KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAPILAŞMIŞ MATRİSLERDE YER DEĞİŞTİRME OPERATÖRLERİ VE ONLARIN TERSLERİ

YÜKSEK LİSANS

Cüneyt YAZICI

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR

KOCAELİ, 2008

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAPILAŞMIŞ MATRİSLERDE YER DEĞİŞTİRME OPERATÖRLERİ VE ONLARIN TERSLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cüneyt YAZICI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih: 25 Haziran 2008

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yrd.Doç.Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR	Prof.Dr. Halis AYGÜN	Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU
(..................)	(..................)	(..................)

KOCAELİ, 2008

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, algoritma tasarımında önemli bir yer tutan matris çarpımının yapılaşmış matris durumunda sağladığı avantaj incelenmiştir. Matris çarpımında kullanılan temel algoritmalar ve yapılaşmış matrisler tanıtılmıştır. Ayrıca süper hızlı algoritmaların tasarlanma yöntemlerinden biri olan yer değiştirme operatörlerinin yapılaşmış matrislere uygulanışı ve işlem sonrasında yapılaşmış matrislerin tekrar elde edilmeleri incelenmiştir. Konu üzerine literatürde çok sayıda yayım belirmesine rağmen bu işleyişi açık bir şekilde görmek mümkün olmamıştır. Bu tezde bu işleyişi detaylıca açıklayan birçok uygulama verilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın, algoritma tasarımı ile ilgili çalışmalara katkısının olmasını dilerim.

Beni bu konuya yönlendiren ve bana her konuda yardımını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR’ e teşekkürü bir borç bilirim.

Yine, üzerimde emeği olan Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarından Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN, Sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU, Sayın Prof. Dr. Zahir MURATOĞLU, Sayın Doç. Dr. Serdal PAMUK ve daha ismini sayamadığım Matematik Bölümünün bütün değerli hocalarına, Eğitim Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Servettin BİLİR hocama ve Dekan Yardımcısı Sayın Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK hocama; ayrıca, hayat arkadaşım Vildan BOYUKTAŞ’ a, Uzman Arzu ERDEM’ e, Uzman Aslı EŞME’ ye, Arş. Gör. Salih TATAR’ a ve Arş. Gör. Abdülkadir AYGÜNOĞLU’ na ve benim için hiçbir fedakârlıktan kaçınmadan beni bu yaşa getiren, başarımın temel taşı olan AİLEME teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$rank(A)$	: A matrisinin rankı
A^{-1}	: A matrisinin tersi
O	: Asimptotik notasyon
o	: Asimptotik notasyon
Ω	: Asimptotik notasyon
Θ	: Asimptotik notasyon
$Z_{f,m,n}(v)$	: Birinci sütunu $\vec{v}$ olan $m\,x\,n$ boyutlu f -dolanır matris
$Z_f(v)$	: Birinci sütunu $\vec{v}$ olan $n\,x\,n$ boyutlu f -dolanır matris
w_n	: 1 in n yinci birim kökü
$\overrightarrow{w_n}$	: 1 in n yinci bütün köklerinin oluşturduğu vektör
F	: Cisim
$\vec{e_i}$	: i yinci koordinat vektörü
$V_{m,n}(x)$	: İkinci sütunu $\vec{x} = (x_i)_{1 \le i \le m}$ olan $m\,x\,n$ boyutlu Vandermonde matrisi
$\Rightarrow$	: İse
C	: Karmaşık sayılar cismi
$D(s)$	: Köşegen elemanları m boyutlu s vektöründen oluşan $m\,x\,m$ boyutlu köşegen matris
$\mathrm{diag}(v)$	: Köşegen elemanları n boyutlu v vektöründen oluşan $n\,x\,n$ boyutlu köşegen matris
$V(x)$	: $m\,x\,m$ boyutlu Vandermonde matrisi
$K_{m,n}$	: $m\,x\,n$ boyutlu Krylov matrisi
F^{mxn}	: $m\,x\,n$ boyutlu matrisler uzayı
L	: $m\,x\,n$ boyutlu matrisler uzayında lineer operatör
I_n	: $n\,x\,n$ boyutlu birim matris
Z_f	: $n\,x\,n$ boyutlu f -dolanır matris
Ω_n	: $n\,x\,n$ boyutlu kesikli Fourier dönüşüm matrisi
J_n	: $n\,x\,n$ boyutlu refleksiyon matrisi
Δ	: Stein tipi lineer operatör
∇	: Sylvester tipi lineer operatör
v^T	: v vektörünün transpozesi
V	: Vektör uzayı
ℓ	: Yer değiştirme rankı
G	: Yer değiştirme üreteci
H	: Yer değiştirme üreteci
W^T	: W matrisinin transpozesi

KISALTMALAR

$H.F.D$	: Hızlı Fourier dönüşümü
$K.F.D$	: Kesikli Fourier dönüşümü

YAPILAŞMIŞ MATRİSLERDE YER DEĞİŞTİRME OPERATÖRLERİ VE ONLARIN TERSLERİ

Cüneyt YAZICI

Anahtar Kelimeler: Yapılaşmış Matrisler, Süper Hızlı Algoritma Tasarımı, Yer Değiştirme Rankı, Yer Değiştirme Operatörleri, Yer Değiştirme Operatörlerinin Tersleri, Yer Değiştirme Üreteçleri, Daraltma, İşlem, Genişletme.

Özet: Uygulamalı matematik ve mühendislikteki çeşitli problemler, yapılaşmış matrisler yardımıyla lineer cebir problemleri olarak ifade edilebilir. Bu amaçla, bu çalışmada [5] takip edilerek en temel matris problemlerinden biri olan bir matrisin bir vektörle çarpımı probleminde, yapılaşmış matrislerin etkin rolü hakkında bilgi verilmiştir. Aynı zamanda, yapılaşmış matrisler yardımıyla, süper hızlı algoritma tasarlamak için kullanılan yöntemlerden bir tanesi tanıtılmıştır: Yer değiştirme operatörü yöntemi. Bu tanıtım bir işlem döngüsü yardımıyla verilmiştir. Son olarak, bu işlem döngüsünün aşamalarından olan genişletme aşamasıyla ilgili pek çok uygulama verilmiştir.

DISPLACEMENT OPERATORS IN STRUCTURED MATRICES AND INVERSES OF DISPLACEMENT OPERATORS

Cüneyt YAZICI

Keywords: Structured Matrices, Superfast Algorithm Design, Displacement Rank, Displacement Operators, Inverses of Displacement Operators, Displacement Generators, Compress, Operate, Recover.

Abstract: Various problems in applied mathematics and engineering can be represented as linear algebra problems via structured matrices. To serve this purpose, in this thesis following [5], efficient role of structured matrices in matrix vector multiplication is analysed, which is one of the most fundamental linear algebra problems. At the same time, one of the methods used for superfast algorithm design is introduced: Displacement operator method. This introduction is given via a flowchart. Finally, many applications on the recovery stage are given.

GİRİŞ

Yapılaşmış matrislerden teknoloji ve haberleşmenin birçok alanında faydalanılır. Bu alanlara örnek vermek gerekirse, işaret ve görüntü işleme, sayısal öngörü analiz yöntemleri (sayısal ses işleme), kodlama teorisi, petrol arama sadece bir kaçıdır. Öte yandan yapılaşmış matris algoritmalarından bazıları Pade yaklaşımı, sürekli kesirler, klasik algoritmalar (Öklid, Schur, Nevanlinna, Lanzcos, Levinson v.b.) dır [1-4].

Bu çalışmada, yapılaşmış matrislerin süper hızlı algoritma tasarımındaki etkin rolünden detaylı bir şekilde bahsedilmiştir. Bu amaçla, [5] nolu yayın takip edilerek pek çok detay verilmiştir. Özellikle yapılaşmış matrislerin matris vektör çarpımındaki düşük maliyetine vurgu yapılmış ve bundan yararlanarak algoritmaların hızının nasıl arttığı açıklanmıştır.

Bölüm 1 de diğer bölümlerde yarar sağlayacak bazı tanım ve teoremler tanıtılmıştır. Algoritma hakkında genel bir bilgi verilip matris vektör çarpımı için geliştirilen temel iki algoritma tanıtılmıştır. Bu algoritmaların genel matrisler kullanılarak yapılan matris çarpımı üzerindeki etkisinden bahsedilmiştir.

Bölüm 2 de yapılaşmış matrislerin özellikleri verilip en çok kullanılan yapılaşmış matrisler tanıtılmıştır. Bu yapılaşmış matrisler birbirine dönüşebilmektedir [6]. Süper hızlı algoritma tasarımında bu matrislerden nasıl yararlanıldığı bir işlem döngüsüyle gösterilmiş olup bu işlem döngüsünün aşamalarından detaylıca bahsedilmiştir. Matris vektör çarpımı bakımından yapılaşmış matrisler kullanıldığında maliyetin düştüğü vurgulanmıştır. Bu amaçla yapılaşmış matrislere uygulanacak olan iki önemli lineer operatör tanıtılmış ve bu operatörlerin özellikleri detaylı bir şekilde verilmiştir.

Bölüm 3 de yapılaşmış matrislere uyguladığımız operatörlerden sonra elde edilen görüntü matrisinden yapılaşmış matrisin tekrar elde edilebilmesine olanak sağlayan teoremler ve bir takım temel özellikler hakkında bilgi verilmiştir.

Bölüm 4 de ise çok çeşitli uygulamalarla yapılaşmış matrislerin nasıl tekrar elde edildiği detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Bu elde edebilmede operatörün tekil olup olmaması şartı ön plana çıkmaktadır. Eğer operatör tekilse matrisi elde etmek kolay olmayabilir. Bu durumda ek koşullara ihtiyacımız vardır.

Sonuç olarak süper hızlı algoritma tasarımında yapılaşmış matrisler oldukça etkilidir. Çünkü bu matrisler eleman depolama açısından fayda sağlar. Aynı zamanda, uygun lineer operatör ve matris çiftleriyle bu matrislerin rankları çok çok küçülür. Bu durum bize düşük ranklı matrislerle çalışma imkânı verir. Böylece düşük ranklı matrislerle işlem yapmanın sağladığı kolaylıklardan faydalanabiliriz. Yapılaşmış matrisin belirli koşullar altında tekrar elde edilebilir olması nedeniyle istenilen işlemde rahatlıkla kullanılabilme imkânı ortaya çıkar.

BÖLÜM 1

YAPILAŞMIŞ MATRİSLER İÇİN TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Genel Tanımlar

Bu bölümde bazı genel tanımlar verilecektir. Tanım ve hesaplamaların keyfi bir F cisminde olduğu kabul edilir. $M \in F^{m\,x\,n}$, elemanları F cisminde tanımlanmış keyfi bir matris olsun.

Tanım 1.1.1. [5] W^T ve v^T, sırasıyla, W matrisinin ve $\vec{v}$ vektörünün transpozesidir. Ayrıca,

$$W^{-T} = \left(W^{-1}\right)^T = \left(W^T\right)^{-1}$$

dır.

Tanım 1.1.2. [5] $\left(W_1,...,W_n\right)$ matrisi, blokları $W_1,W_2,...,W_n$ bloklarından oluşan $1xn$ boyutlu blok matristir. $\mathrm{D}(v) = \mathrm{diag}(v)$, $n\,x\,n$ boyutlu köşegen matristir. Burada, $\vec{v}$

$$\vec{v} = \left(v_i\right)_{1 \le i \le n}$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.3. [5] $\vec{e_i}$, i yinci koordinatı 1, diğer bütün koordinatları 0 olan i yinci birim kolon vektörüdür.

Buradan,

$$\vec{e_1} = (1,0,...,0)^T,$$

$$\vec{0} = (0,0,...,0)^T,$$

$$\vec{1} = (1,1,...,1)^T$$

şeklindedir.

$I = I_n = (e_1,...,e_n)$, $n x n$ boyutlu birim matristir. 0_n, $n x n$ boyutlu sıfır matristir.

$J = J_n = (e_n,...,e_1)$, $n x n$ boyutlu refleksiyon matrisidir.

Açık olarak,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & 1 & 0 \\ \vdots & .\cdot^{\cdot} & .\cdot^{\cdot} & \vdots \\ 1 & .\cdot^{\cdot} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tanım 1.1.4. [5] $Z_f = \begin{pmatrix} & f \\ I_{n-1} & \end{pmatrix} = (e_2,...,e_n, f.e_1)$, $n x n$ boyutlu f-dolanır (f-circulant) matristir. $Z = Z_0$, $n x n$ boyutlu alt üçgensel matristir. Z_f ve Z matrisleri açık bir şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Z_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & f \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bir $\vec{v} = (v_1,...,v_m)^T$ için $Z_{f,m,n}(v) = (z_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanan $m x n$ boyutlu f -dolanır matristir. Birinci sütunu $\vec{v}$ olmak üzere,

$$z_{i,j} = \begin{cases} v_{i-j+1} & i \ge j \\ f^k . v_{m-\ell} & j-i-1 = k.m+\ell, 0\le \ell \le m-1, k\ge 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Özel olarak $m = n$ alınırsa, kısaca $Z_f(v)$ şeklinde yazılır. Açık olarak yazılmak istenirse,

$$Z_f(v) = \begin{pmatrix} v_0 & f.v_{n-1} & \cdots & f.v_1 \\ v_1 & v_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f.v_{n-1} \\ v_{n-1} & \cdots & v_1 & v_0 \end{pmatrix}.$$

Tanım 1.1.5. [5] $V_{m,n}(x) = \left(x_i^{\,j-1}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ matrisi, ikinci sütunu $\vec{x} = (x_i)_{1\le i\le m}$ den oluşan $m x n$ boyutlu Vandermonde matristir.

$$V(x) = V_{m,m}(x)$$

dır.

