<u>KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

PARABOLİK TERS PROBLEMLERDE GİRDİ-ÇIKTI OPERATÖRLERİNİN MONOTONLUK YAPISI VE İLGİLİ FONKSİYONELLERİN FRÈCHET DİFERANSİYELLENEBİLİRLİĞİ İLE LİPSCHİTZ SÜREKLİLİĞİ

DOKTORA TEZİ

Arzu ERDEM

Ana Bilim Dalı: MATEMATİK
Danışman: Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU

KOCAELİ, 2009

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK TERS PROBLEMLERDE GİRDİ-ÇIKTI OPERATÖRLERİNİN MONOTONLUK YAPISI VE İLGİLİ FONKSİYONELLERİN FRÈCHET DİFERANSİYELLENEBİLİRLİĞİ İLE LİPSCHİTZ SÜREKLİLİĞİ

DOKTORA TEZİ

Arzu ERDEM

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 08.12.2009

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.01.2010

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu

Üye
Prof. Dr. A. Okay Çelebi

Üye
Prof. Dr. Halis Aygün

Üye
Doç. Dr. Serdal Pamuk

Üye
Doç. Dr. Ahmet Küçük

KOCAELİ, 2009

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Fiziksel bir sistem için verilen matematiksel modelde giriş verilerinden yola çıkarak hesaplamalar sonucu çıkış verileri elde edilir. Bu çıkış verileri sistemin davranışını belirler. Çıkış verileri sistemin davranışı ile uyumlu ise ele alınan modelin uygun bir model olduğu sonucuna varılır. Pek çok değişik sistem kısmi türevli diferansiyel denklemler ile modellenmektedir. Bu durumda giriş verileri iki farklı şekilde gruplanabilir:

(i) Giriş verileri matematiksel modelde katsayı, sağ taraf fonksiyonu vb. şeklinde olabilir.
(ii) Giriş verileri matematiksel modelde başlangıç fonksiyonları, sınır fonksiyonları olabilir.

Bütün giriş verileri ile ele alınan probleme düz problem denir.

Diğer yandan sistemin fiziksel özellikleri bilinmediğinde ve deneysel ölçümlerin sonucu hatalı olduğunda, sistemin çıkış verilerini deneysel olarak ölçmek mümkün olabilir. Bu ölçümü kullanarak, bilinen giriş verileri ile birlikte, bilinmeyen giriş verisini yeniden elde edebiliriz. Bu yöntem, bize ters problemin formüle edilmesini ve çözümünü vermektedir. Aranan giriş verisi ile ölçülen çıkış verisi arasındaki bağıntıya girdi-çıktı operatörü denir.

Ters problemler, düz problem ile bağlantılı olarak oldukça değişik yapıda olabilir. Ayrıca bilinmeyen giriş verisini belirlemek için, hangi ölçülmüş çıkış verisinin kullanılacağı da belirsizdir. Bir ters problemin matematiksel analizinin amacı en uygun şartlarda en kolay ve en etkili kombinasyonu sağlayan ölçülmüş çıkış verisini saptamaktır.

Buradaki çalışmada, değişik yapıda verilen parabolik problemler için katsayıyı ve sağ taraf fonksiyonu ile birlikte sınır fonksiyonunu bulma ters problemleri ele alınarak, matematiksel analizleri yapılmıştır.

Çalışmanın 3. Bölümünde parabolik diferansiyel denklemler için katsayı bulma ters problemini ele alacağız. Bu problemlerdeki girdi-çıktı operatörünün monotonluğu ve Lipschitz sürekliliği ile bağlantılı olarak, problemin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında sonuçlar elde edilmiştir.

Tek çıkış verisi verildiğinde, sağ taraf fonksiyonu ve sınır fonksiyonunu, ikili olarak, bulma ters problemi 4. Bölümde incelenmiştir. Burada kullanılan yöntem, varyasyonel yöntemdir. Ele alınan hata fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu ve diferansiyelinin Lipschitz sürekli olduğu sonucu elde edilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın geriden gelecek olan genç araştırmacılara ve bilim dünyasına faydalı olacağını umut ediyorum. Beni böyle bir konuda çalışmaya sevk eden, fikirleri ile yönlendiren ve teşvik eden değerli hocam sayın Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu'na ve tez sürecinde bana daima destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER iii
ŞEKİLLER DİZİNİ v
SİMGELER vi
ÖZET vii
İNGİLİZCE ÖZET viii
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 4
2.1. Temel Kavramlar 21
3. TERS KATSAYI PROBLEMİNDE GİRDİ ÇIKTI OPERATÖRÜNÜN MONOTONLUĞU 23
3.1. Neumann-Neumann Sınır Koşullu Düz Problem ile Birlikte Dirichlet-Dirichlet Ek Koşullu Ters Katsayı Problemi 24
3.1.1. (3.1)-(3.2) ters kaysayı probleminde girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki ve maksimum prensibi 26
3.1.2. (3.4)'te tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği 29
3.2. Dirichlet-Neumann Sınır Koşullu Düz Problem ile Birlikte Neumann-Dirichlet Ek Koşullu Ters Katsayı Problemi 36
3.2.1. (3.13)-(3.14) ters katsayı probleminde girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki 37
3.2.2. (3.16)'da tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği 40
3.3. Neumann - Dirichlet Sınır Koşullu Düz Problem ve Dirichlet - Neumann Ek Koşulu ile Tanımlanmış Ters Katsayı Problemi 45
3.3.1. (3.24)-(3.25) ters problemi ile ilgili girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki 47
3.3.2. (3.27)'de tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği 49
3.4. Dirichlet - Dirichlet Sınır Koşullu Düz Problem ve Neumann - Neumann Ek Koşulu ile Tanımlanmış Ters Katsayı Problemi 55
3.4.1. (3.35)-(3.36) Ters problemi ile ilgili girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki 56
3.4.2. (3.38)'de tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği 58
4. PARABOLİK DENKLEMİN SAĞ TARAFINDA ve ROBİN KOŞULUNDA BULUNAN KUVVET FONKSİYONLARININ BELİRLENMESİ ile İLGİLİ TERS PROBLEM: EŞLENİK PROBLEM YAKLAŞIMI 64
4.1. Dirichlet Ek Koşulu ile Verilmiş, Değişken Katsayılı Parabolik Ters Problem . 65
4.1.1. (4.3) ile tanımlanan fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ve gradyanı 67
4.1.2. $J(w)$ fonksiyonelinin gradyanının Lipschitz sürekliliği 73

