

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL YÖNTEM İLE  
KİNEMATİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS**

**CİHAN AYIZ**

**Anabilim Dalı: Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serdar KÜÇÜK**

**KOCAELİ, 2008**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

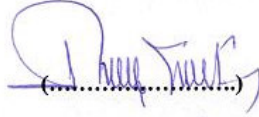
**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL YÖNTEM İLE  
KİNEMATİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
CİHAN AYIZ**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 Mayıs 2008**

**Tezin Savunulduğu Tarih: 02 Temmuz 2008**

**Tez Danışmanı  
Yrd.Doç.Dr. Serdar KÜÇÜK**

  
(.....)

**Üye  
Doç.Dr. Zafer BİNGÜL**

  
(.....)

**Üye  
Doç.Dr. Raşit KÖKER**

  
(.....)

**KOCAELİ, 2008**

## ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Ülkemiz değişen dünya koşullarına ayak uydurmak zorunda olduğumuz çok özel bir coğrafyaya sahiptir. Teknolojik gelişmelerden yüz çeviremeyeceğimiz kadar küçülmüş olan dünyamızda şüphesiz ki çağın gereklerine uygun cihaz , sistem ve makinaları kullanmak ülkemizin dünyada hak ettiği şekilde medeniyete sahip olmuş ülkeler arasındaki yerini alması için çok önemlidir. Teknolojinin bugün hemen her yerde üst düzeyde kullanıldığı ve insan gücünü ikinci plana iten sistemlerin hızla yapılandığını biliyoruz. Ülkemiz, Avrupa ülkelerinin yanı başında olduğundan çok gelişmiş sanayi fabrikalarına sahiptir. Bu fabrikaların çoğunda yüksek kalitede, düşük hata ile üretim halen sürmektedir.

Robotik bu anlamda çok büyük önem arzeden bir konu olarak yerini almasına karşın yeterince bilgi sahibi olmadığımız ve eğitimi bile ülkemizde ancak birkaç yıldır vermeye başlanan özel bir konudur. Çalışmanın, bundan sonra bu alanda çalışacak insanlara yardımcı olabildiğini temenni ediyorum.

Tez çalışması sırasında bana yardımlarını esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç biliyorum. Teze temel oluşturan nitelikteki bilgilerini benimle paylaşan ve rehberlik eden Doç.Dr.Zafer BİNGÜL'e ve tezin hemen her aşamasında varlığından bir an bile yoksun kalmadığım, danışmanlığın yanı sıra çalışmalarım sırasında bana ağabeylik eden Yrd.Doç.Dr.Serdar KÜÇÜK'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca bana her zaman güvenen ve destekleyen, hiçbir fedakarlıktan kaçmayan annem Aysel AYIZ'a ve babam Selim AYIZ'a , bana sabırla ve sevgiyle yaklaşan eşim Zurky'ye ve desteklerini her zaman hissettiren ikinci anne ve babam olmuş Nesrin ÖZLEYEN ve İhsan ÖZLEYEN'e sonsuz minnet duygularımı iletirim.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	iii
TABLolar DİZİNİ .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
BÖLÜM 1.ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ .....	1
1.1.Giriş.....	1
1.2.Robotların kinematik analizi .....	1
1.3.Robotların kinematik modelinin çıkarılması .....	2
1.3.1.Quaternion uzayında kinematik model çıkarılması .....	2
1.3.2.Kartezyen uzayda kinematik model çıkarılması .....	3
1.3.2.1.Üstel yöntem .....	6
1.3.2.2.İleri kinematik.....	7
1.3.2.3.Ters kinematik .....	12
1.3.2.4.Üstel rotasyon matrislerinin cebirsel özellikleri .....	15
1.4.Yöntemlerin karşılaştırılması .....	16
BÖLÜM 2.İKİLİ HARF KODUNUN KULLANILMASIYLA YAPILAN SINIFLANDIRMA .....	19
2.1.Giriş.....	19
BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL(EXPONANSİYEL) YÖNTEMLE İLERİ KİNEMATİK ÇÖZÜMLERİ .....	26
3.1.Giriş.....	26
3.1.1.CC robotunun ileri kinematiği .....	26
3.1.2.CN robotunun ileri kinematiği .....	28
3.1.3.CR robotunun ileri kinematiği .....	30
3.1.4.CS robotunun ileri kinematiği .....	32
3.1.5.NC robotunun ileri kinematiği .....	34
3.1.6.NN robotunun ileri kinematiği.....	36
3.1.7.NR robotunun ileri kinematiği .....	38
3.1.8.NS robotunun ileri kinematiği .....	42
3.1.9.RC robotunun ileri kinematiği .....	45
3.1.10.RN robotunun ileri kinematiği.....	47
3.1.11.RR robotunun ileri kinematiği .....	49
3.1.12.RS robotunun ileri kinematiği.....	51
3.1.13.SC robotunun ileri kinematiği.....	53
3.1.14.SN robotunun ileri kinematiği .....	56
3.1.15.SR robotunun ileri kinematiği.....	58
3.1.16.SS robotunun ileri kinematiği .....	60
BÖLÜM 4.ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL(EXPONANSİYEL) YÖNTEMLE TERS KİNEMATİK ÇÖZÜMLERİ .....	63
4.1.Giriş.....	63
4.1.1.CC robotunun ters kinematiği.....	63

4.1.2.CN robotunun ters kinematiği .....	66
4.1.3.CR robotunun ters kinematiği .....	66
4.1.4.CS robotunun ters kinematiği .....	70
4.1.5.NC robotunun ters kinematiği .....	73
4.1.6.NN robotunun ters kinematiği .....	75
4.1.7.NR robotunun ters kinematiği .....	77
4.1.8.NS robotunun ters kinematiği .....	80
4.1.9.RC robotunun ters kinematiği .....	83
4.1.10.RN robotunun ters kinematiği .....	85
4.1.11.RR robotunun ters kinematiği .....	88
4.1.12.RS robotunun ters kinematiği .....	90
4.1.13.NC robotunun ters kinematiği .....	93
4.1.14.NN robotunun ters kinematiği .....	95
4.1.15.NR robotunun ters kinematiği .....	97
4.1.16.NS robotunun ters kinematiği .....	99
BÖLÜM 5.SONUÇLAR .....	102
KAYNAKLAR .....	103
ÖZGEÇMİŞ .....	105

## ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL 1.1.A ve B koordinat çerçeveleri .....	6
ŞEKİL 1.2.ÜÇ eklemli robot manipülatörü için birim vektör ve koordinat öerövelerinin yerleşiminin gösterimi .....	7
ŞEKİL 2.1.Huang Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma .....	17
ŞEKİL 2.2.SS robotunun D-H düzenleşimi .....	18
ŞEKİL 2.3. SC robotunun D-H düzenleşimi.....	18
ŞEKİL 2.4. SN robotunun D-H düzenleşimi.....	19
ŞEKİL 2.5. CS robotunun D-H düzenleşimi.....	19
ŞEKİL 2.6. CC robotunun D-H düzenleşimi .....	20
ŞEKİL 2.7. CR robotunun D-H düzenleşimi .....	20
ŞEKİL 2.8. NS robotunun D-H düzenleşimi.....	21
ŞEKİL 2.9. NN robotunun D-H düzenleşimi.....	21
ŞEKİL 2.10. NR robotunun D-H düzenleşimi .....	22
ŞEKİL 2.11. RC robotunun D-H düzenleşimi .....	22
ŞEKİL 2.12. RN robotunun D-H düzenleşimi .....	23
ŞEKİL 2.13. RR robotunun D-H düzenleşimi .....	23
ŞEKİL 2.14. RS robotunun D-H düzenleşimi.....	24
ŞEKİL 2.15. SR robotunun D-H düzenleşimi.....	24
ŞEKİL 2.16. CN robotunun D-H düzenleşimi .....	25
ŞEKİL 2.17. NC robotunun D-H düzenleşimi .....	25
ŞEKİL 3.1.CC robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	26
ŞEKİL 3.2. CN robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	28
ŞEKİL 3.3. CR robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	31
ŞEKİL 3.4. CS robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	33
ŞEKİL 3.5. NC robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	35
ŞEKİL 3.6. NN robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	38
ŞEKİL 3.7. NR robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	40
ŞEKİL 3.8. NS robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	43
ŞEKİL 3.9. RC robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	45
ŞEKİL 3.10. RN robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	47
ŞEKİL 3.11. RR robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	49
ŞEKİL 3.12. RS robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	51
ŞEKİL 3.13. SC robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	54
ŞEKİL 3.14. SN robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	56
ŞEKİL 3.15. SR robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi .....	58
ŞEKİL 3.16. SS robotunun euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	60

## **TABLolar DİZİNİ**

Tablo 1.1.Üç yöntemin hesap yükü.

Tablo 5.1.Tüm robotların karşılaştırmalı hesap yükü.

## SİMGELER DİZİNİ

- $\theta_k$  :  $k$ . ve  $(k-1)$ . koordinat çerçeveleri arasındaki açı farkı.  
 $a$  : bağ uzunluğu.  
 $u_i$  : bağıl satır vektörü.  
 $\hat{C}^{(0,k)}$  : ana çerçeveye göre  $k$ . ekleme ait koordinat çerçevenin yönelim matrisi.  
 $\hat{C}^{(a,b)}$  :  $a$ . koordinat çerçeveye göre  $b$ . ekleme ait koordinat çerçevenin yönelim matrisi.  
 $d$  : bağ kaçıklığı.  
 $\bar{P}$  : pozisyon vektörü.  
 $\hat{I}$  : birim matris.  
 $e^{\bar{n}\theta}$  :  $\bar{n}$  birim vektörünün  $\theta$  açısıyla dönmesi.



# ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL YÖNTEM KULLANILARAK KİNEMATİK ANALİZİ

CİHAN AYIZ

**Anahtar Kelimeler :** Robotların Kinematik Modelleri, İleri ve Ters Kinematik, Üstel Yöntem.

**Özet:** Kinematik modelleme endüstriyel robotların en temel safhasını oluşturmaktadır. Bir robot manipülatörünün kinematiğini sistematik bir şekilde elde etmek daha sonra yapılacak çalışmaların da verimli bir şekilde ilerlemesine yardımcı olur. Bu amaçla endüstriyel robotların kinematik modellerini çıkarmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan başlıcaları: Denavit Hartenberg, üstel yöntem, sıfır referans konum yöntemi, Pieper-Roth yöntemi, tam ve parametrik olarak sürekli yöntem olarak sıralanabilir.

Bu tez çalışmasında bu yöntemlere kısaca değinilerek üstel yöntem detaylı bir şekilde açıklanmaktadır. Daha sonra Huang ve Milenkoviç tarafından sınıflandırılan onaltı adet temel endüstriyel robotun düzenleşimleri ve katı gövde yapıları verilmektedir. İlerleyen bölümlerde bu temel onaltı adet robot manipülatörünün ileri ve ters kinematiği üstel yöntem kullanılarak çözülmüştür.

Sonuç olarak bu çalışmada üstel yöntemin karmaşık cebirsel işlemleri ortadan kaldırdığı ve hem kolay çözüm sunan hem de öğrenilmesi ve öğretilmesi açısından değerlendirildiğinde metod olarak bilgisayara elverişli bir yöntem olduğu görülmüştür.

# THE KINEMATICS ANALYSIS OF INDUSTRIAL ROBOTS USING EXPONENTIAL METHOD

CİHAN AYIZ

**Key Words :** Kinematic Modelling of Robots , Forward and Inverse Kinematics ,  
Exponential Method.

Kinematic modelling is the fundamental topic of the industrial robot manipulators. Getting the kinematic of a robot manipulator in a systematic way helps to forward the following studies more efficient. For this reason lots of methods were improved in order to solve kinematic models of robots. The main methods of these methods can be mentioned so: Denavit-Hartenberg, exponential method, complete and parametrically continuous method, zero reference position and Pieper-Roth method. In this study these methods are mentioned briefly and exponential method is defined with its details.

Configurations and link body structures of sixteen main industrial robots which are classified by Huang and Milenkovic are given subsequently. The forward and inverse kinematics of these main sixteen robots are solved by using exponential methods in the following chapters.

In conclusion , it was seen that exponential method eliminates complex algebraic functions and is computable when we evaluate for the purpose of either learning and teaching of this method or providing facility in solutions.

## **BÖLÜM 1. ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ**

### **1.1. Giriş**

Genellikle, robotlar seri ve paralel olmak üzere iki temel gruba ayrılır. Seri robotlar bir dizi eklemler (joints) ve bu eklemleri birbirine birleştiren bağlardan (links) oluşur. Seri robotlar, paralel robotlara göre daha geniş çalışma uzayına (aktif olarak robotun ulaşabileceği uzay) ve daha basit kinematik denklemlere sahip olmasına rağmen kaldıracakları kütlenin kendi mekanik yapılarının kütlesine oranı ise daha küçüktür. Paralel robotlar, ana çerçeve ile yük arasında birbirine paralel pek çok bağın bir araya gelmesiyle oluşur. Seri robotlara göre daha sağlam bir mekanik yapıya sahiptirler. Kinematik denklemlerinin çok karmaşık olmasına karşın, kaldıracakları kütlenin mekanik yapılarının kütlesine oranı daha büyüktür.

### **1.2. Robotların Kinematik Analizi**

Bir endüstriyel robot öteleme (prismatic) ve dönme (revolute) hareketi gerçekleştiren eklemlerle, bu eklemleri birbirine birleştiren bağlardan oluşur. Dönme hareketinden dolayı meydana gelen yer değiştirmeye eklem açısı (joint angle) ve bağlar arasındaki yer değiştirmeden dolayı oluşan ötelemeye ise eklem kaçıklığı kayması (joint offset) denir.

Robotun ileri yön kinematiği (forward kinematics), robot bağlarının konumları, hızları ve ivmeleri arasındaki ilişkiyle ilgilenir.

Robot manipülatörleri, ana çerçeveden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya dönel eklemlerle tutturulmuş seri bağlardan oluşur. İki bağ arasındaki ilişki çoğunlukla bir homojen dönüşüm matrisiyle açıklanır. Eklem dönüşüm matrislerinin art arda çarpılmasıyla, ana çerçeveye araç çerçevesi (uç işlevcisi) arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişkiye robot manipülatörlerinin ileri yön kinematiği (forward

kinematics) denir ve araç çerçevesinin yönelimini ve konumunu ana çerçeveye göre tanımlar.

Robot manipülatörlerinin ters kinematiği (inverse kinematics) ise, araç çerçevesinin ana çerçeveye göre yönelimi ve konumu verildiğinde, robotun bu yönelim ve konuma ulaşabilmesi için gerekli olan açı setlerinin hesaplanması şeklinde tanımlanabilir (Craig 1989).

Robot manipülatörlerinin ileri kinematiğinin çok basit olmasına rağmen ters kinematik çözümleri kullanılan denklemlerin doğrusal olmamasından dolayı son derece karmaşık bir yapıya sahiptir.

### **1.3. Robotların Kinematik Modelinin Çıkarılması**

Robotların kinematik modelini çıkarmak için Quaternion ve Kartezyen uzaylarında geliştirilmiş çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlere kısaca değinerek ve üstel(exponansiyel) yöntem detaylı bir şekilde açıklayalım.

#### **1.3.1 Quaternion uzayında kinematik model çıkarılması**

Quaternion yönteminin robotların kinematik modellerini çıkarmak için çok uygun olmasına rağmen robot bilimcileri tarafından pek tercih edilmemiştir. Oysa ki, quaternion yöntemiyle dönme ve öteleme işlemleri bir dönüşüm vektörüyle aynı anda gösterilebilmektedir. Homojen dönüşüm matrisleriyle dönme işlemi dokuz elemanla gösterilmesine rağmen quaternion yönteminde dönme işlemi sadece dört elemanla ifade edilmektedir. Bu durum bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önünde bulundurulduğunda diğer yöntemlere göre çok önemli bir avantaj sağlar(Funda, Taylor ve Paul 1990).

Quaternionlar ilk olarak İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından ortaya atıldı (Hamilton 1869). Günümüze kadar klasik mekanik, kuantum mekaniği, uzay bilimi ve geometri olmak üzere birçok alanda kullanıldı. Dönel operatörler olarak quaternionların özellikleri Pervin ve Webb (Pervin ve Webb 1982), avantajları

ise Salamin (Salamin 1979) tarafından sunuldu. Gu ve Luh robot kinematiği ve dinamiğinde kullanılmak üzere Jakobiyenin hesaplanmasında quaternionlardan yararlandı (Gu ve Luh 1987). Kim ve Kumar ise altı serbestlik derecesine sahip olan bir robot manipülatörünün ileri ve ters kinematiğini quaternion yöntemini kullanarak elde etti (Kim ve Kumar 1990).

Kartezyen uzayda anlatılan yöntemlerden DH yöntemi, SRK yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve tam ve parametrik sürekli yöntem, robot kinematiğini doğrudan on iki eleman içeren matrislerle ifade etmektedir. Üstel yöntem üç yararlı elemanla dönme hareketini en iyi şekilde ifade etmektedir. Pratikte robotla uğraşan insanlar matris işlemlerine daha yatkın, diğer yöntemlerde kullanılan operatörlere de alışkın olmadıklarından dolayı, DH yöntemi gibi matrisleri kullanarak kinematik model çıkaran yöntemler daha sık kullanılmaktadır. Oysaki bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önüne alındığında, yukarıda anlatılan beş yöntem Quaternion yöntemine göre daha yavaş çalışmaktadır. Bu durum gerçekleştirilen bilimsel çalışmalarla da ortaya konmuştur (Nicholos, Aspragathos and Dimitros 1998). Yukarıda belirtilen quaternion yönteminin avantajlarından dolayı bu tez çalışmasında Quaternion yöntemiyle endüstriyel robotların kinematik ve dinamik modelleri detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

### **1.3.2 Kartezyen uzayda kinematik model çıkarılması**

Robot manipülatörlerinin Kartezyen uzayda kinematik modelini çıkarmak için başlıca beş farklı yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler Denavit-Hartenberg, üstel yöntem (exponential method), sıfır referans konum yöntemi (zero reference position method), Pieper-Roth yöntemi ve tam ve parametrik olarak sürekli yöntem (complete and parametrically continuous method)'dir. Aşağıda bu beş yöntem kısaca anlatılmıştır.

Robot manipülatörlerinin kinematik modelini çıkarırken en sık kullanılan yöntem, Denavit-Hartenberg yöntemidir. Bu yöntemde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır. Bu değişkenler, iki eksen arasındaki bağ uzunluğu (link length)  $a_{i-1}$ , (i-1) ile i eksenleri arasındaki bağ açısı (link twist)  $\alpha_{i-1}$ , üst üste çakışan bağlar

arasındaki eklem kaçıklığı (joint offset)  $d_i$ , ve iki bağ arasında oluşan eklem açısı (joint angle)  $\theta_i$ 'dir (Denavit and Hartenberg 1955). Bu dört değişkene Denavit-Hartenberg değişkeni denir ve kısaca DH değişkenleri olarak isimlendirilir. Bu değişkenleri belirlemek için, öncelikle gibi robotun dönme eksenleri belirlenir. Daha sonra bu eksenlere birer adet koordinat çerçevesi yerleştirilir. Son olarak bu koordinat çerçevelerinden yararlanarak  $a_{i-1}$  bağ uzunluğu,  $\alpha_{i-1}$  bağ açısı,  $d_i$  eklem kaçıklığı ve  $\theta_i$  eklem açısı belirlenir. Robotun bir eklemine ait 4x4 boyutlu dönüşüm matrisi bu dört değişkenin meydana getirdiği matrislerin çarpımıyla elde edilir. Bu dönüşüm matrisi, 3x3'lük bir dönme matrisinden ve 3x1'lik bir konum vektöründen oluşur. Elde edilen n tane matrisin yan yana çarpılmasıyla n serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematik modeli çıkarılır.