Tanım 1.1.6. [5] w_n, 1 in n yinci birim köküdür ($w_n^n = 1, \quad w_n^s \neq 1, \quad \mathrm{s} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}-1$).

$$\overrightarrow{w_n} = \left(w_n^{i-1}\right)_{1\le i\le n},$$

1 in n yinci bütün köklerinin oluşturduğu vektörü temsil eder.

$$\Omega_n = \left(w_n^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\le i\le n,\, 1\le j\le n},$$

$n\,x\,n$ boyutlu K.F.D (kesikli Fourier dönüşüm) matrisidir.

Teorem 1.1.1. [5] Herhangi bir $\vec{v} = (v_i)$ için

$$J.v = (v_{n+1-i})_{1\le i\le n}$$

ve

$$J.D(v).\,J = D(J.v)$$

eşitlikleri doğrudur. Aynı zamanda $J^2 = I$ sağlanır.

Teorem 1.1.2. [5] $n\,x\,n$ boyutlu Z_e matrisi ve herhangi bir $(e \neq 0)$ e skaleri için

$$Z_e^n = e.I,$$

$$Z_e^T = J.Z_e.J$$

ve

$$Z_e^{-1} = Z_{\frac{1}{e}}^T.$$

Teorem 1.1.3. [7] $n\,x\,n$ boyutlu Z_e matrisi ve $e \neq 0$ skaleri için

$$Z_e = V^{-1}.diag\left(w_n^i\right)_{i=0}^{n-1}.V$$

dir. Burada,

$$V = V(t) = \left(w_n^{ij}\right)_{i,j=0}^{n-1}.diag\left(t^i\right)_{i=0}^{n-1}$$

ve t değeri e nin n yinci birim köküdür.

1.2 Temel Tanım ve Sonuçlar

Tanım 1.2.1. [1] $m\,x\,n$ boyutlu bir A matrisinin $\ell\,x\,\ell$ boyutlu alt matrislerinden en az bir tanesinin determinantı sıfırdan farklı, fakat $\ell\,x\,\ell$ den daha büyük boyutlu olan bütün alt matrislerinin determinantları sıfır ise, ℓ sayısına A matrisinin rankı denir.

Tanım 1.2.2. [1] Belli bir giriş verisine karşılık sonlu sayıda adımda istenen sonucu elde etmek için yapılan iyi tanımlanmış kurallar kümesine algoritma denir.

Bu tanımdan yola çıkılarak algoritmanın temel özellikleri şu şekilde sıralanabilir:

Girdi: Algoritma için bir giriş alfabesinin tanımlı olmasıdır.

Çıktı: Algoritma için giriş alfabesine uygun sonuç elde edilmesidir.

Açıklık: Algoritmadaki işlemlerin anlaşılır olması, farklı anlam içermemesidir.

Etkinlik: Algoritmadaki işlemlerin herkes tarafından kolayca yapılabilmesidir.

Sonluluk: Algoritmanın sonlu sayıda işlemle sonuçlanmasıdır.

Herhangi bir problemi çözmeden önce problemin algoritma tarafından ne kadar zamanda çözüleceği bilinmek istenir. Aynı zamanda farklı çözüm yollarına sahip algoritmalarla karşılaşıldığında en kısa zamanda çözümü verecek algoritma bilinmek istenir. Bu ve benzeri durumlardan dolayı algoritmalarda karmaşıklık bilgisine ihtiyaç vardır. Algoritmalarda yer karmaşıklığı ve zaman karmaşıklığı olmak üzere iki tür karmaşıklıktan bahsedilir.

Tanım 1.2.3. [1] Belirli bir giriş verisine karşı bilgisayarın kullandığı bellek miktarına yer karmaşıklığı denir.

Tanım 1.2.4. [1] Belirli bir miktardaki giriş verisine karşılık, yapılan toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemleri ile karşılaştırma, atama, v.b. işlemlerinin sayısına algoritmalarda zaman karmaşıklığı denir.

Zaman karmaşıklığını belirlemek için çeşitli asimptotik notasyonlar kullanılır: $O, o, \Omega, \Theta,$ v.b. Bunlardan en çok O kullanılır.

Tanım 1.2.5. [1] $f, g : R \rightarrow R$ ya da $Z^{+} \rightarrow R$ ye tanımlı fonksiyonlar olsun. $n > k$ olduğunda $|f(n)| \leq C.|g(n)|$ olacak şekilde C ve k pozitif sabitleri varsa, $f(n) = O(g(n))$ dir denir. ‘‘ $f(n)$ büyük $O(g(n))$ ’’ dir diye okunur. Daha açık bir şekilde anlatmak gerekirse, fonksiyonun büyümesinin asimptotik üst sınırını daha basit başka bir fonksiyon cinsinden tanımlanması demektir. O sembolü bir sonsuz serinin kalan terimini karakterize etmek için kullanıldığı gibi, algoritmaların bilgi işlemsel karmaşıklığının çözümlenmesi için de kullanılır.

Algoritmaların matematiksel formülasyonları yoğun bir şekilde matrislerle işlemlerin kullanımını gerektirir. Bunlardan matris çarpımı genel matrisler için oldukça pahalı bir işlemdir. İki tane $n x n$ boyutlu matrisin çarpımı için gereken karmaşıklık $O(n^{3})$ dür. Bu maliyeti düşürmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan en önemli iki tanesi Strassen ve Winograd tarafından gerçekleştirilmiştir.

Strassen algoritmasında $2x2$ boyutlu matrisler temel alınarak matris çarpımı geliştirilmiştir. Bu düşünüşle geliştirilen matris çarpımında $2x2$ boyutlu A ve B matrisleri çarpılırken ilk olarak her biri bir tane çarpma işlemi içeren yedi değer hesaplanmış ve daha sonra bu değerlerden yararlanılarak C matrisinin elemanları bulunmuştur. Bu yedi değer şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\mathrm{x}_1 = (a_{11} + a_{12}).(b_{11} + b_{22})$$

$$x_2 = (a_{21} + a_{22}).b_{11}$$

$$x_3 = a_{11}.(b_{12} - b_{22})$$

$$x_4 = a_{22}.(b_{21} - b_{11})$$

$$x_5 = (a_{11} + a_{12}).b_{22}$$

$$x_6 = (a_{21} - a_{11}).(b_{11} + b_{12})$$

$$x_7 = (a_{12} - a_{22}).(b_{21} + b_{22})$$

Bu değerlerden yararlanarak $C = A.B$ matrisinin

$$c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21},$$

$$c_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22},$$

$$c_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21},$$

$$c_{22} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}$$

elemanları

$$c_{11} = x_1 + x_4 - x_5 + x_7,$$

$$c_{12} = x_3 + x_5,$$

$$c_{21} = x_2 + x_4,$$

$$c_{22} = x_1 + x_3 - x_2 + x_6$$

şeklinde hesaplanabilirler.

Bilinen yöntemle yukarıdaki matris çarpma işlemi sekiz çarpma işlemi gerektirirken, Strassen algoritmasında yedi çarpma işlemi yeterlidir. Bu algoritma ardışık hesaplama esasına dayanır. Bu şekilde genel matris çarpım maliyeti olan $O\left(n^3\right)$ sınırı kırılmıştır. $n = 2^k$ için $2^k x 2^k$ boyutlu A ve B matrisleri çarpılırken her bir matris dört bloğa ayrılmış ve her bir blokta kendi arasında dört bloğa ayrılarak C matrisinin elemanları bulunmuştur. Bu ardışık yapı $2x2$ boyutlu matrislere indirgenerek elemanlar hesaplanmıştır. Bu elemanlar şu şekildedir:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

Tablo 1.1 incelenirse, Strassen algoritmasının çok büyük n değerleri için $n x n$ boyutlu matrislerin çarpımında avantaj sağladığı görülebilir. Strassen algoritması $n = 2^k$ olmadığı durumlarda da sonuç vermektedir. Bu durum için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Winograd algoritması ise matris çarpımı işleminin iki vektörün iç çarpımına indirgenmesi esasından yola çıkılarak $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ vektörlerinin iç çarpımları aşağıdaki gibi düşünülerek geliştirilmiştir:

$$V.W = (v_1 + w_2)(v_2 + w_1) + (v_3 + w_4)(v_4 + w_3) - v_1 v_2 - v_3 v_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4 .$$

Winograd'ın yönteminde gereken çarpma işlemi ile klasik matris çarpımında gereken çarpma işlemi sayısı karşılaştırıldığında, Winograd yöntemi için çarpma işlemi sayısının arttığı görülmektedir. Fakat dikkat edilirse, son terimler sadece V ve W vektörlerinin bileşenlerinden oluşur. Bu özellikten dolayı, bu dört terim birer kez hesaplanıp A matrisinin i yinci satırının B matrisinin tüm sütunları ile çarpımında tekrar tekrar kullanılmaktadır. Bu da genel maliyeti düşürmektedir. $n = 2p$ olduğunda yukarıdaki iç çarpım aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$$V.W = \sum_{i=1}^{p} (v_{2i-1} + w_{2i}).(v_{2i} + w_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{p} v_{2i-1}.v_{2i} - \sum_{i=1}^{p} w_{2i-1}.w_{2i} .$$

Winograd algoritması n sayısı tek olduğu durum için de kullanılabilmektedir. Bu algoritmanın geçerli olabilmesi için, iç çarpımda çarpmanın yer değiştirme özelliği dikkate alınmalıdır.

Sonuç olarak, matris çarpımı, matris vektör çarpımı esas alındığında genel matrislerde bu maliyet pahalı olur. Tablo 1.1 de klasik matris çarpımı, Strassen ve Winograd algoritmaları ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 1.1: $n\,x\,n$ boyutlu matrisler için matris çarpımının karşılaştırılması

	Klasik algoritma	Winograd `ın algoritması	Strassen `in algoritması
Çarpmalar	n^3	$\frac{1}{2}n^3 + n^2$	$7^k = n^{2.81}$ $n = 2^k$
Toplamalar/ Çıkarmalar	$n^3 - n^2$	$\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$	$6.7^k - 6.4^k \approx 6.n^{2.81} - 6.n^2$ $n = 2^k$
Toplam	$2n^3 - n^2$	$2n^3 + 3n^2 - 2n$	$4.7n^{\lg 7} \approx 4.7n^{2.81}$ $n = 2^k$ olması gerekmez.

BÖLÜM 2

YAPILAŞMIŞ MATRİSLER VE YER DEĞİŞTİRME OPERATÖRLERİ

2.1. Yapılaşmış Matrisler

Yapılaşmış matrisler şu temel özelliklere sahiplerdir [8]:

a) Az sayıda parametre ile gösterilebilirler: $m x n$ boyutlu bir genel matris mn parametre ile gösterilirken yapılaşmış matrisler için bu çok çok daha küçüktür (bkz. Tablo 2.3).

b) Vektörlerle hızlı bir şekilde çarpılabilirler: $m x n$ boyutlu bir genel matrisi n boyutlu bir vektör ile çarpmak için $2mn - n$ sayıda işlem gerekirken, yapılaşmış matrislerde bu $O((m+n)\log^{i}(m+n)),\ i = 1,2$ seviyesindedir (bkz. Tablo 2.3).

c) Polinom ve rasyonel fonksiyonlarla yapılan işlemlerle direkt alakalıdırlar: Tablo 2.2 incelenirse, bu ilişki görülebilir.

d) Özel lineer operatörlerle rankları çok çok küçülür: Yapılaşmış matrisler için tanımlı iki tip operatörü yakından inceleyeceğiz.

Tablo 2.1 de en çok kullanılan dört çeşit yapılaşmış matris gösterilmiştir.

Tablo 2.1: Yapılaşmış matrislerin dört sınıfı [8]

Toeplitz matrisleri $(t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$	Hankel matrisleri $(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$
$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{n-1} & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \iddots & h_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & \cdots & h_{2n-2} \end{pmatrix}$
Vandermonde matrisleri $(t_i^j)_{i,j=0}^{n-1}$	Cauchy matrisleri $\left(\frac{1}{s_i - t_j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$
$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^{n-1} \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{s_0 - t_0} & \cdots & \frac{1}{s_0 - t_{n-1}} \\ \frac{1}{s_1 - t_0} & \cdots & \frac{1}{s_1 - t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{s_{n-1} - t_0} & \cdots & \frac{1}{s_{n-1} - t_{n-1}} \end{pmatrix}$

Tablo 2.2: Temel algoritmalar ve yapılaşmış matris-vektör çarpımı arasındaki ilişki [9]

Toeplitz Matrisleri	Konvolüsyon	$M(n)$
Hankel Matrisleri	Konvolüsyon	$M(n)$
Vandermonde Matrisleri	Çok-noktalı polinom değeri bulma	$M(n)\log(n)$
KFD matrisleri (Özel düğüm noktalarında Vandermonde Matrisleri v.b.)	$K.F.D$	$M(n)$
Vandermonde Matrisinin Tersi	Polinom interpolasyonu	$M(n)\log(n)$
Cauchy Matrisleri	Çok-noktalı rasyonel polinom değeri bulma	$M(n)\log(n)$
Cauchy Matrisinin Tersi	Rasyonel interpolasyon	$M(n)\log(n)$

Burada, $H.F.D$ (Hızlı Fourier Dönüşümü) olmak üzere,

$$M(n) = \begin{cases} n\log n, & \text{F cismi } H.F.D \text{ } için \text{ } uygunsa, \\ n\log n \, \log \, \log n, & \text{diger} \end{cases}$$

şeklindedir.

Yapılaşmış matrisler bu dört matrisle sınırlı değildir. Tablo 2.5 te diğer yapılaşmış matris örnekleri tanıtılmıştır.

Genel matrislerde matris vektör çarpımı çok işlem gerektirirken yapılaşmış matrislerde bu çarpım daha az işlemle gerçekleşebilir. Tablo 2.3 te, Tablo 2.1 deki yapılaşmış matrisler ve genel matrisler için matris vektör çarpımının karmaşıklığı gösterilmiştir.