4.2. (4.1)-(4.2) Ters Probleminin Çözümünün Tekliği 74
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 76
6. KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER 78
KAYNAKLAR 80
ÖZGEÇMİŞ 83

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1: Düz Problemin Şeması 2
Şekil 1.2: Ters Problemin Şeması 2

SİMGELER

$C^m(\Omega)$	: m negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere kendisi ve $\lvert\alpha\rvert \le m$ olmak üzere α. kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı,
$C^\infty(\Omega)$	: İstenilen mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı ($C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$),
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde kompakt supporta sahip $C^\infty(\Omega)$' dan olan fonksiyonlar,
$C^{m,n}(\Omega)$	: m, n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere kendisi ve $\lvert\alpha\rvert \le m, \lvert\beta\rvert \le n$ olmak üzere x değişkenine göre α. kısmi türevleri, t değişkenine göre β. kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı,
Ω	: IR^n ' de sınırlı bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$\overline{\Omega}$	: Bölgenin kapanışı, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$,
$\langle .,. \rangle$	: Hilbert uzayında iç çarpım
$\lVert . \rVert$	: Banach uzayında norm

PARABOLİK TERS PROBLEMLERDE GİRDİ-ÇIKTI OPERATÖRLERİNİN MONOTONLUK YAPISI VE İLGİLİ FONKSİYONELLERİN FRECHET DİFERANSİYELLENEBİLİRLİĞİ İLE LİPSCHİTZ SÜREKLİLİĞİ

Arzu ERDEM

Anahtar Kelimeler: Parabolik Ters Problem, Girdi-Çıktı Operatörü, Frechet Diferansiyellenebilir, Lipschitz Sürekli, Monoton.

Özet: Buradaki çalışmada, lineer parabolik problemler için katsayıyı ve sağ taraf fonksiyonu ile birlikte sınır fonksiyonunu bulmak için formüle edilen ters problemlerin matematiksel analizi yapılmıştır. Her bir ters probleme özgü eşlenik problem tanımlanmıştır. Çalışmanın birinci kısmında girdi-çıktı operatörleri tanımlanmış ve bunların monotonluğu maksimum prensibine ve eşlenik problemin özelliklerine dayanarak kanıtlanmıştır. Çalışmanın ikinci kısmında, denklemin sağ tarafında ve Robin koşulunda bulunan kuvvet fonksiyonlarının oluşturduğu ikilinin belirlenmesi ile ilgili ters problem ele alınmıştır. Hata fonksiyonelinin Frechet diferansiyelinin açık biçimdeki ifadesi, ilgili eşlenik problemin çözümü üzerinden elde edilmiştir. Daha sonra bu gradyanın Lipschitz sürekliliği kanıtlanmıştır. Bu sonuç ters problemin yaklaşık çözümünün bulunmasında gradyan yönteminin verimli biçimde kanıtlanması imkânını sağlamıştır.

MONOTONICITY OF INPUT-OUTPUT OPERATORS IN INVERSE PARABOLIC PROBLEMS AND FRECHET DIFFERENTIABILITY WITH LIPSCHITZ CONTINUITY OF RELATED FUNCTIONALS

Arzu ERDEM

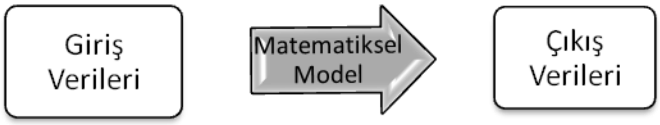
Keywords: Inverse Parabolic Problem, Input-Output Operator, Frechet Diferantiable, Lipschitz Continuous, Monotone.

Abstract: In this study, we consider a mathematical analysis of the problem of identifying unknown coefficient and source terms, which include the right hand function and the boundary function in Robin condition, in inverse parabolic problem. The adjoint problems corresponding to each inverse problems are given. In the first part of the study, input-output operators are defined and their monotonicity are obtained based on maximum principle and the properties of the adjoint problems. We deal with identifying the unknown right hand function and boundary function as a pair in the second part of the study. The gradient of error functional is expressed via the solutions of the direct and corresponding adjoint problems. The Lipschitz constant is obtained via the given data. This result gives the possibility to obtain the approximate solution of the inverse problem by using the gradient method as an effective way.

