

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KAPALI DALGA KILAVUZLARINDA ÖZDEĞERLERİN  
TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ VE OPTİMİZASYON  
YÖNTEMLERİ İLE BELİRLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS**

**Oğuzhan DEMİRYÜREK**

**Anabilim Dalı: Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi**

**Danışman: Doç. Dr. Namık YENER**

**KOCAELİ, 2009**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KAPALI DALGA KILAVUZLARINDA ÖZDEĞERLERİN  
TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ VE  
OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ İLE BELİRLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Oğuzhan DEMİRYÜREK**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 MAYIS 2009**

**Tezin Savunulduğu Tarih: 30 HAZİRAN 2009**


**Tez Danışmanı  
Doç.Dr. Namık YENER**

  
(.....)

**Üye  
Yrd.Doç.Dr. Arif DOLMA**

  
(.....)

**Üye  
Yrd.Doç.Dr. İsmail Hakkı TAYYAR**

  
(.....)

**KOCAELİ, 2009**

## **ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR**

Dalga kılavuzlarında Maxwell denklemleri ve sınır şartlarının sonsuz sayıda transmisyon hattı denklemleri adı verilen adi diferansiyel denklem sistemlerine dönüşmesinin ardından elde edilen lineer cebrik denklem sistemi, cebrik fonksiyon teorisi kullanılması ile elektromanyetik dalgaların propagasyon sabitinin davranışı hakkında fiziki bir anlayış getirmektedir.

Tezin hazırlanma aşamasında fikirleri ile beni yönlendiren ve destek olan kıymetli hocam Sn. Doç. Dr. Namık YENER' e teşekkürü bir borç bilirim.

Bilim insanını destekleme programı (BİDEB) çerçevesinde tezin hazırlama aşamasında destek olan TÜBİTAK' a ayrıca teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında sürekli beni destekleyen, bu günlere gelmemde en büyük yardımcıları olan sevgili annem ve babama sonsuz minnet duygularımı sunarım. Ayrıca bu tez çalışması sırasında her zaman gayretlendiren eşime şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	iii
TABLolar DİZİNİ .....	iv
SİMGELER.....	v
ÖZET .....	vi
İNGİLİZCE ÖZET .....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÇALIŞMANIN LİTERATÜR İÇİNDEKİ YERİ VE KAPSAMI.....	5
3. KAPALI KAYIPSIZ BAZI DALGA KILAVUZLARINDA TAM DİSPERSİYON BAĞINTISININ ANALİTİK OLARAK ELDE EDİLMESİ.....	7
3.1. Dielektrik çubukla yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzunda dispersiyon bağıntısı [27] .....	8
3.2. Ferrit tüp ile yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzunda dispersiyon bağıntısının elde edilmesi[28,29] .....	10
4. MOMENT METODU YARDIMIYLA ÖZDEĞERLERİN İNCELENMESİ.....	12
4.1. Referans Yapı Olarak Seçilen Kılavuz İçin Özfonksiyonların Belirlenmesi.....	12
4.2. Özfonksiyonların Sağladığı Diklik Bağıntılarının Elde Edilmesi.....	15
4.3. Transmisyon Hattı Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	18
4.4. Kılavuzu Dolduran Malzemenin Heterojen ve/veya Jirootropik Olması Halinde Transmisyon Hattı Denklemleri.....	24
4.5. Transmisyon Hattı Eşdeğerlikleri İle Elde Edilen Lineer Cebrik Denklem Sisteminin Özdeğerlerinin İncelenmesi.....	30
5. CEBRİK FONKSİYON TEORİSİ YARDIMIYLA MOMENT METODUNU KULLANARAK ELDE EDİLEN ÖZDEĞERLERİN İNCELENMESİ.....	33
6. OPTİMİZASYON YÖNTEMİYLE DİSPERSİYON BAĞINTISI MODELLEMENİN TEORİSİ.....	35
7. OPTİMİZASYON YÖNTEMİYLE DİSPERSİYON BAĞINTISININ MODELLENMESİNE İKİ ÖRNEK.....	40
7.1. Dielektrik Çubuk Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu.....	40
7.2. Ferrit Tüp Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu.....	43
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	54

## ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 3.1: Dielektrik çubuk ile yüklü üniform kapalı silindirik dalga kılavuzunun kesiti ..... 8
- Şekil 3.2: Ferrit tüp ile yüklü kılavuzun kesiti ve kılavuzun sağ el silindirik koordinat sisteminde dairesel polarizeli dalgasının birinci modu için dispersiyon karakteristikleri .....10
- Şekil 7.1: Dielektrik çubuk ile yüklü silindirik kılavuz için tam dispersiyon bağıntısı ve Puiseux serisi katsayıları EKK ile elde edilen propagasyon sabitlerinin karşılaştırılması .....41
- Şekil 7.2: Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için tekil frekansın üstünde alt dal için bağıl hata .....42
- Şekil 7.3: Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için tekil frekansın altı ve üstünde üst dal için bağıl hata .....43
- Şekil 7.4: Ferrit tüp ile yüklü silindirik kılavuz için  $\omega_0$  ferrit rezonans frekansı altında Laurent seri açılımı ve Moment metodu ile hesaplanan faz sabiti. (Laurent seri açılımı katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi[17] ile bulunmuştur.) .....48
- Şekil 7.5:  $\omega_0$  ferrit rezonans frekansı üstünde Laurent seri açılımı ve Moment metodu ile hesaplanan zayıflama sabiti (Laurent serisi açılım katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi [17] ile bulunmuştur.) .....49
- Şekil 7.6: Ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzu için  $\omega_0$  in altında Laurent serisi katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi ile bulunan Laurent seri açılımı sonuçlarının Moment metodu sonuçlarına göre bağıl hataları .....49

## TABLolar DİZİNİ

Tablo 7.1: EKK yöntemi ile hesaplanan dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için yaklaşıklık fonksiyonunun (Puisseux serisinin) optimum ilk dört açınım katsayısı.....	41
Tablo 7.2: EKK yöntemi ile hesaplanan ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzu için yaklaşıklık fonksiyonunun (Laurent serisinin) optimum ilk dört açınım katsayısı.....	47

## SİMGELER

$\vec{E}$	: Elektrik alan şiddeti vektörü (V/m)
$\vec{H}$	: Manyetik alan şiddeti vektörü (A/m)
$\varepsilon$	: Ortamın dielektrik geçirgenliği (F/m)
$\varepsilon_1$	: Çubuğun dielektrik geçirgenliği (F/m)
$\varepsilon_0$	: Boşluğun dielektrik geçirgenliği (F/m)
$\mu$	: Ortamın manyetik geçirgenliği (H/m)
$\mu_0$	: Boşluğun manyetik geçirgenliği (H/m)
$\gamma$	: Propagasyon (yayılm) sabiti
$\beta$	: Faz katsayısı
$\omega$	: Açısal frekans
$r, r_0, r_1$	: Sırasıyla gözlem noktasının, dielektrik çubuğun ve kılavuzun yarıçapı
$k_{c1}, k_{c2}$	: Sırasıyla çubuğun ve boşluğun dalga sayısı
$J_n(x)$	: n. dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu
$Y_n(x)$	: n. dereceden ikinci tip Bessel fonksiyonu
$T'_n$	: TM modları için aksenal alan bileşeni
$T''_n$	: TE modları için aksenal alan bileşeni
$\chi'_n$	: TM modu için ayırma sabiti
$\chi''_n$	: TE modu için ayırma sabiti
det	: Determinant
S	: Dalga kılavuzu enine kesiti

### Alt İndisler

T	: Kılavuz içindeki enine alan vektörü
z	: Boyuna alan bileşeni
t	: Kılavuz içi enine bileşenler

### Kısaltmalar

EKK	: En Küçük Kareler
LST	: Least Squares Technique

# KAPALI DALGA KILAVUZLARINDA ÖZDEĞERLERİN TRANSMİSYON HATTI EŞDEĞERLİKLERİ VE OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ İLE BELİRLENMESİ

Oğuzhan DEMİRYÜREK

**Anahtar Kelimeler:** Moment Metodu(Transmisyon Hattı Eşdeğerliği), Cebrik Fonksiyon, Puiseux ve Laurent Seri Açınımları, En Küçük Kareler (EKK) Tekniği

**Özet:** Jiroelektrik veya jromanyetik ortamlarla dolu kapalı kayıpsız dalga kılavuzlarında Maxwell denklemlerinin Moment metodunun Galerkin versiyonu ile lineer cebrik denklem sistemine dönüştüğü bilinmektedir. Bu sistemin katsayılar matrisinin karakteristik denkleminin kökleri olan propagasyon sabitlerinin kareleri için cebrik fonksiyon teorisi kullanılmasıyla Laurent ve Puiseux seri açınımları elde edilir. Kapalı kayıpsız üniform dalga kılavuzlarının özdeğer problemlerinde, cebrik fonksiyon yaklaşıklığı metodu yardımıyla elde edilen bu seri açınımlar, propagasyon sabitinin özelliklerini incelemek için fonksiyonel bir anlayış getirir. Bu çalışmada Laurent ve Puiseux seri açınımlarında, gereken açınım katsayılarının eğri uydurma yöntemlerinden olan en küçük kareler (EKK) yöntemi ile hesaplanması ele alındı. Bu şekilde geçmişi Sir Isaac Newton'a kadar dayanan bu katsayıların hesabı problemine, hesabı daha kolay bir bakış açısı getirilmeye çalışıldı.

Yukarıda belirtilen Moment metodunun Galerkin versiyonunu uygulamak için özfonksiyonları boş kılavuzdan elde edilen, heterojen ve anizotropik ortam ile yüklü dalga kılavuzu için transmisyon hattı denklemlerinin incelenmesi yapıldı.

Üniform dalga kılavuzlarında  $z$  ile değişim  $e^{-j\beta z}$  şeklinde olduğundan transmisyon hattı eşdeğerliği ile elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi bir lineer cebrik denklem sistemine dönüşmektedir. Tam çözümü bilinmeyen problemin propagasyon sabitinin karesi bu sonsuz lineer cebrik denklem sisteminin katsayılar matrisinin özdeğeri olarak bulunmaktadır. Ancak elde edilen bu özdeğerler nümerik olarak tek başına daha az bir anlam taşıdığından, bu özdeğerleri bir fonksiyon olarak ifade etmek istenmektedir. Bu sebeple cebrik fonksiyon teorisi yardımıyla katsayılar matrisinin özdeğerleri, tekil noktalar civarında bir seri açınım biçiminde ifade edilebilir. Bu tezde, bilinmeyen bu seri açınım katsayılarını hesaplamak için optimizasyon yöntemlerinden olan EKK yöntemi incelenmiştir.



# DETERMINING OF THE EIGENVALUES OF CLOSED WAVEGUIDE BY THE TRANSMISSION LINE EQUIVALENCES AND OPTIMIZATION METHODS

Oğuzhan DEMİRYÜREK

**Keywords:** Moment Method (Transmission Line Equivalences), Algebraic Function, Puiseux and Laurent Series Expansions, Least Squares Technique (LST)

**Abstract:** It is known that in lossless and closed guides filled with gyroelectric or gyromagnetic media, Maxwell's equations are transformed into a linear algebraic equation system by application of the Galerkin version of Moment method. By use of algebraic function theory Laurent and Puiseux series expansions are obtained for the squares of the propagation constant functions which are the roots of the characteristic equation of the coefficient matrix of the system. These series expansions which are obtained by the algebraic function approximation in the eigenvalue problems of closed lossless, uniform waveguides, bring about a function theoretic insight in order to investigate the properties of the propagation constant functions. In this work computation of the necessary expansion coefficients of the Puiseux series expansions, is achieved by the least squares technique (LST) which is a curve fitting method. In this way we have attempted to find a simple solution to the problem of computation of these coefficients, which dates back to Sir Isaac Newton.

In order to apply the Galerkin version of the Moment method, transmission line equations for a guide loaded with heterogeneous and anisotropic medium and whose eigenfunctions are obtained from the empty guide, are examined.

The ordinary differential equation system which is obtained by the transmission line equivalence is transformed into a linear algebraic equation system, because in uniform waveguides  $z$  dependence has the form  $e^{-j\beta z}$ . Propagation constant of the problem whose exact solution is not known is found as the square root eigenvalue of the coefficient matrix of this linear infinite algebraic equation system. However the quantities determined from the Moment method do not have much physical meaning by themselves. This is why it is desired to express the propagation constant as a function. Therefore with the help of algebraic function theory eigenvalues of the coefficient matrix can be expressed as a series expansion in the neighborhood of singular points. In this thesis, LST has been examined to calculate these series expansions' coefficients.

## 1. GİRİŞ

Bir metalik dalga kılavuzu içinde elektromanyetik dalga yayılımı problemi kılavuz boyunca sınır şartlarını ve dalga kılavuzunun uçlarında uç şartlarını sağlayan Maxwell denklemlerinin çözümünü elde etmeye indirgenir. Böylelikle bir üniform kapalı dalga kılavuzunda yayılma sabiti  $\gamma$  ve elektrik ve manyetik alan ifadeleri hesaplandığı zaman propagasyon problemi çözülmüş olur.

Üniform dalga kılavuzu içeren problemlerin bir bölümünde, değişkenlere ayırma yöntemi ile modal çözümlerin analitik olarak bulunması mümkündür[1]. Bu tür problemler ve bunlara ilişkin analiz yöntemleri elektromanyetik teorinin klasik konuları arasındadır[1-10]. Ancak değişkenlere ayırma yönteminin mümkün olmadığı durumlarda problemin çözümü sadece yarı analitik veya salt sayısal yöntemler yardımıyla ve bu yöntemlerin zorunlu olarak içerdikleri bazı yaklaşıklar altında elde edilebilir [10-14].

Kesiti dikdörtgen, daire veya elips şeklinde olan dalga kılavuzlarının içindeki ortam homojen ve izotropik olduğunda tam çözümü değişkenlere ayırma yöntemi ile analitik bir şekilde bulmak mümkün iken, ortam heterojen ve/veya anizotropik olduğunda bu yöntem her zaman işe yaramaz.

Schelkunoff heterojen ve/veya anizotropik ortamlarla yüklü kapalı dalga kılavuzları için Maxwell'in kısmi diferansiyel denklemlerini ve sınır şartlarını kullanarak, böyle bir yapıya ait sınır değeri problemlerinin sonsuz sayıda transmisyon hattı denklemleri adı verilen adi diferansiyel denklemlerden oluşan kuple bir sisteme dönüşebileceğini göstermiştir [16].

Schelkunoff yaklaşımında tam çözümü bilinmeyen problemlerde, problem ile aynı dış cidarlara sahip üniform dalga kılavuzunun modları (özfonksiyonları) kullanılarak seri açınımlar yardımıyla alanlar elde edilir.

Bu amaçla alanların seri açınımlarında özfonksiyonların katsayıları olan akım ve gerilim büyüklükleri arasındaki bağıntılar yani transmisyon hattı denklemleri elde edilmektedir.

Bu bağıntılar üniform dalga kılavuzlarında  $z$  ile değişim  $e^{-j\beta z}$  şeklinde olduğundan bir lineer cebrik denklem sistemine dönüşmektedir. Tam çözümü bilinmeyen problemin propagasyon sabiti bu lineer cebrik denklem sisteminin katsayılar matrisinin özdeğeri olarak bulunmaktadır.

Aslında uygulanan bu yöntem Moment metodunun Galerkin versiyonudur. Zira açınım fonksiyonları test fonksiyonlarına eşit alınmaktadır. Ancak Moment metodundan elde edilen özdeğerler tek başına nümerik olarak büyük bir anlam ifade etmemektedir. Bölüm 4 de açıklanacağı gibi bir jirotropik ortam ile dolu kapalı kayıpsız dalga kılavuzu problemimizde, yukarıda belirtilen katsayılar matrisinin karakteristik denklemi bir cebrik denklemdir. Bu cebrik denklemin kökleri propagasyon sabitinin özelliklerini incelememize imkân tanır. Kökleri ifade etmek için denklemi analitik noktalar civarında Taylor serilerine ve tekil nokta olarak isimlendirilen kritik noktalar civarında Puiseux veya Laurent serilerine açarız. Puiseux serisi rasyonel üsler içeren bir kuvvet serisidir. İşte bu Taylor, Puiseux ve Laurent serilerinden elde edilen değerler, bize fiziki bir anlayış vermektedir ve bu sebeple gereklidir. Dolayısıyla cebrik denklemin köklerini seri açınımlarla ifade etmek arzulanır. Çünkü bu sadece propagasyon sabiti için doğru nümerik değerler vermekle kalmaz, ayrıca propagasyon sabitinin davranışı için fonksiyonel bir anlayış getirir. Bu anlayışın içinde neler bulunabilir? Köklerin katlılık durumlarının sebepleri, analitik olup olmayışlarının sebepleri, özvektörlerin özellikleri hakkında bilgiler, özdeğer kusurlu mudur değil midir gibi soruların cevapları hep bu anlayışın içinde yer alabilir[17].

Bizim amacımız bu tezde cebrik fonksiyon teorisi kullanılmasıyla transmisyon hattı eşdeğerliği ve sonucunda ortaya çıkan Moment metodu yardımıyla elde edilen Laurent ve Puiseux serilerindeki açınım katsayılarını optimizasyon yöntemi ile hesaplamaktır. Bu katsayılar [17] de çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi ile elde edilen yaklaşık ifadeler kullanılarak hesaplanmıştır.