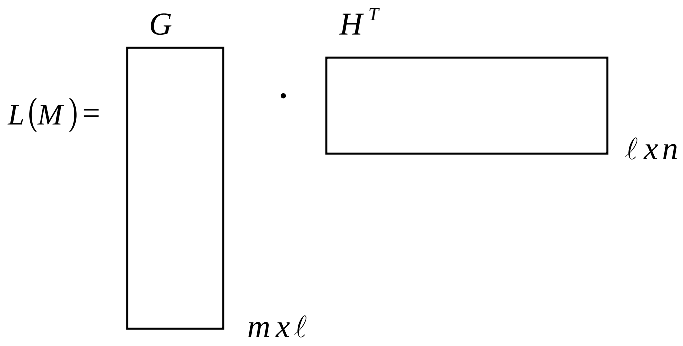
Tablo 2.3: Matris vektör çarpımının maliyeti [8]

M matrisleri	Her bir $m x n$ boyutlu M matrisinin elemanlarının sayısı	$M v$ çarpımı için karmaşıklık
Genel	mn	$2mn-n$
Toeplitz	$m+n-1$	$O((m+n)\log(m+n))$
Hankel	$m+n-1$	$O((m+n)\log(m+n))$
Vandermonde	m	$O\left((m+n)\log^2(m+n)\right)$
Cauchy	$m+n$	$O\left((m+n)\log^2(m+n)\right)$

Yapılaşmış matrislerle süper hızlı algoritma tasarımında izlenebilecek bir yol, aşağıda tanımlanacak olan operatörlerin kullanımıdır.

Tanım 2.1.1. [1] $L : F^{mxn} \to F^{mxn}$ bir operatör $M \in F^{mxn}$, $G \in F^{mx\ell}$ ve $H \in F^{nx\ell}$ olsun. $L(M) = G.H^T$ sağlansın. Bu durumda, $L(M)$ matrisinin $\ell = rank(L(M))$ rankına M nin L- rankı veya yer değiştirme rankı denir. G ve H matris çiftlerine de ℓ uzunluğunda M nin L- üreteçleri ya da yer değiştirme üreteçleri ya da kısaca üreteçleri denir.

$m x n$ boyutlu bir M yapılaşmış matrisi verildiğinde bu M matrisi için $L(M) = G.H^T$ şeklindedir (bkz Şekil 2.1).

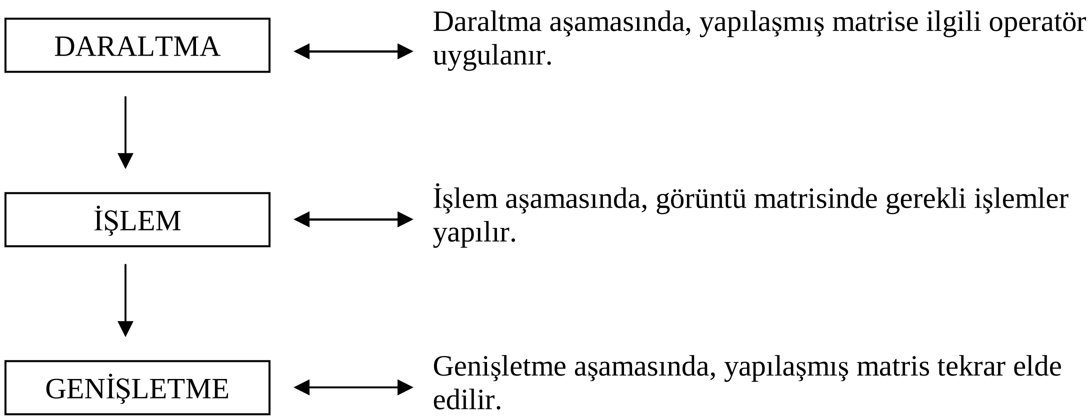


Şekil 2.1: Düşük ranklı üreteçler

Şekil 2.1 de ℓ düşük bir rank ve G, H üreteçlerdir. Bu durumda, mn tane eleman yerine sadece $\ell(m+n)$ tane eleman matrisi depolamak için yeterli olacaktır. Aynı zamanda n boyutlu bir v vektörü verildiğinde Mv çarpımının hesaplanması için gereken işlem sayısı $(2n-1)m$ yerine $\ell(2n-1)+m(2\ell-1)<2\ell(m+n)$ dir.

Eğer L birim operatörse, M nin yer değiştirme rankı ile M nin rankı denk olur. Aynı şekilde M nin bir yer değiştirme üreteci ile M nin üreteci de denk olur.

Yapılaşmış matrislerle süper hızlı algoritma tasarlamak için üç temel aşama takip edilir. Bu aşamaları görmek için Şekil 2.2 incelenebilir.



Şekil 2.2: Yapılaşmış matrislerde işlem aşamaları

Yapılaşmış matrislere ilgili operatörler uygulandığında kısa üreteçlerle ifade edilebilirler. Bu durumda, yapılaşmış matris tam ranka sahip olsa bile yapılaşmış matrisin görüntüsünün rankı çok çok küçülecektir. Bu şekilde düşük ranklı matrislerle işlem yapmanın bütün avantajları kullanılır. İlgili operatör tekil değilse, $L(M)$ den M tekrar elde edilebilir [6,10,11]. Tablo 2.4 te $n x n$ boyutlu yapılaşmış matrisler için yardımcı matrisler ve ilgili operatörler uygulandıktan sonraki yer değiştirme rankı gösterilmiştir.

2.2. Sylvester ve Stein Tipindeki Lineer Operatörler

$L = \nabla_{A,B}$ Sylvester tipi ve $L = \Delta_{A,B}$ Stein tipi lineer yer değiştirme operatörlerinin M yapılaşmış matrisine uygulanışı sırasıyla,

$$\nabla_{A,B}(M) = A.M - M.B \tag{2.1}$$

ve

$$\Delta_{A,B}(M) = M - A.M.B \tag{2.2}$$

şeklindedir.

Burada A ve B matrisleri M matrisinin yapısına bağlı olarak seçilebilen matrislerdir. Genel olarak, öteleme (shift) Z_e, Z_e^T ve ölçekleme (scaling) $D(s)$ matrisleri kullanılır. Bu matrislere yardımcı matrisler denir.

Tablo 2.4: Bazı yapılaşmış matrisler için yardımcı matrisler ve yer değiştirme rankı [8]

Matris Sınıfı	A ve B Yardımcı Matris Çifti	Yer Değiştirme Rankı	Vektör Matris Çarpımı için Gereken Karmaşıklık
Toeplitz $\left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	$Z_e, Z_f, e \neq f$	≤ 2	$O(n \log n)$
Hankel $\left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	$Z_e, Z_f^T, ef \neq 1$	≤ 2	$O(n \log n)$
Vandermonde $\left(t_i^j\right)_{i,j=0}^{n-1}$	$D(t), Z_f^T$	≤ 1	$O(n \log^2 n)$
Cauchy $\left(\dfrac{1}{s_i - t_j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	$D(s), D(t)$	≤ 1	$O(n \log^2 n)$

Her iki operatör de süper hızlı algoritma tasarımında etkili olmakla beraber ∇ operatörleri daraltma aşamasında (compress) daha avantajlı iken, Δ operatörleri de genişletme (decompress) aşamasında daha avantajlıdır.

Tablo 2.5: Yapılaşmış matrislerin temel sınıflarının tanımları [9]

Toeplitz-benzeri M matrisleri	$rank(Z.M - M.Z) << n$
Hankel-benzeri M matrisleri	$rank(Z.M - M.Z^T) << n$
Vandermonde-benzeri M matrisleri	$rank(D(s).M - M.Z^T) << n$
Cauchy-benzeri M matrisleri	$rank(D(s).M - M.D(t)) << n$

Teorem 2.2.1. [5,13] Eğer A matrisi tekil değilse,

$$\nabla_{A,B} = A\Delta_{A^{-1},B}.$$

Eğer B matrisi tekil değilse,

$$\nabla_{A,B} = -\Delta_{A,B^{-1}} B.$$

İspat. A matrisi tekil olmasın. Bu durumda, A matrisinin tersi A^{-1} mevcuttur. Şimdi A ve B matrisleriyle aynı boyutta olan bir M matrisi ele alınıp $\nabla_{A,B}(\mathrm{M})$ yazılsın. (2.1) ifadesinden bu yazılım aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{A,B}(\mathrm{M}) = A.M - M.B\,. \tag{2.3}$$

Şimdi de (2.2) ifadesinden yararlanarak $\Delta_{A^{-1},B}(\mathrm{M})$ yazılsın.

$$\Delta_{A^{-1},B}(\mathrm{M}) = M - A^{-1}.M.B\,. \tag{2.4}$$

(2.4) ifadesinin her iki tarafı soldan A matrisiyle çarpılsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A\Delta_{A^{-1},B}(M) &= A.\left(M - A^{-1}.M.B\right) \\ &= A.M - \left(A.A^{-1}\right).M.B \\ &= A.M - M.B \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir.

(2.3) ile (2.5) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\nabla_{A,B} = A\Delta_{A^{-1},B}$$

sonucu elde edilir.

İkinci ifadenin ispatı da şu şekilde yapılır:

B matrisi tekil olmasın. Bu durumda, B matrisinin tersi B^{-1} mevcuttur. Yine A ve B matrisleriyle aynı boyutta olan bir M matrisi ele alınarak $\nabla_{A,B}(M)$ yazılsın. (2.1) ifadesinden bu yazılım aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{A,B}(M) = A.M - M.B \,. \tag{2.6}$$

Şimdi de (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,B^{-1}}(M)$ yazılsın.

$$\Delta_{A,B^{-1}}(M) = M - A.M.B^{-1} \,. \tag{2.7}$$

(2.7) ifadesinin her iki tarafı sağdan B matrisiyle çarpılırsa, bu durumda, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Delta_{A,B^{-1}}(M)B &= \left(M - A.\,M.\,B^{-1}\right).B \\
&= M.B - A.M.\left(B^{-1}.B\right) \\
&= M.B - A.M
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta_{A,B^{-1}}(M) = -(M.B - A.M) = A.M - M.B \,. \tag{2.8}$$

(2.6) ile (2.8) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\nabla_{A,B} = -\Delta_{A,B^{-1}}B$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.2.1. [5] Eğer $L(M) = 0$ olduğunda $M = 0$ oluyorsa, L lineer operatörüne tekil olmayan operatör denir.

Teorem 2.2.2. [5] Tekil olmayan bir M matrisi ve A ve B yardımcı matris çifti için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\nabla_{B,A}\left(M^{-1}\right) = -M^{-1}.\nabla_{A,B}(M).M^{-1} \,.$$

B matrisi tekil değilse,

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right)=B.M^{-1}.\Delta_{A,B}(M).B^{-1}.M^{-1}.$$

A matrisi tekil değilse,

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right)=M^{-1}.A^{-1}.\Delta_{A,B}(M).M^{-1}.A.$$

İspat. Önce birinci ifade ispatlansın. M matrisi tekil olmasın. Bu durumda, M matrisinin tersi M^{-1} mevcuttur.

(2.1) tanımından yararlanılarak $\nabla_{B,A}\left(M^{-1}\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{B,A}\left(M^{-1}\right)=B.M^{-1}-M^{-1}.A. \tag{2.9}$$

Yine (2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{A,B}(M)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{A,B}(M)=A.M-M.B.$$

Bu ifadenin her iki tarafı sağdan ve soldan M^{-1} ile çarpılsın.

$$\begin{aligned} M^{-1}\nabla_{A,B}(M)M^{-1} &= M^{-1}.A.M.M^{-1}-M^{-1}.M.B.M^{-1} \\ &= M^{-1}.A-B.M^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ -M^{-1}.\nabla_{A,B}(M).M^{-1}=B.M^{-1}-M^{-1}.A. \tag{2.10}$$

(2.9) ve (2.10) ifadelerinden,

$$\nabla_{B,A}\left(M^{-1}\right)=-M^{-1}.\nabla_{A,B}(M).M^{-1}$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde ikinci ifadenin ispatı için B matrisi tekil olmasın. Bu durumda, B matrisinin tersi B^{-1} mevcuttur. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right)=M^{-1}-B.M^{-1}.A. \qquad (2.11)$$

Yine (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,B}(M)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{A,B}(M)=M-A.M.B.$$

Bu eşitliğin her iki tarafı soldan M^{-1} ile çarpılsın.

$$M^{-1}.\Delta_{A,B}(M)=M^{-1}.M-M^{-1}.A.M.B$$

$$=I-M^{-1}.A.M.B.$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı soldan B matrisi ile çarpılsın.

$$B.M^{-1}.\Delta_{A,B}(M)=B.I-B.M^{-1}A.M.B$$

$$=B-B.M^{-1}.A.M.B.$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı sağdan B^{-1} ile çarpılsın.

$$B.M^{-1}\Delta_{A,B}(M).B^{-1}=B.B^{-1}-B.M^{-1}A.M.B.B^{-1}$$

$$=I-B.M^{-1}.A.M.$$

Son olarak yukarıdaki ifadenin her iki tarafı sağdan M^{-1} ile çarpılsın.

$$B.M^{-1}\Delta_{A,B}(M).B^{-1}.M^{-1} = I.M^{-1} - B.M^{-1}.A.M.M^{-1}$$

$$= M^{-1} - B.M^{-1}.A.$$

Son bulduğumuz eşitlik (2.11) ifadesi ile karşılaştırılırsa,

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right) = B.M^{-1}.\Delta_{A,B}(M).B^{-1}.M^{-1}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdide üçüncü ifadeyi ispatlamak için A matrisi tekil olmasın. Bu durumda, A matrisinin tersi A^{-1} mevcuttur. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right) = M^{-1} - B.M^{-1}.A. \tag{2.12}$$

Yine (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,B}(M)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{A,B}(M) = M - A.M.B.$$

Bu eşitliğin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılsın.

$$A^{-1}.\Delta_{A,B}(M) = A^{-1}.M - A^{-1}.A.M.B$$

$$= A^{-1}.M - M.B.$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı soldan M^{-1} ile çarpılsın.

$$M^{-1}.A^{-1}.\Delta_{A,B}(M) = M^{-1}.A^{-1}.M - M^{-1}.M.B$$

$$= M^{-1}.A^{-1}.M - B.$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı sağdan M^{-1} ile çarpılsın.

$$M^{-1}.A^{-1}.\Delta_{A,B}(M).M^{-1} = M^{-1}.A^{-1}.M.M^{-1} - B.M^{-1}$$

$$= M^{-1}.A^{-1} - B.M^{-1}.$$

Son olarak yukarıdaki ifadenin her iki tarafı sağdan A ile çarpılsın.

$$M^{-1}.A^{-1}.\Delta_{A,B}(M).M^{-1}.A = M^{-1}.A^{-1}.A - B.M^{-1}.A$$

$$= M^{-1} - B.M^{-1}.A.$$

Son bulduğumuz eşitlikle (2.12) ifadesi karşılaştırılırsa,

$$\Delta_{B,A}\left(M^{-1}\right) = M^{-1}.A^{-1}.\Delta_{A,B}(M).M^{-1}.A$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.2.3. [5,13] Uyumlu boyutlardaki herhangi bir (A, B, M) matris üçlüsü için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\nabla_{A,B}\left(M^{T}\right) = -\nabla_{B^{T},A^{T}}(M)^{T}$$

$$\Delta_{A,B}\left(M^{T}\right) = \Delta_{B^{T},A^{T}}(M)^{T}.$$

İspat. (A, B, M) matris üçlüsü uygun boyutlarda olsun.

