eklem prizmatik ise ;

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal hız,

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \tag{1.33}$$

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal ivme,

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i \tag{1.34}$$

Eklemin doğrusal ivmesi,

$$\begin{aligned} ^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\Big[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}\dot{v}_i\Big] \\ +2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left(\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\right) + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Prizmatik eklemler için kütle merkezinin doğrusal ivmesi, cismin kütle merkezine etkiyen kuvvet ve cismin kütle merkezine etkiyen tork ifadeleri dönel eklemler de olduğu gibidir.

1.3.2 İçedönük ardışık denklemler

Dışadönük ardışık denklemler sonucunda elde edilen kuvvet ve tork ifadelerinden faydalanarak eklem torklarının hesaplanması için kuvvet-denge ve moment-denge ifadeleri yazılmalıdır. Şekil 1.1'de f_i, $(i-1)$. eklem tarafından i. ekleme uygulanan kuvveti, n_i, ise $(i-1)$. eklem tarafından i. ekleme uygulanan torku göstermektedir. i. ekleme etkiyen kuvvetler toplanarak kuvvet-denge ilişkisi elde edilir [6].

$$^{i}F_i = {}^{i}f_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \tag{1.36}$$

Kütle merkezine göre torklar toplanarak tork-denge ilişkisi elde edilir [6].

$$^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + \left(-{}^{i}P_{c_i}\right) \times {}^{i}f_i - \left({}^{i}P_{i+1} - {}^{i}P_{c_i}\right) \times {}^{i}f_{i+1} \tag{1.37}$$

Denklem 1.35 ve 1.36'dan faydalanarak n. eklemden temel koordinat sistemine doğru içedönük denklemler şu şekilde elde edilir [6].

$$ {}^{i}f_i = {}_{i+1}^{\;\;i}R^{\,i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \tag{1.38} $$

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}_{i+1}^{\;\;i}R^{\,i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{c_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times \left({}_{i+1}^{\;\;i}R^{\,i+1}f_{i+1} \right) \tag{1.39} $$

Bu denklemler n. eklemden temel koordinat sistemine doğru uygulandıktan sonra eklem torkları şu şekilde bulunur [6].

$$ \tau_i = {}^{i}n_i^{T}\,{}^{i}\hat{Z}_i \quad \text{(Dönel eklemler için)} \tag{1.40} $$

$$ \tau_i = {}^{i}f_i^{T}\,{}^{i}\hat{Z}_i \quad \text{(Prizmatik eklemler için)} \tag{1.41} $$

1.3.3 Yerçekimi kuvveti

Newton-Euler yönteminde eklemlere etkiyen yer çekimi kuvveti hesaba katılırken yerçekimi vektörü sıfırıncı eklemin doğrusal ivmesi olarak hesaba katılır. Bu durum şu şekilde ifade edilebilir [6].

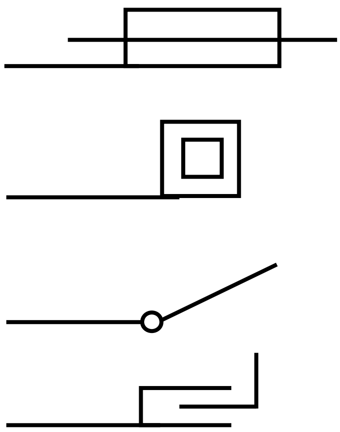
$$ {}^{0}\dot{v}_0 = G \tag{1.42} $$

Denklemde, G yerçekimi vektörüdür.

BÖLÜM 2. İKİLİ HARF KODUNUN KULLANILMASIYLA YAPILAN SINIFLANDIRMA

Bu bölümde, Huang ve Milenkovic tarafından geliştirilen ve endüstriyel robotların eklem düzenleşimine göre sınıflandırılması için kullanılan ikili harf kodu üzerinde durulmaktadır. İkili harf kodunda yer alan ilk harf, birinci eklemin özelliğini ve ikinci ekleme göre nasıl döndüğünü açıklamaktadır. İkinci harf ise, üçüncü eklemi ve ikinci eklem ile üçüncü eklem arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bu şekilde yapılan tanımlama ile onaltı adet temel eklem düzenleşimi elde edilmektedir. Tanımlanan bu mekanizma Şekil 2.1'de verilmiştir. Kullanılan harfler ve anlamları da şu şekildedir [18]:

S : Kayma,
C : Kayma eksenine dik dönme,
N : Dönme eksenine dik dönme,
R : Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme.



Kağıt düzlemine paralel bir kayma (prizmatik eklem)

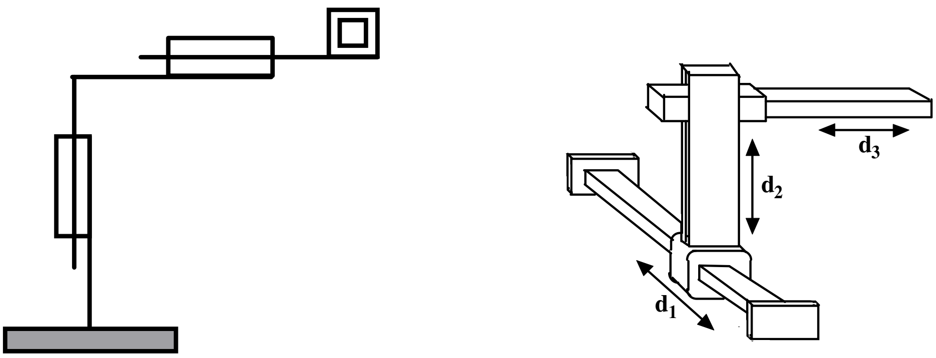
Kağıt düzlemine dik bir kayma (prizmatik eklem)

Kağıt düzlemine dik bir dönme (dönel eklem)

Kağıt düzlemine paralel bir dönme (dönel eklem)

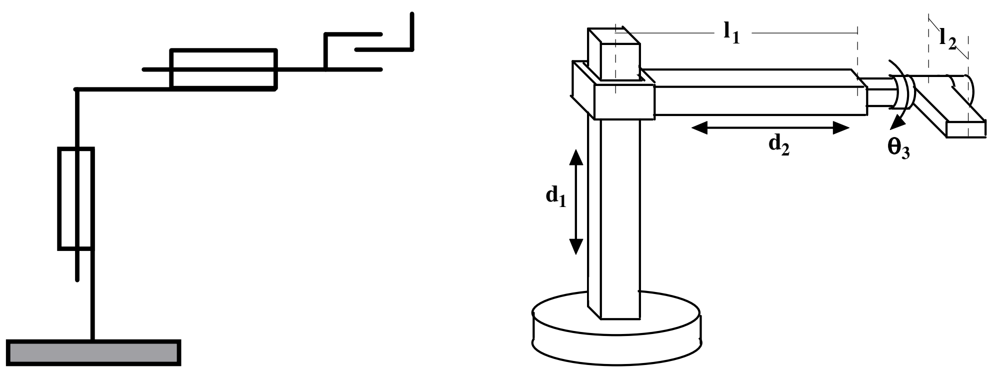
Şekil 2.1: Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma.

Huang ve Milenkoviç robot bağları için onaltı adet ikili harf kombinasyonu kullanmıştır. Fakat bunların tamamı robot bağları için kullanışlı (useful) ve farklı (distinct) değildir. Kullanışlı bir bağ, üç boyutlu uzayda geniş çaplı hareket (gross motion) yapabilme yeteneğine sahip olmalıdır. Farklılık ise her bir bağın kinematik olarak diğer kategoriler arasında tek olmasıdır. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan onaltı olası kod CC, CN, CR, CS, NC, NN, NR, NS, RC, RN, RR, RS, SC, SN, SR ve SS şeklinde elde edilir. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan onaltı adet düzenleşim ve bu düzenleşimlere denk düşen robot manipülatörlerinin katı gövde yapıları Şekil (2.2-2.17)'de verilmiştir. Şekillerde robotların katı gövde yapıları üzerinde görülen d_1, d_2 ve d_3 sırasıyla prizmatik θ_1, θ_2 ve θ_3 ise dönel eklem değişkenlerini göstermektedir. Ayrıca P prizmatik, R ise dönel eklemi ifade etmektedir [18].



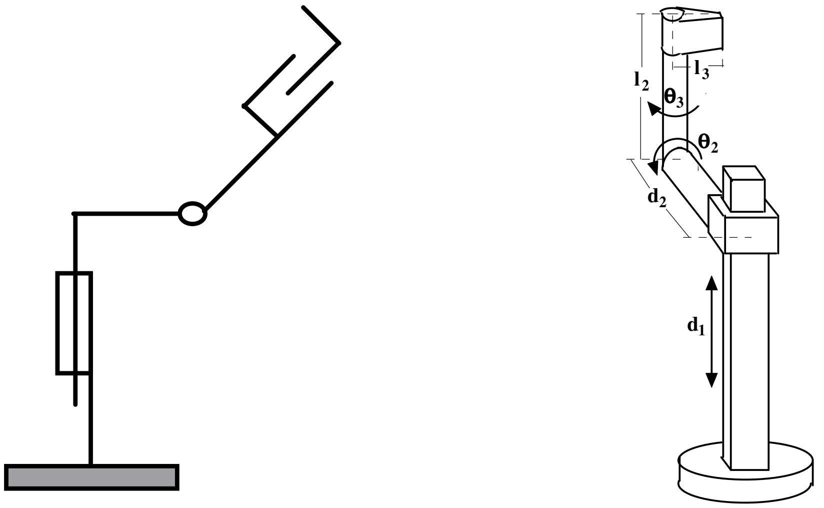
(a) **(b)**

Şekil 2.2: SS (PPP) prizmatik robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



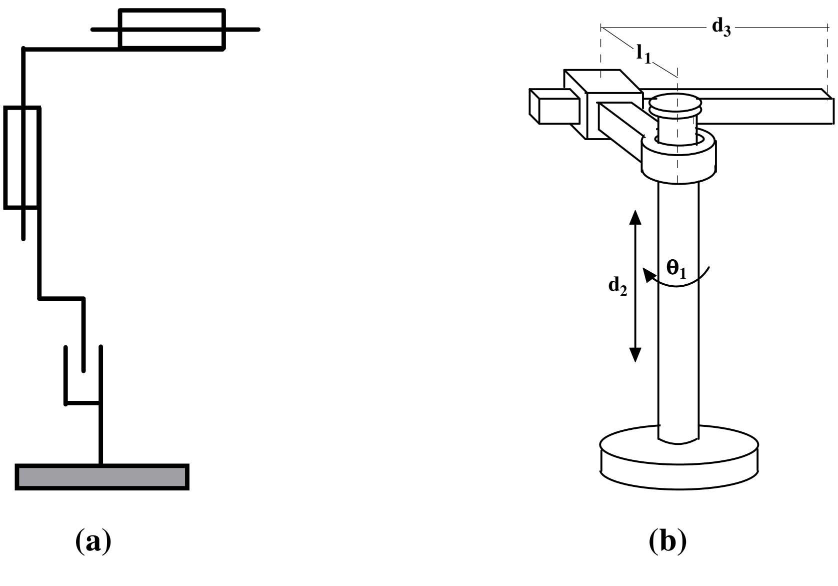
(a) **(b)**

Şekil 2.3: SC (PPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



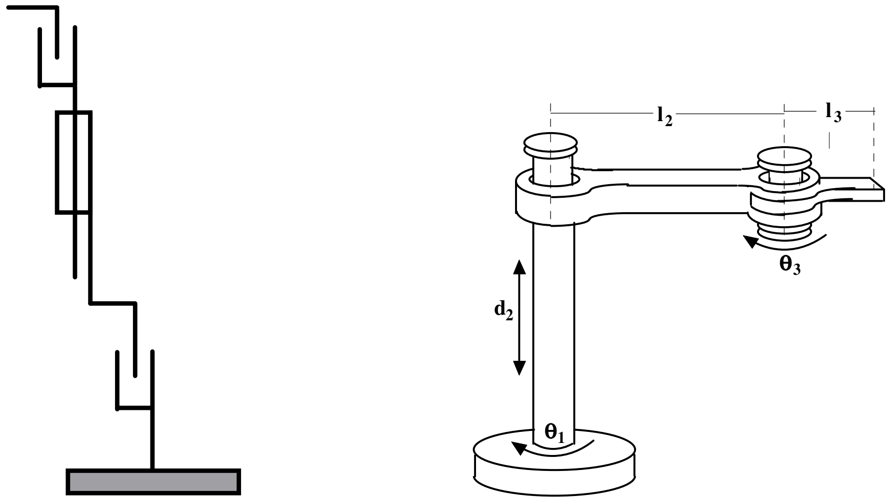
(a) **(b)**

Şekil 2.4: SN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



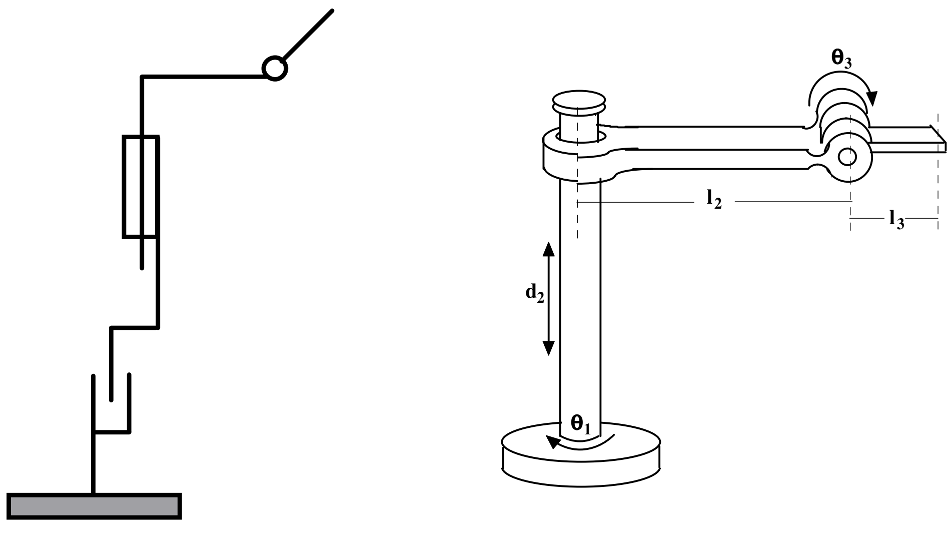
(a) **(b)**

Şekil 2.5: CS (RPP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



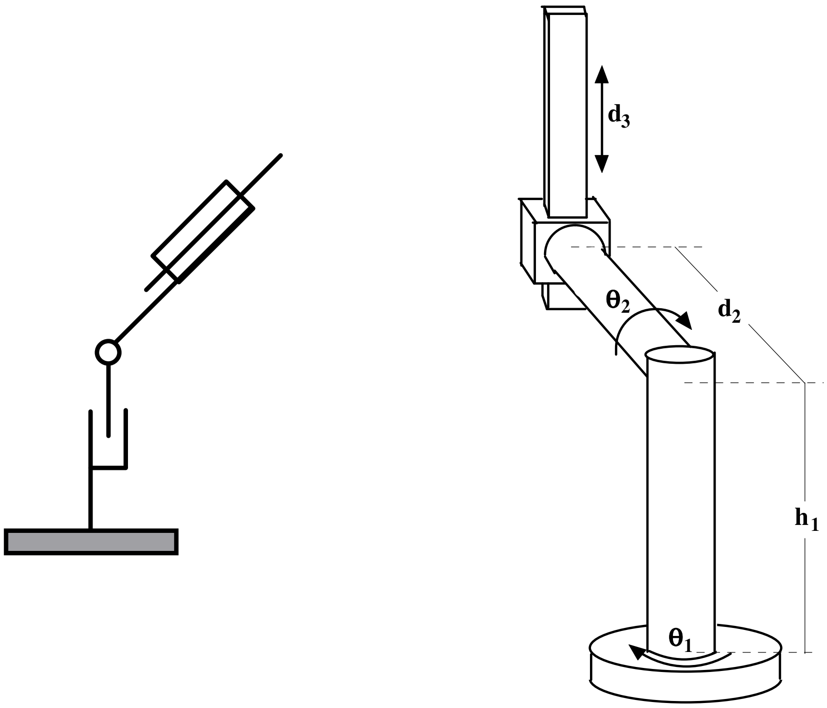
(a) **(b)**

Şekil 2.6: CC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



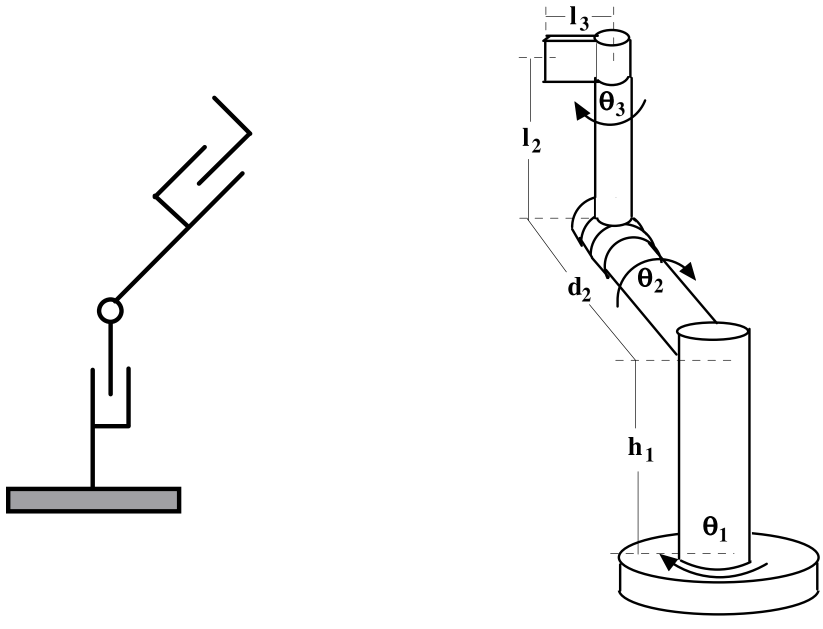
(a) **(b)**

Şekil 2.7: CR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



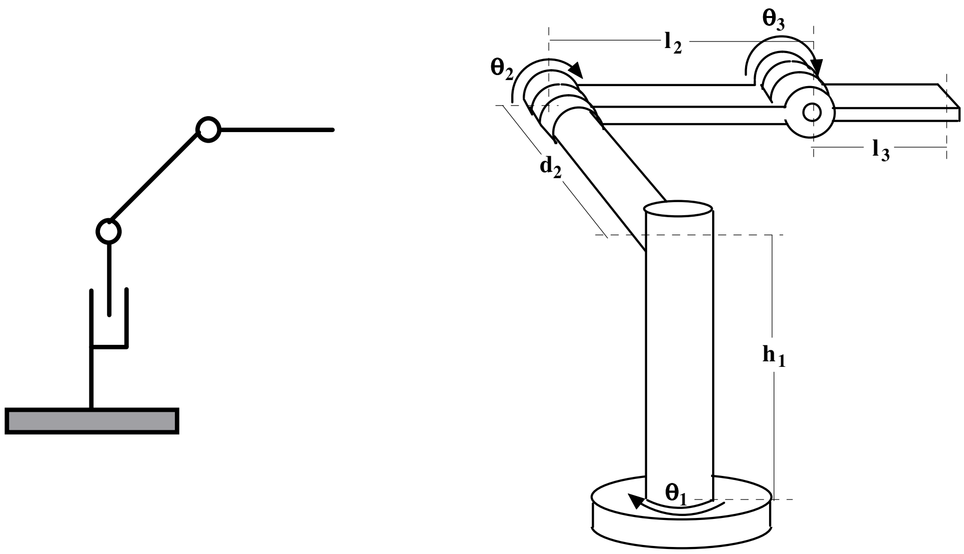
(a) **(b)**

Şekil 2.8: NS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



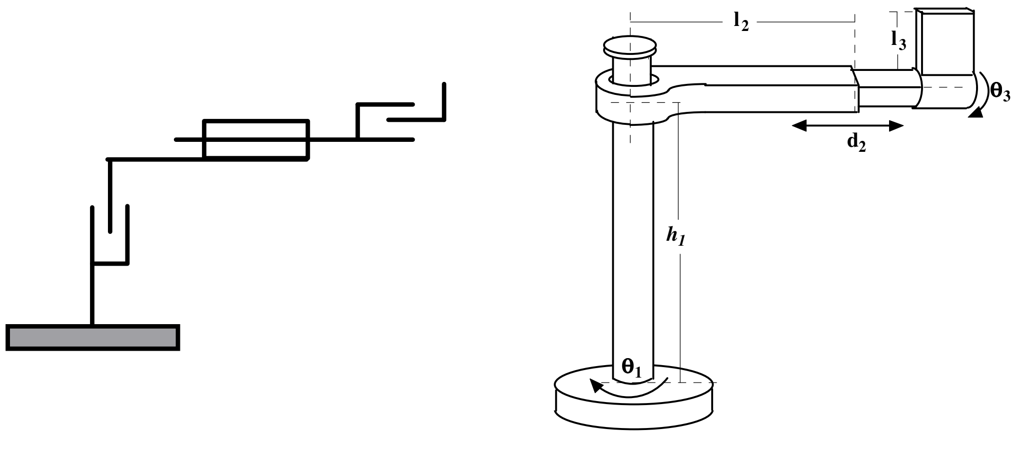
(a) **(b)**

Şekil 2.9: NN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



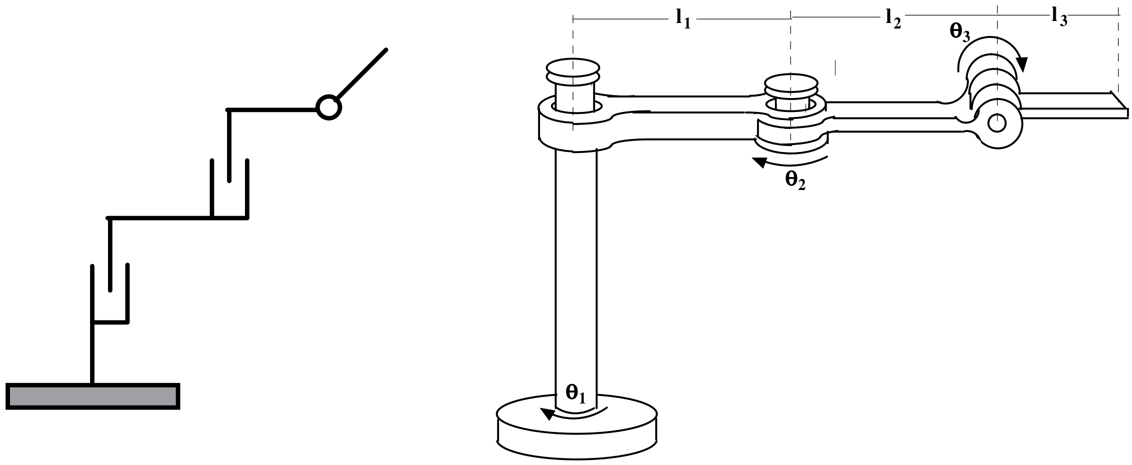
(a) **(b)**

Şekil 2.10: NR (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



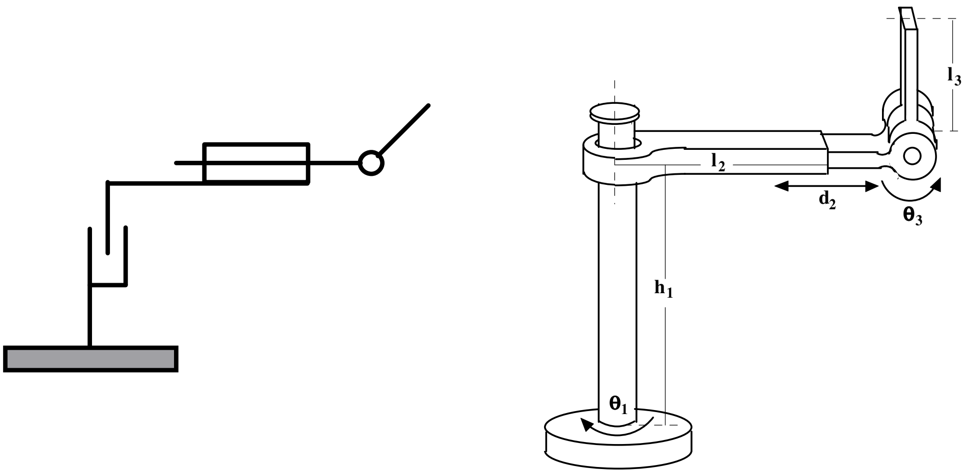
(a) **(b)**

Şekil 2.11: RC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



(a) **(b)**

Şekil 2.12: RN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

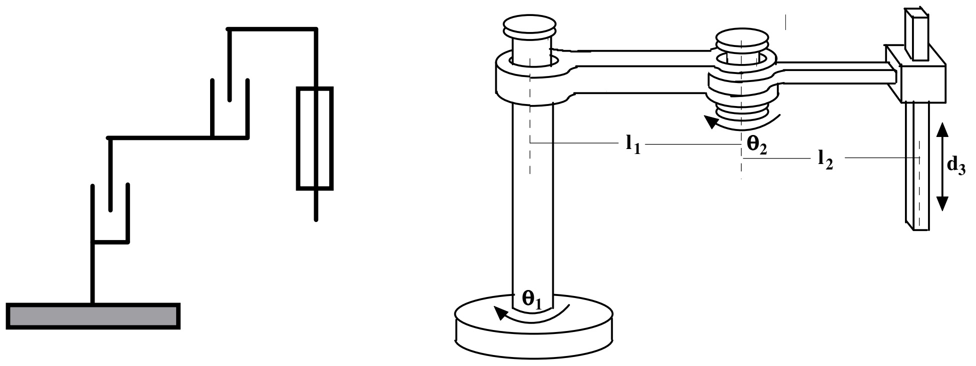


(a) **(b)**

Şekil 2.13: RR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

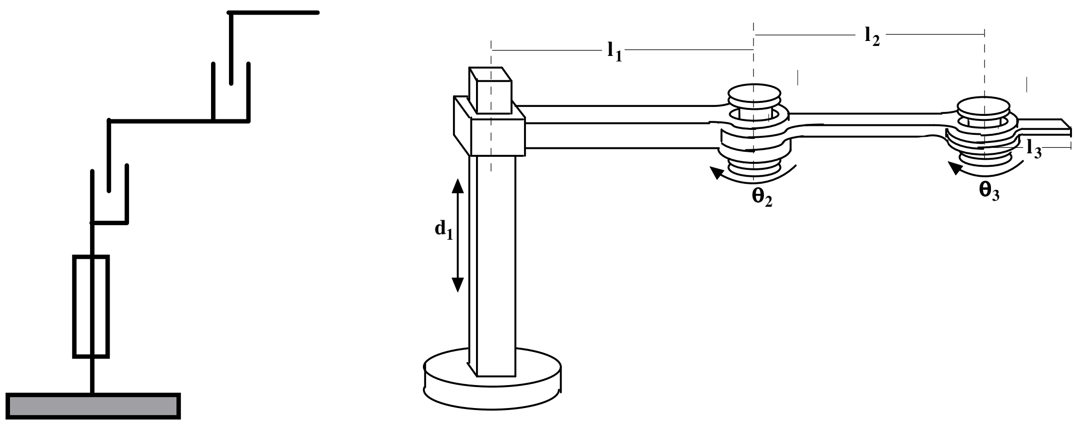
Huang ve Milenkovic yukarıdaki kodlardan CN, NC, RS, ve SR'yi kullanışlı ve farklı bulmamıştır. Dolayısı ile bu robot türlerini sınıflandırma dışı bırakmışlardır. Buna rağmen RS kodu endüstride çok popüler olan "Skara" robotunu temsil eder. SR kodu da kullanışlı bir düzenleşimi temsil eder. Bu düzenleşimlerin her ikisi de üç boyutlu hareket etmesine rağmen düzlemsel robotlar (planar robots) olarak kabul edilirler. CN ve RC ise herhangi bir robot düzenleşimi olarak kabul edilmez [18].

Huang ve Milenkovic Şekil 2.14 ve Şekil 2.15’de verilen RS ve SR robotlarını kullanışlı ve farklı bulmamasına rağmen, bu robotlar silindirik çalışma alanları nedeniyle sık tercih edilirler. Huang ve Milenkovic’in bunları farklı ve kullanışlı bulmayışının nedeni, CS robotu ile aynı alanı taramalarından kaynaklanmaktadır [18].



(a) **(b)**

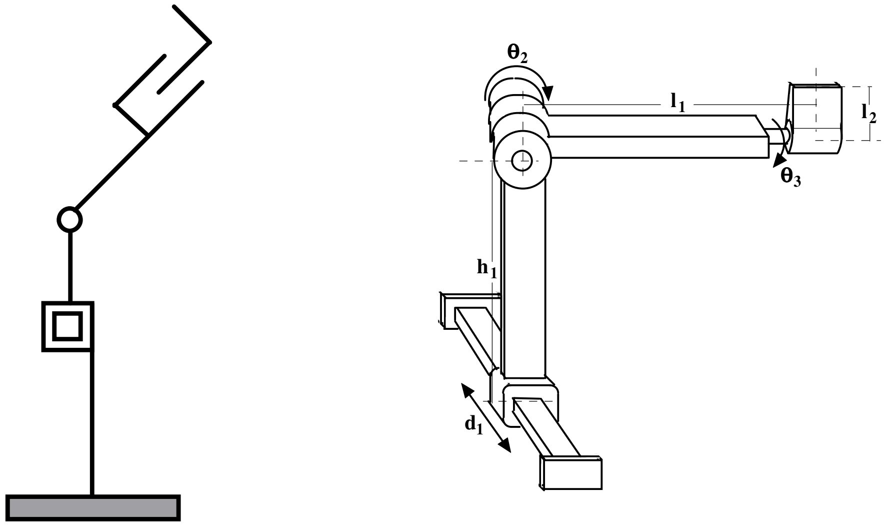
Şekil 2.14: RS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



(a) **(b)**

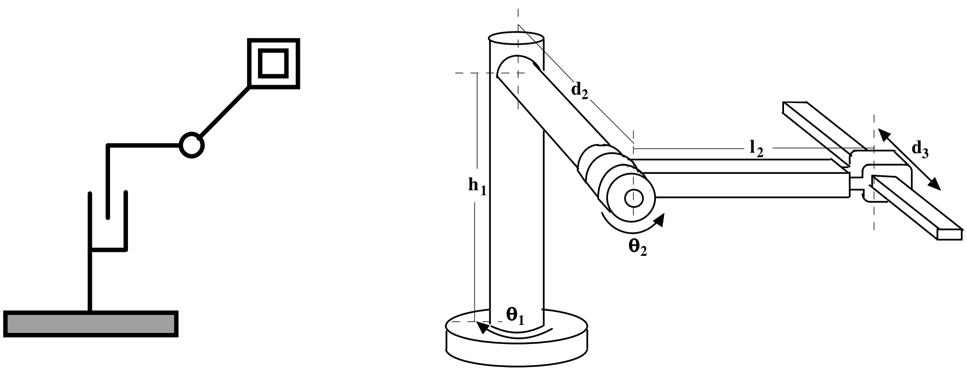
Şekil 2.15: SR (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

Şekil 2.16 ve Şekil 2.17’de gösterilen CN ve NC kodlarının tanımladıkları robot düzenleşimleri kullanışsızdırlar.



(a) **(b)**

Şekil 2.16: CN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



(a) **(b)**

Şekil 2.17: NC (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN DİNAMİĞİNİN LAGRANGE-EULER VE NEWTON-EULER YÖNTEMLERİ İLE ÇIKARILMASI

3.1. Giriş

Bu bölümde, onaltı adet temel endüstriyel robotun dinamiği Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri kullanılarak çıkarılmıştır. Her robotun aynı yöntemle dinamik modelinin çıkarılması benzer olduğu için her iki yöntem ile çözüm gerçekleştirilirken sadece SS robotun çözümü ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

Her bir endüstriyel robotun dinamik modeli çıkarılırken robotu oluşturan bağların kütle merkezleri bağların orta noktalarında kabul edilmiştir. Buna göre üç serbestlik derecesine sahip bir endüstriyel robotun bağlarının kütle merkezlerinin atalet tensörleri aşağıdaki gibi olur.

Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü bağların kütle merkezlerinin atalet tensörleri:

$$I_{m1} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

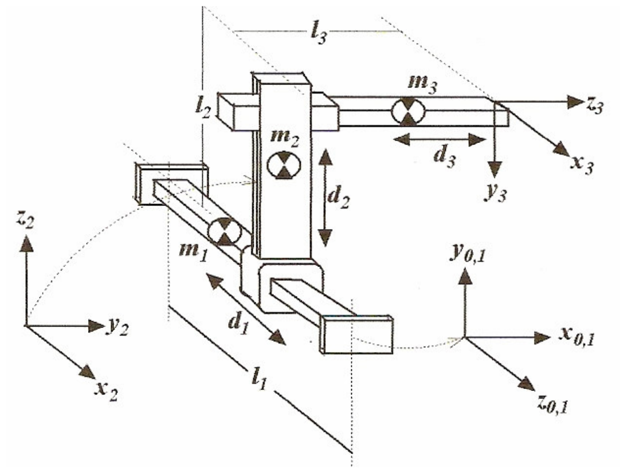
$$I_{m2} = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$I_{m3} = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

3.2. Endüstriyel Robotların Dinamiğinin Lagrange-Euler Yöntemi ile Çıkarılması

3.2.1. SS robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

SS robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.1'de ve bu düzenleşime göre elde edilen DH parametreleri Tablo 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1: SS Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.1: SS robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	0	0	0	d_1
2	90	–90	0	d_2
3	0	90	0	d_3

Tablo 3. 1'deki verilerden yararlanarak SS robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}
$$

SS robotunun konum ve yönelimini gösteren ileri yön dönüşüm matrisi yukarıda elde edilen dönüşüm matrislerinin çarpımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

İlk ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre birinci bağın kütle merkezinin konumu z_1 ekseninde oluşur ve şu şekilde ifade edilir.

$$
\Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1/2 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.8}
$$

Birinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensörü:

$$
I_1 = {}^{0}_{1}R I_{m1} {}^{0}_{1}R^T = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.9}
$$

Ana koordinat sistemine göre birinci bağın kütle merkezinin koordinatları:

$$
h_1 = {}^{0}_{1}T \Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 - \tfrac{1}{2} l_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.10}
$$

Birinci bağ prizmatik olduğundan $\xi_1 = 0$ 'dır. Buradan;

$$b_1 = \xi_{11}{}^0Ri^3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.11}$$

Birinci eklemin açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial d_1}(0) & \frac{\partial}{\partial d_2}(0) & \frac{\partial}{\partial d_3}(0) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}(0) & \frac{\partial}{\partial d_2}(0) & \frac{\partial}{\partial d_3}(0) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}\left(d_1 - \frac{1}{2}l_1\right) & \frac{\partial}{\partial d_2}\left(d_1 - \frac{1}{2}l_1\right) & \frac{\partial}{\partial d_3}\left(d_1 - \frac{1}{2}l_1\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Jakobiyen matrisinden elde edilen A_1 ve B_1 matrisleri:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Birinci ekleme ait kütle matrisi:

$$D(d_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T I_1 B_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin konumu z_2 ekseninde oluşur ve şu şekilde ifade edilir.

$$\Delta h_2 = [0 \quad 0 \quad -l_2/2 \quad 1]^T \tag{3.16}$$

İkinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensörü:

$$I_2 = {}_2^0 R I_{m2} {}_2^0 R^T = \begin{bmatrix} I_{yy2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Ana koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin koordinatları:

$$h_2 = {}_2^0 T \Delta h_2 = \begin{bmatrix} 0 & d_2 - \tfrac{1}{2} l_2 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.18}$$

İkinci bağ prizmatik olduğundan $\xi_2 = 0$'dır. Buradan;

$$b_2 = \xi_2 {}_2^0 R i^3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.19}$$

İkinci eklemin açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi:

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial d_1}(0) & \frac{\partial}{\partial d_2}(0) & \frac{\partial}{\partial d_3}(0) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}\left(d_2 - \tfrac{1}{2} l_2\right) & \frac{\partial}{\partial d_2}\left(d_2 - \tfrac{1}{2} l_2\right) & \frac{\partial}{\partial d_3}\left(d_2 - \tfrac{1}{2} l_2\right) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}(d_1) & \frac{\partial}{\partial d_2}(d_1) & \frac{\partial}{\partial d_3}(d_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Jakobiyen matrisinden elde edilen A_2 ve B_2 matrisleri:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

İkinci ekleme ait kütle matrisi:

$$D(d_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T I_2 B_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre üçüncü bağın kütle merkezinin konumu z_3 ekseninde oluşur ve şu şekilde ifade edilir.

$$\Delta h_3 = [0 \quad 0 \quad -l_3/2 \quad 1]^T \tag{3.24}$$

Üçüncü bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensörü:

$$I_3 = {}_3^0 R I_{m3} {}_3^0 R^T = \begin{bmatrix} I_{zz3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Ana koordinat sistemine göre üçüncü bağın kütle merkezinin koordinatları:

$$h_3 = {}_3^0 T \Delta h_3 = \left[d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \quad d_2 \quad d_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.26}$$

Üçüncü bağ prizmatik olduğundan $\xi_3 = 0$ ’dır. Buradan;

$$b_3 = \xi_3 {}_3^0 R i^3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.27}$$

Üçüncü eklemin açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi:

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial d_1}\left(d_3 - \frac{1}{2} l_3\right) & \frac{\partial}{\partial d_2}\left(d_3 - \frac{1}{2} l_3\right) & \frac{\partial}{\partial d_3}\left(d_3 - \frac{1}{2} l_3\right) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}(d_2) & \frac{\partial}{\partial d_2}(d_2) & \frac{\partial}{\partial d_3}(d_2) \\ \frac{\partial}{\partial d_1}(d_1) & \frac{\partial}{\partial d_2}(d_1) & \frac{\partial}{\partial d_3}(d_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Jakobiyen matrisinden elde edilen A_3 ve B_3 matrisleri:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Üçüncü ekleme ait kütle matrisi:

$$D(d_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T I_3 B_3 = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Her bir eklem için bulunan kütle matrislerinin toplanmasıyla SS robotunun toplam kütle matrisi elde edilir.

$$D(q) = D(d_1) + D(d_2) + D(d_3) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Elde edilen kütle matrisi elemanları kullanılarak SS robotuna ait coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

Birinci ekleme ait hız bağlaşım matrisi elemanları:

$$\begin{aligned}
C_{11}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{11} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{11} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(m_1 + m_2 + m_3) = 0 \\
C_{12}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{12} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{12} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0 \\
C_{13}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{13} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{13} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0 \\
C_{21}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{11} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{21} = \tfrac{\partial}{\partial d_2}(m_1 + m_2 + m_3) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0 \\
C_{22}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{12} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{22} = \tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(m_2 + m_3) = 0 \\
C_{23}^1 &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{13} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{23} = \tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$C_{31}^{1} = \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{11} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{31} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(m_1 + m_2 + m_3) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0$$
$$C_{32}^{1} = \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{12} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{32} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) = 0$$
$$C_{33}^{1} = \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{13} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{33} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_1}(m_3) = 0$$

Birinci ekleme ait hız bağlaşım matrisi:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisi elemanları:

$$\begin{aligned}
C_{11}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{21} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{11} = \tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(m_1 + m_2 + m_3) = 0 \\
C_{12}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{22} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{12} = \tfrac{\partial}{\partial d_1}(m_2 + m_3) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{13}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{23} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{13} = \tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{21}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{21} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{21} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{22}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{22} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{22} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(m_2 + m_3) = 0 \\
C_{23}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{23} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{23} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{31}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{21} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{31} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{32}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{22} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{32} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(m_2 + m_3) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(0) = 0 \\
C_{33}^{2} &= \tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{23} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2} D_{33} = \tfrac{\partial}{\partial d_3}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_2}(m_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisi:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisi elemanları:

$$\begin{aligned}
C_{11}^{3} &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{31} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{11} = \tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_3}(m_1 + m_2 + m_3) = 0 \\
C_{12}^{3} &= \tfrac{\partial}{\partial d_1} D_{32} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_3} D_{12} = \tfrac{\partial}{\partial d_1}(0) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$C_{13}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_1} D_{33} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{13} = \frac{\partial}{\partial d_1}(m_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0$$

$$C_{21}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{31} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{21} = \frac{\partial}{\partial d_2}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0$$

$$C_{22}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{32} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{22} = \frac{\partial}{\partial d_2}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(m_2 + m_3) = 0$$

$$C_{23}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{33} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{23} = \frac{\partial}{\partial d_2}(m_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0$$

$$C_{31}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{31} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{31} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0$$

$$C_{32}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{32} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{32} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(0) = 0$$

$$C_{33}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{33} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{33} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(m_3) = 0$$

Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisi:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Robota etki eden toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü şu şekilde bulunur: Her bir eklemin hız bağlaşım matrisinin elemanları, robotun hız bileşenlerinden oluşan, aşağıdaki matrisin elemanları ile karşılıklı olarak çarpılır ve sonuçlar toplanır. Elde edilen sonuç robotun ilgili eklemine etki eden coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü elemanını verir.