Hatta bu katsayıların hesabı probleminin geçmişi Sir I. Newton'a kadar dayanmaktadır[18]. [17] de bu yöntemle sadece iki açınım katsayısı hesaplanmıştır. Eğer başka katsayılar bulunmak istenirse işlem yükü çok artacak ve uzun zaman alacaktır.

Katsayıları bulma problemindeki güçlük Sir I. Newton'un şema ile çözümü için de geçerlidir. Çünkü bu kez de civarında Puiseux serisini elde etmek istediğimiz kritik nokta için şema (çokgen) çözümünü uygulayabilmek için önce söz konusu nokta civarında cebrik fonksiyonun iki değişkenli Taylor serisi açılımı gerekmektedir ki [18], bu serinin katsayılarını bulmak en azından bizim problemimiz için, çok güçtür. Çünkü bizim için cebrik denklemin katsayıları analitik olarak bilinmediğinden bu Taylor serisindeki frekansa göre kısmi türevler ancak sayısal olarak hesaplanabilecektir.

Bu katsayıların analitik olarak hesaplanmasındaki güçlükler zorunlu olarak optimizasyon tekniklerinin kullanımını bir alternatif olarak karşımıza çıkarmaktadır. Açınım katsayılarını hesaplamak için optimizasyon tekniklerinden olan EKK kullanacağız. Bu teknik ölçüm sonucu elde edilmiş veri noktalarına mümkün olduğu kadar yakın bir fonksiyon eğrisi tanımlamaya yarar. Biz EKK'yı elektromanyetikte eğri uydurma probleminde kullandık[19]. Her ne kadar Newton'un şema ile çözümleri programlamaya uygunsa da [18], EKK yukarıdaki sebeplerden dolayı basit bir alternatif olarak bu tezde problemimiz için tanıtılmaktadır.

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinin organizasyonunu şöyle sıralayabiliriz:

Bölüm 2 de bu tezde yapılan çalışmanın literatür içindeki yeri ve kapsamı üzerinde durulmuştur. Literatürde mevcut bulunan Puiseux ve Laurent seri açınımlarının kullanımı ve bu serilerin açınım katsayılarını hesaplamak için kullanılan yöntemler araştırılmıştır.

Bölüm 3 de kapalı kayıpsız bazı kılavuzlarda tam dispersiyon bağıntısının analitik ifadesi ile ilgili genel bilgi verilecektir. Analitik ifadesi bilinen biri silindirik dielektrik çubuk yüklü, diğeri ferrit tüp yüklü üniform silindirik dalga kılavuzu olmak üzere iki yapı ele alınacaktır ve bu yapılar için tam dispersiyon bağıntıları verilecektir.

Bölüm 4 de Moment metodu kullanılarak özdeğerlerin belirlenmesi ele alınacak ve heterojen ve jirotropik ortam ile dolu kılavuzlar için Schelkunoff yöntemi uygulanacaktır. Bölüm 5 de bu özdeğerler cebrik fonksiyon teorisi yardımıyla incelenecektir.

Bölüm 6 da EKK yardımıyla dispersiyon bağıntısının modellenmesi ele alınacak ve Bölüm 7 de, Bölüm 3 de tam dispersiyon bağıntıları analitik olarak verilen iki yapı bu modelleme yöntemi ile incelenecektir. Ancak söz konusu iki yapıdan ferrit tüp ile yüklü silindirik dalga kılavuzu için bu yöntemle modellemede, gerçek (tam) değerler olarak Moment metodu (150 TE + 150 TM modu) sonuçları kullanılacaktır. Bu sonuçlar tam dispersiyon bağıntısı çözümüne çok yakın olduğundan elde edilen Laurent serisi katsayıları gerçekçi olmaya devam edecektir.

## 2. ÇALIŞMANIN LİTERATÜR İÇİNDEKİ YERİ VE KAPSAMI

Jiroelektrik veya jromanyetik ortamla dolu kapalı kayıpsız dalga kılavuzlarında Maxwell denklemleri, Moment metodunun Galerkin versiyonu ile lineer cebrik denklem sistemine dönüşmektedir. Lineer cebrik denklem sistemi özel olarak bir özdeğer problemidir ve bu özdeğerler propagasyon sabitinin karesine karşılık düşmektedir. Bu sistemin katsayılar matrisinin karakteristik denkleminin kökleri olan propagasyon sabitlerinin kareleri tekil nokta olarak isimlendirilen kritik noktalar civarında, cebrik fonksiyon teorisi kullanılmasıyla Laurent ve Puiseux serilerine açılarak, propagasyon sabitinin davranışı için fonksiyonel bir anlayış getirilmektedir. Bu durumda yapılması gereken bu seri açınımlar için gerekli açınım katsayılarının hesaplanmasıdır.

Bu seri açınım katsayılarının hesaplanması için Sir Isaac Newton[18] tarafından önerilen Newton çokgenleri(şemaları) olarak bilinen bir yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemde kritik nokta civarında elde etmek istediğimiz Puiseux serisinin çokgen çözümünü bulmak için, bu nokta civarında cebrik fonksiyonun iki değişkenli Taylor açınımlarını gerektirmektedir. Bizim problemimiz için cebrik denklemin katsayıları analitik olarak bilinmediğinden bu Taylor serisindeki frekansa ve propagasyon sabitine göre kısmi türevler ancak sayısal olarak hesaplanabilecektir. Her ne kadar bu yöntem programlamaya uygun olsa da en azından burada problemimiz için cebrik denklemin katsayıları analitik olarak bilinmediğinden, sadece sayısal olarak hesaplanabileceğinden bu yöntemin uygulanması kısmen zordur. Ancak literatürde Puiseux serileri için Newton çokgenleri metodu kullanımı bir gelenek durumundadır[20-23].

Bu katsayıları hesaplamak için literatürde bulunan diğer bir yöntem ise çeşitli türevler için kapalı fonksiyonlar türeterek bu Puiseux serisi katsayılarının hesaplanmasıdır[17].

Bu tezde EKK yöntemi ile Puiseux serisi katsayıları hesaplandığında, [17] de bulunan sonuçlar ile arasında büyük bir yakınlık olduğu görülmüştür. Ancak bu yöntemde de katsayıların hesaplanması sırasındaki işlem yükü istenilen sayıda açılım katsayısının hesaplama zamanını uzatmaktadır.

Bu çalışmada bu seri açınımların katsayılarını hesaplamak için optimizasyon yöntemlerinden olan eğri uydurma problemlerinde kullanılan En Küçük Kareler optimizasyon tekniği önerilmiştir ve bu yöntemin uygulamasına ait iki örnek çözülmüştür. Bu yöntem Bölüm 6 da gösterildiği gibi hata fonksiyonunu belirleyip, hata fonksiyonunun bilinmeyen açılım katsayılarına göre türevleri aldıktan sonra ortaya çıkan lineer denklem sisteminin çözümünden ibarettir.

Laurent ve Puiseux seri açınımlarının katsayılarını hesaplamak için bilindiği kadarıyla burada önerilen ve yukarıda gösterilen iki yöntemin dışında literatürde herhangi bir araştırmaya rastlanmamıştır.

Puiseux serilerinin elektromanyetik teorisi içinde kullanımına sadece [24,31] çalışmalarında rastlanmıştır. Bunun dışında Puiseux serilerinin kullanımı bir robotun izlediği yolun tanımlamasında kullanılmıştır[25].

### 3. KAPALI KAYIPSIZ BAZI DALGA KILAVUZLARINDA TAM DİSPERSİYON BAĞINTISININ ANALİTİK OLARAK ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde tam çözümü bilinen iki kılavuzun dispersiyon bağıntısı verilecektir. Aynı zamanda bu iki yapı Bölüm 7 de EKK yöntemi ile dispersiyon bağıntısı modellemeye ait örnekler olarak çözülecektir. Bunun amacı tam çözümü analitik olarak bilinen kılavuzun dispersiyon bağıntıları kullanılarak hesaplanacak sonuçların, optimizasyon yöntemi ile bulunacak sonuçlar ile karşılaştırılacak olmasıdır. Böylece önerilen yöntemin sonuçlarının, herhangi bir yaklaşık yöntemin sonuçları ile değil, doğrudan tam dispersiyon bağıntılarından hesaplanacak sonuçlar ile karşılaştırılması sağlanacaktır. Ancak daha önce ve ileride belirtildiği gibi bu iki örnekten ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzu için Moment metodu (150 TE + 150 TM modu) sonuçları kullanılacaktır. Bunun sebebi Bölüm 7.2 de örnek çözümünde anlatılacaktır.

İlgili kılavuzların dispersiyon bağıntılarını vermeden önce kapalı, kayıpsız ve kayıpsız ortam ile yüklü kılavuzlarda dispersiyon bağıntısının (karakteristik denklemin) nasıl elde edildiği kısaca gösterilecektir.

Frekans bölgesinde Maxwell denklemlerinin ilk ikisi (3.1) şeklindedir.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E}\end{aligned}\tag{3.1}$$

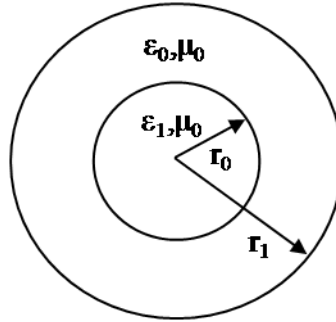
(3.1) eşitliğinin her iki tarafının rotasyoneli alınıp, uygun vektörel analizler yapıldığında (3.2) deki Helmholtz denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$



(3.2) deki kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılacak yöntem değişkenlere ayırma yöntemidir. (3.1) deki Maxwell denklemlerinde uygun vektörel analizler ile görülecektir ki, kılavuzlanmış dalgalar için, enine alan bileşenleri boyuna alanlar  $\vec{H}_z$  ve  $\vec{E}_z$  cinsinden elde edilebilmektedir. Böylece değişkenlere ayırma yöntemini uygulayarak bulacağımız boyuna alan bileşenleri ile kılavuz içindeki bütün alan dağılımlarını ifade edebiliriz. Kılavuz için elde edilen alan ifadelerine sınır şartlarını uygulayarak ortaya çıkan lineer cebirsel denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile kılavuzun dispersiyon bağıntısı bulunmuş olacaktır.

### 3.1. Dielektrik çubukla yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzunda dispersiyon bağıntısı [27]



Şekil 3.1: Dielektrik çubuk ile yüklü üniform kapalı silindirik dalga kılavuzunun kesiti

Dielektrik çubuk yüklü kapalı üniform silindirik dalga kılavuzu için tam dispersiyon bağıntısının ifadesi bilinmektedir ve aşağıda (3.3) numaralı denklemde verilmektedir[27]. Parametre değerleri  $\epsilon_1 = 15\epsilon_0$ ,  $r_1 = 0.25''$  ve  $r_0 = 0.67r_1$  olan bir dielektrik çubuk yüklü bir silindirik dalga kılavuzu bu tezde ele alınacaktır. Bu parametre değerleri [27] den alınmıştır.

Bu yapı için propagasyon sabitinin katlı olduğu normalize frekansların bir tanesinin değeri tam dispersiyon bağıntısının çözümden  $V_0 = 0.942975057977$  olarak elde edilir. Normalize frekans  $V = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}r_1$  şeklinde tanımlanmıştır[17].

$$\frac{\beta^2}{\omega^2} \left[ \frac{(k_{c2})^2 - (k_{c1})^2}{(k_{c2})^2 (k_{c1})^2} \right] = \left[ \frac{\mu_0 F(k_{c1} r_1)}{(k_{c1})^2} - \frac{\mu_0 R(k_{c2}, r_0, r_1)}{(k_{c2})^2} \right] \times \left[ \frac{\varepsilon_1 F(k_{c1} r_1)}{(k_{c1})^2} - \frac{\varepsilon_0 S(k_{c2}, r_0, r_1)}{(k_{c2})^2} \right] \quad (3.3)$$

Burada gözüken büyüklüklerin anlamları şöyle listelenebilir:

$\beta$  = faz katsayısı

$\omega$  = açısal frekans

$r, r_0, r_1$  = sırasıyla gözlem noktasının, çubuğun ve kılavuzun yarıçapı

$\mu_0$  = boşluğun manyetik geçirgenliği

$\varepsilon_0$  = boşluğun dielektrik geçirgenliği

$\varepsilon_1$  = çubuğun dielektrik geçirgenliği

$k_{c1}, k_{c2}$  = sırasıyla çubuğun ve boşluğun dalga sayısı

$J_n(x)$  = n. dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu

$Y_n(x)$  = n. dereceden ikinci tip Bessel fonksiyonu

$$F(k_{c1} r) = k_{c1} r \frac{J_1'(k_{c1} r)}{J_1(k_{c1} r)}$$

$$\xi(k_{c2}, r, r_1) = k_{c2} r [J_1'(k_{c2} r) Y_1(k_{c2} r_1) - J_1(k_{c2} r_1) Y_1'(k_{c2} r)]$$

$$\xi(k_{c2}, r, r_1) = k_{c2} r [J_1'(k_{c2} r) Y_1(k_{c2} r_1) - J_1(k_{c2} r_1) Y_1'(k_{c2} r)]$$

$$\rho(k_{c2}, r, r_1) = [J_1(k_{c2} r) Y_1'(k_{c2} r_1) - J_1'(k_{c2} r_1) Y_1(k_{c2} r)]$$

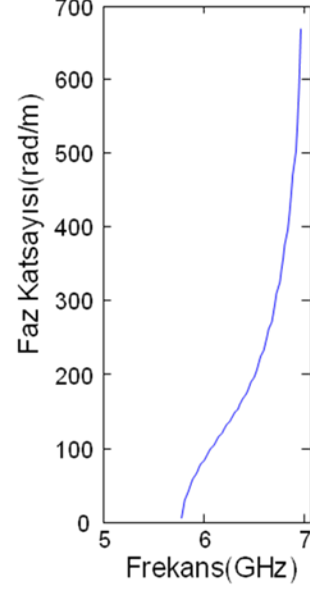
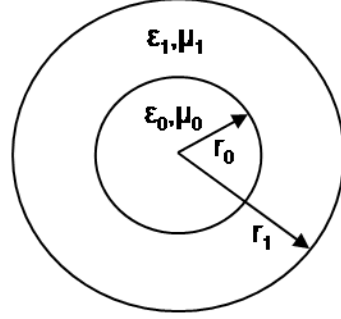
$$\sigma(k_{c2}, r, r_1) = [J_1(k_{c2} r) Y_1(k_{c2} r_1) - J_1(k_{c2} r_1) Y_1(k_{c2} r)]$$

$$R(k_{c2}, r, r_1) = \eta(k_{c2}, r, r_1) / \rho(k_{c2}, r, r_1)$$

$$S(k_{c2}, r, r_1) = \xi(k_{c2}, r, r_1) / \sigma(k_{c2}, r, r_1)$$

Dispersiyon bağıntısının tam çözümünün, propagasyon sabitinin katlı olduğu yukarıda belirtilen  $V_0$  normalize frekansı komşuluğunda sonuçları, önerilen yöntemin sonuçları ile karşılaştırılarak Şekil 7.1 de verilmiştir.

### 3.2. Ferrit tüp ile yüklü kapalı silindirik dalga kılavuzunda dispersiyon bağıntısının elde edilmesi[28,29]



Şekil 3.2: Ferrit tüp ile yüklü kılavuzun kesiti ve kılavuzun sağ el silindirik koordinat sisteminde dairesel polarizeli dalgasının birinci modu için dispersiyon karakteristikleri

Eksenel olarak mıknatıslanmış ferrit ortam için manyetik geçirgenlik tensörü (3.4) de verilmiştir [28].

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_r & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Kayıpları ihmal ederek bu tensörde skaler manyetik geçirgenlik terimleri (3.5) deki gibidir.

$$\mu_r = 1 - \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{ve} \quad \kappa = \frac{\omega \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (3.5)$$

Sağ el silindirik koordinat sisteminde dairesel polarizasyonlu dalganın birinci modu için dispersiyon karakteristikleri Şekil 3.2 de verilmiştir.

Homojen ve izotropik ortam ile dolu kılavuzlarda dielektrik geçirgenlik  $\varepsilon$  ve manyetik geçirgenlik  $\mu$  skaler ve sabittir. Ancak Şekil 3.2 de kılavuzun içindeki ferrit malzeme jromanyetik özellik gösterdiğinden manyetik geçirgenlik  $\mu$  bir skaler değildir ve (3.4), (3.5) de gösterildiği gibi matris formundadır. Ferrit malzemenin özelliği (3.5) Maxwell denklemlerinde yerine koyularak boyuna alanlar  $E_z$  ve  $H_z$  ve buna bağlı olarak enine alanlar elde edilebilir. Maxwell denklemleri ile  $E_z$  ve  $H_z$  cinsinden elde ettiğimiz alanlara sınır şartları uygulanıp uygun sadeleştirmeler yapıldığında karşımıza  $6 \times 6$  boyutunda (3.6) da verilen katsayılar matrisi çıkar [29]. Kılavuzun karakteristik denklemi (dispersiyon bağıntısı), elemanları propagasyon sabitinin fonksiyonları olan bu matrisin determinantının sifra eşitlenmesi ile bulunur.