(2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{A,B}\left(M^{T}\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{A,B}\left(M^{T}\right) = A.M^{T} - M^{T}.B. \tag{2.13}$$

Yine (2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{B^T,A^T}(M)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{B^T,A^T}(M) = B^T.M - M.A^T.$$

Bu ifadenin her iki tarafının transpozesi alınsın.

$$\begin{aligned}\nabla_{B^T,A^T}(M)^T &= \left(B^T.M - M.A^T\right)^T \\ &= \left(B^T.M\right)^T - \left(M.A^T\right)^T \\ &= M^T.\left(B^T\right)^T - \left(A^T\right)^T.M^T \\ &= M^T.B - A.M^T\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\nabla_{B^T,A^T}(M)^T = -\left(M^T.B - A.M^T\right) = A.M^T - M^T.B. \tag{2.14}$$

(2.13) ile (2.14) ifadeleri karşılaştırılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\nabla_{A,B}\left(M^T\right) = -\nabla_{B^T,A^T}(M)^T.$$

Şimdi diğer eşitliğin ispatına geçilirse, (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,B}\left(M^T\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{A,B}\left(M^T\right) = M^T - A.M^T.B. \tag{2.15}$$

Yine (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{B^T,A^T}(M)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{B^T,A^T}(M) = M - B^T.M.A^T.$$

Bu ifadenin her iki tarafının transpozesi alınsın.

$$\begin{aligned}\Delta_{B^T,A^T}(M)^T &= \left(M - B^T.M.A^T\right)^T \\ &= M^T - \left(B^T.M.A^T\right)^T \\ &= M^T - \left(A^T\right)^T.M^T.\left(B^T\right)^T \\ &= M^T - A.M^T.B.\end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.15) ile (2.16) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\Delta_{A,B}\left(M^T\right) = \Delta_{B^T,A^T}(M)^T$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4. [5] Herhangi tekil olmayan V ve W matrisleri için $\hat{A} = V.A.V^{-1}$ $\hat{B} = W^{-1}.B.W$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\nabla_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) = V.\nabla_{A,B}(M).W$$

$$\Delta_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) = V.\Delta_{A,B}(M).W\,.$$

İspat. İlk önce birinci eşitlik ispatlanırsa V ve W matrisleri tekil olmasın. Bu durumda V ve W matrislerinin tersleri V^{-1} ve W^{-1} mevcuttur. (2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) = \hat{A}.V.M.W - V.M.W.\hat{B}$$

$$= (V.A.V^{-1}).(V.M.W).(V.M.W).(W^{-1}.B.W)$$

$$= V.A.(V^{-1}.V).M.W - V.M.(W.W^{-1}).B.W \qquad (2.17)$$

$$= V.A.M.W - V.M.B.W.$$

Yine (2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{A,B}(M)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla_{A,B}(M) = A.M - M.B\,.$$

Bu ifadenin her iki tarafı soldan V matrisi ile çarpılsın.

$$V.\nabla_{A,B}(M) = V.(A.M - M.B)$$

$$= V.A.M - V.M.B.$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı sağdan W matrisiyle çarpılsın.

$$V.\nabla_{A,B}(M).W = (V.A.M - V.M.B).W$$

$$= V.A.M.W - V.M.B.W. \qquad (2.18)$$

(2.17) ve (2.18) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\nabla_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) = V.\nabla_{A,B}(M).W$$

elde edilir.

Şimdi ikinci eşitlik ispatlansın. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) &= V.M.W - \hat{A}.V.M.W.\hat{B} \\ &= V.M.W - \left(V.A.V^{-1}\right).V.M.W.\left(W^{-1}.B.W\right) \\ &= V.M.W - V.A.\left(V^{-1}.V\right).M.\left(W.W^{-1}\right).B.W \\ &= V.M.W - V.A.M.B.W.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Yine (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,B}(M)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{A,B}(M) = M - A.M.B.$$

Bu ifadenin her iki tarafı soldan V matrisi ile çarpılsın.

$$\begin{aligned}V.\Delta_{A,B}(M) &= V.(M - A.M.B) \\ &= V.M - V.A.M.B.\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı sağdan W matrisi ile çarpılsın.

$$\begin{aligned}V.\Delta_{A,B}(M).W &= (V.M - V.A.M.B).W \\ &= V.M.W - V.A.M.B.W.\end{aligned} \tag{2.20}$$

(2.19) ile (2.20) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\Delta_{\hat{A},\hat{B}}(V.M.W) = V.\Delta_{A,B}(M).W$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5. [13] Uygun boyutlardaki A, B, C ve M, N matrisleri için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\nabla_{A,C}(M.N) = \nabla_{A,B}(M).N + M.\nabla_{B,C}(N).$$

İspat. (2.1) ifadesinden yararlanılarak $\nabla_{A,C}(MN)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{A,C}(M.N) &= A.M.N - M.N.C \\
&= A.M.N - M.N.C + M.B.N - M.B.N \\
&= A.M.N - M.B.N + M.B.N - M.N.C \\
&= (A.M - M.B).N + M.(B.N - N.C) \\
&= \nabla_{A,B}(M).N + M.\nabla_{B,C}(N).
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.6. [13] Uygun boyutlardaki A, B, C ve M, N matrisleri için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\Delta_{A,C}(M.N) = \Delta_{A,B}(M).N + A.M.\nabla_{B,C}(N).$$

İspat. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,C}(M.N)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\Delta_{A,C}(M.N) &= M.N - A.M.N.C \\
&= M.N - A.M.N.C + A.M.B.N - A.M.B.N \\
&= M.N - A.M.B.N + A.M.B.N - A.M.N.C \\
&= (M - A.M.B).N + A.M.(B.N - N.C) \\
&= \Delta_{A,B}(M).N + A.M.\nabla_{B,C}(N).
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.7. [13] B matrisi tekil olmamak üzere uygun boyutlardaki A, B, C ve M, N matrisleri için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\Delta_{A,C}(M.N) = \Delta_{A,B}(M).N + A.M.B.\Delta_{B^{-1},C}(N).$$

İspat. B matrisi tekil olmasın. Bu durumda, B matrisinin tersi B^{-1} mevcuttur. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,C}(M.N)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\Delta_{A,C}(M.N) &= M.N - A.M.N.C \\
&= M.N - A.M.N.C + A.M.B.N - A.M.B.N \\
&= M.N - A.M.B.N + A.M.B.N - A.M.N.C \\
&= (M - A.M.B).N + A.M.B.\left(N - B^{-1}.N.C\right) \\
&= \Delta_{A,B}(M).N + A.M.B.\Delta_{B^{-1},C}(N).
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.8. [13] C matrisi tekil olmamak üzere uygun boyutlardaki A, B, C ve M, N matrisleri için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\Delta_{A,C}(M.N) = \Delta_{A,B}(M).N - A.M.\Delta_{B,C^{-1}}(N).C\ .$$

İspat. C matrisi tekil olmasın. Bu durumda, C matrisinin tersi C^{-1} mevcuttur. (2.2) ifadesinden yararlanılarak $\Delta_{A,C}(M.N)$ ifadesi, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\Delta_{A,C}(M.N) &= M.N - A.M.N.C \\ &= M.N - A.M.N.C + A.M.B.N - A.M.B.N \\ &= M.N - A.M.B.N + A.M.B.N - A.M.N.C \\ &= (M - A.M.B).N - A.M.\left(N - B.N.C^{-1}\right).C \\ &= \Delta_{A,B}(M).N - A.M.\Delta_{B,C^{-1}}(N).C.\end{aligned}$$

BÖLÜM 3

YER DEĞİŞTİRME OPERATÖRLERİNİN TERSİ

Herhangi bir M matrisinin yer değiştirmesi için verilen açık ifadeler, aşağıdaki teoreme dayanmaktadır:

Teorem 3.1. [11-13] Herhangi bir A, B, M üçlü matrisleri ve bütün k doğal sayıları için

$$M = A^k.M.B^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

elde edilir.

İspat. İspat tümevarım yöntemiyle yapılabilir.

Öncelikle $k=1$ için eşitliğin doğru olduğu gösterilir.

$$A.M.B + \sum_{i=0}^{0} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i = A.M.B + \Delta_{A,B}(M)$$

$$= A.M.B + M - A.M.B$$

$$= M$$

olduğundan eşitlik doğrudur. Şimdi $k = 2$ için eşitliğin doğru olduğu gösterilsin.

$$A^2.M.B^2+\sum_{i=0}^{1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i = A^2.M.B^2+\Delta_{A,B}(M)+A.\Delta_{A,B}(M).B$$

$$= A^2.M.B^2+M-A.M.B+A.(M-A.M.B).B$$

$$= A^2.M.B^2+M-A.M.B+A.M.B-A^2.M.B^2$$

$$= M$$

olduğundan eşitlik doğrudur.

$k=n$ için ifade doğru olsun. Bu durumdan yararlanılarak $k=n+1$ için ifadenin doğru olduğu gösterilsin.

$$M = A^n.M.B^n+\sum_{i=0}^{n-1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i \tag{3.1}$$

$$A^{n+1}.M.B^{n+1}+\sum_{i=0}^{n}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i = A^n.A.M.B.B^n+A^n.\Delta_{A,B}(M).B^n+\sum_{i=0}^{n-1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

$$= A^n.(A.M.B+\Delta_{A,B}(M)).B^n+\sum_{i=0}^{n-1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

$$= A^n.(A.M.B+M-A.M.B).B^n+\sum_{i=0}^{n-1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

$$= A^n.M.B^n+\sum_{i=0}^{n-1}A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

$$= M.$$

Bulunan bu son eşitlik (3.1) ifadesinden yararlanılarak yazılmıştır. Sonuç olarak $k=n+1$ için eşitlik sağlanır ve tümevarım yönteminden ispat elde edilir.

Teorem 2.2.1 ve Teorem 3.1 birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1. [5] A, B, M üçlü matrisleri ve k doğal sayısı verilsin.

Eğer A matrisi tekil değilse,

$$M = A^{-k}.M.B^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}.\nabla_{A,B}(M).B^{i} .$$

Eğer B matrisi tekil değilse,

$$M = A^{k}.M.B^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} A^{i}.\nabla_{A,B}(M).B^{-i-1} .$$

İspat. Teorem 2.2.1 ve Teorem 3.1 den yararlanılır. Verilen koşullar için Teorem 3.1 den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$M = A^{k}.M.B^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{i}.\Delta_{A,B}(M).B^{i} . \tag{3.2}$$

Öncelikle, A matrisi tekil olmasın. Bu durumda, A matrisinin tersi A^{-1} mevcuttur. O halde (3.2) eşitliği A^{-1}, B, M matrisleri içinde yazılabilir.

$$M = A^{-k}.M.B^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i}.\Delta_{A^{-1},B}(M).B^{i} . \tag{3.3}$$

Teorem 2.2.1 den,

$$\nabla_{A,B} = A\Delta_{A^{-1},B}$$

biliniyor. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\Delta_{A^{-1},B} = A^{-1}\nabla_{A,B} .$$

Yukarıda bulunan değer (3.3) de yerine yazılırsa,

$$M = A^{-k}.M.B^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i}.A^{-1}.\nabla_{A,B}(M).B^{i}$$

$$= A^{-k}.M.B^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}.\nabla_{A,B}(M).B^{i}$$

elde edilir.

Şimdi B matrisi tekil olmasın. Bu durumda, B matrisinin tersi B^{-1} mevcuttur. Bu kez (3.2) eşitliği A, B^{-1}, M matrisleri için yazılır.

$$M = A^{k}.M.B^{-k} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{i}.\Delta_{A,\, B^{-1}}(M).B^{-i}. \tag{3.4}$$

Teorem 2.2.1 den,

$$\nabla_{A,B} = -\Delta_{A,B^{-1}}\, B$$

biliniyor. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\Delta_{A,B^{-1}} = -\nabla_{A,B}\, B^{-1}.$$

Yukarıda bulunan değer (3.4) de yerine yazılırsa,

$$M = A^{k}.M.B^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} A^{i}.\nabla_{A,B}(M).B^{-1}.B^{-i}$$

$$= A^{k}.M.B^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} A^{i}.\nabla_{A,B}(M).B^{-i-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1, keyfi bir c skaleri için sırasıyla $A^k = c.I$ veya $B^k = c.I$ olması durumunda $\Delta_{A,B}(M)$ ve $\nabla_{A,B}(M)$ yer değiştirme matrisleriyle bir M matrisinin basit ifadelerinin oluşmasına olanak sağlar.

Sonuç 3.2. [5] Teorem 3.1 deki koşullar sağlansın. Bu durumda, eğer $A^k = a.I$ ise,

$$M.\left(I - a.B^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

sağlanır. Eğer $B^k = b.I$ ise,

$$M.\left(I - b.A^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i$$

sağlanır.