SS robotunun hız bileşenleri matrisi:

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1^2 & \dot{d}_1\dot{d}_2 & \dot{d}_1\dot{d}_3 \\ \dot{d}_2\dot{d}_1 & \dot{d}_2^2 & \dot{d}_2\dot{d}_3 \\ \dot{d}_3\dot{d}_1 & \dot{d}_3\dot{d}_2 & \dot{d}_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eklemler için coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü elemanı aşağıdaki gibi bulunur :

$$\begin{aligned} C_{(1,1)} &= 0\dot{d}_1^2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_3 + 0\dot{d}_2\dot{d}_1 + 0\dot{d}_2^2 + 0\dot{d}_2\dot{d}_3 \\ &+ 0\dot{d}_3\dot{d}_1 + 0\dot{d}_3\dot{d}_2 + 0\dot{d}_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} C_{(2,1)} &= 0\dot{d}_1^2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_3 + 0\dot{d}_2\dot{d}_1 + 0\dot{d}_2^2 + 0\dot{d}_2\dot{d}_3 \\ &+ 0\dot{d}_3\dot{d}_1 + 0\dot{d}_3\dot{d}_2 + 0\dot{d}_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$C_{(3,1)} = 0\dot{d}_1^2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_2 + 0\dot{d}_1\dot{d}_3 + 0\dot{d}_2\dot{d}_1 + 0\dot{d}_2^2 + 0\dot{d}_2\dot{d}_3 + 0\dot{d}_3\dot{d}_1 + 0\dot{d}_3\dot{d}_2 + 0\dot{d}_3^2 = 0 \tag{3.42}$$

Robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü:

$$C = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.43}$$

İlk ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre yerçekimi $-y$ ekseni yönündedir. Robotun her bir eklemine etki eden yerçekimi vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} y_1(q) &= -g(m_1A_{21}^1 + m_2A_{21}^2 + m_3A_{21}^3) = g(m_1(0) + m_2(0) + m_3(0)) = 0 \\ y_2(q) &= -g(m_2A_{22}^2 + m_3A_{22}^3) = g(m_2 + m_3) \\ y_3(q) &= -g(m_3A_{23}^3) = g(m_3 0) = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = [0 \quad g(m_2 + m_3) \quad 0]^T \tag{3.45}$$

Son olarak SS robotunun her bir eklemine etki eden tork ifadelerini içeren tork vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(m_2 + m_3) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

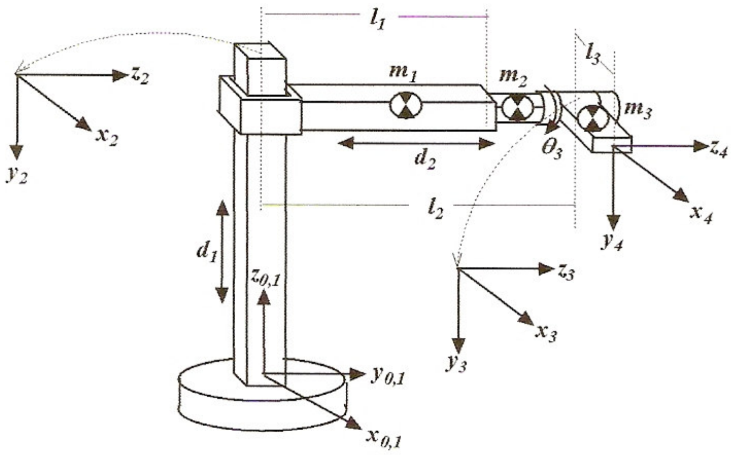
$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 \tag{3.47}$$

$$\tau_2 = (m_2 + m_3)\left(\ddot{d}_2 + g\right) \tag{3.48}$$

$$\tau_3 = m_3\ddot{d}_3 \tag{3.49}$$

3.2.2. SC robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

SC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.2'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2: SC Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.2: SC robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	0	0	0	d_1
2	0	–90	0	$l_1 + d_2$
3	θ_3	0	0	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.2'deki verilerden yararlanarak SC robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}_1^0T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

$$ {}_2^1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + d_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.52} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.53} $$

$$ {}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3\, c_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 + l_1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 & d_1 - l_3\, s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.54} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = [0 \quad l_1 / 2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.55} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.56} $$

$$ h_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} l_1 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.57} $$

$$ b_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.58} $$

$$ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.59} $$

$$ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60} $$

$$ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.61} $$

$$D(d_1) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad 0 \quad -l_2/2 \quad 1]^T \tag{3.63}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{yy2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 0 & l_1 + d_2 - \tfrac{1}{2} l_2 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.65}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.66}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.67}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [l_3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.71}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3^2 I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2 I_{yy3} & 0 & \mathrm{c}_3 \mathrm{s}_3 (I_{yy3} - I_{xx3}) \\ 0 & I_{zz3} & 0 \\ \mathrm{c}_3 \mathrm{s}_3 (I_{yy3} - I_{xx3}) & 0 & \mathrm{c}_3^2 I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2 I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{c}_3 & d_2 + l_1 & d_1 - \frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{s}_3 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.73}$$

$$b_3 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \tag{3.74}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{s}_3 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{c}_3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.75}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{s}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 \, \mathrm{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \\ 0 & m_3 & 0 \\ -\frac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 & 0 & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ -\frac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 & 0 & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} l_3 m_3 \, s_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} l_3 m_3 \, s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 m_3 \, s_3 \, \dot{\theta}_3^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.83}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} g\left(m_1 + m_2 + m_3\right) & 0 & -\frac{1}{2} g l_3 m_3 \, c_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.84}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

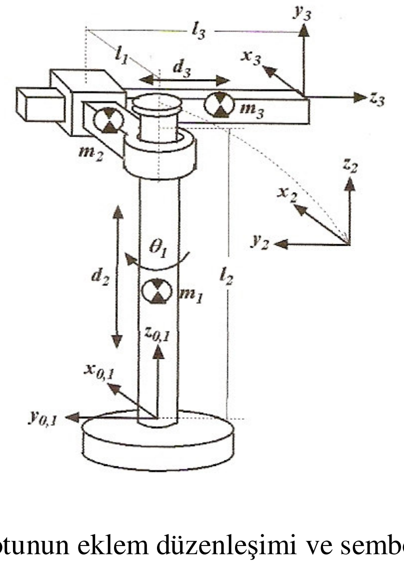
$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 - \frac{1}{2} l_3 m_3 \, c_3 \, \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} l_3 m_3 \, s_3 \, \dot{\theta}_3^2 + g\,(m_1 + m_2 + m_3) \tag{3.85}$$

$$\tau_2 = (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \tag{3.86}$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{2} l_3 m_3 \, c_3 \, \ddot{d}_1 + \left(\frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 - \frac{1}{2} l_3 g m_3 \, c_3 \tag{3.87}$$

3.2.3. CS robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

CS robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.3'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.3: CS Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.3: CS robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	0
2	0	0	0	d_2
3	0	90	l_1	d_3

Tablo 3.3'deki verilerden yararlanarak CS robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}_{1}^{0}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.88} $$

$$ {}_{2}^{1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.89} $$

$$ {}_{3}^{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.90} $$

$$ {}_{3}^{0}T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & d_3\, s_1 + l_1\, c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1\, s_1 - d_3\, c_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.91} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.92} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\, I_{xx1} + s_1^2\, I_{yy1} & c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & 0 \\ c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & c_1^2\, I_{yy1} + s_1^2\, I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.93} $$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tfrac{1}{2}l_2 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.94}$$

$$b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.95}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.96}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [l_1 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.100}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1^2 I_{xx2} + \mathrm{s}_1^2 I_{yy2} & \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & 0 \\ \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & \mathrm{c}_1^2 I_{yy2} + \mathrm{s}_1^2 I_{xx2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{c}_1 & \tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{s}_1 & d_2 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.102}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.103}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{s}_1 & \tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.104}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{s}_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2}l_1 \mathrm{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{zz2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [0 \quad 0 \quad -l_3/2 \quad 1]^T \tag{3.108}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx3} + s_1^2 I_{zz3} & c_1 s_1 (I_{xx3} - I_{zz3}) & 0 \\ c_1 s_1 (I_{xx3} - I_{zz3}) & c_1^2 I_{zz3} + s_1^2 I_{xx3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy3} \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

$$h_3 = \left[s_1\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right) + l_1 c_1 \quad c_1\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right) + l_1 s_1 \quad d_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.110}$$

$$b_3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.111}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right) - l_1 s_1 & s_1\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right) + l_1 c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.112}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_1\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right) - l_1 s_1 & 0 & s_1 \\ s_1\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right) + l_1 c_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

$$D(d_3) = \begin{bmatrix} m_3\left(l_1^2 - d_3 l_3 + \frac{1}{4}l_3^2 + d_3^2\right) + I_{yy3} & 0 & -l_1 m_3 \\ 0 & m_3 & 0 \\ -l_1 m_3 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q)=\begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & 0 & -l_1 m_3 \\ 0 & m_2+m_3 & 0 \\ -l_1 m_3 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{yy3} + I_{zz2} + m_3\left(l_1^2 - d_3 l_3 + d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_3(2d_3-l_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.118}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

$$C=\left[m_3(2d_3-l_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \quad 0 \quad m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3\right)\dot{\theta}_1^2 \right]^T \tag{3.120}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q)=\left[0 \quad g\left(m_2+m_3\right) \quad 0\right]^T \tag{3.121}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

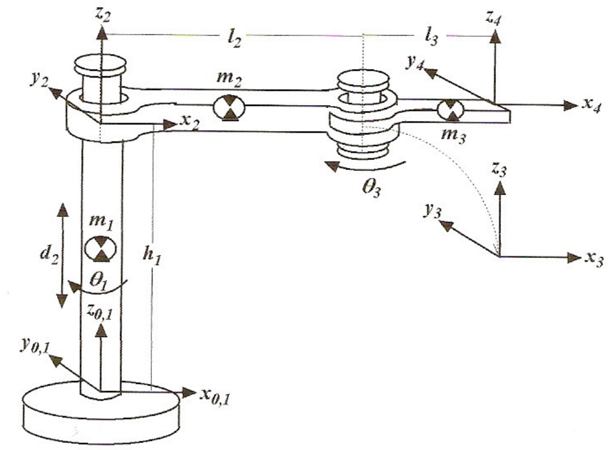
$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{yy3} + I_{zz2} + m_3\left(l_1^2 - d_3 l_3 + d_3^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\ &\quad -l_1 m_3 \ddot{d}_3 + m_3(2d_3-l_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\tau_2 = (m_2+m_3)\left(\ddot{d}_2+g\right) \tag{3.123}$$

$$\tau_3 = m_3\ddot{d}_3 - l_1 m_3 \ddot{\theta}_1 + m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_1^2 \tag{3.124}$$

3.2.4. CC robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

CC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.4'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4: CC Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.4: CC robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	0
2	0	0	0	d_2
3	θ_3	0	l_2	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.4'deki verilerden yararlanarak CC robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.125} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.126} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.127} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.128} $$

$$ {}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_{(1+3)} & -s_{(1+3)} & 0 & l_2\, c_1 + l_3\, c_{(1+3)} \\ s_{(1+3)} & c_{(1+3)} & 0 & l_2\, s_1 + l_3\, s_{(1+3)} \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.129} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = [0 \quad 0 \quad h_1 / 2 \quad 1]^T \tag{3.130} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\, I_{xx1} + s_1^2\, I_{yy1} & c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & 0 \\ c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & c_1^2\, I_{yy1} + s_1^2\, I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.131} $$

$$ h_1 = \left[0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.132} $$

$$ b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.133} $$

$$ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.134} $$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.135}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.136}$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.137}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [\, l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.138}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx2} + s_1^2 I_{yy2} & c_1 s_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & 0 \\ c_1 s_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & c_1^2 I_{yy2} + s_1^2 I_{xx2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.139}$$

$$h_2 = \left[\tfrac{1}{2} l_2 c_1 \quad \tfrac{1}{2} l_2 s_1 \quad d_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.140}$$

$$b_2 = [\, 0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.141}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 s_1 & \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.142}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 s_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [\, l_3 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.146}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} I_{3(1,1)} & I_{3(1,2)} & 0 \\ I_{3(2,1)} & I_{3(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.147}$$

Matriste,

$$I_{3(1,1)} = 2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) + \left(\mathrm{c}_1^2\,\mathrm{c}_3^2 + \mathrm{s}_1^2\,\mathrm{s}_3^2 \right) I_{xx3} + \left(\mathrm{c}_1^2\,\mathrm{s}_3^2 + \mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_1^2 \right) I_{yy3}$$

$$I_{3(1,2)} = I_{3(2,1)} = \left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_1 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_1^2 - \mathrm{s}_1^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$$

$$I_{3(2,2)} = 2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) + \left(\mathrm{c}_1^2\,\mathrm{c}_3^2 + \mathrm{s}_1^2\,\mathrm{s}_3^2 \right) I_{yy3} + \left(\mathrm{c}_1^2\,\mathrm{s}_3^2 + \mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_1^2 \right) I_{xx3}$$

$$h_3 = \left[l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(1+3)} \quad l_2\,\mathrm{s}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_{(1+3)} \quad d_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.148}$$

$$b_3 = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.149}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_{(1+3)} & l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(1+3)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_{(1+3)} & \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(1+3)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.150}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_{(1+3)} & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_{(1+3)} \\ l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(1+3)} & 0 & \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(1+3)} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.152}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} m_3 \left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} & 0 & m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} \\ 0 & m_3 & 0 \\ m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} & 0 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q)=\begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & 0 & m_3\left(\frac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3+\frac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz3} \\ 0 & m_2+m_3 & 0 \\ D(q)_{(3,1)} & 0 & \frac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)}=m_3\left(l_2l_3\,\mathrm{c}_3+l_2^2+\frac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz1}+\frac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+I_{zz3}$$

$$D(q)_{(3,1)}=m_3\left(\frac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3+\frac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz3}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 & -\frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.155}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.156}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 & \frac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.157}$$

$$C=\left[-l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1-\frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \quad 0 \quad \frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right]^T \tag{3.158}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q)=\left[0 \quad g(m_2+m_3) \quad 0\right]^T \tag{3.159}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

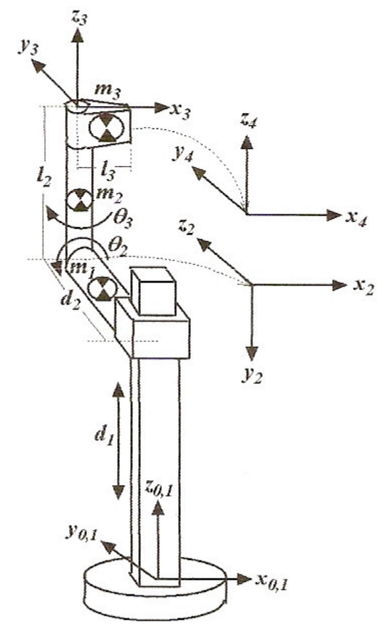
$$\begin{aligned}\tau_1=&\left(m_3\left(l_2l_3\,\mathrm{c}_3+l_2^2+\frac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz1}+\frac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_1-l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\\&+\left(m_3\left(\frac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3+\frac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3-\frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2\end{aligned} \tag{3.160}$$

$$\tau_2 = (m_2 + m_3)(\ddot{d}_2 + g) \tag{3.161}$$

$$\tau_3 = \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, c_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, s_3 \, \dot{\theta}_1^2 \tag{3.162}$$

3.2.5. SN robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

SN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.5'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.5'de verilmiştir.



Şekil 3.5: SN Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.5: SN robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	0	0	0	d_1
2	θ_2	–90	0	d_2
3	θ_3	90	0	l_2
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.5'deki verilerden yararlanarak SN robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.163} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2 & -\mathrm{s}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\mathrm{s}_2 & -\mathrm{c}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.164} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3 & -\mathrm{s}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 \\ \mathrm{s}_3 & \mathrm{c}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.165} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.166} $$

$$ {}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 & -\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & \mathrm{s}_2 & l_2\,\mathrm{s}_2 + l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 \\ \mathrm{s}_3 & \mathrm{c}_3 & 0 & d_2 + l_3\,\mathrm{s}_3 \\ -\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 & \mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 & \mathrm{c}_2 & d_1 + l_2\,\mathrm{c}_2 - l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.167} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.168} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.169} $$

$$ h_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}d_2 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.170} $$

$$ b_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.171} $$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.172}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.173}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.174}$$

$$D(d_1) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.175}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad -l_2/2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.176}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_2^2 I_{xx2} + s_2^2 I_{yy2} & 0 & c_2 s_2 (I_{yy2} - I_{xx2}) \\ 0 & I_{zz2} & 0 \\ c_2 s_2 (I_{yy2} - I_{xx2}) & 0 & c_2^2 I_{yy2} + s_2^2 I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.177}$$

$$h_2 = \left[\tfrac{1}{2} l_2 s_2 \quad d_2 \quad d_1 + \tfrac{1}{2} l_2 c_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.178}$$

$$b_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \tag{3.179}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2 c_2 & 0 & -\frac{1}{2} l_2 s_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.180}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} l_2 c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.181}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.182}$$

$$D(\theta_2)=\begin{bmatrix} m_2 & -\frac{1}{2}l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 & \frac{1}{4}l_2^2 m_2+I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.183}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3=[\,l_3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.184}$$

$$I_3=\begin{bmatrix} \mathrm{s}_2^2\,I_{zz3}+\mathrm{c}_2^2\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right) & \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right) & I_{3(1,3)} \\ \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right) & \mathrm{c}_3^2\,I_{yy3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} & I_{3(2,3)} \\ \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{zz3}-\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}-\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right) & \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right) & I_{3(3,3)} \end{bmatrix} \tag{3.185}$$

Matriste,

$$I_{3(1,3)}=\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{zz3}-\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}-\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right)$$
$$I_{3(2,3)}=\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)$$
$$I_{3(3,3)}=\mathrm{c}_2^2\,I_{zz3}+\mathrm{s}_2^2\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right)$$

$$h_3=\left[\,l_2\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 \quad d_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3 \quad d_1+l_2\,\mathrm{c}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 \quad 1\,\right]^T \tag{3.186}$$

$$b_3=[\,\mathrm{s}_2 \quad 0 \quad \mathrm{c}_2\,]^T \tag{3.187}$$

$$J_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2\,\mathrm{c}_2-\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 & 0 & -l_2\,\mathrm{s}_2-\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3 & \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 & \mathrm{s}_2 & 0 & \mathrm{c}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.188}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 0 & l_2\,\mathrm{c}_2-\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3 \\ 1 & -l_2\,\mathrm{s}_2-\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 & \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.189}$$

$$B_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{s}_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c}_2 \end{bmatrix} \tag{3.190}$$

$$D(\theta_3)=\begin{bmatrix} m_3 & -m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right) & \frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \\ -m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right) & D(\theta_3)_{(2,2)} & -\frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \\ \frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 & -\frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 & \frac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.191}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(2,2)} = m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right) + \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & D(q)_{(1,2)} & \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \\ D(q)_{(2,1)} & D(q)_{(2,2)} & -\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \\ \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 & -\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 & \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.192}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,2)} = D(q)_{(2,1)} = -\tfrac{1}{2}l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 + m_3\left(-l_2\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)$$
$$D(q)_{(2,2)} = \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - l_2\,\mathrm{c}_2\right) - \tfrac{1}{2}l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 & \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 \end{bmatrix} \tag{3.193}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{4}l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 + m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{4}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right) & -\tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 \\ C_{2(2,1)} & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) & -\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.194}$$

Matriste,

$$C_{2(2,1)} = m_3\left(\tfrac{1}{4}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_2\right) - \tfrac{1}{4}l_2 m_2\,\mathrm{c}_2$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & -\tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 \\ \tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 & \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) & \tfrac{1}{4}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \\ \tfrac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 & -\tfrac{1}{4}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.195}$$

$$C = \begin{bmatrix} \left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - l_2\,\mathrm{c}_2\right) - \tfrac{1}{2}l_2 m_2\,\mathrm{c}_2\right)\dot{\theta}_2^2 + l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_3^2 \\ 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 \\ \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.196}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q)=\begin{bmatrix} g\left(m_1+m_2+m_3\right) \\ -g\left(m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)+\frac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{s}_2\right) \\ \frac{1}{2}\,gl_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.197}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

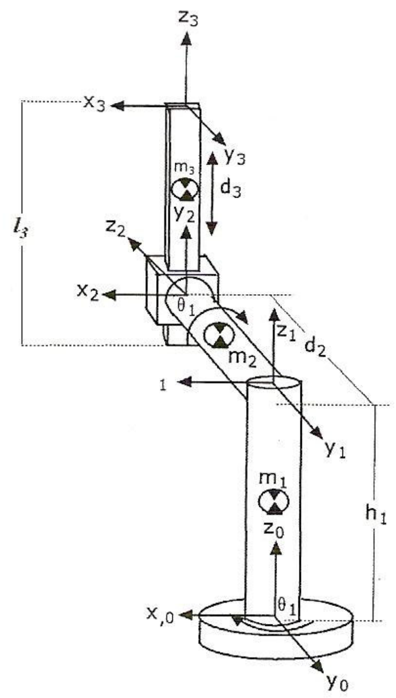
$$\begin{aligned}\tau_1 &= (\,m_1+m_2+m_3\,)\ddot{d}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3-\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{s}_2+m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\right)\right)\ddot{\theta}_2\\ &+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2-l_2\,\mathrm{c}_2\,\right)-\tfrac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{c}_2\,\right)\dot{\theta}_2^2+l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_3^2\\ &+g(m_1+m_2+m_3)\end{aligned} \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+\mathrm{c}_3^2\,I_{yy3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}+m_3\left(l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2c_3{}^2\,\right)\right)\ddot{\theta}_2\\ &-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3-\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{s}_2+m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\right)\right)\ddot{d}_1\\ &+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\\ &-g\left(m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\right)+\tfrac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{s}_2\,\right)\end{aligned} \tag{3.199}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= -\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_1+\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3\\ &+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_2^2+\tfrac{1}{2}\,gl_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\end{aligned} \tag{3.200}$$

3.2.6. NS robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

NS robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.6'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6: NS Robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.6: NS robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	90	0	d_2
3	0	–90	0	d_3

Tablo 3.6'daki verilerden yararlanarak NS robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.201} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.202} $$

$$ {}_{3}^{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.203} $$

$$ {}_{3}^{0}T = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & -c_1 s_2 & d_2 s_1 - d_3 c_1 s_2 \\ c_2 s_1 & c_1 & -s_1 s_2 & -d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & h_1 + d_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.204} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = [0 \quad 0 \quad -h_1 / 2 \quad 1]^T \tag{3.205} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx1} + s_1^2 I_{yy1} & c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & 0 \\ c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & c_1^2 I_{yy1} + s_1^2 I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.206} $$

$$ h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tfrac{1}{2} h_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.207} $$

$$ b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.208} $$

$$ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.209} $$

$$ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.210} $$

$$ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.211} $$

$$ D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.212} $$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad 0 \quad -d_2/2 \quad 1]^T \tag{3.213}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} s_1^2 I_{zz2} + c_1^2 \left(c_2^2 I_{xx2} + s_2^2 I_{yy2} \right) & I_{2(1,2)} & c_1 c_2 s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ c_1 s_1 \left(c_2^2 I_{xx2} + s_2^2 I_{yy2} - I_{zz2} \right) & I_{2(2,2)} & c_2 s_1 s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ c_1 c_2 s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & I_{2(3,2)} & c_2^2 I_{yy2} + s_2^2 I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.214}$$

Matriste,

$$I_{2(1,2)} = c_1 s_1 \left(c_2^2 I_{xx2} + s_2^2 I_{yy2} - I_{zz2} \right)$$
$$I_{2(2,2)} = c_1^2 I_{zz2} + s_1^2 \left(c_2^2 I_{xx2} + s_2^2 I_{yy2} \right)$$
$$I_{2(3,2)} = c_2 s_1 s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right)$$

$$h_2 = \left[\tfrac{1}{2} d_2 s_1 \quad -\tfrac{1}{2} d_2 c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.215}$$

$$b_2 = [s_1 \quad -c_1 \quad 0]^T \tag{3.216}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2 c_1 & \tfrac{1}{2} d_2 s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.217}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2 c_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} d_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.218}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.219}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} d_2^2 m_2 + c_2^2 I_{yy2} + s_2^2 I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.220}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [0 \quad 0 \quad -l_3/2 \quad 1]^T \tag{3.221}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s_1^2 I_{yy3} + c_1^2 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{zz3} \right) & I_{3(1,2)} & c_1 c_2 s_2 \left(I_{xx3} - I_{zz3} \right) \\ c_1 s_1 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{zz3} - I_{yy3} \right) & I_{3(2,2)} & c_2 s_1 s_2 \left(I_{xx3} - I_{zz3} \right) \\ c_1 c_2 s_2 \left(I_{xx3} - I_{zz3} \right) & I_{3(3,2)} & c_2^2 I_{zz3} + s_2^2 I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.222}$$

Matriste,

$$I_{3(1,2)} = c_1 s_1 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{zz3} - I_{yy3} \right)$$
$$I_{3(2,2)} = c_1^2 I_{yy3} + s_1^2 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{zz3} \right)$$
$$I_{3(3,2)} = c_2 s_1 s_2 \left(I_{xx3} - I_{zz3} \right)$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} d_2 s_1 + c_1 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & s_1 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) - d_2 c_1 & h_1 + c_2 \left(d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.223}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.224}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} J_{3(1,1)} & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 c_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & c_2 s_1 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & s_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 s_2 & -s_1 s_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.225}$$

Matriste,

$$J_{3(1,1)} = d_2 c_1 + s_1 s_2 \left(d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right)$$
$$J_{3(1,2)} = d_2 s_1 + c_1 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} d_2 c_1 + s_1 s_2 \left(d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) & c_1 c_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & -c_1 s_2 \\ d_2 s_1 + c_1 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & c_2 s_1 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & -s_1 s_2 \\ 0 & s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & c_2 \end{bmatrix} \tag{3.226}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.227}$$

$$D(d_3) = \begin{bmatrix} D(d_3)_{(1,1)} & d_2 m_3 c_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & -d_2 m_3 s_2 \\ d_2 m_3 c_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) & m_3 \left(d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{yy3} & 0 \\ -d_2 m_3 s_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.228}$$

Matriste,

$$D(d_3)_{(1,1)} = m_3 \left(s_2^2 \left(-d_3 l_3 + d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + d_2^2 \right) + c_2^2 I_{zz3} + s_2^2 I_{xx3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q)=\begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right) & -d_2 m_3\,\mathrm{s}_2 \\ d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right) & D(q)_{(2,2)} & 0 \\ -d_2 m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.229}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} D(q)_{(1,1)} &= I_{zz1}+\tfrac{1}{4}d_2^2 m_2+m_3\left(\mathrm{s}_2^2\left(-d_3 l_3+d_3^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\right)+d_2^2\right) \\ &\quad +\mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2}+I_{zz3}\right)+\mathrm{s}_2^2\left(I_{xx2}+I_{xx3}\right) \\ D(q)_{(2,2)} &= I_{yy3}+I_{zz2}+m_3\left(d_3^2+\tfrac{1}{4}l_3^2-d_3 l_3\right) \end{aligned}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1(2,1)} & m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_2 d_3-\frac{1}{2}d_2 l_3\right) & -d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 \\ m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(2d_3-l_3\right) & -d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.230}$$

Matriste,

$$C_{1(2,1)}=2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3^2-d_3 l_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\right)+I_{xx2}+I_{xx3}-I_{yy2}-I_{zz3}\right)$$

$$C_2=\begin{bmatrix} C_{2(1,1)} & -\frac{1}{2}m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_2 d_3-\frac{1}{2}d_2 l_3\right) & \frac{1}{2}d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 \\ \frac{1}{2}m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_2 d_3-\frac{1}{2}d_2 l_3\right) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 & m_3\left(2d_3-l_3\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.231}$$

Matriste,

$$C_{2(1,1)}=\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3 l_3-d_3^2-\tfrac{1}{4}l_3^2\right)-I_{xx2}-I_{xx3}+I_{yy2}+I_{zz3}\right)$$

$$C_3=\begin{bmatrix} m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right) & \frac{1}{2}d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 m_3\,\mathrm{c}_2 & m_3\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.232}$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ C_{(2,1)} \\ m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right)\dot{\theta}_1^2+m_3\left(\frac{1}{2}l_3-d_3\right)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.233}$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
C_{(1,1)} &= 2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&\quad + m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_2 d_3 - \tfrac{1}{2}d_2 l_3\right)\dot{\theta}_2^2 + m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(2d_3 - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\
&\quad - 2d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2\dot{d}_3 \\
C_{(2,1)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3 l_3 - d_3^2 - \tfrac{1}{4}l_3^2\right) - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + m_3\left(2d_3 - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

Yerçekimi vektörü:

$$
G(q) = \begin{bmatrix} 0 & g m_3\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right) & g m_3\,\mathrm{c}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.234}
$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

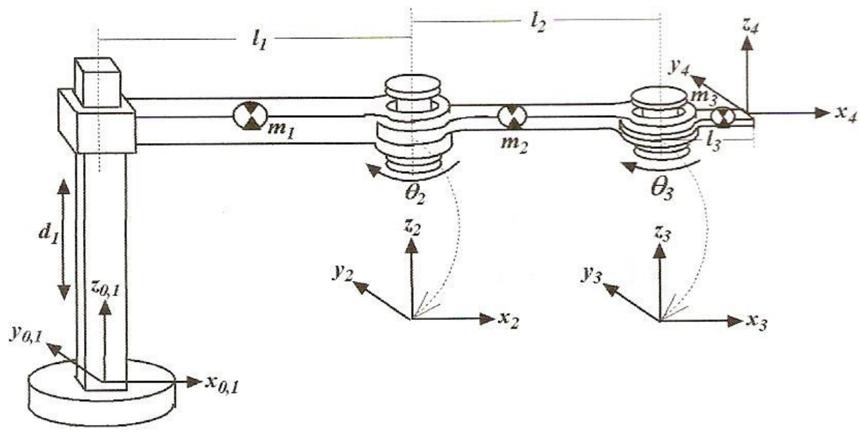
$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}d_2^2 m_2 + \mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2} + I_{zz3}\right) + \mathrm{s}_2^2\left(I_{xx2} + I_{xx3}\right)\right)\ddot{\theta}_1 - d_2 m_3\,\mathrm{s}_2\,\ddot{d}_3 \\
&\quad + m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_2 d_3 - \tfrac{1}{2}d_2 l_3\right)\dot{\theta}_2^2 - 2d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(2d_3 - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\
&\quad + 2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&\quad + m_3\left(d_2^2 + \mathrm{s}_2^2\left(d_3^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2 - d_3 l_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 + d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.235}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= d_2 m_3\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_{yy3} + I_{zz2} + m_3\left(d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(d_3 l_3 - d_3^2 - \tfrac{1}{4}l_3^2\right) - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + m_3\left(2d_3 - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_2 + g m_3\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)
\end{aligned} \tag{3.236}
$$

$$
\tau_3 = m_3\ddot{d}_3 - d_2 m_3\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 + m_3\,\mathrm{s}_2^2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_1^2 + m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_2^2 + g m_3\,\mathrm{c}_2 \tag{3.237}
$$

3.2.7. SR robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

SR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.7’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.7’de verilmiştir.



Şekil 3.7: SR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.7: SR robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	0	0	0	d_1
2	θ_2	0	l_1	0
3	θ_3	0	l_2	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.'deki verilerden yararlanarak SR robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.238} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.239} $$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.240}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.241}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_{(2+3)} & -s_{(2+3)} & 0 & l_1 + l_2\,c_2 + l_3\,c_{(2+3)} \\ s_{(2+3)} & c_{(2+3)} & 0 & l_2\,s_2 + l_3\,s_{(2+3)} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.242}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [\,l_1 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.243}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.244}
$$

$$
h_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_1 & 0 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.245}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.246}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.247}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.248}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.249}
$$

$$D(d_1)=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.250}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [\,l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.251}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_2^2\, I_{xx2} + s_2^2\, I_{yy2} & c_2\, s_2\left(I_{xx2} - I_{yy2}\right) & 0 \\ c_2\, s_2\left(I_{xx2} - I_{yy2}\right) & c_2^2\, I_{yy2} + s_2^2\, I_{xx2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.252}$$

$$h_2 = \left[\,l_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_2 \quad \tfrac{1}{2} l_2\, s_2 \quad d_1 \quad 1\right]^T \tag{3.253}$$

$$b_2 = [\,0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.254}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_2\, s_2 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.255}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2} l_2\, s_2 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.256}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.257}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.258}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [\,l_3 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.259}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} I_{3(1,1)} & I_{3(1,2)} & 0 \\ I_{3(2,1)} & I_{3(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.260}$$

Matriste,

$$I_{3(1,1)} = 2\,c_2\,c_3\,s_2\,s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right) + c_2^2\left(c_3^2\,I_{xx3} + s_3^2\,I_{yy3}\right) + s_2^2\left(c_3^2\,I_{yy3} + s_3^2\,I_{xx3}\right)$$

$$I_{3(1,2)} = I_{3(2,1)} = \left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\left(c_2\,s_2\left(c_3^2 - s_3^2\right) + c_3\,s_3\left(c_2^2 - s_2^2\right)\right)$$

$$I_{3(2,2)} = 2\,c_2\,c_3\,s_2\,s_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) + c_2^2\left(c_3^2\,I_{yy3} + s_3^2\,I_{xx3}\right) + s_2^2\left(c_3^2\,I_{xx3} + s_3^2\,I_{yy3}\right)$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2\,c_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,c_{(2+3)} & l_2\,s_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,s_{(2+3)} & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.261}$$

$$b_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.262}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2\,s_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_{(2+3)} & l_2\,c_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,c_{(2+3)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2}l_3\,s_{(2+3)} & \tfrac{1}{2}l_3\,c_{(2+3)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.263}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -l_2\,s_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_{(2+3)} & -\tfrac{1}{2}l_3\,s_{(2+3)} \\ 0 & l_2\,c_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,c_{(2+3)} & \tfrac{1}{2}l_3\,c_{(2+3)} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.264}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.265}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3\left(l_2 l_3\,c_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz3} & m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3\,c_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz3} \\ 0 & m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3\,c_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz3} & \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.266}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & D(q)_{(2,2)} & D(q)_{(2,3)} \\ 0 & D(q)_{(3,2)} & \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.267}$$

Matriste,

$$D(q)_{(2,2)} = m_3\left(l_2 l_3\,c_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3}$$

$$D(q)_{(2,3)} = D(q)_{(3,2)} = m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3\,c_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz3}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.268}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 & -\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.269}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 & \tfrac{1}{4} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \\ 0 & -\tfrac{1}{4} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.270}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3^2 & \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.271}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} g\left(m_1 + m_2 + m_3\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.272}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

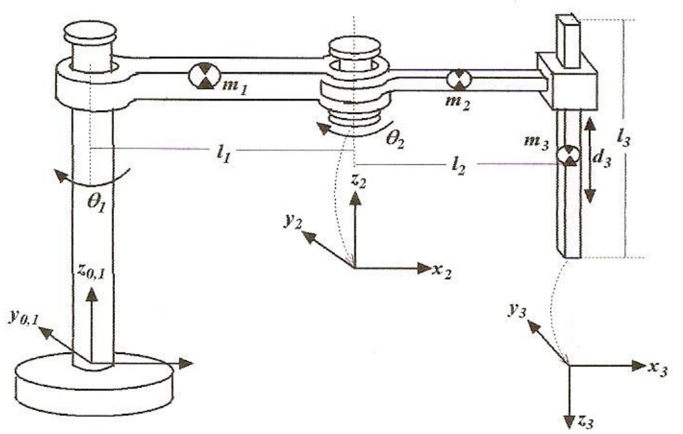
$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\left(\ddot{d}_1 + g\right) \tag{3.273}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = &\left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 - l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3^2 \\ &+ \left(m_3 \left(l_2 l_3 \, \mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \tag{3.274}$$

$$\tau_3 = \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_2^2 \tag{3.275}$$

3.2.8. RS robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

RS robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.8'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.8: RS robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.8: RS robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	0	l_1	0
3	0	180	l_2	d_3

Tablo 3.8'deki verilerden yararlanarak RS robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.276} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.277} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.278} $$

$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{(1+2)} & s_{(1+2)} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{(1+2)} \\ s_{(1+2)} & -c_{(1+2)} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{(1+2)} \\ 0 & 0 & -1 & h_1 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.279}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [\, l_1 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.280}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx1} + s_1^2 I_{yy1} & c_1 s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & 0 \\ c_1 s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & c_1^2 I_{yy1} + s_1^2 I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.281}
$$

$$
h_1 = \left[\tfrac{1}{2} l_1 c_1 \quad \tfrac{1}{2} l_1 s_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.282}
$$

$$
b_1 = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.283}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_1 s_1 & \tfrac{1}{2} l_1 c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.284}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_1 s_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_1 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.285}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.286}
$$

$$
D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.287}
$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_2 = [\, l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.288}
$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{2(1,1)} & I_{2(1,2)} & 0 \\ I_{2(2,1)} & I_{2(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.289}$$

Matriste,

$$I_{2(1,1)} = 2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2}\right) + \mathrm{c}_1^2\left(\mathrm{c}_2^2\,I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\,I_{yy2}\right) + \mathrm{s}_1^2\left(\mathrm{s}_2^2\,I_{xx2} + \mathrm{c}_2^2\,I_{yy2}\right)$$
$$I_{2(1,2)} = I_{2(2,1)} = \left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_1\left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2\right) + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_1^2 - \mathrm{s}_1^2\right)\right)\left(I_{xx2} - I_{yy2}\right)$$
$$I_{2(2,2)} = 2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2}\right) + \mathrm{c}_1^2\left(\mathrm{c}_2^2\,I_{yy2} + \mathrm{s}_2^2\,I_{xx2}\right) + \mathrm{s}_1^2\left(\mathrm{c}_2^2\,I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\,I_{yy2}\right)$$

$$h_2 = \left[\, l_1\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_{(1+2)} \quad l_1\,\mathrm{s}_1 + \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{s}_{(1+2)} \quad h_1 \quad 1 \,\right]^T \tag{3.290}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.291}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -l_1\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{s}_{(1+2)} & l_1\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{s}_{(1+2)} & \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.292}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -l_1\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{s}_{(1+2)} & -\tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{s}_{(1+2)} & 0 \\ l_1\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_{(1+2)} & \tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_{(1+2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.293}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.294}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} m_2\left(l_1 l_2\,\mathrm{c}_2 + l_1^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right) + I_{zz2} & m_2\left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right) + I_{zz2} & 0 \\ m_2\left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right) + I_{zz2} & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.295}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [0 \quad 0 \quad -l_3 / 2 \quad 1]^T \tag{3.296}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_{(1+2)}^2\,I_{xx3} + \mathrm{s}_{(1+2)}^2\,I_{yy3} & \mathrm{c}_{(1+2)}\,\mathrm{s}_{(1+2)}\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) & 0 \\ \mathrm{c}_{(1+2)}\,\mathrm{s}_{(1+2)}\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) & \mathrm{c}_{(1+2)}^2\,I_{yy3} + \mathrm{s}_{(1+2)}^2\,I_{xx3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.297}$$

$$h_3 = \left[l_1\, \mathrm{c}_1 + l_2\, \mathrm{c}_{(1+2)} \quad l_1\, \mathrm{s}_1 + l_2\, \mathrm{s}_{(1+2)} \quad h_1 - d_3 + \tfrac{1}{2} l_3 \quad 1 \right]^T \tag{3.298}$$

$$b_3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.299}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -l_1\, \mathrm{s}_1 - l_2\, \mathrm{s}_{(1+2)} & l_1\, \mathrm{c}_1 + l_2\, \mathrm{c}_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -l_2\, \mathrm{s}_{(1+2)} & l_2\, \mathrm{c}_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.300}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_1\, \mathrm{s}_1 - l_2\, \mathrm{s}_{(1+2)} & -l_2\, \mathrm{s}_{(1+2)} & 0 \\ l_1\, \mathrm{c}_1 + l_2\, \mathrm{c}_{(1+2)} & l_2\, \mathrm{c}_{(1+2)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.301}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.302}$$

$$D(d_3) = \begin{bmatrix} m_3\left(2l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_1^2 + l_2^2\right) + I_{zz3} & m_3\left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2^2\right) + I_{zz3} & 0 \\ m_3\left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2^2\right) + I_{zz3} & l_2^2 m_3 + I_{zz3} & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.303}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & D(q)_{(1,2)} & 0 \\ D(q)_{(2,1)} & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} + I_{zz3} & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.304}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_1 + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\left(2l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_1^2 + l_2^2\right) + m_2\left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_1^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right)$$
$$D(q)_{(1,2)} = D(q)_{(2,1)} = m_3\left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2^2\right) + I_{zz2} + I_{zz3} + m_2\left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -l_1 l_2 m_2\, \mathrm{s}_2 - 2l_1 l_2 m_3\, \mathrm{s}_2 & -\tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_2\, \mathrm{s}_2 - l_1 l_2 m_3\, \mathrm{s}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.305}$$

$$
C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2 & \frac{1}{4}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + \frac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 \\ -\frac{1}{4}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 - \frac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.306}
$$

$$
C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.307}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} -(l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + 2l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 - \left(\frac{1}{2}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_2^2 & C_{(1,2)} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.308}
$$

Matriste,

$C_{(1,2)} = \left(\frac{1}{2}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1^2$

Yerçekimi vektörü:

$$
G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -gm_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.309}
$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

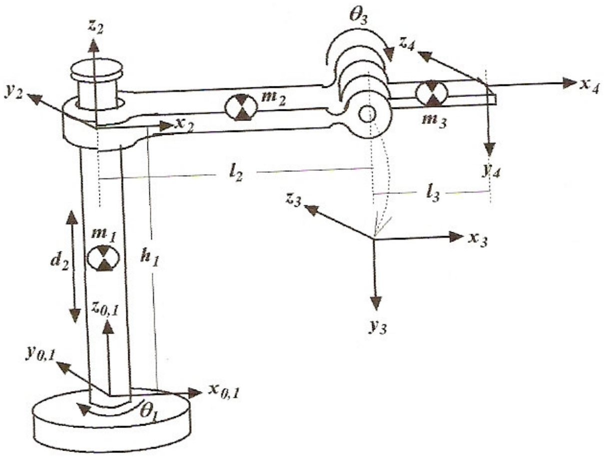
$$
\begin{aligned}
\tau_1 = {} & \left(\tfrac{1}{4}l_1^2m_1 + I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_1 + m_3\left(l_1l_2\cos\theta_2 + l_2^2\right)\ddot{\theta}_2 \\
& -(l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + 2l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 - \left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_2^2 \\
& +\left(m_2\left(l_1l_2\,\mathrm{c}_2 + l_1^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\right) + m_3\left(2l_1l_2\,\mathrm{c}_2 + l_1^2 + l_2^2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
& +\left(m_2\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2\cos\theta_2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\right) + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.310}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = {} & \left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1^2 \\
& +\left(m_2\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\right) + m_3\left(l_1l_2\,\mathrm{c}_2 + l_2^2\right) + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.311}
$$

$$
\tau_3 = m_3\left(\ddot{d}_3 - g\right) \tag{3.312}
$$

3.2.9. CR robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

CR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.9'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.9: CR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.9: CR robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	0
2	0	0	0	d_2
3	θ_3	90	l_2	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.2.9.1'deki verilerden yararlanarak CR robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.313)$$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.314)$$

$$
{}_{3}^{2}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.315}
$$

$$
{}_{4}^{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.316}
$$

$$
{}_{4}^{0}T = \begin{bmatrix} c_1\,c_3 & -c_1\,s_3 & s_1 & l_2\,c_1 + l_3\,c_1\,c_3 \\ c_3\,s_1 & -s_1\,s_3 & -c_1 & l_2\,s_1 + l_3\,c_3\,s_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & d_2 + l_3\,s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.317}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [0 \quad 0 \quad h_1 / 2 \quad 1]^T \tag{3.318}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\,I_{xx1} + s_1^2\,I_{yy1} & c_1\,s_1\left(I_{xx1} - I_{yy1}\right) & 0 \\ c_1\,s_1\left(I_{xx1} - I_{yy1}\right) & c_1^2\,I_{yy1} + s_1^2\,I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.319}
$$

$$
h_1 = \left[0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2}h_1 \quad 1\right]^T \tag{3.320}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.321}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.322}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.323}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.324}
$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.325}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [\, l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.326}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 \, I_{xx2} + s_1^2 \, I_{yy2} & c_1 \, s_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & 0 \\ c_1 \, s_1 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & c_1^2 \, I_{yy2} + s_1^2 \, I_{xx2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.327}$$

$$h_2 = \left[\tfrac{1}{2} l_2 \, c_1 \quad \tfrac{1}{2} l_2 \, s_1 \quad d_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.328}$$

$$b_2 = [\, 0 \quad 0 \quad 0 \,]^T \tag{3.329}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 \, s_1 & \tfrac{1}{2} l_2 \, c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.330}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 \, s_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_2 \, c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.331}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.332}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.333}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [\, l_3 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.334}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s_1^2 \, I_{zz3} + c_1^2 \left(c_3^2 \, I_{xx3} + s_3^2 \, I_{yy3} \right) & I_{3(1,2)} & c_1 \, c_3 \, s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \\ I_{3(2,1)} & I_{3(2,2)} & c_3 \, s_1 \, s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \\ c_1 \, c_3 \, s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) & I_{3(3,2)} & c_3^2 \, I_{yy3} + s_3^2 \, I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.335}$$

Matriste,

$$I_{3(1,2)} = I_{3(2,1)} = \mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_1\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{yy3} - I_{zz3}\right)$$
$$I_{3(2,2)} = \mathrm{c}_1^2\,I_{zz3} + \mathrm{s}_1^2\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right)$$
$$I_{3(3,2)} = \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)$$

$$h_3 = \left[\, l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3 \quad l_2\,\mathrm{s}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1 \quad d_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_3 \quad 1 \,\right]^T \tag{3.336}$$

$$b_3 = [\,\mathrm{s}_1 \quad -\mathrm{c}_1 \quad 0\,]^T \tag{3.337}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1 & l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_3 & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3 & \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 & \mathrm{s}_1 & -\mathrm{c}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.338}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1 & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_3 \\ l_2\,\mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3 & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.339}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{s}_1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{c}_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.340}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.341}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = m_3\left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right) + \mathrm{c}_3^2\,I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.342}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\,I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + m_3\left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \frac{1}{4}l_3^2 m_3\right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.343}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.344}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\frac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3} - I_{xx3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & -\frac{1}{4}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.345}$$

$$C = \begin{bmatrix} \left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \frac{1}{4}l_3^2 m_3\right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\ -\frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \\ \left(\frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\frac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3} - I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.346}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & g\left(m_2 + m_3\right) & \frac{1}{2}g l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.347}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

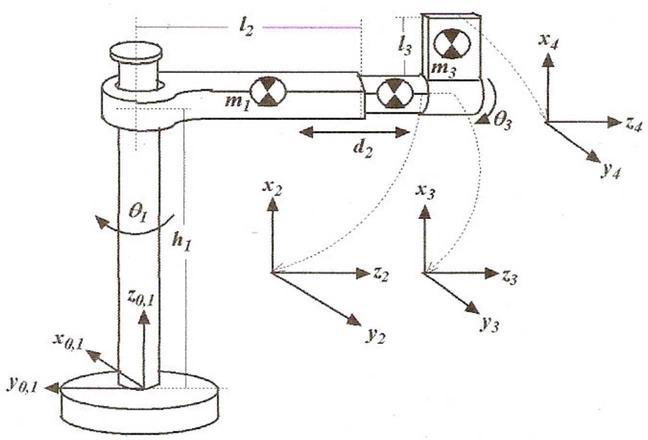
$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\,I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + m_3\left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + \left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{3.348}$$

$$\tau_2 = \left(m_2 + m_3\right)\left(\ddot{d}_2 + g\right) + \frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3 - \frac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \tag{3.349}$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3} - I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(\ddot{d}_2 + g\right) \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \end{aligned} \tag{3.350}$$

3.2.10. RC robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

RC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.10'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.10: RC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.10: RC robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	90	90	0	d_2+l_2
3	θ_3	0	0	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.10'daki verilerden yararlanarak RC robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.351)$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(d_2 + l_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.352}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.353}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.354}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} -c_1 s_3 & -c_1 c_3 & s_1 & s_1 (d_2 + l_2) - l_3 c_1 s_3 \\ -s_1 s_3 & -c_3 s_1 & -c_1 & -c_1 (d_2 + l_2) - l_3 s_1 s_3 \\ c_3 & -s_3 & 0 & h_1 + l_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.355}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [0 \quad -l_2 / 2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.356}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx1} + s_1^2 I_{yy1} & c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & 0 \\ c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & c_1^2 I_{yy1} + s_1^2 I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.357}
$$

$$
h_1 = \left[\tfrac{1}{2} l_2 s_1 \quad -\tfrac{1}{2} l_2 c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.358}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.359}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & \tfrac{1}{2} l_2 s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.360}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.361}
$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.362}$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \frac{1}{4} l_2^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.363}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad 0 \quad -l_2 / 2 \quad 1]^T \tag{3.364}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{yy2} + s_1^2 I_{zz2} & c_1 s_1 \left(I_{yy2} - I_{zz2} \right) & 0 \\ c_1 s_1 \left(I_{yy2} - I_{zz2} \right) & c_1^2 I_{zz2} + s_1^2 I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.365}$$

$$h_2 = \left[s_1 \left(d_2 + \tfrac{1}{2} l_2 \right) \quad -c_1 \left(d_2 + \tfrac{1}{2} l_2 \right) \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.366}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.367}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & s_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.368}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & s_1 & 0 \\ s_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.369}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.370}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} m_2 \left(d_2 l_2 + d_2^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.371}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [l_3 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.372}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s_1^2 I_{zz3} + c_1^2 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} \right) & I_{3(1,2)} & c_1 c_3 s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\ c_1 s_1 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} - I_{zz3} \right) & I_{3(2,2)} & c_3 s_1 s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\ c_1 c_3 s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) & I_{3(3,2)} & c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3} \end{bmatrix} \quad (3.373)$$

Matriste,

$I_{3(1,2)} = c_1 s_1 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} - I_{zz3} \right)$

$I_{3(2,2)} = c_1^2 I_{zz3} + s_1^2 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} \right)$

$I_{3(3,2)} = c_3 s_1 s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right)$

$$h_3 = \begin{bmatrix} h_{3(1,1)} & -\frac{1}{2} l_3 s_1 s_3 - c_1 \left(d_2 + l_2 \right) & h_1 + \frac{1}{2} l_3 c_3 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.374)$$

Matriste,

$h_{3(1,1)} = -\frac{1}{2} l_3 c_1 s_3 + s_1 \left(d_2 + l_2 \right)$

$$b_3 = [\, s_1 \quad -c_1 \quad 0 \,]^T \quad (3.375)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + l_2 \right) + \frac{1}{2} l_3 s_1 s_3 & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} l_3 c_1 c_3 & -\frac{1}{2} l_3 c_3 s_1 & -\frac{1}{2} l_3 s_3 & s_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.376)$$

Matriste,

$J_{3(1,2)} = s_1 \left(d_2 + l_2 \right) - \frac{1}{2} l_3 c_1 s_3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + l_2 \right) + \frac{1}{2} l_3 s_1 s_3 & s_1 & -\frac{1}{2} l_3 c_1 c_3 \\ s_1 \left(d_2 + l_2 \right) - \frac{1}{2} l_3 c_1 s_3 & -c_1 & -\frac{1}{2} l_3 c_3 s_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} l_3 s_3 \end{bmatrix} \quad (3.377)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.378)$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & \frac{1}{2} l_3 m_3 s_3 & -m_3 \left(\frac{1}{2} d_2 l_3 c_3 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c_3 \right) \\ \frac{1}{2} l_3 m_3 s_3 & m_3 & 0 \\ D(\theta_3)_{(3,1)} & 0 & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \quad (3.379)$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3} + m_3\left(2d_2 l_2 + d_2^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 s_3^2\right)$$

$$D(\theta_3)_{(3,1)} = -m_3\left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 c_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 c_3\right)$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & \tfrac{1}{2} l_3 m_3 s_3 & D(q)_{(1,3)} \\ \tfrac{1}{2} l_3 m_3 s_3 & m_2 + m_3 & 0 \\ -m_3\left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 c_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 c_3\right) & 0 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.380}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,3)} = -m_3\left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 c_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 c_3\right)$$

$$D(q)_{(1,1)} = m_2\left(d_2 l_2 + d_2^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\right) + m_3\left(2d_2 l_2 + d_2^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 s_3^2\right)$$
$$+ I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{xx2} + c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_2(2d_2 + l_2) + 2m_3(d_2 + l_2) & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 c_3 \\ 2 c_3 s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) & \tfrac{1}{2} l_3 m_3 c_3 & \tfrac{1}{2} l_3 m_3 s_3 (d_2 + l_2) \end{bmatrix} \tag{3.381}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -m_2\left(\tfrac{1}{2} l_2 + d_2\right) - m_3(l_2 + d_2) & 0 & \tfrac{1}{4} l_3 m_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tfrac{3}{4} l_3 m_3 c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.382}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_3 s_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right) & -\tfrac{1}{4} l_3 m_3 c_3 & -\tfrac{1}{4} l_3 m_3 s_3 (d_2 + l_2) \\ -\tfrac{3}{4} l_3 m_3 c_3 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{4} l_3 m_3 s_3 (d_2 + l_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.383}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ -\left(m_2\left(\tfrac{1}{2} l_2 + d_2\right) + m_3(l_2 + d_2)\right)\dot{\theta}_1^2 + l_3 m_3 c_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ c_3 s_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 - l_3 m_3 c_3 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.384}$$

Matriste,

$$C_{(1,1)} = (m_2(2d_2 + l_2) + 2m_3(d_2 + l_2))\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3(d_2 + l_2)\dot{\theta}_3^2$$
$$+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix}0 & 0 & -\tfrac{1}{2}gl_3m_3\,\mathrm{s}_3\end{bmatrix}^T \tag{3.385}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

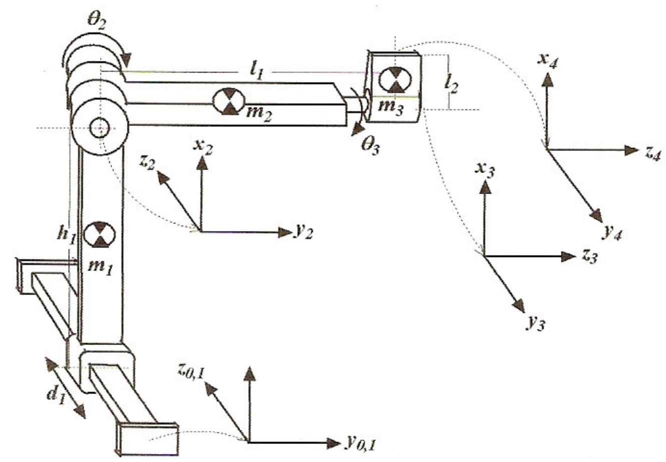
$$\begin{aligned}\tau_1 &= (m_2(2d_2 + l_2) + 2m_3(d_2 + l_2))\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\\ &+\left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}l_2^2m_1 + I_{xx2} + \mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{yy3} + m_2\left(d_2l_2 + d_2^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\right)\right)\ddot{\theta}_1\\ &+m_3\left(2d_2l_2 + d_2^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{s}_3^2\right)\ddot{\theta}_1 - m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_3\\ &+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3(d_2 + l_2)\dot{\theta}_3^2 + \tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_2\end{aligned} \tag{3.386}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 + l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\ &-\left(m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2 + d_2\right) + m_3(l_2 + d_2)\right)\dot{\theta}_1^2\end{aligned} \tag{3.387}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= -m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}gl_3m_3\,\mathrm{s}_3\\ &+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 - l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{d}_2\dot{\theta}_1\end{aligned} \tag{3.388}$$

3.2.11. CN robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

CN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.11’de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.11’de verilmiştir.