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & S_1 & 0 \\ F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & 0 & S_1 \\ F_9 & F_{10} & F_{11} & F_{12} & S_2 & S_3 \\ F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} & S_3 & S_2 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & 0 & 0 \\ G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Anlatılanları kısaca özetleyecek olursak; dispersiyon karakteristikleri, ferrit tüp yüklü dalga kılavuzu için elde edilen alan denklemlerinin genel çözümüne sınır şartlarının uygulanması ile elde edilen ve elemanları propagasyon sabitinin fonksiyonu olan altıncı dereceden determinantın sifra eşitlenerek yapılan çözümünden bulunur [28,29].

Bu yapı için dalga kılavuzunun kesiti Şekil 3.2 de görülmektedir ve yapının parametre değerleri şöyledir[28]:  $r_1 = 8\text{mm}$ ,  $\frac{r_0}{r_1} = \frac{5}{8}$ ,  $\varepsilon_1 = 12.9\varepsilon_0$ , rezonans frekansı

$$f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 6.9980206 \text{ GHz.}$$

#### **4. MOMENT METODU YARDIMIYLA ÖZDEĞERLERİN İNCELENMESİ**

Bu bölümde öncelikle Schelkunoff tarafından önerilen transmisyon hattı denklemlerinin elde edilmesi gösterilecektir. Schelkunoff'un önerdiği gibi homojen ve izotropik ortamla yüklü dalga kılavuzunun özfonksiyonları  $E_{zn} = T'_n$  ve  $H_{zn} = T''_n$  kullanılarak aynı dış cidarlara sahip heterojen ve/veya anizotropik ortam ile yüklü dalga kılavuzunun alanları Fourier serilerine açılarak bulunabilir[16].

Bunun için izlenecek yolu şöyle açıklayabiliriz. Değişkenlere ayırma yönteminin mümkün olduğu ve çözülmek istenen (incelenen) dalga kılavuzu ile aynı dış cidarlara sahip (referans) dalga kılavuzları için Maxwell denklemleri ve sınır şartlarının kullanılması ile incelenen kılavuz içindeki bütün alan dağılımlarını ifade edebilecek özfonksiyonlar elde edilir. Özfonksiyonlar dalga kılavuzu içinde alanları ifade eden tam ve ortogonal bir küme oluştururlar. Bu özfonksiyonları kullanarak, tam çözümü bilinmeyen aynı dış cidarlara sahip üniform dalga kılavuzlarının alanlarını Fourier serilerine açabiliriz. Böylece aynı özfonksiyonların kullanılması aynı dış cidarlara sahip ikinci yapının sınır şartlarını otomatik olarak sağlayacaktır. Bu seri açınımlarda terimlerin katsayıları olan akım ve gerilim büyüklükleri arasındaki bağıntılar yani transmisyon hattı denklemleri elde edilecektir.

##### **4.1. Referans Yapı Olarak Seçilen Kılavuz İçin Özfonksiyonların Belirlenmesi**

Öncelikle işe incelenen problem ile aynı dış cidarlara sahip referans kılavuzun seçimi ile başlamalıyız. Aslında incelenen probleme en yakın seçilecek olan referans problem, analizde çok kolaylıklar sağlayacaktır[15]. Biz bu tezde yapılarımıza uyması açısından (gerçek) incelenen problem ile aynı dış cidarlara sahip homojen ve izotropik ortam ile yüklü silindirik dalga kılavuzunu referans yapı olarak seçtik.

İncelen problem ile aynı dış cidarlara sahip ve incelenen probleme en yakın olan homojen ve izotropik ortam ile yüklü özfonksiyonları analitik olarak bilinen kılavuz referans yapı olarak seçildikten sonra ilk iş bu kılavuzun özfonksiyonlarını belirlemektir. Belirlenen bu özfonksiyonları kullanarak aynı dış cidarlara sahip herhangi bir ortamla yüklü bir dalga kılavuzu için yarı analitik çözümleri elde edebiliriz[15].

Analizde  $u, v$  enine koordinat eksenlerini ve  $z$  boyuna koordinat eksenini göstermektedir. Ayrıca eksenlere bağlı birim vektörler  $\vec{a}_u, \vec{a}_v, \vec{a}_z$  ve metrik çarpanlar sırasıyla  $e_1, e_2, e_3$  şeklinde tanımlanmıştır. TE ve TM modlarına ait tanımlamaları birbirinden ayırmak için tek (') sembolü TM modlarına ilişkin büyüklükler, çift (") sembolü TE modlarına ilişkin büyüklükler için kullanılmıştır.

Referans yapı olarak seçilen dalga kılavuzu için TM(enine manyetik) modları;

$$\nabla_T^2 E_z + \chi^2 E_z = 0 \text{ ve } C \text{ sınırında } E_z(C) = 0 \quad (4.1)$$

olmak üzere Schelkunoff'un gösteriminde bu denkleme ait n. özfonksiyon  $E_{zn} = T_n'$  ve bu özfonksiyona ait özdeğer  $\chi_n'^2$  olarak alınmıştır.

Aynı yapı için TE(enine elektrik) modları;

$$\nabla_T^2 H_z + \chi^2 H_z = 0 \text{ ve } C \text{ sınırında } \frac{\partial H_z}{\partial n}(C) = 0 \quad (4.2)$$

olmak üzere Schelkunoff'un gösteriminde bu denkleme ait n. özfonksiyon  $H_{zn} = T_n''$  ve bu özfonksiyona ait özdeğer  $\chi_n''^2$  olarak alınmıştır. Özfonksiyonlar (4.3) deki gibi normalize edilmiştir.

$$\iint_S \chi'_m \chi'_n T'_m T'_n dS = \delta_{mn} \quad (4.3a)$$

$$\iint_S \chi''_m \chi''_n T''_m T''_n dS = \delta_{mn} \quad (4.3b)$$

Burada  $\delta_{mn}$  Kronecker deltasıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$\{\chi'_n T'_n\}$  ve  $\{\chi''_n T''_n\}$  iki farklı tam ortonormal kümelerdir ve incelenen problemde sırasıyla  $E_z$  ve  $H_z$  açılımları için fonksiyonlar sağlar. TM ve TE modlarına ilişkin eksene alan bileşenleri  $E_{zn} = T'_n$  ve  $H_{zn} = T''_n$  yardımıyla;

$$\bar{e}'_n(p) = \nabla_T T'_n = \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \bar{a}_u + \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} \bar{a}_v \quad (4.4a)$$

$$\bar{e}''_n(p) = \nabla_T T''_n \times \bar{a}_z = -\frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \bar{a}_u + \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \bar{a}_v \quad (4.4b)$$

$$\bar{h}'_n(p) = -\nabla_T T'_n \times \bar{a}_z = \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} \bar{a}_u - \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \bar{a}_v \quad (4.5a)$$

$$\bar{h}''_n(p) = \nabla_T T''_n = \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \bar{a}_u + \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \bar{a}_v \quad (4.5b)$$

yazılabilir. Bunlar incelenen problemimizde elektrik ve manyetik alan vektörlerini Fourier serilerine açacağımız özfonksiyonları vermektedir.

## 4.2. Özfonksiyonların Sağladığı Diklik Bağıntılarının Elde Edilmesi

$\{\vec{e}'_n(p)\} \cup \{\vec{e}''_n(p)\}$  ve  $\{\vec{h}'_n(p)\} \cup \{\vec{h}''_n(p)\}$  birleşim kümeleri kılavuz içindeki alan dağılımlarını belirlemek için genel enine vektör alanların ifadesinde kullanılabilecek tam ve ortonormal kümeler oluşturur. Boş borunun  $\vec{e}'_m, \vec{e}''_m, \vec{h}'_m, \vec{h}''_m$  özfonksiyonlarını kullanarak aynı dış cidarlara sahip herhangi bir yapının alanlarını Fourier serilerine açarak bulabiliriz. Çünkü fiziki problemlerde herhangi bir fonksiyon tam ortogonal fonksiyonların serilerine açılabilir.

O halde homojen ve izotropik ortam ile yüklü kılavuz için (4.4) ve (4.5) denklemlerinde özfonksiyonları belirledikten sonra şimdi bu özfonksiyonların sağladığı diklik bağıntılarını elde edelim. Kapalı, kayınsız ve kayıpsız bir üniform dalga kılavuzu için Maxwell'in ilk iki denklemi aşağıdaki sadece enine ve boyuna alan bileşenlerini gösterecek biçimde düzenlenebilir[3].

$$-\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = j\omega \left[ \mu \vec{I} + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\vec{H}_t \times \vec{a}_z) \quad (4.6a)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \nabla_t \cdot (\vec{H}_t \times \vec{a}_z) \quad (4.6b)$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \left[ \varepsilon \vec{I} + \frac{1}{\omega^2 \mu} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\vec{a}_z \times \vec{E}_t) \quad (4.6c)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega \mu} \nabla_t \cdot (\vec{a}_z \times \vec{E}_t) \quad (4.6d)$$

$t$  alt indisi kılavuz içi enine bileşenleri,  $\vec{I}$  ise birim diyadiği göstermektedir. Kılavuz içinde tipik bir mod alanı  $e^{-j\beta_n z}$  şeklinde yayılmaktadır. Bu durumda alan denklemleri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \vec{\tilde{E}}_n(\vec{p}) e^{-j\beta_n z} \quad (4.7a)$$

$$\vec{H}_n(\vec{r}) = \vec{\tilde{H}}_n(\vec{p}) e^{-j\beta_n z} \quad (4.7b)$$



Enine alan bileşenleri ise şöyledir:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \vec{e}_n(\vec{p})e^{-j\beta_n z} \quad (4.8a)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = Y_n \vec{h}_n(\vec{p})e^{-j\beta_n z} \quad (4.8b)$$

$Y_n = \frac{1}{Z_n}$  olarak tanımlanan normalizasyon parametresidir[3]. (4.8) denklemlerini

(4.6a) ve (4.6c) denklemlerinde yerine yazarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$Z_n \beta_n \vec{e}_n = \omega \left[ \mu \vec{I} + \frac{1}{\omega^2 \epsilon} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\vec{h}_n \times \vec{a}_z) \quad (4.9a)$$

$$Y_n \beta_n \vec{h}_n = \omega \left[ \epsilon \vec{I} + \frac{1}{\omega^2 \mu} \nabla_t \nabla_t \right] \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) \quad (4.9b)$$

Kılavuzun C iletken sınırı üzerinde enine kesit bileşenleri aşağıdaki sınır şartlarını sağlar.  $\nu$ , C eğrisine dik ve kesit içinde bulunan birim vektörü göstermektedir.

$$\nu \times \vec{e}_n = 0 = \nabla_t \cdot (\vec{h}_n \times \vec{a}_z) \quad (4.10)$$

(4.11) denkleminde verilen iki boyutlu Green teoremini kullanarak özfonksiyonların sağladığı diklik şartlarını bulabiliriz.  $\vec{A}_{nm}$  bir vektör mod fonksiyonu olmak üzere iki boyutlu Green denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \iint_S dS \left\{ \vec{A}_n \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \cdot \vec{A}_m^* \right] - \vec{A}_m^* \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \cdot \vec{A}_n \right] \right\} \\ & = \oint_C dl \frac{1}{\epsilon} \left\{ (\vec{A}_n \cdot \vec{\nu}) (\nabla_t \cdot \vec{A}_m^*) - (\vec{A}_m^* \cdot \vec{\nu}) (\nabla_t \cdot \vec{A}_n) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\vec{A}_{nm}$  vektör mod fonksiyonu  $\vec{A}_{nm} = \vec{h}_{nm} \times \vec{a}_z$  olsun ve bunu Green denkleminde yerine yazalım. Görüleceği gibi (4.11) denkleminin sağ tarafı (4.10) denklemi ile ifade edilen C sınırı üzerindeki sınır şartlarından dolayı sıfır olacaktır. Bu durumda (4.11) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\iint_S dS \left\{ (\vec{h}_n \times \vec{a}_z) \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\varepsilon} \nabla_t \cdot (\vec{h}_m^* \times \vec{a}_z) \right] \right\} = \iint_S dS \left\{ (\vec{h}_m^* \times \vec{a}_z) \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\varepsilon} \nabla_t \cdot (\vec{h}_n \times \vec{a}_z) \right] \right\} \quad (4.12)$$

(4.9a) denklemini (4.12) denkleminde kullanırsak (4.13) elde edilir.

$$Z_m^* \beta_m^* \iint_S \vec{e}_m^* \cdot (\vec{h}_n \times \vec{e}_z) dS = Z_n \beta_n \iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_n) dS \quad (4.13)$$

(4.11) denkleminde  $\varepsilon$  yerine  $\mu$  ve  $\vec{h}_{nm}$  yerine  $\vec{e}_{nm}$  yazalım.

$$\iint_S dS \left\{ (\vec{e}_n \times \vec{a}_z) \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\mu} \nabla_t \cdot (\vec{e}_m^* \times \vec{a}_z) \right] \right\} = \iint_S dS \left\{ (\vec{e}_m^* \times \vec{a}_z) \cdot \nabla_t \left[ \frac{1}{\mu} \nabla_t \cdot (\vec{e}_n \times \vec{a}_z) \right] \right\} \quad (4.14)$$

(4.9b) denklemini (4.14) denkleminde kullanırsak (4.13) denkleminin dualini elde ederiz.

$$Y_m^* \beta_m^* \iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) dS = Y_n \beta_n \iint_S \vec{e}_m^* \cdot (\vec{h}_n \times \vec{a}_z) dS \quad (4.15)$$

(4.13) ve (4.15) denklemlerinde  $\vec{e}_m^* \cdot (\vec{h}_n \times \vec{a}_z)$  yalnız bırakalım.

$$\frac{Z_n \beta_n}{Z_m^* \beta_m^*} \iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) dS = \frac{Y_m^* \beta_m^*}{Y_n \beta_n} \iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) dS \quad (4.16)$$

(4.16) düzenlendiğinde (4.17) denklemini ile verilen diklik bağıntısını elde etmiş oluruz.

$$(\beta_n^2 - \beta_m^{*2}) \iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) dS = 0 \quad (4.17)$$

(4.17) denklemini ya  $\beta_n^2 = \beta_m^{*2}$  durumunda veya  $\iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_n) dS = 0$  durumunda

sıfır olur. Birinci durum  $n \neq m$  olduğunda elde edilirse bir dejenerer mod ortaya

çıkarmak. Dejenere mod olmaması durumunda yani  $n \neq m$  olduğunda  $\beta_n^2 \neq \beta_m^2$  ise o zaman özfonksiyonlar arasındaki diklik bağıntısı elde edilmiş olur.

$$\iint_S \vec{h}_m^* \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}_n) dS = \delta_{nm} \quad (4.18)$$

Burada  $\delta_{nm}$  Kronecker deltasını ve asteriks (\*) ise kompleks eşleniği göstermektedir. Eğer mod fonksiyonları kompleks ise ortogonalite şartı kompleks eşlenik fonksiyonlar içerebilir[33]. Buraya kadar yapılan özfonksiyonların sağladığı diklik bağıntılarını elde etme analizinde TE modu veya TM modu ayırımına gidilmemiştir. Bu şekilde bulunan diklik bağıntısı her ikisini de sağlayacaktır.

Homojen ve izotropik ortam ile dolu kılavuz için  $\vec{h} = \vec{a}_z \times \vec{e}$  sağladığı bilinmektedir[3]. (4.18) denklemini bu özelliği kullanarak TE ve TM modlarını da göz önünde bulundurup düzenlersek aşağıdaki yapımız için geçerli olan özfonksiyonların diklik bağıntılarını elde etmiş oluruz.

$$\iint_S \vec{e}'_n \cdot \vec{e}'_m dS = \iint_S \vec{e}''_n \cdot \vec{e}''_m dS = \iint_S \vec{h}'_n \cdot \vec{h}'_m dS = \iint_S \vec{h}''_n \cdot \vec{h}''_m dS = \delta_{mn} \quad (4.19a)$$

$$\iint_S \vec{e}'_n \cdot \vec{e}''_m dS = \iint_S \vec{h}'_n \cdot \vec{h}''_m dS = \iint_S \vec{e}''_n \cdot \vec{h}'_m dS = 0 \quad (4.19b)$$

### 4.3. Transmisyon Hattı Denklemlerinin Elde Edilmesi

C içinde tanımlı herhangi bir yapı için kesit içi alan bileşenleri, boş borunun özfonksiyonları kullanılarak (4.20) ve (4.21) deki gibi Fourier serilerine açılabilir. Enine alan bileşenleri;

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \sum_n V'_n(z) \vec{e}'_n(p) + \sum_n V''_n(z) \vec{e}''_n(p) \\ &= \sum_n \left[ V'_n(z) \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} + V''_n(z) \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right] \vec{a}_u + \sum_n \left[ V'_n(z) \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} - V''_n(z) \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \right] \vec{a}_v \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}_T &= \sum_n I'_n(z) \vec{h}'_n(p) + \sum_n I''_n(z) \vec{h}''_n(p) \\
&= \sum_n \left[ -I'_n(z) \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} + I''_n(z) \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \right] \vec{a}_u + \sum_n \left[ I'_n(z) \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} + I''_n(z) \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right] \vec{a}_v,
\end{aligned} \tag{4.20b}$$

boyuna alan bileşenleri ise;

$$E_z = \sum_n V'_{z,n} \chi'_n T'_n \tag{4.21a}$$

$$H_z = \sum_n I''_{z,n} \chi''_n T''_n \tag{4.21b}$$

$V''_m, I''_m, I'_m, V'_m, \vec{e}'_m, \vec{e}''_m, \vec{h}'_m, \vec{h}''_m$  özfonksiyonlarının Fourier katsayılarıdır.  $V$  ve  $I$  gerilim ve akım boyutundadırlar ve transmisyon hattı gerilimleri ve akımları olarak adlandırılmaktadır. Bundan sonra yapılacak analizde, bu akım ve gerilim denklemleri elde edilecektir.