Robot kinematik problemlerini çözenin başka bir yolu da, SRK yöntemini kullanmaktır. SRK, Sıfır referans konum'un kısaltılmış şeklidir. SRK yöntemi, bütün değişkenlere bir sıfır referans değeri bularak basitçe robotun geometrisini tanımlar ve hareket işlemlerini gerçekleştirir (Gupta 1986). Bu yöntemde, robot uygun bir şekilde dondurulur ve oluşan sıfır referans konumda bütün eksen değişkenleri ( $\theta_i$  dönme ve  $s_j$  prizmatik) tanımlanır. Daha sonra bu konumda, robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları ( $u_{io}$ ) ve bağ yerleşimleri ( $Q_{io}$ ) belirlenir. Burada,  $u$  dönme veya kayma eksenini yönündeki birim vektör,  $Q$  ise eklem eksenlerinin yerleşimini gösteren değişkendir.

Bu yöntemde birden fazla sıfır referans konum noktası seçilebilir. Bu durum, uygun olan birçok SRK konuma ulaşılmasından dolayı avantaj sağlar. Fakat bazı uç seçimlerden dolayı aynı robot için iki farklı matematiksel sonuç elde edilebilir. Bu açıdan sonuçlar D-H yöntemiyle karşılaştırılmalıdır. Bu ise, SRK yönteminin bir dezavantajıdır. Ayrıca, SRK yöntemi genellikle açık kinematik çözümlerde kullanılır. Kapalı kinematik çözümlerde sonuç vermediğinden, bu aşamada DH yönteminde üretilen veriler SRK yöntemi tarafından kullanılarak kapalı çözüm gerçekleştirilir.

Pieper-Roth yöntemi D-H değişkenlerini kullanarak yeni bir dönüşüm matrisi düzenlemiştir. Bu yöntemde dönüşüm matrisi, DH yönteminin aksine (i+1).

eksene  $i$ . eksene doğru bakılarak oluşturulur.  $d_i$  ile  $\alpha_i$  değişkenleri yer değiştirilerek matris çarpımı gerçekleştirilir. Dönüşüm matrislerinin farklı olmasına rağmen, bakış açısının doğurduğu 90 derecelik açı farkı, ileri yön kinematik analizinde DH dönüşüm matrisi ile Pieper-Roth dönüşüm matrisinin aynı sonucu üretmesine neden olur.

Yeni bir robot kinematik modelleme yöntemi olarak geliştirilen tam ve parametrik sürekli kinematik yöntem, kısaca TPS olarak isimlendirilir (Zhuang 1992). Özellikle, TPS yönteminde hata modelinin (robot error model) uygulanmasından dolayı, robot kalibrasyonu için önemli avantaj sağlanmaktadır ( Mooring, Roth and Driels 1991; Hollerbach 1988).

Tam (Complete) kinematik bir yöntem, herhangi bir robotta, eklem değişkenlerini, robotun araç çerçevesine veya keyfi yönde seçilen evrensel çerçevesine göre ifade edebilmelidir (Everett, Driels ve Mooring 1987). Daha açık bir ifadeyle, tam kinematik bir yöntem robotun her türlü hareketini modelleyecek değişkenleri içermelidir. Parametrik süreklilik (Parametric Continuity) ise, tamamen yöntemin tekilliğiyle (singularity) ilgilidir (Zuang 1989). Robot eklemlerinin yönelimi veya konumunun değişmesi sonucunda kinematik yöntem bağı değişkenleri de bu değişime esnek bir şekilde cevap veriyorsa, bu kinematik yöntem parametrik olarak sürekli denir. Bu yöntemle ileri kinematik çıkarırken hayli zahmetli işlemler gerçekleştirildiğinden pek tercih edilen bir yöntem değildir.

Ters kinematik probleminin doğrusal olmayan denklemler içermesinden dolayı, Kartezyen uzayda çözümleri son derece güçtür. Bu problemin çözümü için alternatif olarak üstel yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problem üstel dönme matris tabanlı cebir kullanılarak sistematik olarak çözülür (Özgören 1987). Bu yöntemde sabit eksene göre dönme gerçekleştirilerek toplam ileri yön kinematik bulunur (Balkan ve Özgören 1999). Eksi bakışlı matris (skew symmetric matrix) kullanan üstel yöntemde, başlangıç ekseni birinci hareketli eksenin göbeğine yerleştirilir.

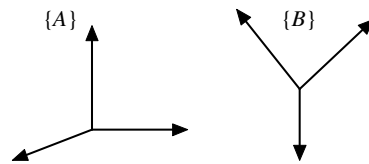
Teze konu olan bu yöntem detaylı şekilde anlatılmıştır.

### 1.3.2.1. Üstel yöntem (exponential method)

Genellikle ileri yön kinematikte verilen eklem değişkenlerini kullanarak uç işlevcinin (end-effector) konumu ve yönelimi, kartezyen uzayda kapalı formda kolayca çözülür. Ters kinematik probleminin doğrusal olmayan denklemler içermesinden dolayı, Kartezyen uzay verilerini kullanarak eklem değişkenlerini bulmak garanti edilemeyebilir. Dolayısıyla, robotlar için kapalı çözümün mümkün olmadığı durumlarda ters kinematik çözüm için değişik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bunlardan en çok kullanılanı Newton-Raphson algoritmasıdır (Wu and Paul 1982). Bu algoritma eklem değişkenlerini sayısal olarak çözer.

Bu yöntemlerin ağır trigonometrik polinomlar içermesinden dolayı, kinematik problemin çözümü için alternatif olarak üstel yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problem üstel dönme matris tabanlı cebir kullanılarak sistematik olarak çözülür (Özgören 1987). Bu yöntemde sabit eksene göre dönme gerçekleştirilerek toplam ileri yön kinematik bulunur (Balkan ve Özgören 1999). Eksi bakışlı matris (skew symmetric matrix) kullanan üstel yöntemde, başlangıç ekseni birinci hareketli eksenin göbeğine yerleştirilirken, aynı matrisi kullanan SRK yönteminde ana çerçeveye yerleştirilir.

Bunların dışında üstel yöntem çözüm yöntemindeki işlem adımları ve dolayısıyla algoritmanın basitliğiyle de uygulanabilirlik açısından basit bir yöntem. D-H parametrelerine gereksinim duymadan doğrudan her bir eklem matrisinin tek tek bulunmasına da olanak sağlar. Sırasıyla önce dönmesonra da konum vektörünün bulunmasıyla ileri ve ters kinematik çözümleri üstel rotasyonel matrisler yardımıyla karışıklığı yer vermeden çözülebilmektedir.



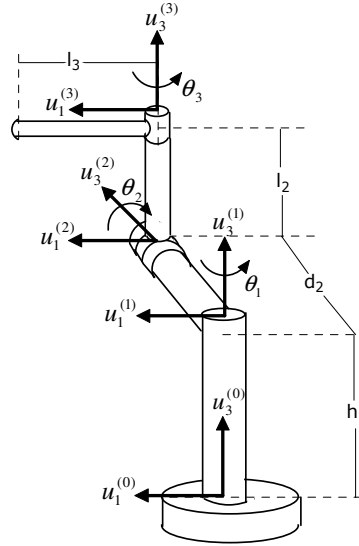
Şekil 1.1: A ve B koordinat çerçeveleri.



Üstel yöntemde Şekil 1.1’de gösterilen  $B$  koordinat çerçevesinin  $A$  koordinat çerçevesine göre dönüşüm matrisi  $\widehat{C}^{(a,b)}$  şeklinde gösterilir. Bir başka deyişle  $B$  koordinat çerçevesi  $A$  koordinat çerçevesinin  $n$  birim vektörü tarafından  $\theta$  açısıyla döndürülmesi sonucunda elde edilir.

### 1.3.2.2. İleri kinematik

Bir seri robotun ileri kinematiği,doğrudan D-H tablosu çıkarılmadan aşağıda açıklanacak şekilde üstel(exponansiyel) dönmematrisleri kullanılarak bulunabilir:Şekil 1.2 de gösterildiği gibi üç eklemi de dönel bir robotu ele alalım.Her robot eklemine bir koordinat çerçevesi oturtulmuştur.Kinematik parametreler bu koordinat çerçevelerine bağlı olarak belirlenmiştir.z eksenleri,her bağın dönmeeksenini işaret etmek için kullanılmıştır.k.koordinat ekseninin eksenleri birim vektör  $u_{ik}$  ile belirtilmiştir.Burada sırasıyla  $x(1),y(2),z(3)$  eksenlerini ifade etmektedir.



Şekil 1.2:Üç eklemli robot manipatörü için birim vektör ( $\bar{u}_i^{(k)}$ )’nın ve koordinat çerçevesinin yerleşiminin gösterimi.

(k-1). ve k. koordinat çerçeveleri arasındaki yönelimi  $C$  dönme matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\hat{C}^{(k-1,k)} = e^{u_i^{(k)}\theta_k} e^{u_i^{(k)}(\alpha_k - \alpha_{k-1})}. \quad (1.1)$$

Burada  $\theta_k$ ,  $k$ . eklem değişkeni.  $k=1,2,\dots,n$ .  $\alpha_k - \alpha_{k-1}$ ;  $k$ . ve  $(k-1)$ . koordinat çerçevesleri arasındaki açı farkını ifade eder.

Denklem (1.1)'deki  $e^{u_i^{(k)}\theta_k}$  ve  $e^{u_i^{(k)}(\alpha_k - \alpha_{k-1})}$  aşığıdaki gibi yazılabilir.

$$e^{u_i^{(k)}\theta_k} = \begin{bmatrix} u_1 u_1 (1 - c\theta_k) + c\theta_k & . & . \\ u_2 u_1 (1 - c\theta_k) + u_3 s\theta_k & . & . \\ u_3 u_1 (1 - c\theta_k) - u_2 s\theta_k & . & . \\ . & u_1 u_2 (1 - c\theta_k) - u_3 s\theta_k & u_1 u_3 (1 - c\theta_k) + u_2 s\theta_k \\ . & u_2 u_2 (1 - c\theta_k) + c\theta_k & u_2 u_3 (1 - c\theta_k) - u_1 s\theta_k \\ . & u_3 u_2 (1 - c\theta_k) + u_1 s\theta_k & u_3 u_3 (1 - c\theta_k) + c\theta_k \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

$$e^{u_i^{(k)}(\alpha_k - \alpha_{k-1})} = \begin{bmatrix} u_1 u_1 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + c[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . & . \\ u_2 u_1 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + u_3 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . & . \\ u_3 u_1 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) - u_2 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . & . \\ . & u_1 u_2 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) - u_3 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . \\ . & u_2 u_2 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + c[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . \\ . & u_3 u_2 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + u_1 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] & . \\ . & . & u_1 u_3 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + u_2 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] \\ . & . & u_2 u_3 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) - u_1 s[\alpha_k - \alpha_{k-1}] \\ . & . & u_3 u_3 (1 - c[\alpha_k - \alpha_{k-1}]) + c[\alpha_k - \alpha_{k-1}] \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Burada  $s$  ve  $c$  sırasıyla  $\sin$  ve  $\cos$  fonksiyonlarını ifade etmektedir. Ayrıca  $\bar{u}$  sütun vektörünün elemanları  $u_1$ ,  $u_2$  ve  $u_3$  de aşığıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\bar{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T. \quad (1.4)$$

Eğer dönme  $x$ ,  $y$  ve  $z$  de meydana gelmişse  $\bar{u}$  sütun vektörü sırasıyla  $\bar{u}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ ,

$\bar{u}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$  ve  $\bar{u}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$  olarak şekillenir.

Birinci eklem dönel ise ( $k=1$  ve  $\theta_1$ ) z-ekseniyle ana koordinat çerçeve arasında ölçülen açı farkı sıfır ( $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ ) olarak bulunur ve birinci eklem dönme matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,1)} &= [e^{u_3^{(1)}\theta_1} e^{u_1^{(1)}(0)}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

İkinci eklem de dönel ve ( $k=2$  and  $\theta_2$ ), ayrıca birinci ve ikinci eklem koordinat çerçevelerinin z-eksenleri arasındaki dönme açısı  $\pi/2$  ( $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ ) olarak bulunduğu için ikinci eklem dönme matrisi aşağıdaki gibi şekillenecektir.

$$\hat{C}^{(1,2)} = [e^{u_3^{(2)}\theta_2} e^{u_1^{(2)}(\pi/2)}] = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Son eklem de döneldir. Dolayısıyla ( $k=3$  ve  $\theta_3$ ) ikinci ve üçüncü koordinat çerçevelerinin z-eksenleri arasındaki dönme açısı  $-\pi/2$  ( $\alpha_3 - \alpha_2 = -\pi/2$ ) olarak bulunduğu için bu eklem için dönme matrisi de;

$$\hat{C}^{(2,3)} = [e^{u_3^{(3)}\theta_3} e^{u_1^{(3)}(-\pi/2)}] = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak ana koordinat çerçeveye göre üçüncü koordinat çerçevesinin yönelim matrisi aşağıdaki gibi şekillenecektir.

$$\hat{C}^{(0,3)} = \hat{C}^{(0,1)} \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} = [e^{u_3^{(1)}\theta_1} e^{u_1^{(1)}(0)}] [e^{u_3^{(2)}\theta_2} e^{u_1^{(2)}(\pi/2)}] [e^{u_3^{(3)}\theta_3} e^{u_1^{(3)}(-\pi/2)}]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & . & . \\ s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 & . & . \\ s\theta_2 c\theta_3 & . & . \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} -c\theta_3 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ -s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 \end{bmatrix}. \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Robot manipulatörde bir prizmatik bağ vardır ve denklem(1.2)'de  $\theta_k=0$  olarak alınmıştır.Sonuç olarak ana koordinat çerçeveye göre uç işlevcinin konum vektörü  $\vec{P}$  de aşağıdaki gibi şekillenecektir.

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= a_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_3^{(1)} + a_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_1^{(2)} \\
&\quad + d_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_3^{(2)} + \dots a_k \hat{C}^{(0,k)} \bar{u}_1^{(k)} + d_k \hat{C}^{(0,k)} \bar{u}_3^{(k)}. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Burada  $a$  bağ uzunluğunu ,  $d$  bağ kaçıklığını ,  $\hat{R}^{(0,k)}$  ana çerçeveye göre  $k$ . ekleme ait koordinat çerçevenin yönelim matrisini ve  $u_i$  bağıl satır vektörünü ifade etmektedir. Aslında  $a$  bağ uzunluğu ile  $d$  bağ kaçıklığı aynı anda bulunması tercih edilmemektedir.Bu açıklamaların tamamı dikkate alındığında ve gerekli parametreler ve değişkenler uygun şekilde formülasyonda yerine konulduğunda

Şekil 1.2.de gösterilen robot manipulatörüne ait  $\vec{P}$  konum vektörünün son hali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\vec{P}^{(0,3)} &= h_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_3^{(1)} + d_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_3^{(2)} + l_2 \hat{C}^{(0,3)} u_3^{(3)} + l_3 \hat{C}^{(0,3)} u_1^{(3)} \\
&= \begin{bmatrix} l_3(c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3) - l_2(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ l_3(s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3) - l_2(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ l_3 s\theta_2 c\theta_3 + l_2 c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix}. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Denklemdede,

$$h_1 \hat{C}^{(0,1)} u_3^{(1)} = h_1 \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ h_1]^T. \quad (1.11)$$

$$d_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} d_2 s\theta_1 \\ -d_2 c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

$$l_2 \hat{C}^{(0,3)} u_3^{(3)} = \begin{bmatrix} -l_2 c\theta_1 s\theta_2 \\ -l_2 s\theta_1 s\theta_2 \\ l_2 c\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

$$l_3 \hat{C}^{(0,3)} u_1^{(3)} = \begin{bmatrix} l_3 (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3) \\ l_3 (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3) \\ l_3 s\theta_2 c\theta_3 + l_2 c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

### 1.3.2.3. Ters kinematik

İlk üç ekleme ait ters kinematik çözümlerinin üstel(exponansiyel) dönел matrisler yardımıyla bulunması için daha önce de söylendiği üzere konum vektöründen yararlanılacaktır. Son iki ekleme ait herhangi bir bağ uzunluğu ya da bağ kaçıklığı olmadığı zaman  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $d_5$ , ve  $d_6$  bağ parametleri sıfıra eşit olacağından ana koordinat çerçeveye ait konum vektörü aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(0,6)} &= a_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_3^{(1)} + a_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_1^{(2)} \\ &+ d_2 \hat{C}^{(0,2)} \bar{u}_3^{(2)} + \dots + a_4 \hat{C}^{(0,4)} \bar{u}_1^{(6)} + d_4 \hat{C}^{(0,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Burada  $\bar{P}^{(0,6)}$  ana koordinat çerçeveye göre uç işlevcinin konumu denklem (1.15) detaylı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(0,6)} &= a_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \hat{C}^{(0,1)} \bar{u}_3^{(1)} + a_2 \hat{C}^{(0,1)} \bar{R}^{(1,2)} \bar{u}_1^{(2)} \\ &+ d_2 \hat{C}^{(0,1)} \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_3^{(2)} + \dots + a_4 \hat{C}^{(0,1)} \dots \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} \end{aligned}$$

$$+ d_4 \hat{C}^{(0,1)} \dots \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \quad (1.16)$$

Ters kinematik problemin çözülebilmesi için aşağıda görüldüğü gibi bazı yeni eşitliklere ihtiyaç duyulacaktır.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(0,6)} = & \hat{C}^{(0,1)} \left( a_1 \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \bar{u}_3^{(1)} + a_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_1^{(2)} + d_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_3^{(2)} \right. \\ & \left. + a_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Birinci eklem değişkenini bulmak için ,  $\hat{C}^{(0,1)}$  matrisinin tersi alınır ve denklem (1.17)'nin her iki tarafına ön çarpma işlemi yapılarak denklem (1.18) elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,1)-1} \bar{P}^{(0,6)} = & \hat{C}^{(0,1)-1} \hat{C}^{(0,1)} \left( a_1 \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \bar{u}_3^{(1)} \right. \\ & \left. + a_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_1^{(2)} + d_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_3^{(2)} + \dots \right. \\ & \left. + a_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

$\hat{C}^{(0,1)-1} \hat{C}^{(0,1)}$  çarpımı birim matrise eşit olacağından denklem (1.18) aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,1)-1} \bar{P}^{(0,6)} = & a_1 \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \bar{u}_3^{(1)} + a_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_1^{(2)} + d_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_3^{(2)} \\ & + a_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

$a_1 \bar{u}_1^{(1)} + d_1 \bar{u}_3^{(1)}$  terimleri de denklemin sol tarafına geçirilecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,1)-1} \bar{P}^{(0,6)} - a_1 \bar{u}_1^{(1)} - d_1 \bar{u}_3^{(1)} = & a_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_1^{(2)} + d_2 \hat{C}^{(1,2)} \bar{u}_3^{(2)} \\ & + a_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Eşitlik (1.20) nin her iki tarafı birbirine eşit olacaktır. Eğer bu eşitlik ters kinematik çözümün bulunmasına yardımcı olmazsa aynı yaklaşım  $\hat{C}^{(1,2)^{-1}}$  ve  $\hat{C}^{(2,3)^{-1}}$  matrisleri için tekrarlanır. Bu işlemler aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(1,2)^{-1}} \left( \hat{C}^{(0,1)^{-1}} \bar{P}^{(0,6)} - a_1 \bar{u}_1^{(1)} - d_1 \bar{u}_3^{(1)} \right) - a_2 \bar{u}_1^{(2)} - d_2 \bar{u}_3^{(2)} \\ = a_3 \hat{C}^{(2,3)} \bar{u}_1^{(3)} + d_3 \hat{C}^{(2,3)} \bar{u}_3^{(3)} + a_4 \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(2,3)^{-1}} \left( \hat{C}^{(1,2)^{-1}} \left( \hat{C}^{(0,1)^{-1}} \bar{P}^{(0,6)} - a_1 \bar{u}_1^{(1)} - d_1 \bar{u}_3^{(1)} \right) - a_2 \bar{u}_1^{(2)} - d_2 \bar{u}_3^{(2)} \right) - a_3 \bar{u}_1^{(3)} - d_3 \bar{u}_3^{(3)} \\ = a_4 \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_1^{(4)} + d_4 \hat{C}^{(3,4)} \bar{u}_3^{(4)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aşağıdaki eşitlikler son üç değişkenin ters kinematik çözümleri için kullanılabilir.

$$\hat{C}^{(0,1)^{-1}} \hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(1,2)} \dots \hat{C}^{(5,6)}. \quad (1.23)$$

$$\hat{C}^{(1,2)^{-1}} \hat{C}^{(0,1)^{-1}} \hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(2,3)} \dots \hat{C}^{(5,6)}. \quad (1.24)$$

$$\hat{C}^{(2,3)^{-1}} \hat{C}^{(1,2)^{-1}} \dots \hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(3,4)} \dots \hat{C}^{(5,6)}. \quad (1.25)$$

$$\hat{C}^{(3,4)^{-1}} \hat{C}^{(2,3)^{-1}} \dots \hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(4,5)} \hat{C}^{(5,6)}. \quad (1.26)$$

$$\hat{C}^{(4,5)^{-1}} \hat{C}^{(3,4)^{-1}} \dots \hat{C}^{(0,1)^{-1}} \hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(5,6)}. \quad (1.27)$$

Burada  $\hat{C}^{(0,6)}$  ana koordinat çerçevesiyle uç işlevci arasındaki yönelimi ifade etmektedir.

$$\hat{C}^{(0,6)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Denklem (1.23)-(1.27) de verilen eşitlikler son üç eklemin ters kinematik çözümlerinin bulunmasında kullanılabilir.