Şekil 3.11: CN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.11: CN robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	0	0	0	d_1
2	θ_2	0	h_1	0
3	θ_3	90	0	$-l_1$
4	0	0	l_2	0

Tablo 3.11'deki verilerden yararlanarak CN robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.389} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & h_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.390} $$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.391}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.392}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_2\,c_3 & -c_2\,s_3 & s_2 & h_1 - l_1\,s_2 + l_2\,c_2\,c_3 \\ c_3\,s_2 & -s_2\,s_3 & -c_2 & l_1\,c_2 + l_2\,c_3\,s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & d_1 + l_2\,s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.393}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [\,h_1 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.394}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.395}
$$

$$
h_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}h_1 & 0 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.396}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.397}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.398}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.399}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.400}
$$

$$D(d_1)=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.401}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad l_1/2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.402}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_2^2 I_{zz2} + s_2^2 I_{yy2} & c_2 s_2 (I_{xx2} - I_{yy2}) & 0 \\ c_2 s_2 (I_{xx2} - I_{yy2}) & c_2^2 I_{yy2} + s_2^2 I_{xx2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.403}$$

$$h_2 = \left[h_1 - \tfrac{1}{2} l_1 s_2 \quad \tfrac{1}{2} l_1 c_2 \quad d_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.404}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.405}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_1 c_2 & -\tfrac{1}{2} l_1 s_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.406}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2} l_1 c_2 & 0 \\ 0 & -\tfrac{1}{2} l_1 s_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.407}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.408}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.409}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [l_2/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.410}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s_2^2 I_{zz3} + c_2^2 (c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3}) & I_{3(1,2)} & c_2 c_3 s_3 (I_{xx3} - I_{yy3}) \\ c_2 s_2 (c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3} - I_{zz3}) & I_{3(2,2)} & c_3 s_2 s_3 (I_{xx3} - I_{yy3}) \\ c_2 c_3 s_3 (I_{xx3} - I_{yy3}) & I_{3(3,2)} & c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.411}$$

Matriste,

$I_{3(1,2)} = c_2\, s_2 \left(c_3^2\, I_{xx3} + s_3^2\, I_{yy3} - I_{zz3} \right)$

$I_{3(2,2)} = c_2^2\, I_{zz3} + s_2^2 \left(c_3^2\, I_{xx3} + s_3^2\, I_{yy3} \right)$

$I_{3(3,2)} = c_3\, s_2\, s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$

$$h_3 = \begin{bmatrix} h_1 - l_1\, s_2 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, c_3 & l_1\, c_2 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_3\, s_2 & d_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, s_3 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.412}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.413}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1\, c_2 - \tfrac{1}{2} l_2\, c_3\, s_2 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, c_3 - l_1\, s_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, s_3 & -\tfrac{1}{2} l_2\, s_2\, s_3 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_3 & s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.414}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -l_1\, c_2 - \tfrac{1}{2} l_2\, c_3\, s_2 & -\tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, s_3 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, c_3 - l_1\, s_2 & -\tfrac{1}{2} l_2\, s_2\, s_3 \\ 1 & 0 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_3 \end{bmatrix} \tag{3.415}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.416}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & \tfrac{1}{2} l_2 m_3\, c_3 \\ 0 & m_3 \left(l_1^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\, c_3^2 \right) + c_3^2\, I_{yy3} + s_3^2\, I_{xx3} & \tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_3\, s_3 \\ \tfrac{1}{2} l_2 m_3\, c_3 & \tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_3\, s_3 & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.417}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & \tfrac{1}{2} l_2 m_3\, c_3 \\ 0 & D(q)_{(2,2)} & \tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_3\, s_3 \\ \tfrac{1}{2} l_2 m_3\, c_3 & \tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_3\, s_3 & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.418}$$

Matriste,

$D(q)_{(2,2)} = \tfrac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{zz2} + c_3^2\, I_{yy3} + s_3^2\, I_{xx3} + m_3 \left(l_1^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\, c_3^2 \right)$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.419}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \frac{1}{4} l_2^2 m_3 - I_{yy3} \right) & \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.420}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \\ 0 & \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(\frac{1}{4} l_2^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) & -\frac{1}{4} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \\ -\frac{1}{4} l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 & \frac{1}{4} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.421}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3^2 \\ 2\mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \frac{1}{4} l_2^2 m_3 - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \dot{\theta}_3^2 \\ \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(\frac{1}{4} l_2^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.422}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \left[0 \quad -\frac{1}{2} g l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 - g l_1 \, \mathrm{c}_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) \quad -\frac{1}{2} g l_2 m_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 \right]^T \tag{3.423}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

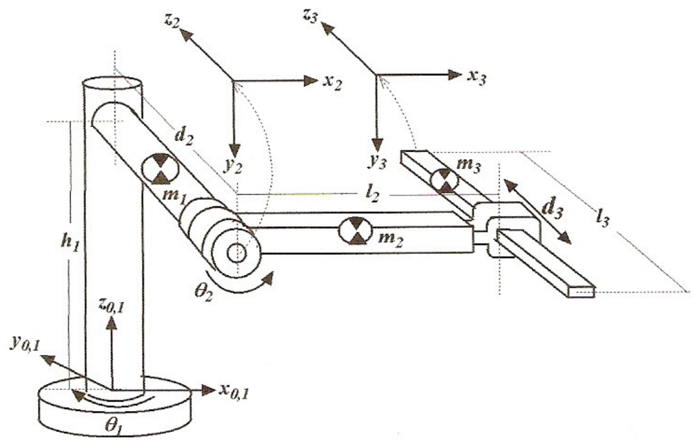
$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{d}_1 + \frac{1}{2} l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \ddot{\theta}_3 - \frac{1}{2} l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3^2 \tag{3.424}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left(m_3 \left(\frac{1}{4} l_2^2 \, \mathrm{c}_3^2 + l_1^2 \right) + \mathrm{s}_3^2 \, I_{xx3} + \mathrm{c}_3^2 \, I_{yy3} + \frac{1}{4} m_2 l_1^2 + I_{zz2} \right) \ddot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \ddot{\theta}_3 + 2\mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(-\frac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{xx3} - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \dot{\theta}_3^2 - g l_1 \, \mathrm{c}_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) - \frac{1}{2} g l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \end{aligned} \tag{3.425}$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & \frac{1}{2} l_2 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \ddot{d}_1 + \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 - \frac{1}{2} g l_2 m_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 \\ & + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(\frac{1}{4} l_2^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{3.426}$$

3.2.12. NC robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

NC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.12'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.12: NC robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.12: NC robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	90	0	d_2
3	0	0	l_2	d_3

Tablo 3.12'deki verilerden yararlanarak NC robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.427} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.428} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.429} $$

$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & s_1(d_2 + d_3) + l_2 c_1 c_2 \\ c_2 s_1 & -s_1 s_2 & -c_1 & l_2 c_2 s_1 - c_1(d_2 + d_3) \\ s_2 & c_2 & 0 & h_1 + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.430}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [0 \quad -d_2/2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.431}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx1} + s_1^2 I_{yy1} & c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & 0 \\ c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & c_1^2 I_{yy1} + s_1^2 I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.432}
$$

$$
h_1 = \left[\tfrac{1}{2} d_2 s_1 \quad -\tfrac{1}{2} d_2 c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.433}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.434}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2 c_1 & \tfrac{1}{2} d_2 s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.435}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2 c_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} d_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.436}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.437}
$$

$$
D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.438}
$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_2 = [l_2/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.439}
$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} s_1^2\, I_{zz2} + c_1^2 \left(c_2^2\, I_{xx2} + s_2^2\, I_{yy2} \right) & I_{2(1,2)} & c_1\, c_2\, s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ c_1\, s_1 \left(c_2^2\, I_{xx2} + s_2^2\, I_{yy2} - I_{zz2} \right) & I_{2(2,2)} & c_2\, s_1\, s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ c_1\, c_2\, s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & I_{2(3,2)} & c_2^2\, I_{yy2} + s_2^2\, I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.440}$$

Matriste,

$$I_{2(1,2)} = c_1\, s_1 \left(c_2^2\, I_{xx2} + s_2^2\, I_{yy2} - I_{zz2} \right)$$
$$I_{2(2,2)} = c_1^2\, I_{zz2} + s_1^2 \left(c_2^2\, I_{xx2} + s_2^2\, I_{yy2} \right)$$
$$I_{2(3,2)} = c_2\, s_1\, s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right)$$

$$h_2 = \left[d_2\, s_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_1\, c_2 \quad \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, s_1 - d_2\, c_1 \quad h_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, s_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.441}$$

$$b_2 = [\, s_1 \quad -c_1 \quad 0 \,]^T \tag{3.442}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} d_2\, c_1 - \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, s_1 & d_2\, s_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_1\, c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2} l_2\, c_1\, s_2 & -\tfrac{1}{2} l_2\, s_1\, s_2 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2 & s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.443}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} d_2\, c_1 - \tfrac{1}{2} l_2\, c_2\, s_1 & -\tfrac{1}{2} l_2\, c_1\, s_2 & 0 \\ d_2\, s_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, c_1\, c_2 & -\tfrac{1}{2} l_2\, s_1\, s_2 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} l_2\, c_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.444}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.445}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} m_2 \left(d_2^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\, c_2^2 \right) + c_2^2\, I_{yy2} + s_2^2\, I_{xx2} & -\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\, s_2 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\, s_2 & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.446}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [\, 0 \quad 0 \quad -l_3 / 2 \quad 1 \,]^T \tag{3.447}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s_1^2\, I_{zz3} + c_1^2 \left(c_2^2\, I_{xx3} + s_2^2\, I_{yy3} \right) & I_{3(1,2)} & c_1\, c_2\, s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \\ c_1\, s_1 \left(c_2^2\, I_{xx3} + s_2^2\, I_{yy3} - I_{zz3} \right) & I_{3(2,2)} & c_2\, s_1\, s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \\ c_1\, c_2\, s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) & I_{3(3,2)} & c_2^2\, I_{yy3} + s_2^2\, I_{xx3} \end{bmatrix} \tag{3.448}$$

Matriste,

$$I_{3(1,2)} = c_1 s_1 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{yy3} - I_{zz3} \right)$$
$$I_{3(2,2)} = c_1^2 I_{zz3} + s_1^2 \left(c_2^2 I_{xx3} + s_2^2 I_{yy3} \right)$$
$$I_{3(3,2)} = c_2 s_1 s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} s_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) + l_2 c_1 c_2 & h_{3(1,2)} & h_1 + l_2 s_2 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.449}$$

Matriste,

$$h_{3(1,2)} = l_2 c_2 s_1 - c_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right)$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.450}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) - l_2 c_2 s_1 & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -l_2 c_1 s_2 & J_{3(2,2)} & l_2 c_2 & s_1 & -c_1 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.451}$$

Matriste,

$$J_{3(1,2)} = s_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) + l_2 c_1 c_2$$
$$J_{3(2,2)} = -l_2 s_1 s_2$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) - l_2 c_2 s_1 & -l_2 c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \right) + l_2 c_1 c_2 & -l_2 s_1 s_2 & -c_1 \\ 0 & l_2 c_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.452}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.453}$$

$$D(d_3) = \begin{bmatrix} D(d_3)_{(1,1)} & l_2 m_3 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_2 - d_3 \right) & -l_2 m_3 c_2 \\ D(d_3)_{(2,1)} & l_2^2 m_3 + I_{zz3} & 0 \\ -l_2 m_3 c_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.454}$$

Matriste,

$$D(d_3)_{(1,1)} = m_3 \left(2 d_2 d_3 - d_2 l_3 - d_3 l_3 + d_2^2 + d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 + l_2^2 c_2^2 \right) + c_2^2 I_{yy3} + s_2^2 I_{xx3}$$
$$D(d_3)_{(2,1)} = l_2 m_3 s_2 \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_2 - d_3 \right)$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q)=\begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & D(q)_{(1,2)} & -l_2 m_3\,\mathrm{c}_2 \\ D(q)_{(2,1)} & \frac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} + I_{zz3} & 0 \\ -l_2 m_3\,\mathrm{c}_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.455}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} D(q)_{(1,1)} &= I_{zz1} + \tfrac{1}{4}d_2^2 m_1 + m_2\left(d_2^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\,\mathrm{c}_2^2\right) + \mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2} + I_{yy3}\right) + \mathrm{s}_2^2\left(I_{xx2} + I_{xx3}\right) \\ &\quad + m_3\left(2d_2 d_3 - d_2 l_3 - d_3 l_3 + d_2^2 + d_3^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2 + l_2^2\,\mathrm{c}_2^2\right) \\ D(q)_{(1,2)} &= D(q)_{(2,1)} = l_2 m_3\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 \end{aligned}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1(2,1)} & C_{1(2,2)} & l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 \\ m_3\left(2\left(d_2 + d_3\right) - l_3\right) & -l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.456}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{1(2,1)} &= 2\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - l_2^2 m_3 - \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{yy3}\right) \\ C_{1(2,2)} &= l_2 m_3\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 \end{aligned}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} C_{2(1,1)} & C_{2(1,2)} & -\frac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 \\ C_{2(2,1)} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.457}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{2(1,1)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{yy3}\right) \\ C_{2(1,2)} &= \tfrac{1}{4}d_2 l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 + m_3 l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 m_3 - \tfrac{1}{4}l_3 m_3\right) \\ C_{2(2,1)} &= m_3 l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{4}l_3 - \tfrac{1}{2}d_2 - \tfrac{1}{2}d_3\right) - \tfrac{1}{4}d_2 l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 \end{aligned}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2\right) & \frac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 \\ \frac{3}{2}l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.458}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ C_{(2,1)} \\ m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2\right)\dot{\theta}_1^2 + 2l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{3.459}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{(1,1)} &= \left(l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2\right)\dot{\theta}_2^2 + m_3\left(2(d_2 + d_3) - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\ &\quad + 2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - l_2^2 m_3 - \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\ C_{(2,1)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 - 2l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\, \dot{d}_3\dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & g\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2 + l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.460}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

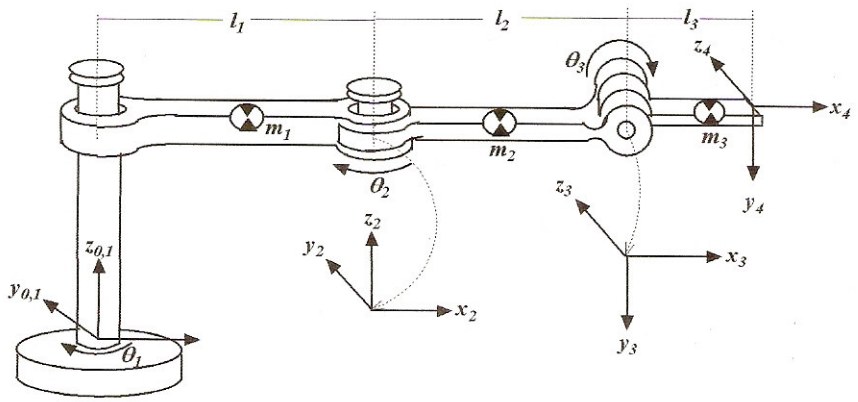
$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}d_2^2 m_1 + m_2\left(d_2^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2 \,\mathrm{c}_2^2\right) + \mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2} + I_{yy3}\right) + \mathrm{s}_2^2\left(I_{xx2} + I_{xx3}\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + \left(l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2\right)\dot{\theta}_2^2 + m_3\left(2(d_2 + d_3) - l_3\right)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\ &\quad + \left(l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 \,\mathrm{s}_2\right)\ddot{\theta}_2 - l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2\, \ddot{d}_3 \\ &\quad + 2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - l_2^2 m_3 - \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\ &\quad + m_3\left(2d_2 d_3 - d_2 l_3 - d_3 l_3 + d_2^2 + d_3^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2 + l_2^2 \,\mathrm{c}_2^2\right)\ddot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{3.461}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 - 2l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\, \dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 + g\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2 + l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2\right) \\ &\quad + \left(l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3\right) - \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 \,\mathrm{s}_2\right)\ddot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{3.462}$$

$$\tau_3 = m_3\ddot{d}_3 - l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2\, \ddot{\theta}_1 + m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2\right)\dot{\theta}_1^2 + 2l_2 m_3 \,\mathrm{s}_2\, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \tag{3.463}$$

3.2.13. RN robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

RN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.13'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.13'de verilmiştir.



Şekil 3.13: RN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.13: RN robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	0	l_1	0
3	θ_3	90	l_2	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.13'deki verilerden yararlanarak RN robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.464} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.465} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.466} $$

$$
{}_{4}^{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.467}
$$

$$
{}_{4}^{0}T = \begin{bmatrix} c_3\, c_{(1+2)} & -s_3\, c_{(1+2)} & s_{(1+2)} & l_1\, c_1 + c_{(1+2)}\,(l_2 + l_3\, c_3) \\ c_3\, s_{(1+2)} & -s_3\, s_{(1+2)} & -c_{(1+2)} & l_1\, s_1 + s_{(1+2)}\,(l_2 + l_3\, c_3) \\ s_3 & c_3 & 0 & h_1 + l_3\, s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.468}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [\, l_1 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.469}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\, I_{xx1} + s_1^2\, I_{yy1} & c_1\, s_1\,(I_{xx1} - I_{yy1}) & 0 \\ c_1\, s_1\,(I_{xx1} - I_{yy1}) & c_1^2\, I_{yy1} + s_1^2\, I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.470}
$$

$$
h_1 = \left[\, \tfrac{1}{2} l_1\, c_1 \quad \tfrac{1}{2} l_1\, s_1 \quad h_1 \quad 1 \,\right]^T \tag{3.471}
$$

$$
b_1 = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.472}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_1\, s_1 & \tfrac{1}{2} l_1\, c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.473}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_1\, s_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_1\, c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.474}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.475}
$$

$$
D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.476}
$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [\, l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.477}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c^2_{(1+2)} I_{xx2} + s^2_{(1+2)} I_{yy2} & s_{(1+2)} c_{(1+2)} \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & 0 \\ s_{(1+2)} c_{(1+2)} \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & s^2_{(1+2)} I_{xx2} + c^2_{(1+2)} I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \tag{3.478}$$

$$h_2 = \left[\, l_1 c_1 + \tfrac{1}{2} l_2 c_{(1+2)} \quad l_1 s_1 + \tfrac{1}{2} l_2 s_{(1+2)} \quad h_1 \quad 1 \,\right]^T \tag{3.479}$$

$$b_2 = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.480}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - \tfrac{1}{2} l_2 s_{(1+2)} & l_1 c_1 + \tfrac{1}{2} l_2 c_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2} l_2 s_{(1+2)} & \tfrac{1}{2} l_2 c_{(1+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.481}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - \tfrac{1}{2} l_2 s_{(1+2)} & -\tfrac{1}{2} l_2 s_{(1+2)} & 0 \\ l_1 c_1 + \tfrac{1}{2} l_2 c_{(1+2)} & \tfrac{1}{2} l_2 c_{(1+2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.482}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.483}$$

$$D(\theta_2) = \begin{bmatrix} m_2 \left(l_1 l_2 c_2 + l_1^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{zz2} & m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2 c_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{zz2} & 0 \\ m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2 c_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{zz2} & \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.484}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [\, l_3 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.485}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} s^2_{(1+2)} I_{zz3} + c^2_{(1+2)} \left(c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3} \right) & I_{3(1,2)} & I_{3(1,3)} \\ c_{(1+2)} s_{(1+2)} \left(c_3^2 I_{xx3} - I_{zz3} + s_3^2 I_{yy3} \right) & I_{3(2,2)} & I_{3(2,3)} \\ c_3 s_3 c_{(1+2)} \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) & I_{3(3,2)} & I_{3(3,3)} \end{bmatrix} \tag{3.486}$$

Matriste,

$$I_{3(1,2)} = c_{(1+2)}\, s_{(1+2)} \left(c_3^2\, I_{xx3} + s_3^2\, I_{yy3} - I_{zz3} \right)$$
$$I_{3(1,3)} = c_3\, s_3\, c_{(1+2)} \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$$
$$I_{3(2,2)} = c_{(1+2)}^2\, I_{zz3} + s_{(1+2)}^2 \left(c_3^2\, I_{xx3} + s_3^2\, I_{yy3} \right)$$
$$I_{3(2,3)} = I_{3(3,2)} = c_3\, s_3\, s_{(1+2)} \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$$
$$I_{3(3,3)} = c_3^2\, I_{yy3} + s_3^2\, I_{xx3}$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} h_{3(1,1)} & l_1\, s_1 + s_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & h_1 + \tfrac{1}{2} l_3\, s_3 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.487}$$

Matriste,

$$h_{3(1,1)} = l_1\, c_1 + c_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right)$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} s_{(1+2)} & -c_{(1+2)} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.488}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -l_1\, s_1 - s_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & J_{3(2,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tfrac{1}{2} l_3\, s_3\, c_{(1+2)} & J_{3(3,2)} & \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 & s_{(1+2)} & -c_{(1+2)} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.489}$$

Matriste,

$$J_{3(1,2)} = l_1\, c_1 + c_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right)$$
$$J_{3(2,2)} = c_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right)$$
$$J_{3(3,2)} = -\tfrac{1}{2} l_3\, s_3\, s_{(1+2)}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_1\, s_1 - s_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & s_{(1+2)} \left(-l_2 - \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & -\tfrac{1}{2} l_3\, s_3\, c_{(1+2)} \\ l_1\, c_1 + c_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & c_{(1+2)} \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \right) & -\tfrac{1}{2} l_3\, s_3\, s_{(1+2)} \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2} l_3\, c_3 \end{bmatrix} \tag{3.490}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{(1+2)} \\ 0 & 0 & -c_{(1+2)} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.491}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & D(\theta_3)_{(1,2)} & -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, s_2\, s_3 \\ D(\theta_3)_{(2,1)} & D(\theta_3)_{(2,2)} & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, s_2\, s_3 & 0 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.492}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} + m_3 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 + l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 \right)$$

$$D(\theta_3)_{(1,2)} = D(\theta_3)_{(2,1)} = m_3 \left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 \right)$$
$$+ \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3}$$

$$D(\theta_3)_{(2,2)} = \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} + m_3 \left(l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 \right)$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & D(q)_{(1,2)} & -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 \\ D(q)_{(2,1)} & D(q)_{(2,2)} & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 & 0 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.493}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_1 + m_2 \left(l_1^2 + l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3}$$
$$+ m_3 \left(2 l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 + l_1^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 \right)$$

$$D(q)_{(1,2)} = D(q)_{(2,1)} = m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3}$$
$$+ m_3 \left(l_1 l_2\, \mathrm{c}_2 + l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 \right)$$

$$D(q)_{(2,2)} = \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} + m_3 \left(l_2 l_3\, \mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\, \mathrm{c}_3^2 \right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1(2,1)} & C_{1(2,2)} & -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 \\ C_{1(3,1)} & C_{1(3,2)} & -\tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 \end{bmatrix} \tag{3.494}$$

Matriste,

$$C_{1(2,1)} = -l_1 l_2 m_2\, \mathrm{s}_2 - m_3 \left(2 l_1 l_2\, \mathrm{s}_2 + l_1 l_3\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 \right)$$

$$C_{1(2,2)} = -\tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_2\, \mathrm{s}_2 - m_3 \left(l_1 l_2\, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 \right)$$

$$C_{1(3,1)} = 2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3\, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_3^2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \right)$$

$$C_{1(3,2)} = 2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3\, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_3^2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \right)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{2(1,1)} & C_{2(1,2)} & \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 \\ C_{2(2,1)} & 0 & 0 \\ C_{2(3,1)} & C_{2(3,2)} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.495}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
C_{2(1,1)} &= \tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_2 \, \mathrm{s}_2 + m_3 \left(l_1 l_2 \, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \right) \\
C_{2(1,2)} &= \tfrac{1}{4} l_1 l_2 m_2 \, \mathrm{s}_2 + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2 \, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{4} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \right) \\
C_{2(2,1)} &= -\tfrac{1}{4} l_1 l_2 m_2 \, \mathrm{s}_2 - m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2 \, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{4} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \right) \\
C_{2(3,1)} &= 2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(\tfrac{1}{4} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) \\
C_{2(3,2)} &= 2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 \right)
\end{aligned}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_{3(1,1)} & C_{3(1,2)} & \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \\ C_{3(2,1)} & C_{3(2,2)} & 0 \\ C_{3(3,1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.496}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
C_{3(1,1)} &= m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\
C_{3(1,2)} &= m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\
C_{3(2,1)} &= m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{4} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\
C_{3(2,2)} &= m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\
C_{3(3,1)} &= -\tfrac{1}{4} l_1 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2
\end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ C_{(2,1)} \\ C_{(3,1)} \end{bmatrix} \tag{3.497}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
C_{(1,1)} = &\left(2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \\
&+ \left(2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) - m_3 \left(l_1 l_3 \, \mathrm{c}_2 \, \mathrm{s}_3 + l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_3^2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\
&- \left(l_1 l_2 m_2 \, \mathrm{s}_2 + m_3 \left(2 l_1 l_2 \, \mathrm{s}_2 + l_1 l_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \right) \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \, \dot{\theta}_3^2 \\
&- \left(\tfrac{1}{2} l_1 l_2 m_2 \, \mathrm{s}_2 + m_3 \left(l_1 l_2 \, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_2 \right) \right) \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{(2,1)} &= \left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3+l_2l_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 \\
&+\left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\
&+\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_2\,s_2+m_3\left(l_1l_2\,s_2+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_3\,s_2\right)\right)\dot{\theta}_1^{\,2} \\
C_{(1,3)} &= \left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_2\,s_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+\left(m_3\left(l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+2\,c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_2^2
\end{aligned}
$$

Yerçekimi vektörü:

$$
G(q)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \tfrac{1}{2}gl_3m_3\,c_3\end{bmatrix}^T \tag{3.498}
$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

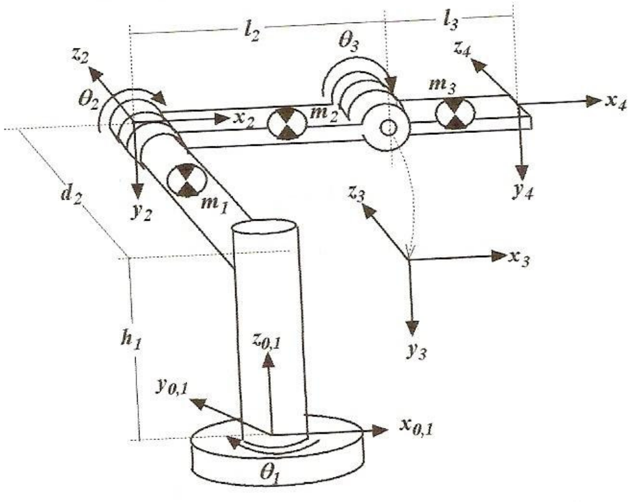
$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(I_{zz1}+\tfrac{1}{4}l_1^2m_1+m_2\left(l_1^2+l_1l_2\,c_2+\tfrac{1}{4}l_2^2\right)+I_{zz2}+c_3^2\,I_{yy3}+s_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(l_1l_3\,c_2\,s_3+l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 \\
&+\left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(l_1l_3\,c_2\,s_3+l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\
&-\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_2\,s_2+m_3\left(l_1l_2\,s_2+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_3\,s_2\right)\right)\dot{\theta}_2^2-\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,c_3\,s_2\,\dot{\theta}_3^2 \\
&-\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,s_2\,s_3\,\ddot{\theta}_3-\left(l_1l_2m_2\,s_2+m_3\left(2l_1l_2\,s_2+l_1l_3\,c_3\,s_2\right)\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&+m_3\left(2l_1l_2\,c_2+l_2l_3\,c_3+l_1l_3\,c_2\,c_3+l_1^2+l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(m_2\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2\,c_2+\tfrac{1}{4}l_2^2\right)+I_{zz2}+c_3^2\,I_{yy3}+s_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&+m_3\left(l_1l_2\,c_2+l_2l_3\,c_3+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_2\,c_3+l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.499}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+c_3^2\,I_{yy3}+s_3^2\,I_{xx3}+m_3\left(l_2l_3\,c_3+l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\
&+\left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\
&+\left(2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3+l_2l_3\,s_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 \\
&+\left(m_2\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2\,c_2+\tfrac{1}{4}l_2^2\right)+I_{zz2}+c_3^2\,I_{yy3}+s_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+m_3\left(l_1l_2\,c_2+l_2l_3\,c_3+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_2\,c_3+l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_2\,s_2+m_3\left(l_1l_2\,s_2+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_3\,s_2\right)\right)\dot{\theta}_1^{\,2}
\end{aligned} \tag{3.500}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_1l_3\,c_2\,s_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+\left(m_3\left(l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{2}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+2\,c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,s_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_3\right)+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&-\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,s_2\,s_3\,\ddot{\theta}_1+\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}gl_3m_3\,c_3
\end{aligned} \tag{3.501}
$$

3.2.14. NR robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

NR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.14'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.14'de verilmiştir.



Şekil 3.14: NR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.14: NR robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	–90	0	d_2
3	θ_3	0	l_2	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.14'deki verilerden yararlanarak NR robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.502} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.503} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.504} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.505} $$

$$ {}^0_4T = \begin{bmatrix} c_1\, c_{(2+3)} & -c_1\, s_{(2+3)} & -s_1 & l_2\, c_1\, c_2 - d_2\, s_1 + l_3\, c_1\, c_{(2+3)} \\ s_1\, c_{(2+3)} & -s_1\, s_{(2+3)} & c_1 & d_2\, c_1 + l_2\, c_2\, s_1 + l_3\, s_1\, c_{(2+3)} \\ -s_{(2+3)} & -c_{(2+3)} & 0 & h_1 - l_2\, s_2 - l_3\, s_{(2+3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.506} $$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$ \Delta h_1 = [0 \quad d_2 / 2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.507} $$

$$ I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\, I_{xx1} + s_1^2\, I_{yy1} & c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & 0 \\ c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & c_1^2\, I_{yy1} + s_1^2\, I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.508} $$

$$ h_1 = \left[-\tfrac{1}{2} d_2\, s_1 \quad \tfrac{1}{2} d_2\, c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.509} $$

$$ b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.510} $$

$$ J_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} d_2\, c_1 & -\tfrac{1}{2} d_2\, s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.511} $$

$$ A_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} d_2\, c_1 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} d_2\, s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.512} $$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.513}$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \frac{1}{4} d_2^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.514}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [\, l_2 / 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \,]^T \tag{3.515}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1^2\, I_{zz2} + \mathrm{c}_1^2 \left(\mathrm{c}_2^2\, I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{yy2} \right) & I_{2(1,2)} & \mathrm{c}_1\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} \right) \\ \mathrm{c}_1\, \mathrm{s}_1 \left(\mathrm{c}_2^2\, I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{yy2} - I_{zz2} \right) & I_{2(2,2)} & \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_1\, \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} \right) \\ \mathrm{c}_1\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} \right) & I_{2(3,2)} & \mathrm{c}_2^2\, I_{yy2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.516}$$

Matriste,

$$I_{2(1,2)} = \mathrm{c}_1\, \mathrm{s}_1 \left(\mathrm{c}_2^2\, I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{yy2} - I_{zz2} \right)$$
$$I_{2(2,2)} = \mathrm{c}_1^2\, I_{zz2} + \mathrm{s}_1^2 \left(\mathrm{c}_2^2\, I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{yy2} \right)$$
$$I_{2(3,2)} = \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_1\, \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} \right)$$

$$h_2 = \left[\, \tfrac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_1\, \mathrm{c}_2 - d_2\, \mathrm{s}_1 \quad d_2\, \mathrm{c}_1 + \tfrac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_1 \quad h_1 - \tfrac{1}{2} l_2\, \mathrm{s}_2 \quad 1 \,\right]^T \tag{3.517}$$

$$b_2 = [\, -\mathrm{s}_1 \quad \mathrm{c}_1 \quad 0 \,]^T \tag{3.518}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -d_2\, \mathrm{c}_1 - \frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_1 & \frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_1\, \mathrm{c}_2 - d_2\, \mathrm{s}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_1\, \mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{s}_1\, \mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_2 & -\mathrm{s}_1 & \mathrm{c}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.519}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -d_2\, \mathrm{c}_1 - \frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_1 & -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_1\, \mathrm{s}_2 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_1\, \mathrm{c}_2 - d_2\, \mathrm{s}_1 & -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{s}_1\, \mathrm{s}_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} l_2\, \mathrm{c}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.520}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.521}$$

$$D(\theta_2)=\begin{bmatrix} m_2\left(d_2^2+\frac{1}{4}l_2^2\,\mathrm{c}_2^2\right)+\mathrm{c}_2^2\,I_{yy2}+\mathrm{s}_2^2\,I_{xx2} & \frac{1}{2}d_2l_2m_2\,\mathrm{s}_2 & 0 \\ \frac{1}{2}d_2l_2m_2\,\mathrm{s}_2 & \frac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.522)$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3=[\,l_3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \quad (3.523)$$

$$I_3=\begin{bmatrix} I_{3(1,1)} & I_{3(1,2)} & \mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right) \\ I_{3(2,1)} & I_{3(2,2)} & \mathrm{s}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right) \\ I_{3(3,1)} & I_{3(3,2)} & \mathrm{c}_{(2+3)}^2\,I_{yy3}+\mathrm{s}_{(2+3)}^2\,I_{xx3} \end{bmatrix} \quad (3.524)$$

Matriste,

$$I_{3(1,1)}=\mathrm{s}_1^2\,I_{zz3}+\mathrm{c}_1^2\left(\mathrm{c}_{(2+3)}^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_{(2+3)}^2\,I_{yy3}\right)$$

$$I_{3(1,2)}=I_{3(2,1)}=\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_1\left(\mathrm{c}_{(2+3)}^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_{(2+3)}^2\,I_{yy3}-I_{zz3}\right)$$

$$I_{3(2,2)}=\mathrm{c}_1^2\,I_{zz3}+\mathrm{s}_1^2\left(\mathrm{c}_{(2+3)}^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_{(2+3)}^2\,I_{yy3}\right)$$

$$I_{3(3,1)}=\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)$$

$$I_{3(3,2)}=\mathrm{s}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)$$

$$h_3=\left[\,h_{3(1,1)} \quad d_2\,\mathrm{c}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)} \quad h_1-l_2\,\mathrm{s}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \quad 1\,\right]^T \quad (3.525)$$

Matriste,

$$h_{3(1,1)}=l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2-d_2\,\mathrm{s}_1+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}$$

$$b_3=[-\mathrm{s}_1 \quad \mathrm{c}_1 \quad 0]^T \quad (3.526)$$

$$J_3=\begin{bmatrix} J_{3(1,1)} & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ J_{3(2,1)} & J_{3(2,2)} & -l_2\,\mathrm{c}_2-\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} & -\mathrm{s}_1 & \mathrm{c}_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} & -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} & -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} & -\mathrm{s}_1 & \mathrm{c}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.527)$$

Matriste,

$$J_{3(1,1)}=-d_2\,\mathrm{c}_1-l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}$$

$$J_{3(1,2)}=-d_2\,\mathrm{s}_1+l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}$$

$$J_{3(2,1)} = -l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)}$$

$$J_{3(2,2)} = -l_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{3(1,1)} & -l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} \\ A_{3(2,1)} & -l_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_{(2+3)} \\ 0 & -l_2\,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} & -\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} \end{bmatrix} \tag{3.528}$$

Matriste,

$$A_{3(1,1)} = -d_2\,\mathrm{c}_1 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}$$

$$A_{3(2,1)} = l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 - d_2\,\mathrm{s}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}_1 & -\mathrm{s}_1 \\ 0 & \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.529}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & D(\theta_3)_{(1,2)} & \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \\ D(\theta_3)_{(2,1)} & D(\theta_3)_{(2,2)} & m_3\left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right) + I_{zz3} \\ D(\theta_3)_{(3,1)} & D(\theta_3)_{(3,2)} & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.530}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = m_3\left(d_2^2 + l_2 l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} + l_2^2\,\mathrm{c}_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\,\mathrm{c}_{(2+3)}^2\right) + \mathrm{c}_{(2+3)}^2 I_{yy3} + \mathrm{s}_{(2+3)}^2 I_{xx3}$$

$$D(\theta_3)_{(1,2)} = D(\theta_3)_{(2,1)} = m_3\left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)$$

$$D(\theta_3)_{(2,2)} = m_3\left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right) + I_{zz3}$$

$$D(\theta_3)_{(3,1)} = \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}$$

$$D(\theta_3)_{(3,2)} = m_3\left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right) + I_{zz3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & D(q)_{(1,2)} & \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \\ D(q)_{(2,1)} & D(q)_{(2,2)} & m_3\left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right) + I_{zz3} \\ D(q)_{(3,1)} & D(q)_{(3,2)} & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.531}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_1 + c_2^2 I_{yy2} + s_2^2 I_{xx2} + c_{(2+3)}^2 I_{yy3} + m_2 \left(d_2^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 c_2^2 \right)$$
$$+ m_3 \left(l_2 l_3 c_2 c_{(2+3)} + d_2^2 + l_2^2 c_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 c_{(2+3)}^2 \right) + s_{(2+3)}^2 I_{xx3}$$
$$D(q)_{(1,2)} = D(q)_{(2,1)} = \tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2 s_2 + m_3 \left(d_2 l_2 s_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 s_{(2+3)} \right)$$
$$D(q)_{(2,2)} = \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 \left(l_2 l_3 c_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right)$$
$$D(q)_{(3,1)} = \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 s_{(2+3)}$$
$$D(q)_{(3,2)} = I_{zz3} + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 c_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1(2,1)} & C_{1(2,2)} & \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)} \\ C_{1(3,1)} & \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)} & \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)} \end{bmatrix} \tag{3.532}$$

Matriste,

$$C_{1(2,1)} = 2 c_2 s_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} - \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3 \right) - l_2 l_3 m_3 \left(2 c_2 c_3 s_2 + s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right)$$
$$+ \left(2 c_2 s_2 \left(c_3^2 - s_3^2 \right) + 2 c_3 s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right)$$
$$C_{1(2,2)} = \tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2 c_2 + d_2 l_2 m_3 c_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)}$$
$$C_{1(3,1)} = \left(2 c_2 s_2 \left(c_3^2 - s_3^2 \right) + 2 c_3 s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right)$$
$$- \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2 c_2 c_3 s_2 + s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right) - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s_3$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{2(1,1)} & C_{2(1,2)} & -\tfrac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)} \\ C_{2(2,1)} & 0 & 0 \\ C_{2(3,1)} & -l_2 l_3 m_3 s_3 & -\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s_3 \end{bmatrix} \tag{3.533}$$

Matriste,

$$C_{2(1,1)} = \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2 c_2 c_3 s_2 + s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right) + c_2 s_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \right)$$
$$+ \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \left(c_2 s_2 \left(c_3^2 - s_3^2 \right) + c_3 s_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \right)$$
$$C_{2(1,2)} = -\tfrac{1}{4} d_2 l_2 m_2 c_2 - \tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_3 c_2 - \tfrac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)}$$
$$C_{2(2,1)} = \tfrac{1}{4} d_2 l_2 m_2 c_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_3 c_2 + \tfrac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)}$$
$$C_{2(3,1)} = \tfrac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c_{(2+3)}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_{3(1,1)} & -\frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} & -\frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} \\ \frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} & \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 & \frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \\ \frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} & -\frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.534}$$

Matriste,

$$C_{3(1,1)} = \left(\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_{(2+3)}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ C_{(2,1)} \\ C_{(3,1)} \end{bmatrix} \tag{3.535}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{(1,1)} =& -\frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_2 + 2\mathrm{c}_2^2 \,\mathrm{s}_3 \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 - l_2 l_3 m_3 \left(2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ & + \left(\frac{1}{2} d_2 l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2 + d_2 l_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 + \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \dot{\theta}_2^2 + d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} \,\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ & + \left(2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + 2\mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ & + \left(2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + 2\mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\ & + 2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} - \frac{1}{4} l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3 \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} \,\dot{\theta}_3^2 \\ C_{(2,1)} =& \left(\frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2\mathrm{c}_2 \,\mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) + \mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} + \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \left(\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\ & - m_3 l_2 l_3 \,\mathrm{s}_3 \,\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \,\dot{\theta}_3^2 \\ C_{(3,1)} =& \left(\left(\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_{(2+3)} \,\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \,\dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & G(q)_{(1,2)} & -\frac{1}{2} g l_3 m_3 \,\mathrm{c}_{(2+3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.536}$$

Matriste,

$$G(q)_{(1,2)} = g \left(m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 \left(\mathrm{s}_2 \,\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_2 \,\mathrm{c}_3 \right) - l_2 \,\mathrm{c}_2 \right) - \frac{1}{2} l_2 m_2 \,\mathrm{c}_2 \right)$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

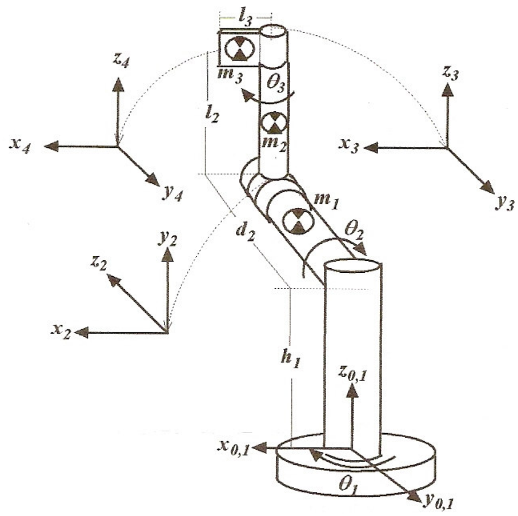
$$\begin{aligned}
\tau_1 =& -\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 + 2\,\mathrm{c}_2^2\,\mathrm{s}_3 \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 - l_2 l_3 m_3 \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\
&+ \left(m_2 \left(d_2^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2\,\mathrm{c}_2^2 \right) + m_3 \left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} + d_2^2 + l_2^2\,\mathrm{c}_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\,\mathrm{c}_{(2+3)}^2 \right) \right) \ddot{\theta}_1 \\
&+ \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 + d_2 l_2 m_3\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \dot{\theta}_2^2 + d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&+ \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_1 + \mathrm{c}_2^2\, I_{yy2} + \mathrm{s}_2^2\, I_{xx2} + \mathrm{c}_{(2+3)}^2\, I_{yy3} + \mathrm{s}_{(2+3)}^2\, I_{xx3} \right) \ddot{\theta}_1 \\
&+ \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} - \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_3^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 + m_3 \left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \right) \right) \ddot{\theta}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_3 \\
&+ \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\
&+ \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.537}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 =& \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 + m_3 \left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \right) \right) \ddot{\theta}_1 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 \left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) \right) \ddot{\theta}_2 \\
&+ g \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{c}_2 \right) - \tfrac{1}{2} l_2 m_2\,\mathrm{c}_2 \right) \\
&+ \left(I_{zz3} + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) \right) \ddot{\theta}_3 - m_3 l_2 l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&+ \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2
\end{aligned} \tag{3.538}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 =& \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1 + \left(I_{zz3} + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \right) \right) \ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 \\
&+ \left(\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2 - \tfrac{1}{2} g l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}
\end{aligned} \tag{3.539}$$

3.2.15. NN robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

NN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.15'de ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.15'de verilmiştir.