Analize Maxwell denklemlerinin enine ve boyuna alan bileşenlerini gösterecek biçimde düzenleyerek başlayalım.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \tag{4.22}$$

denklemini,

$$\left[ \nabla_T + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \left[ \vec{E}_T + \vec{a}_z E_z \right] = -j\omega \left[ \vec{B}_T + \vec{a}_z B_z \right] \tag{4.23}$$

şeklinde ayrılabilir. (4.23) denklemini enine ve boyuna alan bileşenleri ayrı ayrı gösterecek biçimde düzenlersek (4.24) denklemleri elde edilir.

$$\nabla_T \times \vec{E}_T = -j\omega B_z \vec{a}_z \tag{4.24a}$$

$$\nabla_T \times \vec{a}_z E_z + \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial z} = -j\omega \vec{B}_T \tag{4.24b}$$

Benzer şekilde

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} \quad (4.25)$$

denklemini de,

$$\nabla_T \times \vec{H}_T = j\omega D_z \vec{a}_z \quad (4.26a)$$

$$\nabla_T \times \vec{a}_z H_z + \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z} = j\omega \vec{D}_T \quad (4.26b)$$

şeklinde düzenlenebilir.

(4.20) ve (4.21) açılımları bu ifadelerde kullanılarak referans problemin alanları seri açınımlar cinsinden ifade edilmiş olur. (4.24a) denklemini  $T_m'' \vec{a}_z$  ile, (4.24b) denklemini sırasıyla  $\vec{h}_m'$  ve  $\vec{h}_m''$  ile skaler çarpılıp  $S$  kesiti üzerinde integrali alınır üç denklem bulunur.

Benzer şekilde (4.26a) denklemini  $T_m' \vec{a}_z$  ile, (4.26b) denklemini ise sırasıyla  $\vec{e}_m'$  ve  $\vec{e}_m''$  ile skaler çarpılıp  $S$  kesiti üzerinde integrali alınır üç denklem daha bulunur. Böylece tam altı transmisyona denklemi elde etmiş oluruz. Örnek olması açısından burada (4.26) üzerinde bu transmisyona denklemelerinin nasıl elde edileceği aşağıda gösterilecektir.

(4.26b) yi  $\vec{e}_m''$  ile skaler çarpıp,  $S$  kesiti üzerinde integralini alalım.

$$\iint_S \vec{e}_m'' \cdot [\nabla_T \times \vec{a}_z H_z] dS + \iint_S \vec{e}_m'' \cdot \left[ \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z} \right] dS = j\omega \iint_S \vec{e}_m'' \cdot \vec{D}_T dS \quad (4.27)$$

(4.27) denkleminin önce sol tarafını, daha sonra sağ tarafını olmak üzere sırayla çözelim.  $\vec{e}_m''$  yi (4.4b) den biliyoruz. Sol kısmın ilk integrali şöyle hesaplanır.

$$\begin{aligned}\vec{e}_m'' \cdot [\nabla_T \times \vec{a}_z H_z] &= \left[ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \vec{a}_u - \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \vec{a}_v \right] \cdot \left[ \frac{\partial H_z}{e_2 \partial v} \vec{a}_u - \frac{\partial H_z}{e_1 \partial u} \vec{a}_v \right] \\ &= \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \frac{\partial H_z}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \frac{\partial H_z}{e_1 \partial u}\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\iint_S \vec{e}_m'' \cdot [\nabla_T \times \vec{a}_z H_z] dS = \iint_S \left\{ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \frac{\partial H_z}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \frac{\partial H_z}{e_1 \partial u} \right\} dS \quad (4.29)$$

(4.21b) deki  $H_z$ , (4.29) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{e}_m'' \cdot [\nabla_T \times \vec{a}_z H_z] dS &= \iint_S \left\{ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \sum_n I_{z,n}'' \chi_n'' \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \sum_n I_{z,n}'' \chi_n'' \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right\} dS \\ &= \iint_S \sum_n I_{z,n}'' \chi_n'' \left\{ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right\} dS\end{aligned}\quad (4.30)$$

bulunur. (4.19) denkleminde modların dikliğinden biliyoruz ki,

$$\iint_S \vec{h}_n'' \cdot \vec{h}_m'' dS = \iint_S \nabla_T T_n'' \cdot \nabla_T T_m'' dS = \iint_S \left\{ \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} + \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \right\} = \delta_{mn} \quad (4.31)$$

(4.30) denklemini (4.31) e göre düzenlenirse (4.32) elde edilir.

$$\iint_S \vec{e}_m'' \cdot [\nabla_T \times \vec{a}_z H_z] dS = I_{z,m}'' \chi'' \quad (4.32)$$

Şimdi (4.27) nin sol tarafın ikinci integralini hesaplayalım. Denkleminde  $\vec{H}_T$  (4.20b) denkleminde bilinmektedir.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_m'' \cdot \left[ \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z} \right] &= \sum_n -\frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \left[ \frac{\partial I_n'(z)}{\partial z} \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} + \frac{\partial I_n''(z)}{\partial z} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} \right] \\
&\quad - \sum_n \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \left[ -\frac{\partial I_n'(z)}{\partial z} \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} + \frac{\partial I_n''(z)}{\partial z} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right] \\
&= -\sum_n \left[ \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} - \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial I_n'(z)}{\partial z} \\
&\quad - \sum_n \left[ \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial I_n''(z)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{e}_m'' \cdot \left[ \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z} \right] dS &= -\iint_S \sum_n \left[ \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} - \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial I_n'(z)}{\partial z} dS \\
&\quad - \iint_S \sum_n \left[ \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} + \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial I_n''(z)}{\partial z} dS
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.19) dan bildiğimize göre,

$$\iint_S \vec{h}_n'' \cdot \vec{h}_m'' dS = \iint_S \nabla_T T_n'' \cdot \nabla_T T_m'' dS = \iint_S \left\{ \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} + \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \right\} = \delta_{mn} \tag{4.35}$$

ve

$$\iint_S \vec{h}_m'' \cdot \vec{h}_n' dS = \iint_S -\nabla_T T_m'' \cdot \nabla_T T_n' \times \vec{a}_z dS = \iint_S \left\{ \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} - \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \right\} dS = 0 \tag{4.36}$$

(4.34) yeniden düzenlenirse,

$$\iint_S \vec{e}_m'' \cdot \left[ \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z} \right] dS = -\frac{\partial I_m''(z)}{\partial z} \tag{4.37}$$

olarak ikinci integral de hesaplanır. Şimdi (4.27) nin sağ tarafını çözüp hesaplanan sonuçları birleştirerek ilk transmisyon hattı denklemini bulalım.

$$\vec{e}_m'' \cdot \vec{D}_T = \left[ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \vec{a}_u - \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \vec{a}_v \right] \cdot [D_u \vec{a}_u + D_v \vec{a}_v] = \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} D_u - \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} D_v \quad (4.38)$$

$$j\omega \iint_S \vec{e}_m'' \cdot \vec{D}_T dS = j\omega \iint_S \left\{ \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} D_u - \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} D_v \right\} dS \quad (4.39)$$

(4.32), (4.37) ve (4.39) birleştirirsek ilk transmisyon hattı denklemini elde ederiz.

$$\frac{dI_m''(z)}{dz} = j\omega \iint_S \left\{ -\frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} D_u + \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} D_v \right\} dS + I_{z,m}'' \chi'' \quad (4.40)$$

(4.26b) yi bu defa  $\vec{e}_m'$  ile skaler çarpıp,  $S$  kesiti üzerinde integrali alındığında ikinci transmisyon hattı denklemini (4.41) deki gibidir.

$$\frac{dI_m'}{dz} = -j\omega \iint_S \left\{ D_u \frac{\partial T_m'}{e_1 \partial u} + D_v \frac{\partial T_m'}{e_2 \partial v} \right\} dS \quad (4.41)$$

(4.26a),  $T_m' \vec{a}_z$  ile skaler çarpılıp, kesit üzerinde integrali alınıp,

$$\iint_S [T_m' \vec{a}_z] [\nabla_T \times \vec{H}_T] dS = j\omega \iint_S [T_m' \vec{a}_z] [D_z \vec{a}_z] dS \quad (4.42)$$

benzer işlemler yapılırsa (4.43) daki üçüncü transmisyon hattı denklemini elde edilir.

$$I_m' = -j\omega \iint_S D_z T_m' dS \quad (4.43)$$

(4.22) denklemleri ile yapılacak işlemlerde üç tane daha denklem elde edilir ve toplam altı denklem bulmuş oluruz.

$$-V_{z,m}' \chi_m' + \frac{dV_m'}{dz} = j\omega \iint_S \left\{ B_u \frac{\partial T_m'}{e_2 \partial v} - B_v \frac{\partial T_m'}{e_1 \partial u} \right\} dS \quad (4.44)$$



$$\frac{dV_m''}{dz} = -j\omega \iint_S \left\{ B_u \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} + B_v \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \right\} dS \quad (4.45)$$

$$V_m'' = -j\omega \iint_S B_z T_m'' dS \quad (4.46)$$

#### 4.4. Kılavuzu Dolduran Malzemenin Heterojen ve/veya Jirootropik Olması Halinde Transmisyon Hattı Denklemleri

Yukarıda hesaplanan transmisyon hattı denklemlerinde kılavuzun sahip olduğu ortamın durumunu gösteren herhangi bir ayrıma gidilmemiştir. Bundan sonraki kısımda kılavuzu dolduran malzemenin heterojen ve/veya jirootropik olduğu düşünülerek transmisyon hattı denklemlerinin nasıl adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sisteme dönüşebileceği gösterilecektir. Ayrıca ortamın izotropik ve homojen olduğu zaman transmisyon hattı denklemlerinin alacağı hal de verilecektir.

Eğer kılavuzu dolduran ortam anizotropik ise dielektrik geçirgenliği  $\underline{\epsilon}$  ve manyetik geçirgenliği  $\underline{\mu}$  birer matris formundadır. Bu durumda  $\vec{B}$  ve  $\vec{D}$  nin sırasıyla  $\vec{H}$  ve  $\vec{E}$  nin bileşenleri ile arasındaki lineer ilişki (4.47) deki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} B_u \\ B_v \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{uu} & \mu_{uv} & \mu_{uz} \\ \mu_{vu} & \mu_{vv} & \mu_{vz} \\ \mu_{zu} & \mu_{zv} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \\ H_z \end{bmatrix} \quad (4.47a)$$

$$\begin{bmatrix} D_u \\ D_v \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{uu} & \epsilon_{uv} & \epsilon_{uz} \\ \epsilon_{vu} & \epsilon_{vv} & \epsilon_{vz} \\ \epsilon_{zu} & \epsilon_{zv} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ E_z \end{bmatrix} \quad (4.47b)$$

Heterojen ve jirootropik ortam ile dolu kılavuzun yapısından dolayı enine ve boyuna alanlar arasında bir kuplaj yoktur ve (4.47) denkleminin (4.48) deki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} B_u \\ B_v \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{uu} & \mu_{uv} & 0 \\ \mu_{vu} & \mu_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \\ H_z \end{bmatrix} \quad (4.48a)$$

$$\begin{bmatrix} D_u \\ D_v \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{uu} & \varepsilon_{uv} & 0 \\ \varepsilon_{vu} & \varepsilon_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ E_z \end{bmatrix} \quad (4.48b)$$

Transmisyon hattı denklemlerini elde etmek için izleyeceğimiz yolu kısaca şöyle özetleyebiliriz:  $m$ . satır elamanları  $V_m'', I_m'', V_m', I_m'$  şeklinde olan sütun matrislerini  $\bar{V}'', \bar{I}'', \bar{V}', \bar{I}'$  şeklinde gösterip, (4.43) ve (4.46) denklemlerini  $V_{z,m}'$  ve  $I_{z,m}''$  için çözüp (4.40), (4.41), (4.44) ve (4.45) de yerine yazarak denklemlerimizi elde edebiliriz.

(4.40) denklemi ile işe başlayalım. (4.40) da  $E_u$  ve  $E_v$  eşitlikleri yerine yazılıp yeniden düzenlenirse (4.49) elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dI_m''}{dz} &= j\omega \iint_S \left\{ -(\varepsilon_{uu}E_u + \varepsilon_{uv}E_v) \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} + (\varepsilon_{vu}E_u + \varepsilon_{vv}E_v) \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right\} dS + I_{z,m}'' \chi_m'' \\ &= j\omega \iint_S \left\{ \sum_n \left( - \left[ \varepsilon_{uu} \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \right] \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} + \left[ \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \right] \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right) V_n' \right\} dS \\ &+ j\omega \iint_S \left\{ \sum_n \left( - \left[ \varepsilon_{uu} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} + \left[ \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right) V_n'' \right\} dS \\ &+ I_{z,m}'' \chi_m'' \end{aligned} \quad (4.49)$$

(4.46) denklemden  $V_m''$  yeniden düzenlenirse

$$V_m'' = -j\omega \iint_S \mu_{zz} \sum_n I_{z,n}'' \chi_n'' T_n'' dS \quad (4.50)$$

$n$ . satır ve  $m$ . sütun elamanı  $Q_{nm}$ ,

$$Q_{nm} = \iint_S \mu_{zz} \chi_n'' T_n'' \chi_m'' T_m'' dS \quad (4.51)$$

olan bir  $Q$  matrisi tanımlayabiliriz.  $Q$  matrisi simetrik bir matristir.  $m$ . satır elemanı  $V_m''$  ve  $I_{z,m}''$  olan sütun matrislerini sırasıyla  $\bar{V}''$  ve  $\bar{I}_z''$  şeklinde göstererek (4.50) yeniden düzenleyelim.

$$\bar{V}'' = -j\omega Q \bar{\chi}''^{-1} \bar{I}_z'' \quad (4.52)$$

Burada  $n$ . satır ve sütun elemanı  $\chi_n''$  olan  $\bar{\chi}''$  bir köşegen matristir.  $\bar{V}''$  ve  $\bar{I}_z''$  nin gerilim ve akım boyutunda olduğunu biliyoruz. O halde burada

$$Y_B = \bar{\chi}'' Q^{-1} \bar{\chi}'' \quad (4.53)$$

şeklinde bir  $Y_B$  admitans matrisi tanımlayabiliriz. Buna göre (4.52) uygun şekilde düzenlenirse (4.54) elde edilir.

$$\bar{\chi}'' \bar{I}_z'' = -\frac{1}{j\omega} Y_B \bar{V}'' \quad (4.54)$$

(4.54) ile (4.49) denklemini yeniden yazabiliriz.

$$\frac{dI_m''}{dz} = j\omega \sum_n y_{mn}^{(3)} V_n' + j\omega \sum_n y_{mn}^{(4)} V_n'' + I_{z,m}'' \chi_m'' \quad (4.55)$$

Böylece bir transmiyon hattı denklemi elde edilmiş oldu. Bu denklemdeki tanımlamalar aşağıdaki gibidir.

$$y_{mn}^{(3)} = j\omega \iint_S \left\{ -\left( \varepsilon_{uu} \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T_m'}{e_2 \partial v} \right) + \left( \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_n'}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_n'}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T_m'}{e_1 \partial u} \right) \right\} dS \quad (4.56a)$$

$$-\{\bar{Y}^{(3)}\}_{mn} = j\omega y_{mn}^{(3)} - \frac{1}{j\omega} (Y_B)_{mn} \quad (4.56b)$$

$$y_{mn}^{(4)} = j\omega \iint_S \left\{ -\left( \varepsilon_{uu} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{uv} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right) \left( \frac{\partial T_m''}{e_2 \partial v} \right) + \left( \varepsilon_{vu} \frac{\partial T_n''}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{vv} \frac{\partial T_n''}{e_1 \partial u} \right) \left( \frac{\partial T_m''}{e_1 \partial u} \right) \right\} dS \quad (4.57a)$$

$$-\{\bar{Y}^{(4)}\}_{mn} = j\omega y_{mn}^{(4)} \quad (4.57b)$$

Eğer kılavuzu dolduran ortam izotropik ise yapılacak tek değişiklik  $\varepsilon_{uu} = \varepsilon_{vv} = \varepsilon$  ve  $\varepsilon_{uv} = \varepsilon_{vu} = 0$  olacağından, bunu (4.56) denklemlerinde yerine yazmak ve düzenlemektir.