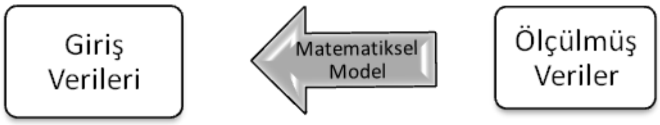
1. GİRİŞ

Çeşitli teknolojik süreçlerin güvenilirliğinin artması ve bu süreçlerde malzemenin rolünün çok önemli olduğu bilinen bir gerçektir. Bundan dolayı ısı transferine yönelik araştırmalar ve malzemenin ısıtılması/soğutulması ile ilgili üretim yöntemlerinin geliştirilmesi matematiksel modelde önemli bir rol oynar. Isı transferi olayında, malzeme özelliğini ifade eden katsayının sabit olmadığı durum veya lineer olmadığı durum, üretim yöntemindeki veya ısı transferindeki özel koşullardan meydana gelmektedir. Böylesi durumlar, teorik veya uygulamalı olarak genel yöntemlerin kullanımını azaltmaktadır. Bu yüzden, ısı mühendisliği çalışmalarında yeni yaklaşımlar geliştirilmektedir. Bunların arasında ters problemlerin çözümüne dayalı yöntemler özel bir yere sahiptir. Bu yöntemler, olaya çok benzeyen koşullar altında, deneysel olarak çalışma imkânı sunar. Ve dahası, bu araştırmalardan elde edilen bilgiler deneysel çalışmanın hızlanmasını ve malzeme harcamalarının azalmasını sağlar. Bu durum özellikle havacılık ve roket araştırmalarında çok önemlidir. Genel olarak, ters problemler, fiziksel yöntemlerin belirlenmesinde, mühendislik üretimlerinin dizaynında, kontrol sistemlerinde oldukça yaygındır. (Alifanov , 1994, Beck ve diğ., 1985)

Matematiksel bir modelde, ısı transferinin tüm durumları girdi ve çıktılar arasındaki bağıntılar ile ifade edilebilir. Burada ele alınan modele göre, bir sistemdeki veya bir nesnedeki ısı transferinin giriş verilerini, problemin sınır koşulları, parametreleri, başlangıç koşulları, ısı kaynağı, iletkenliği ve bunların yanı sıra sistemin veya nesnenin geometriksel karakteristikleri oluşturmaktadır. Çıkış verileri ise, herhangi bir zamanda, ısı durumunu göstermektedir. Isı transferinin matematiksel modelinde verilen giriş üzerinden çıkış verilerini ifade eden başlangıç sınır değer problemine düz problem denir. Isı transferi için ele alınan ters problemin formüle edilmesinde, düz problemin önemi çok büyüktür. Bu yüzden ısı transferi ile ilgili parabolik problemin klasik teorisinin iyi bilinmesi gerekmektedir (Ladyzhenskaya ve diğ., 1968, Özışık, 1968, Cannon, Browder, 1984, Budak ve diğ., 1988). Böylece modeli iki temel çerçevede gözlemleriz: Düz problem ve ters problem.



Şekil 1.1: Düz Problemin Şeması



Şekil 1.2: Ters Problemin Şeması

Ters problemin ifadesi, düz probleme rağmen, gerçek deneysel verilerden elde edilemeyebilir. Yani matematiksel olarak, girdi-çıktı arasındaki bağıntıyı tersinir kılmak mümkün olmayabilir. Bu yüzden, ısı transferi teorisinde ortaya çıkan ters problemler, iyi tanımlı olmayan problemler olarak tanımlanır.

Matematiksel bir problemin, iyi tanımlı olması 1902'de Hadamard tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir (Hadamard, 1923):

(i) Problemin çözümü vardır.
(ii) Problemin çözümü tektir.
(iii) Problemin çözümü giriş verilerine göre süreklidir.

Buna göre, o zamanlarda, problem matematiksel olarak iyi tanımlılık koşullarından birini sağlamazsa, pratik olarak o problemi çok kolay değildi. Ancak bu durum, ters problemler ile birlikte değişmeye başladı. 1926 da, Carlemen, ters problemlerin çözümü için ilk adımı atmış oldu (Carlemen, 1926). Çözüm fonksiyonlar sınıfının kompakt olması durumunda problemin iyi tanımlı olacağı sonucunu Tikhonov (1943), koşullu iyi tanımlılık olarak adlandırmıştır. Bu temel sonucun Lavrentiev (1967) ve Ivanov (2002) tarafından geliştirilmesi ile birlikte 1953 yıllarından başlayarak bu alanda pek çok sonuçlar elde edilmiştir (Tikhonov, Arsenin 1986).
Genel olarak, ters problemlerdeki girdi-çıktı bağıntılarını

$$Au = f$$

dönüşümü ile verebiliriz. Burada u giriş verilerinin kümesi U, f çıkış verilerinin kümesi F ile gösterilmek üzere, $A:U \to F$ ile tanımlanan A, lineer veya lineer olamayan bir operatördür. Buna göre problemin iyi tanımlı olması için A^{-1} sürekli operatörünün mevcut olması gerekmektedir. Problemin iyi tanımlı olması için, operatörler teorisindeki direk veya varyasyonel yöntemler ele alınabilir (Fucik, Kufner, 1980, Lavrent'ev, Savel'ev, 2006).

2. GENEL BİLGİLER

Burada ele alacağımız çalışmayı iki kısımda gruplandırabiliriz. Çalışmanın 1. parçasını parabolik diferansiyel denklemler için katsayı bulma ters problemi oluşturmaktadır. Parabolik denklemler için ters katsayı problemi ilk kez Cannon (1968) tarafından tanımlanmış, daha sonra da değişik yazarlar tarafından ele alınmıştır (Zeghal 2004, Elayyan, Isakov, 1997, Cannon, DuChateau, 1973, Cannon, DuChateau, 1980, DuChateau, 1981, DuChateau, Thelwell, Butters, 2004; Hasanov, DuChateau, Pektas, 2006; Hasanov, Demir, Erdem, 2007).