Şekil 3.15: NN robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.15: NN robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	θ_2	90	0	d_2
3	θ_3	–90	0	l_2
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.15'deki verilerden yararlanarak NN robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.540} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.541} $$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -s_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.542}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.543}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} c_1\, c_2\, c_3 - s_1\, s_3 & -c_3\, s_1 - c_1\, c_2\, s_3 & -c_1\, s_2 & {}^{0}_{4}T_{(1,4)} \\ c_1\, s_3 + c_2\, c_3\, s_1 & c_1\, c_3 - c_2\, s_1\, s_3 & -s_1\, s_2 & {}^{0}_{4}T_{(2,4)} \\ c_3\, s_2 & -s_2\, s_3 & c_2 & {}^{0}_{4}T_{(3,4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.544}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{0}_{4}T_{(1,4)} &= d_2\, s_1 - l_2\, c_1\, s_2 + l_3\, (\, c_1\, c_2\, c_3 - s_1\, s_3\,) \\
{}^{0}_{4}T_{(2,4)} &= l_3\, (\, c_1\, s_3 + c_2\, c_3\, s_1\,) - d_2\, c_1 - l_2\, s_1\, s_2 \\
{}^{0}_{4}T_{(3,4)} &= h_1 + l_2\, c_2 + l_3\, c_3\, s_2
\end{aligned}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [0 \quad -d_2 / 2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.545}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2\, I_{xx1} + s_1^2\, I_{yy1} & c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & 0 \\ c_1\, s_1 \left(I_{xx1} - I_{yy1} \right) & c_1^2\, I_{yy1} + s_1^2\, I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.546}
$$

$$
h_1 = \left[\tfrac{1}{2} d_2\, s_1 \quad -\tfrac{1}{2} d_2\, c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.547}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.548}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2\, c_1 & \tfrac{1}{2} d_2\, s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.549}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} d_2\, c_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} d_2\, s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.550}
$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.551}$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \frac{1}{4} d_2^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.552}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad l_2 / 2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.553}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1^2 I_{zz2} + \mathrm{c}_1^2 \left(\mathrm{c}_2^2 I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2 I_{yy2} \right) & I_{2(1,2)} & \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_1 \left(\mathrm{c}_2^2 I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2 I_{yy2} - I_{zz2} \right) & I_{2(2,2)} & \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) \\ \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right) & I_{2(3,2)} & \mathrm{c}_2^2 I_{yy2} + \mathrm{s}_2^2 I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.554}$$

Matriste,

$$I_{2(1,2)} = \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_1 \left(\mathrm{c}_2^2 I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2 I_{yy2} - I_{zz2} \right)$$
$$I_{2(2,2)} = \mathrm{c}_1^2 I_{zz2} + \mathrm{s}_1^2 \left(\mathrm{c}_2^2 I_{xx2} + \mathrm{s}_2^2 I_{yy2} \right)$$
$$I_{2(3,2)} = \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - I_{yy2} \right)$$

$$h_2 = \left[d_2 \mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_2 \quad -d_2 \mathrm{c}_1 - \tfrac{1}{2} l_2 \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 \quad h_1 + \tfrac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \quad 1 \right]^T \tag{3.555}$$

$$b_2 = [\mathrm{s}_1 \quad -\mathrm{c}_1 \quad 0]^T \tag{3.556}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} d_2 \mathrm{c}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 & d_2 \mathrm{s}_1 - \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 & -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_1 & -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{s}_2 & \mathrm{s}_1 & -\mathrm{c}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.557}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} d_2 \mathrm{c}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 & 0 \\ d_2 \mathrm{s}_1 - \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_1 \mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} l_2 \mathrm{s}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.558}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{s}_1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{c}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.559}$$

$$D(\theta_2)=\begin{bmatrix} c_2^2 I_{yy2}+s_2^2 I_{xx2}+m_2\left(d_2^2+\frac{1}{4}l_2^2 s_2^2\right) & -\frac{1}{2}d_2 l_2 m_2 c_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 l_2 m_2 c_2 & \frac{1}{4}l_2^2 m_2+I_{zz2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.560}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3=[\,l_3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,]^T \tag{3.561}$$

$$I_3=\begin{bmatrix} I_{3(1,1)} & I_{3(1,2)} & I_{3(1,3)} \\ I_{3(2,1)} & I_{3(2,2)} & I_{3(2,3)} \\ I_{3(3,1)} & I_{3(3,2)} & I_{3(3,3)} \end{bmatrix} \tag{3.562}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
I_{3(1,1)} &= c_1^2 s_2^2 I_{zz3}+2c_2 c_1 c_3 s_1 s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)+s_1^2\left(c_3^2 I_{yy3}+s_3^2 I_{xx3}\right) \\
&\quad +c_1^2 c_2^2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}\right) \\
I_{3(1,2)} &= I_{3(2,1)} = c_1 s_1\left(s_2^2 I_{zz3}-s_3^2 I_{xx3}-c_3^2 I_{yy3}\right)+c_1 c_2^2 s_1\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}\right) \\
&\quad +c_2 c_3 s_3\left(c_1^2-s_1^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right) \\
I_{3(1,3)} &= c_3 s_1 s_2 s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)+c_1 c_2 s_2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}-I_{zz3}\right) \\
I_{3(2,2)} &= 2c_1 c_2 c_3 s_1 s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+c_1^2\left(c_3^2 I_{yy3}+s_3^2 I_{xx3}\right) \\
&\quad +s_1^2 s_2^2 I_{zz3}+c_2^2 s_1^2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}\right) \\
I_{3(2,3)} &= c_1 c_3 s_2 s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+c_2 s_1 s_2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}-I_{zz3}\right) \\
I_{3(3,1)} &= c_3 s_1 s_2 s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)+c_1 c_2 s_2\left(s_3^2 I_{yy3}-I_{zz3}+c_3^2 I_{xx3}\right) \\
I_{3(3,2)} &= c_1 c_3 s_2 s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+c_2 s_1 s_2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}-I_{zz3}\right) \\
I_{3(3,3)} &= c_2^2 I_{zz3}+s_2^2\left(c_3^2 I_{xx3}+s_3^2 I_{yy3}\right)
\end{aligned}$$

$$h_3=\begin{bmatrix} d_2 s_1-l_2 c_1 s_2+\frac{1}{2}l_3\left(c_1 c_2 c_3-s_1 s_3\right) \\ \frac{1}{2}l_3\left(c_1 s_3+c_2 c_3 s_1\right)-d_2 c_1-l_2 s_1 s_2 \\ h_1+l_2 c_2+\frac{1}{2}l_3 c_3 s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.563}$$

$$b_3=[\,-c_1 s_2 \quad -s_1 s_2 \quad c_2\,]^T \tag{3.564}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} J_{3(1,1)} & J_{3(1,2)} & -\frac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1 + \mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right) \\ J_{3(2,1)} & J_{3(2,2)} & \frac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3\right) \\ 0 & J_{3(3,2)} & -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & \mathrm{s}_1 & -\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 \\ 0 & -\mathrm{c}_1 & -\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 \\ 1 & 0 & \mathrm{c}_2 \end{bmatrix} \tag{3.565}$$

Matriste,

$$J_{3(1,1)} = d_2\,\mathrm{c}_1 + l_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\right)$$
$$J_{3(1,2)} = -l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2$$
$$J_{3(2,1)} = d_2\,\mathrm{s}_1 - l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3\right)$$
$$J_{3(2,2)} = -l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2$$
$$J_{3(3,2)} = -l_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{3(1,1)} & -l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 - \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1 + \mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right) \\ A_{3(2,1)} & -l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1 - \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 & \frac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3\right) \\ 0 & \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{s}_2 & -\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.566}$$

Matriste,

$$A_{3(1,1)} = d_2\,\mathrm{c}_1 + l_2\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_1\right)$$
$$A_{3(2,1)} = d_2\,\mathrm{s}_1 - l_2\,\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_3\right)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{s}_1 & -\mathrm{c}_1\,\mathrm{s}_2 \\ 0 & -\mathrm{c}_1 & -\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2 \\ 1 & 0 & \mathrm{c}_2 \end{bmatrix} \tag{3.567}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & D(\theta_3)_{(1,2)} & D(\theta_3)_{(1,3)} \\ D(\theta_3)_{(2,1)} & D(\theta_3)_{(2,2)} & \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \\ D(\theta_3)_{(3,1)} & \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 & \frac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.568}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = m_3\left(d_2^2 - d_2 l_3\,\mathrm{s}_3 - l_2 l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 + l_2^2 s_2{}^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\left(\mathrm{c}_2^2\,\mathrm{c}_3^2 + \mathrm{s}_3^2\right)\right)$$
$$+\,\mathrm{c}_2^2\,I_{zz3} + \mathrm{s}_2^2\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}\right)$$

$$D(\theta_3)_{(1,2)} = D(\theta_3)_{(2,1)} = m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,c_2\,s_3 - d_2l_2\,c_2 - \tfrac{1}{2}d_2l_3\,c_3\,s_2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_2\,s_3\right)$$
$$+ c_3\,s_2\,s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)$$
$$D(\theta_3)_{(1,3)} = D(\theta_3)_{(3,1)} = m_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2\,c_2 - \tfrac{1}{2}d_2l_3\,c_2\,s_3 - \tfrac{1}{2}l_2l_3\,c_3\,s_2\right) + c_2\,I_{zz3}$$
$$D(\theta_3)_{(2,2)} = m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right) + c_3^2\,I_{yy3} + s_3^2\,I_{xx3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & D(q)_{(1,2)} & D(q)_{(1,3)} \\ D(q)_{(2,1)} & D(q)_{(2,2)} & \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3 \\ D(q)_{(3,1)} & \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3 & \tfrac{1}{4}l_3^2m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.569}$$

Matriste,

$$D(q)_{(1,1)} = I_{zz1} + \tfrac{1}{4}d_2^2m_1 + c_2^2\left(I_{yy2} + I_{zz3}\right) + s_2^2\left(c_3^2\,I_{xx3} + s_3^2\,I_{yy3} + I_{xx2}\right)$$
$$+ m_3\left(d_2^2 - d_2l_3\,s_3 - l_2l_3\,c_2\,c_3\,s_2 + l_2^2\,s_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\left(s_3^2 + c_2^2\,c_3^2\right)\right)$$
$$+ m_2\left(d_2^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2\,s_2^2\right)$$
$$D(q)_{(1,2)} = D(q)_{(2,1)} = m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,c_2\,s_3 - d_2l_2\,c_2 - \tfrac{1}{2}d_2l_3\,c_3\,s_2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3\,s_2\,s_3\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\,c_2 + c_3\,s_2\,s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)$$
$$D(q)_{(1,3)} = D(q)_{(3,1)} = c_2\,I_{zz3} + m_3\left(-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,c_2\,s_3 - \tfrac{1}{2}l_2l_3\,c_3\,s_2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,c_2\right)$$
$$D(q)_{(2,2)} = \tfrac{1}{4}l_2^2m_2 + I_{zz2} + c_3^2\,I_{yy3} + s_3^2\,I_{xx3} + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\,c_3^2\right)$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{1(2,1)} & C_{1(2,2)} & C_{1(2,3)} \\ C_{1(3,1)} & C_{1(3,2)} & C_{1(3,3)} \end{bmatrix} \tag{3.570}$$

Matriste,

$$C_{1(2,1)} = l_2l_3m_3\,c_3\left(s_2^2 - c_2^2\right) - 2\,c_2\,s_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,c_3^2 + c_3^2\,I_{yy3} + s_3^2\,I_{xx3}\right)$$
$$+2\,c_2\,s_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} + I_{yy3} - I_{zz3}\right)$$
$$C_{1(2,2)} = \tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\,s_2 + d_2l_2m_3\,s_2 - \tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,c_2\,c_3 - \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_2\,s_3$$
$$+c_2\,c_3\,s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)$$

$$C_{1(2,3)} = m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{s}_2\right) - \mathrm{s}_2\,I_{zz3}$$
$$C_{1(3,1)} = l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3 + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2\,I_{xx3} - I_{xx3} + \mathrm{s}_2^2\,I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_2^2\right)$$
$$C_{1(3,2)} = \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + \left(2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2 - \mathrm{s}_2\right)\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)$$
$$C_{1(3,3)} = m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{2(1,1)} & C_{2(1,2)} & C_{2(1,3)} \\ C_{2(2,1)} & 0 & 0 \\ C_{2(3,1)} & 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{yy3}\right) & \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.571}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{2(1,1)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,\mathrm{c}_3^2 - l_2^2m_3 - \tfrac{1}{4}l_2^2m_2 - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{zz3}\right) \\ &\quad + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3^2\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) + \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left({\mathrm{c}_2}^2 - {\mathrm{s}_2}^2\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C_{2(1,2)} &= \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{2}d_2l_2m_3\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{4}d_2l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right) \end{aligned}$$
$$C_{2(1,3)} = \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{8}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{s}_2\,I_{zz3}$$
$$\begin{aligned} C_{2(2,1)} &= \tfrac{1}{4}d_2l_2m_2\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}d_2l_2m_3\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C_{2(3,1)} &= \tfrac{3}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{8}l_3^2\,\mathrm{s}_2\right) + \tfrac{1}{2}\mathrm{s}_2\,I_{zz3} \\ &\quad + \left(2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2 - \mathrm{s}_2\right)\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right) \end{aligned}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_{3(1,1)} & C_{3(1,2)} & C_{3(1,3)} \\ C_{3(2,1)} & C_{3(2,2)} & -\tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3 \\ C_{3(3,1)} & \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.572}$$

Matriste,

$$C_{3(1,1)} = \tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\mathrm{s}_2^2\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)$$
$$C_{3(1,2)} = -\tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 + \left(\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{s}_2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)$$
$$C_{3(1,3)} = m_3\left(-\tfrac{1}{4}l_2l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{4}d_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)$$
$$\begin{aligned} C_{3(2,1)} &= \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{3}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_2 - \mathrm{s}_2\,I_{zz3} \\ &\quad + \left(\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{s}_2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right) \end{aligned}$$
$$C_{3(2,2)} = \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)$$
$$C_{3(3,1)} = \tfrac{1}{4}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{4}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ C_{(2,1)} \\ C_{(3,1)} \end{bmatrix} \tag{3.573}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
C_{(1,1)} = & \left(l_2 l_3 m_3 \, c_2 \, s_2 \, s_3 - d_2 l_3 m_3 \, c_3 + 2 c_3 \, s_3 \left(c_2^2 \, I_{xx3} - I_{xx3} + s_2^2 \, I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \, s_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\
& + c_2 \, c_3 \, s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_2^2 + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, s_2 \, s_3 - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 \, c_2 \, c_3 \right) \dot{\theta}_3^2 \\
& - 2 c_2 \, s_2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \, c_3^2 + c_3^2 \, I_{yy3} + s_3^2 \, I_{xx3} \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + l_2 l_3 m_3 \, c_3 \left(s_2^2 - c_2^2 \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\
& + 2 c_2 \, s_2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} + I_{yy3} - I_{zz3} \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\
& + \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2 \, s_2 + d_2 l_2 m_3 \, s_2 - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \, c_2 \, c_3 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, s_2 \, s_3 \right) \dot{\theta}_2^2 \\
& + \left(d_2 l_3 m_3 \, s_2 \, s_3 + 2 c_3^2 \, s_2 \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \\
& - s_2 \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{(2,1)} = & \, c_2 \, s_2 \, s_3^2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, c_3 \left(c_2^2 - s_2^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, c_3 \, \dot{\theta}_3^2 \\
& + \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3^2 \, c_3^2 \, s_2 + l_2 l_3 \, c_2 \, c_3 \right) + s_2 \, I_{zz3} + \left(2 c_3^2 \, s_2 - s_2 \right) \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\
& + c_2 \, s_2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \, c_3^2 - l_2^2 m_3 - \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy2} + I_{zz3} \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + 2 c_3 \, s_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{(3,1)} = & \left(2 c_3^2 \, s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) - l_2 l_3 m_3 \, c_2 \, c_3 - s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3} \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \, c_3 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, c_2 \, s_2 \, s_3 + c_3 \, s_3 \, s_2^2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + c_3 \, s_3 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \left[0 \quad g \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3 \, c_2 \, c_3 - l_2 \, s_2 \right) - \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \, s_2 \right) \quad -\tfrac{1}{2} g l_3 m_3 \, s_2 \, s_3 \right]^T \tag{3.574}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \, s_2^2 \left(c_3^2 \, I_{xx3} + s_3^2 \, I_{yy3} + I_{xx2} \right) \ddot{\theta}_1 + \left(c_3 \, s_2 \, s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) - \tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2 \, c_2 \right) \ddot{\theta}_2 \\
& + c_2 \, c_3 \, s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \dot{\theta}_2^2 + m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 \, s_2 \, s_3 - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 \, c_2 \, c_3 \right) \dot{\theta}_3^2 \\
& + \left(l_2 l_3 m_3 \, c_2 \, s_2 \, s_3 + 2 c_3 \, s_3 \left(c_2^2 \, I_{xx3} - I_{xx3} + s_2^2 \, I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \, s_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\
& - 2 c_2 \, s_2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \, c_3^2 + c_3^2 \, I_{yy3} + s_3^2 \, I_{xx3} \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + l_2 l_3 m_3 \, c_3 \left(s_2^2 - c_2^2 \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\
& + 2 c_2 \, s_2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} + I_{yy3} - I_{zz3} \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.575}$$

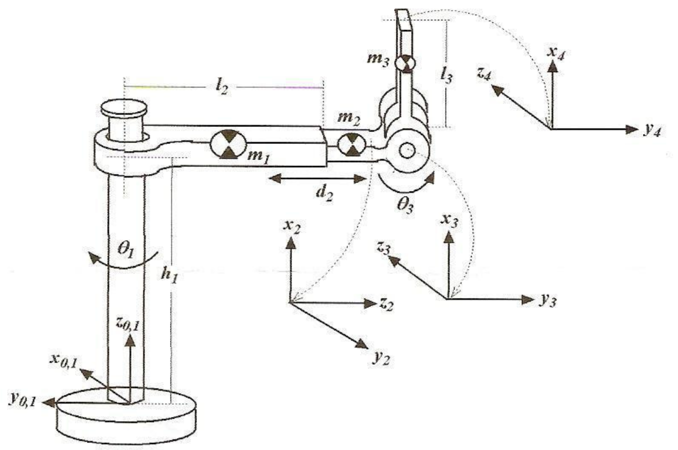
$$
\begin{aligned}
&+\left(\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\,\mathrm{s}_2+d_2l_2m_3\,\mathrm{s}_2-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_2^2\\
&+m_3\left(d_2^2-d_2l_3\,\mathrm{s}_3-l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+l_2^2\,\mathrm{s}_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\left(\mathrm{s}_3^2+\mathrm{c}_2^2\,\mathrm{c}_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&+\left(I_{zz1}+\tfrac{1}{4}d_2^2m_1+\mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2}+I_{zz3}\right)+m_2\left(d_2^2+\tfrac{1}{4}l_2^2\,\mathrm{s}_2^2\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&-\mathrm{s}_2\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2-d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\\
&+\left(\mathrm{c}_2\,I_{zz3}+m_3\left(-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_2\right)\right)\ddot{\theta}_3\\
&+m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3-d_2l_2\,\mathrm{c}_2-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\left(d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3+2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= m_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3-d_2l_2\,\mathrm{c}_2-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\\
&+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2+l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)+\mathrm{s}_2\,I_{zz3}+\left(2\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2-\mathrm{s}_2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\\
&+\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,\mathrm{c}_3^2-l_2^2m_3-\tfrac{1}{4}l_2^2m_2-I_{xx2}-I_{xx3}+I_{yy2}+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+\mathrm{c}_3^2\,I_{yy3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}+m_3\left(l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3^2\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\\
&+\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\,\mathrm{c}_2\right)\ddot{\theta}_1\\
&+g\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3-l_2\,\mathrm{s}_2\right)-\tfrac{1}{2}l_2m_2\,\mathrm{s}_2\right)
\end{aligned}
\tag{3.576}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \left(\mathrm{c}_2\,I_{zz3}+m_3\left(-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{c}_2\right)\right)\ddot{\theta}_1+\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3\\
&+\left(2\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3-\mathrm{s}_2\left(I_{xx3}-I_{yy3}+I_{zz3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\mathrm{s}_2^2\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2^2-\tfrac{1}{2}gl_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2
\end{aligned}
\tag{3.577}
$$

3.2.16. RR robotunun dinamiğinin Lagrange-Euler yöntemi ile çıkarılması

RR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 3.16'da ve bu düzenleşime göre elde edilmiş DH parametreleri Tablo 3.16'da verilmiştir.



Şekil 3.16: RR robotunun eklem düzenleşimi ve sembolik kütle gösterimi

Tablo 3.16: RR robotunun DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	h_1
2	90	90	0	d_2+l_2
3	θ_3	−90	0	0
4	0	0	l_3	0

Tablo 3.16'deki verilerden yararlanarak RR robotunun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.578} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(d_2+l_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.579} $$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.580}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.581}
$$

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} -s_1 s_3 & -c_3 s_1 & -c_1 & -l_3 s_1 s_3 + s_1 (d_2 + l_2) \\ c_1 s_3 & c_1 c_3 & -s_1 & l_3 c_1 s_3 - c_1 (d_2 + l_2) \\ c_3 & -s_3 & 0 & h_1 + l_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.582}
$$

İlk eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\Delta h_1 = [0 \quad -l_2/2 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.583}
$$

$$
I_1 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{xx1} + s_1^2 I_{yy1} & c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & 0 \\ c_1 s_1 (I_{xx1} - I_{yy1}) & c_1^2 I_{yy1} + s_1^2 I_{xx1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \tag{3.584}
$$

$$
h_1 = \left[\tfrac{1}{2} l_2 s_1 \quad -\tfrac{1}{2} l_2 c_1 \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.585}
$$

$$
b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.586}
$$

$$
J_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & \tfrac{1}{2} l_2 s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.587}
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 c_1 & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} l_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.588}
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.589}
$$

$$D(\theta_1) = \begin{bmatrix} I_{zz1} + \frac{1}{4} l_2^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.590}$$

İkinci eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_2 = [0 \quad 0 \quad -l_2/2 \quad 1]^T \tag{3.591}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{yy2} + s_1^2 I_{zz2} & c_1 s_1 \left(I_{yy2} - I_{zz2} \right) & 0 \\ c_1 s_1 \left(I_{yy2} - I_{zz2} \right) & c_1^2 I_{zz2} + s_1^2 I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx2} \end{bmatrix} \tag{3.592}$$

$$h_2 = \left[s_1 \left(d_2 + \tfrac{1}{2} l_2 \right) \quad -c_1 \left(d_2 + \tfrac{1}{2} l_2 \right) \quad h_1 \quad 1 \right]^T \tag{3.593}$$

$$b_2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.594}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & s_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.595}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & s_1 & 0 \\ s_1 \left(d_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.596}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.597}$$

$$D(d_2) = \begin{bmatrix} m_2 \left(d_2 l_2 + d_2^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.598}$$

Üçüncü eklem için değişkenler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta h_3 = [l_3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{3.599}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} c_1^2 I_{zz3} + s_1^2 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} \right) & I_{3(1,2)} & c_3 s_1 s_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \\ c_1 s_1 \left(I_{zz3} - c_3^2 I_{yy3} - s_3^2 I_{xx3} \right) & I_{3(2,2)} & c_1 c_3 s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \\ c_3 s_1 s_3 \left(I_{yy3} - c_3 s_1 s_3 I_{xx3} \right) & I_{3(3,2)} & c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3} \end{bmatrix} \tag{3.600}$$

Matriste,

$$I_{3(1,2)} = c_1 s_1 \left(I_{zz3} - c_3^2 I_{yy3} - s_3^2 I_{xx3} \right)$$
$$I_{3(2,2)} = s_1^2 I_{zz3} + c_1^2 \left(c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx3} \right)$$
$$I_{3(3,2)} = c_1 c_3 s_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right)$$

$$h_3 = \left[s_1 (d_2 + l_2) - \tfrac{1}{2} l_3 s_1 s_3 \quad \tfrac{1}{2} l_3 c_1 s_3 - c_1 (d_2 + l_2) \quad h_1 + \tfrac{1}{2} l_3 c_3 \quad 1 \right]^T \tag{3.601}$$

$$b_3 = [-c_1 \quad -s_1 \quad 0]^T \tag{3.602}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 s_3 \right) & J_{3(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} l_3 c_3 s_1 & \tfrac{1}{2} l_3 c_1 c_3 & -\tfrac{1}{2} l_3 s_3 & -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.603}$$

Matriste,

$$J_{3(1,2)} = s_1 \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 s_3 \right)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_1 \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 s_3 \right) & s_1 & -\tfrac{1}{2} l_3 c_3 s_1 \\ s_1 \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 s_3 \right) & -c_1 & \tfrac{1}{2} l_3 c_1 c_3 \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3 s_3 \end{bmatrix} \tag{3.604}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 0 & -s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.605}$$

$$D(\theta_3) = \begin{bmatrix} D(\theta_3)_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 c_3 \\ 0 & -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 c_3 & \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.606}$$

Matriste,

$$D(\theta_3)_{(1,1)} = m_3 \left(2 d_2 l_2 - d_2 l_3 s_3 - l_2 l_3 s_3 + d_2^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 s_3^2 \right) + c_3^2 I_{xx3} + s_3^2 I_{yy3}$$

Robotun toplam kütle matrisi:

$$D(q)=\begin{bmatrix} D(q)_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & m_2+m_3 & -\frac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3 \\ 0 & -\frac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3 & \frac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3} \end{bmatrix} \tag{3.607}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} D(q)_{(1,1)} &= I_{zz1}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_1+I_{xx2}+\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}+m_2\left(d_2l_2+d_2^2+\tfrac{1}{4}l_2^2\right) \\ &\quad +m_3\left(2d_2l_2-d_2l_3\,\mathrm{s}_3-l_2l_3\,\mathrm{s}_3+d_2^2+l_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2\,\mathrm{s}_3^2\right) \end{aligned}$$

Robotun her bir eklemine etki eden hız bağlaşım matrisleri, C_1, C_2, C_3 ve robotun toplam coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, C şu şekilde bulunur:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_2(2d_2+l_2)+m_3(2l_2-l_3\,\mathrm{s}_3+2d_2) & 0 & 0 \\ -m_3(d_2l_3\,\mathrm{c}_3+l_2l_3\,\mathrm{c}_3)+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\frac{1}{4}l_3^2m_3\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.608}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} m_3\left(\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3-l_2-d_2\right)-m_2\left(\frac{1}{2}l_2+d_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \tag{3.609}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} C_{3(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}l_3m_3\,\mathrm{s}_3 \\ 0 & \frac{1}{4}l_3m_3\,\mathrm{s}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.610}$$

Matriste,

$$C_{3(1,1)}=m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_3\right)+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{(1,1)} \\ \left(m_3\left(\frac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3-l_2-d_2\right)-m_2\left(\frac{1}{2}l_2+d_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \\ \left(\frac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+\frac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\frac{1}{4}l_3^2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.611}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} C_{(1,1)} &= \left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-m_3(d_2l_3\,\mathrm{c}_3+l_2l_3\,\mathrm{c}_3)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\ &\quad +\left(m_2(2d_2+l_2)+m_3(2l_2-l_3\,\mathrm{s}_3+2d_2)\right)\dot{d}_2\dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Yerçekimi vektörü:

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} g l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.612}$$

Sonuç olarak robotun her bir eklemine etki eden tork aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = &\left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{xx2} + \mathrm{c}_3^2 \, I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2 \, I_{yy3} + m_2 \left(d_2 l_2 + d_2^2 + \tfrac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \ddot{\theta}_1 \\
&+ \left(2 \, \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) - m_3 \left(d_2 l_3 \, \mathrm{c}_3 + l_2 l_3 \, \mathrm{c}_3 \right) + \right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \\
&+ m_3 \left(2 d_2 l_2 - d_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 - l_2 l_3 \, \mathrm{s}_3 + d_2^2 + l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \, \mathrm{s}_3^2 \right) \ddot{\theta}_1 \\
&+ \left(m_2 \left(2 d_2 + l_2 \right) + m_3 \left(2 l_2 - l_3 \, \mathrm{s}_3 + 2 d_2 \right) \right) \dot{d}_2 \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.613}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = &\left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3 \, \mathrm{s}_3 - l_2 - d_2 \right) - m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2 + d_2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3 \, \dot{\theta}_3^2 \\
&- \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \ddot{\theta}_3 + \left(m_2 + m_3 \right) \ddot{d}_2
\end{aligned} \tag{3.614}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = &\left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 + \mathrm{c}_3 \, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&- \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \, \mathrm{c}_3 \, \ddot{d}_2 + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2} g l_3 m_3 \, \mathrm{s}_3
\end{aligned} \tag{3.615}$$

3.3. Endüstriyel Robotların Dinamiğinin Newton-Euler Yöntemi ile Çıkarılması

Bu bölümde 16 adet temel endüstriyel robotun dinamiği Newton-Euler yöntemi ile çıkarılmıştır. Her bir robotun eklem düzenleşimleri, DH parametreleri ve ileri yön dönüşüm matrisleri Bölüm 3.2 de bulunduğundan bu bölümde verilmemiştir.

3.3.1. SS robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

SS robotunun her bir bağının kütle merkezi, kendi koordinat sistemlerine göre, aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
{}^1P_{c_1} &= l_1 \hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{l_1}{2} \end{bmatrix}^T \\
{}^2P_{c_2} &= l_2 \hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{l_2}{2} \end{bmatrix}^T \\
{}^3P_{c_3} &= l_3 \hat{Z}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{l_3}{2} \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.616}$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$^{0}\omega_0 = 0\ ;\ ^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.617}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin y eksenindedir. Buradan:

$$^{0}\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0 = [0 \quad g \quad 0]^T \tag{3.618}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

Açısal hız ve ivme:

$$^{1}\omega_1 = {}^{1}_{0}R\,^{0}\omega_0 = 0\ ;\ ^{1}\dot{\omega}_1 = {}^{1}_{0}R\,^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.619}$$

Doğrusal ivme:

$$\begin{aligned} ^{1}\dot{v}_1 = {}^{1}_{0}R\left[\,^{0}\dot{\omega}_0 \times {}^{0}P_1 + {}^{0}\omega_0 \times \left({}^{0}\omega_0 \times {}^{0}P_1\right) + {}^{0}\dot{v}_0\right] \\ + 2\,^{1}\omega_1 \times \dot{d}_1\,^{1}Z_1 + \ddot{d}_1\,^{1}Z_1 = \left[0 \quad g \quad \ddot{d}_1\right]^T \end{aligned} \tag{3.620}$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi:

$$^{1}\dot{v}_{c_1} = {}^{1}\dot{\omega}_1 \times {}^{1}P_{c_1} + {}^{1}\omega_1 \times \left({}^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_{c_1}\right) + {}^{1}\dot{v}_1 = \left[0 \quad g \quad \ddot{d}_1\right]^T \tag{3.621}$$

Kuvvet vektörü:

$$^{1}F_1 = m_1\,^{1}\dot{v}_{c_1} = \left[0 \quad gm_1 \quad m_1\ddot{d}_1\right]^T \tag{3.622}$$

Moment vektörü:

$$^{1}N_1 = {}^{c_1}I_1\,^{1}\dot{\omega}_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{c_1}I_1\,^{1}\omega_1 = 0 \tag{3.623}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

Açısal hız ve ivme:

$$^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,^{1}\omega_1 = 0 \; ; \; ^{2}\dot{\omega}_2 = {}^{2}_{1}R\,^{1}\dot{\omega}_1 = 0 \tag{3.624}$$

Doğrusal ivme:

$$\begin{aligned} ^{2}\dot{v}_2 &= {}^{2}_{1}R\left[^{1}\dot{\omega}_1 \times {}^{1}P_2 + {}^{1}\omega_1 \times \left(^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_2 \right) + {}^{1}\dot{v}_1 \right] \\ &+ 2\,^{2}\omega_2 \times \dot{d}_2\,^{2}Z_2 + \ddot{d}_2\,^{2}Z_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{d}_1 & 0 & \ddot{d}_2 + g \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.625}$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi:

$$\begin{aligned} ^{2}\dot{v}_{c_2} &= {}^{2}\dot{\omega}_2 \times {}^{2}P_{c_2} + {}^{2}\omega_2 \times \left(^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_{c_2} \right) + {}^{2}\dot{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} -\ddot{d}_1 & 0 & \ddot{d}_2 + g \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.626}$$

Kuvvet vektörü:

$$^{2}F_2 = m_2\,^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -m_2\ddot{d}_1 & 0 & m_2\ddot{d}_2 + m_2 g \end{bmatrix}^T \tag{3.627}$$

Moment vektörü:

$$^{2}N_2 = {}^{c_2}I_2\,^{2}\dot{\omega}_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{c_2}I_2^{2}\omega_2 = 0 \tag{3.628}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

Açısal hız ve ivme:

$$^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,^{2}\omega_2 = 0 \; ; \; ^{3}\dot{\omega}_3 = {}^{3}_{2}R\,^{2}\dot{\omega}_2 = 0 \tag{3.629}$$

Doğrusal ivme:

$$\begin{aligned} ^{3}\dot{v}_3 &= {}^{3}_{2}R\left[^{2}\dot{\omega}_2 \times {}^{2}P_3 + {}^{2}\omega_2 \times \left(^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_3 \right) + {}^{2}\dot{v}_2 \right] \\ &+ 2\,^{3}\omega_3 \times \dot{d}_3\,^{3}Z_3 + \ddot{d}_3\,^{3}Z_3 = \begin{bmatrix} -\ddot{d}_1 & \ddot{d}_2 + g & \ddot{d}_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.630}$$

Kütle merkezinin doğrusal ivmesi:

$$\begin{aligned} {}^{3}\dot{v}_{c_3} &= {}^{3}\dot{\omega}_3 \times {}^{3}P_{c_3} + {}^{3}\omega_3 \times \left({}^{3}\omega_3 \times {}^{3}P_{c_3} \right) + {}^{3}\dot{v}_3 \\ &= \begin{bmatrix} -\ddot{d}_1 & \ddot{d}_2 + g & \ddot{d}_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.631}$$

Kuvvet vektörü:

$${}^{3}F_3 = m_3 {}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} -m_3\ddot{d}_1 & m_3\ddot{d}_2 + m_3 g & m_3\ddot{d}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.632}$$

Moment vektörü:

$${}^{3}N_3 = {}^{c_3}I_3 {}^{3}\dot{\omega}_3 + {}^{3}\omega_3 \times {}^{c_3}I_3^3 \omega_3 = 0 \tag{3.633}$$

İçe dönük ardışık denklemler:

Robot manipulatörü uzayda serbestçe hareket ettiğinden ${}^{4}f_4 = 0$ ve ${}^{4}n_4 = 0$'dır.

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$${}^{3}f_3 = {}_{4}^{3}R\, {}^{4}f_4 + {}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} -m_3\ddot{d}_1 & m_3\left(\ddot{d}_2 + g\right) & m_3\ddot{d}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.634}$$

$$\begin{aligned} {}^{3}n_3 &= {}^{3}N_3 + {}_{4}^{3}R\, {}^{4}n_4 + {}^{3}P_{c_3} \times {}^{3}F_3 + {}^{3}P_4 \times {}_{4}^{3}R\, {}^{4}f_4 \\ &= \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\ddot{d}_2 + g\right) & \tfrac{1}{2}l_3 m_3 \ddot{d}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.635}$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$${}^{2}f_2 = {}_{3}^{2}R\, {}^{3}f_3 + {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{d}_1\left(m_2 + m_3\right) & -\ddot{d}_3 m_3 & \left(m_2 + m_3\right)\left(\ddot{d}_2 + g\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.636}$$

$$\begin{aligned} {}^{2}n_2 &= {}^{2}N_2 + {}_{3}^{2}R\, {}^{3}n_3 + {}^{2}P_{c_2} \times {}^{2}F_2 + {}^{2}P_3 \times {}_{3}^{2}R\, {}^{3}f_3 \\ &= \begin{bmatrix} \left(\tfrac{1}{2}l_2 m_3 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\right)\left(\ddot{d}_2 + g\right) & \tfrac{1}{2}l_2 m_2 \ddot{d}_1 & \tfrac{1}{2}m_3\left(l_2 + l_3\right)\ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.637}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$\begin{aligned} {}^{1}f_1 &= {}^{1}_{2}R_2 f^2 + {}^{1}F_1 \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{d}_3 m_3 & gm_1 + (m_2+m_3)(\ddot{d}_2+g) & (m_1+m_2+m_3)\ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.638}$$

$$\begin{aligned} {}^{1}n_1 &= {}^{1}N_1 + {}^{1}_{2}R\,{}^{2}n_2 + {}^{1}P_{c_1} \times {}^{1}F_1 + {}^{1}P_2 \times {}^{1}_{2}R\,{}^{2}f_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}gl_1m_1 - \frac{1}{2}l_2m_2\ddot{d}_1 \\ \left(\frac{1}{2}(l_2m_3+l_3m_3)+\frac{1}{2}l_1(m_2+m_3)\right)\ddot{d}_1 \\ -\left(\frac{1}{2}l_2m_3+\frac{1}{2}l_3m_3\right)(\ddot{d}_2+g)-\frac{1}{2}l_1(m_2+m_3)(\ddot{d}_2+g) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.639}$$

Her bir ekleme etki eden tork:

$$\tau_1 = {}^{1}f_1^T \hat{Z}_1 = (m_1+m_2+m_3)\ddot{d}_1 \tag{3.640}$$

$$\tau_2 = {}^{2}f_2^T \hat{Z}_2 = (m_2+m_3)(\ddot{d}_2+g) \tag{3.641}$$

$$\tau_3 = {}^{3}f_3^T \hat{Z}_3 = m_3\ddot{d}_3 \tag{3.642}$$

Sonuç olarak SS robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.47, 3.48 ve 3.49 da görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.640, 3.641 ve 3.642'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.2. SC robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

SC robotunun her bir bağının kütle merkezi, kendi koordinat sistemlerine göre, aşağıdaki gibi olur.

$${}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}l_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}l_2 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.643}$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$${}^{0}\omega_0 = 0 \; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.644}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$${}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.645}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$${}^{1}\omega_1 = 0 \; ; \; {}^{1}\dot{\omega}_1 = 0 \tag{3.646}$$

$${}^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.647}$$

$${}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.648}$$

$${}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_1\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.649}$$

$${}^{1}N_1 = 0 \tag{3.650}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$${}^{2}\omega_2 = 0 \; ; \; {}^{2}\dot{\omega}_2 = 0 \tag{3.651}$$

$${}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -g - \ddot{d}_1 & \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.652}$$

$${}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & -g - \ddot{d}_1 & \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.653}$$

$${}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -m_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) & m_2\ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.654}$$

$${}^{2}N_2 = 0 \tag{3.655}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$${}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.656}$$

$${}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) & -\mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) & \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.657}$$

$${}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) & \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) & \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.658}$$

$${}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} -m_3\left(\mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) + \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 \right) & m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) \right) & m_3\ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.659}$$

$$^{3}N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz3}\ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.660}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = \ ^{3}F_3 \tag{3.661}$$

$$^{3}n_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}l_3m_3\ddot{d}_2 & I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.662}$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{2}f_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) & ^{2}f_{2(2,1)} & \left(m_2+m_3\right)\ddot{d}_2 \end{bmatrix} \tag{3.663}$$

Matriste,

$$^{2}f_{2(2,1)} = -\left(m_2+m_3\right)\left(g+\ddot{d}_1\right) - \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)$$

$$^{2}n_2 = \begin{bmatrix} m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_2 + \tfrac{1}{2}d_2l_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right) + \left(d_2m_3 + \tfrac{1}{2}m_2l_2\right)\left(g+\ddot{d}_1\right) \\ -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_2 + d_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + d_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right) \\ -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\ddot{d}_1+g\right) - \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3\right) + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{3.664}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{1}f_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \\ \left(m_2+m_3\right)\ddot{d}_2 \\ \left(m_1+m_2+m_3\right)\left(g+\ddot{d}_1\right) + \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \end{bmatrix} \tag{3.665}$$

$$^{1}n_1 = \begin{bmatrix} ^{1}n_{1(1,1)} \\ -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\left(g+\ddot{d}_1\right) - \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3\right) + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 \\ m_3\left(d_2l_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.666}$$

Matriste,

$$^{1}n_{1(1,1)} = \left(m_2\left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right) + \tfrac{1}{2}l_1m_1 + 2d_2m_3\right)\left(g+\ddot{d}_1\right) + \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_2 + 2d_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right)$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)(g + \ddot{d}_1) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 (s_3 \dot{\theta}_3^2 - c_3 \ddot{\theta}_3) \tag{3.667}$$

$$\tau_2 = (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \tag{3.668}$$

$$\tau_3 = m_3 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 \ddot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2} l_3 c_3 (g + \ddot{d}_1) \right) + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 \tag{3.669}$$

Sonuç olarak SC robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.85, 3.86 ve 3.87'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.667, 3.668 ve 3.669'da görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.3. CS robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

CS robotunun her bir bağının kütle merkezi, kendi koordinat sistemlerine göre, aşağıdaki gibi olur.

$${}^1P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tfrac{1}{2} l_2 \end{bmatrix}^T \quad {}^2P_{c_2} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^3P_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} l_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.670}$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$${}^0\omega_0 = 0 \; ; \; {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.671}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$${}^0\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.672}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.673}$$

$${}^1\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.674}$$

$${}^1\dot{v}_{c_1} = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.675}$$

$${}^1F_1 = [0 \quad 0 \quad gm_1]^T \tag{3.676}$$

$$^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.677}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T ;\ ^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.678}$$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.679}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_1 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.680}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1 m_2\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_1 m_2\ddot{\theta}_1 & m_2\left(g + \ddot{d}_2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.681}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.682}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T ;\ ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.683}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_1\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1^2 + d_3\ddot{\theta}_1 & g + \ddot{d}_2 & \ddot{d}_3 - d_3\dot{\theta}_1^2 - l_1\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.684}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} ^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} & g + \ddot{d}_2 & \ddot{d}_3 - l_1\ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3 \right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.685}$$

Matriste,

$$^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} = \left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1 \right)\dot{\theta}_1 + \left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3 \right)\ddot{\theta}_1$$

$$^{3}F_3 = \begin{bmatrix} ^{3}F_{3(1,1)} & m_3\left(g + \ddot{d}_2 \right) & m_3\left(\ddot{d}_3 - l_1\ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3 \right)\dot{\theta}_1^2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.686}$$

Matriste,

$$^{3}F_{3(1,1)} = m_3\left(\left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1 \right)\dot{\theta}_1 + \left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3 \right)\ddot{\theta}_1 \right)$$

$$^{3}N_3 = \begin{bmatrix} 0 & I_{yy3}\ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.687}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.688}$$

$$ {}^3n_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3m_3\left(g+\ddot{d}_2\right) & I_{yy3}\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}l_3m_3\left(\left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1 + \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.689} $$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^2f_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1m_2\dot{\theta}_1^2 + m_3\left(\left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1 + \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \\ \frac{1}{2}l_1m_2\ddot{\theta}_1 - m_3\left(\ddot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_1^2 - l_1\ddot{\theta}_1\right) \\ \left(m_2+m_3\right)\left(g+\ddot{d}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.690} $$

$$ {}^2n_2 = \begin{bmatrix} m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\left(g+\ddot{d}_2\right) & -\left(\frac{1}{2}l_1m_2 + l_1m_3\right)\left(g+\ddot{d}_2\right) & {}^2n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.691} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^2n_{2(1,3)} = {} & m_3\left(\left(2d_3 - l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 - l_1\ddot{d}_3 + \left(d_3^2 - d_3l_3 + \frac{1}{4}l_3^2 + l_1^2\right)\ddot{\theta}_1\right) \\ & + \left(\frac{1}{4}l_1^2m_2 + I_{yy3} + I_{zz2}\right)\ddot{\theta}_1 \end{aligned} $$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^1f_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1m_2\dot{\theta}_1^2 + m_3\left(\left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1 + \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \\ \frac{1}{2}l_1m_2\ddot{\theta}_1 - m_3\left(\ddot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_1^2 - l_1\ddot{\theta}_1\right) \\ gm_1 + \left(m_2+m_3\right)\left(g+\ddot{d}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.692} $$

$$ {}^1n_1 = \begin{bmatrix} m_3\left(\left(g+\ddot{d}_2 + d_2\dot{\theta}_1^2\right)\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right) + d_2\left(\ddot{d}_3 - l_1\ddot{\theta}_1\right)\right) - \frac{1}{2}d_2l_1m_2\ddot{\theta}_1 \\ {}^1n_{1(2,1)} \\ {}^1n_{1(3,1)} \end{bmatrix} \tag{3.693} $$

Matriste,

$$ {}^1n_{1(3,1)} = m_3\left(\left(2d_3 - l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 - l_1\ddot{d}_3 + \left(d_3^2 + l_1^2 + \frac{1}{4}l_3^2 - d_3l_3\right)\ddot{\theta}_1\right) + \left(I_{zz1} + \frac{1}{4}l_1^2m_2 + I_{yy3} + I_{zz2}\right)\ddot{\theta}_1 $$

$$ {}^1n_{1(2,1)} = m_3\left(\left(2\dot{d}_3 - l_1\dot{\theta}_1\right)d_2\dot{\theta}_1 - l_1\left(\ddot{d}_2 + g\right) + \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)d_2\ddot{\theta}_1\right) - \frac{1}{2}l_1m_2\left(\ddot{d}_2 + d_2\dot{\theta}_1^2 + g\right) $$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$ \tau_1 = m_3\left(\left(2d_3 - l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 - l_1\ddot{d}_3 + \left(d_3^2 + l_1^2 + \frac{1}{4}l_3^2 - d_3l_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \tag{3.694} $$

$$+\left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{yy3} + I_{zz2} \right) \ddot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \left(m_2 + m_3 \right)\left(g + \ddot{d}_2 \right) \qquad (3.695)$$

$$\tau_3 = m_3 \left(\ddot{d}_3 - l_1 \ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \right) \qquad (3.696)$$