Benzer işlemleri (4.44) denklemi için de yapalım. Denklemden  $H_u$  ve  $H_v$  eşitlikleri yerine yazılıp yeniden düzenlenirse (4.58) elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dV'_m}{dz} &= j\omega \iint_S \left\{ (\mu_{uu} H_u + \mu_{uv} H_v) \frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} - (\mu_{vu} H_u + \mu_{vv} H_v) \frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right\} dS + V'_{z,m} \chi'_m \\ &= j\omega \iint_S \left\{ \sum_n \left( - \left[ \mu_{uu} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} - \mu_{uv} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} - \left[ \mu_{vu} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} - \mu_{vv} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \right] \frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right) I'_n(z) \right\} dS \\ &+ j\omega \iint_S \left\{ \sum_n \left( \left[ \mu_{uu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} + \mu_{uv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right] \frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} + \left[ \mu_{vu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} - \mu_{vv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right] \frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right) I''_n(z) \right\} dS \\ &+ V'_{z,m} \chi'_m \end{aligned} \quad (4.58)$$

(4.43) denklemden  $I'_m$  tekrar düzenlenirse,

$$-I'_m = j\omega \iint_S \varepsilon_{zz} \sum_n V'_{z,n} \chi'_n T'_n T'_m dS \quad (4.59)$$

n. satır ve m. sütun elemanı  $P_{nm}$ ,

$$P_{nm} = \iint_S \varepsilon_{zz} \chi'_n \chi'_m T'_n T'_m dS \quad (4.60)$$

olan bir  $P$  matrisi tanımlayabiliriz.  $P$  matrisi simetrik bir matristir. m. satır elemanı  $I'_m$  ve  $V'_{z,m}$  olan sütun matrislerini sırasıyla  $\bar{I}'$  ve  $\bar{V}'_z$  şeklinde göstererek (4.59) i yeniden düzenleyelim.

$$\bar{I}' = -j\omega P \bar{\chi}'^{-1} \bar{V}'_z \quad (4.61)$$

Burada  $\bar{\chi}'$  n. satır ve sütun elemanı  $\chi'_n$  olan bir köşegen matristir. (4.61) de  $\bar{I}'$  ve  $\bar{V}'_z$  nin akım ve gerilim boyutunda olduğu bilindiğine göre,

$$Z_A = \bar{\chi}' P^{-1} \bar{\chi}' \quad (4.62)$$

şeklinde bir  $Z_A$  empedans matrisi tanımlanabilir. Buna göre (4.61) denklemini,

$$\bar{\chi}' \bar{V}'_z = -\frac{1}{j\omega} Z_A \bar{I}' \quad (4.63)$$

halini alır. Buraya kadar yapılan işlemleri göz önüne alarak (4.58) denklemini düzenlersek ortam için ikinci transmisyon hattı denklemlerini elde ederiz.

$$\frac{dV'_m}{dz} = j\omega \sum_n z_{mn}^{(1)} I'_n + j\omega \sum_n z_{mn}^{(2)} I''_n + V'_{z,n} \chi'_m \quad (4.64)$$

(4.64) deki tanımlamalar aşağıdaki gibidir.

$$-\{\bar{Z}^{(1)}\}_{mn} = j\omega z_{mn}^{(1)} - \frac{1}{j\omega} (Z_A)_{mn} \quad (4.65a)$$

$$z_{mn}^{(1)} = \iint_S \left\{ \left( \mu_{uu} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} + \mu_{uv} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \right) \left( -\frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} \right) + \left( \mu_{vu} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} - \mu_{vv} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \right) \left( -\frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right) \right\} dS \quad (4.65b)$$

$$-\{\bar{Z}^{(2)}\}_{mn} = j\omega z_{mn}^{(2)} \quad (4.66a)$$

$$z_{mn}^{(2)} = \iint_S \left\{ \left( \mu_{uu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} + \mu_{uv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right) \left( -\frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} \right) + \left( -\mu_{vu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} - \mu_{vv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right) \left( -\frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right) \right\} dS \quad (4.66b)$$

Eğer kılavuzu dolduran ortam izotropik ise  $\mu_{uu} = \mu_{vv} = \mu$  ve  $\mu_{uv} = \mu_{vu} = 0$  olacaktır. (4.56) denklemleri için yapılacak olan değişikliğin aynısı (4.66) denklemleri içinde yapılacaktır.

(4.40) ve (4.44) denklemleri için yapılan işlemlere benzer işlemler (4.41) ve (4.45) için yapılırsa diğer iki transmisyon hattı tanımlamaları aşağıdaki gibidir.

(4.41) denklemi için;

$$\frac{dI'_m}{dz} = -j\omega \sum_n y_{mn}^{(1)} V'_n - j\omega \sum_n y_{mn}^{(2)} V''_n \quad (4.67)$$

(4.67) de tanımlamalar aşağıdaki gibidir.

$$y_{mn}^{(1)} = -\iint_S \left\{ \left( \varepsilon_{uu} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{uv} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T'_m}{e_1 \partial u} \right) + \left( \varepsilon_{vu} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} + \varepsilon_{vv} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T'_m}{e_2 \partial v} \right) \right\} dS \quad (4.68a)$$

$$-\{\bar{Y}^{(1)}\}_{mn} = j\omega y_{mn}^{(1)} \quad (4.68b)$$

$$y_{mn}^{(2)} = -\iint_S \left\{ \left( \varepsilon_{uu} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{uv} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_1 \partial u} \right) + \left( \varepsilon_{vu} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} - \varepsilon_{vv} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_2 \partial v} \right) \right\} dS \quad (4.69a)$$

$$-\{\bar{Y}^{(2)}\}_{mn} = j\omega y_{mn}^{(2)} \quad (4.69b)$$

(4.44) denklemi için ise;

$$\frac{dV''_m}{dz} = -j\omega \sum_n z_{mn}^{(3)} I'_n - j\omega \sum_n z_{mn}^{(4)} I''_n \quad (4.70)$$

(4.64) deki tanımlamalar aşağıdaki gibidir.

$$-\{\bar{Z}^{(3)}\}_{mn} = j\omega z_{mn}^{(3)} \quad (4.71a)$$

$$z_{mn}^{(1)} = -\iint_S \left\{ \left( -\mu_{uu} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} + \mu_{uv} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_1 \partial u} \right) + \left( -\mu_{vu} \frac{\partial T'_n}{e_1 \partial u} + \mu_{vv} \frac{\partial T'_n}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_2 \partial v} \right) \right\} dS \quad (4.71b)$$

$$-\{\bar{Z}^{(4)}\}_{mn} = j\omega z_{mn}^{(4)} \quad (4.72a)$$

$$z_{mn}^{(4)} = -\iint_S \left\{ \left( \mu_{uu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} + \mu_{uv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_1 \partial u} \right) + \left( \mu_{vu} \frac{\partial T''_n}{e_1 \partial u} + \mu_{vv} \frac{\partial T''_n}{e_2 \partial v} \right) \left( \frac{\partial T''_m}{e_2 \partial v} \right) \right\} dS \quad (4.72b)$$

(4.73) denkleminde modlar arasındaki  $\bar{Z}$  transfer empedansları,  $\bar{Y}$  transfer admitansları,  ${}^V\bar{T}$  gerilim transfer katsayıları,  ${}^I\bar{T}$  akım transfer katsayıları genelde  $z$  nin fonksiyonudurlar. Eğer dalga kılavuzunun özellikleri boyuna uzaklıktan bağımsızsa bunlar sabittirler. Önce belirtildiği gibi  $z$  ile değişim  $e^{-\gamma z}$  şeklinde olduğundan transmisyon hattı denklemlerinin çözülmesi sonsuz boyutlu bir cebrik denklemler sistemine dönüşmektedir.

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \bar{V}' \\ \bar{V}'' \\ \bar{I}' \\ \bar{I}'' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} {}^V\bar{T}^{(1)} & {}^V\bar{T}^{(2)} & \bar{Z}^{(1)} & \bar{Z}^{(2)} \\ {}^V\bar{T}^{(4)} & {}^V\bar{T}^{(3)} & \bar{Z}^{(4)} & \bar{Z}^{(3)} \\ \bar{Y}^{(1)} & \bar{Y}^{(2)} & {}^I\bar{T}^{(1)} & {}^I\bar{T}^{(2)} \\ \bar{Y}^{(4)} & \bar{Y}^{(3)} & {}^I\bar{T}^{(4)} & {}^I\bar{T}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}' \\ \bar{V}'' \\ \bar{I}' \\ \bar{I}'' \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

(4.73) denkleminde eğer  $\underline{\varepsilon}$  ve  $\underline{\mu}$  matrisleri enine ve boyuna alan bileşenleri arasında kuplaja izin vermiyorsa yani (4.48) deki yapıya sahipse, buradaki  $\bar{T}$  matrisleri özdeş olarak sıfır olacaktır. Bu durumda transmisyon hattı denklemleri (4.74) deki gibi olacaktır.

#### 4.5. Transmisyon Hattı Eşdeğerlikleri İle Elde Edilen Lineer Cebrik Denklem Sisteminin Özdeğerlerinin İncelenmesi

Transmisyon hattı eşdeğerlikleri yardımıyla Maxwell'in kısmi türevli denklem sistemi ve sınır şartları (4.74) ile verilen adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. Normalde sonsuz boyutlu olan  $\hat{Z}(p)$  ve  $\hat{Y}(p)$  kare matrisleri bir yaklaşıklık olarak  $n \times n$  boyutunda alınır.

(4.74) de ayrıca kılavuzun dolgu malzemesinin jirotropik olma özelliği de içerilmektedir. Yani eğer ortam anizotropik ise  $\underline{\varepsilon}$  ve  $\underline{\mu}$  matrisleri enine ve boyuna alan bileşenlerini kuple etmemektedir.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{v}(p, z)}{dz} \\ \frac{d\hat{i}(p, z)}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{Z}(p) \\ -\hat{Y}(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}(p, z) \\ \hat{i}(p, z) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

(4.74) denkleminde  $p = \sigma + j\omega$  kompleks frekans,  $z$  kapalı üniform dalga kılavuzunda yayılma yönü,  $\hat{Z}(p)$  ve  $\hat{Y}(p)$  sırasıyla birim uzunluk başına seri empedans ve paralel admitans kuplaj matrisleridir. Ayrıca her ne zaman  $\underline{\epsilon}$  ve  $\underline{\mu}$  matrisleri  $p$  nin rasyonel fonksiyonu ve hermisyen ise  $\hat{Z}(p)$  ve  $\hat{Y}(p)$  resiprok, pozitif reel, kayıpsız, rasyonel matrislerdir. Bu sebeple Foster matrisleridir. Çünkü Foster matrisleri:

- $\text{Re}\{p\} > 0$  da analitiktir ve  $p$  nin reel olduğu yerde reeldir.
- $-\hat{Z}^T(-j\omega) = \hat{Z}(j\omega)$  özel aykırı Hermisyendir.

Sütun vektörleri  $\hat{v}(p, z)$  ve  $\hat{i}(p, z)$  transmisyon hattı gerilimleri ve akımlarıdır. Heterojen ve/veya anizotropik ortam ile yüklü dalga kılavuzunun enine alanlarını boş kılavuz için bilinen enine alanlar cinsinden ifade etmede  $\hat{v}(p, z)$  ve  $\hat{i}(p, z)$  açınım katsayıları olarak görev yapar. Kapalı üniform dalga kılavuzunda  $z$  ile değişim  $e^{-\gamma z}$  şeklinde olduğundan gerilimi  $\hat{v}(p, z) = \underline{v}(p)e^{-\gamma z}$  ile ve akımı  $\hat{i}(p, z) = \underline{i}(p)e^{-\gamma z}$  şeklinde tanımlayıp (4.74) düzenlenirse (4.75) ile verilen bir lineer cebrik denklem sistemi elde edilir.

$$\gamma(p) \begin{bmatrix} \underline{v}(p) \\ \underline{i}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{Z}(p) \\ \hat{Y}(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}(p) \\ \underline{i}(p) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

(4.75) açılıp sadece akım veya gerilim vektörleri cinsinden yazılırsa,

$$\gamma^2(p) \underline{v}(p) = \hat{Z}(p) \hat{Y}(p) \underline{v}(p) \quad (4.76a)$$

$$\gamma^2(p) \underline{i}(p) = \hat{Y}(p) \hat{Z}(p) \underline{i}(p) \quad (4.76b)$$



olur ve yayılım sabitinin karesi  $\gamma^2(p)$  bu iki eşitliğin ortak özdeğeri olarak bulunmaktadır.  $\underline{v}(p)$  ve  $\underline{i}(p)$  sırasıyla  $\hat{Z}(p)\hat{Y}(p)$  ve  $\hat{Y}(p)\hat{Z}(p)$  nin  $\gamma^2(p)$  ye karşı düşen özvektörleridir.

## 5. CEBRİK FONKSİYON TEORİSİ YARDIMIYLA MOMENT METODUNU KULLANARAK ELDE EDİLEN ÖZDEĞERLERİN İNCELENMESİ

(4.75) da elde edilen lineer cebrik denklem sistemi özel olarak bir özdeğer problemidir. (4.76a) dan  $I$  birim matrisi göstermek üzere;

$$\det(\gamma^2(p)I - \hat{Z}(p)\hat{Y}(p)) = g(\gamma^2, p) \quad (5.1)$$

şeklinde katsayıları  $p$  nin rasyonel fonksiyonları olan monik bir polinom elde edilir. Bu polinom sıfıra eşitlenip, ortak paydaya alındığında  $\hat{Z}(p)\hat{Y}(p)$  nin karakteristik denklemi (5.2) deki gibi olur.

$$G(\gamma^2, p) = a_0(p)\gamma^{2n}(p) + a_1(p)\gamma^{2(n-1)}(p) + \dots + a_{n-1}(p)\gamma^2(p) + a_n(p) = 0 \quad (5.2)$$

(5.2) de bir cebrik denklem elde edilmiştir ve  $\hat{Z}(p)\hat{Y}(p)$  nin özdeğerleri  $\gamma^2(p)$ , bu cebrik denklemin kökleridir. Problemimiz bu cebrik denklemin köklerini yani propagasyon sabitlerinin özelliklerini incelemektir. Aslında Moment metodundan elde edilen (4.75) lineer cebrik denklem sisteminden sayısal olarak  $\gamma^2(p)$  leri bulmak kolaydır. Ancak bu salt sayısal değerler bize propagasyon sabiti  $\gamma(p)$  hakkında tam olarak bilgi veremez. Çünkü  $\gamma(p)$  nin fonksiyonel olarak nasıl davrandığını bilemeyiz. Bu sebeple  $\gamma(p)$  nin seri açınımlarla ifade edilmesi, onun fonksiyonel olarak nasıl davrandığı hakkında bize bilgi verir ve bu kullanışlıdır. Propagasyon sabitini bu şekilde ifade ederek katlı olduğu yerleri, kutup noktaları, kusurlu özdeğer olup olmadıkları, analitik olup olmadıkları hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

Bilindiği gibi  $G(\gamma^2, p) = a_0(p)\gamma^{2n}(p) + a_1(p)\gamma^{2(n-1)}(p) + \dots + a_n(p) = 0$  şeklinde  $a_v(p)$  katsayılarının yalnız  $p$  cinsinden polinomları temsil ettiği,  $\gamma_1^2(p), \gamma_2^2(p), \dots, \gamma_n^2(p)$  biçiminde  $n$  adet köke sahip eşitliğe cebrik denklem denir.

$\gamma_1^2(p), \gamma_2^2(p), \dots, \gamma_n^2(p)$  köklerinin özelliklerini incelemek için denklemi analitik noktalarda veya tekil nokta olarak isimlendirilen kritik noktalar civarında serilere açabiliriz. (5.2) şeklindeki bir cebrik denklem ancak cebrik tekilliklere sahip olabilir. Bunlar şu üç şekilde ortaya çıkabilir.

- 1- Kutup noktası:  $a_0(p)$  nin sifira eşit olduğu noktalardır ve bu noktalarda fonksiyon sonlu sayılı negatif kuvvetlere sahip bir Laurent serisine açılabilir.
- 2- Dallanma noktası:  $G(\gamma^2, p) = 0$  in diskriminantının sıfır olduğu noktalardır. Dallanma noktalarının civarında  $\gamma^2(p)$  negatif kuvvetleri olmadan bir Puiseux seri açılımını sağlar. Cebrik denklemin kökü bu noktada sürekli ve sonludur.
- 3- Kutup dallanma noktası: Bu nokta civarında seri açılım sonlu sayılı negatif kuvvetlere sahip bir Puiseux serisi gibi düşünülebilir. Bu tekil nokta  $a_0(p)$  nin sifırıdır.

## 6. OPTİMİZASYON YÖNTEMİYLE DİSPERSİYON BAĞINTISI MODELLEMENİN TEORİSİ

Problemimizin tam dispersiyon bağıntısının çözümü  $\gamma^2(p)$  olsun. (5.2) de  $G(\gamma^2, p) = 0$  eşitliği her  $p$  için  $m$  farklı köke sahiptir. Bir istisna sadece:

- a) (5.2) de  $\gamma^{2n}(p)$  nin katsayısı  $a_0(p) = 0$
- b)  $G(\gamma^2, p)$  katlı köklere sahip

olduğunda meydana gelir. a) ve b) durumları altındaki istisnalar sadece  $p$  nin özel değerlerinin bir sonlu adedi için olabilir ki bunlar kritik noktalardır. Bu kritik noktalar  $\gamma^2(p)$  için sadece cebrik tekil noktalar teşkil eder.