### 1.3.2.3.Üstel (Exponansiyel) dönme matrislerinin cebirsel özellikleri

Eğer

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$e^{\tilde{n}\theta} = \hat{I}\cos\theta + \tilde{n}\sin\theta + \bar{n}\bar{n}^T(1 - \cos\theta)$  olarak ifade edilebilir. Burada  $e^{\tilde{n}\theta}$ ,  $\bar{n}$  birim vektörünün  $\theta$  açısıyla dönmesini ifade etmektedir.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak kabul edilirse bu durumda bize dönme matrislerini bulurken en çok yardımcı olacak temel matrisleri aşağıdaki gibi bulmuş oluruz.

$$e^{\tilde{u}_1\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{u}_2\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$e^{\tilde{u}_3\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1) \quad \tilde{n}^2 = \tilde{n}\tilde{n}^T - \dot{I} \quad \text{ve} \quad \tilde{n}^3 = -\tilde{n} \quad (1.29)$$

$$2) \quad \tilde{n}\tilde{m} = \tilde{m} \quad \tilde{n}^T - (\tilde{m}^T\tilde{n})\dot{I} \quad (1.30)$$

$$3) \quad \text{Eğer } \tilde{u} = \tilde{n}\tilde{m} \text{ ise } \tilde{u} = \tilde{n}\tilde{m} - \tilde{m}\tilde{n} = \tilde{m}\tilde{n}^T - \tilde{n}\tilde{m}^T \quad (1.31)$$

$$4) \quad \tilde{r}^T\tilde{n}\tilde{r} = 0 \quad \text{ama} \quad \tilde{r}^T\tilde{n}^2\tilde{r} = (\tilde{n}^T\tilde{r})^2 - \tilde{r}^T\tilde{r} \quad (1.32)$$

$$5) \quad (e^{\tilde{n}\theta})^{-1} = (e^{\tilde{n}\theta})^T = e^{-\tilde{n}\theta} \quad (1.33)$$

$$6) \quad e^{\tilde{n}\theta}e^{\tilde{n}\phi} = e^{\tilde{n}\phi}e^{\tilde{n}\theta} = e^{\tilde{n}(\theta+\phi)} \quad (1.34)$$

$$7) \quad e^{\tilde{n}\theta}\tilde{n} = \tilde{n}^Te^{\tilde{n}\theta} = \tilde{n}^T \quad (1.35)$$

$$8) \quad e^{\tilde{n}\theta}\tilde{n} = \tilde{n}e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.36)$$

$$9) \quad \text{Eğer } \tilde{m} = e^{\tilde{n}\theta}\tilde{u} \text{ ise } \tilde{m} = e^{\tilde{n}\theta}\tilde{u}e^{-\tilde{n}\theta} \quad \text{ve} \quad e^{\tilde{m}\phi} = e^{\tilde{n}\theta}e^{\tilde{n}\phi}e^{-\tilde{n}\theta} \quad \text{olur.} \quad (1.37)$$

$$10) \quad \tilde{p} = e^{\tilde{m}\beta}\tilde{n} \quad \text{iken} \quad e^{\tilde{m}\beta}e^{\tilde{n}\theta} = e^{\tilde{p}\theta}e^{\tilde{m}\beta} \quad (1.38)$$

$$11) \quad \tilde{q} = e^{-\tilde{m}\beta}\tilde{n} \quad \text{iken} \quad e^{\tilde{n}\theta}e^{\tilde{m}\beta} = e^{\tilde{m}\beta}e^{\tilde{q}\theta} \quad (1.39)$$

$$12) \quad e^{\tilde{u}_i\theta}\tilde{u}_j = \tilde{u}_j\cos\theta + \tilde{u}_i\tilde{u}_j\sin\theta \quad (1.40)$$

$$13) \quad \tilde{u}_j^Te^{\tilde{u}_i\theta} = \tilde{u}_j^T\cos\theta + (\tilde{u}_j\tilde{u}_i)^T\sin\theta \quad (1.41)$$

## 1.7. Yöntemlerin Karşılaştırılması

D-H yöntemi, SRK yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve tam ve parametrik sürekli yöntem, robot kinematiğini doğrudan on iki yararlı eleman içeren matrislerle ifade etmektedir. Üstel yöntem üç yararlı elemanla dönme hareketini en iyi şekilde ifade etmektedir. Kartonyum yöntemi ise dört yararlı elemanla dönme ve öteleme hareketini açıklamaktadır. Pratikte robotla uğraşan insanlar matris işlemlerine daha yatkın, diğer yöntemlerde kullanılan operatörlere de alışkın olmadıklarından dolayı, D-H yöntemi gibi matrisleri kullanarak kinematik model çıkaran yöntemler daha sık kullanılmaktadır. Oysa ki, bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önüne alındığında, Kartonyum yöntemi, üstel yöntem ve matrisleri kullanan diğer yöntemlerden daha hızlı çalışmaktadır. Yöntemlerin hesap yükünü daha ayrıntılı gösteren veriler Tablo 1.1'de verilmiştir (Nicholos, Aspragathos and Dimitros 1998).

**Tablo 1.1.** Üç yöntemin hesap yükü.

Yöntem	Hesap Yükü		Toplam işlem n=serbestlik derecesi
	+ , -	* , /	
D-H Yöntemi	36n-36	54n-48	126n-120
Üstel Yöntem	33n-18	36n+18	115n-48
Kartonyum Yöntemi	22n+3	39n-12	80n+12

Tablo 1.1’de her bir yöntemin bilgisayar ortamında meydana getirdikleri hesap yükü görülmektedir. Bilgisayarda her bir çarpma işleminin, toplama işleminin iki katı zamanda gerçekleştiği varsayılmıştır. Tablo 1.1’nin son kolonunda bilgisayarda gerçekleşen eşdeğer toplama miktarı verilmiştir. Tablo 1.1’den da görüldüğü gibi, serbestlik derecesi üçten fazla olan robotlar için çift sayı Kartonyum gösterimi, bilgisayar ortamında daha hızlı koşmaktadır.

## BÖLÜM 2. İKİLİ HARF KODUNUN KULLANILMASIYLA YAPILAN SINIFLANDIRMA

### 2.1. Giriş

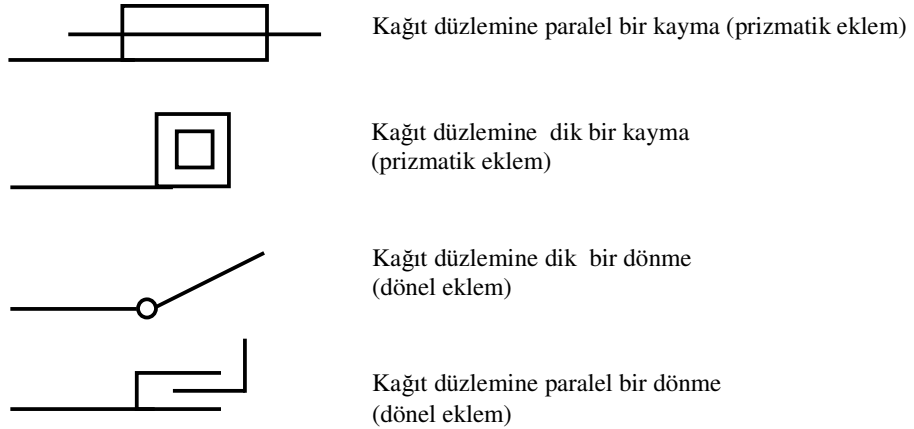
Bu bölümde, Huang ve Milenkovic tarafından ikili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırmaya göre elde edilen 16 adet robotun düzenleşimi ve katı gövde yapısı üzerinde durulacaktır. Huang ve Milenkovic robot türlerini tanımlamak için iki harften oluşan bir kod kullanmıştır. İlk harf, birinci eklem özelliğini ve ikinci eklem göre nasıl döndüğünü açıklamaktadır (Huang ve Milenkovic, 1983). İkinci harf ise, üçüncü eklem ve ikinci eklem ile üçüncü eklem arasındaki ilişkiyi tanımlar. Tanımlanan bu mekanizma Şekil 2.1’de verilmiştir. Kullanılan harfler ve anlamları da şu şekildedir:

S : Kayma,

C : Kayma eksenine dik dönme,

N : Dönme eksenine dik dönme,

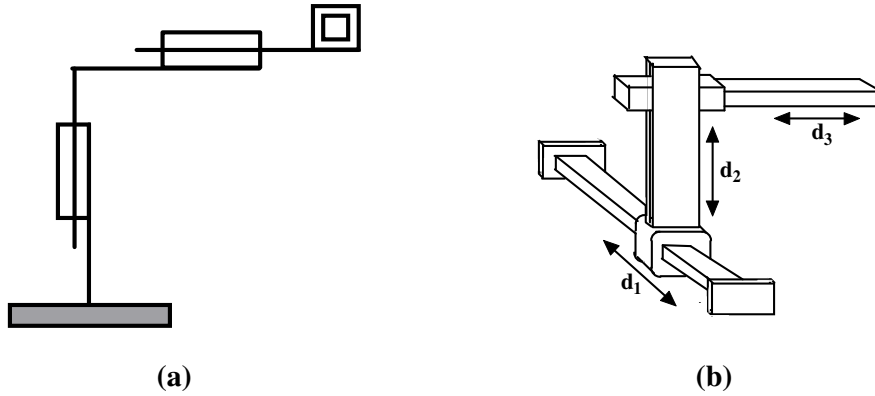
R : Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme.



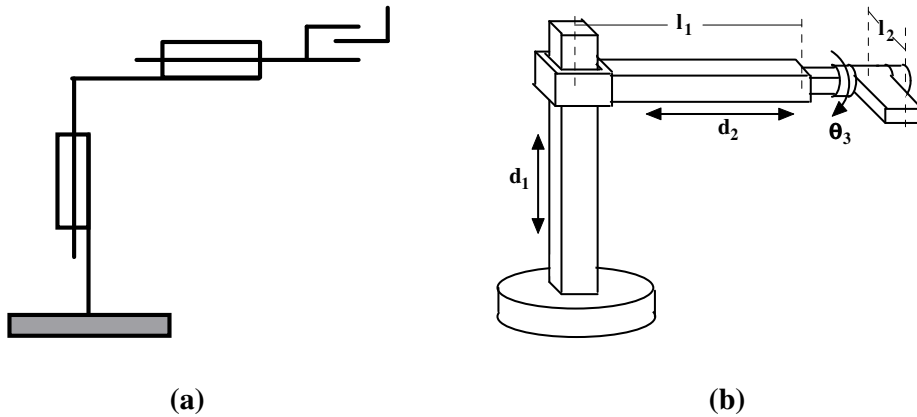
Şekil 2.1: Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma.

Huang ve Milenkoviç robot bağları için 16 adet 2 harf kombinasyonu kullanmıştır. Fakat bunların tamamı robot bağları için kullanışlı (useful) ve farklı (distinct)

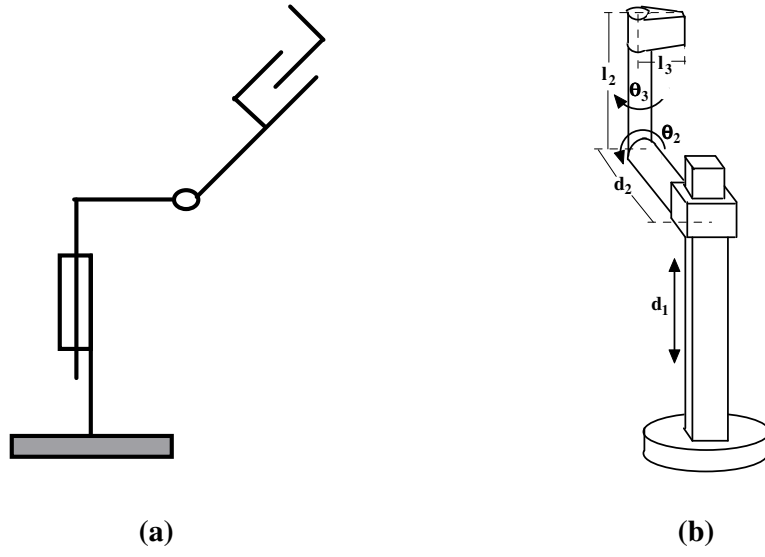
değildir. Kullanışlı bir bağ, 3 boyutlu uzayda geniş çaplı hareket (gross motion) yapabilme yeteneğine sahip olmalıdır. Farklılık ise her bir bağı kinematik olarak diğer kategoriler arasında tek olmasıdır. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 olası kod CC, CN, CR, CS, NC, NN, NR, NS, RC, RN, RR, RS, SC, SN, SR ve SS şeklinde elde edilir (Bingül 2000). Ayrıca, ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 adet düzenleşim ve bu düzenleşimlere denk düşen robot manipülatörlerinin katı gövde yapıları aşağıda şekillerde verilmiştir. Şekillerde robotların katı gövde yapıları üzerinde görülen  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  sırasıyla prizmatik  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $\theta_3$  ise dönel eklem değişkenlerini göstermektedir. Ayrıca P prizmatik, R ise dönel eklemi ifade etmektedir.



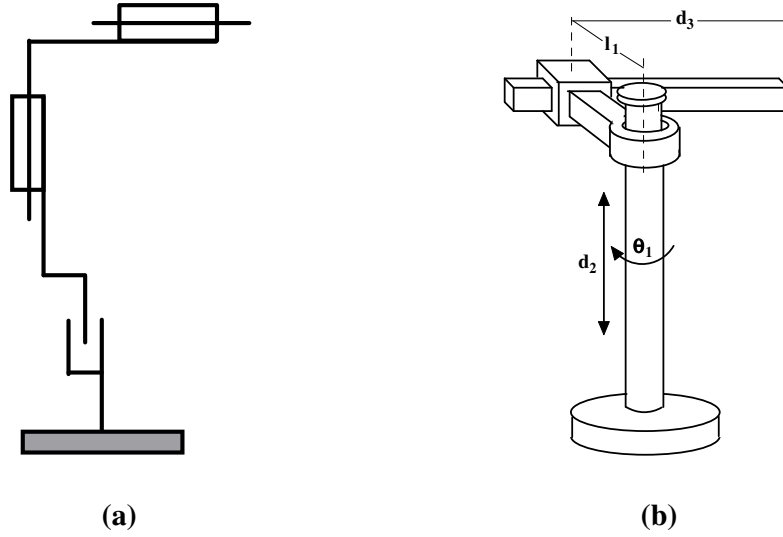
Şekil 2.2: SS (PPP) prizmatik robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



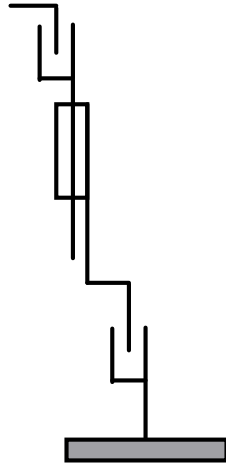
Şekil 2.3: SC (PPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



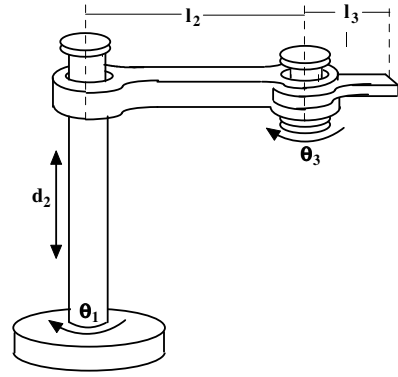
Şekil 2.4: SN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.5: CS (RPP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

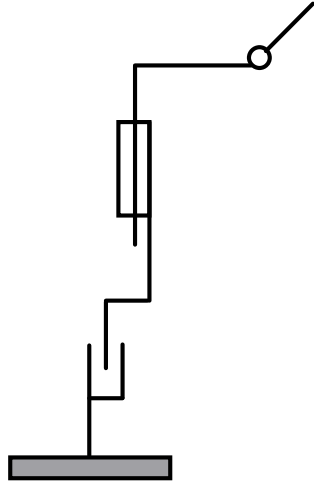


(a)

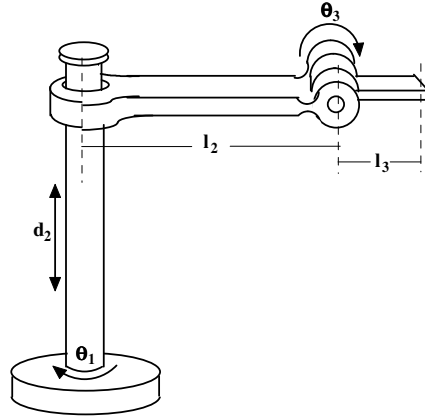


(b)

Şekil 2.6: CC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

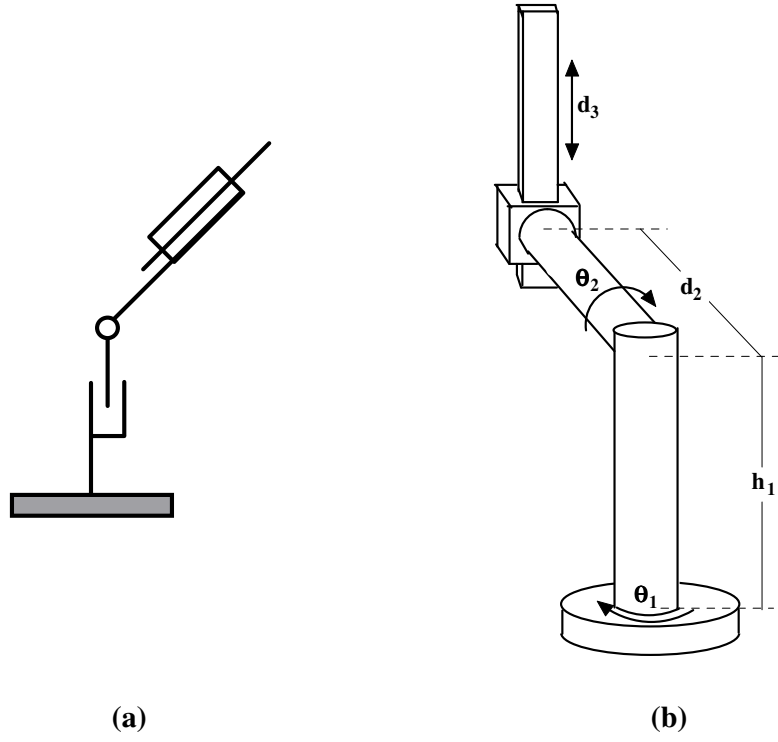


(a)