Sonuç olarak CS robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.122, 3.123 ve 3.124'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.694, 3.695 ve 3.696'da görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.4. CC robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

CC robotunun her bir bağının kütle merkezi, kendi koordinat sistemlerine göre, aşağıdaki gibi olur.

$${}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tfrac{1}{2} h_1 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (3.697)$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$${}^{0}\omega_0 = 0 \;;\; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \qquad (3.698)$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$${}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \qquad (3.699)$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$${}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \;;\; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \qquad (3.700)$$

$${}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \qquad (3.701)$$

$${}^{1}\dot{v}_{c_1} = [0 \quad 0 \quad 0]^T \qquad (3.702)$$

$${}^{1}F_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \qquad (3.703)$$

$$^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.704}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; ^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.705}$$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.706}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_1 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.707}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_2 m_2\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_2 m_2\ddot{\theta}_1 & m_2\left(g + \ddot{d}_2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.708}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.709}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \; ; \; ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.710}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} l_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1^2 & l_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + l_2\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.711}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} -l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2 \right) - l_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ \tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \right) + l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \tag{3.712}$$

$$^{3}F_3 = \begin{bmatrix} -m_3\left(l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2 \right) + l_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 \right) \right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \right) + l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 \right) \right) \\ m_3\left(g + \ddot{d}_2 \right) \end{bmatrix} \tag{3.713}$$

$$^{3}N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.714}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.715}$$

$$^{3}n_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(g + \ddot{d}_2 \right) & ^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.716}$$

Matriste,

$$ {}^{3}n_{3(1,3)} = I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1\right) + \tfrac{1}{2} l_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right) $$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}f_2 = \begin{bmatrix} -m_3\left(\left(l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3 + l_2\dot{\theta}_1\right)\dot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) + \mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right)\right) - \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \\ -m_3\left(l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - l_2\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right)\right) + \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \\ \left(m_2 + m_3\right)\left(g + \ddot{d}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.717} $$

$$ {}^{2}n_2 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) & -\left(g + \ddot{d}_2\right)\left(m_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\right) + \tfrac{1}{2} l_2 m_2\right) & {}^{2}n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.718} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^{2}n_{2(1,3)} = {} & l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_3\right) - \mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)\right) + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \\ & + \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2\right) + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_1 \end{aligned} $$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}f_1 = \begin{bmatrix} -m_3\left(l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + l_2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_1^2\right) + \mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right)\right) - \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \\ -m_3\left(l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - l_2\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right) + \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \\ \left(m_2 + m_3\right)\left(g + \ddot{d}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.719} $$

$$ {}^{1}n_1 = \begin{bmatrix} {}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.720} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^{1}n_{1(1,1)} = {} & -d_2\left(\tfrac{1}{2} l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 - m_3\left(l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - l_2\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right)\right)\right) \\ & + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) \\ {}^{1}n_{1(1,2)} = {} & d_2\left(-\tfrac{1}{2} l_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 - m_3\left(\left(l_2\dot{\theta}_1 + l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3\right)\dot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) + \mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right)\right)\right) \\ & -\left(g + \ddot{d}_2\right)\left(\tfrac{1}{2} l_2 m_2 + m_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right) \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,3)} &= I_{zz1}\ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 + l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_3\right) - \mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2\right)\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= I_{zz1}\ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 + l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_3\right) - \mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2\right)\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
\tag{3.721}
$$

$$
\tau_2 = (m_2 + m_3)(g + \ddot{d}_2) \tag{3.722}
$$

$$
\tau_3 = I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1\right) + \tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3\right)\right) \tag{3.723}
$$

Sonuç olarak CC robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.160, 3.161 ve 3.162'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.721, 3.722 ve 3.723'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.5. SN robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

SN robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}d_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}l_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.724}
$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$
{}^{0}\omega_0 = 0 \; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.725}
$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$
{}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.726}
$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.727} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.728} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.729} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_1\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.730} $$

$$ {}^{1}N_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{3.731} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.732} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) & -\mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.733} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) & \tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.734} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) & m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.735} $$

$$ {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.736} $$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2 & \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2 & \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.737} $$

$$ {}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} {}^{3}\dot{v}_{3(1,1)} & -\mathrm{s}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) & \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) - l_2\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.738} $$

Matriste,

$$ {}^{3}\dot{v}_{3(1,1)} = \mathrm{c}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) $$

$$ {}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{c}_3^2\,\dot{\theta}_2^2 \right) \\ \tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2 \right) - \mathrm{s}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right)\right) \\ \tfrac{1}{2}l_3\left(2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 \right) - l_2\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix} \tag{3.739} $$

$$ {}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(\mathrm{c}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{c}_3^2\,\dot{\theta}_2^2\right)\right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{s}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right)\right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(2\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right) - l_2\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.740} $$

$$ {}^{3}N_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(I_{zz3} - I_{yy3} + I_{xx3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_2 \\ \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{zz3} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_2 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.741} $$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.742} $$

$$ {}^{3}n_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 & {}^{3}n_{3(1,2)} & {}^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.743} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^{3}n_{3(1,2)} &= -\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right) - l_2\dot{\theta}_2^2 + \tfrac{1}{2}l_3\left(2\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right)\right) \\ &\quad + \mathrm{c}_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ {}^{3}n_{3(1,3)} &= \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{s}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right)\right) \\ &\quad + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} $$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}f_2 = \begin{bmatrix} {}^{2}f_{2(1,1)} & {}^{2}f_{2(1,2)} & \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.744} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^{2}f_{2(1,1)} &= m_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(\ddot{d}_1 + g\right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right) + m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \\ {}^{2}f_{2(1,2)} &= m_3\left(l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(\ddot{d}_1 + g\right) + l_3\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\right) + m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \end{aligned} $$

$$ {}^{2}n_2 = \begin{bmatrix} {}^{2}n_{2(1,1)} & {}^{2}n_{2(1,2)} & {}^{2}n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.745} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^{2}n_{2(1,1)} &= \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\left(\ddot{d}_1 + g\right)\right) + \tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_3^2 - \dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}l_3^2m_3\left(\mathrm{s}_3^2\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2\right) + \left(\left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \end{aligned} $$

$$ {}^2n_{2(1,2)} = -\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{s}_2\left(\ddot{d}_1+g\right)-l_2\ddot{\theta}_2\right)-\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_2^2 $$

$$ \begin{aligned} {}^2n_{2(1,3)} = &-\left(\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+l_2m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\left(g+\ddot{d}_1\right)+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ &+\left(\mathrm{c}_3^2\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}+I_{zz2}+l_2^2m_3+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2\right)\ddot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \end{aligned} $$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^1f_1 = \begin{bmatrix} {}^1f_{1(1,1)} & \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2\right) & {}^1f_{1(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.746} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^1f_{1(1,1)} = &-\mathrm{s}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2-\mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right)+\mathrm{c}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \\ &+\mathrm{c}_2\,m_3\left(l_2\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)-\tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\right)\right) \\ &-\mathrm{s}_2\,m_3\left(\left(l_2\dot{\theta}_2^2-\mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right)+l_3\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\right) \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}^1f_{1(1,3)} = &\,m_1\left(g+\ddot{d}_1\right)-\mathrm{c}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2-\mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right)-\mathrm{s}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)\right) \\ &-\mathrm{s}_2\,m_3\left(l_2\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)-\tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\right)\right) \\ &-\mathrm{c}_2\,m_3\left(l_2\dot{\theta}_2^2-\mathrm{c}_2\left(g+\ddot{d}_1\right)+l_3\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\right) \end{aligned} $$

$$ {}^1n_1 = \begin{bmatrix} {}^1n_{1(1,1)} & {}^1n_{1(1,2)} & {}^1n_{1(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.747} $$

Matriste,

$$ \begin{aligned} {}^1n_{1(1,1)} = &\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_2^2+\left(\mathrm{s}_2\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{s}_3+\tfrac{1}{4}l_3^2\right)+I_{zz3}\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_3 \\ &+g\left(\tfrac{1}{2}d_2m_1+d_2m_2+m_3\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right)\right)+\left(\tfrac{1}{2}d_2m_1+d_2m_2+m_3\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right)\right)\ddot{d}_1 \\ &+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2+\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right)\right)\dot{\theta}_3^2-m_3\left(\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_2 \\ &+\left(\mathrm{c}_2\left(d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3+I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_3^2+\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\right)\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ &+\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2+d_2l_2m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\ &-\left(\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\,\mathrm{c}_2+m_3\left(\mathrm{c}_2\left(d_2l_2+\tfrac{1}{2}l_2l_3\,\mathrm{s}_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\right)\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}^1n_{1(1,2)} = &-\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3+\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+l_2m_3\right)\right)\ddot{d}_1+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ &-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3+I_{zz2}+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}+\mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\ &-g\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3+\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+l_2m_3\right)\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,3)} = & \left(\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - \mathrm{c}_2\left(d_2 l_2 m_3 + \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 + \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(d_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\right)\dot{\theta}_3^2 \\
& + \left(\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 + m_3\left(d_2 l_2 + \tfrac{1}{2}l_2 l_3\,\mathrm{s}_3\right)\right) + \tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\right)\dot{\theta}_2^2 \\
& - \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(d_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 + l_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right) + \mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\right)\ddot{\theta}_3 \\
& - \mathrm{s}_2\left(I_{zz3} + \tfrac{1}{2}l_3^2 m_3\,\mathrm{s}_3^2 + d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 + \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = & \, m_1\left(g + \ddot{d}_1\right) - \mathrm{c}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1\right)\right) - \mathrm{s}_2\,m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1\right)\right) \\
& - \mathrm{s}_2\,m_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1\right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right)\right)\right) \\
& - \mathrm{c}_2\,m_3\left(l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2\left(g + \ddot{d}_1\right) + l_3\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.748}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = & \, 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \\
& + \left(\mathrm{c}_3^2\left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + I_{zz2} + l_2^2 m_3 + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2\right)\ddot{\theta}_2 \\
& - \left(\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + l_2 m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\left(g + \ddot{d}_1\right)
\end{aligned}
\tag{3.749}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 = & \, \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{s}_3\left(l_2\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\left(g + \ddot{d}_1\right)\right)\right) \\
& + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_2^2
\end{aligned}
\tag{3.750}
$$

Sonuç olarak SN robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.198, 3.199 ve 3.200’de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.748, 3.749 ve 3.750’de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.6. NS robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

NS robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tfrac{1}{2}h_1 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}d_2 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}l_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.751}
$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$
{}^{0}\omega_0 = 0\;;\;{}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.752}
$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.753} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.754} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.755} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.756} $$

$$ {}^{1}F_1 = [0 \quad 0 \quad g m_1]^T \tag{3.757} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.758} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.759} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\, g + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 & g\,\mathrm{c}_2 - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & -d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.760} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\, g + \tfrac{1}{2} d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\, g - \tfrac{1}{2} d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & -\tfrac{1}{2} d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.761} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2\left(\mathrm{s}_2\, g + \tfrac{1}{2} d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) & m_2\left(\mathrm{c}_2\, g - \tfrac{1}{2} d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) & -\tfrac{1}{2} d_2 m_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.762} $$

$$ {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2} + I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\, I_{xx2}\ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\, I_{yy2}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz2}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.763} $$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_2 & \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & -\ddot{\theta}_2 & \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.764} $$

$$ {}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\, g - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 - d_3\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\left(d_2\ddot{\theta}_1 + d_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\ d_2\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + d_3\ddot{\theta}_1\right) - 2d_3\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ g\,\mathrm{c}_2 + \ddot{d}_3 - d_3\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{s}_2\, d_2\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2^2\, d_3\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.765} $$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} s_2\, g - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2 + d_2\, c_2\, \ddot{\theta}_1 + c_2\, s_2 \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\ c_2\,(l_3 - 2d_3)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 2\, s_2\, \dot{d}_3\dot{\theta}_1 + d_2\dot{\theta}_1^2 + s_2\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1 \\ c_2\, g + \ddot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_2^2 - d_2\, s_2\, \ddot{\theta}_1 - s_2^2\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.766}
$$

$$
{}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(s_2\, g - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2 + d_2\, c_2\, \ddot{\theta}_1 + c_2\, s_2 \left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\ m_3\left(c_2\,(l_3 - 2d_3)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 2\, s_2\, \dot{d}_3\dot{\theta}_1 + d_2\dot{\theta}_1^2 + s_2\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \\ m_3\left(c_2\, g + \ddot{d}_3 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_2^2 - d_2\, s_2\, \ddot{\theta}_1 - s_2^2\left(d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \end{bmatrix} \tag{3.767}
$$

$$
{}^{3}N_3 = \begin{bmatrix} c_2\left(I_{xx3} + I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + s_2\, I_{xx3}\ddot{\theta}_1 \\ c_2\, s_2\left(I_{xx3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2 - I_{yy3}\ddot{\theta}_2 \\ s_2\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + c_2\, I_{zz3}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.768}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.769}
$$

$$
{}^{3}n_3 = \begin{bmatrix} {}^{3}n_{3(1,1)} & {}^{3}n_{3(1,2)} & c_2\, I_{zz3}\ddot{\theta}_1 + s_2\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.770}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,1)} &= \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(d_2\dot{\theta}_1^2 - 2\, s_2\, \dot{\theta}_1\dot{d}_3 + c_2\left(l_3 - 2d_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + s_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \\
&\quad + s_2\, I_{xx3}\ddot{\theta}_1 + c_2\left(I_{xx3} + I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
{}^{3}n_{3(1,2)} &= -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(s_2\, g - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + d_2\, c_2\, \ddot{\theta}_1 + c_2\, s_2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad - I_{yy3}\ddot{\theta}_2 + c_2\, s_2\left(I_{xx3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_2 = \begin{bmatrix} {}^{2}f_{2(1,1)} & {}^{2}f_{2(1,2)} & {}^{2}f_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.771}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,1)} &= m_3\left(s_2\, g - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + d_2\, c_2\, \ddot{\theta}_1 + c_2\, s_2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad + m_2\left(s_2\, g + \tfrac{1}{2}d_2\, c_2\, \ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{2}f_{2(1,2)} &= m_3\left(c_2\, g + \ddot{d}_3 - d_2\, s_2\, \ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\dot{\theta}_2^2 - s_2^2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad + m_2\left(c_2\, g - \tfrac{1}{2}d_2\, s_2\, \ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{2}f_{2(1,3)} &= -\tfrac{1}{2}d_2 m_2\dot{\theta}_1^2 - m_3\left(-2\, s_2\, \dot{d}_3\dot{\theta}_1 + d_2\dot{\theta}_1^2 + c_2\left(l_3 - 2d_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + s_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$^{2}n_2 = \left[{}^{2}n_{2(1,1)} \quad {}^{2}n_{2(1,2)} \quad {}^{2}n_{2(1,3)} \right]^T \tag{3.772}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} &= \left(\tfrac{1}{2}l_3m_3 - d_3m_3\right)\left(d_2\dot{\theta}_1^2 - 2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + \mathrm{c}_2\left(l_3 - 2d_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \\
&\quad + \mathrm{c}_2\left(\left(I_{xx2} - I_{yy2} + I_{zz2}\right) + \left(I_{xx3} + I_{yy3} - I_{zz3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad + \mathrm{s}_2\left(I_{xx2} + I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}d_2m_2\left(\mathrm{c}_2\,g - \tfrac{1}{2}d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{2}n_{2(1,2)} &= \mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz2} + I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\left(I_{yy2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}d_2m_2\left(g\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{2}n_{2(1,3)} &= \left(\tfrac{1}{2}l_3m_3 - d_3m_3\right)\left(g\,\mathrm{s}_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3 + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\dot{\theta}_1^2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad + \left(I_{yy3} + I_{zz2}\right)\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{1}f_1 = \left[{}^{1}f_{1(1,1)} \quad {}^{1}f_{1(1,2)} \quad {}^{1}f_{1(1,3)} \right]^T \tag{3.773}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} &= d_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\ddot{\theta}_1 - 2m_3\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2\dot{d}_3 - m_3\,\mathrm{s}_2\left(\ddot{d}_3 - d_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad - d_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2 + \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_2^2\right) \\
{}^{1}f_{1(1,2)} &= m_3\,\mathrm{c}_2\left(l_3 - 2d_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + d_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{\theta}_1^2 + m_3\,\mathrm{s}_2\left(\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_3\right) \\
{}^{1}f_{1(1,3)} &= g\left(m_1 + m_2 + m_3\right) + m_3\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{d}_3 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3\right)\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_2\right) - 2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_2\dot{d}_3\right)
\end{aligned}$$

$$^{1}n_1 = \left[{}^{1}n_{1(1,1)} \quad {}^{1}n_{1(1,2)} \quad {}^{1}n_{1(1,3)} \right]^T \tag{3.774}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2\right)\left(I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - g\left(\tfrac{1}{2}d_2m_2 + d_2m_3\right) \\
&\quad + m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(2d_3 - l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + d_2m_3\,\mathrm{c}_2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\left(\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad + \left(I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{zz3} + m_3\left(d_3^2 - d_3l_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left(\mathrm{c}_2^2\left(2d_3m_3\left(d_3 - l_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3^2m_3\right) + \left(I_{yy3} + I_{zz2}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad + d_2m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_3 - \tfrac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_2 - d_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\ddot{d}_3 + 2d_2m_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_2\dot{d}_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,2)} &= (\, l_3 m_3 - 2d_3 m_3 \,)\dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + \left(\, d_3 l_3 m_3 - d_3^2 m_3 - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} - I_{zz2} \,\right)\ddot{\theta}_2 \\
&+ \left(\, m_3 \left(\, d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 - d_3 l_3 \,\right) + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} - I_{zz3} \,\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+ \left(\, d_2 d_3 m_3 \,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_2 \,\right)\ddot{\theta}_1 + g\left(\, d_3 m_3 \,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{s}_2 \,\right) \\
{}^{1}n_{1(1,3)} &= 2\,\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\, m_3 \left(\, d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 - d_3 l_3 \,\right) + I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz3} + I_{xx3} \,\right)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
&+ d_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 \left(\, \tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \,\right)\ddot{\theta}_2 - d_2 m_3 \,\mathrm{s}_2 \,\ddot{d}_3 + d_2 m_3 \,\mathrm{s}_2 \left(\, d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \,\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&+ \left(\, I_{zz1} + \mathrm{c}_2^2 \left(\, I_{yy2} + I_{zz3} \,\right) + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_2 + d_2^2 m_3 \,\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+ \mathrm{s}_2^2 \left(\, m_3 \left(\, d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \,\right) + I_{xx2} + I_{xx3} \,\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+ \mathrm{s}_2^2 \left(\, 2 d_3 m_3 - l_3 m_3 \,\right)\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 - 2 d_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 \,\dot{\theta}_2 \dot{d}_3
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= 2\,\mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\, m_3 \left(\, d_3^2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 - d_3 l_3 \,\right) + I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz3} + I_{xx3} \,\right)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
&+ d_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 \left(\, \tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \,\right)\ddot{\theta}_2 - d_2 m_3 \,\mathrm{s}_2 \,\ddot{d}_3 + d_2 m_3 \,\mathrm{s}_2 \left(\, d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \,\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&+ \left(\, I_{zz1} + \mathrm{c}_2^2 \left(\, I_{yy2} + I_{zz3} \,\right) + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_2 + d_2^2 m_3 \,\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+ \mathrm{s}_2^2 \left(\, m_3 \left(\, d_3^2 - d_3 l_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 \,\right) + I_{xx2} + I_{xx3} \,\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+ \mathrm{s}_2^2 \left(\, 2 d_3 m_3 - l_3 m_3 \,\right)\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 - 2 d_2 m_3 \,\mathrm{c}_2 \,\dot{\theta}_2 \dot{d}_3
\end{aligned}
\tag{3.775}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \left(\, \tfrac{1}{2} l_3 m_3 - d_3 m_3 \,\right)\left(\, g\,\mathrm{s}_2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + d_2 \,\mathrm{c}_2 \,\ddot{\theta}_1 + \mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\, d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \,\right)\dot{\theta}_1^2 \,\right) \\
&+ \left(\, I_{yy3} + I_{zz2} \,\right)\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2 \,\mathrm{s}_2 \left(\, I_{yy2} - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{zz3} \,\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+ \left(\, \tfrac{1}{2} l_3 m_3 - d_3 m_3 \,\right)\left(\, \tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \,\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned}
\tag{3.776}
$$

$$
\tau_3 = m_3 \left(\, \mathrm{c}_2\, g + \ddot{d}_3 + \left(\, \tfrac{1}{2} l_3 - d_3 \,\right)\dot{\theta}_2^2 - d_2 \,\mathrm{s}_2 \,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2^2 \left(\, d_3 - \tfrac{1}{2} l_3 \,\right)\dot{\theta}_1^2 \,\right) \tag{3.777}
$$

Sonuç olarak NS robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.235, 3.236 ve 3.237’de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.775, 3.776 ve 3.777’de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.7. SR robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

SR robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{1}P_{c_1} = \left[\, \tfrac{1}{2} l_1 \quad 0 \quad 0 \,\right]^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \left[\, \tfrac{1}{2} l_2 \quad 0 \quad 0 \,\right]^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \left[\, \tfrac{1}{2} l_3 \quad 0 \quad 0 \,\right]^T \tag{3.778}
$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$^{0}\omega_0 = 0 \text{ ; } ^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.779}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.780}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{1}\omega_1 = 0 \text{ ; } ^{1}\dot{\omega}_1 = 0 \tag{3.781}$$

$$^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.782}$$

$$^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.783}$$

$$^{1}F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_1\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.784}$$

$$^{1}N_1 = 0 \tag{3.785}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \text{ ; } ^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.786}$$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.787}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2^2 & \tfrac{1}{2} l_2 \ddot{\theta}_2 & g + \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.788}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 & \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 & m_2\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.789}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2} \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.790}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \text{ ; } ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.791}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \left[l_2\left(s_3\ddot{\theta}_2 - c_3\dot{\theta}_2^2 \right) \quad l_2\left(s_3\dot{\theta}_2^2 + c_3\ddot{\theta}_2 \right) \quad g + \ddot{d}_1 \right]^T \tag{3.792}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \left[{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} \quad \tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) + l_2\left(s_3\dot{\theta}_2^2 + c_3\ddot{\theta}_2 \right) \quad g + \ddot{d}_1 \right]^T \tag{3.793}$$

Matriste,

$$^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} = l_2\left(s_3\ddot{\theta}_2 - c_3\dot{\theta}_2^2 \right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2 \right)$$

$$^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(l_2\left(s_3\ddot{\theta}_2 - c_3\dot{\theta}_2^2 \right) - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2 \right)\right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) + l_2\left(s_3\dot{\theta}_2^2 + c_3\ddot{\theta}_2 \right)\right) \\ m_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix} \tag{3.794}$$

$$^{3}N_3 = \left[0 \quad 0 \quad I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) \right]^T \tag{3.795}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.796}$$

$$^{3}n_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) \\ I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) + l_2\left(s_3\dot{\theta}_2^2 + c_3\ddot{\theta}_2 \right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.797}$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{2}f_2 = \begin{bmatrix} -\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + l_2 m_3 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3 c_3 \right)\dot{\theta}_2^2 - \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(c_3\left(\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \right) + s_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right)\right) \\ \left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + l_2 m_3 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3 c_3 \right)\ddot{\theta}_2 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(c_3\ddot{\theta}_3 - s_3\left(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 - 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \right)\right) \\ \left(m_2 + m_3 \right)\left(g + \ddot{d}_1 \right) \end{bmatrix} \tag{3.798}$$

$$^{2}n_2 = \left[\tfrac{1}{2}l_3 m_3 s_3\left(g + \ddot{d}_1 \right) \quad -\left(g + \ddot{d}_1 \right)\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + m_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3 c_3 \right)\right) \quad {}^{2}n_{2(1,3)} \right]^T \tag{3.799}$$

Matriste,

$$\begin{aligned} ^{2}n_{2(1,3)} = &\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 c_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2 \right) + I_{zz3} \right)\ddot{\theta}_3 - l_2 l_3 m_3 s_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3 s_3\dot{\theta}_3^2 \\ &+ \left(m_3\left(l_2 l_3 c_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2 \right) + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3} \right)\ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{1}f_1 = \left[\, ^{1}f_{1(1,1)} \quad ^{1}f_{1(1,2)} \quad (m_1+m_2+m_3)\left(g+\ddot{d}_1\right) \right]^T \tag{3.800}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
^{1}f_{1(1,1)} &= -\mathrm{c}_{(2+3)}\left(l_3 m_3\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2\right)\right) - \mathrm{c}_2\, l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad - \mathrm{s}_2\, l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_{(2+3)}\left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right)\right) \\
^{1}f_{1(1,2)} &= l_2\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_2^2\right)\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right) \\
&\quad - l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2\right)
\end{aligned}$$

$$^{1}n_1 = \left[\left(g+\ddot{d}_1\right)\left(\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + l_2 m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right) \quad ^{1}n_{1(1,2)} \quad ^{1}n_{1(1,3)}\right]^T \tag{3.801}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
^{1}n_{1(1,2)} &= -\left(g+\ddot{d}_1\right)\left(\tfrac{1}{2}l_1 m_1 + m_2\left(l_1 + \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_2\right) + m_3\left(l_1 + l_2\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\right) \\
^{1}n_{1(1,3)} &= \left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + m_3\left(l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(l_2\,\mathrm{c}_3 + l_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right) + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_3 + l_1\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_3^2 + \left(l_1 l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right) + l_3 m_3\left(l_2\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_1\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad - \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 + l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \left(l_1 l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)(g + \ddot{d}_1) \tag{3.802}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \\
&\quad + \left(m_3\left(l_2 l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2\right) + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.803}$$

$$\tau_3 = I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right) + l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right)\right) \tag{3.804}$$

Sonuç olarak SR robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.273, 3.274, 3.275'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.802, 3.803, 3.804'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.8. RS robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

RS robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.805} $$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \ ; \ {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.806} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.807} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \ ; \ {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.808} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.809} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1^2 & \frac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_1 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.810} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 m_1\dot{\theta}_1^2 & \frac{1}{2}l_1 m_1\ddot{\theta}_1 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.811} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.812} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \ ; \ {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.813} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} l_1\left(\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) & l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) & g \end{bmatrix}^T \tag{3.814} $$

$$
{}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} l_1\left(s_2\,\ddot{\theta}_1 - c_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) - \frac{1}{2}l_2\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ l_1\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right) + \frac{1}{2}l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) \\ g \end{bmatrix} \tag{3.815}
$$

$$
{}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -l_2 m_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \right) - l_1 m_2\left(c_2\,\dot{\theta}_1^2 - s_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ \frac{1}{2}l_2 m_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) + l_1 m_2\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ g m_2 \end{bmatrix} \tag{3.816}
$$

$$
{}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.817}
$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix}^T \;;\; {}^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.818}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} l_1\left(s_2\,\ddot{\theta}_1 - c_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) - l_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ -l_2\left(\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \right) - l_1\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} \tag{3.819}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} l_1\left(s_2\,\ddot{\theta}_1 - c_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) - l_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ -l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) - l_1\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} \tag{3.820}
$$

$$
{}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(l_1\left(s_2\,\ddot{\theta}_1 - c_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) - l_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right)\right) \\ -m_3\left(l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) + l_1\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right)\right) \\ m_3\left(\ddot{d}_3 - g \right) \end{bmatrix} \tag{3.821}
$$

$$
{}^{3}N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.822}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.823}
$$

$$
{}^{3}n_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 m_3\left(l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) + l_1\left(s_2\,\dot{\theta}_1^2 + c_2\,\ddot{\theta}_1 \right)\right) \\ -\frac{1}{2}l_3 m_3\left(l_1\left(s_2\,\ddot{\theta}_1 - c_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) - l_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right)\right) \\ -I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix} \tag{3.824}
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_{2}=\begin{bmatrix} l_1\left(m_2+m_3\right)\left(\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1-\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right)-l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_1^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \\ l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+l_1\left(m_2+m_3\right)\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2+\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) \\ g\left(m_2+m_3\right)-m_3\ddot{d}_3 \end{bmatrix} \tag{3.825}
$$

$$
{}^{2}n_{2}=\begin{bmatrix} m_3\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\left(l_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2+\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right) & {}^{2}n_{2(1,2)} & {}^{2}n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.826}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,2)} &= m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3\right)\left(l_1\left(\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1-\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right)-l_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)\right) \\
&\quad -gl_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+l_2m_3\ddot{d}_3 \\
{}^{2}n_{2(1,3)} &= \left(I_{zz2}+I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+l_2l_1\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2+\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right)
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_{1}=\begin{bmatrix} {}^{1}f_{1(1,1)} & {}^{1}f_{1(1,2)} & g\left(m_1+m_2+m_3\right)-m_3\ddot{d}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.827}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} &= -l_2\,\mathrm{c}_2\left(m_2+2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-l_1\left(m_2+m_3+\tfrac{1}{2}m_1\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad -\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\left(l_2\,\mathrm{s}_2\left(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1\right)+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2^2+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\
{}^{1}f_{1(1,2)} &= -l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)+l_2\,\mathrm{c}_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad -l_2\,\mathrm{s}_2\left(m_2+2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+l_1\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}n_{1}=\begin{bmatrix} {}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.828}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= gl_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)-l_2m_3\,\mathrm{s}_2\,\ddot{d}_3+l_2m_3\,\mathrm{s}_2\left(l_3-2d_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad +\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\left(m_3\left(l_2\,\mathrm{c}_2+l_1\right)\ddot{\theta}_1-l_2m_3\left(\mathrm{s}_2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)-\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2\right)\right) \\
{}^{1}n_{1(1,2)} &= \left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\left(l_2m_3\left(\mathrm{s}_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\mathrm{c}_2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)\right)+l_1m_3\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad -g\left(l_1\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)+l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)+m_3\left(l_1+l_2\,\mathrm{c}_2\right)\ddot{d}_3 \\
&\quad +l_2m_3\,\mathrm{c}_2\left(2d_3-l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,3)} = &\left(l_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)+I_{zz2}+I_{zz3}+l_1^2m_2+l_1^2m_3\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)l_1l_2\,\mathrm{c}_2+l_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)+I_{zz2}+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&-l_1l_2\,\mathrm{s}_2\left(\left(2m_3+m_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2\right) \\
&+\left(l_1l_2\,\mathrm{c}_2\left(m_2+2m_3\right)+I_{zz1}+\tfrac{1}{4}l_1^2m_1\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = &\left(\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)l_1l_2\,\mathrm{c}_2+l_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)+I_{zz2}+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&+\left(l_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)+I_{zz2}+I_{zz3}+l_1^2m_2+l_1^2m_3\right)\ddot{\theta}_1 \\
&-l_1l_2\,\mathrm{s}_2\left(\left(2m_3+m_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\left(m_2\tfrac{1}{2}+m_3\right)\dot{\theta}_2^2\right) \\
&+\left(l_1l_2\,\mathrm{c}_2\left(m_2+2m_3\right)+I_{zz1}+\tfrac{1}{4}l_1^2m_1\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
\tag{3.829}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = &\left(I_{zz2}+I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) \\
&+l_2l_1\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2+\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right)
\end{aligned}
\tag{3.830}
$$

$$
\tau_3 = m_3\left(\ddot{d}_3-g\right) \tag{3.831}
$$

Sonuç olarak RS robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.310, 3.311, 3.312'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.829, 3.830 ve 3.831'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.9. CR robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

CR robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{1}P_{c_1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \tfrac{1}{2}h_1\end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2}=\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}l_2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3}=\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}l_3 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \tag{3.832}
$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$
{}^{0}\omega_0 = 0 \;\; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.833}
$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.834}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; ^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.835}$$

$$^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.836}$$

$$^{1}\dot{v}_{c_1} = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.837}$$

$$^{1}F_1 = [0 \quad 0 \quad gm_1]^T \tag{3.838}$$

$$^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.839}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; ^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.840}$$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.841}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_1^2 & \frac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_1 & g + \ddot{d}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.842}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2m_2\dot{\theta}_1^2 & \frac{1}{2}l_2m_2\ddot{\theta}_1 & m_2\left(g + \ddot{d}_2\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.843}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.844}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1 & \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \; ; \; ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 & \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.845}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) - \mathrm{c}_3\,l_2\dot{\theta}_1^2 & \mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) + l_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 & -l_2\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.846}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) - \frac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\left(l_2 + \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\ \mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) + \frac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\left(l_2 + \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\ l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - l_2\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.847}$$

$$
{}^{3}F_{3}=\begin{bmatrix} m_3\left(s_3\left(g+\ddot{d}_2\right)-\frac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2-c_3\left(l_2+\frac{1}{2}l_3\,c_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\ m_3\left(\frac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3+c_3\left(g+\ddot{d}_2\right)+s_3\left(l_2+\frac{1}{2}l_3\,c_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\ m_3\left(l_3\,s_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3-l_2\ddot{\theta}_1-\frac{1}{2}l_3\,c_3\,\ddot{\theta}_1\right) \end{bmatrix} \tag{3.848}
$$

$$
{}^{3}N_{3}=\begin{bmatrix} c_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+s_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 \\ s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+c_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.849}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_{3}={}^{3}F_{3} \tag{3.850}
$$

$$
{}^{3}n_{3}=\begin{bmatrix} I_{xx3}\,s_3\,\ddot{\theta}_1+c_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & {}^{3}n_{3(1,2)} & {}^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.851}
$$

Matriste,

$$
{}^{3}n_{3(1,2)}=\left(c_3\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\right)\ddot{\theta}_1+s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-I_{zz3}-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3
$$
$$
{}^{3}n_{3(1,3)}=\left(I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\ddot{\theta}_3+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(c_3\left(g+\ddot{d}_2\right)+l_2\,s_3\,\dot{\theta}_1^2\right)
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_{2}=\begin{bmatrix} -l_2\left(\frac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_1^2-\frac{1}{2}l_3m_3\left(c_3\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_3^2\right)+s_3\,\ddot{\theta}_3\right) \\ \left(l_2\left(\frac{1}{2}m_2+m_3\right)+\frac{1}{2}l_3m_3\,c_3\right)\ddot{\theta}_1-l_3m_3\,s_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\ \left(m_2+m_3\right)\left(g+\ddot{d}_2\right)-\frac{1}{2}l_3m_3\left(s_3\,\dot{\theta}_3^2-c_3\,\ddot{\theta}_3\right) \end{bmatrix} \tag{3.852}
$$

$$
{}^{2}n_{2}=\begin{bmatrix} {}^{2}n_{2(1,1)} & {}^{2}n_{2(1,2)} & {}^{2}n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.853}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)}&=\left(\left(c_3^2-s_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,s_3^2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
&\quad+\left(c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3\right)\ddot{\theta}_1\\
{}^{2}n_{2(1,2)}&=-\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3+\left(c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3\right)\dot{\theta}_1^2\\
&\quad+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(s_3\,\dot{\theta}_3^2-c_3\,\ddot{\theta}_3\right)-\left(g+\ddot{d}_2\right)\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_3+l_2m_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,3)} =& \left(I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3}\right) + I_{xx3}\,\mathrm{s}_3^2 + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + m_3\left(l_2^2 + l_2 l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right)\right) - l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\ -l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\ g m_1 + \left(m_2 + m_3\right)\left(g + \ddot{d}_2\right) - \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \end{bmatrix} \tag{3.854}
$$

$$
{}^{1}n_1 = \begin{bmatrix} {}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.855}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} =& \left(l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right) + I_{zz3} + \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
&-\left(d_2 l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(d_2\,\mathrm{c}_3 + l_2\,\mathrm{s}_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1 \\
{}^{1}n_{1(1,2)} =& \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(l_2\,\mathrm{s}_3 - d_2\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_3^2 - \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(d_2\,\mathrm{s}_3 + l_2\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_3\right) + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \\
&+\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right) - \tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&-\left(g + d_2\dot{\theta}_1^2 + \ddot{d}_2\right)\left(\tfrac{1}{2}l_2 m_2 + l_2 m_3 + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\right) \\
{}^{1}n_{1(1,3)} =& \left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + m_3\left(l_2^2 + l_2 l_3\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3}\right) + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + I_{zz1} + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 =& \left(I_{zz2} + \mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{yy3}\right) + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + I_{zz1} + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2\right)\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
&+m_3\left(l_2^2 + l_2 l_3\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.856}
$$

$$
\tau_2 = \left(g + \ddot{d}_2\right)\left(m_2 + m_3\right) - \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \tag{3.857}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 =& \left(I_{zz3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(g + \ddot{d}_2\right) + l_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right)
\end{aligned} \tag{3.858}
$$

Sonuç olarak CR robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.348, 3.349, 3.350'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.856, 3.857, 3.858'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.10. RC robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

RC robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}l_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}l_2 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.859} $$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \ ; \ {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.860} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.861} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \ ; \ {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.862} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.863} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_1^2 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.864} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_2 m_1\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}l_2 m_1\dot{\theta}_1^2 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.865} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.866} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \ ; \ {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.867} $$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g & -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\ddot{\theta}_1 & \ddot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.868}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} g & -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\ddot{\theta}_1 & \ddot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.869}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} gm_2 & -m_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\ddot{\theta}_1\right) & m_2\left(\ddot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\dot{\theta}_1^2\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.870}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2}\ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.871}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1 & -\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \;;\; ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & -\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.872}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{s}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1\right) \\ -g\,\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1\right) \\ \ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.873}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{s}_3\left((d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right) \\ \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - g\,\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_3\left((d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\right) \\ l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.874}$$

$$^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(g\,\mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{s}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - g\,\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\ m_3\left(l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1\right) \end{bmatrix} \tag{3.875}$$

$$^{3}N_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{zz3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{c}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - \mathrm{s}_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.876}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.877}$$

$$^{3}n_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 + \mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & ^{3}n_{3(1,2)} & ^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.878}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,2)} &= \mathrm{c}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-I_{zz3}-\tfrac{1}{2}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3-\mathrm{s}_3\, I_{yy3}\ddot{\theta}_1 \\
&\quad -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\ddot{d}_2-\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{3}n_{3(1,3)} &= \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3-g\,\mathrm{s}_3-\mathrm{c}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2+\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\
&\quad +I_{zz3}\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}f_2=\left[g\left(m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\quad {}^{2}f_{2(1,2)}\quad {}^{2}f_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.879}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,2)} &= -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\left(m_2+m_3\right)-\left(m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)+m_3\left(d_2+l_2\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2+\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2-\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \\
{}^{2}f_{2(1,3)} &= l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1\right)+\left(m_2+m_3\right)\ddot{d}_2 \\
&\quad -\left(m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)+m_3\left(d_2+l_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

$$ {}^{2}n_2=\left[{}^{2}n_{2(1,1)}\quad {}^{2}n_{2(1,2)}\quad {}^{2}n_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.880}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} &= -l_2 m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2-\left(\tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2+\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2-\mathrm{c}_3^2\, I_{xx3}-I_{xx2}-\mathrm{s}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad +\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(\ddot{d}_2-\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_1^2\right)-2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
{}^{2}n_{2(1,2)} &= \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3-I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1-\tfrac{1}{2}g l_2 m_2+\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_1^2-\ddot{d}_2\right) \\
&\quad -\left(\tfrac{1}{2}l_3^2 m_3\,\mathrm{c}_3^2+\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
{}^{2}n_{2(1,3)} &= -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_1+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad +\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3-l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{d}_2+\tfrac{1}{2}g\,\mathrm{s}_3\right)
\end{aligned}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}f_1=\left[{}^{1}f_{1(1,1)}\quad {}^{1}f_{1(1,2)}\quad g m_1+g\left(m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right]^T \tag{3.881}$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} &= 2\left(m_2+m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_2+\tfrac{1}{2}l_2m_1\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_3^2\right)-\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\\
&\quad+\left(m_3\left(d_2+l_2\right)+m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
{}^{1}f_{1(1,2)} &= \tfrac{1}{2}l_2m_1\dot{\theta}_1^2-\left(m_2+m_3\right)\ddot{d}_2-l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1\right)\\
&\quad+\left(m_3\left(d_2+l_2\right)+m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}n_1=\begin{bmatrix}{}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.882}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= g\left(\tfrac{1}{2}l_2\left(m_2-m_1\right)-\left(m_2+m_3\right)\left(d_2+l_2\right)\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&\quad-\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(d_2+l_2\right)\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\\
&\quad+\left(I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,\mathrm{c}_3^2+\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_2\\
{}^{1}n_{1(1,2)} &= \tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_1+l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}g\,\mathrm{s}_3+\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{d}_2\right)\\
&\quad-\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2\\
{}^{1}n_{1(1,3)} &= \left(d_2+l_2\right)\left(m_3\left(d_2+l_2\right)+m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)\right)\ddot{\theta}_1+\mathrm{s}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1\\
&\quad+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_2+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_3^2\\
&\quad+2\left(m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)+m_3\left(d_2+l_2\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_2-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad+\left(I_{zz1}-\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2+\tfrac{1}{4}l_2^2\left(m_1-m_2\right)+I_{xx2}+\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(d_2+l_2\right)\left(m_3\left(d_2+l_2\right)+m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)\right)\ddot{\theta}_1+\mathrm{s}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1\\
&\quad+\left(I_{zz1}-\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2+\tfrac{1}{4}l_2^2\left(m_1-m_2\right)+I_{xx2}+\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_2\\
&\quad+2\left(m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)+m_3\left(d_2+l_2\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_2-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(d_2+l_2\right)\dot{\theta}_3^2
\end{aligned} \tag{3.883}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1\right)+\left(m_2+m_3\right)\ddot{d}_2\\
&\quad-\left(m_2\left(d_2+\tfrac{1}{2}l_2\right)+m_3\left(d_2+l_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned} \tag{3.884}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3-g\,\mathrm{s}_3-\mathrm{c}_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2+\left(d_2+l_2\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2\right)\right)\\
&\quad+I_{zz3}\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned} \tag{3.885}
$$

Sonuç olarak RC robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.386, 3.387 ve 3.388 'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.883, 3.884 ve 3.885'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.11. CN robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

CN robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}l_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.886} $$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \ ; \ {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.887} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin x eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [\,g \quad 0 \quad 0\,]^T \tag{3.888} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = 0 \ ; \ {}^{1}\dot{\omega}_1 = 0 \tag{3.889} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} g & 0 & \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.890} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} g & 0 & \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.891} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} gm_1 & 0 & m_1\ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.892} $$

$$ {}^{1}N_1 = 0 \tag{3.893} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \ ; \ {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.894} $$

$$ {}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{c}_2 & -g\,\mathrm{s}_2 & \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.895}$$

$$ {}^2\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{c}_2 - \frac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_2 & -g\,\mathrm{s}_2 - \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_2^2 & \ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.896}$$

$$ {}^2F_2 = \begin{bmatrix} m_2\left(g\,\mathrm{c}_2 - \frac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_2 \right) & -m_2\left(g\,\mathrm{s}_2 + \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_2^2 \right) & m_2\ddot{d}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.897}$$

$$ {}^2N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.898}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2 & \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \;;\; {}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2 & \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.899}$$

$$ {}^3\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\,\ddot{d}_1 + \mathrm{c}_3\left(g\,\mathrm{c}_2 - l_1\ddot{\theta}_2 \right) & \mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1 - \mathrm{s}_3\left(g\,\mathrm{c}_2 - l_1\ddot{\theta}_2 \right) & g\,\mathrm{s}_2 + l_1\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.900}$$

$$ {}^3\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(g\,\mathrm{c}_2 - l_1\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2 \right) - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{d}_1 \\ \frac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1 + \mathrm{s}_3\left(l_1\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2 - g\,\mathrm{c}_2 \right) \\ g\,\mathrm{s}_2 + l_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + l_1\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{3.901}$$

$$ {}^3F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{d}_1 - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{c}_3\left(g\,\mathrm{c}_2 - l_1\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2 \right)\right) \\ m_3\left(\frac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1 + \mathrm{s}_3\left(l_1\ddot{\theta}_2 - g\,\mathrm{c}_2 + \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2 \right)\right) \\ m_3\left(g\,\mathrm{s}_2 + l_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + l_1\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 \right) \end{bmatrix} \tag{3.902}$$

$$ {}^3N_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3} \right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_2 \\ \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3} \right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_2 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} \right)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.903}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^3f_3 = {}^3F_3 \tag{3.904}$$

$$ {}^3n_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3} \right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_2 & {}^3n_{3(1,2)} & {}^3n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.905}$$

Matriste,

$$ {}^3n_{3(1,2)} = \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3} - \tfrac{1}{2}l_2^2m_3 \right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}l_2m_3\left(g\,\mathrm{s}_2 + l_1\dot{\theta}_2^2 \right) + \mathrm{c}_3\left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_2^2m_3 \right)\ddot{\theta}_2 $$

$$ {}^3n_{3(1,3)} = \tfrac{1}{2}l_2m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1 + l_1\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2 - g\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 \right) + \left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3 + I_{zz3} \right)\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right)\dot{\theta}_2^2 $$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{2}f_2 = \begin{bmatrix} ^{2}f_{2(1,1)} & ^{2}f_{2(1,2)} & (m_2+m_3)\ddot{d}_1 - \tfrac{1}{2}l_2 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\end{bmatrix}^T \tag{3.906}$$