İspat. Teorem 3.1 den herhangi bir A, B, M matris üçlüleri ve bütün k doğal sayıları için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$M = A^k.M.B^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i .$$

$A^k = a.I$ olsun. Buradan aşağıdaki sonuç çıkar:

$$M - A^k.M.B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i ,$$

$$M - a.I.M.B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i ,$$

$$M.\left(I - a.B^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i .$$

$B^k = b.I$ olsun. Buradan aşağıdaki sonuç çıkar:

$$M - A^k.M.B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i \ ,$$

$$M - A^k.M.b.I = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i \ ,$$

$$M.\left(I - b.A^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\Delta_{A,B}(M).B^i \ .$$

Tanım 3.1. [5] $W = (w_1,...,w_s)$, $w_1,...,w_s$ sütun vektörleriyle belirlenmiş matristir. Bir $m\,x\,n$ boyutlu M matrisi ve L lineer operatörü için

$$L(M) = G.H^T = \sum_{k=1}^{\ell} g_{k.}\ h_k^T \tag{3.5}$$

olsun.

Burada $G = (g_1,...,g_\ell)$, $H = (h_1,...,h_\ell)$ ve ℓ küçük bir değerdir ($\ell = O(1)$ ya da $\ell << \min(m,n)$). Bu durumda, M matrisine ℓ uzunluğunda (G,H) üreteçlerine sahip bir yapılaşmış matris denir.

Tanım 3.2. [5] m ve n doğal sayıları, bir $m\,x\,m$ boyutlu P matrisi ve bir m boyutlu v sütun vektörü için $m\,x\,n$ boyutlu Krylov matrisi

$$K_{m,n}\ (P,v) = \left(v, P\,v,..., P^{\,n-1}\,v\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.1. [5] $K_{m,\ n}(P,v)$ Krylov matrisi

a) $P = Z_f$ olduğunda $m\,x\,n$ boyutlu f -dolanır (f -circulant) $Z_{f,m,n}(v)$ matrisidir.

b) $P = Z_f^T$ olduğunda $J.Z_{f,m,n}(J.v)$ matrisidir.

c) P bir köşegen matris olduğunda $D(v)$ köşegen matrisi ve $V_{m,\ n}(P1)$ Vandermonde matrisinin $D(v).V_{m,\ n}(P1)$ çarpımıdır. $\mathrm{v} = 1$ için,

$D(v) = I_m$.

Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1 aşağıdaki sonuçları gerektirir:

Teorem 3.2. [5] Bir $L = \Delta_{A,B}$ operatörü, (3.5) koşulunu sağlayan $m\,x\,n$ boyutlu bir M matrisi ve bütün k doğal sayıları için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$M = A^k.M.B^k + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,k}(A, g_j).K_{n,k}(B^T, h_j)^T \ .$$

Teorem 3.3. [5] Bir $L = \nabla_{A,B}$ operatörü, (3.5) koşulunu sağlayan bir $m\,x\,n$ boyutlu M matrisi ve bütün k doğal sayıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

Eğer A matrisi tekil değilse,

$$M = A^{-k-1}M\,B^k + A^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,k}(A^{-1}, g_j).K_{n,k}(B^T, h_j)^T \ .$$

Eğer B matrisi tekil değilse,

$$M = A^k M\,B^{-k-1} - \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,k}(A, g_j).K_{n,k}(B^{-T}, h_j)^T\,B^{-1} \ .$$

BÖLÜM 4

TEMEL YAPILAŞMIŞ MATRİSLER İÇİN OPERATÖRLERLE BİLİNEER İFADELER

Bu bölümde yapılacak uygulamalar için,

$$\Delta_{A,B}(M) = M - A.M.B \ ,$$

$$\nabla_{A,B}(M) = A.M - M.B$$

ve

$$L(M) = G.H^T \ ; \ G \in F^{m\,x\,\ell}, H \in F^{n\,x\,\ell}; M \in F^{m\,x\,n}; \ A \in F^{m\,x\,m}; B \in F^{n\,x\,n}$$

olarak alınacaktır.

Uygulama 4.1. [5] Stein tipi $L = \Delta_{Z_e,Z_f}$ operatörleri, Hankel tipi matrislerle uygulansın.

$$L(M) = M - Z_e.M.Z_f \ ; \quad L(M) = G.H^T$$

olduğu dikkate alınsın.

İlk olarak $e = 0$ özel durumunu incelensin ve aynı zamanda aynı adımlar $f = 0$ için de uygulansın. Daha sonra genel tekil olmayan durumdaki ifadelere uygulansın. Son olarak da e ve f nin bütün seçimleri incelensin.

1) (i) $e = 0$ olsun. Teorem 3.1 uygulanırsa, aşağıdaki durum elde edilir:

$$M = A^k .M .B^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i .\Delta_{A,B}(M).B^i$$

$$= Z^k .M .Z_f^k + \sum_{i=0}^{k-1} Z^i .G.H^T .Z_f^i .$$

Yukarıdaki ifade $k = m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z^m .M .Z_f^m + \sum_{i=0}^{m-1} Z^i .G.H^T .Z_f^i .$$

Z matrisi $m x m$ boyutlu olduğundan, Teorem 1.1.2 den $Z^m = 0.I_m = 0_m$ dır ($Z_e = Z_0 = Z$).

$$M = \sum_{i=0}^{m-1} Z^i .G.H^T .Z_f^i$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}(Z, g_j).K_{n,m}(Z_f^T, h_j)^T .$$

Uyarı 3.1 dikkate alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\left.\begin{array}{l} K_{m,m}(Z, g_j) = Z(g_j) \\ K_{n,m}(Z_f^T, h_j)^T = (J.Z_{f,n,m}(J.h_j))^T \end{array}\right\} \Rightarrow (Z_{f,n,m}(J.h_j))^T .J^T = Z_{f,n,m}(J.h_j)^T .J .$$

Son bulunan değerler dikkate alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} Z(g_j).Z_{f,n,m}(J.h_j)^T .J .$$

Açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z\left(g_j\right)=\begin{pmatrix} g_{1,j} & & & \\ g_{2,j} & g_{1,j} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & g_{1,j} \end{pmatrix}$$

ve

$$J.h_j=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} \\ h_{2,j} \\ \vdots \\ h_{n,j} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_{n,j} \\ h_{n-1,j} \\ \vdots \\ h_{1,j} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan,

$$Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)=\begin{pmatrix} h_{n,j} & f.h_{1,j} & f.h_{2,j} & \cdots \\ h_{n-1,j} & h_{n,j} & f.h_{1,j} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ h_{1,j} & h_{2,j} & h_{3,j} & \cdots \end{pmatrix},$$

$$Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T=\begin{pmatrix} h_{n,j} & h_{n-1,j} & \cdots & h_{1,j} \\ f.h_{1,j} & h_{n,j} & \ddots & h_{2,j} \\ f.h_{2,j} & f.h_{1,j} & \ddots & h_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T.J=\begin{pmatrix} h_{n,j} & h_{n-1,j} & \cdots & h_{1,j} \\ f.h_{1,j} & h_{n,j} & \ddots & h_{2,j} \\ f.h_{2,j} & f.h_{1,j} & \ddots & h_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T.J=\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ h_{3,j} & \iddots & f.h_{1,j} & f.h_{2,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki bulanan değerler dikkate alınırsa,

$$M=\sum_{j=1}^{l}\begin{pmatrix} g_{1,j} & & & \\ g_{2,j} & g_{1,j} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & g_{1,j} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ h_{3,j} & \iddots & f.h_{1,j} & f.h_{2,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(ii) $f=0$ durumu incelensin. Teorem 3.1 uygulanırsa, aşağıdaki durum elde edilir:

$$M=A^k.M.B^k+\sum_{i=0}^{k-1}A^i.\Delta_{A,B}\left(M\right).B^i$$

$$=Z_e^k.M.Z^k+\sum_{i=0}^{k-1}Z_e^i.G.H^T.Z^i.$$

Yukarıdaki ifade $k=n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=Z_e^n.M.Z^n+\sum_{i=0}^{n-1}Z_e^i.G.H^T.Z^i\ .$$

Z_f matrisi nxn boyutlu olduğundan, Teorem 1.1.2 den $Z^n=0.I_n=0_n$ dır ($Z_f=Z_0=Z$). Buradan,

$$M=\sum_{i=0}^{n-1} Z_e^i.G.H^T.Z^i$$

$$=\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_e, g_j\right).K_{n,n}\left(Z^T, h_j\right)^T.$$

Uyarı 3.1 dikkate alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\left.\begin{array}{l} K_{m,n}\left(Z_e, g_j\right)=Z_{e,m,n}\left(g_j\right) \\ K_{n,n}\left(Z^T, h_j\right)^T=\left(J.Z\left(J.h_j\right)\right)^T \end{array}\right\} \Rightarrow Z\left(J.h_j\right)^T.J^T=Z\left(J.h_j\right)^T.J.$$

Son bulunan değerler dikkate alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=\sum_{j=1}^{\ell} Z_{e,m,n}\left(g_j\right).Z\left(J.h_j\right)^T.J.$$

$$Z_{e,m,n}\left(g_j\right)=\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & e.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & e.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ve bir önceki durumda $Z_{f,m,n}\left(J.h_j\right)^T.J$ gösterildiğinden $f=0$ için yazılırsa,

$$Z\left(J.h_j\right)^T.J=\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ h_{n,j} & & & \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Yukarıdaki bulanan değerler dikkate alınırsa,

$$M=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & e.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & e.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} & \\ \vdots & \iddots & & \\ h_{n,j} & & & \end{pmatrix}$$

elde edilir.

2) $L=\Delta_{Z_e,Z_f}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n-e.Z_f^m\right)$ ve $\left(I_m-f.Z_e^n\right)$ matrislerinin ikisinin de tersi mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M=Z_e^k.M.Z_f^k+\sum_{i=0}^{k-1}Z_e^i.G.H^T.Z_f^i$$

olduğu biliniyor.

Yukarıdaki ifade $k=m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=Z_e^m.M.Z_f^m+\sum_{i=0}^{m-1}Z_e^i.G.H^T.Z_f^i\ .$$

Z_e matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem 1.1.2 den,

$$Z_e^m=e.I_m$$

elde edilir.

Buradan,

$$M = e.I_m.M.Z_f^m + \sum_{i=0}^{m-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i$$

$$= M.e.Z_f^m + \sum_{i=0}^{m-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i,$$

$$M - M.e.Z_f^m = \sum_{i=0}^{m-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i,$$

$$M.\left(I_n - e.Z_f^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f^T, h_j\right)^T$$

ve (1) durumundaki yapılanlar dikkate alınırsa,

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).\,Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T.\,J.\left(I_n - e.Z_f^m\right)^{-1},$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & \cdots & e.g_{2,j} \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \ddots & e.g_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & g_{1,j} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ h_{3,j} & \iddots & f.h_{1,j} & f.h_{2,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \end{pmatrix} .\left(I_n - e.Z_f^m\right)^{-1}$$

elde edilir.

$$M = Z_e^k.M.Z_f^k + \sum_{i=0}^{k-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i$$

ifadesi $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z_e^n.M.Z_f^n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i \ .$$

Z_f matrisi $n x n$ boyutlu olduğundan, Teorem 1.1.2 den,

$$Z_f^n = f.I_n$$

elde edilir. Buradan,

$$M = Z_e^n.M.f.I_n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i,$$

$$M - Z_e^n.f.M = \sum_{i=0}^{n-1} Z_e^i.G.H^T.Z_f^i,$$

$$\left(I_m - f.Z_e^n\right).M = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_e, g_j\right).K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.Z_e^n\right)^{-1} \sum_{J=1}^{\ell} Z_{e,m,n}\left(g_j\right).Z_f\left(J.h_j\right)^T.J,$$

$$M = \left(I_m - f.Z_e^n\right)^{-1}.\sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & e.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & e.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_{n,j} & f.h_{1,j} & \iddots & f.h_{n-1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uyarı 4.1. [5] $\left(I_m - f.Z_e^n\right)^{-1} = V_e^{-1} diag\left(\dfrac{1}{1 - f.s_i^n}\right)_{1 \le i \le m}.V_e$

ve

$$\left(I_n - e.Z_f^m\right)^{-1} = V_f^{-1} diag\left(\dfrac{1}{1 - e.t_i^m}\right)_{1 \le i \le n}.V_f$$

dir. $s_1,...,s_m \rightarrow$ e nin m yinci kökleri ve $t_1,...,t_n \rightarrow$ f nin n yinci kökleridir.

3) $L=\Delta_{Z_e,Z_f}$ operatörü tekil olsun. Bu durumda, M matrisini sadece yer değiştirmesinden elde edemeyiz. M matrisi hakkında daha fazla bilgiye ihtiyacımız vardır.

Aşağıdaki matris denklemi ele alınsın.

$$\Delta_{Z_e,Z}(M)=\Delta_{Z_e,Z_f}(M)+Z_e.M.\begin{pmatrix} & f \\ 0_{n-1} & \end{pmatrix}$$

$$=G.H^T + f.Z_e.M.e_1.e_n^T$$

$\Delta_{Z_e,Z}$ operatörüne Teorem 3.1 uygulanıp Uyarı 3.1 dikkate alınırsa, aşağıdaki sonuç ortaya çıkar:

$$M=\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_e,g_j\right).K_{n,n}\left(Z^T,h_j\right)^T + f.K_{m,n}\left(Z_e,Z_e.M.e_1\right).K_{n,n}\left(Z^T,e_n\right)^T$$

$$=\sum_{j=1}^{\ell} Z_{e,m,n}\left(g_j\right).Z\left(J.h_j\right)^T.J + f.Z_{e,m,n}\left(Z_e.M.e_1\right).J,$$

$$M=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & e.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & e.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & \\ \vdots & \iddots & & \\ h_{n,j} & & & \end{pmatrix}$$

$$+f.\begin{pmatrix} e.M_{m,1} & e.M_{m-1,1} & e.M_{m-2,1} & \cdots \\ M_{1,1} & e.M_{m,1} & e.M_{m-1,1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ M_{m-1,1} & M_{m-2,1} & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.J_n.$$

Burada $\left(M_{i,1}\right)_{1\le i\le m} = M.e_1$, M matrisinin birinci sütunudur.