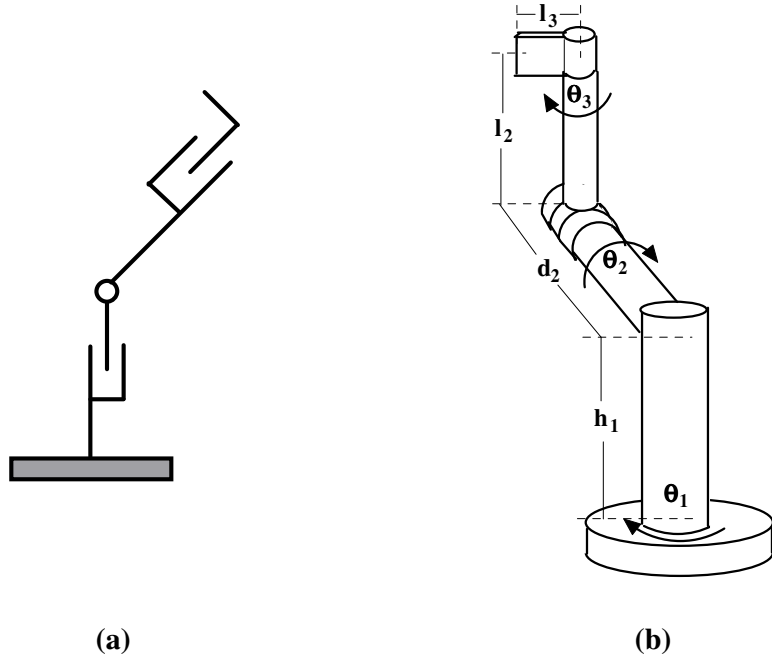


(b)

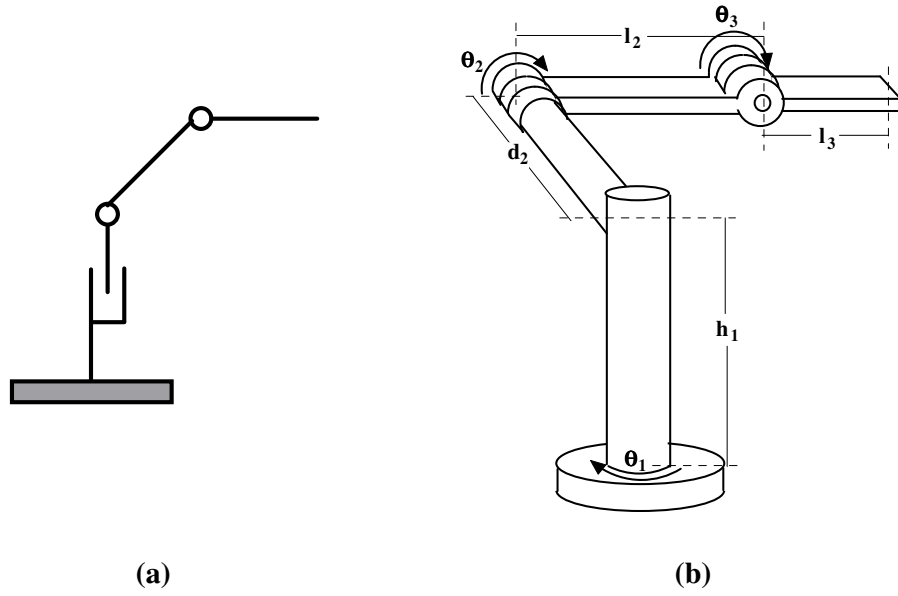
Şekil 2.7: CR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



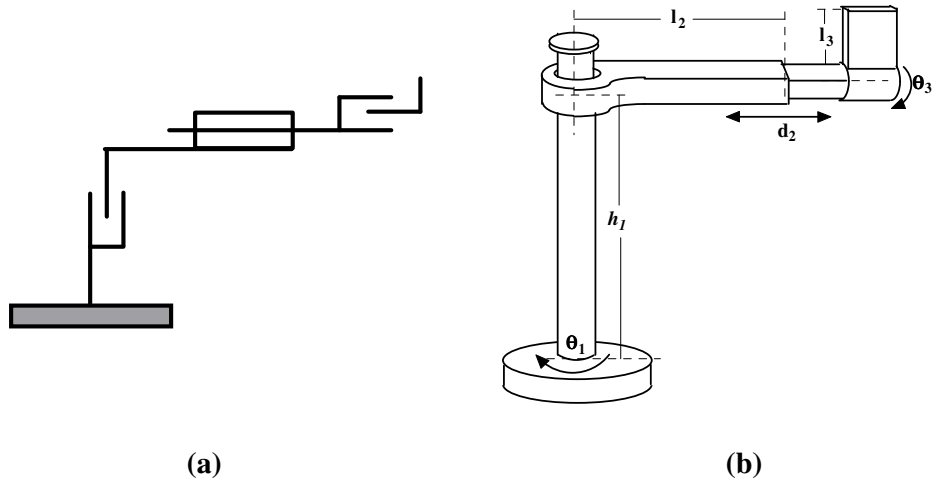
Şekil 2.8: NS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.9: NN (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

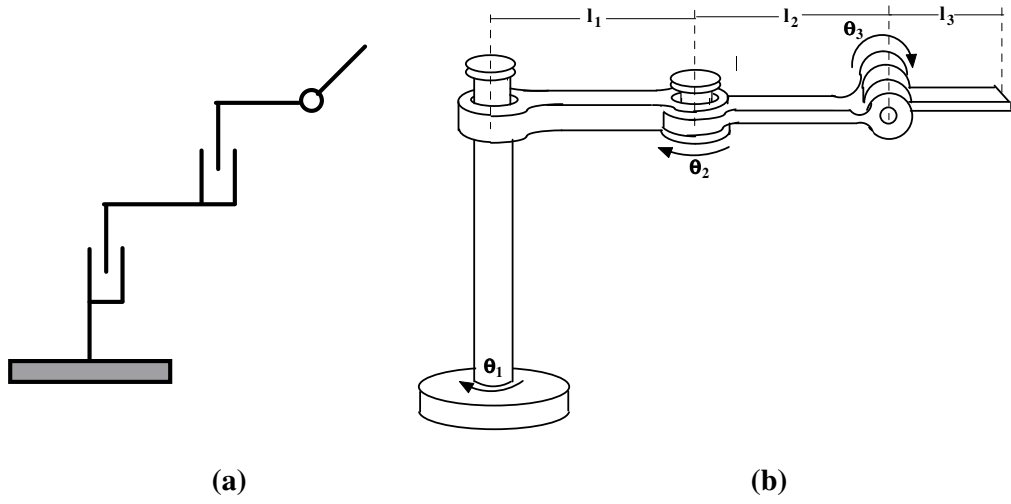


Şekil 2.10: NR (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

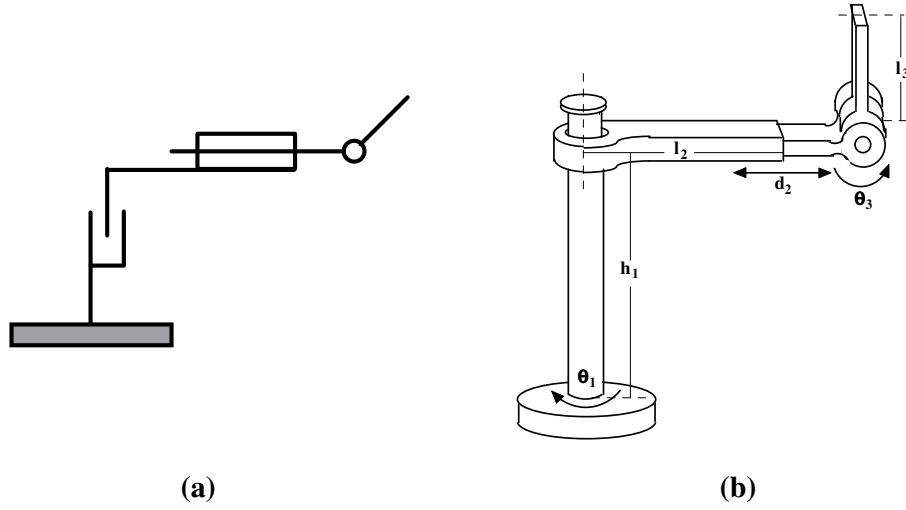


Şekil 2.11: RC (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.





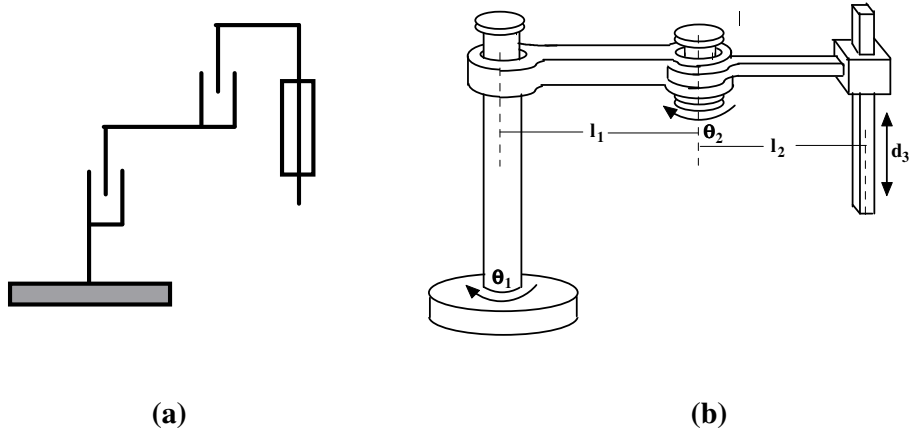
Şekil 2.12: RR (RRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



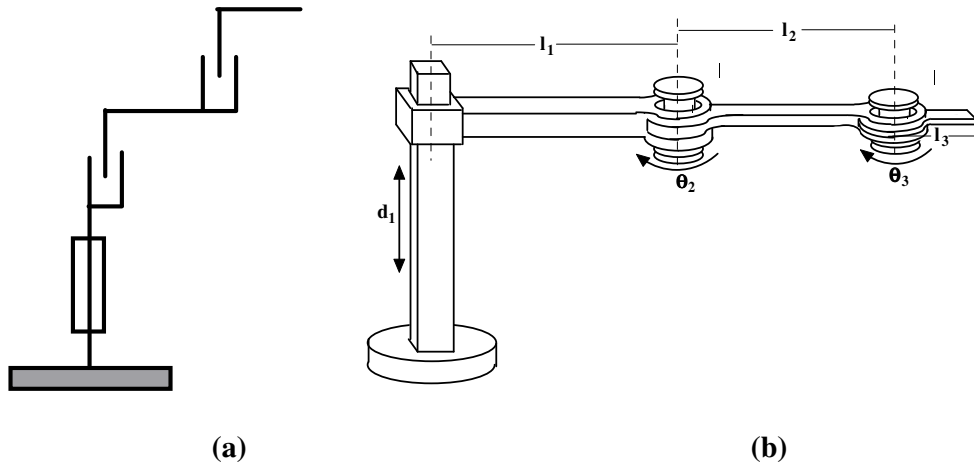
Şekil 2.13: RR (RPR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

Huang ve Milenkovic yukarıdaki kodlardan CN, NC, RS, ve SR'yi kullanışlı ve farklı bulmamıştır. Dolayısı ile bu robot türlerini sınıflandırma dışı bırakmışlardır. Buna rağmen RS kodu endüstride çok popüler olan “Skara” robotunu temsil eder. SR kodu da kullanışlı bir düzenleşimi temsil eder. Bu düzenleşimlerin her ikisi de üç boyutlu hareket etmesine rağmen düzlemsel robotlar (planar robots) olarak kabul edilirler. CN ve RC ise herhangi bir robot düzenleşimi olarak kabul edilmez.

Huang ve Milenkovic Şekil 2.14 ve Şekil 2.15’de verilen RS ve SR robotlarını kullanışlı ve farklı bulmamasına rağmen, bu robotlar silindirik çalışma alanları nedeniyle sık tercih edilirler. Huang ve Milenkovic’in bunları farklı ve kullanışlı bulmayışının nedeni, CS robotu ile aynı alanı taramalarından kaynaklanmaktadır. Sebep ne olursa olsun bunlar kullanışlı robotlar kategorisinde incelenecektir.

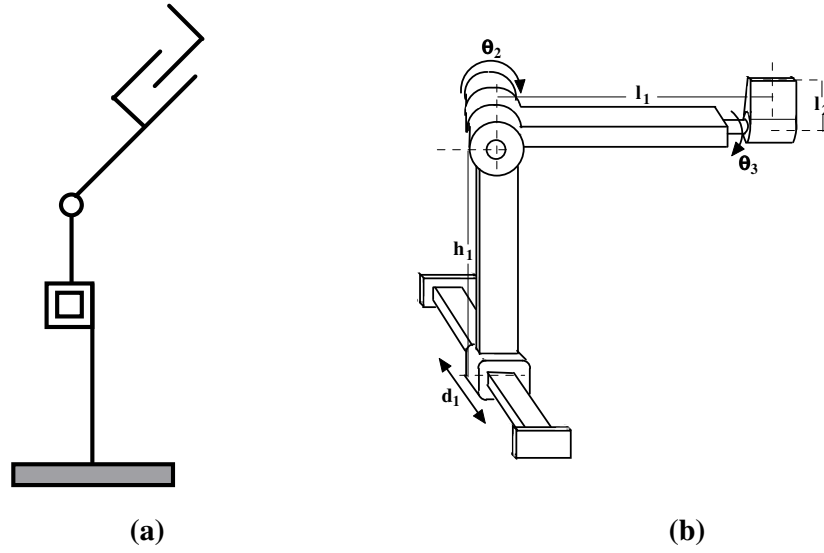


Şekil 2.14: RS (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

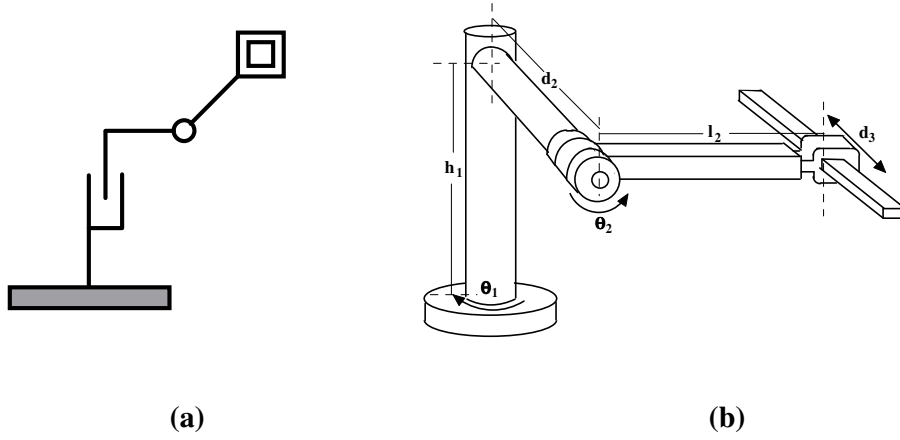


Şekil 2.15: SR (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonunun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

Şekil 2.16 ve Şekil 2.17’de gösterilen CN ve NC kodlarının tanımladıkları robot düzenleşimleri kullanışsızdırlar.



Şekil 2.16: CN (PRR) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.



Şekil 2.17: NC (RRP) robotunun a) ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan düzenleşimi, b) bu düzenleşimlere denk düşen katı gövde yapısı.

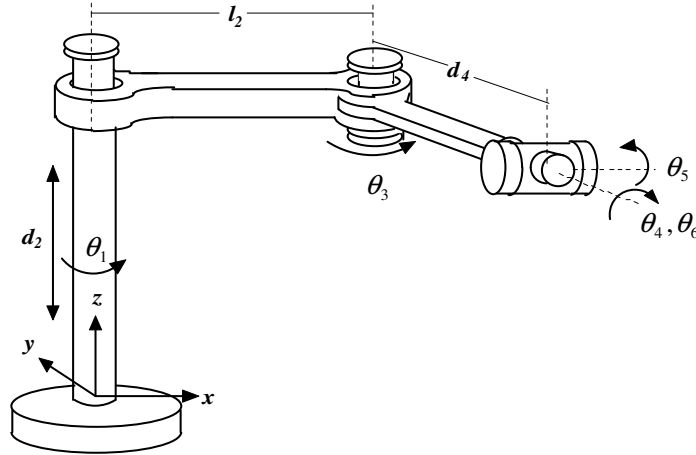
## BÖLÜM 3.ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL(EXPONANSİYEL) YÖNTEMLERİ İLERİ KİNEMATİK ÇÖZÜMLERİ

### 3.1. Giriş

Bu bölümde, onaltı adet temel endüstriyel robota Euler bileği eklenip üstel(exponansiyel) yöntem kullanılarak ileri kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir.

#### 3.1.1. CC Robotunun ileri kinematığı

CC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.1’de verilmiştir. Şekildeki Euler bilekli CC robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönme matrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.1: CC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$C^{(1,2)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

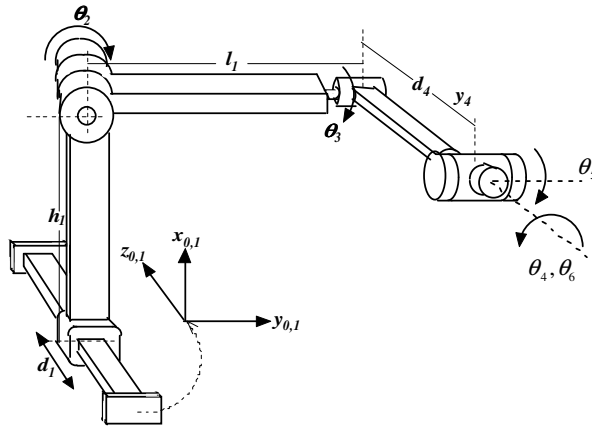
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrisleri etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_2 \vec{u}_1^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_2 c_1 + d_4 c_1 s_3 + d_4 c_3 s_1 \\ l_2 s_1 - d_4 c_1 c_3 + d_4 s_1 s_3 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

### 3.1.2. CN Robotunun ileri kinematiği

CN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.2’de görüldüğü şekildedir. Euler bilekli CN robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönme matrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.2: CN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(4,5)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + h_1 \vec{u}_1^{(2)} - l_1 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + h_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - l_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} h_1 - l_1 s_2 + d_4 c_2 s_3 \\ l_1 c_2 + d_4 s_2 s_3 \\ d_1 - d_4 c_3 \end{bmatrix} \tag{3.14}
\end{aligned}$$

### 3.1.3. CR Robotunun ileri kinematığı

CR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.3'de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.