Matriste,

$$^{2}f_{2(1,1)} = g\,\mathrm{c}_2\,(m_2+m_3) - l_1\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2}l_2 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)$$

$$^{2}f_{2(1,2)} = -g\,\mathrm{s}_2\,(m_2+m_3) - l_2 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right) - l_1\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2$$

$$^{2}n_2 = \begin{bmatrix} ^{2}n_{2(1,1)} & ^{2}n_{2(1,2)} & ^{2}n_{2(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.907}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
^{2}n_{2(1,1)} &= \tfrac{1}{2}g l_2 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3 + I_{zz3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + l_1\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{d}_1 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_2^2 m_3 - I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_2\\
&\quad + \tfrac{1}{2}l_1 l_2 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2^2-\dot{\theta}_3^2\right)\right) + \left(\left(\mathrm{s}_3^2-\mathrm{c}_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)+\tfrac{1}{2}l_2^2 m_3\,\mathrm{s}_3^2\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
^{2}n_{2(1,2)} &= -\tfrac{1}{2}l_2 m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1 - g\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 + l_1\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2\right) - \left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad - \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2^2\\
^{2}n_{2(1,3)} &= \left(\tfrac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{zz2} + \mathrm{s}_3^2\,I_{xx3} + l_1^2 m_3 + \mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_3 + I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_2 + \tfrac{1}{2}l_1 l_2 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\right)\\
&\quad - g\left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right) + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_2^2 m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{1}f_1 = \begin{bmatrix} ^{1}f_{1(1,1)} & ^{1}f_{1(1,2)} & (m_1+m_2+m_3)\ddot{d}_1 - \tfrac{1}{2}l_2 m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\end{bmatrix}^T \tag{3.908}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
^{1}f_{1(1,1)} &= g\,(m_1+m_2+m_3) - \tfrac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 + l_2 m_3\left(\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\right)\\
&\quad + l_1\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2 - \left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\ddot{\theta}_2\\
^{1}f_{1(1,2)} &= \left(\tfrac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_1\,\mathrm{s}_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\right)\ddot{\theta}_2 - \left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right) + \tfrac{1}{2}l_2 m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_2^2\\
&\quad - l_2 m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\right)
\end{aligned}$$

$$^{1}n_1 = \begin{bmatrix} ^{1}n_{1(1,1)} & ^{1}n_{1(1,2)} & ^{1}n_{1(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.909}$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= \mathrm{c}_2\left(\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+\tfrac{1}{2}l_2^2m_3\,\mathrm{s}_3^2+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2^2\\
&\quad+\left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\ddot{d}_1+\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3+\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3+I_{zz3}\right)\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad+\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2^2-\dot{\theta}_3^2\right)+\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3+\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2\\
{}^{1}n_{1(1,2)} &= h_1\left(\tfrac{1}{2}l_2m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2-\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)-\left(m_2+m_3+\tfrac{1}{2}m_1\right)\ddot{d}_1\right)+\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_3\right)\dot{\theta}_2^2\\
&\quad+\left(\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2-\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3+I_{zz3}\right)\right)\ddot{\theta}_3+\left(l_1\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{d}_1\\
&\quad+\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_3-I_{yy3}\right)-\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2^2-\dot{\theta}_3^2\right)\\
&\quad+\mathrm{s}_2\left(\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)+I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_2^2m_3\,\mathrm{s}_3^2\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+g\left(\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2+\mathrm{s}_2^2\right)\right)\\
{}^{1}n_{1(1,3)} &= -g\left(\mathrm{c}_2\,l_1\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
&\quad+\left(\tfrac{1}{2}h_1l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3-h_1l_1\,\mathrm{s}_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)+\tfrac{1}{4}l_1^2m_2+l_1^2m_3\right)\ddot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\\
&\quad-h_1\left(l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2+\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\right)\\
&\quad+\left(I_{zz2}+\mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3+I_{yy3}\right)+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2+\left(l_2m_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{2}l_1-\tfrac{1}{2}h_1\,\mathrm{s}_2\right)\right)\ddot{\theta}_3
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\tau_1=\left(m_1+m_2+m_3\right)\ddot{d}_1-\tfrac{1}{2}l_2m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2-\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) \tag{3.910}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \tfrac{1}{2}l_1l_2m_3\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\right)-g\left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\\
&\quad+\left(\tfrac{1}{4}l_1^2m_2+I_{zz2}+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}+l_1^2m_3+\mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3+I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_2\\
&\quad+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{3.911}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \tfrac{1}{2}l_2m_3\left(\mathrm{c}_3\,\ddot{d}_1+l_1\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2-g\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\right)+\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{3.912}
$$

Sonuç olarak CN robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.424, 3.425 ve 3.426'da görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.910, 3.911 ve 3.912'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.12. NC robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

NC robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}d_2 & 0 \end{bmatrix}^T \; {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \; {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}l_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.913} $$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.914} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.915} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.916} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.917} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}d_2\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}d_2\left(\dot{\theta}_1^2 - 1\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.918} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}d_2 m_1\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}d_2 m_1\left(\dot{\theta}_1^2 - 1\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.919} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.920} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} s_2\,\dot{\theta}_1 & c_2\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + s_2\,\ddot{\theta}_1 & c_2\,\ddot{\theta}_1 - s_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.921} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} s_2\, g + d_2\, c_2\,\ddot{\theta}_1 & g\, c_2 - d_2\, s_2\,\ddot{\theta}_1 & -d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.922} $$

$$
{}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_2 - \frac{1}{2}l_2\left(\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2^2\,\dot{\theta}_1^2\right) + \mathrm{c}_2\,d_2\ddot{\theta}_1 \\ g\,\mathrm{c}_2 + \frac{1}{2}l_2\left(\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 \\ -d_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}l_2\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - 2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.923}
$$

$$
{}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2\left(g\,\mathrm{s}_2 + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}l_2\left(\dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2^2\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\ m_2\left(g\,\mathrm{c}_2 - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}l_2\left(\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\ -m_2\left(d_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_2\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - 2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.924}
$$

$$
{}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2} + I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,I_{xx2}\ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{s}_2\left(I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,I_{yy2}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz2}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.925}
$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \;;\; {}^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.926}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_2 + \mathrm{c}_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + \left(d_2 + d_3\right)\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) - l_2\dot{\theta}_2^2 \\ g\,\mathrm{c}_2 + l_2\ddot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \left(d_2 + d_3\right)\ddot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_3\right) \\ 2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \ddot{d}_3 - \left(d_2 + d_3\right)\dot{\theta}_1^2 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.927}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_2 + \mathrm{c}_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + \left(d_2 + d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) - l_2\dot{\theta}_2^2 \\ g\,\mathrm{c}_2 + l_2\ddot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \left(d_2 + d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_3\right) \\ 2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \ddot{d}_3 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.928}
$$

$$
{}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(g\,\mathrm{s}_2 + \mathrm{c}_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + \left(d_2 + d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) - l_2\dot{\theta}_2^2\right) \\ m_3\left(g\,\mathrm{c}_2 + l_2\ddot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \left(d_2 + d_3 - \frac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_3\right)\right) \\ m_3\left(2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \ddot{d}_3 - l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2\right)\dot{\theta}_1^2\right) \end{bmatrix} \tag{3.929}
$$

$$
{}^{3}N_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{s}_2\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,I_{yy3}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.930}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.931}
$$

$$
{}^{3}n_3 = \begin{bmatrix} {}^{3}n_{3(1,1)} & {}^{3}n_{3(1,2)} & I_{zz3}\ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.932}
$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,1)} &= c_2\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(g+l_2\,s_2\,\dot{\theta}_1^2\right)+\left(I_{xx3}-I_{yy3}+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\ddot{\theta}_2 \\
&\quad + s_2\left(I_{xx3}\ddot{\theta}_1-l_3m_3\left(\dot{\theta}_1\dot{d}_3+\tfrac{1}{2}\left(d_2+d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right)\right) \\
{}^{3}n_{3(1,2)} &= c_2\left(\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)+I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1-l_3m_3\dot{\theta}_1\dot{d}_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(\dot{\theta}_2^2+c_2^2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad + s_2\left(\left(I_{xx3}-I_{yy3}-I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}\,gl_3m_3\right)
\end{aligned}$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}f_2=\left[{}^{2}f_{2(1,1)}\quad {}^{2}f_{2(1,2)}\quad {}^{2}f_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.933}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,1)} &= g\,s_2\left(m_2+m_3\right)+c_2\left(2m_3\dot{\theta}_1\dot{d}_3+\left(d_2m_2+m_3\left(d_2+d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\right)\ddot{\theta}_1\right) \\
&\quad -l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\left(c_2^2\,\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right) \\
{}^{2}f_{2(1,2)} &= s_2\left(\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)-d_2m_2\right)\ddot{\theta}_1-2m_3\dot{\theta}_1\dot{d}_3+l_2\,c_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad +g\,c_2\left(m_2+m_3\right)+l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_2 \\
{}^{2}f_{2(1,3)} &= l_2\,s_2\left(m_2+2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)-d_2m_2\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad +m_3\ddot{d}_3-l_2\,c_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}$$

$$ {}^{2}n_2=\left[{}^{2}n_{2(1,1)}\quad {}^{2}n_{2(1,2)}\quad {}^{2}n_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.934}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} &= s_2\left(\left(I_{xx2}+I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1+\left(d_3m_3-\tfrac{1}{2}l_3m_3\right)\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3+\left(d_2+d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right)\right) \\
&\quad +c_2\left(g+l_2\,s_2\,\dot{\theta}_1^2\right)\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3-d_3m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\ddot{\theta}_2-d_3l_2m_3\ddot{\theta}_2 \\
&\quad +c_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}+I_{zz2}+I_{xx3}-I_{yy3}+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
{}^{2}n_{2(1,2)} &= c_2\left(I_{yy3}+\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3-d_3m_3\right)\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3-d_2\right)+l_2^2\left(m_3+\tfrac{1}{4}m_2\right)+I_{yy2}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad +s_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}-I_{zz2}+I_{xx3}-I_{yy3}-I_{zz3}-\tfrac{1}{2}l_2^2m_2-2l_2^2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad -l_2m_3\left(\ddot{d}_3+\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3-d_2\right)\dot{\theta}_1^2+\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\left(\dot{\theta}_2^2+c_2^2\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\dot{\theta}_1^2+s_2\,gm_3\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)+c_2\left(2d_3m_3-l_3m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,3)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2}-I_{xx2}-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2+\left(\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)l_2^2+I_{zz2}+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad -\mathrm{s}_2\left(l_2m_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3+\left(d_2+d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right)+\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\ddot{\theta}_1\right) \\
&\quad +\mathrm{c}_2\left(l_2g\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)+l_2^2\,\mathrm{s}_2\left(m_3+\tfrac{1}{4}m_2\right)\dot{\theta}_1^2\right)
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_1=\left[\begin{matrix}{}^{1}f_{1(1,1)} & {}^{1}f_{1(1,2)} & g\left(m_2+m_3\right)+l_2\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2-\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_2^2\right)\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\end{matrix}\right]^T \tag{3.935}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} &= \left(d_2\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)+m_3\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\right)\ddot{\theta}_1+2m_3\dot{\theta}_1\dot{d}_3 \\
&\quad -l_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\left(\mathrm{c}_2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)+\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_2\right) \\
{}^{1}f_{1(1,2)} &= l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_1+\left(d_2\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)+m_3\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad -l_2\,\mathrm{s}_2\left(m_2+2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-m_3\ddot{d}_3-\tfrac{1}{2}d_2m_1
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}n_1=\left[\begin{matrix}{}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)}\end{matrix}\right]^T \tag{3.936}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= l_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2m_2\right)\dot{\theta}_1^2+\left(d_2l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+l_2m_3\,\mathrm{s}_2\left(d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad +\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2}-l_2^2\left(m_3+\tfrac{1}{4}m_2\right)+I_{xx3}-I_{yy2}-I_{yy3}\right)\ddot{\theta}_1+g\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)-d_2m_2\right) \\
&\quad +\left(\mathrm{c}_2\left(l_2m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_3\right)-d_2l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\right)\ddot{\theta}_2+\left(I_{zz2}+I_{zz3}+l_2^2\,\mathrm{s}_2^2\left(\tfrac{1}{2}m_2+2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad +l_2m_3\,\mathrm{s}_2\,\ddot{d}_3+\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\left(I_{xx2}+I_{xx3}-I_{yy2}-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
{}^{1}n_{1(1,2)} &= \mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}d_2l_2m_2\ddot{\theta}_1+l_2m_3\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_3+\left(d_2+d_3-\tfrac{1}{2}l_3\right)\ddot{\theta}_1\right)\right)-\left(I_{zz2}+I_{zz3}+l_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad -\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{yy2}-I_{xx2}-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2-\mathrm{c}_2\left(gl_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+l_2^2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_1^2\right) \\
{}^{1}n_{1(1,3)} &= \left(\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3-d_3l_2m_3\right)-d_2l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2+m_3\left(2d_2+2d_3-l_3\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 \\
&\quad +\left(I_{zz1}+\tfrac{1}{4}d_2^2m_1+\mathrm{s}_2^2\left(I_{xx2}+I_{xx3}\right)+\mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2}+I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad +\left(d_2^2m_2+m_3\left(d_2^2+d_3^2+\tfrac{1}{4}l_3^2+2d_2d_3-l_3\left(d_2+d_3\right)\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad +2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx3}-I_{yy2}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_2^2m_2-l_2^2m_3+I_{xx2}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&\quad +l_2\,\mathrm{c}_2\left(m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2-d_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2m_2\right)\dot{\theta}_2^2-l_2m_3\,\mathrm{c}_2\,\ddot{d}_3
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left(I_{zz1} + \tfrac{1}{4}d_2^2 m_1 + s_2^2 (I_{xx2} + I_{xx3}) + c_2^2 \left(I_{yy2} + I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \right) \right)\ddot{\theta}_1 \\ &+ l_2 c_2 \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2 - d_3 \right) - \tfrac{1}{2}d_2 m_2 \right)\dot{\theta}_2^2 + m_3 (2d_2 + 2d_3 - l_3)\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \\ &- l_2 m_3 c_2 \ddot{d}_3 + \left(s_2 \left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3 - d_3 l_2 m_3 \right) - d_2 l_2 s_2 \left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3 \right) \right)\ddot{\theta}_2 \\ &+ \left(d_2^2 m_2 + m_3 \left(d_2^2 + d_3^2 + \tfrac{1}{4}l_3^2 + 2d_2 d_3 - l_3 (d_2 + d_3) \right) \right)\ddot{\theta}_1 \\ &+ 2 c_2 s_2 \left(I_{xx3} - I_{yy2} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4}l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3 + I_{xx2} \right)\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1\end{aligned} \tag{3.937}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= c_2 s_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} - I_{xx3} + I_{yy3} \right)\dot{\theta}_1^2 + \left(\left(\tfrac{1}{4}m_2 + m_3 \right) l_2^2 + I_{zz2} + I_{zz3} \right)\ddot{\theta}_2 \\ &- s_2 \left(l_2 m_3 \left(2\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 + \left(d_2 + d_3 - \tfrac{1}{2}l_3 \right)\ddot{\theta}_1 \right) + \tfrac{1}{2}d_2 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \right) \\ &+ c_2 \left(l_2 g \left(m_3 + \tfrac{1}{2}m_2 \right) + l_2^2 s_2 \left(m_3 + \tfrac{1}{4}m_2 \right)\dot{\theta}_1^2 \right)\end{aligned} \tag{3.938}$$

$$\tau_3 = m_3 \left(2l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \ddot{d}_3 - l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + \left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_3 - d_2 \right)\dot{\theta}_1^2 \right) \tag{3.939}$$

Sonuç olarak NC robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.461, 3.462 ve 3.463‘de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.937, 3.938 ve 3.939’da görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.13. RN robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

RN robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$${}^1P_{c_1} = \left[\tfrac{1}{2}l_1 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad {}^2P_{c_2} = \left[\tfrac{1}{2}l_2 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad {}^3P_{c_3} = \left[\tfrac{1}{2}l_3 \quad 0 \quad 0 \right]^T \tag{3.940}$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$${}^0\omega_0 = 0 \; ; \; {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.941}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$${}^0\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.942}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.943} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.944} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_1 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.945} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}l_1 m_1\dot{\theta}_1^2 & \tfrac{1}{2}l_1 m_1\ddot{\theta}_1 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.946} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\,\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.947} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.948} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} l_1\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - l_1\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 & l_1\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + l_1\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.949} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \tfrac{1}{2}l_2\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) \\ l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) + \tfrac{1}{2}l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ g \end{bmatrix} \tag{3.950} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) + l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right) \\ m_2\left(\tfrac{1}{2}l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right) \\ g m_2 \end{bmatrix} \tag{3.951} $$

$$ {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz2}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.952} $$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ \begin{aligned} {}^{3}\omega_3 &= \begin{bmatrix} \mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) & \mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \\ {}^{3}\dot{\omega}_3 &= \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) + \mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ \mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) - \mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.953} $$

$$
{}^{3}\dot{v}_{3} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_3\left(l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) + l_2\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right)\right) \\ g\,\mathrm{c}_3 + \mathrm{s}_3\left(l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) + l_2\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right)\right) \\ -l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.954}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} \\ {}^{3}\dot{v}_{c_3(2,1)} \\ l_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) - l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.955}
$$

Matriste,

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} = g\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{c}_3\,l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right)
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3(2,1)} = g\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \mathrm{s}_3\,l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right)
$$

$$
{}^{3}F_{3} = \begin{bmatrix} {}^{3}F_{3(1,1)} \\ {}^{3}F_{3(2,1)} \\ m_3\left(l_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_3 - l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.956}
$$

Matriste,

$$
{}^{3}F_{3(1,1)} = m_3\left(g\,\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - \mathrm{c}_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \mathrm{c}_3\,l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right)
$$

$$
{}^{3}F_{3(2,1)} = m_3\left(g\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 + \mathrm{s}_3\left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \mathrm{s}_3\,l_1\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right)
$$

$$
{}^{3}N_{3} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_3\left(I_{zz3} - I_{yy3} + I_{xx3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) + I_{xx3}\,\mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{zz3} - I_{yy3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) + I_{yy3}\,\mathrm{c}_3\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) \end{bmatrix} \tag{3.957}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_{3} = {}^{3}F_{3} \tag{3.958}
$$

$$
{}^{3}n_{3} = \left[\mathrm{s}_3\,I_{xx3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \mathrm{c}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} + I_{zz3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) \quad {}^{3}n_{3(1,2)} \quad {}^{3}n_{3(1,3)}\right]^{T} \tag{3.959}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,2)} = &-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) - l_1\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \left(l_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)\right) \\
&+\mathrm{c}_3\,I_{yy3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,3)} &= \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(g\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2} l_3 \ddot{\theta}_3 + l_1\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 \right) + \mathrm{s}_3 \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right) \right) \\
&\quad + I_{zz3} \ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right)
\end{aligned}
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_2 = \left[{}^{2}f_{2(1,1)} \quad {}^{2}f_{2(1,2)} \quad g\left(m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \right) \right]^T \tag{3.960}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,1)} &= l_1\,\mathrm{s}_2 \left(m_2 + m_3 \right) \ddot{\theta}_1 - \left(m_3 \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) + \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \right) \dot{\theta}_2^2 - \left(l_2 m_2 + m_3 \left(2 l_2 + l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - \left(m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2 + l_1\,\mathrm{c}_2 \right) + m_3 \left(l_2 + l_1\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3 \right) \\
{}^{2}f_{2(1,2)} &= l_1\,\mathrm{s}_2 \left(m_2 + m_3 \right) \dot{\theta}_1^2 + \left(m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2 + l_1\,\mathrm{c}_2 \right) + m_3 \left(l_2 + l_1\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2} l_2 m_2 + m_3 \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \ddot{\theta}_2 - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{2}n_2 = \left[{}^{2}n_{2(1,1)} \quad {}^{2}n_{2(1,2)} \quad {}^{2}n_{2(1,3)} \right]^T \tag{3.961}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} &= \left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \right) \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \right) - \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2} l_3^2 m_3\,\mathrm{s}_3^2 + \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) + I_{zz3} \right) \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right) \\
{}^{2}n_{2(1,2)} &= \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(l_2 \dot{\theta}_3^2 + l_1 \left(\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) \right) - \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \right) \ddot{\theta}_3 \\
&\quad + \left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \right) \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right) \\
&\quad - g \left(m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 + l_2 \right) + \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \right) \\
{}^{2}n_{2(1,3)} &= \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} \right) \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \right) + \mathrm{s}_2\, l_1 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \left(\mathrm{c}_3^2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{yy3} \right) + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} \right) \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right) \\
&\quad + \left(l_1 l_2\,\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 \right) \ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right)
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_1 = \left[{}^{1}f_{1(1,1)} \quad {}^{1}f_{1(1,2)} \quad g\left(m_2 + m_3 + m_1\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2 \right) \right]^T \tag{3.962}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} &= -\left(l_1\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)+\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\right)\dot{\theta}_1^2+l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)\\
&\quad -\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\left(\mathrm{s}_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_2^2\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)\\
&\quad -\mathrm{c}_2\left(l_2m_2+m_3\left(2l_2+l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
{}^{1}f_{1(1,2)} &= l_1\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_1-\mathrm{s}_2\left(l_2m_2+m_3\left(2l_2+l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&\quad -\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3-\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,l_3m_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1-l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_3^2+\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\\
&\quad +\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\left(\mathrm{c}_2\left(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1\right)-\mathrm{s}_2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}n_1=\begin{bmatrix}{}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.963}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)-\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_1+g\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\\
&\quad -\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2\left(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1\right)+\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_3^2\right)+\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad +\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_1^2\right)\\
&\quad +\mathrm{c}_2\left(I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_3^2+\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\\
{}^{1}n_{1(1,2)} &= \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\right)\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_1^2\right)\\
&\quad +\mathrm{s}_2\left(I_{zz3}+\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_3^2+\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\\
&\quad -g\left(\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)+l_1\left(m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}l_1m_1\right)\\
&\quad +\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\right)\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\\
&\quad -\left(\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)+\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_3\\
&\quad +\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_3^2-\dot{\theta}_1^2\right)+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2\\
{}^{1}n_{1(1,3)} &= \left(l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3+I_{zz2}\right)\ddot{\theta}_2-l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(l_2+l_1\,\mathrm{c}_2\right)\left(\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)\\
&\quad +\left(l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3+I_{zz1}+\tfrac{1}{4}l_1^2m_1+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3+I_{zz2}+l_1^2m_2+l_1^2m_3\right)\ddot{\theta}_1\\
&\quad +\left(\mathrm{c}_2\,l_1\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+l_2m_3+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\right)+\mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{yy3}\right)+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2\\
&\quad -l_1\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+m_3\left(l_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_2^2-\tfrac{1}{2}l_1l_3m_3\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3+\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2\right)\\
&\quad +\left(l_1\,\mathrm{c}_2\left(2l_2m_3+l_3m_3c_3+l_2m_2\right)+\mathrm{c}_3^2\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+\mathrm{s}_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_1\\
&\quad +2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)\\
&\quad -l_1\,\mathrm{s}_2\left(l_2m_2+m_3\left(2l_2+l_3\,\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = & \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} \right) \ddot{\theta}_2 - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(l_2 + l_1\,\mathrm{c}_2 \right) \left(\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right) \\
& + \left(\mathrm{c}_2\, l_1 \left(\tfrac{1}{2} l_2 m_2 + l_2 m_3 + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 \right) + \mathrm{c}_3^2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{yy3} \right) + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} \right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + I_{zz1} + \tfrac{1}{4} l_1^2 m_1 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3 \right) \ddot{\theta}_1 \\
& + \left(l_1\,\mathrm{c}_2 \left(2 l_2 m_3 + l_3 m_3 c_3 + l_2 m_2 \right) + \mathrm{c}_3^2 \left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} \right) \ddot{\theta}_1 \\
& - l_1\,\mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2 m_2 + m_3 \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \dot{\theta}_2^2 - \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{s}_3\, \ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_3^2 \right) \\
& + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right) \\
& - l_1\,\mathrm{s}_2 \left(l_2 m_2 + m_3 \left(2 l_2 + l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2
\end{aligned}
\tag{3.964}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = & \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} \right) \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \right) + \mathrm{s}_2\, l_1 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left(\mathrm{c}_3^2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{yy3} \right) + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} \right) \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \right) - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right) \\
& + \left(l_1 l_2\,\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 \right) \ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} l_1 l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_1^2 \\
& + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right)
\end{aligned}
\tag{3.965}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 = & I_{zz3} \ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} - I_{xx3} \right) \left(2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \right) \\
& + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(g\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{2} l_3 \ddot{\theta}_3 + l_1\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2\, \dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_2\, \ddot{\theta}_1 \right) \right) \\
& + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(l_2 + \tfrac{1}{2} l_3\,\mathrm{c}_3 \right) \left(\dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2 \right)
\end{aligned}
\tag{3.966}
$$

Sonuç olarak RN robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.499, 3.500 ve 3.501'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.964, 3.965 ve 3.966'da görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.14. NR robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

NR robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^1P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} d_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad {}^2P_{c_2} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^3P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{3.967}
$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.968} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.969} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.970} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.971} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} d_2 \ddot{\theta}_1 & -\frac{1}{2} d_2 \dot{\theta}_1^2 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.972} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} d_2 m_1 \ddot{\theta}_1 & -\frac{1}{2} d_2 m_1 \dot{\theta}_1^2 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.973} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1} \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.974} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ \begin{aligned} {}^{2}\omega_2 &= \begin{bmatrix} -\mathrm{s}_2 \dot{\theta}_1 & -\mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \\ {}^{2}\dot{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} -\mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2 \ddot{\theta}_1 & \mathrm{s}_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \mathrm{c}_2 \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.975} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} -g\,\mathrm{s}_2 - d_2 \mathrm{c}_2 \ddot{\theta}_1 & d_2 \mathrm{s}_2 \ddot{\theta}_1 - g\,\mathrm{c}_2 & -d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.976} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} -g\,\mathrm{s}_2 - \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2^2 - \mathrm{c}_2 \left(d_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \\ \frac{1}{2} l_2 \ddot{\theta}_2 - g\,\mathrm{c}_2 + \mathrm{s}_2 \left(d_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \\ \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \ddot{\theta}_1 - l_2 \mathrm{s}_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.977} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} -m_2 \left(g\,\mathrm{s}_2 + \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2 \left(d_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \right) \\ m_2 \left(\frac{1}{2} l_2 \ddot{\theta}_2 - g\,\mathrm{c}_2 + \mathrm{s}_2 \left(d_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \right) \\ m_2 \left(\frac{1}{2} l_2 \mathrm{c}_2 \ddot{\theta}_1 - l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \mathrm{s}_2 - d_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \end{bmatrix} \tag{3.978} $$

$$ {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2 \left(I_{yy2} - I_{zz2} - I_{xx2} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2 I_{xx2} \ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} + I_{zz2} - I_{xx2} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \mathrm{c}_2 I_{yy2} \ddot{\theta}_1 \\ I_{zz2} \ddot{\theta}_2 + \mathrm{c}_2 \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - I_{xx2} \right) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.979} $$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\omega_3 &= \left[-\mathrm{s}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1 \quad -\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3 \right]^T \\
{}^{3}\dot{\omega}_3 &= \begin{bmatrix} -\mathrm{c}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)-\mathrm{s}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1 \\ \mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)-\mathrm{c}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.980}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} -g\,\mathrm{s}_{(2+3)}-l_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2-\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2\right)-\mathrm{c}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\ -g\,\mathrm{c}_{(2+3)}+l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2+\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right)+\mathrm{s}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\ l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1-2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}
\tag{3.981}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3} = \left[{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} \quad {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,2)} \quad {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,3)} \right]^T
\tag{3.982}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} &= -g\,\mathrm{s}_{(2+3)}-\tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_3^2\right)-l_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2-\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad -\mathrm{c}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1^2\right) \\
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,2)} &= -g\,\mathrm{c}_{(2+3)}+\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3\right)+l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2+\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right) \\
&\quad +\mathrm{s}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1^2\right) \\
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,3)} &= -\tfrac{1}{2}l_3\left(2\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)-\mathrm{c}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1\right) \\
&\quad -2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-d_2\dot{\theta}_1^2+l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
{}^{3}F_3 = \left[{}^{3}F_{3(1,1)} \quad {}^{3}F_{3(1,2)} \quad {}^{3}F_{3(1,3)} \right]^T
\tag{3.983}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}F_{3(1,1)} &= -m_3\left(\mathrm{c}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1^2\right)+l_2\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2-\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_2\right)\right) \\
&\quad +m_3\left(-g\,\mathrm{s}_{(2+3)}-\tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_3^2\right)\right) \\
{}^{3}F_{3(1,2)} &= m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3\right)-g\,\mathrm{c}_{(2+3)}+l_2\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2^2+\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2\right)\right) \\
&\quad +m_3\left(\mathrm{s}_{(2+3)}\left(d_2\ddot{\theta}_1+l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_1^2\right)\right) \\
{}^{3}F_{3(1,3)} &= m_3\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1-2l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-d_2\dot{\theta}_1^2\right) \\
&\quad -m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\left(2\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)-\mathrm{c}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{3}N_{3}=\begin{bmatrix} c_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{zz3}-I_{xx3}\right)\left(\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{3}\right)-I_{xx3}\,s_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_{1} \\ s_{(2+3)}\left(I_{zz3}-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\left(\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{3}\right)-I_{yy3}\,c_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_{1} \\ c_{(2+3)}\,s_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\dot{\theta}_{1}^{2}+I_{zz3}\left(\ddot{\theta}_{2}+\ddot{\theta}_{3}\right) \end{bmatrix} \tag{3.984}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_{3}={}^{3}F_{3} \tag{3.985}
$$

$$
{}^{3}n_{3}=\begin{bmatrix} {}^{3}n_{3(1,1)} & {}^{3}n_{3(1,2)} & {}^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^{T} \tag{3.986}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,1)} &= -s_{(2+3)}\,I_{xx3}\ddot{\theta}_{1}+c_{(2+3)}\left(I_{yy3}-I_{xx3}-I_{zz3}\right)\left(\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{3}\right) \\
{}^{3}n_{3(1,2)} &= -c_{(2+3)}\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_{3}^{2}m_{3}\right)\ddot{\theta}_{1}+l_{2}l_{3}m_{3}\,s_{2}\,\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\left(d_{2}\dot{\theta}_{1}^{2}-l_{2}\,c_{2}\,\ddot{\theta}_{1}\right) \\
&\quad +s_{(2+3)}\left(\tfrac{1}{2}l_{3}^{2}m_{3}-I_{xx3}+I_{yy3}+I_{zz3}\right)\left(\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{3}\right) \\
{}^{3}n_{3(1,3)} &= \left(I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_{3}^{2}m_{3}\right)\left(\ddot{\theta}_{2}+\ddot{\theta}_{3}\right)-\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}g\,c_{(2+3)}+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}l_{2}\left(s_{3}\,\dot{\theta}_{2}^{2}+c_{3}\,\ddot{\theta}_{2}\right) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,s_{(2+3)}\left(d_{2}\ddot{\theta}_{1}+l_{2}\,c_{2}\,\dot{\theta}_{1}^{2}\right)+s_{(2+3)}\,c_{(2+3)}\left(\tfrac{1}{4}l_{3}^{2}m_{3}-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_{1}^{2}
\end{aligned}
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_{2}=\begin{bmatrix} {}^{2}f_{2(1,1)} & {}^{2}f_{2(1,2)} & {}^{2}f_{2(1,3)} \end{bmatrix}^{T} \tag{3.987}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,1)} &= -\left(\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,c_{2}\,c_{(2+3)}+c_{2}^{2}\,l_{2}\left(\tfrac{1}{2}m_{2}+m_{3}\right)\right)\dot{\theta}_{1}^{2}-g\,s_{2}\left(m_{2}+m_{3}\right) \\
&\quad -d_{2}\,c_{2}\left(m_{2}+m_{3}\right)\ddot{\theta}_{1}-\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\left(s_{3}\left(\ddot{\theta}_{2}+\ddot{\theta}_{3}\right)+c_{3}\,\dot{\theta}_{3}^{2}\right) \\
&\quad -\left(\tfrac{1}{2}l_{2}m_{2}+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,c_{3}+l_{2}m_{3}\right)\dot{\theta}_{2}^{2}-l_{3}m_{3}\,c_{3}\,\dot{\theta}_{2}\dot{\theta}_{3} \\
{}^{2}f_{2(1,2)} &= d_{2}\,s_{2}\left(m_{2}+m_{3}\right)\ddot{\theta}_{1}+\left(\tfrac{1}{2}l_{2}m_{2}+l_{2}m_{3}+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,c_{3}\right)\ddot{\theta}_{2}+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,c_{3}\,\ddot{\theta}_{3} \\
&\quad +\left(2\,c_{2}\,s_{2}\left(\tfrac{1}{4}l_{2}m_{2}+\tfrac{1}{2}l_{2}m_{3}\right)+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,s_{2}\,c_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_{1}^{2}-g\,c_{2}\left(m_{2}+m_{3}\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,s_{3}\left(\dot{\theta}_{2}^{2}+\dot{\theta}_{3}^{2}\right)-l_{3}m_{3}\,s_{3}\,\dot{\theta}_{2}\dot{\theta}_{3} \\
{}^{2}f_{2(1,3)} &= \left(c_{2}\left(\tfrac{1}{2}l_{2}m_{2}+l_{2}m_{3}\right)+\tfrac{1}{2}l_{3}m_{3}\,c_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_{1}-s_{2}\left(2l_{2}m_{3}+l_{2}m_{2}\right)\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2} \\
&\quad -l_{3}m_{3}\,s_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{2}+\dot{\theta}_{1}\dot{\theta}_{3}\right)-d_{2}\left(m_{2}+m_{3}\right)\dot{\theta}_{1}^{2}
\end{aligned}
$$

$$ {}^{2}n_{2} = \begin{bmatrix} {}^{2}n_{2(1,1)} & {}^{2}n_{2(1,2)} & {}^{2}n_{2(1,3)} \end{bmatrix}^{T} \tag{3.988} $$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} =& \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 - \mathrm{s}_2\, I_{xx2} - \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\, I_{xx3} + \mathrm{s}_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_1 - l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&+ \left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{c}_{2+3}\left(I_{yy3} - I_{xx3} - I_{zz3}\right) - \mathrm{s}_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\tfrac{1}{2} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} + I_{zz3}\right)\right)\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\right) \\
&- \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2} - I_{zz2}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
{}^{2}n_{2(1,2)} =& -\mathrm{c}_2\, I_{yy2}\ddot{\theta}_1 + \mathrm{s}_2\left(I_{yy2} - I_{xx2} + I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2} l_2 m_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2\right) \\
&- l_2 m_3\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - 2 l_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2 - \tfrac{1}{2} l_3\left(2\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right) - \mathrm{c}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_1\right)\right) \\
&+ \mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_{(2+3)}\left(I_{yy3} - I_{xx3} - I_{zz3}\right)\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right) - \mathrm{s}_{(2+3)}\, I_{xx3}\ddot{\theta}_1\right) \\
{}^{2}n_{2(1,3)} =& -l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{2} l_2\dot{\theta}_3^2 + l_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) + \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&+ \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz2} + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \\
&+ \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 + d_2 l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_1 - g\left(l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right) \\
&+ \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)} + \mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right) + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 - I_{xx2} + I_{yy2}\right)\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}f_{1} = \begin{bmatrix} {}^{1}f_{1(1,1)} & {}^{1}f_{1(1,2)} & {}^{1}f_{1(1,3)} \end{bmatrix}^{T} \tag{3.989} $$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} =& -\left(l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_2 - \left(l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&- \left(l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2^2 - d_2\left(\tfrac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3\right)\ddot{\theta}_1 \\
&- \tfrac{1}{2} l_3 m_3\left(\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_3\right) - l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\
{}^{1}f_{1(1,2)} =& \left(l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_1 - l_2\,\mathrm{s}_2\left(m_2 + 2 m_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \\
&- l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\right) - d_2\left(\tfrac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\
{}^{1}f_{1(1,3)} =& \mathrm{s}_{(2+3)}\left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3\dot{\theta}_3^2 + l_3 m_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) + \left(l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&+ g\left(m_1 + m_2 + m_3\right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right) - l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$ {}^{1}n_{1} = \begin{bmatrix} {}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)} \end{bmatrix}^{T} \tag{3.990} $$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} =& -\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)d_2 l_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_2 + g d_2\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)+d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2\right)\\
&-\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz3}\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1-\left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)-4\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\right)\\
&-\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\left(\ddot{\theta}_3+\ddot{\theta}_2\right)+\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3-I_{xx2}+I_{yy2}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\\
&+\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)}+\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)+\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3-I_{xx2}+I_{yy2}\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&+\left(\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\right)\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&-\left(\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3+\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz2}+I_{zz3}+l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\\
&+\left(\mathrm{c}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)-2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\left(l_2 l_3 m_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\right)\\
&+\left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,2)} =& \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3-I_{xx2}+I_{yy2}+\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{yy3}-I_{xx3}\right)\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\right)\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3+\left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3+\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3+\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{zz2}+I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_1-g\left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}+\mathrm{c}_2\,l_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\right)\\
&-l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{2}\dot{\theta}_3^2+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)+\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3+I_{yy3}-I_{xx3}\right)+\tfrac{1}{2}l_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\right)\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,3)} =& \left(2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(I_{xx2}-\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2-l_2^2 m_3-I_{yy2}\right)-l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)}+\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+\left(\mathrm{c}_2^2\left(I_{yy2}+\tfrac{1}{4}l_2^2 m_2+l_2^2 m_3\right)+\mathrm{s}_2^2\,I_{xx2}+I_{xx3}\,\mathrm{s}_{(2+3)}^2\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\,\ddot{\theta}_3\\
&+\left(\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\mathrm{c}_{(2+3)}^2+l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)}+I_{zz1}+d_2^2\left(\tfrac{1}{4}m_1+m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&+\left(2\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3-I_{yy3}\right)\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
&-2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3-I_{xx3}+I_{yy3}\right)\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)+\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\,\dot{\theta}_3^2+\left(d_2 l_2\,\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)+\tfrac{1}{2}d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\right)\dot{\theta}_2^2\\
&-\frac{1}{2}l_2 l_3 m_3\left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)}+\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)}+\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3
\end{aligned}
$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = & \left(2\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(I_{xx2} - \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3 - I_{yy2} \right) - l_2 l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)} + \mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left(\left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \mathrm{c}^2_{(2+3)} + l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} + I_{zz1} + d_2^2 \left(\tfrac{1}{4} m_1 + m_2 + m_3 \right) \right) \ddot{\theta}_1 \\
& + \left(\mathrm{c}_2^2 \left(I_{yy2} + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \right) + \mathrm{s}_2^2\, I_{xx2} + I_{xx3}\,\mathrm{s}^2_{(2+3)} \right) \ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)}\, \ddot{\theta}_3 \\
& + \left(2 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3} \right) \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& - 2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\, \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left(d_2 l_2\,\mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)}\, \dot{\theta}_3^2 + \left(d_2 l_2\,\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \dot{\theta}_2^2 \\
& - \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)} + \mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} + \mathrm{s}_3 \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{3.991}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = & \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2 \right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 \left(\tfrac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_3^2 + l_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right) + \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_{(2+3)} + \mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left(l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz2} + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2\,\mathrm{s}_2 + d_2 l_2 m_3\,\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \right) \ddot{\theta}_1 \\
& + \mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 - I_{xx2} + I_{yy2} \right) \dot{\theta}_1^2 \\
& - g \left(l_2\,\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{c}_{(2+3)} \right) \\
& + \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\,\mathrm{c}_3 + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3} \right) \ddot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{3.992}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 = & \tfrac{1}{2} l_3 m_3 l_2 \left(\mathrm{s}_3\, \dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_3\, \ddot{\theta}_2 \right) + \tfrac{1}{2} l_3 m_3\,\mathrm{s}_{(2+3)} \left(d_2 \ddot{\theta}_1 + l_2\,\mathrm{c}_2\, \dot{\theta}_1^2 \right) \\
& + \left(I_{zz3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 g\,\mathrm{c}_{(2+3)} \\
& + \mathrm{s}_{(2+3)}\,\mathrm{c}_{(2+3)} \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) \dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
\tag{3.993}
$$

Sonuç olarak NR robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.537, 3.538 ve 3.539'da görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.991, 3.992 ve 3.993'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.15. NN robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

NN robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}d_2 & 0 \end{bmatrix}^T \; {}^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}l_2 & 0 \end{bmatrix}^T \; {}^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.994} $$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$ {}^{0}\omega_0 = 0 \; ; \; {}^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.995} $$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$ {}^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.996} $$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.997} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.998} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}d_2\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}d_2\dot{\theta}_1^2 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.999} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}d_2 m_1\ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2}d_2 m_1\dot{\theta}_1^2 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.1000} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.1001} $$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \; ; \; {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & \mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.1002} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_2 + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 & g\,\mathrm{c}_2 - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 & -d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.1003} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} g\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 \\ g\,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{s}_2^2\,\dot{\theta}_1^2 \\ l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.1004} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2\left(g\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2 + d_2\,\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1^2 \right) \\ m_2\left(g\,\mathrm{c}_2 - \tfrac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2 - d_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{s}_2^2\,\dot{\theta}_1^2 \right) \\ m_2\left(l_2\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}l_2\,\mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 \right) \end{bmatrix} \tag{3.1005} $$

$$
{}^{2}N_{2}=\begin{bmatrix} c_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}+I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+s_2\,I_{xx2}\ddot{\theta}_1 \\ s_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}-I_{zz2}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+c_2\,I_{yy2}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz2}\ddot{\theta}_2+c_2\,s_2\left(I_{yy2}-I_{xx2}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.1006}
$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}\omega_{3}=\begin{bmatrix} c_3\,s_2\,\dot{\theta}_1-s_3\,\dot{\theta}_2 & -c_3\,\dot{\theta}_2-s_2\,s_3\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_3+c_2\,\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T
$$

$$
{}^{3}\dot{\omega}_{3}=\begin{bmatrix} c_3\left(c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+s_2\,\ddot{\theta}_1\right)-s_3\,\ddot{\theta}_2-c_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2-s_2\,s_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 \\ s_3\,\dot{\theta}_2-c_3\,\ddot{\theta}_2-c_3\,s_2\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1-s_3\left(c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+s_2\,\ddot{\theta}_1\right) \\ c_2\,\ddot{\theta}_1-s_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{3.1007}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{3}=\begin{bmatrix} {}^{3}\dot{v}_{3(1,1)} & {}^{3}\dot{v}_{3(1,2)} & g\,c_2-l_2\dot{\theta}_2^2-d_2\,s_2\,\ddot{\theta}_1-l_2\,s_2^2\,\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.1008}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\dot{v}_{3(1,1)} &= -s_3\left(l_2\,c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-d_2\dot{\theta}_1^2+l_2\left(c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+s_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right) \\
&\quad +c_3\left(g\,s_2-l_2\ddot{\theta}_2+d_2\,c_2\,\ddot{\theta}_1+l_2\,c_2\,s_2\,\dot{\theta}_1^2\right) \\
{}^{3}\dot{v}_{3(1,2)} &= -c_3\left(l_2\,c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-d_2\dot{\theta}_1^2+l_2\left(c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+s_2\,\ddot{\theta}_1\right)\right) \\
&\quad -s_3\left(g\,s_2-l_2\ddot{\theta}_2+d_2\,c_2\,\ddot{\theta}_1+l_2\,c_2\,s_2\,\dot{\theta}_1^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{3}\dot{v}_{c_3}=\begin{bmatrix} {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} & {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,2)} & {}^{3}\dot{v}_{c_3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.1009}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,1)} &= \left(d_2\,c_2\,c_3-l_2\,s_2\,s_3\right)\ddot{\theta}_1-\tfrac{1}{2}l_3\,s_2^2\,s_3^2\,\dot{\theta}_1^2+g\,c_3\,s_2-\tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2-l_2\,c_3\,\ddot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,c_3^2\,\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad -\left(2l_2\,c_2\,s_3+l_3\,c_3\,s_2\,s_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-l_3\,c_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\left(d_2\,s_3+l_2\,c_2\,c_3\,s_2-\tfrac{1}{2}l_3\,c_2^2\right)\dot{\theta}_1^2 \\
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,2)} &= \left(c_2\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2\,s_3\right)-l_2\,c_3\,s_2\right)\ddot{\theta}_1-\left(l_3\,s_2\,c_3^2+2l_2\,c_2\,c_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 \\
&\quad +\left(d_2\,c_3-s_2\,s_3\left(l_2\,c_2+\tfrac{1}{2}l_3\,c_3\,s_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2-s_3\left(g\,s_2-l_2\ddot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,c_3\,\dot{\theta}_2^2\right) \\
{}^{3}\dot{v}_{c_3(1,3)} &= c_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_2+l_3\,s_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)+s_2\left(\tfrac{1}{2}l_3\,c_2\,c_3-l_2\,s_2\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad +g\,c_2-l_3\,s_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3-l_2\dot{\theta}_2^2-s_2\left(d_2-\tfrac{1}{2}l_3\,s_3\right)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
{}^{3}F_{3}=\begin{bmatrix} {}^{3}F_{3(1,1)} & {}^{3}F_{3(1,2)} & {}^{3}F_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.1010}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}F_{3(1,1)} &= m_3\left(\left(d_2\,\mathrm{s}_3 + l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2^2\right)\dot{\theta}_1^2 - \left(2l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3 + l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\
&\quad + m_3\left(-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_2^2\,\mathrm{s}_3^2\,\dot{\theta}_1^2 + g\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\dot{\theta}_3^2 - l_2\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3^2\,\dot{\theta}_2^2\right)\\
&\quad + m_3\left(d_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1 - m_3 l_3\,\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
{}^{3}F_{3(1,2)} &= m_3\left(\left(\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3 - d_2\,\mathrm{s}_3\right) - l_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\ddot{\theta}_1 - \left(l_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{c}_3^2 + 2l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3\\
&\quad + m_3\left(\left(d_2\,\mathrm{c}_3 - \mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(l_2\,\mathrm{c}_2 + \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2 - \mathrm{s}_3\left(g\,\mathrm{s}_2 - l_2\ddot{\theta}_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2\right)\right)\\
{}^{3}F_{3(1,3)} &= m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_2 + l_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right) + \mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1^2\right)\\
&\quad + m_3\left(g\,\mathrm{c}_2 - l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - l_2\dot{\theta}_2^2 - \mathrm{s}_2\left(d_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{3}N_3 = \left[\,{}^{3}N_{3(1,1)} \quad {}^{3}N_{3(1,2)} \quad {}^{3}N_{3(1,3)}\,\right]^T \tag{3.1011}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}N_{3(1,1)} &= I_{xx3}\left(\mathrm{c}_3\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \mathrm{s}_3\left(\ddot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\right)\right)\\
&\quad - \left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\right)\left(\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\right)\left(I_{zz3} - I_{yy3}\right)\\
{}^{3}N_{3(1,2)} &= I_{yy3}\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \mathrm{c}_3\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_2\right)\right)\\
&\quad + \left(\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\right)\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\right)\left(I_{xx3} - I_{zz3}\right)\\
{}^{3}N_{3(1,3)} &= -\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\right)\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1 - \mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\right)\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right)\\
&\quad + I_{zz3}\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1 - \mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\right)
\end{aligned}
$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.1012}
$$

$$
{}^{3}n_3 = \left[\,{}^{3}n_{3(1,1)} \quad {}^{3}n_{3(1,2)} \quad {}^{3}n_{3(1,3)}\,\right]^T \tag{3.1013}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,1)} &= I_{xx3}\left(\mathrm{c}_3\left(\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) - \mathrm{s}_3\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_2\right)\right)\\
&\quad - \left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2 + \mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\right)\left(\dot{\theta}_3 + \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\right)\left(I_{zz3} - I_{yy3}\right)\\
{}^{3}n_{3(1,2)} &= -\tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{c}_3\left(l_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_2\right) + \mathrm{s}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3 - l_2\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1^2\right)\\
&\quad + I_{yy3}\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \mathrm{s}_2\,\ddot{\theta}_1\right) - \mathrm{c}_3\left(\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(g\,\mathrm{c}_2-l_3\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3-l_2\dot{\theta}_2^2-\mathrm{s}_2\left(d_2-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1\right)$$
$$+\left(\dot{\theta}_3+\mathrm{c}_2\,\dot{\theta}_1\right)\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\right)\left(I_{xx3}-I_{zz3}\right)$$
$$^{3}n_{3(1,3)}=\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3-\left(2l_2\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3+l_3\,\mathrm{c}_3^2\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\left(d_2\,\mathrm{c}_3-\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(l_2\,\mathrm{c}_2+\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2\right)$$
$$+I_{zz3}\left(\mathrm{c}_2\,\ddot{\theta}_1-\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3\right)-\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2+\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\right)\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\left(\mathrm{c}_2\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2\,\mathrm{s}_3\right)-l_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\ddot{\theta}_1-\mathrm{s}_3\left(g\,\mathrm{s}_2-l_2\ddot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_2^2\right)\right)$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{2}f_2=\left[{}^{2}f_{2(1,1)}\quad {}^{2}f_{2(1,2)}\quad {}^{2}f_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.1014}$$