Zeghal (2004) tarafından aşağıdaki lineer olmayan parabolik problem ele alınmıştır:

$$\begin{cases} u_t = k(u)\Delta u, & (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T], \\ u(x,0)=0, & x\in\overline{\Omega}, \\ u(x,t)=h(x,t), & \partial\Omega\times[0,T]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Burada $\Omega\subset R^n$, $\alpha\in(0,1)$ için, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$ sınırına sahip, açık sınırlı bölgedir. $x_0\in\overline{\Omega}$ olmak üzere, iç noktada ölçülmüş veri (ısının değeri)

$$u(x_0,t)=\theta(t),\ t\in[0,T] \tag{2.2}$$

veya $\overline{x_0}\in\partial\Omega$ olmak üzere, sınırda dış normal ile ölçülmüş veri (ısı akışının değeri)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x_0},t)=\overline{\theta}(t),\ t\in[0,T] \tag{2.3}$$

olarak verilmiştir. Buna göre (2.1)- (2.2) ve (2.1)- (2.3) ters problemleri sırasıyla $k\to u(x_0,t;k)$ veya $k\to\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x_0},t;k)$ dönüşümleri ile ifade edilir. $k(u)\in C^1$ aranan fonksiyonlarının kümesini K ile, bu kümedeki analitik fonksiyonların kümesini de

K_α ile, uygun $h(x,t)$ fonksiyonlarının kümesini $H := \left\{ h \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left(\partial\Omega\times[0,T]\right) : h(x,0) = h_t(x,0) = h_{tt}(x,0), 0 < h_t, (x,t) \in \partial\Omega\times[0,T] \right\}$ ile gösterilirse, $h \in H$ ve $k_1, k_2 \in K_\alpha$ için, $u(x_0,t;k_1) = u(x_0,t;k_2)$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\left(\overline{x_0},t;k_1\right) = \frac{\partial u}{\partial n}\left(\overline{x_0},t;k_2\right) \right)$ olduğunda $k_1 = k_2$ olduğu kanıtlanarak (2.1)- (2.2) (2.1)- (2.3)) ters problemine karşılık gelen dönüşümün birebirliği kanıtlanmıştır ve böylece çözümün tekliği sonucu elde edilmiştir.

Elayyan, Isakov (1997) tarafından

$$\begin{cases} u_t - div(k(x)\nabla u) = \delta\left(x - x^*\right)\delta(x), & (x,t) \in R^n \times (0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in R^n, \end{cases} \tag{2.4}$$

Cauchy problemi ele alınmıştır. Burada, $\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega \in C^2$ sınırına sahip sınırlı bölge, f sınırlı fonksiyonu, $supp\, f = \Omega$ olmak üzere, $k(x) = 1 + f(x)$ olarak seçilmiştir. Ayrıca $\overline{\Omega^*} \cap \Omega = \varnothing$ olacak şekilde Ω^* bölgesinden alınan bir x^* noktasında $u(x,t;x^*), t \in (0,T)$ ölçümü verilmiştir. (2.4) probleminin çözümünü u_ε ile (2.4) probleminde $f(x) \equiv 0$ durumu için çözümü u_0 ile göstererek, $v_\varepsilon := u_\varepsilon - u_0$ ile tanımlanan fonksiyonun

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon = div(f(x)\nabla u_0) + div(f(x)\nabla u_\varepsilon), & (x,t) \in R^n \times (0,T], \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, & x \in R^n, \end{cases} \tag{2.5}$$

probleminin çözümü olduğu gösterilip, yeterince küçük olarak seçilen ε parametresi için (2.5) denkleminin sağ tarafındaki 2. terimin sıfıra yaklaştığı gösterilmiştir. Böylece (2.4) problemi yerine

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = div(f(x)\nabla u_0), & (x,t) \in R^n \times (0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in R^n, \end{cases} \tag{2.6}$$

lineerleştirilmiş problem ele alınmıştır. Sonuç olarak $u(x,t;x^*), t \in (0,T)$ ölçülmüş verisi ile (2.4) probleminde k fonksiyonunu bulma problemi yerine, (2.6) probleminde $f \in L_\infty(\Omega)$ fonksiyonunu bulma problemi incelenmiştir. (2.6) probleminin çözümünün integral gösterimi bilindiğinden, ölçülmüş veri göz önüne alındığında, (2.6) problemine karşılık gelen ters problem 1. tip Fredholm integral denklemine denktir. Ele alınan integral denklemde Fourier dönüşümünden faydalanılarak $f \in L_2(\Omega)$ fonksiyonları için ters problemin çözümünün tekliği ispatlanmıştır.

Cannon, DuChateau (1973) tarafından yarı sonsuz bölgede $\chi > 0$ pozitif sabit olmak üzere

$$\begin{cases} k(u)u_t = \chi\left(k(u)u_x\right)_x, & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = f(t), & t > 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

lineer olmayan parabolik probleminde

$$-\chi k(f(t))u_x(0,t) = g(t), t > 0 \tag{2.8}$$

ölçülmüş verisi ile $k(s)$ fonksiyonunu bulma problemi ele alınmıştır.

$$T_k(x) = \int_0^x k(s)ds \tag{2.9}$$

dönüşümünden faydalanarak $v(x,t) = T_k(u)$ ile tanımlanan fonksiyonun

$$\begin{cases} v_t = \chi v_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ -\chi v(0,t) = g(t), & t > 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$v(0,t) = T_k\left(f(t)\right) \tag{2.11}$$

ters probleminin çözümü olduğu gösterilmiştir. f, g fonksiyonlarının

(i) $f \in C^1,\ f(0) = 0,\ f'(t) > 0,$

(ii) $g \in C^2, g(0) = 0, g'(t) > 0, g''(t) > 0,$

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} \sqrt{f^{-1}(t)}\left(f^{-1}(t)\right)' > 0,$

koşullarını sağlaması durumunda, (2.10) probleminin çözümünden faydalanılarak, (2.7)-(2.8) ters probleminde $k(s)$ aranan fonksiyonu, kapalı formda verilmiştir. Aynı çalışmada problem sonlu bölgede de ele alınmıştır:

$$\begin{cases} k(u)u_t = \chi\left(k(u)u_x\right)_x, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,1), \\ -\chi k(u)u_x(x,t)\big|_{x=0} = g(t), & t > 0, \\ -\chi k(u)u_x(x,t)\big|_{x=1} = p(t), & t > 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &u(0,t) = f(t), t > 0, \\ &u(1,t_0) = h_0,\ t_0 > 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.9) dönüşümü ile $v(x,t) = T_k(u)$ olarak tanımlanan fonksiyon için, (2.12)-(2.13) $k(s)$ fonksiyonunu bulma ters problemi,

$$\begin{cases} v_t = \chi v_{xx}, & x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) = 0, & x \in (0,1), \\ -\chi v_x(x,t)\big|_{x=0} = g(t), & t > 0, \\ -\chi v_x(x,t)\big|_{x=1} = p(t), & t > 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &u(0,t) = T_k(f(t)), t > 0, \\ &u(1,t_0) = T_k(h_0),\ t_0 > 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

ters problemine dönüştürülmüştür. f, g, p fonksiyonları ve h_0, t_0 sabitleri için