Uygulama 4.2. $L=\Delta_{Z_e,Z_f^T}$ olsun ve Δ_{Z_e,Z_f^T} operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M = Z_e^k.M.\left(Z_f^T\right)^k + \sum_{i=0}^{k-1} Z_e^i.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k=m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z_e^m.M.\left(Z_f^T\right)^m + \sum_{i=0}^{m-1} Z_e^i.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i .$$

Z_e matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$Z_e^m = e.I_m$$

elde edilir. Buradan,

$$M = e.I_m.M.\left(Z_f^T\right)^m + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f, h_j\right)^T,$$

$$M - M.e.\left(Z_f^T\right)^m = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).Z_{f,n,m}\left(h_j\right)^T,$$

$$M.\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).Z_{f,n,m}\left(h_j\right)^T,$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).Z_{f,n,m}\left(h_j\right)^T.\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1},$$

$$M=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & \cdots & e.g_{2,j} \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \cdots & e.g_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \ddots & g_{1,j}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & f.h_{n,j} & f.h_{n-1,j} & \cdots \\ h_{2,j} & h_{1,j} & f.h_{n,j} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ h_{n,j} & h_{n-1,j} & h_{n-2,j} & \cdots\end{pmatrix}^T.\left(I_n-e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1},$$

$$=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & \cdots & e.g_{2,j} \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \cdots & e.g_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \ddots & g_{1,j}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \ddots & h_{n-1,j} \\ f.h_{n-1,j} & f.h_{n,j} & \ddots & h_{n-2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\end{pmatrix}.\left(I_n-e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1}$$

elde edilir.

Benzer işlemler $k=n$ için de uygulanabilir.

Uygulama 4.3. $L=\Delta_{Z_e^T,Z_f}$ olsun ve $\Delta_{Z_e^T,Z_f}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n-e.Z_f^m\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M=\left(Z_e^T\right)^k.M.Z_f^k+\sum_{i=0}^{k-1}\left(Z_e^T\right)^i.G.H^T.Z_f^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k=m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=\left(Z_e^T\right)^m.M.Z_f^m+\sum_{i=0}^{m-1}\left(Z_e^T\right)^i.G.H^T.Z_f^i\ .$$

Z_e^T matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$\left(Z_e^T\right)^m=e.I_m$$

elde edilir. Buradan,

$$M = e.I_m.M.\,Z_f^m + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M - M.e.Z_f^m = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).\left(J.Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)\right)^T,$$

$$M.\left(I_n - e.Z_f^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} J.\,Z_e\left(J.g_j\right).J.\,Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T.J^T,$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).Z_{f,n,m}\left(J.h_j\right)^T.\,J.\left(I_n - e.Z_f^m\right)^{-1}.$$

$$J.\,Z_e\left(J.g_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} g_{m,j} & e.\,g_{1,j} & \cdots & e.\,g_{m-1,j} \\ g_{m-1,j} & g_{m,j} & \ddots & e.\,g_{m-2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & e.\,g_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & e.\,g_{1,j} & \iddots & e.\,g_{m-1,j} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & e.\,g_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & e.g_{1,j} & \iddots & e.\,g_{m-1,j} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ h_{3,j} & \iddots & f.h_{1,j} & f.h_{2,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \end{pmatrix} . \left(I_n - e.Z_f^m\right)^{-1}$$

elde edilir.

Benzer işlemler $k = n$ için de uygulanabilir.

Uygulama 4.4. $L = \Delta_{Z_e^T, Z_f^T}$ olsun ve $\Delta_{Z_e^T, Z_f^T}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M = \left(Z_e^T\right)^k .M .\left(Z_f^T\right)^k + \sum_{i=0}^{k-1}\left(Z_e^T\right)^i .G.H^T .\left(Z_f^T\right)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = \left(Z_e^T\right)^m .M .\left(Z_f^T\right)^m + \sum_{i=0}^{m-1}\left(Z_e^T\right)^i .G.H^T .\left(Z_f^T\right)^i \ .$$

Z_e^T matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$\left(Z_e^T\right)^m = e.I_m$$

elde edilir. Buradan,

$$M = e.I_m.M.\left(Z_f^T\right)^m + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f, h_j\right)^T,$$

$$M - M.e.\left(Z_f^T\right)^m = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f, h_j\right)^T,$$

$$M.\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(Z_f, h_j\right)^T,$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).Z_{f,n,m}\left(h_j\right)^T.\left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1},$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & e.g_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & e.g_{1,j} & \iddots & e.g_{m-1,j} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \ddots & h_{n-1,j} \\ f.h_{n-1,j} & f.h_{n,j} & \ddots & h_{n-2,j} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} . \left(I_n - e.\left(Z_f^T\right)^m\right)^{-1}$$

elde edilir.

Benzer işlemler $k = n$ için de uygulanabilir.

Uyarı 4.2. [8] Δ_{Z_e, Z_f^T} , $\Delta_{Z_e^T, Z_f}$, $\Delta_{Z_e^T, Z_f^T}$ operatörleri M matrisine uygulandığında M matrisi aşağıdaki denklemlerden ve Δ_{Z_e, Z_f} den faydalanılarak tekrar elde edilebilir.

$$\Delta_{Z_e, Z_f}(M.J) = \Delta_{Z_e, Z_f^T}(M).\, J = G.\,(J.H)^T ,$$

$$\Delta_{Z_e, Z_f}(J.M) = J.\Delta_{Z_e^T, Z_f}(M) = (J.G).H^T ,$$

$$\Delta_{Z_e, Z_f}(J.M.J) = J.\Delta_{Z_e^T, Z_f^T}(M)\,.J = (J.G).(J.H)^T .$$

Uygulama 4.5. $L = \nabla_{Z_e, Z_f}$ olsun ve ∇_{Z_e, Z_f} operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $(e \neq 0)$ olmak üzere, $\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^T\right)^n\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M = A^{-k}.M.B^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}.\nabla_{A,B}(M).B^i$$

bilindiğinden

$$M = Z_e^{-k}.M.Z_f^k + \sum_{i=0}^{k-1} Z_e^{-i-1}.G.H^T.Z_f^{\,i}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z_e^{-n}.M.Z_f^n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_e^{-i-1}.G.H^T.Z_f{}^i .$$

Teorem 1.1.2 den,

$$Z_f^n = f.I_n$$

ve

$$Z_e^{-1} = Z_{\frac{1}{e}}^T$$

olduğu biliniyor. Bu özellikler dikkate alınırsa,

$$M = \left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^n .M.f.I_n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_{\frac{1}{e}}^T.\left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^i G.H^T.Z_f{}^i,$$

$$M - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^n .M = Z_{\frac{1}{e}}^T.\sum_{i=0}^{n-1} \left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^i G.H^T.Z_f{}^i,$$

$$\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^n \right).M = Z_{\frac{1}{e}}^T.\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_{\frac{1}{e}}^T, g_j \right).K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j \right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^T \right)^n \right)^{-1}.Z_{\frac{1}{e}}^T \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(J.g_j \right).Z_f\left(J.h_j \right)^T.J$$

elde edilir.

$$Z_{\frac{1}{e}}^{T}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e}\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ \frac{1}{e} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

ve

$J.Z_{e,m,n}\left(J.g_j\right)$ ifadesinin bilindiği dikkate alınırsa, $J.Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(J.g_j\right)$ ifadesini bulmak için $J.Z_{e,m,n}\left(J.g_j\right)$ matrisinde e yerine $\frac{1}{e}$ yazılır. Buradan,

$$J.Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(J.g_j\right)=\begin{pmatrix}g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j}\\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & \frac{1}{e}g_{1,j}\\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ g_{m,j} & \frac{1}{e}g_{1,j} & \iddots & \frac{1}{e}g_{m-1,j}\end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bulunan bu ifadeler dikkate alınırsa,

$$M=\left(I_m-f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T}\right)^{n}\right)^{-1}.Z_{\frac{1}{e}}^{T}\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix}g_{1,j} & g_{2,j} & g_{3,j} & \cdots\\ g_{2,j} & g_{3,j} & g_{4,j} & \vdots\\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ g_{m,j} & \frac{1}{e}g_{1,j} & \frac{1}{e}g_{2,j} & \cdots\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j}\\ h_{2,J} & \cdots & h_{n,j} & f.h_{1,j}\\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ h_{n,j} & f.h_{1,j} & \iddots & f.h_{n-1,j}\end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.6. $L=\nabla_{Z_e,Z_f^T}$ olsun ve ∇_{Z_e,Z_f^T} operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $(e\neq 0)$ olmak üzere, $\left(I_m-f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T}\right)^{n}\right)^{-1}$ mevcuttur.

Sonuç 3.1 den,

$$M = Z_e^{-k}.M.\left(Z_f^T\right)^k + \sum_{i=0}^{k-1} Z_e^{-i-1}.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z_e^{-n}.M.\left(Z_f^T\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_e^{-i-1}.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i .$$

Teorem 1.1.2 den,

$$Z_e^m = e.I$$

ve

$$Z_e^{-1} = Z_{\frac{1}{e}}^T$$

olduğu biliniyor.

Bu özellikler dikkate alınırsa,

$$M = \left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{n} .M.f.I_n + \sum_{i=0}^{n-1} Z_{\frac{1}{e}}^{T} . \left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{i} .G.H^{T}.\left(Z_f^{T} \right)^{i},$$

$$M - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{n} .M = Z_{\frac{1}{e}}^{T} . \sum_{i=0}^{n-1} \left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{i} .G.H^{T}.\left(Z_f^{T} \right)^{i},$$

$$\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{n} \right).M = Z_{\frac{1}{e}}^{T} . \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T}, g_j \right).K_{n,n}\left(Z_f, h_j \right)^{T},$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{n} \right)^{-1} .Z_{\frac{1}{e}}^{T} . \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(J.g_j \right).Z_f\left(h_j \right)^{T},$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}^{T} \right)^{n} \right)^{-1} .Z_{\frac{1}{e}}^{T} . \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & g_{3,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{3,j} & g_{4,j} & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & \frac{1}{e} g_{1,j} & \frac{1}{e} g_{2,j} & \cdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \cdots & h_{n-1,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f.h_{2,j} & f.h_{3,j} & \ddots & h_{1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.7. $L = \nabla_{Z_e^T, Z_f}$ olsun ve $\nabla_{Z_e^T, Z_f}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $(e \neq 0)$ olmak üzere, $\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}} \right)^{n} \right)^{-1}$ mevcuttur.

Sonuç 3.1 den,

$$M = \left(Z_e^{T} \right)^{-k} .M.Z_f^{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(Z_e^{T} \right)^{-i-1} .G.H^{T}.Z_f{}^{i}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = \left(Z_e^T\right)^{-n}.M.Z_f^n + \sum_{i=0}^{n-1}\left(Z_e^T\right)^{-i-1}.G.H^T.Z_f{}^i\ .$$

Teorem 1.1.2 den,

$$Z_f^n = f.I_n$$

ve

$$\left(Z_e^T\right)^{-1} = Z_{\frac{1}{e}}$$

olduğu biliniyor. Bu özellikler dikkate alınırsa,

$$M = \left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n.M.f.I_n + Z_{\frac{1}{e}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^i.G.H^T.\left(Z_f\right)^i,$$

$$M - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n.M = Z_{\frac{1}{e}}.\sum_{i=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^i.G.H^T.\left(Z_f\right)^i,$$

$$\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right).M = Z_{\frac{1}{e}}\sum_{j=1}^{\ell}K_{m,n}\left(Z_{\frac{1}{e}}, g_j\right).K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right)^{-1}.Z_{\frac{1}{e}}.\sum_{j=1}^{\ell}Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(g_j\right).Z_f\left(J.h_j\right)^T.J$$

elde edilir.