$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

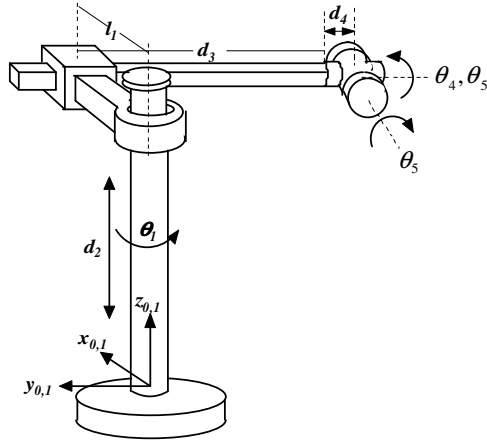
$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_2 \vec{u}_3^{(1)} + l_2 \vec{u}_1^{(2)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_2 c_1 + d_4 c_1 s_3 \\ l_2 s_1 + d_4 s_1 s_3 \\ d_2 - d_4 c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

### 3.1.4. CS Robotunun ileri kinematığı

CS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.4’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.4: CS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$C^{(1,2)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta_5 & \sin\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

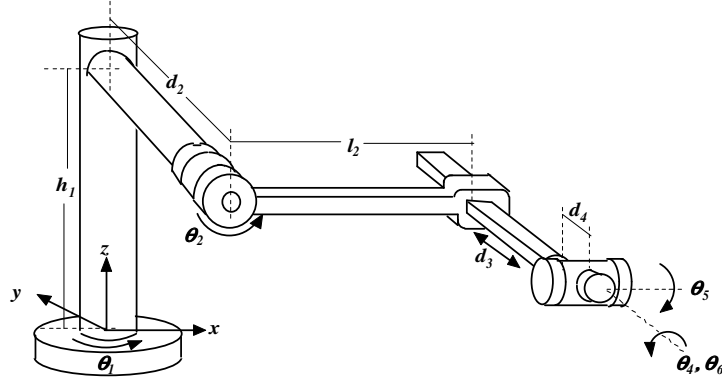
$$\begin{aligned} C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_3\theta_6} e^{\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} r &= d_2\vec{u}_3^{(2)} + a_3\vec{u}_1^{(3)} + d_3\vec{u}_3^{(3)} + d_4\vec{u}_3^{(4)} \{a_3 = l_1\} \\ \bar{r} &= d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\dots + l_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\dots + d_3 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\dots + d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1c_1 + d_3s_1 + d_4s_1 \\ l_1s_1 - d_4c_1 - d_3c_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.1.5. NC Robotunun ileri kinematığı

NC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.5'te görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.5: NC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(2,3)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$r = h_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_2 \vec{u}_1^{(3)} + d_3 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)}$$

$$\bar{r} = h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

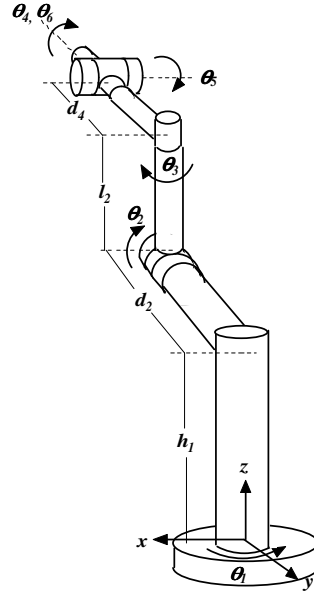
$$+ d_3 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} d_2 s_1 + d_3 s_1 + d_4 s_1 + l_2 c_1 c_2 \\ l_2 c_2 s_1 - d_3 c_1 - d_4 c_1 - d_2 c_1 \\ h_1 + l_2 s_2 \end{bmatrix} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

### 3.1.6. NN Robotunun ileri kinematığı

NN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.6'da görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.6: NN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_6} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

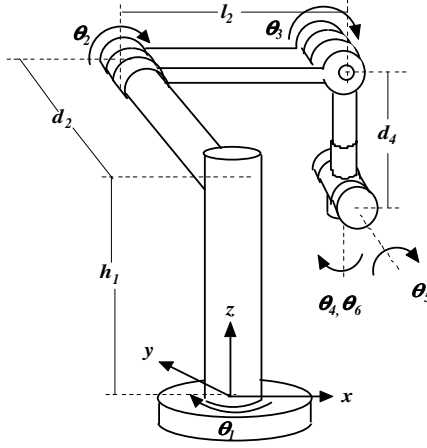


Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + d_3 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \{d_1 = h_1; d_3 = l_2\} \\
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_2 s_1 + d_4 c_3 s_1 - l_2 c_1 s_2 - d_4 c_1 c_2 s_3 \\ -d_2 c_1 - d_4 c_1 c_3 - l_2 s_1 s_2 - d_4 c_2 s_1 s_3 \\ h_1 + l_2 c_2 - d_4 s_2 s_3 \end{bmatrix} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

### 3.1.7. NR Robotunun ileri kinematığı

NR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.7’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açıları dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.7: NR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$C^{(1,2)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$C^{(3,4)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\bar{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\bar{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{\bar{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\bar{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

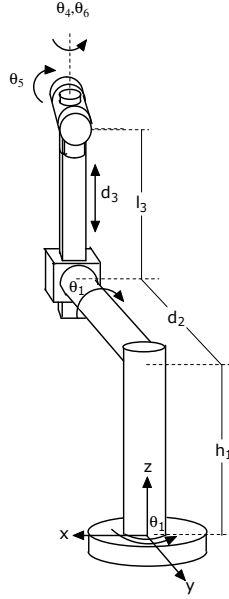
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= h_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_2 \vec{u}_1^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} l_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 - d_4 c_1 c_2 s_3 - d_4 \cos \theta_1 \cos \theta_3 \sin \theta_2 \\ d_2 c_1 + l_2 c_2 s_1 - d_4 c_2 s_1 s_3 - d_4 c_3 s_1 s_2 \\ h_1 - l_2 s_2 - d_4 c_2 c_3 + d_4 s_2 s_3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

### 3.1.8. NS Robotunun ileri kinematiği

NS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.8’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.8: NS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\vec{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$C^{(2,3)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

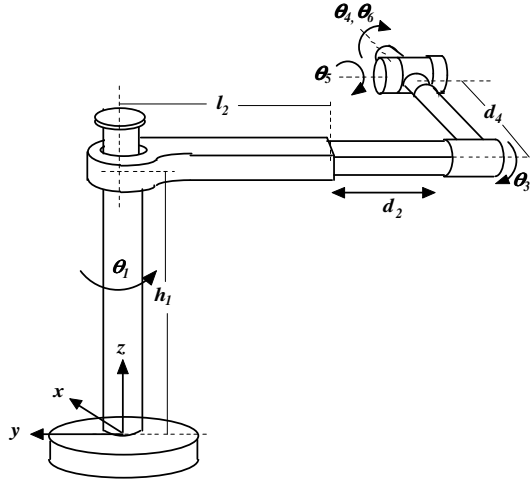
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$r = h_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + (d_3 + l_2) \vec{u}_3^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ (d_3 + l_2) \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_2 \sin \theta_1 - (\cos \theta_1 \sin \theta_2)(d_3 + l_2) - d_4 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -d_2 \cos \theta_1 - (\sin \theta_1 \sin \theta_2)(d_3 + l_2) - d_4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ h_1 + (\cos \theta_2)(d_3 + l_2) + d_4 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)
\end{aligned}$$

### 3.1.9. RC Robotunun ileri kinematiği

RC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.9'da görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.9: RC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$C^{(3,4)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_6} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

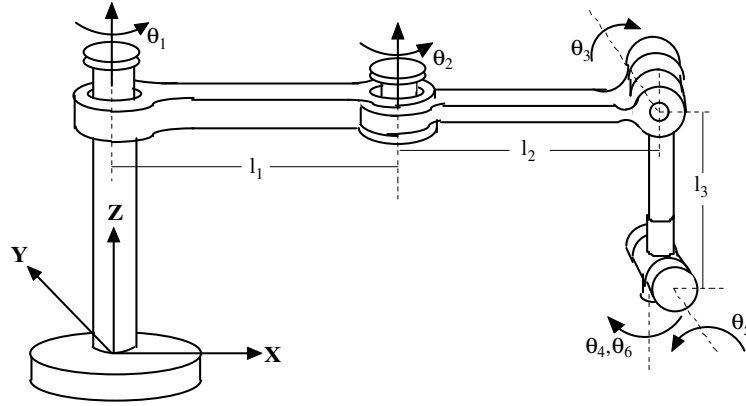
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_2 \vec{u}_3^{(2)} + d_4 \vec{u}_3^{(3)} \{d_1 = h_1; d_3 = d_3 + l_2\} \\
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_2 s_1 + l_2 s_1 - d_4 c_1 c_3 \\ -d_2 c_1 - l_2 c_1 - d_4 c_3 s_1 \\ h_1 - d_4 s_3 \end{bmatrix} \tag{3.63}
\end{aligned}$$



### 3.1.10. RN Robotunun ileri kinematığı

RN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.10'de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.10: RN robotunun yönelim ve konum bilgileri.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

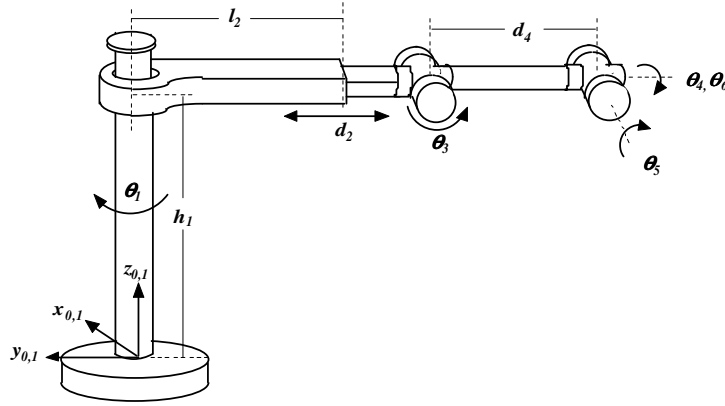
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= h_1 \vec{u}_3^{(1)} + l_1 \vec{u}_1^{(2)} + l_2 \vec{u}_1^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + (s_3)(d_4 c_1 c_2 - d_4 s_1 s_2) + l_2 c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2 \\ l_1 s_1 + (s_3)(d_4 c_1 s_2 + d_4 c_2 s_1) + l_2 c_1 s_2 + l_2 c_2 s_1 \\ h_1 - d_4 c_3 \end{bmatrix} \quad (3.70)
\end{aligned}$$

### 3.1.11. RR Robotunun ileri kinematiği

RR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.11’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.11: RR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$C^{(2,3)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

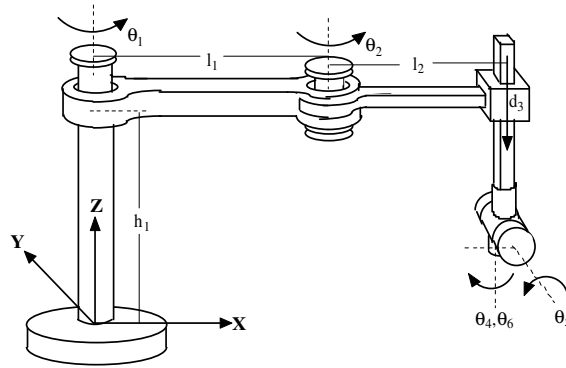
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= h_1 \vec{u}_3^{(1)} + (l_2 + d_2) \vec{u}_3^{(2)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= h_1 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (l_2 + d_2) \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (s_1)(d_2 + l_2) + d_4 c_3 s_1 \\ -(c_1)(d_2 + l_2) - d_4 c_1 c_3 \\ h_1 + d_4 s_3 \end{bmatrix} \tag{3.77}
\end{aligned}$$

### 3.1.12. RS Robotunun ileri kinematiği

RS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.12’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.12: RS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e^{\vec{u}_3, \theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_1 \pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$C^{(4,5)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_1 \pi} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

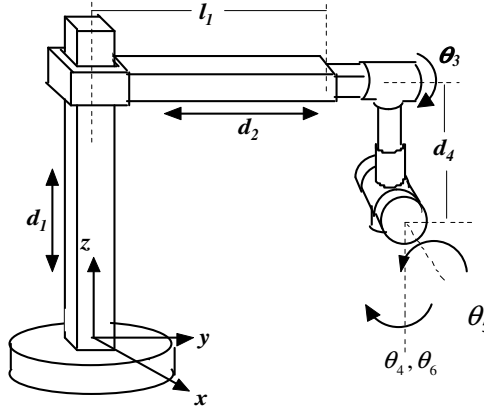
$$r = d_1 \vec{u}_3^{(1)} + l_1 \vec{u}_1^{(1)} + l_2 \vec{u}_1^{(2)} + d_3 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)}$$

$$\bar{r} = h_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + l_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + d_3 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& + d_4 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_{12} \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_{12} \\ h_1 - d_4 - d_3 \end{bmatrix} \tag{3.84}
\end{aligned}$$

### 3.1.13. SC Robotunun ileri kinematığı

SC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.13'te görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.13: SC Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

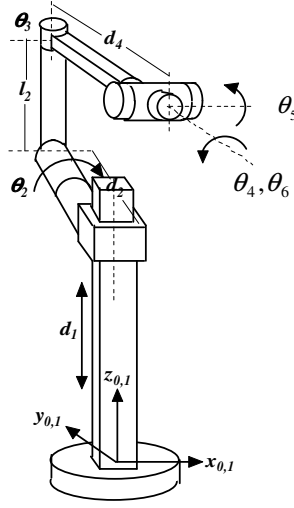
Tüm dönme matrisleri bulunduğundan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.



$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_1 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad - l_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_4 s_3 \\ d_2 + l_1 \\ d_1 - d_4 c_3 \end{bmatrix} \tag{3.91}
\end{aligned}$$

### 3.1.14. SN Robotunun ileri kinematığı

SN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.14'te görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.14: SN Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(2,3)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.97}$$

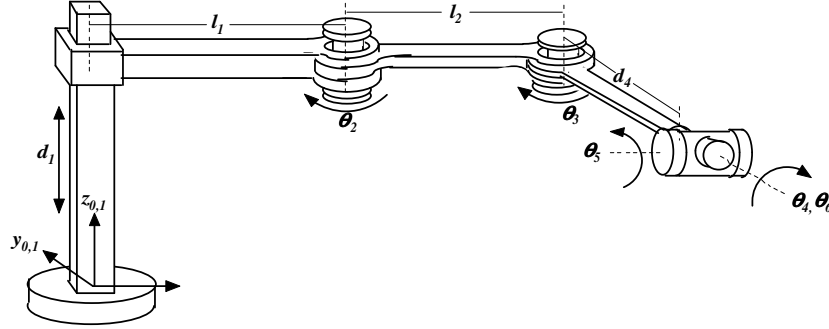
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} - d_2 \vec{u}_3^{(2)} + l_2 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\
\bar{r} &= d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + l_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} d_4 c_2 s_3 - l_2 s_2 \\ d_2 - d_4 c_3 \\ d_1 + l_2 c_2 + d_4 s_2 s_3 \end{bmatrix} \quad (3.98)
\end{aligned}$$

### 3.1.15. SR Robotunun ileri kinematığı

SR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.15’de görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.15: SR Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e = 1 \quad (3.99)$$

$$C^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned}
C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
C^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
C^{(5,6)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

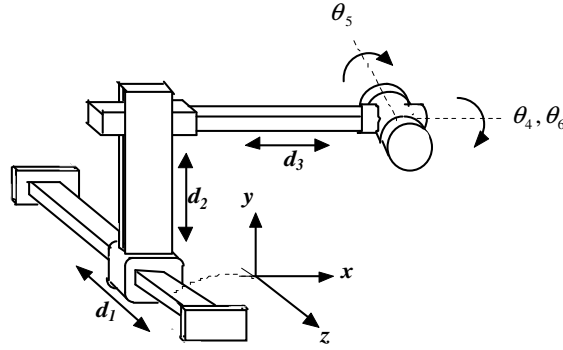
Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + a_2 \vec{u}_1^{(1)} + a_3 \vec{u}_1^{(2)} + d_4 \vec{u}_3^{(3)} \\
\vec{r} &= d_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 + d_4 c_2 s_3 + d_4 c_3 s_2 \\ l_2 s_2 - d_4 c_2 c_3 + d_4 s_2 s_3 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

### 3.1.16. SS Robotunun ileri kinematığı

SS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.16’da görüldüğü şekildedir. Şekildeki eklem uzunlukları ve açılar dikkate alındığında Euler bilekli CR robotuna ait ileri kinematik matrislerini bulmak için gerekli olan dönmematrisleri ve konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.16: SS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

$$C^{(0,1)} = e = 1 \quad (3.106)$$

$$C^{(1,2)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$C^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$C^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} C^{(4,5)} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} C^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Tüm dönme matrisleri bulunduktan sonra bu matrislerin etki ettiği eklem konum değişkenleri de dikkate alınarak konum vektörü aşağıdaki yöntemle bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + d_3 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\ \bar{r} &= d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ d_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= d_1 \vec{u}_3^{(1)} + d_2 \vec{u}_3^{(2)} + d_3 \vec{u}_3^{(3)} + d_4 \vec{u}_3^{(4)} \\ &= \begin{bmatrix} d_3 + d_4 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.112}$$



## BÖLÜM 4. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÜSTEL(EXPONANSİYEL) YÖNTEMLE TERS KİNEMATİK ÇÖZÜMLERİ

### 4.1. Giriş

Bu bölümde, onaltı adet temel endüstriyel robota Euler bileği eklenip üstel (exponansiyel) yöntem kullanılarak ters kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir. Bölüm 3'te on altı adet robotun her birinin dönme matrisleri ve konumları bulunduğu ve ters kinematik hesaplanırken de bu matrislerden ve vektörlerden yararlanılacağından tekrar elde edilme yolu gösterilmemiş bulunmuş olan değerler aynen kullanılmıştır. Her robotun ters kinematik çözüm yolu birbirine benzer olmasına karşın çözümler çoğu zaman farklılık gösterdiğinden tüm çözümler ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

Ters kinematik çözümleri ilk üç ekleme ait değişkenlerin konum vektörü yardımıyla, son üç ekleme ait değişkenler ise dönme matrisi yardımıyla çözümlendiği görülebilir.

#### 4.1.1 CC Robotunun ters kinematığı

İlk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörüne ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\dot{u}_3\theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x c_1 + P_y s_1 \\ P_y c_1 - P_x s_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 + d_4 s_3 \\ -d_4 c_3 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 &= l_2 + d_4 \sin \theta_3 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 &= -d_4 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( \frac{P_x^2 + P_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2l_2 d_4}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{P_x^2 + P_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2l_2 d_4} \right)^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 &= l_2 + d_4 \sin \theta_3 \\ \theta_1 &= A \tan 2(P_y, P_x) \pm A \tan 2 \left( \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - (l_2 + d_4 \sin \theta_3)^2}, l_2 + d_4 \sin \theta_3 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$d_2 = P_z \quad (4.4)$$

Son üç ekleme aitdeğişkenleri bulmak için dönme matrisinin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4})^T$  ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \dots$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{31} s_4 + r_{11} c_4 c_{13} + r_{21} c_4 s_{13} & \cdot \\ r_{31} c_4 - r_{11} s_4 c_{13} - r_{21} s_4 s_{13} & \cdot \\ r_{11} s_{13} - r_{21} c_{13} & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_4 + r_{12}c_4c_{13} + r_{22}c_4s_{13} \cdot \\ \cdot r_{32}c_4 - r_{12}c_4c_{13} - r_{22}c_4c_{13} \cdot \\ \cdot \quad r_{12}c_{13} - r_{22}c_{13} \quad \cdot \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{33}s_4 + r_{13}c_4c_{13} + r_{23}c_4s_{13} \\ \cdot \cdot r_{33}c_4 - r_{13}s_4c_{13} - r_{23}s_4s_{13} \\ \cdot \cdot \quad r_{13}s_{13} - r_{23}c_{13} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
& (-r_{13}c_{13} - r_{23}s_{13})s_4 - r_{33}c_4 = 0 \\
& \theta_4 = \pm A \tan 2(-r_{33}, -r_{13} \cos \theta_{13} - r_{23} \sin \theta_{13}) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
s_5 &= -(r_{33}s_4 + r_{13}c_4c_{13} + r_{23}c_4s_{13}) \\
c_5 &= r_{13}s_{13} - r_{23}c_{13} \\
\theta_5 &= A \tan 2(-r_{33} \sin \theta_4 + r_{13} \cos \theta_4 \cos \theta_{13} + r_{23} \cos \theta_4 \sin \theta_{13}, \\
& \quad r_{13}s_{13} - r_{23} \cos_{13}) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
s_6 &= r_{31}c_4 - r_{11}s_4c_{13} - r_{21}s_4c_{13} \\
c_6 &= r_{32}c_4 - r_{12}s_4c_{13} - r_{22}s_4s_{13} \\
\theta_6 &= A \tan 2(r_{31} \cos \theta_4 - r_{11} \sin \theta_4 \cos \theta_{13} - r_{21} \sin \theta_4 \cos \theta_{13}, \\
& \quad r_{32} \cos \theta_4 - r_{12} \sin \theta_4 \cos \theta_{13} - r_{22} \sin \theta_4 \sin \theta_{13}) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