(i) $h_0 > 0, t_0 > 0,$

(ii) $f \in C^1, f(0) = 0, f'(t) > 0,$

(iii) $g \in C^2, g(0) = 0, g'(t) > 0, g''(t) > 0,$

(iv) $p \in C^2, p(0) = 0, p'(t) < 0, p''(t) < 0,$

(v) $\lim\limits_{t \to 0} \sqrt{f^{-1}(t)}\left(f^{-1}(t)\right)' > 0,$

(vi) $-\int_0^{t_1} \frac{p(\tau)}{\sqrt{t_0 - \tau}} d\tau < \int_0^{t_1} \frac{g(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau,$

(vii) $t_1 = f^{-1}(h_0) < t_0,$

koşullarının sağlaması durumunda (2.14) probleminin çözümünden ve (2.15) ölçülmüş verilerinden faydalanılarak, $k(s)$ aranan fonksiyonu, kapalı formda verilmiştir ve $k(s)$ fonksiyonunun pozitif, diferansiyellenebilir fonksiyon olduğu kanıtlanmıştır.

Cannon, DuChateau (1980) tarafından,

$$\begin{cases} u_t = \left(k\left(u\right)u_x\right)_x, & \left(x,t\right)\in\left(0,1\right)\times(0,T], \\ u\left(x,0\right)=0, & x\in\left(0,1\right), \\ -k\left(u\right)u\left(x,t\right)\Big|_{x=0} = g\left(t\right), & t\in(0,T), \\ u_x\left(1,t\right)=0, & t\in\left(0,T\right), \end{cases} \tag{2.16}$$

lineer olmayan parabolik probleminde

$$u\left(0,t\right) = f\left(t\right), t\in(0,T) \tag{2.17}$$

ölçülmüş verisi ile $k(s)$ fonksiyonunu bulma problemi ele alınmıştır. Aranan $k(s)$ fonksiyonlarının kümesini K ile gösterirsek, (2.16)- (2.17) ters problemi,

$$J(k) = \sup_{[0,T]}\left|u\left(0,t;k\right) - f(t)\right|$$

fonksiyoneli için

$$J(k^*) = \inf_{k\in K} J(k)$$

minimum problemine dönüştürülmüştür. Bu problemin çözümü önce Ivanov, Vasin ve Tanana (1978), daha sonra Tikhonov ve Arsenin (1986) tarafından ters problemin quasi çözümü olarak tanımlanmıştır. Öncelikle, burada ν, μ, δ ve M pozitif sabitler, $\alpha\in\left(0,1\right)$, $I=\{x: 0\le x\le M\}$ olmak üzere $K:=\left\{k\in C^{2+\alpha}(I): 0<\nu<k(s)<\mu, \left|k'(s)\right|, \left|k''(s)\right|\ge\delta\right\}$ kümesinin $C^2(I)$ uzayında kompakt olduğunu gösterilmiştir. (2.9) dönüşümü ile (2.16)-(2.17) ters problemi

$$\begin{cases} v_t = k\left(T^{-1}(v)\right)v_{xx}, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T], \\ v(x,0)=0, & x\in(0,1), \\ -v(x,t)\big|_{x=0} = g(t), & t\in(0,T), \\ v_x(1,t)=0, & t\in(0,T), \end{cases} \tag{2.18}$$

$$v(0,t)=T_k\left(f(t)\right)=F(t),\ t\in(0,T) \tag{2.19}$$

ters problemine dönüştürülmüştür.

$$h(t)\in C^1[0,T], h(0)=0, h'(t)\geq 0, 0\leq t\leq T \tag{2.20}$$

$\forall k\in K$ ve (2.20) koşullarını sağlayan f,g fonksiyonları için (2.18)-(2.19) ters probleminin $v(x,t;k)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left((0,1)\times(0,T)\right)$ tek çözümü olduğu gösterilmiş ve (2.9) dönüşümünün $u=T_k^{-1}(v)$ ters dönüşümü ile elde edilen fonksiyonun $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}\left((0,1)\times(0,T)\right)$ sınıfından, (2.16)- (2.17) ters probleminin çözümü olduğu kanıtlanmıştır.

Cannon, DuChateau'nun (1973) çalışmasındaki, sonlu bölgede ele alınan parabolik probleme benzer olarak değişik sınır koşulları ve ölçümleri ile DuChateau (1981), lineer olmayan parabolik problemde bilinmeyen katsayının monotonluğu ve tekliği sonuçlarını elde etmiştir. DuChateau'nun bu çalışmasında ele aldığı parabolik problem

$$\begin{cases} u_t = \left(k(u)u_x\right)_x, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T], \\ u(x,0)=0, & x\in(0,1), \\ -k(u)u(x,t)\big|_{x=0} = g(t), & t\in(0,T), \\ u_x(1,t)=0, & t\in(0,T), \end{cases} \tag{2.21}$$

$$u(0,t)=f(t), t\in(0,T) \tag{2.22}$$

(2.21)-(2.22) ters katsayı problemidir. (2.9) dönüşümünden faydalanarak, $v(x,t)=T_k(u)$ ile tanımlanan fonksiyon

$$\begin{cases} v_t = a(v)v_{xx}, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T], \\ v(x,0)=0, & x\in(0,1), \\ -v(x,t)\big|_{x=0} = g(t), & t\in(0,T), \\ v_x(1,t)=0, & t\in(0,T), \end{cases} \tag{2.23}$$

$$v(0,t)=T_k\left(f(t)\right)=F(t), t\in(0,T) \tag{2.24}$$

ters probleminin çözümüdür. Burada $a(v)=T_k^{-1}(u)$ olarak tanımlanmıştır. (2.21)-(2.22) ters probleminde