$Z_{e,m,n}(g_j)$ ifadesinin bilindiği dikkate alınırsa, $Z_{\frac{1}{e},m,n}(g_j)$ ifadesini bulmak için $Z_{e,m,n}(g_j)$ matrisinde e yerine $\frac{1}{e}$ yazılır. Buradan,

$$M=\left(I_m-f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right)^{-1}.Z_{\frac{1}{e}}.\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & \frac{1}{e}g_{m,j} & \frac{1}{e}.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \frac{1}{e}.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_{n,j} & f.h_{1,j} & \cdots & f.h_{n-1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.8. $L=\nabla_{Z_e^T,Z_f^T}$ olsun ve $\nabla_{Z_e^T,Z_f^T}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $(e\neq 0)$ olmak üzere, $\left(I_m-f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M=\left(Z_e^T\right)^{-k}.M.\left(Z_f^T\right)^k+\sum_{i=0}^{k-1}\left(Z_e^T\right)^{-i-1}.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k=n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=\left(Z_e^T\right)^{-n}.M.\left(Z_f^T\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\left(Z_e^T\right)^{-i-1}.G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i .$$

Teorem 1.1.2 den,

$$\left(Z_f^T\right)^n=f.I_n$$

ve

$$\left(Z_e^T\right)^{-1} = Z_{\frac{1}{e}}$$

olduğu biliniyor. Bu özellikler dikkate alınırsa,

$$M = \left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n .M.f.I_n + Z_{\frac{1}{e}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^i .G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i,$$

$$M - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n .M = Z_{\frac{1}{e}} . \sum_{i=0}^{n-1} \left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^i .G.H^T.\left(Z_f^T\right)^i,$$

$$\left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right).M = Z_{\frac{1}{e}} \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(Z_{\frac{1}{e}}, g_j\right).K_{n,n}\left(Z_f, h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right)^{-1} .Z_{\frac{1}{e}} . \sum_{j=1}^{\ell} Z_{\frac{1}{e},m,n}\left(g_j\right).Z_f\left(h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.\left(Z_{\frac{1}{e}}\right)^n\right)^{-1} .Z_{\frac{1}{e}} . \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & \frac{1}{e} g_{m,j} & \frac{1}{e}.g_{m-1,j} & \cdots \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \frac{1}{e}.g_{m,j} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \cdots & h_{n-1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ f.h_{2,j} & f.h_{3,j} & \iddots & h_{1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.9. $L = \Delta_{D(v),Z_f}$ olsun ve $\Delta_{D(v),Z_f}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda $\left(I_m - f.D(v)^n\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M = D(v)^k .M.Z_f^k + \sum_{i=0}^{k-1} D(v)^i .G.H^T.Z_f{}^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = D(v)^n . M . Z_f^n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^i . G . H^T . Z_f^{\ i} \ .$$

Z_f matrisi $n x n$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$Z_f^n = f . I_n$$

elde edilir. Buradan,

$$M = D(v)^n . M . f . I_n + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M - f . D(v)^n . M = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$\left(I_m - f . D(v)^n\right) M = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f . D(v)^n\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right) . V_{m,n}(v) . \left(J . Z_f\left(J . h_j\right)\right)^T,$$

$$M = diag\left(\frac{1}{1 - f . v_i^n}\right)_{1 \le i \le m} . \sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right) . V_{m,n}(v) . Z_f\left(J . h_j\right)^T . J$$

bulunur.

$$diag\left(\frac{1}{1-f.v_i^n}\right)_{1\le i\le m}.D(g_j)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-f.v_1^n} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{1-f.v_2^n} & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{1-f.v_m^n}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}g_{1,j} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & g_{2,j} & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & g_{m,j}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{g_{1,j}}{1-f.v_1^n} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{g_{2\,j}}{1-f.v_2^n} & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{1-f.v_m^n}\end{pmatrix}$$

ve

$$V_{m,n}(v)=\begin{pmatrix}1 & v_1 & \cdots & v_1^{n-1}\\ 1 & v_2 & \cdots & v_2^{n-1}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ 1 & v_m & \cdots & v_m^{n-1}\end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix}\frac{g_{1,j}}{1-f.v_1^n} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{g_{2,j}}{1-f.v_2^n} & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{1-f.v_m^n}\end{pmatrix}.V_{m,n}(v).\begin{pmatrix}h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j}\\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j}\\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ h_{n,j} & f.h_{1,j} & \cdots & f.h_{n-1,j}\end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.10. $L=\Delta_{D(v),Z_f^T}$ olsun ve $\Delta_{D(v),Z_f^T}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda $\left(I_m - f.D(v)^n\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M = D(v)^k . M . \left(Z_f^T\right)^k + \sum_{i=0}^{k-1} D(v)^i . G . H^T . \left(Z_f^T\right)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = D(v)^n . M . \left(Z_f^T\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^i . G . H^T . \left(Z_f^T\right)^i .$$

Z_f^T matrisi $n x n$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$\left(Z_f^T\right)^n = f . I_n$$

elde edilir. Buradan,

$$M = D(v)^n . M . f . I_n + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f, h_j\right)^T ,$$

$$M - f . D(v)^n . M = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f, h_j\right)^T ,$$

$$\left(I_m - f . D(v)^n\right) M = \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v), g_j\right) . K_{n,n}\left(Z_f, h_j\right)^T ,$$

$$M = \left(I_m - f . D(v)^n\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right) . V_{m,n}(v) . Z_f\left(h_j\right)^T ,$$

$$M = diag\left(\frac{1}{1 - f . v_i^n}\right)_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right) . V_{m,n}(v) . Z_f\left(h_j\right)^T ,$$

$$M=\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} \frac{g_{1,j}}{1-f.v_1^n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{g_{2,j}}{1-f.v_2^n} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{1-f.v_m^n} \end{pmatrix}.V_{m,n}(v).\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \ddots & h_{n-1,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f.h_{2,j} & f.h_{3,j} & \cdots & h_{1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.11. $L=\Delta_{Z_e\,,\,D(v)}$ olsun ve $\Delta_{Z_e\,,\,D(v)}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n-e.D(v)^{\,m}\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M=Z_e^k.M.D(v)^k+\sum_{i=0}^{k-1}Z_e^i.G.H^T.D(v)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k=m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=Z_e^m.M.D(v)^m+\sum_{i=0}^{m-1}Z_e^i.G.H^T.D(v)^i\ .$$

Z_e matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$Z_e^m=e.I_m$$

elde edilir.

Buradan,

$$M = e.I_m.M.\,D(v)^m + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e\,,\,g_j\right).K_{n,m}\left(D^T(v),h_j\right)^T,$$

$$M - M.e.D(v)^m = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).K_{n,m}\left(D^T(v),h_j\right)^T,$$

$$M.\left(I_n - e.\,D(v)^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).K_{n,m}\left(D^T(v),h_j\right)^T,$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).\left(D^T\left(h_j\right).\,V_{n,m}(v)\right)^T.\left(I_n - e.\,D(v)^m\right)^{-1},$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).V_{n,m}(v)^T.D\left(h_j\right).\,diag\left(\frac{1}{1-e.v_i^m}\right)_{1\le i\le n}$$

bulunur.

$$D\left(h_j\right).\,diag\left(\frac{1}{1-e.v_i^m}\right)_{1\le i\le n} = \begin{pmatrix} h_{1,j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2,j} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & h_{n,j} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{1-e.v_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-e.v_2^m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{1-e.v_n^m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{h_{1,j}}{1-e.v_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{h_{2,j}}{1-e.v_2^m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{h_{n,j}}{1-e.v_n^m} \end{pmatrix}$$

ve

$$V_{n,m}(v)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{m-1} & v_2^{m-1} & \cdots & v_n^{m-1} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & \cdots & e.g_{2,j} \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \cdots & e.g_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \ddots & g_{1,j} \end{pmatrix} . V_{n,m}(v)^T . \begin{pmatrix} \frac{h_{1,j}}{1-e.v_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{h_{2,j}}{1-e.v_2^m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{h_{n,j}}{1-e.v_n^m} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.12. $L = \Delta_{Z_e^T, D(v)}$ olsun ve $\Delta_{Z_e^T, D(v)}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n - e.D(v)^m\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 3.1 den,

$$M = \left(Z_e^T\right)^k .M.D(v)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \left(Z_e^T\right)^i .G.H^T.D(v)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = \left(Z_e^T\right)^m .M.D(v)^m + \sum_{i=0}^{m-1} \left(Z_e^T\right)^i .G.H^T.D(v)^i \ .$$

Z_e^T matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$\left(Z_e^T\right)^m = e.I_m$$

elde edilir. Buradan,

$$M = e.I_m.M.\,D(v)^m + \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(D^T(v), h_j\right)^T,$$

$$M - M.e.D(v)^m = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).\left(D\left(h_j\right).V_{n,m}(v)\right)^T,$$

$$M.\left(I_n - e.D(v)^m\right) = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).\left(D\left(h_j\right).V_{n,m}(v)\right)^T,$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).\left(D\left(h_j\right).V_{n,m}(v)\right)^T.\left(I_n - e.D(v)^m\right)^{-1},$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).V_{n,m}(v)^T.D\left(h_j\right).\,diag\left(\frac{1}{1-e.v_i^m}\right)_{1\le i\le n},$$

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & e.g_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & e.g_{1,j} & \iddots & e.g_{m-1,j} \end{pmatrix}.V_{n,m}(v)^T.\begin{pmatrix} \frac{h_{1,j}}{1-e.v_1^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{h_{2,j}}{1-e.v_2^m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{h_{n,j}}{1-e.v_n^m} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uyarı 4.3. [8] $\Delta_{D(v),Z_f^T}$, $\Delta_{Z_e,D(v)}$, $\Delta_{Z_e^T,D(v)}$ operatörleri M matrisine uygulandığında M matrisi aşağıdaki denklemler kullanılarak ve $\Delta_{D(v),Z_f}$ den faydalanılarak tekrar elde edilebilir.

$$\Delta_{D(v),Z_f}(M.J) = \Delta_{D(v),Z_f^T}(M).J = G(J.H)^T,$$

$$\Delta_{D(v),Z_e}(M^T.J) = \left(\Delta_{Z_e,D(v)}(M)\right)^T.J = H(J.G)^T,$$

$$\Delta_{D(v),Z_e}(M^T) = \left(\Delta_{Z_e^T,D(v)}(M)\right)^T = H.G^T.$$

Uygulama 4.13. $L = \nabla_{D(v),Z_f}$ olsun ve $\nabla_{D(v),Z_f}$ tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_m - f.D(v)^{-n}\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M = D(v)^{-k}.M.Z_f^k + \sum_{i=0}^{k-1} D(v)^{-i-1}.G.H^T.Z_f{}^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = D(v)^{-n}.M.Z_f^n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-i-1}.G.H^T.Z_f{}^i.$$

Z_f matrisi nxn boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$Z_f^n = f.I_n$$

elde edilir.

Buradan,

$$M = D(v)^{-n}.M.f.I_n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-1}.D(v)^{-i}.G.H^T.Z_f^{\ i},$$

$$M - f.D(v)^{-n}.M = D(v)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-i}.G.H^T.Z_f^{\ i},$$

$$\left(I_m - f.D(v)^{-n}\right).M = D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}\left(D(v)^{-1}, g_j\right).K_{n,n}\left(Z_f^T, h_j\right)^T,$$

$$M = \left(I_m - f.D(v)^{-n}\right)^{-1}.D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right).V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right).Z_f\left(J.h_j\right)^T.J,$$

$$M = diag\left(\frac{1}{1-\frac{f}{v_i^n}}\right)_{1\le i\le m}.D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} D\left(g_j\right).V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right).Z_f\left(J.h_j\right)^T.J.$$

$$diag\left(\frac{1}{1-\frac{f}{v_i^n}}\right)_{1\le i\le m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{f}{v_1^n}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{f}{v_2^n}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{1-\frac{f}{v_m^n}} \end{pmatrix},$$

$$V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v_1} & \cdots & \frac{1}{v_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{v_2} & \cdots & \frac{1}{v_2^{n-1}} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{v_m} & \cdots & \frac{1}{v_m^{n-1}} \end{pmatrix}$$

ve

$$D(v)^{-1}.D(g_j)=\begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{v_m} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} g_{1,j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2,j} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & g_{m,j} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{g_{1,j}}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{g_{2,j}}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{v_m} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M = diag\left(\frac{1}{1-\frac{f}{v_i^n}} \right)_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{\ell} \begin{pmatrix} \frac{g_{1,j}}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{g_{2,j}}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{v_m} \end{pmatrix} .V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right). \begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ h_{2,j} & \iddots & h_{n,j} & f.h_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_{n,j} & f.h_{1,j} & \cdots & f.h_{n-1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.14. $L=\nabla_{D(v),Z_f^T}$ olsun ve $\nabla_{D(v),Z_f^T}$ tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_m - f.D(v)^{-n}\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M = D(v)^{-k}.M.(Z_f^T)^k + \sum_{i=0}^{k-1} D(v)^{-i-1}.G.H^T.(Z_f^T)^i$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = n$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = D(v)^{-n}.M.(Z_f^T)^n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-i-1}.G.H^T.(Z_f^T)^i .$$

Z_f^T matrisi $n x n$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$(Z_f^T)^n = f.I_n$$

elde edilir. Buradan,

$$M = D(v)^{-n}.M.f\,I_n + \sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-1}.D(v)^{-i}G.H^T.(Z_f^T)^i,$$

$$M - f.D(v)^{-n}.M = D(v)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} D(v)^{-i}G.H^T.(Z_f^T)^i,$$

$$(I_m - f.D(v)^{-n}).M = D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} K_{m,n}(D(v)^{-1}, g_j).K_{n,n}(Z_f, h_j)^T,$$

$$M = (I_m - f.D(v)^{-n})^{-1}.D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} D(g_j).V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right).Z_f(h_j)^T ,$$

$$M = diag\left(\frac{1}{1-\frac{f}{v_i^n}}\right)_{1\le i\le m}.D(v)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell} D(g_j).V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right).Z_f(h_j)^T ,$$

$$M = diag\left(\frac{1}{1-\frac{f}{v_i^n}}\right)_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} \frac{g_{1,j}}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{g_{2,j}}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{g_{m,j}}{v_m} \end{pmatrix} .V_{m,n}\left(\frac{1}{v}\right).\begin{pmatrix} h_{1,j} & h_{2,j} & \cdots & h_{n,j} \\ f.h_{n,j} & h_{1,j} & \ddots & h_{n-1,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f.h_{2,j} & f.h_{3,j} & \cdots & h_{1,j} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Uygulama 4.15. $L = \nabla_{Z_e,D(v)}$ olsun ve $\nabla_{Z_e,D(v)}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n - e.D(v)^{-m}\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M = A^k.M.B^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} A^i.\nabla_{A,B}(M).B^{-i-1}$$

bilindiğinden

$$M = Z_e^k.M.D(v)^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} Z_e^i.G.H^T.D(v)^{-i-1}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k = m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M = Z_e^m.M.D(v)^{-m} - \sum_{i=0}^{m-1} Z_e^i.G.H^T.D(v)^{-i-1}.$$

Z_e matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$Z_e^m = e.I_m$$

elde edilir.