#### 4.1.2 CN Robotunun ters kinematığı

İlk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörüne ait eşitliğin her iki tarafı  $(ee^{\tilde{u}_3\theta_2})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = -l_1 \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ + d_4 \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \cos \theta_2 + P_y \sin \theta_2 - h_1 \\ P_y \cos \theta_2 - P_x \sin \theta_2 \\ P_z - d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_4 \sin \theta_3 \\ l_1 \\ -d_4 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$P_y \cos \theta_2 - P_x \sin \theta_2 = l_1$$

$$\theta_2 = A \tan 2(-P_x, P_y) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2}, l_1) \quad (4.9)$$

$$\frac{P_x \cos \theta_2 + P_y \sin \theta_2 - h_1}{d_4} = \sin \theta_3$$

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{P_x \cos \theta_2 + P_y \sin \theta_2 - h_1}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x \cos \theta_2 + P_y \sin \theta_2 - h_1}{d_4}\right)^2}\right) \quad (4.10)$$

$$P_z - d_1 = -d_4 \cos \theta_3$$

$$d_1 = d_4 \cos \theta_3 + P_z \quad (4.11)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(ee^{\tilde{u}_3\theta_2} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_3})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = ee^{\tilde{u}_3\theta_2} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{31}s_3 + r_{11}c_2c_3 + r_{21}c_3s_2 & \cdot & \cdot \\ r_{31}c_3 - r_{11}c_2s_3 - r_{21}s_2s_3 & \cdot & \cdot \\ r_{11}s_2 - r_{21}c_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_3 + r_{12}c_2c_3 + r_{22}c_3s_2 & \cdot \\ \cdot r_{32}c_3 - r_{12}c_2s_3 - r_{22}s_2s_3 & \cdot \\ \cdot & r_{12}s_2 - r_{22}c_2 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot & \cdot r_{33}s_3 + r_{13}c_2c_3 + r_{23}c_3s_2 \\ \cdot & \cdot r_{33}c_3 - r_{13}c_2s_3 - r_{23}s_2s_3 \\ \cdot & \cdot & r_{13}s_2 - r_{23}c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & c_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & -c_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & s_4s_5 \end{bmatrix}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\cos\theta_5 = -r_{33} \cos\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{23} \sin\theta_2 \sin\theta_3$$

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (-r_{33} \cos\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{23} \sin\theta_2 \sin\theta_3)^2}$$

$$, -r_{33} \cos\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{23} \sin\theta_2 \sin\theta_3) \quad (4.12)$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\cos\theta_4 = \frac{r_{33} \sin\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \cos\theta_3 + r_{23} \cos\theta_3 \sin\theta_2}{\sin\theta_5}$$

$$\sin\theta_4 = \frac{r_{13} \sin\theta_2 - r_{23} \cos\theta_2}{\sin\theta_5}$$

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{r_{13} \sin\theta_2 - r_{23} \cos\theta_2}{\sin\theta_5}, \frac{r_{33} \sin\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \cos\theta_3 + r_{23} \cos\theta_3 \sin\theta_2}{\sin\theta_5}\right) \quad (4.13)$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\cos\theta_6 = \frac{r_{31} \cos\theta_3 - r_{11} \cos\theta_2 \sin\theta_3 - r_{21} \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_5}$$

$$\sin\theta_6 = \frac{-r_{32} \cos\theta_3 + r_{12} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{22} \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_5}$$

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-r_{32} \cos\theta_3 + r_{12} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{22} \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_5}, \frac{r_{31} \cos\theta_3 - r_{11} \cos\theta_2 \sin\theta_3 - r_{21} \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_5}\right) \quad (4.14)$$

#### 4.1.3 CR Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\dot{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x c_1 + P_y s_1 \\ P_y c_1 - P_x s_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 + d_4 s_3 \\ 0 \\ d_2 - d_4 c_3 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$P_y \cos\theta_1 - P_x \sin\theta_1 = 0$$

$$\theta_1 = \pm A \tan 2(P_y, P_x) \quad (4.16)$$

$$\frac{P_x \cos\theta_1 + P_y \sin\theta_1 - l_2}{d_4} = \sin\theta_3$$

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( \frac{P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 - l_2}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 - l_2}{d_4} \right)^2} \right) \quad (4.17)$$

$$d_2 = P_z + d_4 \cos \theta_3 \quad (4.18)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e e e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4})^T$  ile çarpılarak diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e e e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & r_{11}(s_1 s_4 + c_1 c_3 c_4) - r_{21}(c_1 s_4 - c_3 c_4 s_1) + r_{31} c_4 s_3 \quad \cdot \cdot \\ & r_{11}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{21}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{31} s_3 s_4 \quad \cdot \cdot \\ & \quad r_{11} c_1 s_3 - r_{31} c_3 + r_{21} s_1 s_3 \quad \cdot \cdot \\ & \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{12}(s_1 s_4 + c_1 c_3 c_4) - r_{22}(c_1 s_4 - c_3 c_4 s_1) + r_{32} c_4 s_3 \cdot \\ \cdot r_{12}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{22}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{32} s_3 s_4 \cdot \\ \cdot \quad r_{12} c_1 s_3 - r_{32} c_3 + r_{22} s_1 s_3 \quad \cdot \end{bmatrix} \\ & \dots \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{13}(s_1 s_4 + c_1 c_3 c_4) - r_{23}(c_1 s_4 - c_3 c_4 s_1) + r_{33} s_4 s_3 \\ \cdot \cdot r_{13}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{23}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{33} s_3 s_4 \\ \cdot \cdot \quad r_{13} c_1 s_3 - r_{33} c_3 + r_{23} s_1 s_3 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & -c_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{13}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{23}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{33} s_3 s_4 = 0$$

$$\theta_4 = \pm A \tan 2 \left( \begin{array}{c} r_{13} \sin \theta_1 - r_{23} \cos \theta_1 \\ , r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_1 + r_{33} \sin \theta_3 \end{array} \right) \quad (4.19)$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} s_5 &= -(r_{13}(s_1 s_4 + c_1 c_3 c_4) - r_{23}(c_1 s_4 - c_3 c_4 s_1) + r_{33} c_4 s_3) = b \\ c_5 &= -(r_{13} c_1 s_3 - r_{33} c_3 + r_{23} s_1 s_3) = a \\ \theta_5 &= A \tan 2(b, a) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Matrislerin (1,2) ve (3,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} s_6 &= -(r_{11}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{21}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{31} s_3 s_4) = d \\ c_6 &= -(r_{12}(c_4 s_1 - c_1 c_3 s_4) - r_{22}(c_1 c_4 + c_3 s_1 s_4) - r_{32} s_3 s_4) = c \\ \theta_6 &= A \tan 2(d, c) \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.1.4 CS Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= d_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ l_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ d_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$+ d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ -d_3 - d_4 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 = l_1$$

$$\theta_1 = A \tan 2(P_y, P_x) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2}, l_1) \quad (4.23)$$

$$d_2 = P_z \quad (4.24)$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = -d_3 - d_4$$

$$d_3 = P_x \sin \theta_1 - P_y \cos \theta_1 - d_4 \quad (4.25)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_5 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{31} s_4 + r_{11} c_1 c_4 + r_{21} c_4 s_1 & \cdot \\ r_{31} c_4 - r_{11} c_1 s_4 - r_{21} s_1 s_4 & \cdot \\ r_{11} s_1 - r_{21} c_1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_4 + r_{12}c_1c_4 + r_{22}c_4s_1 \cdot \\ \cdot r_{32}c_4 - r_{12}c_1s_4 - r_{22}s_1s_4 \cdot \\ \cdot \quad r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \quad \cdot \end{bmatrix} \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{33}s_4 + r_{13}c_1c_4 + r_{23}c_4s_1 \\ \cdot \cdot r_{33}c_4 - r_{13}c_1s_4 - r_{23}s_1s_4 \\ \cdot \cdot \quad r_{13}s_1 - r_{23}c_1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -c_5c_6 & c_5s_6 & -s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
r_{33}c_4 - (r_{13}c_1 + r_{23}s_1)s_4 &= 0 \\
\theta_4 &= A \tan 2(r_{33} \cos \theta_4, r_{13} \cos \theta_1 + r_{23} \sin \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
s_5 &= -(r_{33}s_4 + r_{13}c_1c_4 + r_{23}c_4s_1) \\
c_5 &= r_{13}s_1 - r_{23}c_1 \\
\theta_5 &= A \tan 2(-(r_{33} \sin \theta_4 + r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_4 + r_{23} \cos \theta_4 \sin \theta_1) \\
&\quad , r_{13} \sin \theta_1 - r_{23} \cos \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
s_6 &= r_{31}c_4 - r_{11}c_1s_4 - r_{21}s_1s_4 \\
c_6 &= r_{32}c_4 - r_{12}c_1s_4 - r_{22}s_1s_4 \\
\theta_6 &= A \tan 2(r_{31} \cos \theta_4 - r_{11} \cos \theta_1 \sin \theta_4 - r_{21} \sin \theta_1 \sin \theta_4 \\
&\quad , r_{32} \cos \theta_4 - r_{12} \cos \theta_1 \sin \theta_4 - r_{22} \sin \theta_1 \sin \theta_4)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

#### 4.1.5 NC Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3\theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &+ d_3 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &+ l_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ -d_2 - d_3 - d_4 \\ h_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \theta_2 &= \frac{P_z - h_1}{l_2} \\
 \theta_2 &= A \tan 2 \left( \frac{P_z - h_1}{l_2}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{P_z - h_1}{l_2} \right)^2} \right) \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

$$\theta_1 = A \tan 2(P_y, P_x) \pm A \tan 2 \left( \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - l_2^2 \cos^2 \theta_2} \right) \tag{4.31}$$

$$d_3 = -P_y \cos \theta_1 + P_x \sin \theta_1 - d_2 - d_4 \tag{4.32}$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_2})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_2} e e^{\tilde{u}_3\theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{31}s_2 + r_{11}c_1c_2 + r_{21}c_2s_1 & \cdot & \cdot \\ r_{31}c_2 - r_{11}c_1s_2 - r_{21}s_1s_2 & \cdot & \cdot \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_2 + r_{12}c_1c_2 + r_{22}c_2s_1 & \cdot \\ \cdot r_{32}c_2 - r_{12}c_1s_2 - r_{22}s_1s_2 & \cdot \\ \cdot & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot & \cdot r_{33}s_2 + r_{13}c_1c_2 + r_{23}c_2s_1 \\ \cdot & \cdot r_{33}c_2 - r_{13}c_1s_2 - r_{23}s_1s_2 \\ \cdot & \cdot & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & s_5 \end{bmatrix}$$

Matrislerin (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin\theta_5 = r_{13} \sin\theta_1 - r_{23} \cos\theta_1$$

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (r_{13} \sin\theta_1 - r_{23} \cos\theta_1)^2}, r_{13} \sin\theta_1 - r_{23} \cos\theta_1) \quad (4.33)$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\cos\theta_4 = -\frac{r_{33} \sin\theta_2 + r_{13} \cos\theta_1 \cos\theta_2 + r_{23} \cos\theta_2 \sin\theta_1}{\sin\theta_5}$$

$$\sin\theta_4 = -\frac{r_{33} \cos\theta_2 - r_{13} \cos\theta_1 \sin\theta_2 - r_{23} \sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin\theta_5}$$

$$\theta_4 = A \tan 2\left(-\frac{r_{33} \cos \theta_2 - r_{13} \cos \theta_1 \sin \theta_2 - r_{23} \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_5}, -\frac{r_{33} \sin \theta_2 + r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_{23} \cos \theta_2 \sin \theta_1}{\sin \theta_5}\right) \quad (4.34)$$

Matrislerin (3,1) ve (3,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \cos \theta_6 &= \frac{r_{11} \sin \theta_1 - r_{21} \cos \theta_1}{\sin \theta_5} \\ \sin \theta_6 &= -\frac{r_{12} \sin \theta_1 - r_{22} \cos \theta_1}{\sin \theta_5} \\ \theta_6 &= A \tan 2\left(-\frac{r_{12} \sin \theta_1 - r_{22} \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{r_{11} \sin \theta_1 - r_{21} \cos \theta_1}{\sin \theta_5}\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4.1.6 NN Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= d_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ l_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -s_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -s_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z - h_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -d_2 - d_4 \cos \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 - d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + h_1^2 + 2P_z h_1 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_2 d_4} \\ \theta_3 &= A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + h_1^2 + 2P_z h_1 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_2 d_4}\right)^2}, \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + h_1^2 + 2P_z h_1 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_2 d_4}\right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$P_z - h_1 = l_2 \cos \theta_2 - d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\sin \theta_2 = \frac{P_z - h_1 - l_2 \cos \theta_2}{-d_4 \sin \theta_3}$$

$$\theta_2 = A \tan 2(d_4 \sin \theta_3, l_2) \pm A \tan 2(d_4^2 \sin^2 \theta_3 + l_2^2 - (P_z - h_1), P_z - h_1) \quad (4.38)$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = -d_2 - d_4 \cos \theta_3$$

$$\theta_1 = A \tan 2(P_x, -P_y) \pm A \tan 2(P_x^2 + P_y^2 - (d_4 \cos \theta_3 + d_2), d_4 \cos \theta_3 + d_2) \quad (4.39)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 \\ -s_3 & 0 & -c_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{21}(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - r_{11}(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) + r_{31} c_3 s_2 & \cdot \\ r_{21}(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3) - r_{11}(c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3) - r_{31} s_2 s_3 & \cdot \\ r_{31} c_2 - r_{11} c_1 s_2 - r_{21} s_1 s_2 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{22}(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - r_{12}(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) + r_{32} c_3 s_2 & \cdot \\ r_{22}(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3) - r_{12}(s_3 s_1 + c_1 c_2 s_3) - r_{32} s_2 s_3 & \cdot \\ r_{32} c_2 - r_{12} c_1 s_2 - r_{22} s_1 s_2 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{23}(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - r_{13}(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) + r_{33} c_3 s_2 \\ r_{23}(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3) - r_{13}(c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3) - r_{33} s_2 s_3 \\ r_{33} c_2 - r_{13} c_1 s_2 - r_{23} s_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_6 s_4 - c_4 c_5 s_6 & -c_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & -c_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & -s_4 s_5 \end{bmatrix}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 -c_5 &= r_{23}(c_1c_3 - c_2s_1s_3) - r_{13}(c_3s_1 + c_1c_2s_3) - r_{33}s_2s_3 \\
 a &= -(r_{23}(c_1c_3 - c_2s_1s_3) - r_{13}(c_3s_1 + c_1c_2s_3) - r_{33}s_2s_3) \\
 \theta_5 &= A \tan 2(\pm\sqrt{1-a^2}, a)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 -c_4s_5 &= r_{23}(c_1s_3 + c_2c_3s_1) - r_{13}(s_1s_3 - c_1c_2c_3) + r_{33}c_3s_2 = a \\
 -s_4s_5 &= r_{33}c_2 - r_{13}c_1s_2 - r_{23}s_1s_2 = b \\
 \theta_4 &= A \tan 2\left(\frac{-a}{\sin \theta_5}, \frac{-b}{\sin \theta_5}\right)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 c_6 &= -\frac{r_{21}(c_1c_3 - c_2s_1s_3) - r_{11}(c_3s_1 + c_1c_2s_3) - r_{31}s_2s_3}{s_5} = a \\
 s_6 &= \frac{r_{22}(c_1c_3 - c_2s_1s_3) - r_{12}(c_3s_1 + c_1c_2s_3) - r_{32}s_2s_3}{s_5} = b \\
 \theta_6 &= A \tan 2(b, a)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

#### 4.1.7 NR Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3\theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ l_2 \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P_x c_1 + P_y s_1 \\ P_y c_1 - P_x s_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_1 c_2 - d_4 c_2 s_3 - d_4 c_3 s_2 \\ d_2 - l_2 c_2 s_1 \\ h_1 - l_2 s_2 - d_4 c_2 c_3 + d_4 s_2 s_3 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = d_2$$

$$\theta_1 = A \tan 2(-P_x, P_y) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}, d_2) \quad (4.44)$$

$$(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1)^2 = (l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - d_4 \cos \theta_3 \sin \theta_2)^2 = a$$

$$(P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1)^2 = (d_2 - l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1)^2 = b$$

$$(P_z)^2 = (h_1 - l_2 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 = c$$

$$(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1)^2 + (P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1)^2 + (P_z)^2$$

$$= (l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - d_4 \cos \theta_3 \sin \theta_2)^2$$

$$+ (d_2 - l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1)^2 + (h_1 - l_2 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2$$

$$\theta_3 = A \tan 2\left(-\frac{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4 l_2}, \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4 l_2}\right)^2}\right) \quad (4.45)$$

$$P_z = h_1 - l_2 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\theta_2 = A \tan 2(d_4 \sin \theta_3 - l_2, -d_4 \cos \theta_3)$$

$$\pm A \tan 2(\sqrt{d_4^2 + l_2^2 + -2l_1 d_4 \sin \theta_3 - (P_z - h_1)^2}, P_z - h_1) \quad (4.46)$$



Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_2} e^{\tilde{u}_3\theta_3})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} &= e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_2} e^{\tilde{u}_3\theta_3} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_4} e^{\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_5} e^{\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3\theta_6} \\
\left( \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} r_{11}c_1s_{23} - r_{31}s_{23} + r_{21}s_1c_{23} & \cdot & \cdot \\ -r_{31}c_{23} - r_{11}c_1s_{23} - r_{21}s_1s_{23} & \cdot & \cdot \\ r_{21}c_1 - r_{11}s_1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cdot & r_{12}c_1c_{23} - r_{32}s_{23} + r_{22}s_1c_{23} & \cdot \\ \cdot & -r_{32}c_{23} - r_{12}c_1s_{23} - r_{22}s_1s_{23} & \cdot \\ \cdot & r_{22}c_1 - r_{12}s_1 & \cdot \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & r_{13}c_1c_{23} - r_{33}c_2s_{23} + r_{23}s_1c_{23} \\ \cdot & \cdot & -r_{33}c_{23} - r_{13}c_1s_{23} - r_{23}s_1s_{23} \\ \cdot & \cdot & r_{23}c_1 - r_{13}s_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & c_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & c_5 \\ -c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_5s_4s_6 - c_4c_6 & -s_4s_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur. çözüme ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
c_5 &= -r_{33}c_{23} - r_{13}c_1s_{23} - r_{23}s_1s_{23} \\
\theta_5 &= \pm A \tan 2 \left( \sqrt{1 - (-r_{33} \cos \theta_{23} - r_{13} \cos \theta_1 \sin \theta_{23} - r_{23} \sin \theta_1 \sin \theta_{23})^2}, \right. \\
&\quad \left. -r_{33} \cos \theta_{23} - r_{13} \cos \theta_1 \sin \theta_{23} - r_{23} \sin \theta_1 \sin \theta_{23} \right) \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.çözüme ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
c_4 s_5 &= r_{13} c_1 c_{23} - r_{33} c_2 s_{23} + r_{23} s_1 c_{23} \\
-s_4 s_5 &= r_{23} c_1 - r_{13} s_1 \\
\theta_4 &= A \tan 2 \left( \frac{r_{23} \cos \theta_1 - r_{13} \sin \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_{23} - r_{33} \cos \theta_2 \sin \theta_{23} + r_{23} \sin \theta_1 \cos \theta_{23}}{\sin \theta_5} \right) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.çözüme ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
-c_6 s_5 &= -r_{31} c_{23} - r_{11} c_1 s_{23} - r_{21} s_1 s_{23} \\
s_5 s_6 &= -r_{32} c_{23} - r_{12} c_1 s_{23} - r_{22} s_1 s_{23} \\
\theta_6 &= A \tan 2 \left( \frac{-r_{32} \cos \theta_{23} - r_{12} \cos \theta_1 \sin \theta_{23} - r_{22} \sin \theta_1 \sin \theta_{23}}{\sin \theta_5}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-r_{31} \cos \theta_{23} - r_{11} \cos \theta_1 \sin \theta_{23} - r_{21} \sin \theta_1 \sin \theta_{23}}{\sin \theta_5} \right) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