(i) $k_0 \le k(u) \le u_1, 0 \le u \le M,$

(ii) $\|k\|_{2+\alpha} < k_1, \alpha \in (0,1),$

(iii) $k'(u) \ge 0, 0 \le u \le M,$

koşullarını sağlayan aranan $k(u)$ katsayılarının kümesini K ile gösterirsek, $g(t)\in C^1[0,T]$ fonksiyonu

$$g(0)=0, g'(t)>0,$$

koşulunu sağlıyorsa (2.23)-(2.24) ters probleminin çözümünün varlığı ispatlanmıştır. Bu varsayımlar altında $\psi_0 : a \to v(0,t;a)$ dönüşümünün monotonluğu maksimum prensibinden faydalanılarak (Protter, Weinberger, 1984), ispatlanmıştır.

Bizim çalışmamızın 3. bölümündeki, ters katsayı problemlerinde problemin çözümünün varlığı ve tekliği için ele alacağımız yöntem, monotonluk yöntemidir. Monotonluk yöntemleri, eşlenik problemin çözümü ile ilişkili olarak giriş-çıkış verileri arasındaki integral bağıntıya dayanmaktadır (DuChateau,1995; DuChateau, Thelwell, Butters, 2004; Hasanov, DuChateau, Pektas, 2006; Hasanov, Demir, Erdem, 2007). Bu yöntemde, maksimum prensibi ile birlikte problem ve eşlenik problem arasındaki integral bağıntı kullanılarak girdi-çıktı operatörünün özellikleri belirlenmiştir. Bu özelliklerden faydalanarak operatörün tersinirliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. DuChateau (1995) ve DuChateau, Thelwell, Butters (2004) tarafından lineer olmayan parabolik problem incelenirken, Hasanov, DuChateau, Pektas (2006); Hasanov, Demir, Erdem (2007) tarafından lineer olan parabolik problemler ele alınarak, bunların nümerik algoritmaları verilmiştir. Biz burada, lineer olan parabolik problemler için, kapsamlı bir şekilde, hangi koşullar altında, girdi-çıktı operatörünün tersi vardır ve kararlılık koşulu nelerdir sorularının cevabını arayacağız.

Çalışmanın 2. parçasını parabolik diferansiyel denklemler için, tek çıkış verisi verildiğinde, sağ taraf fonksiyonu ve sınır fonksiyonunu, ikili olarak, bulma ters problemi ele alınmıştır. Sadece sınır fonksiyonunu bulma problemi ve sadece sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi ile ilgili değişik çalışmalar yapılmıştır (Cannon, 1968; Wenhuan, 1997; Ivanchov, 1998; Park, Chung, 1999; Hettlich, Rundell, 2001; Gol'dman,2003; Gongsheng, 2006; Yang, Hu, Shen 2008; Choulli, 1999, Hömberg, Yamamoto, 2006; Shidfar ,Karamali ve Damirchi, 2006; Slodicka, Keer, 2002). İkili olarak, sınırda verilen ölçüm ile birlikte başlangıç fonksiyonu ve sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi Capatina, Stavre (2000) tarafından, final zamandaki ölçüm ile sağ taraf fonksiyonu ve sınır fonksiyonunu bulma problemi Hasanov (2007) tarafından ele alınmıştır.

Cannon (1968) n-boyutlu bölgede sağ taraf fonksiyonunu bulma problemini incelemiştir. V , n-boyutlu sınırlı bölge, S , bölgenin sınırı, $D \subset S$ için,

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = f(x), & (x,t) \in V \times [0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in S \times [0,T] \cup \overline{V}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in D \times [0,T], \end{cases}$$

parabolik probleminde $f(x)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma ters problemini incelemiştir. Ters problemin çözümünü tekliği için

$$\begin{cases} \Delta\psi + \lambda\psi = 0, & x \in V, \\ \psi(x) = 0, & x \in S, \end{cases}$$

özdeğer probleminden faydalanmıştır.

Wenhuan (1997) tarafından

$$\begin{cases} Lu = q(x) f(x,t) + \Phi(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = \psi_2(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \psi_1(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{2.25}$$

parabolik problemi ele alınmıştır. Burada $Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{m} (a_j(x) u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$ parabolik operatör, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, $\partial\Omega$ sınırının dış normalidir. (2.25) problemi için final zamanda verilen

$$u(x,T) = \psi_3(x), x \in \Omega$$

ölçümü ile $q(x)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma ters problemi incelenmiştir. Problemin eşlenik probleminden faydalanarak, uygun koşullarda, Banach uzayında ters problemin varlığı ve giriş verilerine göre sürekliliği gösterilmiştir.

Ivanchov (1998) tarafından

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_x + cu + f(t) g_0(x,t) + g_1(x,t), & (x,t) \in (0,h) \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in (0,h), \end{cases} \tag{2.26}$$

parabolik problemi için farklı sınır koşulları ve bu koşullara karşılık gelen ölçümler ile 3 farklı ters problem ele alınmıştır.

$$\begin{cases} u(0,t) = u(h,t) = 0, & t \in (0,T], \\ v_1(t)u_x\left(0,t\right) + v_2(t)u_x(h,t) = \kappa\left(t\right), & t \in (0,T], \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, & t \in (0,T], \\ v_1(t)u\left(0,t\right) + v_2(t)u(h,t) = \kappa\left(t\right), & t \in (0,T], \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\begin{array}{ll} u(0,t) = u_x(h,t) = 0, & t \in (0,T], \\ v_1(t)u_x\left(0,t\right) + v_2(t)u(h,t) = \kappa\left(t\right), & t \in (0,T], \end{array} \tag{2.29}$$

Bu çalışmada (2.26)-(2.27), (2.26)-(2.28) ve (2.26)-(2.29) ters problemlerinde $g_0(x,t)$ sağ taraf fonksiyonunun tek olarak belirlenmesi için gerekli koşullar elde edilmiştir.