Buradan,

$$M = e.I_m.M.D(v)^{-m} - \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e, g_j\right).K_{n,m}\left(D^{-1}(v), h_j\right)^T.D^{-1}(v),$$

$$M - M.e.D(v)^{-m} = -\sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).\left(D\left(h_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^T.D^{-1}(v),$$

$$M.\left(I_n - e.D(v)^{-m}\right) = -\sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v),$$

$$M = -\sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v).\left(I_n - e.D(v)^{-m}\right)^{-1},$$

$$M = -\sum_{j=1}^{\ell} Z_e\left(g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v).diag\left(\frac{1}{1-\frac{e}{v_i^m}}\right)_{1 \le i \le n}$$

bulunur.

$$diag\left(\frac{1}{1-\frac{e}{v_i^m}}\right)_{1 \le i \le n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{e}{v_1^m}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{e}{v_2^m}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{1-\frac{e}{v_n^m}} \end{pmatrix}$$

ve

$$V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{v_1} & \frac{1}{v_2} & \cdots & \frac{1}{v_n^{m-1}} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{v_1^{m-1}} & \frac{1}{v_2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{v_n^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M=-\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & e.g_{m,j} & \cdots & e.g_{2,j} \\ g_{2,j} & g_{1,j} & \cdots & e.g_{3,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{m,j} & g_{m-1,j} & \ddots & g_{1,j} \end{pmatrix}.V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^{T}.\begin{pmatrix} \frac{h_{1,j}}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{h_{2,j}}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{h_{n,j}}{v_n} \end{pmatrix}.diag\left(\frac{1}{1-\frac{e}{v_i^m}}\right)_{1\le i\le n}$$

elde edilir.

Uygulama 4.16. $L=\nabla_{Z_e^T,D(v)}$ olsun ve $\nabla_{Z_e^T,D(v)}$ operatörü tekil olmasın. Bu durumda, $\left(I_n-e.D(v)^{-m}\right)^{-1}$ mevcuttur. Sonuç 3.1 den,

$$M=\left(Z_e^T\right)^k.M.D(v)^{-k}-\sum_{i=0}^{k-1}\left(Z_e^T\right)^i.G.H^T.D(v)^{-i-1}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade $k=m$ için uygulansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$M=\left(Z_e^T\right)^m.M.D(v)^{-m}-\sum_{i=0}^{m-1}\left(Z_e^T\right)^i.G.H^T.D(v)^{-i-1}.$$

Z_e^T matrisi $m\,x\,m$ boyutlu olduğundan, Teorem1.1.2 den,

$$\left(Z_e^T\right)^m = e.I_m$$

elde edilir. Buradan,

$$M = e.I_m.M.D(v)^{-m} - \sum_{j=1}^{\ell} K_{m,m}\left(Z_e^T, g_j\right).K_{n,m}\left(D^{-1}(v), h_j\right)^T.D^{-1}(v),$$

$$M - M.e.D(v)^{-m} = -\sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).\left(D\left(h_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^T.D^{-1}(v),$$

$$M.\left(I_n - e.D(v)^{-m}\right) = -\sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v),$$

$$M = -\sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v).\left(I_n - e.D(v)^{-m}\right)^{-1},$$

$$M = -\sum_{j=1}^{\ell} J.Z_e\left(J.g_j\right).V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.D\left(h_j\right).D^{-1}(v).diag\left(\frac{1}{1-\dfrac{e}{v_i^m}}\right)_{1\le i\le n},$$

$$M = -\sum_{j=1}^{\ell}\begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \cdots & g_{m,j} \\ g_{2,j} & g_{3,j} & \iddots & e.g_{1,j} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ g_{m,j} & e.g_{1,j} & \iddots & e.g_{m-1,j}\end{pmatrix}.V_{n,m}\left(\frac{1}{v}\right)^T.\begin{pmatrix} \dfrac{h_{1,j}}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{h_{2,j}}{v_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dfrac{h_{n,j}}{v_n}\end{pmatrix}.diag\left(\frac{1}{1-\dfrac{e}{v_i^m}}\right)_{1\le i\le n}$$

elde edilir.

Uyarı 4.4. [8] $\nabla_{D(v), Z_f^T}$, $\nabla_{Z_e, D(v)}$, $\nabla_{Z_e^T, D(v)}$ operatörleri M matrisine uygulandığında M matrisi aşağıdaki denklemlerden ve $\nabla_{D(v), Z_f}$ den faydalanılarak tekrar elde edilebilir.

$$\nabla_{D(v),Z_f}(M.J)=\nabla_{D(v),Z_f^T}(M).J=G.(J.H)^T,$$

$$\nabla_{D(v),Z_e}(M^T.J)=-(\nabla_{Z_e,D(v)}(M))^T.J=-H.(J.G)^T,$$

$$\nabla_{D(v),Z_e}(M^T)=-(\nabla_{Z_e^T,D(v)}(M))^T=-H.G^T.$$

Uygulama 4.17. $L=\Delta_{D(s),D(t)}$ olsun. $M=(m_{i,j}),\ 1\le i\le m\,;\ 1\le j\le n$ ve $D(s)\in F^{m\,x\,m}$, $D(t)\in F^{n\,x\,n}$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta_{D(s),D(t)}(M)=M-D(s).M.D(t) \tag{4.1}$$

elde edilir.

$$\Delta_{D(s),D(t)}(M)=G.H^T=\sum_{k=1}^{\ell} g_{i,k}.h_{j,k} \tag{4.2}$$

olduğu biliniyor.

İlk olarak (4.1) ifadesi açık şekilde yazılsın.

$$D(s).M.D(t)=\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_m \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} s_1\,m_{11}t_1 & s_1\,m_{12}t_2 & \cdots & s_1\,m_{1n}t_n \\ s_2\,m_{21}t_1 & s_2\,m_{22}t_2 & \cdots & s_2\,m_{2n}t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m\,m_{m1}t_1 & s_m\,m_{m2}t_2 & \cdots & s_m\,m_{mn}t_n \end{pmatrix}$$

ve buradan,

$$M-D(s).M.D(t)=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} s_1 m_{11} t_1 & s_1 m_{12} t_2 & \cdots & s_1 m_{1n} t_n \\ s_2 m_{21} t_1 & s_2 m_{22} t_2 & \cdots & s_2 m_{2n} t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m m_{m1} t_1 & s_m m_{m2} t_2 & \cdots & s_m m_{mn} t_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} m_{11}-s_1 m_{11} t_1 & m_{12}-s_1 m_{12} t_2 & \cdots & m_{1n}-s_1 m_{1n} t_n \\ m_{21}-s_2 m_{21} t_1 & m_{22}-s_2 m_{22} t_2 & \cdots & m_{2n}-s_2 m_{2n} t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1}-s_m m_{m1} t_1 & m_{m2}-s_m m_{m2} t_2 & \cdots & m_{mn}-s_m m_{mn} t_n \end{pmatrix}$$

bulunur.

$s_i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$ ve $t_k\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ lar $\forall i,k$ için birbirinden farklıdırlar. Bundan dolayı,

$$m_{ik}-s_i m_{ik} t_k=(1-s_i t_k)m_{ik}, \forall i,k \text{ için}$$

(4.2) den,

$$m_{ik}=\frac{1}{(1-s_i t_k)}\sum_{j=1}^{\ell} g_{i,j}.h_{k,j}, \ \forall i,k \text{ için } s_i t_k \neq 1$$

elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{\ell} g_{i,j}.h_{k,j}=\sum_{j=1}^{\ell} D(g_j).D(h_j)$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$M=\sum_{j=1}^{\ell} D(g_j).\frac{1}{(1-s_i t_k)}.D(h_j), \ \forall i,k \text{ için}$$

elde edilir.

Uygulama 4.18. $L=\nabla_{D(s),D(t)}$ olsun. $M=\left(m_{i,j}\right), 1\le i\le m\,;\; 1\le j\le n$ ve $D(s)\in F^{m\,x\,m}$, $D(t)\in F^{n\,x\,n}$ olsun. Buradan,

$$\nabla_{D(s),D(t)}(M)=D(s).M-M.D(t) \tag{4.3}$$

elde edilir.

$$\nabla_{D(s),D(t)}(M)=G.H^{T}=\sum_{k=1}^{\ell} g_{i,k}.h_{j,k} \tag{4.4}$$

olduğu biliniyor.

İlk olarak (4.3) ifadesi açık şekilde yazılsın.

$$D(s).M=\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_m \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} s_1\,m_{11} & s_1\,m_{12} & \cdots & s_1\,m_{1n} \\ s_2\,m_{21} & s_2\,m_{22} & \cdots & s_2\,m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m\,m_{m1} & s_m\,m_{m2} & \cdots & s_m\,m_{mn} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Ayrıca,

$$M.D(t)=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}t_1 & m_{12}t_2 & \cdots & m_{1n}t_n \\ m_{21}t_1 & m_{22}t_2 & \cdots & m_{2n}t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1}t_1 & m_{m2}t_2 & \cdots & m_{mn}t_n \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu iki eşitlikten,

$$D(s).M - M.D(t) = \begin{pmatrix} s_1 m_{11} & s_1 m_{12} & \cdots & s_1 m_{1n} \\ s_2 m_{21} & s_2 m_{22} & \cdots & s_2 m_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m m_{m1} & s_m m_{m2} & \cdots & s_m m_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{11}t_1 & m_{12}t_2 & \cdots & m_{1n}t_n \\ m_{21}t_1 & m_{22}t_2 & \cdots & m_{2n}t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1}t_1 & m_{m2}t_2 & \cdots & m_{mn}t_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 m_{11} - m_{11}t_1 & s_1 m_{12} - m_{12}t_2 & \cdots & s_1 m_{1n} - m_{1n}t_n \\ s_2 m_{21} - m_{21}t_1 & s_2 m_{22} - m_{22}t_2 & \cdots & s_2 m_{2n} - m_{2n}t_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m m_{m1} - m_{m1}t_1 & s_m m_{m2} - m_{m2}t_2 & \cdots & s_m m_{mn} - m_{mn}t_n \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$s_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$ ve $t_k \ \left(k=\overline{1,n}\right)$ lar $\forall i,k$ için birbirinden farklıdırlar. Bundan dolayı,

$s_i m_{ik} - m_{ik} t_k = (s_i - t_k) m_{ik}, \forall i,k$ için

(4.4) den,

$$m_{ik} = \frac{1}{(s_i - t_k)} \sum_{j=1}^{\ell} g_{i,j} . h_{k,j} \,, \quad \forall i,k \text{ için } s_i \neq t_k$$

elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{\ell} g_{i,j} . h_{k,j} = \sum_{j=1}^{\ell} D(g_j) . D(h_j)$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$M = \sum_{j=1}^{\ell} D(g_j) . C(s,t) . D(h_j), \ \forall i,k \text{ için}$$

elde edilir.

Uyarı 4.5. [5] M kare matris olmak üzere $\Delta_{Z^T,Z}$ [10], Δ_{Z,Z^T} [10], $\nabla_{D(v),Z^T}$ [14], $\nabla_{Z_1,Z_{-1}}$ [15], $\nabla_{Z,Z}$ [1,16], ∇_{Z^T,Z^T} [1,16], $\Delta_{Z,Z}$ [1,16], Δ_{Z^T,Z^T} [1,16], $\Delta_{Z_e,Z^T_{\frac{1}{e}}}$ $(e \neq 0)$ [6] ve $\Delta_{D(v),Z^T_{\frac{1}{e}}}$ $(e \neq 0)$ [6] operatörleri M matrisine uygulandığında M matrisi tekrar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Bini, D.A., Pan, V.Y., “Polynomial and Matrix Computation”,
Vol. 1:Fundamental Algorithms, ***Birkhäuser***, 1-408, (1994).

[2] Heinig, G., Rost, K., “Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices Operators”, Oper. Theory Adv. Appl., 13, ***Birkhäuser***, (1984).

[3] Kailath, T., Sayed, A.H., “Displacement Structure: Theory and Applications”, ***SIAM Review***, 37, 3, 297-386, (1995).

[4] Olshevsky, V., "Pivoting for structured matrices with applications," ***Linear Algebra and Its Applications***, (2000).

[5] Pan, V.Y., Wang, X., "Inversion of Displacement Operators", ***SIAM J. on Matrix Analysis and Applications***, 24, 3, 660–677, (2003).

[6] Gohberg, I., Olshevsky, V., “Complexity of Multiplication with Vectors for Structured Matrices”, ***Linear Algebra Appl***., 202, 163-192, (1994).

[7] Cline, R.E., Plemmons, J., Worm, G., “Generalized Inverses of Certain Toeplitz Matrices”, ***Linear Algebra Appl.***, 8, 25-33, (1974).

[8] Pan, V.Y.,“Structured Matrices and Polynomials: Unified Superfast Algorithms”, ***Birkhäuser-Verlag***, 1-177, (2001)

[9] Olshevsky, V., Shokrollahi, M.A., “A Superfast Algorithm for Confluent Rational Tangential Interpolation Problem via Matrix-Vector Multiplication for Confluent Cauchy-like Matrices”, In Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering I, ***American Mathematical Society***, 280, 32-46, (2001).

[10] Kailath, T., Kung, S.Y., Morf, M., “Displacement Ranks of Matrices and Linear Equations”, ***J. Math. Anal. Appl.***, 68, 2, 395407, (1979).

[11] Gohberg, I., Olshevsky, V., “Circulants, Displacement and Decompositions of Matrices”, ***Integral Equations and Operator Theory***, 15, 5, 730-743, (1992).

[12] Wood, D.H., “Product rules for the displacement of nearly-Toeplitz matrices”, ***Linear Algebra Appl.***, 188/189, 641–663, (1993).

[13] Pan, V.Y., Rami, Y., and Wang, X., “Structured matrices and Newton’s iteration: Unified approach”, ***Linear Algebra Appl.***, 343/344, 233–265, (2002).

[14] Gohberg, I., Kailath, T., Koltracht, I., and Lancaster, P., “Linear complexity parallel algorithms for linear systems of equations with recursive structure”, ***Algebra Appl***., 88/89, 271-315, (1987).

[15] Ammar, G., Gader, P., “A variant of the Gohberg–Semencul formula involving circulant matrices”, ***SIAM J. Matrix Anal. Appl.***, 12, 534-540, (1991).

[16] Bini, D.A., Pan, V.Y., “Improved parallel computations with Toeplitz-like and Hankel-like matrices”, ***Linear Algebra Appl.***, 188/189, 3-29, (1993).

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Artvin' de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Artvin' de tamamladı. Lise öğrenimini Kocaeli' de tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2006 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Programında öğrenimine başladı. 2007 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.