#### 4.1.8 NS Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ (d_3 + l_2) \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sin \theta_2)(d_3 + l_2) - d_4 \sin \theta_2 \\ -d_2 \\ h_1 + (\cos \theta_2)(d_3 + l_2) + d_4 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = -d_2$$

$$\theta_1 = A \tan 2(P_x, -P_y) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}, d_2) \quad (4.51)$$

$$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x c_1 + P_y s_1 \\ P_y c_1 - P_x s_1 \\ P_z - h_1 \end{bmatrix} = d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ + (d_3 + l_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\cos \theta_2)(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) - (\sin \theta_2)(h_1 - P_z) \\ -(\sin \theta_2)(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) - (\cos \theta_2)(h_1 - P_z) \\ P_x \sin \theta_1 - P_y \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_3 + d_4 + l_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$(\cos \theta_2)(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) - (\sin \theta_2)(h_1 - P_z) = 0$$

$$\theta_2 = A \tan 2(-P_x \cos \theta_1 - P_y \sin \theta_1, -h_1 + P_z) \quad (4.52)$$

$$-(\sin \theta_2)(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) - (\cos \theta_2)(h_1 - P_z) = d_3 + d_4 + l_2$$

$$d_3 = -d_4 - l_2 - (\sin \theta_2)(P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1) - (\cos \theta_2)(h_1 - P_z) \quad (4.53)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} r_{31}s_2 + r_{11}c_1c_2 + r_{21}c_2s_1 & \cdot & \cdot \\ r_{21}c_1 - r_{11}s_1 & \cdot & \cdot \dots \\ r_{31}c_2 - r_{11}c_1s_2 - r_{21}s_1s_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ & \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_2 + r_{12}c_1c_2 + r_{22}c_2s_1 \cdot \\ \cdot & r_{22}c_1 - r_{12}s_1 & \cdot \\ \cdot r_{32}c_2 - r_{12}c_1s_2 - r_{22}s_1s_2 \cdot \end{bmatrix} \\ & \dots \begin{bmatrix} \cdot & \cdot r_{33}s_2 + r_{13}c_1c_2 + r_{23}c_2s_1 \\ \cdot & \cdot & r_{23}c_1 - r_{13}s_1 \\ \cdot & \cdot r_{33}c_2 - r_{13}c_1s_2 - r_{23}s_1s_2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} s_4s_6 + c_4c_5c_6 & c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ c_5c_6s_4 - c_4s_6 & -c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & -c_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrislerin (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} -\cos\theta_5 &= r_{33} \cos\theta_2 - r_{13} \cos\theta_1 \sin\theta_2 - r_{23} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \theta_5 &= A \tan 2(\pm \sqrt{1 - ((-r_{13} \cos\theta_1 \sin\theta_2) - r_{23} \sin\theta_1 \sin\theta_2 + r_{33} \cos\theta_2)^2} \\ & \quad , -r_{13} \cos\theta_1 \sin\theta_2) - r_{23} \sin\theta_1 \sin\theta_2 + r_{33} \cos\theta_2) \quad (4.54) \end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} -\sin\theta_4 \sin\theta_5 &= r_{23} \cos\theta_1 - r_{13} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_4 \sin\theta_5 &= r_{33} \sin\theta_2 + r_{13} \cos\theta_1 \cos\theta_2 + r_{23} \cos\theta_2 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

$$\theta_4 = A \tan 2(-r_{13} \sin \theta_1 + r_{23} \cos \theta_1, r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_{23} \cos \theta_2 \sin \theta_1 + r_{33} \sin \theta_2) \quad (4.55)$$

Matrislerin (3,1) ve (3,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} -\cos \theta_6 \sin \theta_5 &= -r_{11} \cos \theta_1 \sin \theta_2 - r_{21} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_5 \sin \theta_6 &= r_{32} \cos \theta_2 - r_{12} \cos \theta_1 \sin \theta_2 - r_{22} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \theta_6 &= A \tan 2(-r_{12} \cos \theta_1 \sin \theta_2 - r_{22} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_{32} \cos \theta_2, -r_{11} \cos \theta_1 \sin \theta_2 - r_{21} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_{31} \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

#### 4.1.9 RC Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\hat{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ l_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &d_4 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -d_4 \cos \theta_3 \\ -d_2 - l_2 \\ h_1 - d_4 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{h_1 - P_z}{d_4}$$

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{h_1 - P_z}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - P_z}{d_4}\right)^2}\right) \quad (4.58)$$

$$P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 = -d_4 \cos \theta_3$$

$$\theta_1 = A \tan 2(P_y, P_x) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_4^2 \cos^2 \theta_3}, -d_4 \cos \theta_3) \quad (4.59)$$

$$d_2 = P_x \sin \theta_1 - P_y \cos \theta_1 + l_2 \quad (4.60)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \dots$$

$$\dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{31}c_3 - r_{11}c_1s_3 - r_{21}s_1s_3 & \cdot & \cdot \\ -r_{31}s_3 - r_{11}c_1c_3 - r_{21}c_3s_1 & \cdot & \cdot \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot & r_{32}c_3 - r_{12}c_1s_3 - r_{22}s_1s_3 & \cdot \\ \cdot & -r_{32}s_3 - r_{12}c_1c_3 - r_{22}c_3s_1 & \cdot \\ \cdot & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & r_{33}c_3 - r_{13}c_1s_3 - r_{23}s_1s_3 \\ \cdot & \cdot & -r_{33}s_3 - r_{13}c_1c_3 - r_{23}c_3s_1 \\ \cdot & \cdot & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & c_5 \\ -c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_5s_4s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 \end{bmatrix}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos \theta_5 &= -r_{33} \sin \theta_3 - r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_1 \\ \theta_5 &= \pm A \tan 2\left(\sqrt{1 - (-r_{33} \sin \theta_3 - r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_1)^2}\right. \\ &\quad \left., -r_{33} \sin \theta_3 - r_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_1\right) \quad (4.61)\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos \theta_4 &= -\frac{(r_{33} \cos \theta_3 - r_{13} \cos \theta_1 \sin \theta_3 - r_{23} \sin \theta_1 \sin \theta_3)}{\sin \theta_5} \\ \sin \theta_4 &= \frac{r_{13} \sin \theta_1 - r_{23} \cos \theta_1}{\sin \theta_5} \\ \theta_4 &= A \tan 2\left(\frac{r_{13} \sin \theta_1 - r_{23} \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{(-r_{33} \cos \theta_3 + r_{13} \cos \theta_1 \sin \theta_3 + r_{23} \sin \theta_1 \sin \theta_3)}{\sin \theta_5}\right) \quad (4.62)\end{aligned}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos \theta_6 &= \frac{-r_{31} \sin \theta_3 - r_{11} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - r_{21} \cos \theta_3 \sin \theta_1}{\sin \theta_5} \\ \sin \theta_6 &= \frac{r_{32} \sin \theta_3 + r_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + r_{22} \cos \theta_3 \sin \theta_1}{\sin \theta_5} \\ \theta_6 &= A \tan 2\left(\frac{r_{32} \sin \theta_3 + r_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + r_{22} \cos \theta_3 \sin \theta_1}{\sin \theta_5}\right. \\ &\quad \left., \frac{-r_{31} \sin \theta_3 - r_{11} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - r_{21} \cos \theta_3 \sin \theta_1}{\sin \theta_5}\right) \quad (4.63)\end{aligned}$$

#### 4.1.10 RN Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\hat{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + l_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 + d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ h_1 - d_4 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{P_z - h_1}{d_4}$$

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{h_1 - P_z}{d_4} \right)^2}, \frac{h_1 - P_z}{d_4} \right) \quad (4.65)$$

$$P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 = l_1 + l_2 \cos \theta_2 + d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = l_2 \sin \theta_2 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\theta_1 = A \tan 2(2P_y l_1, 2l_1 P_x)$$

$$\begin{aligned}
& \pm A \tan 2 \left( \sqrt{4P_y^2 l_1^2 + 4l_1^2 P_x^2 - (P_x^2 + P_y^2 + l_1^2 - (d_4 \sin \theta_3 + l_2)^2)^2} \right. \\
& \left. , P_x^2 + P_y^2 + l_1^2 - (d_4 \sin \theta_3 + l_2)^2 \right) \quad (4.66)
\end{aligned}$$

$$P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 = l_2 \sin \theta_2 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\theta_2 = \left( \frac{P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1}{l_2 \sin \theta_2 + d_4 \sin \theta_3}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1}{l_2 \sin \theta_2 + d_4 \sin \theta_3} \right)^2} \right) \quad (4.67)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $\left( e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} \right)^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} r_{31}s_3 + r_{11}(c_3)(c_1c_2 - s_1s_2) + r_{21}(c_3)(c_1s_2 + c_2s_1) & \cdot & \cdot \\ r_{31}c_3 - r_{11}(s_3)(c_1c_2 - s_1s_2) - r_{21}(s_3)(c_1s_2 + c_2s_1) & \cdot & \cdot \\ r_{11}(c_1s_2 + c_2s_1) - r_{21}(c_1c_2 - s_1s_2) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}s_3 + r_{12}(c_3)(c_1c_2 - s_1s_2) + r_{22}(c_3)(c_1s_2 + c_2s_1) & \cdot \\ \cdot r_{32}c_3 - r_{12}(s_3)(c_1c_2 - s_1s_2) - r_{22}(s_3)(c_1s_2 + c_2s_1) & \cdot \\ \cdot r_{12}(c_1s_2 + c_2s_1) - r_{22}(c_1c_2 - s_1s_2) & \cdot \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{33}s_3 + r_{13}(c_3)(c_1c_2 - s_1s_2) + r_{23}(c_3)(c_1s_2 + c_2s_1) \\ \cdot \cdot r_{33}c_3 - r_{13}(s_3)(c_1c_2 - s_1s_2) - r_{23}(s_3)(c_1s_2 + c_2s_1) \\ \cdot \cdot r_{13}(c_1s_2 + c_2s_1) - r_{23}(c_1c_2 - s_1s_2) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & c_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & -c_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & s_4s_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos \theta_5 &= r_{13} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{23} \sin \theta_3 \sin \theta_{12} - r_{33} \cos \theta_3 \\
\theta_5 &= \pm A \tan 2 \left( \sqrt{1 - (r_{13} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{23} \sin \theta_3 \sin \theta_{12} - r_{33} \cos \theta_3)^2} \right) \\
& \quad , r_{13} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{23} \sin \theta_3 \sin \theta_{12} - r_{33} \cos \theta_3 \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos \theta_4 &= \frac{r_{33} \sin \theta_3 + r_{13} \cos \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_{12}}{\sin \theta_5} \\
\sin \theta_4 &= \frac{r_{13} \sin \theta_{12} - r_{23} \cos \theta_{12}}{\sin \theta_5}
\end{aligned}$$

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{r_{13} \sin \theta_{12} - r_{23} \cos \theta_{12}}{\sin \theta_5}, \frac{r_{33} \sin \theta_3 + r_{13} \cos \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{23} \cos \theta_3 \sin \theta_{12}}{\sin \theta_5}\right) \quad (4.69)$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \cos \theta_6 &= \frac{r_{31} \cos \theta_3 - r_{11} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} - r_{21} \sin \theta_3 \sin \theta_{12}}{\sin \theta_5} \\ \sin \theta_6 &= \frac{r_{12} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{22} \sin \theta_3 \sin \theta_{12} - r_{32} \cos \theta_3}{\sin \theta_5} \\ \theta_6 &= A \tan 2\left(\frac{r_{12} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} + r_{22} \sin \theta_3 \sin \theta_{12} - r_{32} \cos \theta_3}{\sin \theta_5}, \frac{r_{31} \cos \theta_3 - r_{11} \sin \theta_3 \cos \theta_{12} - r_{21} \sin \theta_3 \sin \theta_{12}}{\sin \theta_5}\right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

#### 4.1.11 RR Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (l_2 + d_2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ d_4 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 \\ P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 - l_2 - d_4 \cos \theta_3 \\ h_1 + d_4 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 = 0$$

$$\theta_1 = \pm A \tan 2(-P_x, P_y) \quad (4.72)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{P_z - h_1}{d_4}$$

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{P_z - h_1}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_z - h_1}{d_4}\right)^2}\right) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} P_y \cos \theta_1 - P_x \sin \theta_1 &= -d_2 - l_2 - d_4 \cos \theta_3 \\ d_2 &= P_x \sin \theta_1 - d_4 \cos \theta_3 - l_2 - P_y \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $\left(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3}\right)^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} \\ \left( \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \dots \\ \dots \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_{31}c_3 + r_{21}c_1s_3 - r_{11}s_1s_3 & \cdot & \cdot \\ r_{21}c_1c_3 - r_{31}s_3 - r_{11}c_3s_1 & \cdot & \cdot \\ -r_{11}c_1 - r_{21}s_1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32}c_3 + r_{22}c_1s_3 - r_{12}s_1s_3 \cdot \\ \cdot r_{22}c_1c_3 - r_{32}s_3 - r_{12}c_3s_1 \cdot \\ \cdot \quad -r_{12}c_1 - r_{22}s_1 \quad \cdot \end{bmatrix} \\ \dots \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{33}c_3 + r_{23}c_1s_3 - r_{13}s_1s_3 \\ \cdot \cdot r_{23}c_1c_3 - r_{33}s_3 - r_{13}c_3s_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad -r_{13}c_1 - r_{23}s_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & -c_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos\theta_5 &= -r_{23} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + r_{33} \sin\theta_3 + r_{13} \cos\theta_3 \sin\theta_1 \\ \theta_5 &= \pm A \tan 2\left(\sqrt{1 - (-r_{23} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + r_{33} \sin\theta_3 + r_{13} \cos\theta_3 \sin\theta_1)^2}\right. \\ &\quad \left., -r_{23} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + r_{33} \sin\theta_3 + r_{13} \cos\theta_3 \sin\theta_1\right) \quad (4.75)\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos\theta_4 &= \frac{-r_{33} \cos\theta_3 - r_{23} \cos\theta_1 \sin\theta_3 + r_{13} \sin\theta_1 \sin\theta_3}{\sin\theta_5} \\ \sin\theta_4 &= \frac{r_{13} \cos\theta_1 + r_{23} \sin\theta_1}{\sin\theta_5} \\ \theta_4 &= A \tan 2\left(\frac{r_{13} \cos\theta_1 + r_{23} \sin\theta_1}{\sin\theta_5}, \frac{-r_{33} \cos\theta_3 - r_{23} \cos\theta_1 \sin\theta_3 + r_{13} \sin\theta_1 \sin\theta_3}{\sin\theta_5}\right) \quad (4.76)\end{aligned}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\cos\theta_6 &= \frac{-r_{21} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + r_{31} \sin\theta_3 + r_{11} \cos\theta_3 \sin\theta_1}{\sin\theta_5} \\ \sin\theta_6 &= \frac{r_{22} \cos\theta_1 \cos\theta_3 - r_{32} \sin\theta_3 - r_{12} \cos\theta_3 \sin\theta_1}{\sin\theta_5} \\ \theta_6 &= A \tan 2\left(\frac{r_{22} \cos\theta_1 \cos\theta_3 - r_{32} \sin\theta_3 - r_{12} \cos\theta_3 \sin\theta_1}{\sin\theta_5}, \frac{-r_{21} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + r_{31} \sin\theta_3 + r_{11} \cos\theta_3 \sin\theta_1}{\sin\theta_5}\right) \quad (4.77)\end{aligned}$$

#### 4.1.12 RS Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3\theta_1})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + d_3 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& + d_4 \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 \\ p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \\ h_1 - d_4 - d_3 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$p_z = h_1 - d_4 - d_3$$

$$d_3 = h_1 - d_4 - p_z \quad (4.79)$$

$$(p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1)^2 = (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2$$

$$(p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1)^2 = (l_2 \sin \theta_2)^2$$

$$\cos \theta_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} = a$$

$$\theta_2 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - a^2}, a) \quad (4.80)$$

$$p_y \cos \theta_1 - p_x \sin \theta_1 = l_2 \sin \theta_2$$

$$\theta_1 = A \tan 2(-p_x, p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - l_2 \sin \theta_2}, l_2 \sin \theta_2) \quad (4.81)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \pi} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \pi} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} r_{11}c_{12} + r_{21}s_{12} & r_{12}c_{12} + r_{22}s_{12} & r_{13}c_{12} + r_{23}s_{12} \\ r_{21}c_{12} - r_{11}s_{12} & r_{22}c_{12} - r_{12}s_{12} & r_{23}c_{12} - r_{13}s_{12} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & c_4s_5 \\ -c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_5s_4s_6 - c_4c_6 & -s_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & -c_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
-\cos\theta_5 &= r_{33} \\
\theta_5 &= A \tan 2(\pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33}) \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Matrislerin (3,1) ve (3,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos\theta_6 &= \frac{r_{31}}{\sin\theta_5} \\
\sin\theta_6 &= -\frac{r_{32}}{\sin\theta_5} \\
\theta_6 &= A \tan 2(-r_{32}, r_{31}) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos\theta_4 &= \frac{r_{13} \cos\theta_{12} + r_{23} \sin\theta_{12}}{\sin\theta_5} \\
\sin\theta_4 &= \frac{r_{23} \cos\theta_{12} - r_{13} \sin\theta_{12}}{-\sin\theta_5} \\
\theta_5 &= A \tan 2(-r_{23} \cos\theta_{12} - r_{13} \sin\theta_{12}, r_{13} \cos\theta_{12} + r_{23} \sin\theta_{12}) \tag{4.84}
\end{aligned}$$

#### 4.1.13 SC Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliten yararlanılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_4 \sin\theta_3 \\ d_2 + l_1 \\ d_1 - d_4 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$d_2 = P_y - l_1$$

$$\sin\theta_3 = \frac{P_x}{d_4}$$

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{P_x}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x}{d_4}\right)^2}\right) \quad (4.86)$$

$$d_1 = P_z + d_4 \cos\theta_3 \quad (4.87)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} r_{11} \cos \theta_3 \cos \theta_4 - r_{21} \sin \theta_4 + r_{31} \cos \theta_4 \sin \theta_3 & \cdot & \cdot \\ -r_{21} \cos \theta_4 - r_{11} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{31} \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cdot & \cdot \\ r_{11} \sin \theta_3 - r_{31} \cos \theta_3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot & r_{12} \cos \theta_3 \cos \theta_4 - r_{22} \sin \theta_4 + r_{32} \cos \theta_4 \sin \theta_3 & \cdot \\ \cdot & -r_{22} \cos \theta_4 - r_{12} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{32} \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cdot \\ \cdot & r_{12} \sin \theta_3 - r_{32} \cos \theta_3 & \cdot \end{bmatrix} \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & r_{13} \cos \theta_3 \cos \theta_4 - r_{23} \sin \theta_4 + r_{33} \cos \theta_4 \sin \theta_3 \\ \cdot & \cdot & -r_{23} \cos \theta_4 - r_{13} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{33} \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\ \cdot & \cdot & r_{13} \sin \theta_3 - r_{33} \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 \cos \theta_6 & -\cos \theta_5 \sin \theta_6 & -\sin \theta_5 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ \cos \theta_6 \sin \theta_5 & -\sin \theta_5 \sin \theta_6 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
& -r_{23} \cos \theta_4 - (r_{13} \cos \theta_3 + r_{33} \sin \theta_3) \sin \theta_4 = 0 \\
& \theta_4 = A \tan 2(-r_{23}, r_{13} \cos \theta_3 + r_{33} \sin \theta_3)
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
& \sin \theta_5 = -r_{13} \cos \theta_3 \cos \theta_4 + r_{23} \sin \theta_4 - r_{33} \cos \theta_4 \sin \theta_3 \\
& \cos \theta_5 = r_{13} \sin \theta_3 - r_{33} \cos \theta_3 \\
& \theta_5 = A \tan 2(-r_{13} \cos \theta_3 \cos \theta_4 + r_{23} \sin \theta_4 - r_{33} \cos \theta_4 \sin \theta_3, \\
& \quad r_{13} \sin \theta_3 - r_{33} \cos \theta_3)
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
& \cos \theta_6 = -r_{22} \cos \theta_4 - r_{12} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{32} \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\
& \sin \theta_6 = -r_{21} \cos \theta_4 - r_{11} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{31} \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\
& \theta_6 = A \tan 2(-r_{21} \cos \theta_4 - r_{11} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{31} \sin \theta_3 \sin \theta_4, \\
& \quad -r_{22} \cos \theta_4 - r_{12} \cos \theta_3 \sin \theta_4 - r_{32} \sin \theta_3 \sin \theta_4)
\end{aligned} \tag{4.91}$$