Park ve Chung (1999) tarafından

$$\begin{cases} v_t + v.\nabla v = -\nabla P + \Pr \nabla^2 v + R.\Pr .Tj, \\ u_t + v.\nabla u = \nabla^2 u + G(t)\delta_n\left(x - x^*\right)\delta_n\left(y - y^*\right), \end{cases} \tag{2.30}$$

parabolik denklem sistemi ele alınmıştır. Burada P, $\Pr$, R, Tj verilen sayılar $\delta_n\left(x - x^*\right) = \dfrac{n}{2\cosh^2(n(x - x^*))}$ Dirac fonksiyonudur. (2.30) sisteminde başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{cases} v(x,y,0) = 0, u(x,y,0) = 0, \\ v(\pm 1,y,t) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pm 1,y,t) = 0, \\ v(x,\pm 1,t) = 0, u(x,\pm 1,t) = 0, \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. Toplam N tane $\left(x_m, y_m\right)$ noktalarında verilen $u^*\left(x_m, y_m\right)$ ölçümü yardımıyla $G(t)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi incelenmiştir.

$$J(G)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t_f}[u(x_m,y_m,t)-u^*(x_m,y_m,t)]^2\,dt$$

fonksiyonelinin gradyenti hesaplanarak, gradyent yöntemi ile $G(t)$ fonksiyonu için nümerik yaklaşım elde edilmiştir.

Hettlich ve Rundell (2001) tarafından

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+\kappa_D, & (x,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u(x,0)=0, & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \end{cases}$$

parabolik problemi ele alınmıştır. Burada $\Omega\subset R^2$ ve $D\subset\Omega$ olmak üzere κ_D, D bölgesininin karakteristik fonksiyonudur. ∂D sınırında verilen $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ ölçümü ile D bölgesininin karakterini, κ_D fonksiyonundan faydalanarak belirleme ters problemi ele alınmıştır. Ters problemin tekliği için gerekli olan koşullar elde edilmiştir.

Gol'dman (2003) tarafından

$$\begin{cases} c(u)u_t-Lu=p_0(x,t)f(x)+p_1(x,t), & (x,t)\in(0,l)\times(0,T],\\ a(u)u_x-e_0(u)u\big|_{x=0}=q_0(t), & t\in(0,T],\\ a(u)u_x+e_1(u)u\big|_{x=l}=q_1(t), & t\in(0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l), \end{cases}$$

$$Lu=(a(u)u_x)_x+b(u)u_x+d(u)$$

yarı lineer parabolik probleminde final zamanda

$$u(x,T)=g(x),\, x\in(0,l)$$

ölçülmüş verisi ile $f(x)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi ele alınmıştır. Bu çalışmada Hölder sınıfında çözümün tekliği ve giriş verilerine göre sürekliliği için koşullar elde edilmiştir.

Gongsheng (2006) tarafından

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = a(x)g(u), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T], \\ u_x(0,t) = -h(t), & t \in (0,T], \\ u_x(1,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,1), \end{cases}$$

yarı lineer parabolik probleminde final zamanda

$$u\left(x,T\right) = \theta(x), x \in (0,1)$$

ölçülmüş verisi ile $g(u)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi ele alınmıştır. Probleme karşılık gelen eşlenik problemden faydalanılarak, integral özdeşlik elde edilmiştir. Uygun koşullar altında ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca, integral özdeşlik üzerinden, problemin koşullu iyi tanımlılığı ispatlanmıştır.

Yang, Hu ve Shen (2008) tarafından

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x = \beta u_{xx} - ku + \sum_{i=1}^{q} S_i \delta(x - x_i), & (x,t) \in (0,l)\times(0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T], \end{cases}$$

parabolik probleminde, x_i verisine göre kaynağın S_i şiddeti ile olan ilişkisi incelenmiştir. Ters problemin çözümü, probleme karşılık gelen minimum probleminin çözümü olarak alınmıştır. Verilen algoritma ile ters problemin nümerik çözümü ve bununla ilişkili hata analizi yapılmıştır.
Choulli (1999) tarafından

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \varphi(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \end{cases}$$

parabolik probleminde, sınırın bir kısmında veya $x_0 \in \partial\Omega$ noktasında

$$u\left(x_0, t\right) = h(t), t \in (0,T]$$

ölçülmüş verisi ile $g(u)$ sınır koşulunu bulma ters problemleri ele alınmıştır. Çalışmada, her iki ters problem için, uygun koşullar altında, çözümün tekliği sonucu elde edilmiştir.

Hömberg ve Yamamoto (2006) tarafından

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(u) + p(t)G(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \end{cases}$$

parabolik probleminde, $\gamma(t) \in \Omega$ için

$$u(\gamma(t),t) = h(t), t \in (0,T]$$

ölçülmüş verisi ile $p(t)$ sağ taraf fonksiyonunu bulma ters problemi ele alınmıştır. Ters problemin tek çözümü için koşullar elde edilmiştir.