Matriste,

$$^{2}f_{2(1,1)}=g\,\mathrm{s}_2\left(m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)+\mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right)-l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\ddot{\theta}_2$$
$$+\left(\left(\tfrac{1}{2}l_2m_2+l_2m_3\right)\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_2-\tfrac{1}{4}l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\left(\mathrm{c}_2^2-\mathrm{s}_2^2\right)+\mathrm{c}_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$+\mathrm{c}_2\left(d_2\left(m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1-l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1$$
$$^{2}f_{2(1,2)}=\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3-d_2\,\mathrm{s}_2\left(m_3+m_2\right)\right)\ddot{\theta}_1+g\,\mathrm{c}_2\left(m_2+m_3\right)+l_3m_3\left(\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3-\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)$$
$$-\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)l_2\dot{\theta}_2^2+\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_2+\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2-l_2\,\mathrm{s}_2^2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$^{2}f_{2(1,3)}=\left(\mathrm{s}_2\,l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_3^2-\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)+l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,\mathrm{s}_3-d_2\left(m_3+m_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2+\left(\mathrm{c}_2\,l_2\left(m_2+2m_3\right)+l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$^{2}n_2=\left[{}^{2}n_{2(1,1)}\quad {}^{2}n_{2(1,2)}\quad {}^{2}n_{2(1,3)}\right]^T \tag{3.1015}$$

Matriste,

$$^{2}n_{2(1,1)}=\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\,\mathrm{c}_2^2-d_2l_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)-\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$+\mathrm{s}_2\left(\mathrm{c}_3^2\,I_{xx3}+\mathrm{s}_3^2\,I_{yy3}+I_{xx2}+l_2^2m_3+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_3^2+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\right)\ddot{\theta}_1$$
$$-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3+\left(l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3+2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\mathrm{s}_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1$$
$$+\mathrm{c}_2\left(I_{xx3}+I_{yy3}-I_{zz3}+2l_2^2m_3+I_{xx2}-I_{yy2}+I_{zz2}+\tfrac{1}{2}l_2^2m_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$+l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\tfrac{1}{2}gl_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{s}_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_2^2-\dot{\theta}_3^2\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,\mathrm{c}_2\,\mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_1+\left(\mathrm{s}_3\,\mathrm{c}_3\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{yy3}\right)-\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2$$
$$+\left(\left(\mathrm{c}_3^2-\mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,\mathrm{s}_3^2-I_{zz3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,2)} = &\left(c_2\left(I_{yy2}+I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_2\,c_3\,s_2+d_2\,c_2\,s_3\right)\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3\,\ddot{\theta}_2\\
&+I_{zz3}\ddot{\theta}_3+c_3\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\dot{\theta}_2^2+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\left(\ddot{\theta}_3+c_3\,s_3\,\dot{\theta}_2^2\right)-\tfrac{1}{2}gl_3m_3\,s_2\,s_3\\
&+\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(d_2\,c_3-s_2\,s_3\left(l_2\,c_2+\tfrac{1}{2}l_3\,c_3\,s_2\right)\right)-c_3\,s_2^2\,s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(s_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}-I_{zz2}-I_{zz3}\right)-l_2l_3m_3\,c_2\,c_3-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,c_3^2\,s_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+s_2\left(c_3^2-s_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,3)} = &\,c_2\,s_2\left(I_{zz3}-s_3^2\,I_{yy3}+I_{yy2}-I_{xx2}-c_3^2\,I_{xx3}-l_2^2m_3-\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,c_3^2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(l_2l_3m_3\,c_2\,c_3+I_{zz3}\,s_2+s_2\,s_3^2\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(c_3\,\dot{\theta}_3^2+s_3\,\ddot{\theta}_3\right)\\
&+c_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3-d_2l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1+2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
&+c_3\,s_2\left(s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,c_3\left(c_2^2-s_2^2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+g\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3-l_2\,s_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)-c_3^2\,s_2\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
&+\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+l_2^2m_3+c_3^2\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+s_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_1=\begin{bmatrix}{}^{1}f_{1(1,1)} & {}^{1}f_{1(1,2)} & {}^{1}f_{1(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.1016}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1(1,1)} = &\left(d_2\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,s_3\right)\ddot{\theta}_1-l_3m_3\,c_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\\
&-\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_3\,s_2+l_2\,c_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2+\left(s_2\left(l_2m_3+\tfrac{1}{2}l_2m_2\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3\right)\dot{\theta}_1^2\\
&-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,s_3\,\ddot{\theta}_3+s_2\left(l_3m_3\,s_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2\right)\\
{}^{1}f_{1(1,2)} = &\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3-s_2\left(l_2m_3+\tfrac{1}{2}l_2m_2\right)\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(c_3\,\ddot{\theta}_3-s_3\,\dot{\theta}_3^2\right)-l_3m_3\,c_2\,s_3\,\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1\\
&+\left(d_2\left(\tfrac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,s_3\right)\dot{\theta}_1^2-\left(l_2\,c_2\left(m_2+2m_3\right)+l_3m_3\,c_3\,s_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
{}^{1}f_{1(1,3)} = &\,g\left(m_1+m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,s_2\left(s_3\,\ddot{\theta}_3+c_3\left(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)\right)-l_2\,c_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\dot{\theta}_2^2\\
&-l_3m_3\,c_2\,s_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3-l_2\,s_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$
{}^{1}n_1=\begin{bmatrix}{}^{1}n_{1(1,1)} & {}^{1}n_{1(1,2)} & {}^{1}n_{1(1,3)}\end{bmatrix}^T \tag{3.1017}
$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,1)} ={}& \left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(d_2\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 - l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\right) - \mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\right) \ddot{\theta}_3 + \left(2 l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 + I_{zz2}\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(l_2^2 m_3 - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{xx2} - I_{yy2} - I_{zz3}\right) \ddot{\theta}_1 + g \left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3\, \mathrm{s}_3 - d_2 \left(m_2 + m_3 + \tfrac{1}{2} m_1\right)\right) \\
& + \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\, \mathrm{s}_3^2 + \mathrm{c}_3^2\, I_{xx3} + \mathrm{s}_3^2\, I_{yy3}\right) \ddot{\theta}_1 - \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_2 m_2 + d_2 l_2 m_3 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{s}_3\right) \dot{\theta}_2^2 + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(d_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\, \dot{\theta}_3^2 + l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3\, \dot{\theta}_3^2\right) \\
& + \left(d_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_2 \left(\left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{yy3} - I_{xx3}\right) - \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3\, \mathrm{s}_3^2 - I_{zz3}\right)\right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + \mathrm{s}_2^2 \left(I_{yy2} + I_{zz3} + \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3\, \mathrm{c}_3^2 - I_{xx2} - \left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \mathrm{c}_2^2 \left(\tfrac{1}{2} l_2^2 m_2 + 2 l_2^2 m_3 + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{yy2} + I_{yy3} - I_{zz3}\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2\right) \ddot{\theta}_1 - \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \left(\mathrm{s}_2 \left(d_2 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{s}_3\right) - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \mathrm{c}_2 \left(l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 + 2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + \left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(l_2\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_3 - d_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\right) - \mathrm{c}_2\, d_2 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right)\right) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left(\tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 + \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right)\right) \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,2)} ={}& -\mathrm{c}_2 \left(\tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{s}_3 - d_2 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right)\right) \ddot{\theta}_1 - \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 \left(\mathrm{s}_3 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right) - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\right) \ddot{\theta}_1 \\
& - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\, \ddot{\theta}_3\right) - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3 \left(\mathrm{c}_2^2 - \mathrm{s}_2^2\right) \dot{\theta}_1^2 + \mathrm{c}_3^2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& - \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{zz3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\, \mathrm{c}_3^2 - \mathrm{c}_3^2\, I_{xx3} - \mathrm{s}_3^2\, I_{yy3}\right) \dot{\theta}_1^2 - 2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + g \left(l_2\, \mathrm{s}_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\right) - \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{yy2} - l_2^2 m_3 - I_{xx2} - \tfrac{1}{4} l_2^2 m_2\right) \dot{\theta}_1^2 \\
& - \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{zz2} + \mathrm{s}_3^2\, I_{xx3} + \mathrm{c}_3^2 \left(\tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{yy3}\right)\right) \ddot{\theta}_2 \\
& - \left(l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 + \mathrm{s}_2\, I_{zz3} + \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3^2 \left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{1}n_{1(1,3)} ={}& \left(l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3 \left(\mathrm{s}_2^2 - \mathrm{c}_2^2\right) + \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(\left(\mathrm{c}_3^2 - \mathrm{s}_3^2\right)\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) - \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3\, \mathrm{c}_3^2\right)\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left(l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 - d_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_3 + 2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2^2\, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3}\right)\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + \left(\mathrm{c}_2^2 \left(I_{yy2} + I_{zz3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) + \mathrm{s}_2^2 \left(\mathrm{s}_3^2 \left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) + \mathrm{c}_3^2\, I_{xx3}\right)\right) \ddot{\theta}_1 \\
& + \mathrm{s}_2^2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_{xx2}\right) \ddot{\theta}_1 + \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3 \left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx3}\right) \ddot{\theta}_2 \\
& + \left(I_{zz1} - l_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{4} d_2^2 m_1 - d_2 l_3 m_3\, \mathrm{s}_3 + d_2^2 \left(m_2 + m_3\right)\right) \ddot{\theta}_1 \\
& - \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3\, \mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3\right) \dot{\theta}_2^2 + \mathrm{c}_2\, \mathrm{s}_2 \left(I_{xx3} + I_{yy3}\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left(\mathrm{s}_2\, d_2 l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3\right) - \tfrac{1}{2} d_2 l_3 m_3\, \mathrm{c}_2\, \mathrm{c}_3 - \tfrac{1}{2} l_2 l_3 m_3\, \mathrm{s}_2\, \mathrm{s}_3\right) \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

$$+\left(c_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3-d_2l_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,c_3\,s_2\right)\ddot{\theta}_2$$
$$+\left(s_2\left(\left(c_3^2-s_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,s_3^2-I_{zz3}\right)\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3$$
$$+\left(c_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_2\,c_3\,s_2+d_2\,c_2\,s_3\right)\right)\ddot{\theta}_3$$
$$+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_2\,s_2\,s_3-d_2\,c_2\,c_3\right)\dot{\theta}_3^2+d_2l_3m_3\,s_2\,s_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3$$
$$+2\,c_2\,s_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3-I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$\begin{aligned}\tau_1 =& \left(l_2l_3m_3\,c_3\left(s_2^2-c_2^2\right)+c_2\,s_2\left(\left(c_3^2-s_3^2\right)\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,c_3^2\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+\left(l_2l_3m_3\,c_2\,s_2\,s_3-d_2l_3m_3\,c_3+2\,c_3\,s_2^2\,s_3\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
&+\left(c_2^2\left(I_{yy2}+I_{zz3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+s_2^2\left(s_3^2\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+c_3^2\,I_{xx3}\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&+s_2^2\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3+I_{xx2}\right)\ddot{\theta}_1+c_3\,s_2\,s_3\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\left(I_{zz1}-l_2l_3m_3\,c_2\,c_3\,s_2+\tfrac{1}{4}d_2^2m_1-d_2l_3m_3\,s_3+d_2^2\left(m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1\\
&-c_2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_2^2+c_2\,s_2\left(I_{xx3}+I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&+\left(s_2\,d_2l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,c_2\,c_3-\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_2\,s_3\right)\dot{\theta}_2^2\\
&+\left(c_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3-d_2l_2\left(m_3+\tfrac{1}{2}m_2\right)\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\,c_3\,s_2\right)\ddot{\theta}_2\\
&+\left(s_2\left(\left(c_3^2-s_3^2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\,s_3^2-I_{zz3}\right)\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
&+\left(c_2\left(\tfrac{1}{4}l_3^2m_3+I_{zz3}\right)-\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_2\,c_3\,s_2+d_2\,c_2\,s_3\right)\right)\ddot{\theta}_3\\
&+\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(l_2\,s_2\,s_3-d_2\,c_2\,c_3\right)\dot{\theta}_3^2+d_2l_3m_3\,s_2\,s_3\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
&+2\,c_2\,s_2\left(I_{xx2}-I_{yy2}+\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+l_2^2m_3-I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\end{aligned} \tag{3.1018}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 =& c_2\,s_2\left(I_{zz3}-s_3^2\,I_{yy3}+I_{yy2}-I_{xx2}-c_3^2\,I_{xx3}-l_2^2m_3-\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\,c_3^2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+\left(l_2l_3m_3\,c_2\,c_3+I_{zz3}\,s_2+s_2\,s_3^2\left(I_{xx3}-I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\left(c_3\,\dot{\theta}_3^2+s_3\,\ddot{\theta}_3\right)\\
&+c_2\left(\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,s_3-d_2l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1+2\,c_3\,s_3\left(I_{xx3}-\tfrac{1}{4}l_3^2m_3-I_{yy3}\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\\
&+c_3\,s_2\left(s_3\left(I_{yy3}-I_{xx3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)-\tfrac{1}{2}d_2l_3m_3\right)\ddot{\theta}_1+\tfrac{1}{2}l_2l_3m_3\,c_3\left(c_2^2-s_2^2\right)\dot{\theta}_1^2\\
&+g\left(\tfrac{1}{2}l_3m_3\,c_2\,c_3-l_2\,s_2\left(\tfrac{1}{2}m_2+m_3\right)\right)-c_3^2\,s_2\left(I_{xx3}-I_{yy3}-\tfrac{1}{2}l_3^2m_3\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\\
&+\left(\tfrac{1}{4}l_2^2m_2+I_{zz2}+l_2^2m_3+c_3^2\left(I_{yy3}+\tfrac{1}{4}l_3^2m_3\right)+s_3^2\,I_{xx3}\right)\ddot{\theta}_2\end{aligned} \tag{3.1019}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 =& \tfrac{1}{2}l_3m_3\left(c_2\left(\tfrac{1}{2}l_3-d_2\,s_3\right)-l_2\,c_3\,s_2\right)\ddot{\theta}_1-\tfrac{1}{2}l_3m_3\,s_3\left(g\,s_2-l_2\ddot{\theta}_2-\tfrac{1}{2}l_3\,c_3\,\dot{\theta}_2^2\right)\\
&\tfrac{1}{2}l_3m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3-\left(2l_2\,c_2\,c_3+l_3\,c_3^2\,s_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)+I_{zz3}\left(c_2\,\ddot{\theta}_1-s_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3\right)\\
&-\left(c_3\,\dot{\theta}_2+s_2\,s_3\,\dot{\theta}_1\right)\left(c_3\,s_2\,\dot{\theta}_1-s_3\,\dot{\theta}_2\right)\left(I_{yy3}-I_{xx3}\right)\end{aligned} \tag{3.1020}$$

$$+\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(d_2\, c_3 - s_2\, s_3 \left(l_2\, c_2 + \tfrac{1}{2} l_3\, c_3\, s_2 \right) \right) \dot{\theta}_1^2$$

Sonuç olarak NN robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.575, 3.576 ve 3.577'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.1018, 3.1019 ve 3.1020'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

3.3.16. RR robotunun dinamiğinin Newton-Euler yöntemi ile çıkarılması

RR robotunun her bir bağının kütle merkezi kendi koordinat sistemlerine göre aşağıdaki gibi olur.

$$^{1}P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2} l_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad ^{2}P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} l_2 \end{bmatrix}^T \quad ^{3}P_{c_3} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.1021}$$

Robotun ana koordinat sistemi hareket etmediğinden açısal hız ve açısal ivme sıfır olur.

$$^{0}\omega_0 = 0 \;;\; ^{0}\dot{\omega}_0 = 0 \tag{3.1022}$$

Yerçekimi vektörü ana koordinat sisteminin z eksenindedir. Buradan;

$$^{0}\dot{v}_0 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.1023}$$

Birinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \;;\; ^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.1024}$$

$$^{1}\dot{v}_1 = [0 \quad 0 \quad g]^T \tag{3.1025}$$

$$^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 \ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_1^2 & g \end{bmatrix}^T \tag{3.1026}$$

$$^{1}F_1 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} l_2 m_1 \ddot{\theta}_1 & \tfrac{1}{2} l_2 m_1 \dot{\theta}_1^2 & g m_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.1027}$$

$$^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{zz1} \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.1028}$$

İkinci eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \;;\; ^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.1029}$$

$$^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g & -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 & \ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.1030}$$

$$^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} g & -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\ddot{\theta}_1 & \ddot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}^T \tag{3.1031}$$

$$^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2 g & -m_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\ddot{\theta}_1\right) & m_2\left(\ddot{d}_2 - \left(d_2 + \tfrac{1}{2}l_2\right)\dot{\theta}_1^2\right) \end{bmatrix}^T \tag{3.1032}$$

$$^{2}N_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2}\ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.1033}$$

Üçüncü eklem için dışadönük ardışık denklemler:

$$^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} c_3\,\dot{\theta}_1 & -s_3\,\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \;;\; ^{3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} c_3\,\ddot{\theta}_1 - s_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & -c_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - s_3\,\ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3.1034}$$

$$^{3}\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} g\,c_3 - s_3\left(\ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2\right) \\ -g\,s_3 - c_3\left(\ddot{d}_2 - (d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2\right) \\ -2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - (d_2 + l_2)\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.1035}$$

$$^{3}\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} g\,c_3 - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_3^2 + s_3^2\,\dot{\theta}_1^2\right) + s_3\left((d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2\right) \\ \tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - g\,s_3 + c_3\left(\left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_3\right)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2\right) \\ l_3\,c_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_3\right)\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.1036}$$

$$^{3}F_3 = \begin{bmatrix} m_3\left(g\,c_3 - \tfrac{1}{2}l_3\left(\dot{\theta}_3^2 + s_3^2\,\dot{\theta}_1^2\right) + s_3\left((d_2 + l_2)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2\right)\right) \\ m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - g\,s_3 + c_3\left(\left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_3\right)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2\right)\right) \\ m_3\left(l_3\,c_3\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,s_3\right)\ddot{\theta}_1\right) \end{bmatrix} \tag{3.1037}$$

$$^{3}N_3 = \begin{bmatrix} s_3\left(I_{yy3} - I_{zz3} - I_{xx3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + c_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 \\ c_3\left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - s_3\,I_{yy3}\ddot{\theta}_1 \\ I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + c_3\,s_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{3.1038}$$

Üçüncü eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$^{3}f_3 = {}^{3}F_3 \tag{3.1039}$$

$$^{3}n_3 = \begin{bmatrix} c_3\,I_{xx3}\ddot{\theta}_1 + s_3\left(I_{yy3} - I_{xx3} - I_{zz3}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & ^{3}n_{3(1,2)} & ^{3}n_{3(1,3)} \end{bmatrix}^T \tag{3.1040}$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{3}n_{3(1,2)} &= -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(l_3 \,\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 - \left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 \,\mathrm{s}_3 \right) \ddot{\theta}_1 \right) \\
&\quad - \mathrm{s}_3\, I_{yy3} \ddot{\theta}_1 + \mathrm{c}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - I_{zz3} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
{}^{3}n_{3(1,3)} &= \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\tfrac{1}{2} l_3 \ddot{\theta}_3 - g \,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3 \left(\left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2} l_3 s_3 \right) \dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2 \right) \right) \\
&\quad + I_{zz3} \ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_1^2
\end{aligned}
$$

İkinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{2}f_2 = \left[g \left(m_2 + m_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\, \ddot{\theta}_3 \right) \quad {}^{2}f_{2(1,2)} \quad {}^{2}f_{2(1,3)} \right]^T \tag{3.1041}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}f_{2(1,2)} &= -\left(2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + d_2 \ddot{\theta}_1 \right) \left(m_2 + m_3 \right) + l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \left(l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \right) \ddot{\theta}_1 \\
{}^{2}f_{2(1,3)} &= \left(\ddot{d}_2 - d_2 \dot{\theta}_1^2 \right) \left(m_2 + m_3 \right) - l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{s}_3 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2 \right) - \mathrm{c}_3\, \ddot{\theta}_3 \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{2}n_2 = \left[{}^{2}n_{2(1,1)} \quad {}^{2}n_{2(1,2)} \quad {}^{2}n_{2(1,3)} \right]^T \tag{3.1042}
$$

Matriste,

$$
\begin{aligned}
{}^{2}n_{2(1,1)} &= \left(I_{xx2} - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \left(d_2 + l_2 \right) - m_2 \left(\tfrac{1}{4} l_2^2 + \tfrac{1}{2} d_2 l_2 \right) + \mathrm{c}_3^2\, I_{xx3} \right) \ddot{\theta}_1 + \mathrm{s}_3^2 \left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad - \left(l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 + l_2 m_2 \right) \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 - \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \tfrac{1}{2} l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right) \\
{}^{2}n_{2(1,2)} &= -\tfrac{1}{2} g \left(l_2 m_2 + l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3\, \ddot{d}_2 + \left(I_{zz3} + \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \ddot{\theta}_3 \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3 \left(d_2 + l_2 \right) + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \dot{\theta}_1^2 \\
{}^{2}n_{2(1,3)} &= -\left(\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3 \left(l_2 + d_2 \right) + \mathrm{c}_3 \,\mathrm{s}_3 \left(I_{xx3} - I_{yy3} - \tfrac{1}{4} l_3^2 m_3 \right) \right) \ddot{\theta}_1 - l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\
&\quad + \left(\mathrm{c}_3^2 \left(\tfrac{1}{2} l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3} \right) + I_{zz3} + \mathrm{s}_3^2 \left(I_{xx3} - I_{yy3} \right) \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
$$

Birinci eklem için içedönük ardışık denklemler:

$$
{}^{1}f_1 = \left[{}^{1}f_{1(1,1)} \quad {}^{1}f_{1(1,2)} \quad g \left(m_2 + m_3 + m_1 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\, \ddot{\theta}_3 \right) \right]^T \tag{3.1043}
$$

Matriste,

$$
{}^{1}f_{1(1,1)} = -l_3 m_3 \,\mathrm{c}_3\, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left(m_2 + m_3 \right) \left(2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + d_2 \ddot{\theta}_1 \right) + \left(l_2 \left(\tfrac{1}{2} m_2 + m_3 \right) - \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \,\mathrm{s}_3 + \tfrac{1}{2} l_2 m_1 \right) \ddot{\theta}_1
$$

$$^{1}f_{1(1,2)} = -\left(m_2 + m_3\right)\left(\ddot{d}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2\right) - \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right) + l_2\left(\tfrac{1}{2}\left(m_2 + m_1\right) + m_3\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$^{1}n_1 = \left[\,^{1}n_{1(1,1)} \quad ^{1}n_{1(1,2)} \quad ^{1}n_{1(1,3)}\right]^T \tag{3.1044}$$

Matriste,

$$\begin{aligned}
^{1}n_{1(1,1)} &= \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\left(d_2 + l_2\right)\left(\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_3^2 + \mathrm{s}_3\,\ddot{\theta}_3\right) + \mathrm{c}_3\,\ddot{d}_2\right) - \left(\tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz3}\right)\ddot{\theta}_3 \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2 + l_2\right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + g\left(\tfrac{1}{2}l_2\left(m_2 - m_1\right) + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 - \left(m_2 + m_3\right)\left(d_2 + l_2\right)\right) \\
^{1}n_{1(1,2)} &= \left(\tfrac{1}{2}l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2 + l_2\right) + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right)\right)\ddot{\theta}_1 + l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\,\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\
&\quad - \left(I_{zz3} + \mathrm{s}_3^2\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right) + \mathrm{c}_3^2\left(\tfrac{1}{2}l_3^2 m_3 - I_{xx3} + I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
^{1}n_{1(1,3)} &= \left(d_2^2\left(m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{4}l_2^2\left(m_1 + m_2\right) + l_2^2 m_3 + \mathrm{s}_3^2\left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left(d_2 l_2\left(m_2 + 2m_3\right) - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(d_2 + l_2\right) + I_{xx2} + \mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + I_{zz1}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad - \left(l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2 + l_2\right) + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
&\quad - \left(l_2 m_2 + l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 - \left(d_2 + l_2\right)\left(2m_2 + 2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_2
\end{aligned}$$

Her bir eklem için tork değerleri:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(d_2^2\left(m_2 + m_3\right) + \tfrac{1}{4}l_2^2\left(m_1 + m_2\right) + l_2^2 m_3 + \mathrm{s}_3^2\left(I_{yy3} + \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3\right)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left(d_2 l_2\left(m_2 + 2m_3\right) - l_3 m_3\,\mathrm{s}_3\left(d_2 + l_2\right) + I_{xx2} + \mathrm{c}_3^2\,I_{xx3} + I_{zz1}\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad - \left(l_3 m_3\,\mathrm{c}_3\left(d_2 + l_2\right) + 2\,\mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - \tfrac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{yy3}\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
&\quad - \left(l_2 m_2 + l_3 m_3\,\mathrm{s}_3 - \left(d_2 + l_2\right)\left(2m_2 + 2m_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{d}_2
\end{aligned} \tag{3.1045}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \left(\ddot{d}_2 - d_2\dot{\theta}_1^2\right)\left(m_2 + m_3\right) - l_2\left(\tfrac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\mathrm{s}_3\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \mathrm{c}_3\,\ddot{\theta}_3\right)
\end{aligned} \tag{3.1046}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \tfrac{1}{2}l_3 m_3\left(\tfrac{1}{2}l_3\ddot{\theta}_3 - g\,\mathrm{s}_3 + \mathrm{c}_3\left(\left(d_2 + l_2 - \tfrac{1}{2}l_3\,\mathrm{s}_3\right)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2\right)\right) \\
&\quad + I_{zz3}\ddot{\theta}_3 + \mathrm{c}_3\,\mathrm{s}_3\left(I_{xx3} - I_{yy3}\right)\dot{\theta}_1^2
\end{aligned} \tag{3.1047}$$

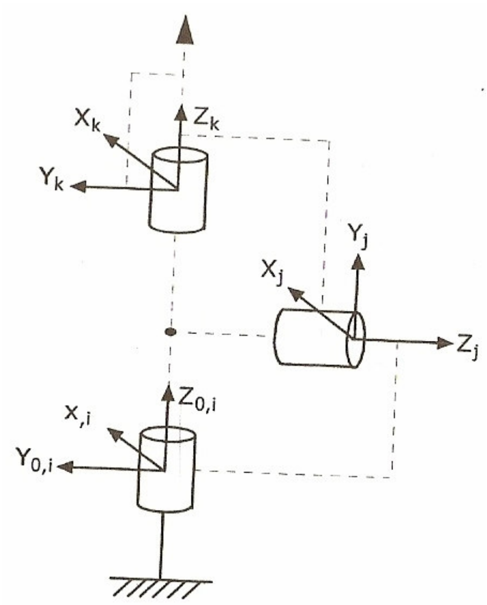
Sonuç olarak RR robotunun Lagrange-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.613, 3.614 ve 3.615'de görülen tork ifadeleri ile Newton-Euler yöntemi ile bulunan ve denklem 3.1045, 3.1046 ve 3.1047'de görülen tork ifadeleri aynı çıkmıştır.

BÖLÜM 4. ENDÜSTRİYEL ROBOTLAR İÇİN DİNAMİK ANALİZ YAPAN ARAÇ KUTUSU

4.1. Giriş

Bu bölümde 16 adet temel endüstriyel robotun dinamik analizini yapan robot araç kutusunun tanıtımı yapılmıştır. Robot araç kutusu Küçük ve Bingül tarafından Matlab programı kullanılarak geliştirilen ve endüstriyel robotlar için kinematik analiz yapan ROBOLAB isimli programı temel almıştır. Programın kütüphanesinde yer alan robotlara Euler bileği eklenerek altı serbestlik derecesi elde edilmiştir.

Endüstriyel robotlarda kullanılan bilek düzenleşimlerinden biri olan Euler bileği üç eklemden oluşmaktadır. Bu düzenleşimde üç eksen bir noktada kesişmektedir. Şekil 4.1'de Euler bileğinin eklem düzenleşimi görülmektedir. [18] Programda dinamik analizleri yapılan robotlarda kullanılan Euler bileğinin bağ uzunlukları sıfır kabul edilmiştir. Ayrıca Euler bileğini oluşturan bağların kütle merkezleri her üç eksenin kesişme noktası olan orijinde kabul edilmiştir.



Şekil 4.1: Euler bileğinin eklem düzenleşimi

Şekil 4.1 de yer alan Euler bileğinin DH parametreleri Tablo 4.1'deki gibi çıkarılır.

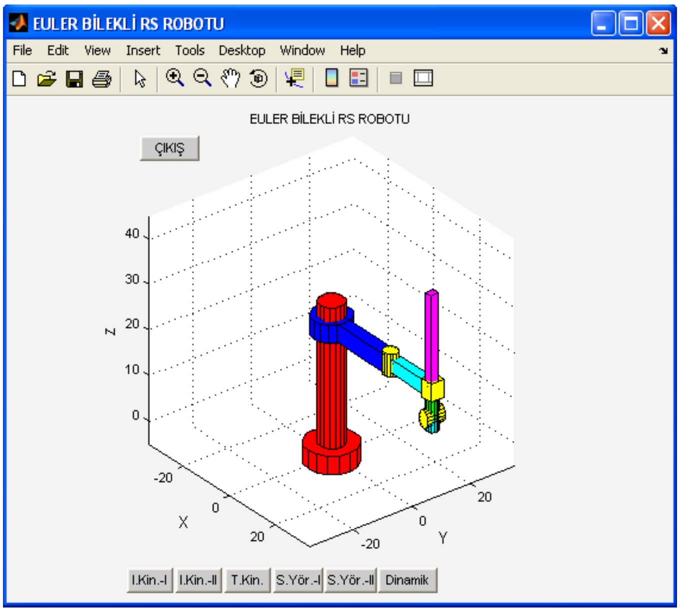
Tablo 4.1: Euler bileğinin DH parametreleri

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_i	0	0	0
2	θ_j	90	0	0
3	θ_k	-90	0	0

Araç kutusu kullanılarak robotların dinamik analizleri Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin her ikisi ile ayrı ayrı yapılabilmektedir. Bu bölümde programın özelliklerinin daha iyi tanıtılabilmesi için RS robotu örnek olarak seçilmiş ve bu robotun dinamik analizi ROBOLAB programı kullanılarak yapılmıştır.

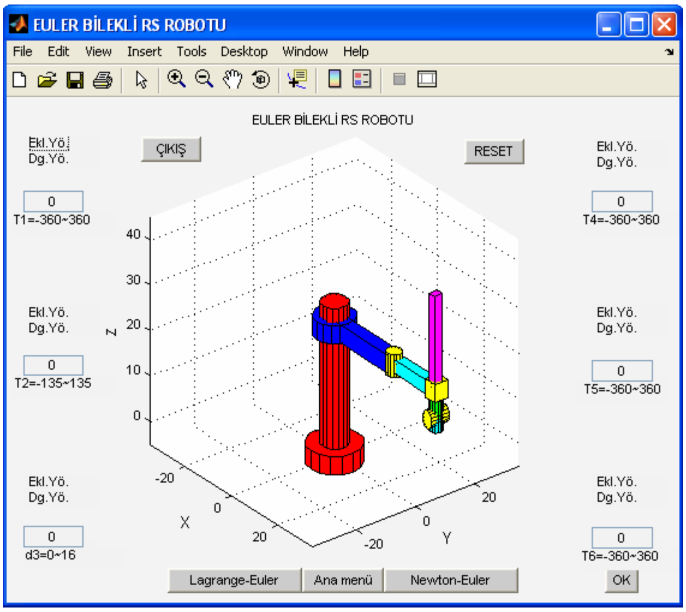
4.2. ROBOLAB Programı Kullanılarak RS Robotunun Dinamik Analizinin Yapılması

ROBOLAB programını kullanarak RS robotunun dinamik analizini yapabilmek için öncelikle programın kütüphanesinden RS robotunun seçilmesi gerekmektedir. Şekil 4.2' de bu durum görülmektedir.



Şekil 4.2: RS robotunun ana menüsü

Dinamik analiz yapabilmek için Şekil 4.2'de görülen Dinamik isimli buton tıklanır. Şekil 4.3'de bu butonun tıklanmasıyla oluşan ekran görüntüsü verilmiştir.



Şekil 4.3: RS robotunun dinamik analiz menüsü

Şekil 4.3 de yer alan yazım alanları dönel eklemler için açı değerlerinin, prizmatik eklem için ise uzunluk değerinin girilmesini sağlar. Ok butonu yazım alanlarına girilmiş olan değerlerin robot tarafından gerçekleştirilmesini, Lagrange-Euler butonu robotun dinamik analizinin Lagrange-Euler yöntemiyle yapılmasını, Newton-Euler butonu da robotun dinamik analizinin Newton-Euler yöntemiyle yapılmasını sağlar. Ayrıca şekil üzerinde yer alan reset butonu robotun başlangıç anındaki pozisyonuna gelmesini, ana menü butonu robolab programın ana menüsüne dönülmesini ve son olarak çıkış butonu da programın kapatılmasını sağlar.

Lagrange-Euler butonunu kullanılarak robotun dinamiğinde hesaplanan şu özellikler görüntülenebilir.

•Robotun kütle matrisinin her bir elemanı, coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü ve yer çekimi vektörü.

•Her bir ekleme etki eden tork değerleri ve uç işlevciye etki eden kartezyen kuvvetler.

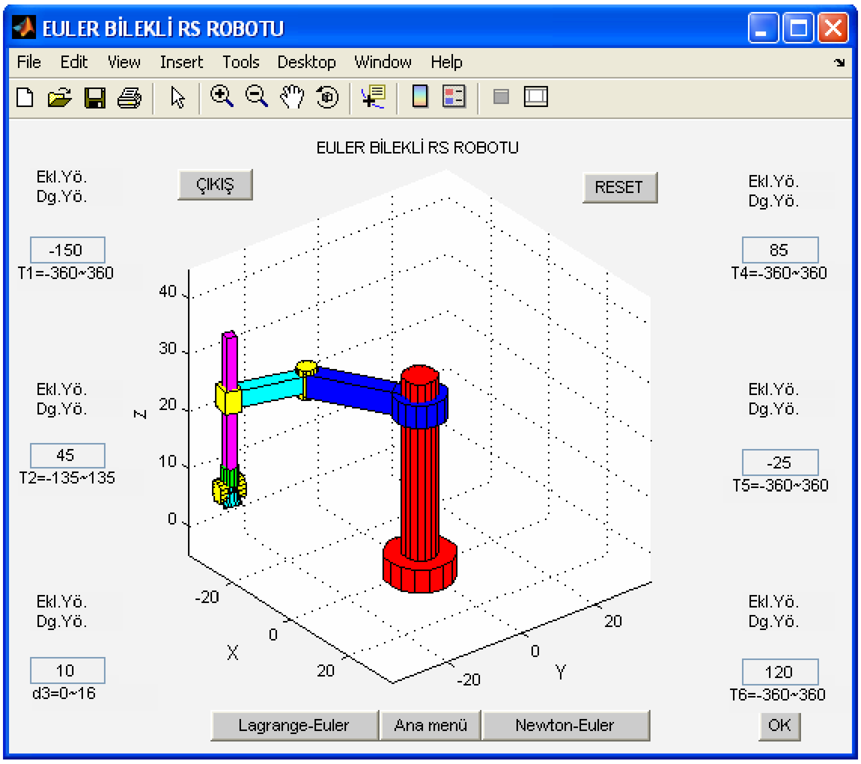
•Eklemlere etki eden ivme değerleri ve uç işlevciye etki eden kartezyen ivme değerleri

•Robotun toplam potansiyel ve kinetik enerjisi

•Robotun kütle matrisinin öz değerleri

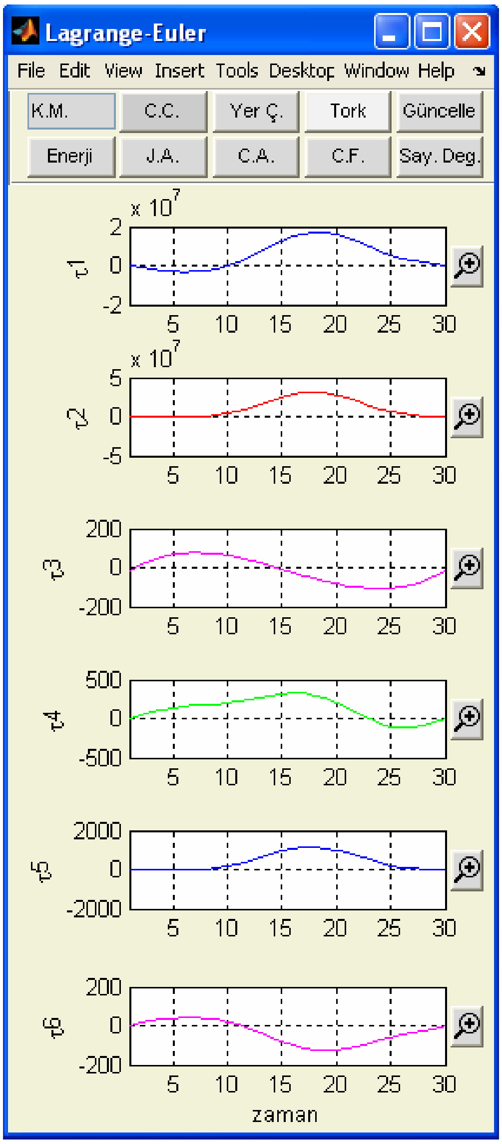
Bu değerler hem sayısal değerler olarak hem de grafik olarak görüntülenebilir.

Yukarıda verilen özelliklerin gösterilebilmesi için RS robotunun eklemlerine şu değerler girilerek robot hareket ettirilsin. T1=-150^0, T2=45^0, T4=85^0, T5=-25^0, T6=120^0 ve d3=10. Robotun eklemlerine bu değerler uygulanması sonucundaki durumu Şekil 4.4'de görülmektedir.



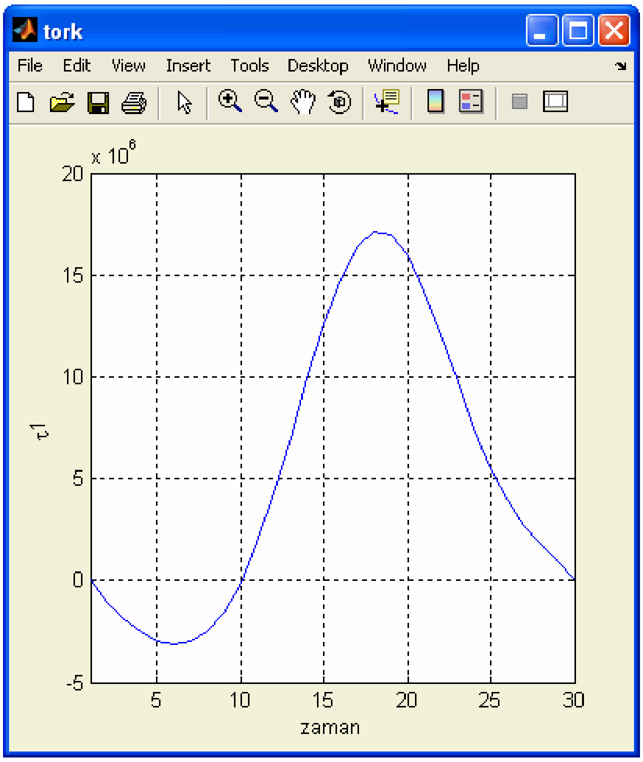
Şekil 4.4: RS robotunun eklemlerine açı değerlerinin girilmesi ve hareketin gerçekleştirilmesi

Şekil 4.4'te görülen Lagrange-Euler butonuna tıklanmasıyla ekrana Lagrange-Euler isimli figür gelmektedir. Bu figürde ilk açılışta robotun her bir eklemine etki eden tork değerleri görülmektedir. Figür üzerinde yer alan "τ", eklem torkları, "C.C" coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, "J.A" eklem ivmeleri, "C.A" uç işlevciye etki eden kartezyen ivmeleri ve "C.F" uç işlevciye etki eden kartezyen kuvvetler anlamına gelmektedir. Şekil 4.5'te Lagrange-Euler yöntemi ile elde edilen tork değerleri görülmektedir.



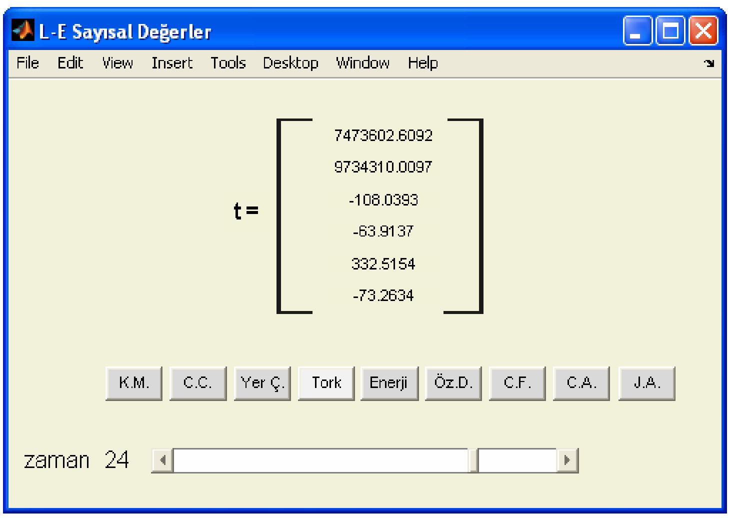
Şekil 4.5: Lagrange-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerleri

Herhangi bir ekleme etki eden tork değerinin detaylı çiziminin görülmesi için Şekil 4.5'te görülen büyütme butonları kullanılır. Örnek olarak Şekil 4.6'da robotun ilk eklemine etki eden tork değerinin detaylı çizimi görülmektedir.



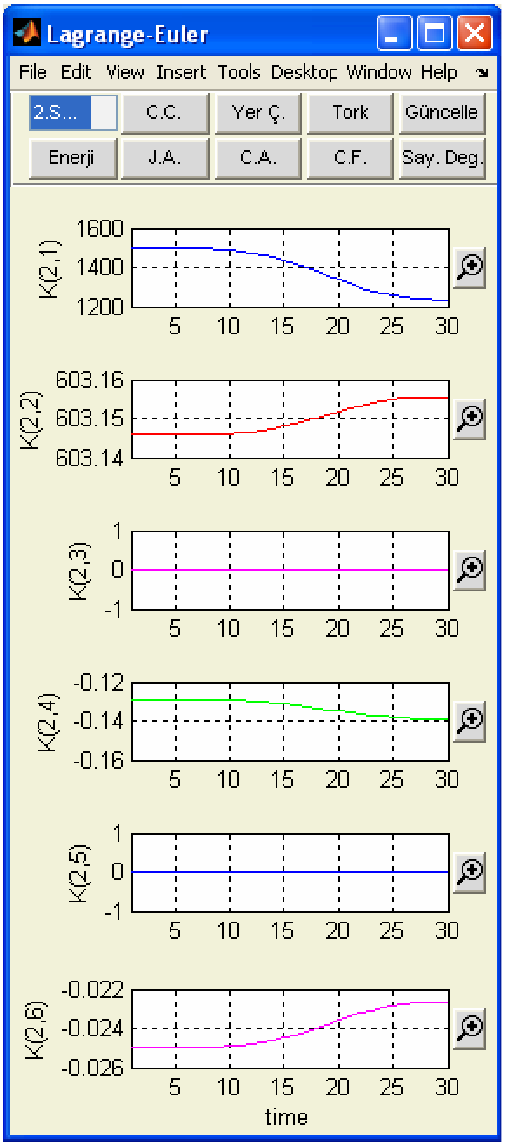
Şekil 4.6: İlk ekleme ait tork değerinin detaylı çizimi

Lagrange-Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların anlık sayısal değerleri "Say. Deg" isimli buton kullanılarak görülebilir. ROBOLAB programında robotun bir pozisyondan diğer bir pozisyona geçişi sırasında geçen zaman otuza bölünmüştür. Bu nedenle robotun anlık sayısal değerleri otuz adımlık bir slider kullanılarak görülebilir. Örnek olarak Şekil 4.7'de robotun eklemlerine etki eden tork değerlerinin 24. zaman aralığındaki sonuçları görülmektedir.