Varsayalım  $\gamma_1^2(p) = \gamma_1^2(j\omega_0)$  bir kritik nokta için sonludur, dolayısıyla  $j\omega_0$  katlı tekil noktadır. Bu yüzden  $j\omega_0$  noktasının komşuluğu için

$$\gamma_1^2(p) = \sum_{n=-n_1}^{\infty} C_n \left( \sqrt[q]{p - j\omega_0} \right)^n \quad (6.1)$$

gibi  $\gamma_1^2(p)$  nin açılımında negatif terimler mevcut değildir. Ayrıca  $j\omega_0$  da  $\gamma_1^2(p)$  süreklidir. Burada b) durumu uygulanır.

Varsayalım  $\gamma_1^2(p) = \gamma_1^2(j\omega_0)$  bir kritik nokta için sonsuzdur, dolayısıyla  $j\omega_0$  kutup noktasıdır.  $j\omega_0$ ,  $a_0(p)$  nin bir sıfırı olur ve ayrıca  $Z(p)Y(p)$  nin bir kutbudur. Dolayısıyla burada a) durumu uygulanır. Çünkü sadece izin verilen tekillikler  $\gamma_1^2(p)$  için cebrik tekilliklerdir[30].

Bu durumda  $j\omega_0$  ya Laurent serisinde negatif kuvvetli terimlerin bir sonlu mertebeli kutbu olmalıdır veya (6.1) açılımında negatif kuvvetli terimleri olan bir cebrik kutup dallanma noktası olmalıdır[31].

Bu açıklama altında  $j\omega_0$  tekil noktasında yaklaşıklık fonksiyonu (6.1) deki gibi olsun. Ancak bu noktada genelleme yapmadan bizim problemimizde kullandığımız Laurent ve Puiseux seri açınımlarının özelliklerini vermek faydalı olacaktır. Laurent serisi (5.2) de verildiği gibi  $n_1$  tane negatif kuvvetli terimi olan ve rasyonel üsleri olmayan bir kuvvet serisidir ve problemimiz için aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\gamma^2(p) = \sum_{n=-n_1}^{\infty} C_n (p - j\omega_0)^n \quad (6.2)$$

Bizim için (bizim dikkate aldığımız kayıpsız, kapalı ve jirotropik ortamla dolu kılavuzlar için) Puiseux serisi ise [31] de belirtildiği gibi negatif kuvvetli terimleri olmayan, rasyonel kuvvetlere sahip bir kuvvet serisidir ve (6.3) deki gibi gösterilebilir.

$$\gamma^2(p) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( \sqrt[n]{p - j\omega_0} \right)^n \quad (6.3)$$

Burada  $C_0 = \gamma^2(j\omega_0)$  dir. Diğer bir deyişle  $C_0$ ,  $j\omega_0$  tekil noktasına karşılık düşen propagasyon sabitinin karesinin değeridir.

Bu şekilde Laurent ve Puiseux açınımlarını verdikten sonra her iki denklemi de içinde barındıran en genel hal olan (6.1) denklemi üzerinden teorimizi anlatabiliriz. Böylece hem Laurent hem de Puiseux seri açınımları için aşağıda anlatılacak olan yöntem geçerli olacaktır. Ancak (6.1) denkleminde sonsuz toplam alınmaktadır, bilgisayarda yapılacak hesaplamalar için bu sonsuz toplamın sonucu değiştirmeyecek bir büyüklükte kesilmesi gerekmektedir. Bunun için bir yaklaşıklık olarak bu sonsuz toplam yeterince büyük bir  $N$  sayısında kesilmektedir.

$i$  frekans ekseninde, her bir frekans soldan sağa doğru sıralandığında, kendisine karşılık gelen frekansın sırasını gösteren sayı olmak üzere bir  $p_i = j\omega_i$  noktasındaki, tam dispersiyon bağıntısından bildiğimiz  $\gamma^2(p_i)$  ile uydurulan eğri fonksiyonu (yaklaşıklık fonksiyonu)  $\gamma_1^2(p_i)$  arasındaki hata  $s_i$  ile gösterilirse hata (sapma) aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$s_i = \gamma^2(j\omega_i) - \gamma_1^2(j\omega_i) = \gamma^2(j\omega_i) - \sum_{n=-n_1}^N \tilde{C}_n \left( \sqrt{p_i - j\omega_0} \right)^n \quad (6.4)$$

Buradaki  $\tilde{C}_n$  ler (6.1) deki  $C_n$  lerden farklı olup bizim hesaplamayı amaçladığımız katsayılardır. Propagasyon sabitinin karesi kompleks değişkenli bir fonksiyondur. Hatanın reel ve pozitif bir değer olduğu düşünülürse, hata değerlerinin karelerinin toplamı  $S$ ,  $M$  adet nokta için (6.5) deki gibi olur.

$$S = \sum_{i=1}^M \left| \gamma^2(j\omega_i) - \gamma_1^2(j\omega_i) \right|^2 = \sum_{i=1}^M \left[ \gamma^2(j\omega_i) - \gamma_1^2(j\omega_i) \right] \times \left[ \gamma^2(j\omega_i) - \gamma_1^2(j\omega_i) \right]^* \quad (6.5)$$

Yukarıda  $|\cdot|$  mutlak değeri ve (\*) kompleks eşleniği göstermektedir. EKK yöntemi yaklaşıklik fonksiyonu ile gerçek fonksiyon arasındaki hata toplamının en küçük olması için, yaklaşıklik fonksiyonundaki katsayıların optimum değerinin belirlenmesini amaçlar. Hatanın minimum olması için, bu büyüklüğün yaklaşıklik fonksiyonundaki açınım katsayılarına göre türevleri sıfır olmalıdır.

$\gamma_1^2(p)$  yaklaşıklik fonksiyonu bir kompleks fonksiyon olduğuna göre açınım katsayıları  $\tilde{C}_n$  lerin de birer kompleks değişken olduğunu düşünelim. O halde  $\bar{C}_n$  ve  $\overline{\bar{C}_n}$  reel olmak üzere  $\tilde{C}_n = \bar{C}_n + j\overline{\bar{C}_n}$  şeklinde tanımlanabilir. (6.1) seri açınımında, kompleks olan katsayıları  $\tilde{C}_n = \bar{C}_n + j\overline{\bar{C}_n}$  şeklinde tanımlayıp (6.5) da  $\tilde{C}_n$  lerin yerine yazarak (6.5) yeniden düzenlenirse (6.6) elde edilir.

$$S = \sum_{i=1}^M \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \left( \sqrt[q]{p_i - j\omega_0} \right)^n \right] \times \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \left( \sqrt[q]{p_i - j\omega_0} \right)^n \right]^* \quad (6.6)$$

Puiseux seri açılımında  $\rho_i^n = \left( \sqrt[q]{p_i - j\omega_0} \right)^n$  ve  $\rho_i^{*n} = \left( \sqrt[q]{p_i - j\omega_0} \right)^{*n}$  olmak üzere ve Laurent seri açılımında  $\rho_i^n = (p_i - j\omega_0)^n$  ve  $\rho_i^{*n} = (p_i - j\omega_0)^{*n}$  olmak üzere aşağıda gösterildiği gibi EKK minimizasyon algoritmasında  $S$  hata fonksiyonun açılımında herhangi bir  $m$ . katsayısı ( $-n_1 \leq m \leq N$  aralığında)  $\tilde{C}_m$  için,  $\bar{C}_m$  ve  $\bar{\bar{C}}_m$  göre kısmi türevlerinin de hesaplanması gerekir[19].

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{C}_m} = \sum_{i=1}^M \rho_i^m \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \rho_i^n \right]^* + \sum_{i=1}^M \rho_i^{m*} \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \rho_i^n \right] = 0 \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{\bar{C}}_m} = \sum_{i=1}^M j\rho_i^m \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \rho_i^n \right]^* + \sum_{i=1}^M j\rho_i^{m*} \left[ \gamma^2(p_i) - \sum_{n=-n_1}^N \left\{ \bar{C}_n + j\bar{\bar{C}}_n \right\} \rho_i^n \right] = 0 \quad (6.7b)$$

Yukarıdaki gibi her açılım katsayısı için türevler alınıp sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.  $-n_1 = n_2$  şeklinde gösterilerse lineer denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \rho_i^{n_2} \rho_i^{*n_2} & 0 & \dots & \dots & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{n_2} \rho_i^{*N}\} & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{-j\rho_i^{n_2} \rho_i^{*N}\} \\ 0 & \sum_{i=1}^M \rho_i^{n_2} \rho_i^{*n_2} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{j\rho_i^{n_2} \rho_i^{*N}\} & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{n_2} \rho_i^{*N}\} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*n_2} \rho_i^N\} & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{-j\rho_i^{*n_2} \rho_i^N\} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^M \rho_i^N \rho_i^{*N} & 0 \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{j\rho_i^{*n_2} \rho_i^N\} & \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*n_2} \rho_i^N\} & \dots & \dots & 0 & \sum_{i=1}^M \rho_i^N \rho_i^{*N} \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} \overline{C_{n_2}} \\ \underline{C_{n_2}} \\ \dots \\ \dots \\ \overline{C_N} \\ \underline{C_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*n_2} \gamma^2(j\omega_i)\} \\ -\sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*n_2} \gamma^2(j\omega_i)\} \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*N} \gamma^2(j\omega_i)\} \\ -\sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{*N} \gamma^2(j\omega_i)\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^{n_2}\} \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{j\rho_i^{n_2}\} \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{\rho_i^N\} \\ \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{j\rho_i^N\} \end{bmatrix} C_0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Böylelikle (6.8) de elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü için yazılacak algoritma ile yaklaşıklık fonksiyonu açılımında kullanılacak katsayıların EKK ya göre optimum değerleri belirlenmiş olacaktır. Açılım katsayılarının sayısını arttırarak gerçek fonksiyona daha yakın bir eğri elde edilebilir.

(6.8) denkleminde en sağdaki  $C_0$  ile çarpılmış sütun vektörü tekil noktanın kutup olması durumunda bulunmayacak ve ilgili terim sol yandaki  $\tilde{C}_n$  sütun matrisi içerisinde yer alacaktır. (6.8) de verilen ifade tekil noktanın dallanma noktası olması durumuna karşı düşmektedir.



## 7. OPTİMİZASYON YÖNTEMİYLE DISPERSİYON BAĞINTISININ MODELLENMESİNE İKİ ÖRNEK

Bu bölümde dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu ile ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzunun propagasyon sabitlerinin seri açınımları problemi EKK ile bulunacak açınım katsayıları kullanılarak çözülecektir. Bu şekilde çözümü bilinen problemler ile karşılaştırarak anlatılan teorinin doğruluğu gösterilmeye çalışılacaktır. Çünkü Bölüm 3 de belirtildiği gibi bu yapılar için tam dispersiyon bağıntıları bilinmemektedir. Ancak yine Bölüm 3 de belirtildiği gibi ferrit tüp yüklü kılavuz için tam çözüm yerine 150 TE + 150 TM modu kullanan açınım alınmıştır.

### 7.1. Dielektrik Çubuk Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu

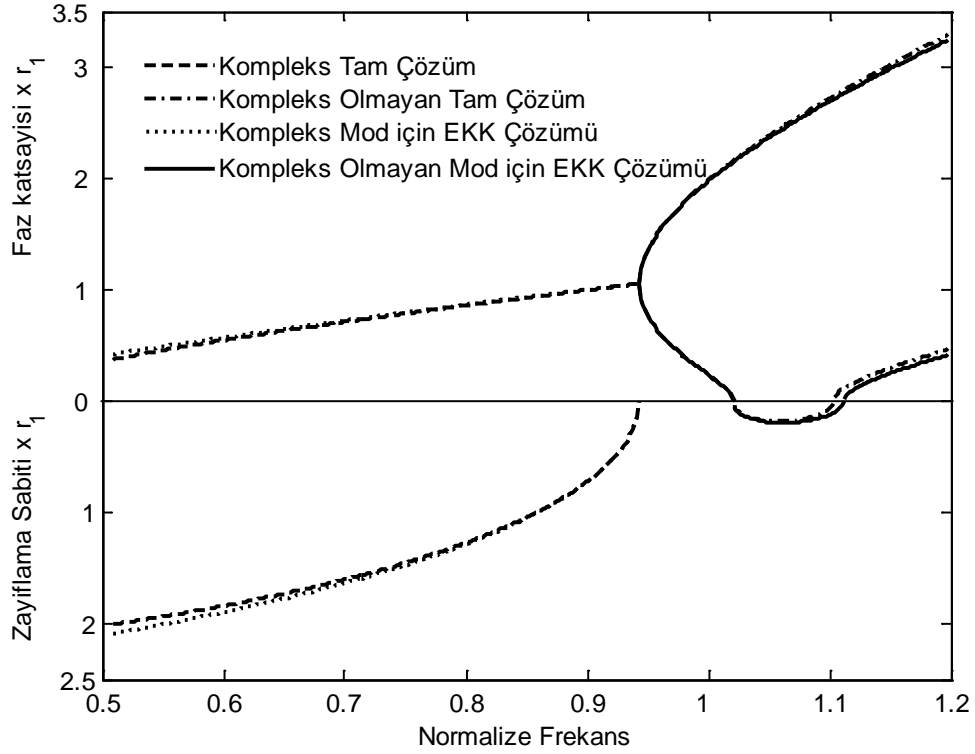
(5.2) denkleminin diskriminantının sıfır olduğu  $j\omega_0$  frekans değeri propagasyon sabitinin tekil olduğu frekanstır ve buradaki tekillik özdeğerin sonlu ve katlı olduğu bir cebrik dallanma noktasıdır.  $j\omega_0$  tekil noktasında fonksiyonun saykılının periyodu (6.1) açınımlarında  $q = 2$  dir[17], yani  $j\omega_0$  noktasında iki katlı kök var demektir.

Cebrik fonksiyonların özellikleri yardımıyla (5.2) denkleminin bir kökü için  $j\omega_0$  cebrik dallanma noktası komşuluğunda bir Puiseux seri açınımlarını elde ederiz[30].

$$\gamma_1^2(j\omega) = \gamma^2(j\omega_0) + A_1 \sqrt{j\omega - j\omega_0} + A_2 (j\omega - j\omega_0) + \dots + A_n \left( \sqrt{j\omega - j\omega_0} \right)^n + \dots \quad (7.1)$$

EKK yöntemi ile katsayılar hesaplanırken optimizasyon,  $0.94297 < V < 0.97298$  aralığında yapılmıştır. Tam dispersiyon bağıntısının çözümüne en yakın sonuç, Puiseux seri açınımlarının ilk dört katsayısı  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  alındığında bulunmuştur. EKK ile bulunan optimum ilk dört katsayı ile, yaklaşık propagasyon sabiti  $0.5094 < V < 1.19798$  aralığında yeniden hesaplanmıştır.

Tam dispersiyon bağıntısı kullanılarak elde edilen sonuçlar ve önerilen yöntemin sonuçları Şekil 7.1 de  $0.5094 < V < 1.19798$  aralığında karşılaştırılarak gösterilmiştir.



Şekil 7.1: Dielektrik çubuk ile yüklü silindirik kılavuz için tam dispersiyon bağıntısı ve Puiseux serisi katsayıları EKK ile elde edilen propagasyon sabitlerinin karşılaştırılması

Görüldüğü gibi çok geniş bir frekans bandı üzerinde tam dispersiyon bağıntısı ve EKK ile bulunan çözüm arasında yakın bir uyum sağlanmıştır. Bu optimizasyon hesaplanmasında bulunan katsayılar aşağıda Tablo 7.1 de verilmiştir.