#### 4.1.14 SN Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitlikten yararlanılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 \\ d_2 - d_4 \cos \theta_3 \\ d_1 + l_2 \cos \theta_2 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{d_2 - P_y}{d_4}$$

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{d_2 - P_y}{d_4} \right)^2}, \frac{d_2 - P_y}{d_4} \right) \quad (4.93)$$

$$d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 = P_x$$

$$\theta_2 = (-l_2, d_4 \sin \theta_3) \pm A \tan 2 \left( \sqrt{l_2^2 + d_4^2 \sin^2 \theta_3} + P_x, P_x \right) \quad (4.94)$$

$$d_1 = P_z - l_2 \cos \theta_2 - d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (4.95)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $\left( e e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} \right)^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} r_{21}s_3 + r_{11}c_2c_3 + r_{31}c_3s_2 & \cdot & \cdot \\ r_{21}c_3 - r_{11}c_2s_3 - r_{31}s_2s_3 & \cdot & \cdot \\ r_{31}c_2 - r_{11}s_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{22}s_3 + r_{12}c_2c_3 + r_{32}c_3s_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot r_{22}c_3 - r_{12}c_2s_3 - r_{32}s_2s_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot r_{32}c_2 - r_{12}s_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
& \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{23}s_3 + r_{13}c_2c_3 + r_{33}c_3s_2 \\ \cdot r_{23}c_3 - r_{13}c_2s_3 - r_{33}s_2s_3 \\ \cdot r_{33}c_2 - r_{13}s_2 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & -c_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
-\cos\theta_5 &= r_{23} \cos\theta_3 - r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 - r_{33} \sin\theta_2 \sin\theta_3 \\
\theta_5 &= A \tan 2 \left( \sqrt{1 - (-r_{23} \cos\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{33} \sin\theta_2 \sin\theta_3)^2} \right. \\
&\quad \left. , -r_{23} \cos\theta_3 + r_{13} \cos\theta_2 \sin\theta_3 + r_{33} \sin\theta_2 \sin\theta_3 \right) (4.96)
\end{aligned}$$

Matrislerin (1,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos\theta_4 &= \frac{-r_{23} \sin\theta_3 - r_{13} \cos\theta_2 \cos\theta_3 - r_{33} \cos\theta_3 \sin\theta_2}{\sin\theta_5} \\
\sin\theta_4 &= \frac{-r_{33} \cos\theta_2 + r_{13} \sin\theta_2}{\sin\theta_5} \\
\theta_4 &= A \tan 2 \left( \frac{-r_{33} \cos\theta_2 + r_{13} \sin\theta_2}{\sin\theta_5}, \frac{-r_{23} \sin\theta_3 - r_{13} \cos\theta_2 \cos\theta_3 - r_{33} \cos\theta_3 \sin\theta_2}{\sin\theta_5} \right) (4.97)
\end{aligned}$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
-\cos\theta_6 &= \frac{-r_{21}\cos\theta_3+r_{11}\cos\theta_2\sin\theta_3+r_{31}\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\theta_5} \\
\sin\theta_6 &= \frac{r_{22}\cos\theta_3-r_{12}\cos\theta_2\sin\theta_3-r_{32}\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\theta_5} \\
\theta_6 &= A \tan 2\left(\frac{r_{22}\cos\theta_3-r_{12}\cos\theta_2\sin\theta_3-r_{32}\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\theta_5}, \frac{-r_{21}\cos\theta_3+r_{11}\cos\theta_2\sin\theta_3+r_{31}\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\theta_5}\right) \quad (4.98)
\end{aligned}$$

#### 4.1.15 SR Robotunun ters kinematığı

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitliğin her iki tarafı  $(e^{i_3\theta_2})^T$  ile çarpılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x - l_1 \\ P_y \\ P_z - d_1 \end{bmatrix} &= l_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
+ d_4 \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} P_y \sin\theta_2 - (\cos\theta_2)(l_1 - P_x) \\ P_y \cos\theta_2 + (\sin\theta_2)(l_1 - P_x) \\ P_z - d_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 + d_4 \sin\theta_3 \\ -d_4 \cos\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_y \sin\theta_2 - (\cos\theta_2)(l_1 - P_x))^2 &= (l_2 + d_4 \sin\theta_3)^2 \\
(P_y \cos\theta_2 + (\sin\theta_2)(l_1 - P_x))^2 &= (-d_4 \cos\theta_3)^2 \\
\sin\theta_3 &= P_y^2 + (l_1 - P_x)^2 - l_2^2 - d_4^2 - 2l_2d_4 \\
\theta_3 &= A \tan 2(P_y^2 + (l_1 - P_x)^2 - l_2^2 - d_4^2 - 2l_2d_4 \\
&\quad , \pm \sqrt{1 - (P_y^2 + (l_1 - P_x)^2 - l_2^2 - d_4^2 - 2l_2d_4)^2}) \quad (4.100)
\end{aligned}$$

$$P_y \cos\theta_2 + (\sin\theta_2)(l_1 - P_x) = -d_4 \cos\theta_3$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \operatorname{Atan} 2((l_1 - P_x), P_y) \\ & \pm \operatorname{Atan} 2(\sqrt{P_y^2 + (l_1 - P_x)^2 + d_4^2 \cos^2 \theta_3}, -d_4 \cos \theta_3) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$d_1 = P_z \quad (4.102)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafı  $(e e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} &= e e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} \\ \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_{31} s_4 + r_{11} (c_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) + r_{21} (c_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) & \cdot & \cdot \\ r_{31} c_4 - r_{11} (s_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) - r_{21} (s_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) & \cdot & \cdot \\ r_{11} (c_2 s_3 - c_3 s_2) - r_{21} (c_2 c_3 + s_2 s_3) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ \dots \begin{bmatrix} \cdot r_{32} s_4 + r_{12} (c_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) + r_{22} (c_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) \cdot \\ \cdot r_{32} c_4 - r_{12} (s_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) - r_{22} (s_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) \cdot \\ \cdot r_{12} (c_2 s_3 - c_3 s_2) - r_{22} (c_2 c_3 + s_2 s_3) \cdot \end{bmatrix} \\ \dots \begin{bmatrix} \cdot \cdot r_{33} s_4 + r_{13} (c_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) + r_{23} (c_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) \\ \cdot \cdot r_{33} c_4 - r_{13} (s_4) (c_2 c_3 + s_2 s_3) - r_{23} (s_4) (c_2 s_3 - c_3 s_2) \\ \cdot \cdot r_{13} (c_2 s_3 - c_3 s_2) - r_{23} (c_2 c_3 + s_2 s_3) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \\ c_6 s_5 & -s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrislerin (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{33} \cos \theta_4 - (r_{13} \sin \theta_{23} + r_{23} \cos \theta_{23}) \sin \theta_4 = 0$$

$$\theta_4 = A \tan 2(r_{33}, r_{13} \sin \theta_{23} + r_{23} \cos \theta_{23}) \quad (4.103)$$

Matrislerin (1,3) ve (2,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin \theta_5 = -r_{33} \sin \theta_4 - r_{13} \cos \theta_4 \sin \theta_{23} - r_{23} \cos \theta_4 \cos \theta_{23}$$

$$\cos \theta_5 = r_{13} \cos \theta_{23} - r_{23} \sin \theta_{23}$$

$$\theta_5 = A \tan 2(r_{33} \sin \theta_4 + r_{13} \cos \theta_4 \sin \theta_{23} + r_{23} \cos \theta_4 \cos \theta_{23}, r_{13} \cos \theta_{23} - r_{23} \sin \theta_{23}) \quad (4.104)$$

Matrislerin (2,1) ve (2,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin \theta_6 = -r_{31} \cos \theta_4 + r_{11} \sin \theta_4 \sin \theta_{23} + r_{21} \sin \theta_4 \cos \theta_{23}$$

$$\cos \theta_6 = -r_{32} \cos \theta_4 + r_{12} \sin \theta_4 \sin \theta_{23} + r_{22} \sin \theta_4 \cos \theta_{23}$$

$$\theta_6 = A \tan 2(r_{31} \cos \theta_4 - r_{11} \sin \theta_4 \sin \theta_{23} - r_{21} \sin \theta_4 \cos \theta_{23}, r_{32} \cos \theta_4 - r_{12} \sin \theta_4 \sin \theta_{23} - r_{22} \sin \theta_4 \cos \theta_{23}) \quad (4.105)$$

#### 4.1.16 SS Robotunun ters kinematiği

Konum vektöründen ilk üç ekleme ait değişkenleri bulmak için konum vektörümüze ait eşitlikten yararlanılarak aşağıdaki işlem adımları izlenir.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 + d_4 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

$$d_3 = P_x - d_4 \quad (4.107)$$

$$d_2 = P_y \quad (4.108)$$

$$d_1 = P_z \quad (4.109)$$

Dönme matrisinden yola çıkılarak eşitliğin her iki tarafın  $(e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}})^T$  ile çarpılırsa diğer değişkenler de çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 \\ s_4 s_6 - c_4 c_5 c_6 & c_6 s_4 + c_4 c_5 s_6 & -c_4 s_5 \end{bmatrix}$$

Matrislerin (1,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_5$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\cos \theta_5 = r_{13}$$

$$\theta_5 = A \tan 2(\sqrt[2]{1 - r_{13}^2}, r_{13}) \quad (4.110)$$

Matrislerin (1,1) ve (1,2) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_6$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= -\cos\theta_6 \sin\theta_5 & ; \cos\theta_6 &= -\frac{r_{11}}{\sin\theta_5} \\
r_{12} &= \sin\theta_5 \sin\theta_6 & ; \sin\theta_6 &= \frac{r_{12}}{\sin\theta_5} \\
\theta_6 &= A \tan 2\left(\frac{r_{12}}{\sin\theta_5}, -\frac{r_{11}}{\sin\theta_5}\right)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Matrislerin (2,3) ve (3,3) elemanları birbirine eşitlenerek  $\theta_4$  değişkeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
r_{23} &= \sin\theta_4 \sin\theta_5 & ; \cos\theta_4 &= \frac{r_{23}}{\sin\theta_5} \\
r_{33} &= -\cos\theta_4 \sin\theta_5 & ; \sin\theta_4 &= -\frac{r_{33}}{\sin\theta_5} \\
\theta_4 &= \pm A \tan 2\left(-\frac{r_{33}}{\sin\theta_5}, \frac{r_{23}}{\sin\theta_5}\right)
\end{aligned} \tag{4.112}$$

## BÖLÜM 5. SONUÇLAR

İlk bölümde, iki farklı uzayda altı robot kinematik modelleme yöntemi anlatılmıştır.

Bu yöntemler arasındaki farklılıkları görmek için her bir yöntem kullanılarak robotların başlıcalarının kinematik modeli çıkarılmıştır. Bütün bu yöntemlere kinematik açıdan bakıldığında; Alışkın olunmayan matematik operatörleri kullanan Kartonyum yöntemi bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmasına karşın pratikte daha az tercih edilmiştir.

Kartezyen uzay içinde incelenen üstel yöntem, robotun ileri yön kinematiğini iki aşamada çıkarır. Bu yöntem trigonometrik ifadeler kullanmak yerine, işlenmesi daha basit olan üstel dönme matris tabanlı cebir kullanır. Bu da çözüm algoritmasında karmaşık cebirsel işlemlerden ve çözüm yönteminden daha az karmaşık bir yöntemle çözüme ulaşmamızı sağlar. Bu yöntem, diğer yöntemlere nazaran daha kolay çözülebilir, öğrenilebilir ve bilgisayarla uygulanabilir algoritmalar oluşturmakta kullanılabilir. Pieper-Roth ve SRK yöntemi ise daha çok ters kinematik problemlerde avantaj sağlayan yöntemlerdir. TPS yöntemi, bütün robot hareketlerini modelleyerek küçük hata değişkenleri içermek suretiyle, robotun tekil noktalardan geçmesini engeller. Yukarıda anlatılan yöntemler birbirleriyle karşılaştırıldığında, ileri yön kinematiğini doğrudan çıkararak ve daha basit gösterime sahip olan D-H yöntemi en çok tercih edilen yöntemdir fakat çok kullanılmamış olmasına karşın üstel yöntemin de aslında D-H yöntemine çok benzediğini ve bazı işlem adımlarını kısalttığını ayrıca işlemsel kolaylık sağladığı söylenebilir.

Sonuç olarak, her yöntemin diğerlerine göre bir avantajı vardır. İleri ve Ters kinematik çözümünde kullanılan yöntem, çözümde sağlayacağı avantaja göre seçilebilir. Burada teze konu olmuş üstel yöntemin diğer yöntemlerden farklı olarak kurulan ileri yön dönme matrislerine bakılarak robotuna şekline bakılmaksızın ne tür bir hareket gerçekleştirdiği ve eklemlerinin prizmatik ya da dönme hareketini yaptığının kestirilebilmesi önemli bir avantajdır.



Aşağıdaki tabloya bakılacak olursa bilinen 16 endüstriyel robot manipülatörünün ileri kinematikleri basit bir algoritma yardımı ile her üç yöntemle bilgisayarda koşturulmuş ve hesap yükleri incelenmiştir. Buna göre 1.bölümde denildiğinden farksız olarak sıralama oluştuğu gözlenebilir.

END. ROBOT	DH YÖNTEMİ	Q/V YÖNTEMİ	EXP YÖNTEMİ	ÇALIŞMA UZAYI
SS	43,234	35,063	37	P
SC	39,734	31,562	35,547	S
SN	39,921	31,53	35,125	K
CS	38,86	31,31	36,469	S
CC	40,531	31,422	37,344	S
CR	40,719	31,641	40,188	K
NS	40,25	47,719	40,844	K
NN	41,625	32,032	39,109	K
NR	41,625	32,062	40	K
RC	40,688	31,719	37,171	S
RN	41,563	32	45,297	K
RR	40,844	36,172	37,156	K
RS	35,859	28,531	41,718	S
SR	40,672	31,563	40,531	S
CN	40,563	31,453	36,813	K
NC	35,937	28,484	36,703	K

Tablo 5.1:Tüm robotların karşılaştırmalı hesap yükü.

## KAYNAKLAR

- [1] CRAIG, J. J., 1989. Introduction to Robotics: *Mechanics and Control*.  
DENAVID, J., and HARTENBERG, R. S., 1955. A Kinematic Notation for
- [2] Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *ASME J. Appl. Mechanics*, pp. 215-221.
- [3] WU, C. H., and PAUL, R. P., 1982. *Resolved Motion Force Control of Robot Manipulators*. pp, 266-275.
- [4] ÖZGÖREN, M. K., 1987. Application of Exponential Rotation Matrices to the Kinematic Analysis of Manipulators. *Proceeding Seventh World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. Spain.
- [5] J. H. Kim and V. R. Kumar, "Kinematics of robot manipulators via line transformations," *J. Robot. Syst.*, Vol. 7, No. 4, pp. 649–674, 1990.
- [6] EVERETT, L. J., DRIELS, M., and Mooring, B.W., 1987. Kinematic Modelling for Robot Calibration. In Proc. *IEEE IN. Conf. Robotics Automat.* pp. 183-189.
- [7] GUPTA, K. C., 1986. Kinematic Analysis of Manipulators Using Zero Reference Position Description. *International Journal of Robotics Research*.
- [8] ZHUANG, H., 1989. Kinematic Modelling, Identification and Compensation of Robot Manipulators. Ph.D. Dissertation, *Florida Atlantic Univ., Boca Raton*.
- [9] Y.L. Gu and J. Luh, "Dual-number transformation and its application to robotics," *IEEE J. Robot. Automat.* Vol. 3, pp. 615–623, 1987.
- [10] HUANG, B, and MILENKOVIC, V., 1983. Kinematics of Major Robot Linkages. Proc. *13<sup>th</sup> International Symposium on Industrial Robots*. Robotics International of SME, vol.12, pp. 16-31 to 16-47.
- [11] BINGÜL, Z., 2000. *Robot Tekniği Ders Notları*. Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mekatronik Mühendisliği.Kocaeli.
- [12] S. Kucuk and Z. Bingul, "The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators," *IEEE International Conference on Mechatronics*, pp. 274-279, 2004.

- [13] H. W. Stone, "Kinematic modeling, identification and control of robotic manipulators," *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, 1987.
- [14] H. Zhuang, Z. S. Roth, and F. Hamano, "A complete and parametrically continuous kinematic model for robot manipulators," *IEEE transactions on Robotics and automation*, vol. 8, no. 4, pp.451-463, August 1992.
- [15] K.C. Gupta, "Kinematic Analysis of Manipulators Using the Zero Reference Position Description," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 2, pp. 5-13, 1986.
- [16] J.Funda, R. H. Taylor, and R. P. Paul, "On homogeneous transforms, quaternions, and computational efficiency," *IEEE transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 382-388, June 1990.
- [17] J.Funda and R. P. Paul, "A computational analysis of screw transforms in robotics," *IEEE transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 348-356, June 1990.
- [18] Y. Aydin and S. Kucuk, "Quaternion based inverse kinematics for industrial robot manipulators with euler wrist," *IEEE International Conference on Mechatronics*, pp. 581-586, 2006.
- [19] Y. L. Gu, "An exploration of orientation representations by Lie algebra for robotic applications," *IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics*, vol. 20, no.1, pp. 243-248, February 1990.
- [20] C.D. Mladenova, "Group-theoretical methods in manipulator kinematics," *In 3<sup>rd</sup> International Workshop Advances Robot Kinematics*, Ferrara, Italy, pp. 187-193, September 1992.
- [21] A. A. Nicholas and J. K. Dimitros, "A comparative study of three methods for robot kinematics," *IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics*, vol. 28, no. 2, pp. 135-145, April 1998.
- [22] M. K. Ozgoren, "Optimization of manipulator motions," *Second CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Warsaw, Poland, 1976.
- [23] M. K. Ozgoren, "Kinematic analysis of a manipulator with its position and velocity related singular configurations," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, pp. 1075-1101, 1999.
- [24] M. K. Ozgoren, "Kinematic analysis of spatial mechanisms using exponential rotation matrices," *Tenth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finland, 1999.

- [25] T. Balkan, M. K. Özgören, M. A. S. Arikan, and H. M. Baykurt, “A method of inverse kinematics solution including singular and multiple configurations for a class of robotic manipulators,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 1221-1237, 2000.
- [26] V. Milenkovic B. Huang, “Kinematics of major robot linkages,” *Robotics International of SME*, vol. 2, pp. 16–31, April, 1983.
- [27] F. Soltani, *Kinematic synthesis of spatial mechanisms using algebra of exponential rotation matrices*, *The master thesis in Middle East Technical University in Turkey*, January 2005.
- [28] J. J. Craig, *Introduction to Robotics Mechanics and Control, USA: Addison-Wesley Publishing Company*, 1989.
- [29] M.K Özgören,. Topological analysis of 6-joint serial manipulators and their inverse kinematic solutions. , *Mechanism and Machine Theory* , volume 37 , pages 511-547 , 2002
- [30] J. Duffy, . *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators.* , Wiley, New York, 1980.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Cihan AYIZ 1980’de Siirt’te doğdu. İlköğrenimi Siirt’te tamamladıktan sonra ortaöğrenimi İçel Anadolu Teknik Lisesi-Bilgisayar bölümünde tamamladı. 2004 yılında Kocaeli Üniversitesi-Bilgisayar Öğretmenliği Bölümünden mezun olduktan sonra 2005 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Daha sonraki 3 yıl içinde Afyon, İzmit ve İstanbul’da öğretmenlik yaptı. 2007 yılından bu yana bir tekstil şirketinin dış ticaret ve yatırım danışmanlığı görevini sürdürmektedir.