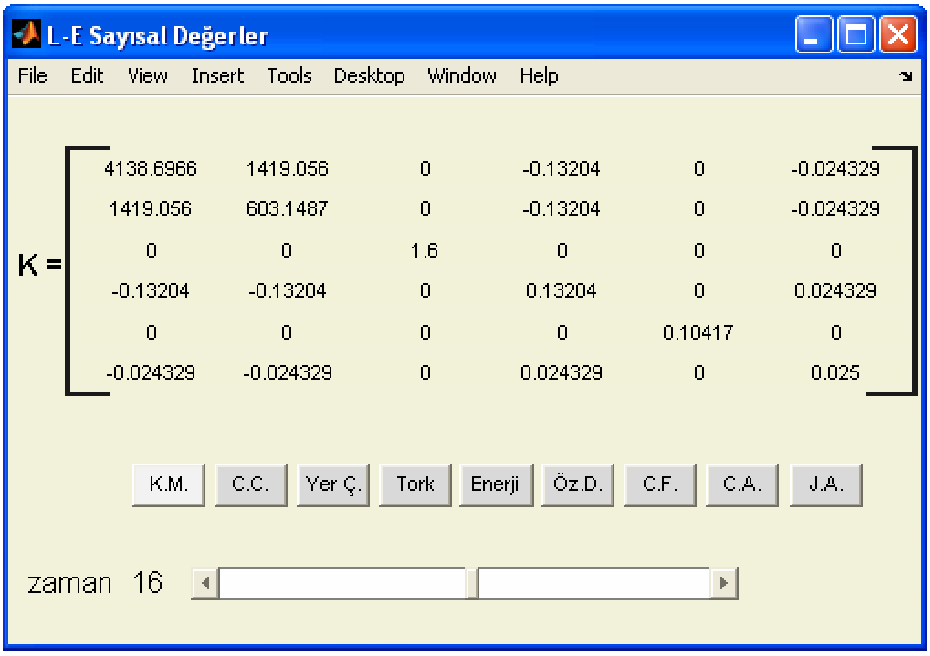
Şekil 4.7: İlk ekleme ait tork değerlerinin 24. zaman aralığındaki sayısal değerleri

RS robotu altı eklemli olduğu için bu robotun toplam kütle matrisi otuzaltı elemanlı olmaktadır. Kütle matrisinin her bir elemanı "K.M" isimli pop-up menü kullanılarak görülebilir. Örneğin kütle matrisinin ikinci satır beşinci sutun elemanını görmek için pop-up menüden "2. satır elemanları" isimli seçenek seçilmelidir. Bu durum şekil 4.8'de görülmektedir. "K.M" kısaltması kütle matrisini, "K(m,n)" ifadesi de kütle matrisinin m'inci satır ve n'inci sutun elemanını göstermektedir. Burada m=1,2,…,6 ve n=1,2,…,6'dir.



Şekil 4.8: RS robotunun kütle matrisinin ikinci satır elemanları

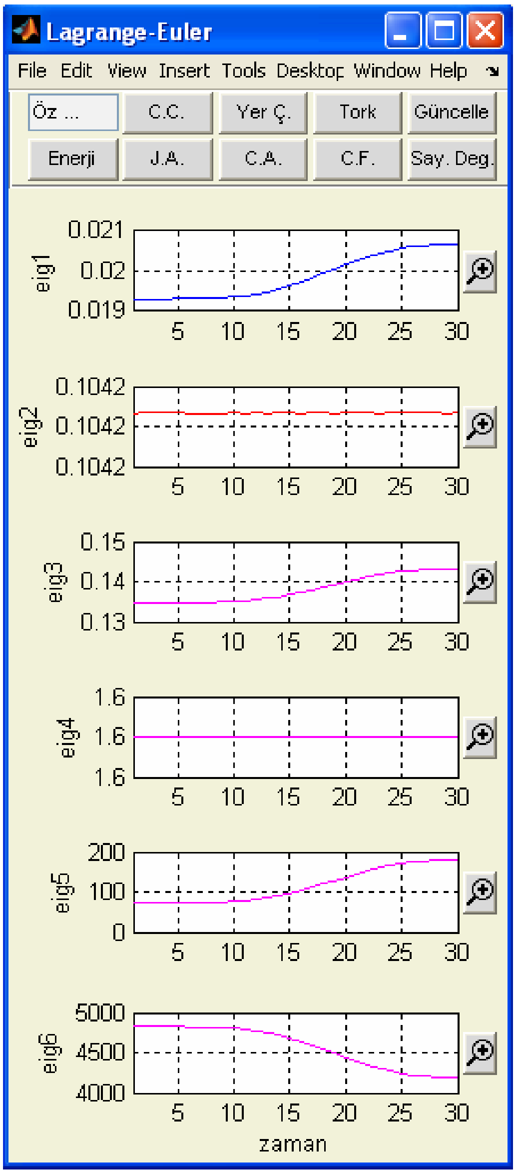
Kütle matrisinin elemanları, herhangi bir zaman anında bir matris şeklinde görülebilir. Şekil 4.9'da robotun kütle matrisinin 16. zaman aralığındaki değerleri görülmektedir. Buradan robotun kütle matrisinin simetrik olduğu kolaylıkla görülebilir.



Şekil 4.9: RS robotunun kütle matrisinin 16. zaman aralığındaki sayısal değerleri

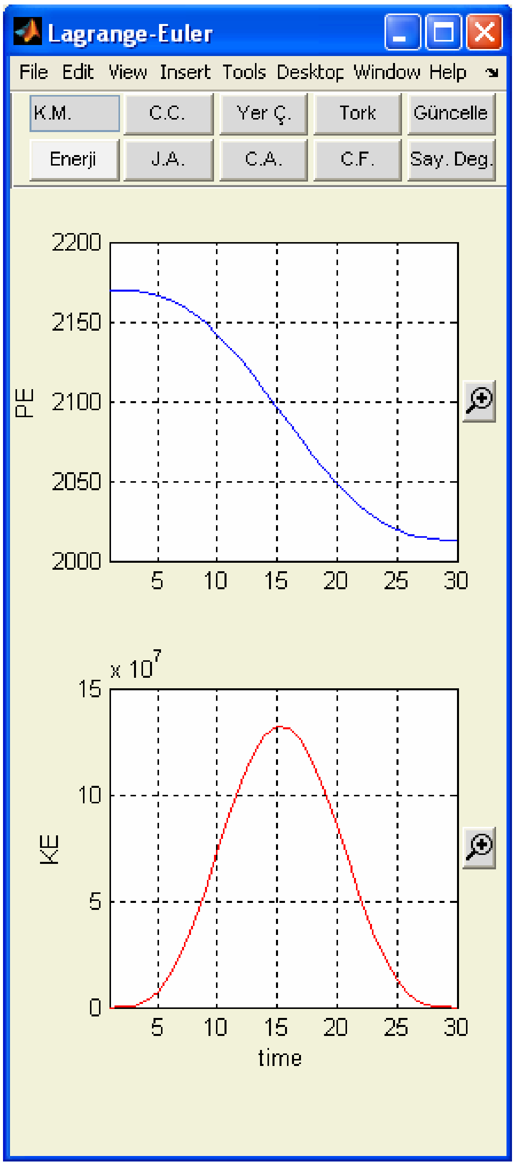
RS robotu altı eklemli olduğu için bu robotun kütle matrisinin altı tane öz değeri vardır. Bu değerler “K.M” isimli pop-up menü kullanılarak görülebilir. Bunun için pop-up menüden “Öz Deg.” isimli seçeneğin seçilmesi gerekir.

Öz değerlerin grafikleri veya sayısal değerleri iyi incelenirse bu değerlerin robotun hareketi sırasında hiçbir zaman sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olmadıkları görülür. Bu durum kütle matrisini pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu gösterir. Şekil 4.10’da kütle matrisinin öz değerleri görülmektedir. eig1, eig2,…..eig6 ifadeleri kütle matrisinin öz değerlerini ifade etmektedir.



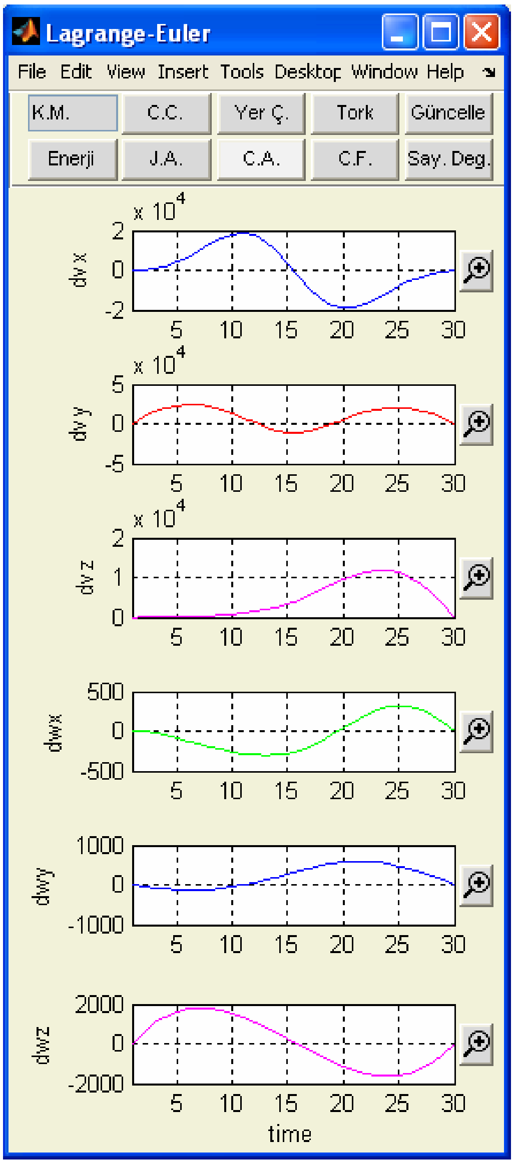
Şekil 4.10: RS robotunun kütle matrisinin öz değerleri

Robotun toplam potansiyel ve kinetik enerjisi "Enerji" isimli buton kullanılarak görülebilir. Bu durum Şekil 4.11'de görülmektedir.



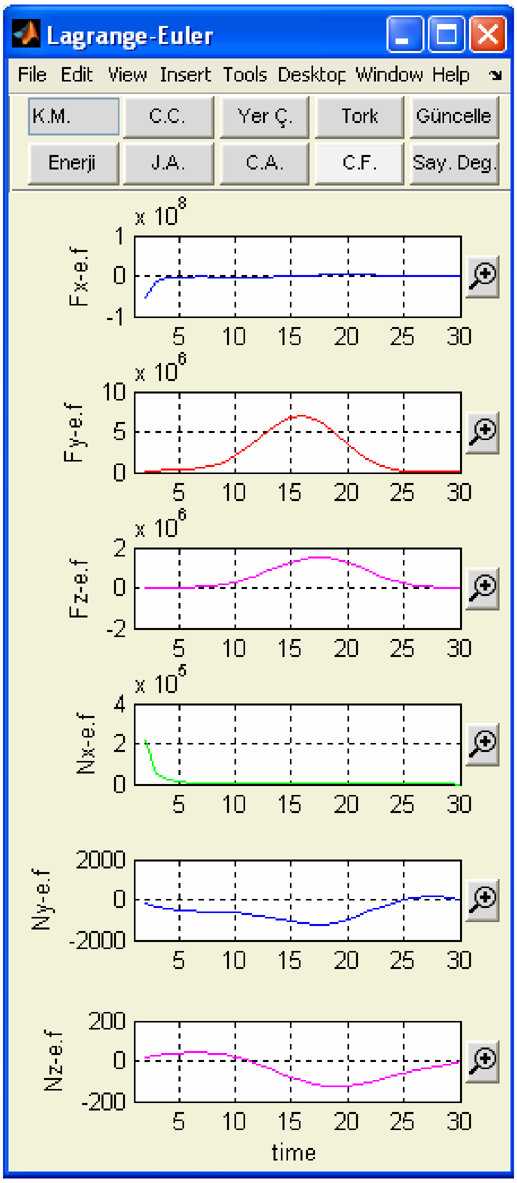
Şekil 4.11: RS robotunun toplam potansiyel ve kinetik enerjisi

Robotun uç işlevcisine etki eden açısal ve doğrusal ivme değerleri "C.A" isimli buton kullanılarak görüntülenebilir. Bu durum Şekil 4.12'de görülmektedir. Şekilde yer alan dvx, dvy ve dvz, uç işlevciye x, y ve z eksenleri boyunca etki eden doğrusal ivmeleri ve dwx, dwy ve dwz ise uç işlevciye x, y ve z eksenleri boyunca etki eden açısal ivmeleri ifade etmektedir.



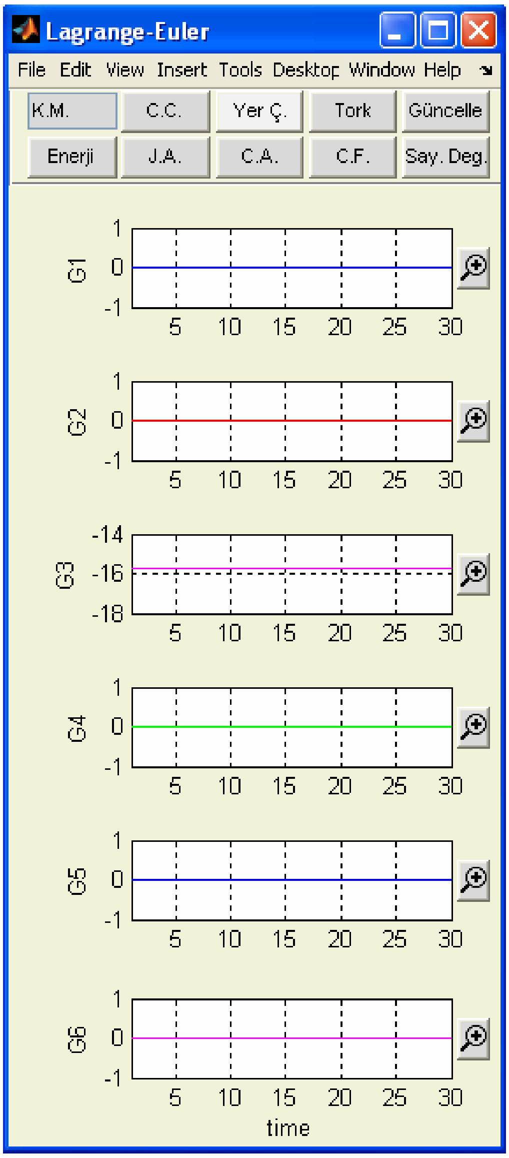
Şekil 4.12: Robotun uç işlevcisine etki eden açısal ve doğrusal ivme değerleri

Robotun uç işlevcisine etki eden tork/kuvvet vektörü ise "C:F" isimli buton kullanılarak görülebilir. Bu durum Şekil 4.13'de görülmektedir. Burada yer alan Fx-e.f, Fy-e.f ve Fz-e.f, uç işlevciye x, y ve z eksenleri boyunca etki eden doğrusal kuvvetleri ve Nx-e.f, Ny-e.f ve Nz-e.f ise uç işlevciye x, y ve z eksenleri boyunca etki eden açısal kuvvetleri ifade etmektedir.



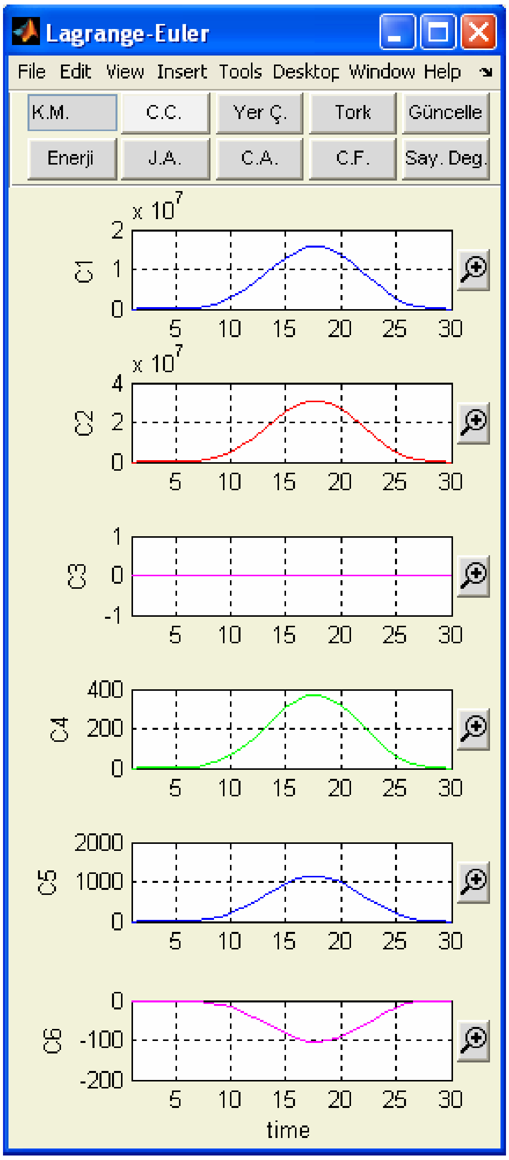
Şekil 4.13: Robotun uç işlevcisine etki eden açısal ve doğrusal kuvvetler

Robota etki eden yer çekimi vektörü “Yer Ç.” isimli buton kullanılarak görüntülenebilir. Bu durum şekil 4.14’de görülmektedir.



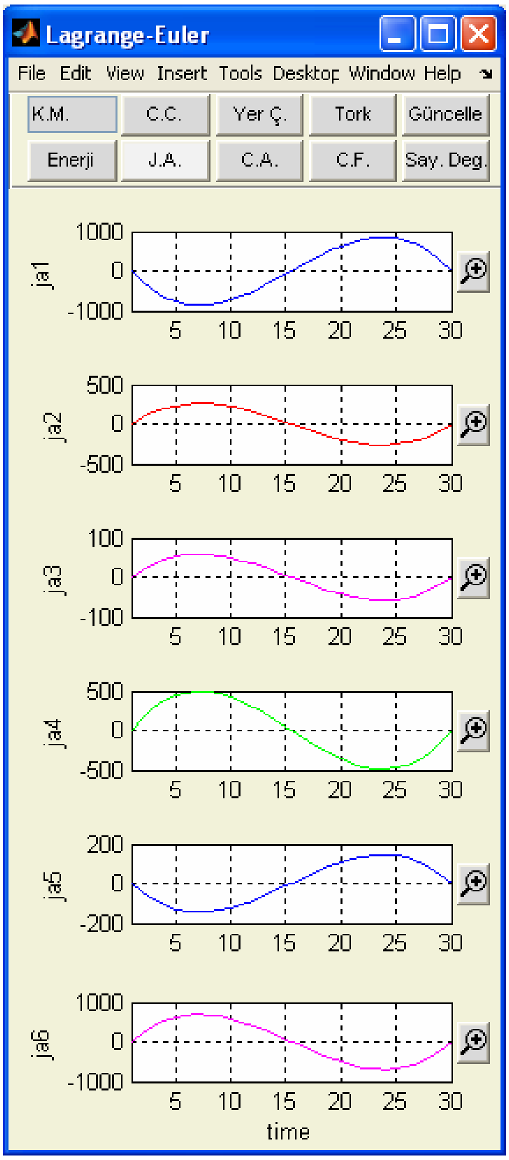
Şekil 4.14: Robota etki eden yerçekimi kuvveti

Robota etki eden Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü "C.C" isimli buton kullanılarak görülebilir. Bu durum şekil 4.15'de görülmektedir.



Şekil 4.15: Robota etki eden coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü elemanları

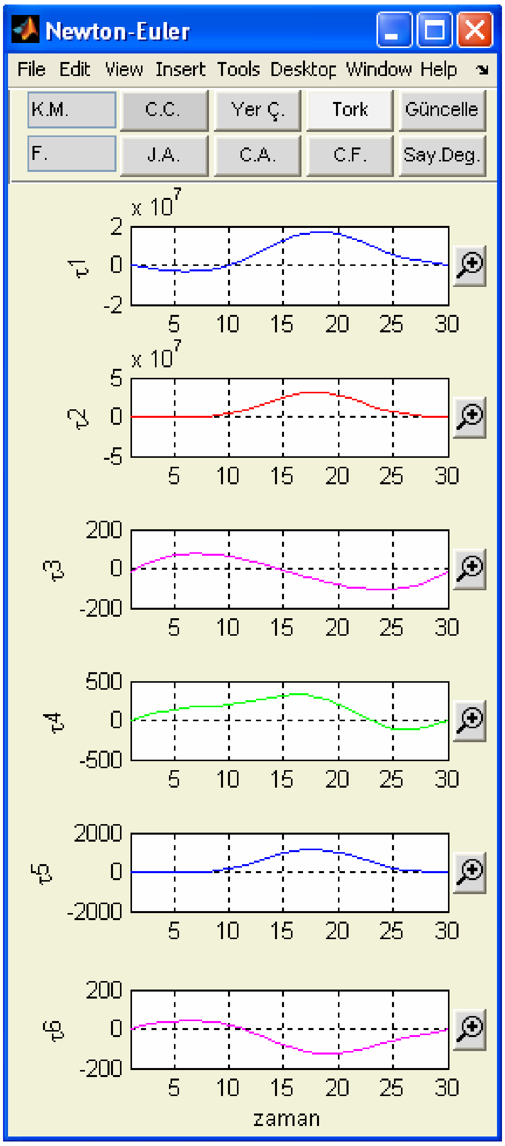
Robotun her bir ekleminin ivme değerleri de “J.A” isimli buton kullanılarak görülebilir. Bu durum Şekil 4.16 da görülmektedir.



Şekil 4.16: Robotun her bir ekleminin ivme değerleri

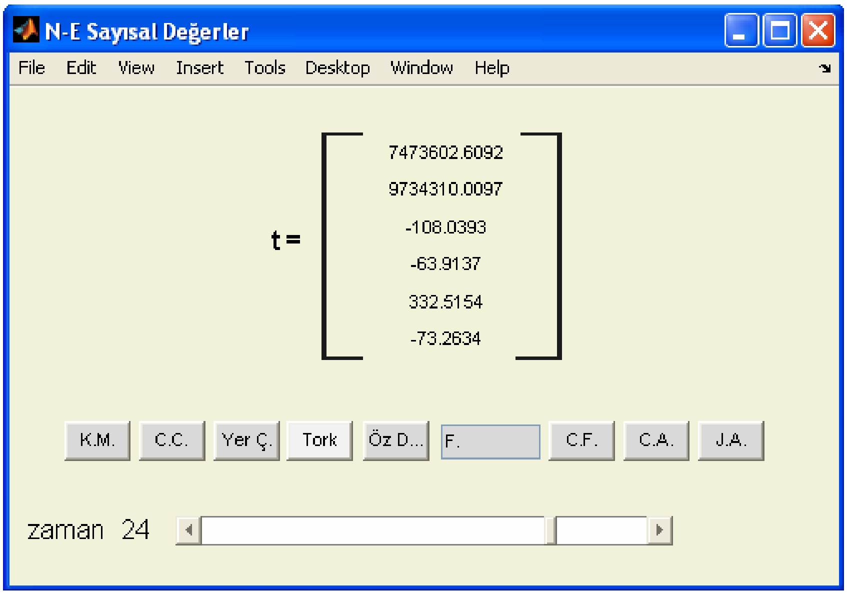
Figür üzerinde yer alan "güncelle" butonu robotun eklemlerine yeni açı değerleri girildiği zaman dinamiğin bu değerlere göre yeniden hesaplanmasını sağlar.

RS robotunun dinamik analizini Newton-Euler yöntemi ile yapmak için ise programın dinamik ana menüsünden "Newton-Euler" butonu kullanılır. Bu butona tıklanıldığında "Newton-Euler" isimli figür ekrana gelmektedir ve Lagrange-Euler yönteminde olduğu gibi ilk açıldığında robotun her bir eklemine etki eden tork değerlerini getirir. Bu durum Şekil 4.17'de görülmektedir.



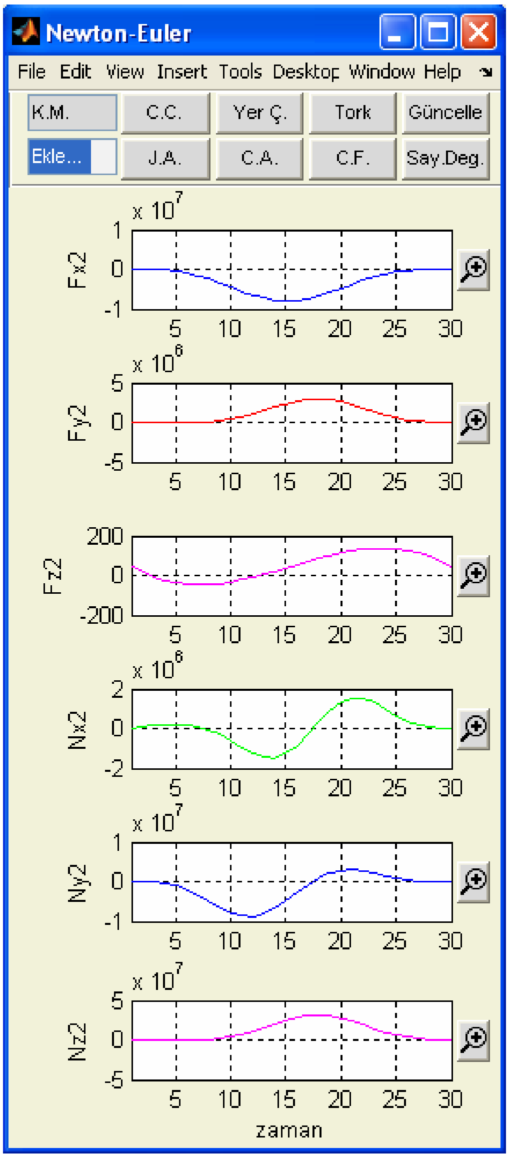
Şekil 4.17: Newton-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerleri

Newton-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerleri Lagrange-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerleri ile aynıdır. Bu durum Şekil 4.17 ve Şekil 4.5 incelenerek kolaylıkla görülebilir. Ayrıca Newton-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerlerinin 24. zaman aralığındaki sayısal ifadeleri de Şekil 4.18'de verilmiştir ve bu değerler de şekil 4.7'deki değerlerle karşılaştırılarak aynı oldukları görülebilir.



Şekil 4.18: Newton-Euler yöntemiyle elde edilen tork değerlerinin 24. zaman aralığındaki sayısal değerleri

ROBOLAB programında Newton-Euler yöntemini Lagrange-Euler yönteminden ayıran en önemli özellik, robotun her bir eklemine etki eden doğrusal ve açısal kuvvetleri vermesidir. Newton-Euler isimli figür üzerinde yer alan "F." İsimli pop-up menü kullanılarak bu değerlere ulaşılabilir. Örneğin ikinci ekleme etki eden kuvvetleri görmek için "F." isimli pop-up menüden "Eklem 2" seçeneği seçilmelidir. Bu durum Şekil 4.19'da görülmektedir. Şekil üzerinde yer alan Fx2, Fy2 ve Fz2 ifadeleri ikinci ekleme sırasıyla x, y, z eksenlerinde etki eden doğrusal kuvvetleri, Nx2, Ny2, Nz2 ifadeleri ise ikinci ekleme sırasıyla x, y, z eksenlerinde etki eden açısal kuvvetleri göstermektedir.



Şekil 4.19: Newton-Euler yöntemiyle elde edilen, robotun 2. eklemine etki eden kuvvetler

Newton-Euler isimli figür üzerinde yer alan diğer butonlar kullanılarak Lagrane-Euler yönteminde olduğu gibi robota ait kütle matrisi, Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, yer çekimi ivmesi vektörü, eklem ivme değerleri, uç işlevciye etki eden kuvvetler ve uç işlevciye etki eden ivme değerleri de görülebilir. Bu butonların kullanımı Lagrange-Euler isimli figür üzerinde yer alan butonlarla aynıdır.

Sonuç olarak her iki yöntem de robotun aynı pozisyonu için kullanabilir ve elde edilen sonuçlar karşılaştırabilir

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde ilk olarak onaltı adet endüstriyel robotun dinamik denklemlerinin çıkarılmasında kullanılan Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin işlem süreleri karşılaştırılmıştır. İlerleyen kısımlarda ise tez çalışması sırasında karşılaşılan zorluklar, elde edilen sonuçlar ve bu konuda çalışacak diğer araştırmacılara öneriler sunulmuştur.

Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemlerinin işlem sürelerinin karşılaştırılması için öncelikle Euler bileği eklenmiş temel onaltı adet endüstriyel robotun dinamik denklemleri her iki yöntemle sembolik olarak üretilmiştir. Bu işlemler sırasında geçen süreler Matlab programının Profiler isimli modülü kullanılarak saniye cinsinden hesaplanmıştır. Tablo 5.1 de robotların dinamik denklemlerinin Lagrange-Euler yöntemi ile elde edilmesi sırasında geçen süre, Tablo 5.2 de ise Newton-Euler yöntemi ile elde edilmesi sırasında geçen süre verilmiştir. Tablolar oluşturulurken her iki yöntem için ara adımlar belirlenmiş ve bütün adımlar için geçen süreler ayrı ayrı kaydedilmiştir. Lagrange-Euler yönteminin işlem adımları şu şekilde belirlenmiştir: Her bir bağa ait kütle matrisinin hesaplanması, robotun toplam kütle matrisinin elde edilmesi, coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün bulunması, yerçekimi ivmesinin bulunması ve son olarak tork vektörünün bulunması birer adım olarak alınmıştır. Newton-Euler yönteminin işlem adımları ise şu şekilde belirlenmiştir: Her bir eklem için dışa dönük ardışık denklemlerin elde edilmesi, her bir eklem için içe dönük denklemlerin elde edilmesi ve son olarak tork vektörünün bulunması birer adım olarak alınmıştır.

Robotların dinamik denklemleri üretilirken Matlab programı ve 1.73 ghz işlemcili ve 798 MHz, 1 GB RAM özelliklerine sahip bir bilgisayar aynı şartlar altında kullanılmıştır.

Tablo 5.1: Lagrange-Euler yöntemi için işlem basamaklarının hesaplanma süreleri

İşlem	SS	SC	SR	SN	RS	RR	RN	RC	NS	NR	NN	NC	CS	CR	CN	CC
$D_{(q_1)}$	0,09	0,09	0,08	0,08	0,09	0,08	0,09	0,08	0,07	0,08	0,08	0,09	0,08	0,07	0,07	0,08
$D_{(q_2)}$	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08	0,08	0,09
$D_{(q_3)}$	0,08	0,1	0,1	0,11	0,09	0,09	0,12	0,09	0,09	0,11	0,14	0,09	0,1	0,1	0,09	0,08
$D_{(q_4)}$	0,1	0,08	0,11	0,12	0,09	0,12	0,2	0,12	0,13	0,23	0,25	0,13	0,1	0,12	0,14	0,11
$D_{(q_5)}$	0,09	0,12	0,18	0,22	0,15	0,24	0,42	0,24	0,24	0,58	0,61	0,24	0,12	0,23	0,23	0,18
$D_{(q_6)}$	0,13	0,25	0,4	0,56	0,31	0,52	1,06	0,55	0,55	1,38	1,4	0,59	0,23	0,57	0,55	0,43
$D_{(q)}$	0,11	0,44	0,96	1,99	0,53	2,05	5,59	2,04	2,11	10,44	11,85	1,48	0,43	1,98	2,03	0,95
C	1,21	1,46	1,83	2,65	1,47	2,62	4,69	2,67	2,82	8,24	8,77	2,8	1,52	2,69	2,61	1,86
G	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03
τ	0,02	0,07	0,13	0,28	0,06	0,26	0,74	0,27	0,29	1,36	1,46	0,28	0,07	0,27	0,29	0,12
Toplam	1,95	2,73	3,91	6,13	2,91	6,1	13,03	6,18	6,43	22,55	24,69	5,83	2,77	6,15	6,13	3,93

Tablo 5.2: Newton-Euler yöntemi için işlem basamaklarının hesaplanma süreleri

işlem	SS	SC	SR	SN	RS	RR	RN	RC	NS	NR	NN	NC	CS	CR	CN	CC
${}^1F_1, {}^1N_1$	0,13	0,16	0,12	0,11	0,14	0,15	0,14	0,19	0,12	0,15	0,15	0,13	0,14	0,13	0,11	0,14
${}^2F_2, {}^2N_2$	0,12	0,13	0,14	0,12	0,14	0,12	0,13	0,12	0,14	0,13	0,14	0,14	0,12	0,11	0,14	0,12
${}^3F_3, {}^3N_3$	0,14	0,13	0,13	0,15	0,12	0,14	0,15	0,15	0,13	0,15	0,15	0,14	0,13	0,14	0,14	0,15
${}^4F_4, {}^4N_4$	0,13	0,14	0,14	0,14	0,15	0,16	0,15	0,14	0,14	0,16	0,16	0,14	0,14	0,16	0,14	0,14
${}^5F_5, {}^5N_5$	0,13	0,15	0,14	0,15	0,14	0,16	0,15	0,15	0,16	0,18	0,19	0,17	0,15	0,15	0,15	0,15
${}^6F_6, {}^6N_6$	0,14	0,16	0,16	0,18	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,21	0,21	0,17	0,18	0,16	0,18	0,16
${}^6f_6, {}^6n_6$	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02	0,03	0,02	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
${}^5f_5, {}^5n_5$	0,06	0,1	0,08	0,11	0,07	0,11	0,13	0,1	0,11	0,19	0,19	0,12	0,08	0,1	0,12	0,08
${}^4f_4, {}^4n_4$	0,08	0,11	0,11	0,17	0,09	0,18	0,2	0,16	0,17	0,36	0,34	0,22	0,1	0,18	0,17	0,13
${}^3f_3, {}^3n_3$	0,09	0,16	0,17	0,29	0,14	0,3	0,36	0,27	0,28	0,68	0,65	0,3	0,15	0,26	0,3	0,18
${}^2f_2, {}^2n_2$	0,1	0,28	0,31	0,55	0,17	0,57	0,66	0,52	0,33	1,36	1,37	0,46	0,2	0,48	0,52	0,32
${}^1f_1, {}^1n_1$	0,12	0,35	0,54	1,09	0,33	0,59	1,38	0,64	0,63	2,83	2,68	1,03	0,21	0,56	1,08	0,4
τ	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
Toplam	1,255	1,895	2,065	3,085	1,645	2,675	3,645	2,645	2,405	6,435	6,265	3,045	1,625	2,455	3,075	1,995

Her iki tablo incelendiğinde şu sonuçlar elde edilmiştir.

Bütün eklem düzenleşimleri için dinamik denklemler üretilirken Newton-Euler yöntemi, Lagrange-Euler yönteminden daha kısa sürede tork ifadelerini üretmiştir.

Eklem düzenleşimlerine göre işlem süreleri değişmektedir. Buna göre eklem yapısında prizmatik eklem bulunan robotların işlem süreleri daha kısa olmaktadır. Eklem düzenleşimi RRRRRR olan NN robotu için geçen süre Lagrange-Euler yöntemi ile 22,55 s, Newton-Euler yöntemi ile 6,435 s olarak hesaplanmıştır. Bu robottan farklı olarak eklem düzenleşiminde bir dönel eklem yerine bir prizmatik eklem bulunan (RPRRRR) RR robotu için aynı süreler sırasıyla 6,1 s ve 2,675 s olarak hesaplanmıştır. Robotun eklem yapısındaki prizmatik eklem sayısı arttıkça dinamik denklem üretilirken geçen süre de azalmaktadır.

Eklem düzenleşimleri aynı olan fakat eklemlerin birbirine göre durumları farklı olan robotların işlem süreleri de her iki yöntem için farklı olarak hesaplanmıştır. Buna göre eklemleri birbirine paralel olan robotların denklemlerinin hesaplanma süreleri eklemleri birbirine paralel olmayan robotlarınkinden daha kısa olmuştur. İlk üç eklemi birbirine paralel olan RS robotunun denklemlerinin hesaplanma süreleri Lagrange-Euler yöntemi ile 2,91 s, Newton-Euler yöntemiyle ise 1,645 s olarak hesaplanmıştır. RS ile aynı eklem yapısına sahip olan ancak eklemleri birbirine paralel olmayan NS robotu için bu süreler sırasıyla 6,43 s ve 2,405 s olmuştur.

•Dinamik analiz işlemi, uygulanan yönteme göre farklılık gösterse de işlem yükü çok fazla olan ve buna bağlı olarak da hataya açık bir işlemdir. Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde onaltı adet temel endüstriyel robotun Lagrange-Euler ve Newton-Euler yöntemleri ile dinamik analizleri yapılmıştır. Yapılan analizde robotların dinamik denklemleri sembolik olarak ifade edilmiştir. Analizi yapılan robotlar üç serbestlik derecesine sahip oldukları halde özellikle üç dönel ekleme sahip robotların (örn. NN robotu) sembolik çözümleri işlem yükü açısından çok fazla zaman ve dikkat gerektirmektedir. Robotların serbestlik dereceleri arttıkça bu işlem yükü de artmaktadır. Bu nedenle dinamik denklemler üretilirken bilgisayar yazılımlarının kullanılması son derece önemlidir. Tez çalışmasının ikinci bölümünde dinamik analiz için Scientific Notebook yazılımı kullanılmıştır.

•Robotların dinamik analizlerinin sayısal olarak yapılması işlem yükünün azalmasını sağlamaktadır; ancak sayısal çözümün gerçekleştirilebilmesi kullanılan yöntemin özelliğine bağlı olarak değişmektedir. Örneğin tez çalışmasının dördüncü bölümünde yer alan araç kutusunda robotların dinamik analizlerinin sonuçları sayısal olarak üretilmektedir. Bu aşamada Lagrange-Euler yöntemi ile analiz yapılırken doğrudan sayısal çözüm elde edilememiştir. Robotların dinamik denklemleri öncelikle sembolik olarak elde edilmiş ardından bu denklemler kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Bunun nedeni Lagrange-Euler yönteminin yapısında yer alan türev alma işleminin sayısal değerlere uygulanamamasıdır. Bundan farklı olarak Newton-Euler yönteminde aynı durum söz konusu değildir. Dinamik analiz işlemi tamamen sayısal olarak elde edilebilmektedir.

•Endüstriyel robotların dinamik analizleri yapılırken hata kontrolü doğru denklemlerin üretilebilmesi açısından çok önemlidir. Özellikle işlem yükü dikkate alındığında bu durum daha da önem kazanmaktadır. Bu nedenle kullanılan yöntemin özelliğine bağlı olarak, yöntemin her adımında elde edilen sonuçların doğruluğunun kontrol edilmesi gerekir. Örneğin Lagrange-Euler yönteminde her bir eklem için işlem yaparken robotu oluşturan bağların kütle merkezlerinin koordinatlarının doğru olup olmadığının kontrol edilmesi, aynı bağ için elde edilen kütle matrisinin doğru elde edilmesi açısından önemlidir. Bunun dışında robotun toplam kütle matrisi elde edildikten sonra bu matrisin simetrik olup olmadığının kontrol edilmesi, sonucun doğru olup olmadığını gösteren bir parametredir. Hata kontrolünün yapılmasının bir diğer yolu aynı dinamik analizi farklı bir yöntem ile yaparak sonuçların karşılaştırılmasıdır. Bu şekilde, kullanılan yöntemlerin herhangi birinde hata yapıldığında sonuçlar eşit olarak çıkmayacaktır. Bu tez çalışmasının ikici bölümünde hata kontrolünün yapılması için robotların dinamik analizi iki farklı yöntemle çıkarılmış ve aynı sonuçların elde edildiği görülmüştür.

•Bir benzetim programı geliştirilirken kullanılan yazılımın benzetim programının amacına uygun araçlara sahip olması önemlidir. Bu tez çalışmasında geliştirilen dinamik analiz araç kutusu tasarlanırken MATLAB yazılımı kullanılmıştır. Bu yazılım bilimin hemen her alanında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır; ve benzetim programları hazırlamak için oldukça yararlı araçlar içeren bir GUI ye sahiptir. Ayrıca dinamik analiz yapılırken denklemlerin sembolik olarak üretilmesini sağlayan Symbolic Toolbox isimli bir araç kutusu da vardır. Bu araç kutusunda bulunan fonksiyonlar bu tez çalışmasında geliştirilen benzetim programında oldukça yaygın olarak kullanılmışlardır.

•Geliştirilen benzetim programının hangi amaçla kullanılacağı bu benzetim programının tasarımında önemli bir yere sahiptir. Örneğin endüstride kullanılacak bir benzetim programı modellenen sistemin bütün özelliklerini ayrıntıları ile birlikte modelleyebilmelidir. Bununla birlikte eğitim amaçlı olarak hazırlanan bir benzetim programı bütün ayrıntılar yerine modellenen sistemin temel özelliklerini ve öğrencinin eğitimini tamamlayan bir özellikte tasarlanmalıdır. Bu tez çalışmasında geliştirilen araç kutusu endüstriyel robotların temel özellikleri dikkate alınarak tasarlanmıştır. Örneğin bu araç kutusu kullanılarak bir robotun dinamik analizi yapıldığında robotun kütle matrisinin simetrik olduğu hem grafiksel olarak hem de sayısal olarak, anlık veriler şeklinde görüntülenebilir. Ayrıca robot kontrolünde önemli bir yere sahip olan kütle matrisinin öz değerleri de aynı şekilde görüntülenebilir. Bunların dışında eğitim amaçlı geliştirilen bir benzetim programı, konusunun temel örneklerini bünyesinde bulundurmalıdır. Örneğin bu tez çalışmasında geliştirilen yazılıma temel teşkil eden ROBOLAB yazılımı endüstriyel robotların temel örneklerini, scara, puma, standford arm robotlarını bünyesinde barındırmaktadır.

Bu tez çalışmasında geliştirilen yazılımın bundan sonra yapılacak çalışmalarda robot kontrolünü de içerecek şekilde geliştirilmesi. Endüstriyel robotların katı gövde yapısının kullanıcı tarafından tasarlanabilecek hale getirilmesi. Robotlara eklem kaçıklıklı bileklik eklenebilmesi çalışmalarının yapılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Paul, R. P., "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control", ***MIT Press, Cambridge Mass.***, 1981.

[2] Hollerbach, J. M., ''A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and A Comparative Study of Dynamic Formulation Complexity,'' ***IEEE Trans. System., Man, Cybernetics.***, vol. SMG-10, no. 11, pp. 730-736, 1980.

[3] Luh, J.Y.S., Walker, M. W. and Paul, R. P. C., ''On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators,'' ***Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control***, vol. 102, no. 2, pp. 69-76, 1980.

[4] Kane, T. R., and Levinson, D. A., ''The Use of Kane's Dynamic Equations in Robotics,'', ***Int. J. of Robotics Research***, vol. 2, no. 3, pp. 3-20, 1983.

[5] Lee, C. S. G., Lee, B. H., and Nigam, N., ''Development of the Generalized D'Alembert Equations of Motion for Robot Manipulators,'' ***Proc. Of 22nd Conf. On Decision and Control***, San Antonio, TX, pp. 1205-1210, 1983.

[6] Bingül, Z., Küçük, S. "Robot Tekniği II" ,"basım aşamasında"

[7] Cesareo, G., Nichold , F. and Niosia, S., ''DYMIR: A Code for Generating Dynamic Model of Robots,'' ***Proc. of 1st Intl. IEEE Conf. on Robotics***, R. P. Paul Ed., Atlanta, GA, pp. 115-120, 1984.

[8] Murray, J.J. and Neuman, C. P., ''ARM: An Algebraic Robot Dynamics Modeling Program, '', ***Proc. of 1st Intl. IEEE Conf. on Robotics***, R. P. Paul Ed., Atlanta, GA, pp. 103-114, 1984.

[9] Burdick, J.W., ''An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations, ''***Proc. of IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation***, R. Suri, Ed., IEEE Computer Society Press, San Francisco, CA, pp. 212-218, 1986.

[10] Yin, S. and Yuh, J. ''An Efficient Algorithm for Automatic Generation of Manipulator Dynamic Equations,'', ***IEEE International Conference on Robotics and Automation***, vol.3, pp. 1812–1817, 1989.

[11] Khalil, W. and Creusot, D., ''SYMORO+: A System for the Symbolic Modeling of Robots, '', ***Robotica***, vol. 15, pp. 153-161, 1997.

[12] Zlajpah, L.,''Integrated Environment for Modeling, Simulation and Control

Design for Robotic Manipulators,'', ***Journal of Intelligent and Robotic Systems***, 32(2) pp.219-234, 2001.

[13] Corke, P.I., ''A Robotics Toolbox for MATLAB,'', ***IEEE Robotics & Automation Magazine***, vol. 3, no. 1, pp. 24-32, March 1996.

[14] Nayar, H.D. ''Robotect: Serial-Link Manipulator Design Software for Modeling, visualization and Performance Analysis,'', ***7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision***, Singapore, pp. 1359-1364, 2002.

[15] Nethery, J. F. and Spong, M.W. ''Robotica: A Mathematica Package for Robot Analysis,'', ***IEEE Robotics & Automation Magazine***, vol. 1, no. 1, pp. 13–20, 1994.

[16] Symbolic Dynamics, **Inc. SD/FAST**, User's Manual

[17] Kucuk, S. and Bingul, Z. ''An Off-Line Robot Simulation Toolbox,'' ***Computer Applications in Engineering Education***, article accepted for publication.

[18] Bingül, Z. ve Küçük, S., " Robot Tekniği 1", ***Birsen Yayınevi***, 17-21, (2005).

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

1. Kızılhan, A., Toz, M., Aliustaoğlu, C., Bingül, Z., "Gezgin Robot Tasarımı ve Hareket Planlaması",***Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı 2007, TOK'07,*** 5-7 Eylül 2007, Sabancı Üniversitesi, İstanbul

2. Toz, M. and Küçük, S. ''Dynamics Simulation Toolbox for Industrial Robot Manipulators,'' ***Computer Applications in Engineering Education***, article accepted for publication.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Besni/Adıyaman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimimi Suvarlı Kasabası'ndaki okullarda tamamladı. 1997 yılında Konya Atatürk Sağlık Meslek Lisesi Sağlık Memurluğu(yatılı) bölümünden mezun oldu. 2000 yılında Kocaeli Üniversitesi Sağ. Kül. ve Spor Daire Başk. emrine Sağlık Memuru olarak atandı. 2002 yılında Kocaeli Üniversitesi Köseköy MYO Bilgisayar Programcılığı bölümünden mezun oldu. Aynı yıl yapılan dikey geçiş sınavı ile Kocaeli Üniversitesi TEF Bilgisayar Öğretmenliği Bölümü'ne kayıt hakkı kazandı ve 2006 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2006 Eylül de KOÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim dalında yüksek lisans eğitimime başladı ve devam etmektedir. Kocaeli Üniversitesi Tıp Fakültesi Hastanesi bilgiişlem biriminde çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.