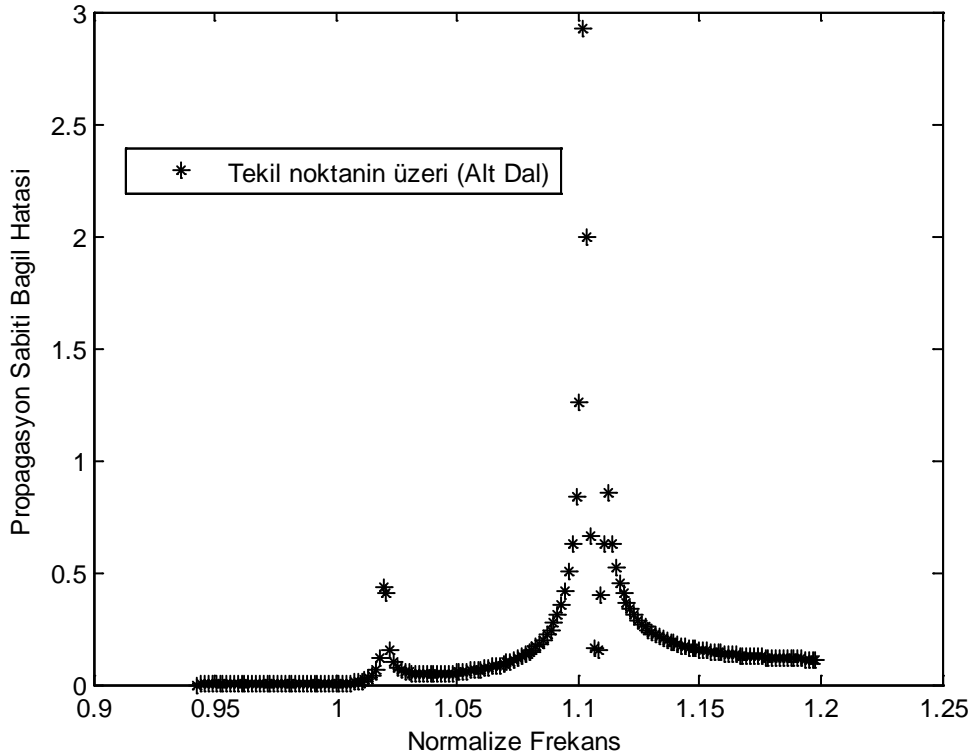
Tablo 7.1: EKK yöntemi ile hesaplanan dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için yaklaşık fonksiyonunun (Puiseux serisinin) optimum ilk dört açılım katsayısı

$A_1$	$5.26874992(1 - j)$
$A_2$	$0.477590733 \times 10^{-8} + j14.9630321$
$A_3$	$-7.74601067 - j7.74601061$
$A_4$	$6.42918080 - j0.114158109 \times 10^{-6}$

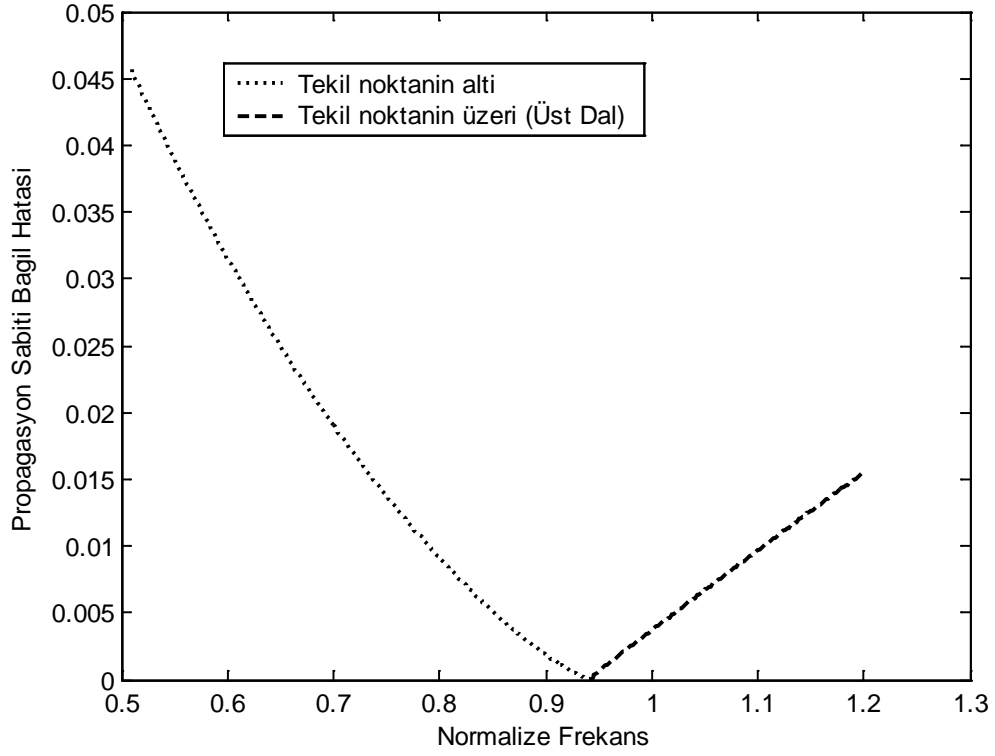
Ayrıca bu açılımın ilk iki katsayısı kapalı fonksiyonların çeşitli türevleri için yaklaşık ifadeler kullanılarak [17] de  $A_1 = 5.259648(1 - j)$  ve  $A_2 = j19.3257$  olarak bulunmuştur. Optimizasyon yöntemi ve [17] deki bulunan  $A_1$  ve  $A_2$  katsayıları arasındaki yakınlık kullanılan yöntemin doğruluğunu teyit etmektedir.

Ancak çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi ile elde edilen yaklaşık ifadeler kullanarak [17] de sadece iki katsayı bulunmuştur. Optimizasyon yöntemi için yazılan algoritmanın esnekliği yardımıyla tam dispersiyon bağıntısının çözümüne yakın bir sonuç elde edebilmek için, katsayıların sayısı istenildiği kadar arttırılabilmektedir ve algorithmada açılım katsayıları hızlı bir şekilde bulunabilmektedir.

Şekil 7.2 ve Şekil 7.3 de  $|Gerçek Değer - Hesaplanan Değer| / |Gerçek Değer|$  şeklinde tanımlanan, tam dispersiyon bağıntısı sonuçları ve EKK ile hesaplanan katsayılar kullanılarak elde edilen yaklaşık dispersiyon bağıntısı sonuçları arasındaki bağıl hata verilmiştir.



Şekil 7.2: Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için tekil frekansın üstünde alt dal için bağıl hata



Şekil 7.3: Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için tekil frekansın altı ve üstünde üst dal için bağlı hata

## 7.2. Ferrit Tüp Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu

Metodumuzun uygulamasına başlamadan önce cebrik fonksiyon teorisinden yardımla  $\omega_0$  da tekilliğin tipini belirlemek zorundayız.  $\omega \rightarrow \omega_0$  yaklaşırken faz katsayısı  $\beta(\omega) \rightarrow \infty$  yaklaştığı için  $\omega_0$  da bir tekillik açık bir biçimde mevcuttur.

$\omega_0$  rezonans frekansında (5.2) deki  $a_0(j\omega_0)$  sıfır olur ve bu sebeple en az bir kök sonsuz değer alır. Bunun anlamı  $\omega_0$  in bir tekil nokta olmasıdır. Aslında gerçekten de Moment metodu için düzenlenen  $\hat{Z}(p)$  ve  $\hat{Y}(p)$  matrisleri (3.4) ve (3.5) de verilen ortamın yapısından dolayı  $j\omega_0$  gibi bir kutup sahibidir ve bu kutup  $a_0(j\omega_0)$  in sıfırını oluşturmaktadır.

Ancak  $a_0(j\omega_0) = 0$  olduğunda  $j\omega_0$  bir kutup dallanma noktası olamaz. Çünkü enine ve boyuna alan bileşenleri kuple olmayan ve elemanları  $p$  nin rasyonel fonksiyonları olan hermiyen  $\underline{\varepsilon}$  ve  $\underline{\mu}$  matrislerine sahip ortamlarla dolu, kapalı kayıpsız kılavuzlanmış sistemler için muhakkak bir kutup olmalıdır. Kutup dallanma noktası bu tip yapılarda görülmez[17].

Bu sebeplerle  $a_0(j\omega_0) = 0$  olduğu  $j\omega_0$  kutup noktasının civarında Bölüm 5 de belirtildiği gibi (7.2) şeklinde bir Laurent açılımına izin verilir.

$$\gamma_1^2(p) = \frac{C_{-m}}{(p - j\omega_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{p - j\omega_0} + C_0 + C_1(p - j\omega_0) + \dots \quad (7.2)$$

(7.2) de bilmediğimiz açınımdaki negatif kuvvetli terimlerin sayısı yani kutbun mertebesi  $m$  nin kaç olduğudur. Bölüm 4 de (4.70a) eşitliğinde  $\hat{Z}\hat{Y}$  matrisinin özdeğeri  $\gamma_1^2(p)$  dir ve  $j\omega_0$  in problemimiz için bir kutup noktası olduğu yukarıdaki açıklamadan bilinmektedir. Buradan kolayca gösterilebilir ki  $(\hat{Z}\hat{Y})^{-1}$  matrisinin özdeğeri  $\gamma_1'^2(p) = 1/\gamma_1^2(p)$  dir. Artık  $\gamma_1^2(p)$  için bir kutup olan  $j\omega_0$  noktasında  $\gamma_1^2(p)$  analitiktir. Zira  $\gamma_1^2(p)$  için  $j\omega_0$  bir kesim frekansıdır ve kesim frekansında  $\gamma_1^2(p)$  analitiktir[31]. Eğer  $\gamma_1^2(p)$   $p = j\omega_0$  noktasında  $m$ . dereceden bir kutba sahipse  $\gamma_1'^2(p) = 1/\gamma_1^2(p)$  de  $m$ . dereceden sıfırlara sahiptir veya bunun tam tersini de söyleyebiliriz [33]. O halde  $\gamma_1'^2(p)$  nin sıfırlarının mertebesini bulmaya çalışarak Laurent serisinde bilmediğimiz negatif kuvvetli terimlerin sayısını yani kutbun mertebesi olan  $m$  yi bulabiliriz.

$\gamma_1'^2(p)$ ,  $p = j\omega_0$  noktasında  $j\omega_0$  kesim frekansı olduğu için analitik olduğundan (7.3) deki gibi bir Taylor açılımına sahiptir.

$$\gamma_1'^2(p) = \frac{1}{\gamma_1^2(p)} = A_1(p - j\omega_0) + A_2(p - j\omega_0)^2 + \dots \quad (7.3)$$

Bir yayılım modu için bu açınımda  $A_1 = 0$  olabilir, ancak aynı anda  $A_2 = 0$  olamaz.

Çünkü kolayca gösterilebilir ki böyle bir durumda  $\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} = 0$  olur ve bu sonsuz

grup hızı anlamına geldiğinden fiziki olarak mümkün değildir[31].

$\gamma_1^2(p)$  nin  $j\omega$  ekseninde  $j\omega_0$  noktasının komşuluğunda reel ve negatif olduğunu düşünelim. Bu şekilde  $A_1 = 0$  olursa  $j\omega$  ekseninde  $\omega_0$  in komşuluğunda  $\gamma_1'(p)$  saf sanal olacaktır ve bu durumda  $\omega_0$  bir dejenere kesim frekansıdır. Bizim yapımız için bu durum söz konusu değildir. O halde  $\omega_0$  in dejenere kesim frekansı olmaması için  $A_1 \neq 0$  olmalıdır. Böylece  $j\omega$  ekseninde  $j\omega_0$  in komşuluğunda  $\omega < \omega_0$  bölgesinde  $\gamma_1'(p)$  saf sanal olacak,  $\omega > \omega_0$  bölgesinde ise reel olacak(geriye doğru dalga) veya  $\omega > \omega_0$  bölgesinde  $\gamma_1'(p)$  saf sanal olacak,  $\omega < \omega_0$  bölgesinde ise reel olacaktır(ileri doğru dalga). Bu da bize  $\omega_0$  in olağan bir kesim frekansı olduğunu gösterir. Bizim yapımız için bu durum uygundur. (7.3) denklemini aşağıdaki gibi tekrar düzenleyebiliriz.

$$\gamma_1^2(p) = \frac{1}{A_1(p - j\omega_0) + A_2(p - j\omega_0)^2 + \dots} \quad (7.4)$$

$\gamma_1^2(p)$ ,  $p = j\omega_0$  da bir cebrik tekilliğe sahip ise belli ki  $m$  için  $(p - j\omega_0)^m \gamma_1^2(p)$  bu  $p = j\omega_0$  noktasında analitiktir[34]. Bu durumda (7.2) denklemini için yazılan  $(p - j\omega_0)^m \gamma_1^2(p)$  de  $\gamma_1^2(p)$  yi (7.4) den alarak işlemlerimizi yaparak  $(p - j\omega_0)^m \gamma_1^2(p)$  nin regüler olduğu en küçük  $m$  değeri,  $\gamma_1^2(p)$  nin  $j\omega_0$  da ki kutbunun mertebesini verir ki bu da  $m = 1$  olarak bulunur.

Kutbun mertebesi [17] de doğru fakat hatalı bir yol ile bulunmuştur. [17] de kutbun mertebesini bulmak için şöyle bir yol izlenmiştir.

$$\gamma_1^2(p) = \sum_{n=-n_1}^{\infty} C_n \left(\sqrt{p - j\omega_0}\right)^n \quad (7.5)$$

$j\omega = j\omega_0$  tekil noktasının komşuluğu civarında Laurent açılımı (7.5) gibidir. (7.5) açılımında  $t$  kökün derecesini ve  $s$   $g_m(j\omega)$  in sıfırının derecesini göstermek üzere en çok  $s \times t$  olduğu [30] de not edilmiştir. Jirotropik malzemenin özelliğinden dolayı,  $g_m(j\omega_0) = 0$  olduğunda  $j\omega_0$  bir kutup noktası olduğundan açınımdaki kökün derecesinin  $t = 1$  olduğu sonucuna varılmıştır. Çünkü bu tür yapılarda kutup dallanma noktası gözükmemektedir[17]. (7.6) polinomu (5.1) de verilen polinom aynısıdır.

$$\det(\gamma^2(p)I - \hat{Z}(p)\hat{Y}(p)) = g(\gamma^2, p) \quad (7.6)$$

[17] de bu yapı için bu polinom sıfıra eşitlenip, ortak paydaya alındığında, ortak payda olan  $g_m(j\omega)$  katsayısı,  $g_m(j\omega) = (j\omega)^2 + \omega_0^2$  şeklinde ve buradan görüleceği gibi  $g_m(j\omega)$  in sıfırının derecesi  $s = 1$  olduğu belirtilmiştir.  $t = 1$  ve  $s = 1$  olduğuna göre açınımdaki sonlu sayılı negatif kuvvetlerin sayısı en çok  $s \times t = 1$  dir ve bu yüzden  $j\omega = j\omega_0$  da  $\gamma_1^2(j\omega)$  nin kutbunun derecesi 1 olacağı sonucuna varılmıştır. Ancak  $g_m(j\omega)$  in sıfırının derecesinin  $s = 1$  olduğu açık bir şekilde görülmemektedir. Çünkü (7.6) da determinant alındığında ortak paydanın  $g_m(j\omega) = (j\omega)^2 + \omega_0^2$  şeklinde olduğu açık bir şekilde belli değildir.

(7.2) de verilen Laurent açılımında kutbun mertebesi  $m = 1$  olarak bulunduğu göre, (7.2) yi yeniden düzenleyebiliriz.

$$\gamma_1^2(j\omega) = \frac{C_{-1}}{j\omega - j\omega_0} + C_0 + C_1(j\omega - j\omega_0) + \dots \quad (7.7)$$

Yukarıda özetlenmiş fiziki probleme Moment Metodu ile ilk yaklaşıklık yapıldı[17]. Alanları göstermek için boş dalga kılavuzunun 150 TE ve 150 TM modu kullanıldı. Faz katsayısı, ferrit rezonans frekansının altında Şekil 7.4 de sağ el dairesel polarizeli dalganın birinci modu için bu yöntem yardımıyla elde edildi.

Aşağıdaki şekilde (Şekil 7.4) sağ el dairesel polarizeli dalğanın birinci modu için Moment metodu yardımıyla  $\gamma_1^2(j\omega)$  nın faz katsayısı için elde edilen sonuçlar gösterilmektedir. EKK için yazılan algoritma ile tam çözüme en yakın sonuç ilk dört katsayı alınarak bulundu.  $6.992\text{GHz} < \omega < 6.998026\text{GHz}$  aralığında yapılan optimizasyon hesaplamasında Moment metodu ile tam çözüm sonuçları birbirine çok yakın olduğundan, katsayıların hesaplanmasında hata fonksiyonu oluşturulurken  $\gamma^2(j\omega)$  için tam değerler olarak Moment metodundan elde edilen değerler kullanıldı [17]. Optimizasyon hesaplanmasında bulunan optimum ilk dört katsayı aşağıda Tablo 7.2 de verilmiştir.

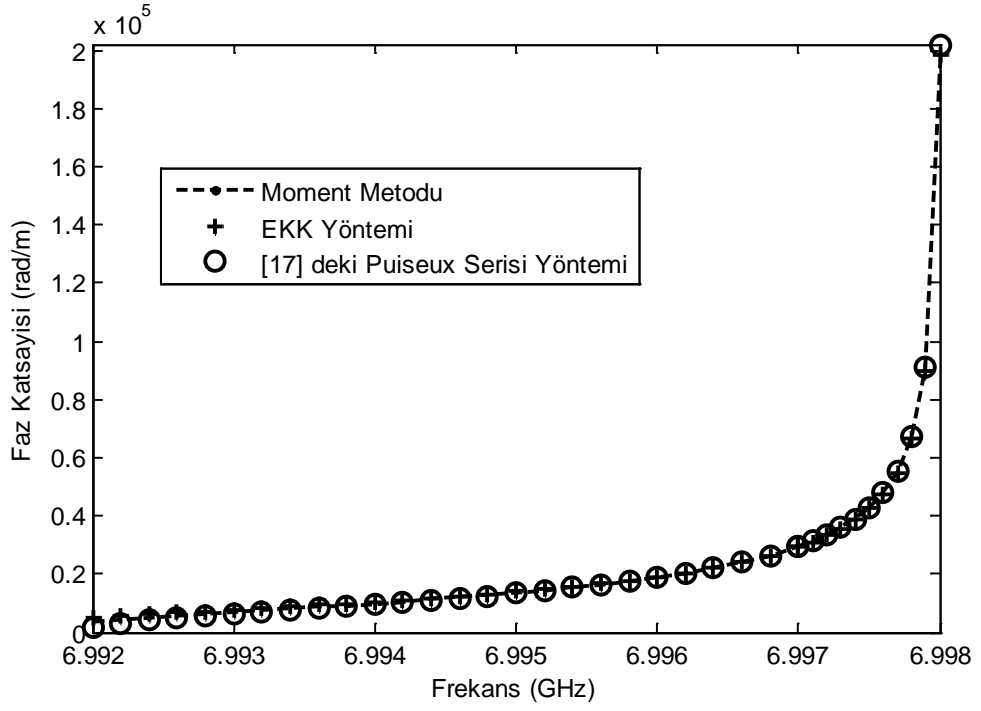
Tablo 7.2: EKK yöntemi ile hesaplanan ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzu için yaklaşıklık fonksiyonunun (Laurent serisinin) optimum ilk dört açınım katsayısı

$C_{-1}$	$0.459748 \times 10^{-7} + j1.72584 \times 10^5$
$C_0$	$1.45803 \times 10^8 - j0.72171 \times 10^{-2}$
$C_1$	$0.300444 \times 10^{-2} + j7.85819 \times 10^4$
$C_2$	$-53.9799 + j0.188004 \times 10^{-5}$

$\omega < \omega_0$  bölgesinde faz katsayısı  $\beta$  bu katsayılar kullanılarak hesaplandı. Ayrıca [17] de bu katsayılar  $C_{-1} = j1.7809 \times 10^5$  ve  $C_0 = 1.7234 \times 10^8$  olarak bulunmuştur. Hem EKK hem de kapalı fonksiyonları kullanarak çeşitli türevler için yaklaşıklık yapılarak bulunan katsayılar Laurent serisinde yerine konularak ferrit tüp ile yüklü kılavuz için yayılım modunun faz sabitleri hesaplandı. Şekil 7.4 de seri açınım yardımıyla hesaplanan faz sabiti Moment metodu ile elde edilen yayılım modunun faz sabiti ile karşılaştırılmıştır.

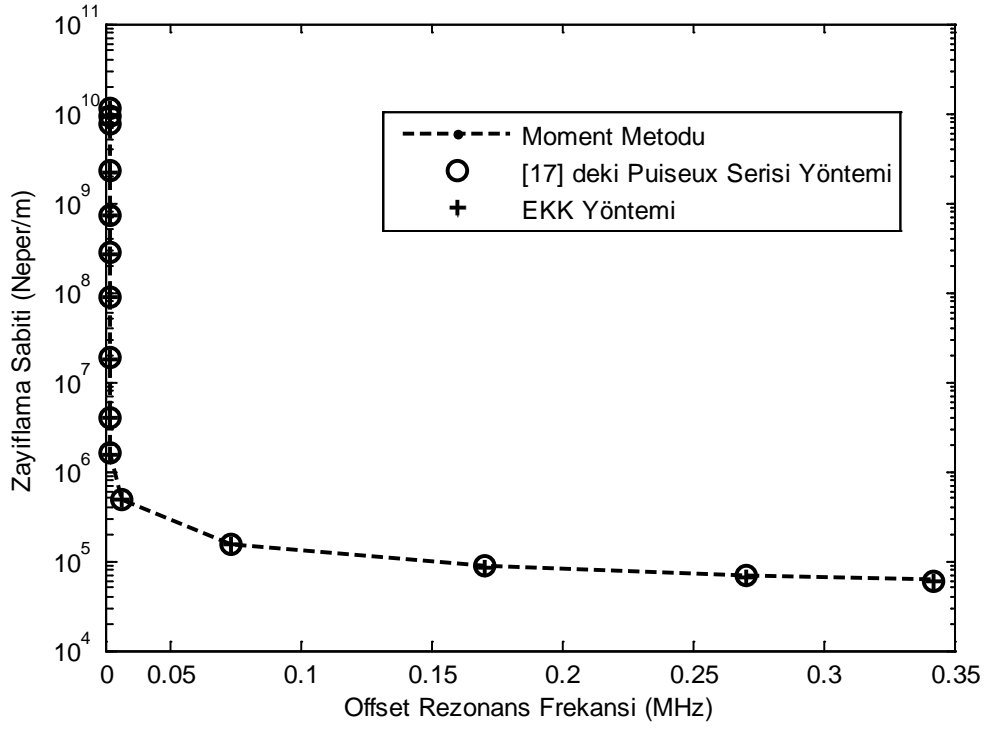
EKK optimizasyon yöntemi ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi[17] ile bulunan  $C_{-1}$ ,  $C_0$  katsayıları arasındaki yakınlık kullanılan yöntemin doğruluğunu teyit etmektedir.



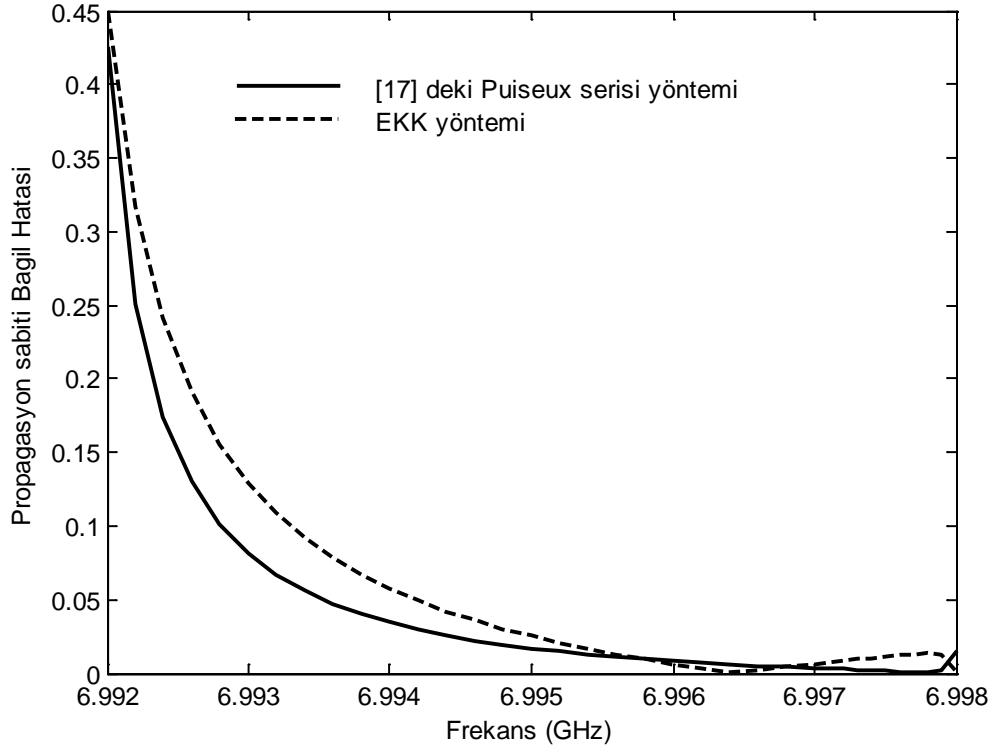


Şekil 7.4: Ferrit tüp ile yüklü silindirik kılavuz için  $\omega_0$  ferrit rezonans frekansı altında Laurent seri açılımı ve Moment metodu ile hesaplanan faz sabiti. (Laurent seri açılımı katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi[17] ile bulunmuştur.)

Katsayılar için bulunan değerler ayrıca ferrit rezonans frekansı üzerinde propagasyon faktörünü hesaplamak için kullanıldı.  $\omega > \omega_0$  bölgesinde Moment metodu çözüm setinden en büyük zayıflama sabiti ile sönen modlar göz önüne alındı. Çünkü (7.7) den dolayı  $\omega_0$  in altında yayılan modlar arasında dominant yayılan mod,  $\omega_0$  in üstünde en yüksek zayıflama sabitli mod olarak devam eden moddur. Şekil 7.5 de Moment metodu ile bulunan değerler, çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesiyle[17] hesaplanan  $C_{-1}$  ve  $C_0$  katsayıları ile oluşturulan iki terimli serinin yardımıyla bulunan değerler ve burada önerilen yöntem ile hesaplanan katsayıları kullanarak bulunan değerlerin karşılaştırılması gösterilmiştir. Şekil 7.6 da ise  $\omega_0$  ferrit rezonans frekansı altında katsayıları EKK ve [17] deki Puiseux serisi yöntemiyle bulunan Laurent seri açılımı sonuçlarının Moment metoduna göre bağlı hatalarının karşılaştırılması bulunmaktadır. Buradan görüleceği gibi EKK yöntemi ve [17] deki Puiseux serisi yöntemlerinin bağlı hatalarının ilgilenilen frekans aralığında çok ufak olduğu (% 0,5 den az olduğu) görülmektedir.



Şekil 7.5:  $\omega_0$  ferrit rezonans frekansı üstünde Laurent seri açılımı ve Moment metodu ile hesaplanan zayıflama sabiti (Laurent seri açılım katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi [17] ile bulunmuştur.)



Şekil 7.6: Ferrit tüp yüklü silindirik dalga kılavuzu için  $\omega_0$  'n altında Laurent serisi katsayıları EKK ve çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi ile bulunan Laurent seri açılımı sonuçlarının Moment metodu sonuçlarına göre bağlı hataları

## 8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Kapalı kayıpsız üniform dalga kılavuzlarının propagasyon sabitlerinin özelliklerini incelemeye imkân sağlayan cebrik fonksiyon teorisi kullanılarak propagasyon sabitinin karesi için elde edilen Laurent ve Puiseux serilerinin açılım katsayılarını hesaplamak için, eğri uydurma yöntemlerinden olan EKK kullanıldı. Bu şekilde biri Newton'un şema (poligon) yöntemi diğeri çeşitli türevler için kapalı fonksiyonların türetilmesi yöntemi olmak üzere, iki yönteme göre daha basit bir bakış açısı getirildi. Metodumuzun geçerliliğini örnekletirmek için iki fiziki kılavuzlanmış yapı ele alındı.

Önce izotropik silindirik dielektrik çubuk yüklü silindirik üniform kapalı dalga kılavuzu ele alındı. Tam dispersiyon bağıntısının çözümü ile önerilen metodun çözümü karşılaştırıldı. Sonra ferrit tüp yüklü silindirik üniform kapalı dalga kılavuzu göz önüne alındı. Her iki yapıda Moment metodu uygulanırken  $150 TE + 150 TM$  modları açılımı ve [17] deki seri açılım katsayıları kullanılarak sonuçlar elde edildi. İkinci yapı için kritik frekansa yakın bölgede Moment Metodu ile tam dispersiyon bağıntısının sonuçları çok yakın değerler verdiğiinden sunulan metodun sonuçları Moment Metodu ve [17] nin çözümleri ile karşılaştırıldı ve bütün frekans aralığında tam çözümü hesaplamaya gidilmedi.

İzotropik dielektrik çubuk yüklü silindirik üniform kapalı dalga kılavuzu için bağıl hataların gösterildiği Şekil 7.2 ve Şekil 7.3, ferrit tüp yüklü silindirik üniform kapalı dalga kılavuzu için bağıl hatanın gösterildiği Şekil 7.6 da da görüldüğü gibi karşılaştırılan sonuçlar arasında yakın bir uyum vardır.

Her iki örnekte karşılaştırma sonuçları gösterdi ki metodumuz nümerik olarak verimli ve doğrudur. Bu tezde EKK yöntemi ile hesaplanan Puiseux serisi katsayılarını, son zamanlarda geniş bir kullanım alanı bulan Genetik algoritmalar, benzetilmiş tavlama vb. optimizasyon yöntemleri ile de hesaplanmaya çalışılabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] İdemem, M., "Elektromagnetik Dalgaların Temelleri", *Literatür Yayıncılık*, (1995)
- [2] Stratton, J. A., "Electromagnetic Theory", *McGraw-Hill Book Co.*, (1961).
- [3] Felsen, L. B. ve Marcuvitz, N., "Radiation and Scattering of Waves", *Prentice-Hall*, (1973).
- [4] Schelkunoff, S. A., "Electromagnetic Waves", *Van Nostran*, (1943).
- [5] Collin, R. E., "Field Theory of Guided Waves", *McGraw-Hill Book Co.*, (1961).
- [6] Harrington, R. F., "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", *McGraw-Hill Book Co.*, (1961).
- [7] Pozar, D. M., "Microwave Engineering", *John Wiley*, (2004).
- [8] Jones, D. S., "Methods of Electromagnetic Wave Propagation", *Oxford Univ. Press*, (1995).
- [9] Montgomery, C. G., Dicke, R. H., Purcell, E. M., "Principles of Microwave Circuits", *The Institution of Engineering and Technology*, (1987).
- [10] Balanis, C. A., "Advanced Engineering Electromagnetics", *John Wiley*, (1989).
- [11] Saad, S. M., "Review of Numerical Methods For the Analysis of Arbitrarily-Shaped Microwave and Optical Dielectric Waveguides", *IEEE Trans. MTT*, Vol. MTT-33, pp. 894-899, (1985).
- [12] Itoh, T. Ed., "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures", *John Wiley*, (1989).
- [13] Kunz, K. S. ve Luebber, R. S., "The Finite Difference Time-Domain Method for Electromagnetics", *CRC Press*, (1993).
- [14] Harrington, R. F., "Field Computation by Moment Methods", *MacMillan*, (1968).

- [15] Yener, N., “Bazı Üniform Dalga Kılavuzlarının Özdeğerlerinin Transmisyon Hattı Eşdeğerlikleri Yardımıyla Belirlenmesi”, Doktora Tezi, *Elektronik ve Haberleşme Müh., İTÜ*, İstanbul, (2000).
- [16] Schelkunoff, S. A., “Generalized telegraphist’s equations for waveguides,” *BSTJ*, Vol. 31, 784–801, (1952).
- [17] Yener, N., “Algebraic function approximation in eigenvalue problems of lossless metallic waveguides: Examples,” *Jour. of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 20, No. 6, 731–745, (2006).
- [18] Bliss, G.A., “Algebraic Functions”, *Dover Publications*, (1966).
- [19] Oraizi, H., ”Application of the Method of Least Squares to Electromagnetic Engineering Problems” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 48, No. 1, (2006).
- [20] HILLIKER, D. L., “An algorithm for computing the values of the ramification index in the puiseux series expansion of an algebraic function”, *Pacific Journal Of Mathematics*, Vol. 118, No. 2, (1985).
- [21] KOEPF, W., “Closed form Laurent-Puiseux series of algebraic functions”, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 7, No. 1, (1996).
- [22] WILLIS, N. J., “Newton-Puiseux Algorithm”, Yüksek Lisans Tezi, *Texas Tech University*, Texas, (2003).
- [23] WALSH, P. G., “A polynomial-time complexity bound for the computation of the singular part of a Puiseux expansion of an algebraic function”, *Mathematics Of Computation*, Vol. 69, No. 231, 1167–1182, (2000).
- [24] Mudrov, A.E., Meshcheryakov, V. A., Red’Kin, G. A., “Coaxial waveguide with azimuthally magnetized gyrotropic filling”, *Russian Physics Journal*, Vol. 22, No. 5, 552–554, (1979).
- [25] Lloyd, J. E., “Using Puiseux series to control non-redundant robots at singularities”, *Robotics and Automation*, Proceedings., 1996 IEEE International Conference on Vol. 2, Minneapolis, Minnesota, 1877–1882, 22-28 April (1996).
- [26] KITAMOTO, T., “On Puiseux Expansion of Approximate Eigenvalues and Eigenvectors”, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Com. and Computer Sciences* , Vol. E81-A, No.6, 1242-1251, (1998).
- [27] Clarricoats, P. J. B., “Circular-waveguide backward wave structures,” *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Vol. 110, 261–270, (1963).

- [28] Jerby, E., Kesar, A., Aharony, A. and Breitmeier, G., “Ferrite-guided cyclotron-resonance maser,” *Physical Review E*, Vol. 65, 066502, (2002).
- [29] Baden Fuller, A., “Microwave propagation through round waveguide partially filled with ferrite,” *J. Proc. Inst. Electr. Eng.*, 108C, 339, (1961).
- [30] Knopp, K., “Theory of Functions, Part II”, *Dover Publications*, (1996).
- [31] Yener, N., “Algebraic function approximation in eigenvalue problems of lossless metallic waveguides (Revisited),” *Progress In Electromagnetics Research, PIER* Vol. 55, 147–174, (2005).
- [32] Yener, N., “Application of algebraic function theory to backward wave problems,” *Jour. of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 18, No. 10, 1399–1417, (2004).
- [33] Levinson, N. ve Redheffer, R. M., “Complex Variables”, *Holden-Day*, (1970).
- [34] İdemen, M., “Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi”, *Literatür Yayıncılık*, (1999).

## **ÖZGEÇMİŞ**

Oğuzhan DEMİRYÜREK 25.09.1983 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2005 yılında Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümü'nden Elektronik Teknik Öğretmeni olarak mezun oldu. 2006 güz döneminde Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Şubat 2006'dan beri İstanbul-Güngören Endüstri Meslek Lisesi Elektrik-Elektronik Teknolojisi Bölümünde Elektronik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evlidir.