Shidfar ,Karamali ve Damirchi (2006) tarafından

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(u), & (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ u_x(0,t) = q(t), & t \in (0,T], \\ u_x(1,t) = g(t), & t \in (0,T], \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

parabolik probleminde

$$u(1,t) = p(t), t \in (0,T]$$

ölçülmüş verisi ile $q(t)$ sınır fonksiyonunu bulma problemi ele alınmıştır. Probleme karşılık gelen eşlenik problemden faydalanılarak elde edilen integral özdeşlik yardımı ile nümerik çözümün analizi yapılmıştır.

Slodicka ve Keer (2002) tarafından R^n 'de sınır fonksiyonunu bulma ters problemi incelenmiştir. Bu çalışmada, $\Omega \subset R^n$ sınırlı bölgesinin Lispchitz sürekli Γ sınırı, $\Gamma = \overline{\Gamma}_{non} \cup \overline{\Gamma}_{Dir} \cup \overline{\Gamma}_{Neu}$ olacak şekilde 3 kısımdan oluşmaktadır.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \overline{\Gamma}_{Dir} \times (0,T], \\ -\nabla u.\nu = g(x,t), & (x,t) \in \overline{\Gamma}_{Neu} \times (0,T], \\ -\nabla u.\nu = \lambda(t)u(x,t) + h(x,t), & (x,t) \in \overline{\Gamma}_{non} \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

parabolik probleminde ν, Γ sınırının dış normalini göstermek üzere,

$$M(t) = \int_{\Gamma_{non}} u^2(t)$$

ölçülmüş verisi ile $\lambda(t)$ sınır fonksiyonunu bulma ters problemi ele alınmıştır. Problemin çözümünün tekliği için gerekli koşullar elde edilmiştir.

Capatina ve Stavre (2000) tarafından

$$\begin{cases} \rho c u_t = k\Delta u + f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ k\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \end{cases}$$

parabolik problemi ele alınmıştır. $\Omega \subset R^n \; (n = 2,3)$ pürüzsüz sınıra sahip bölge, ve sınırda

$$u\left(x,t\right) = h(t), (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T]$$

ölçülmüş verisi ile $\left(f,\varphi\right)$ ikilisini bulma ters problemi incelenmiştir.

$$J(f,\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T \|u-h\|^2_{L_2(\partial\Omega)} dt + \frac{N}{2}\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega\times(0,T])} + \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

fonksiyoneli için varyasyonel yöntemden faydalanarak, ters problemin tek çözümü için gerekli olan koşullar araştırılmıştır.

Hasanov (2007) tarafından

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x,t), & (x,t) \in \Omega_T := \{0 < x < l, 0 < t \le T\}, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & x \in [0,l], \\ k(l)u_x(l,t) = \nu[p(t) - u(l,t)], & t \in [0,T], \\ u_x(0,t) = 0, & t \in [0,T], \end{cases}$$

parabolik problemi ele alınmıştır.

$$u(x,T) = \varphi_T(x), x \in [0,l].$$

ölçülmüş verisi ile $w = (F, p)$ ikilisini bulma problemi ele alınmıştır.

$$J(w) = \int_0^l [u(x,T;w) - \varphi_T(x)]^2 dx$$

fonksiyoneli için ters problemin çözümü

$$\exists w \in H, J(w) = \int_0^l [u(x,T;w) - \varphi_T(x)]^2 dx \to \min$$

probleminin çözümü olarak aranmıştır. Fonksiyonelin Fréchet diferansiyellenebilir olduğu ve diferansiyelinin Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Bu koşullar ise nümerik olarak çözümün yakınsaklığını garantilemektedir.

Tezin 4. bölümünde Hasanov (2007) tarafından verilen yöntemin, farklı ölçüm için, uygulaması ele alınmıştır.

2.1. Temel Kavramlar

Teorem 2.1. (Maksimum prensibi) $u = u(x,t)$ fonksiyonu için

$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $a(x,t) > 0$ pozitif fonksiyondur. Bu durumda, $\Omega \cup \partial\Omega$ bölgesinde, $u(x,t)$ fonksiyonu maksimum değerini bölgenin sınırında alır (Protter ve Weinberger, 1984).

Tanım 2.1. X Banach uzayı ve $M \subset X$ olsun. $f : M \subset X \to R$ fonksiyoneli, $\forall u \in M$ için $\|u\| \to \infty$ olduğunda $f(u) \to \infty$ koşulunu sağlıyor ise, f fonksiyoneline zayıf koersivdir denir (Zeidler, 1989).

Tanım 2.2. C lineer bir uzayda küme olmak üzere, $\forall u, v \in C$, $\forall t \in [0,1]$ için $(1-t)u + tv \in C$ koşulu sağlanıyorsa, C kümesine konveks küme denir (Zeidler, 1989).

Tanım 2.3. $f : C \to R$ fonksiyoneli, $\forall u, v \in C$, $\forall t \in [0,1]$ için $f\left((1-t)u + tv\right) \leq (1-t) f(u) + tf(v)$ koşulunu sağlıyor ise, f fonksiyoneline konveks fonksiyonel denir (Zeidler, 1989).

Tanım 2.4. $f : C \to R$ fonksiyoneli, $\forall u, v \in C$, $\forall t \in (0,1)$, $u \neq v$ için $f\left((1-t)u + tv\right) < (1-t) f(u) + tf(v)$ koşulunu sağlıyor ise, f fonksiyoneline kesin konveks fonksiyonel denir (Zeidler, 1989).

Teorem 2.2. (Minimum problemi ile ilgili temel teorem) X Banach uzayı olsun. $f : X \to R$ fonksiyoneli konveks, sürekli ve zayıf koersiv ise f fonksiyoneli X'de minimum değerini alır. Eğer f keisn konveks fonsiyonel ise minimum tektir (Zeidler, 1989).

3. TERS KATSAYI PROBLEMİNDE GİRDİ ÇIKTI OPERATÖRÜNÜN MONOTONLUĞU

Fiziksel deneylerle sınırda ölçülen çıkış verisi ile bilinmeyen katsayı arasındaki ilişkilerin belirlenmesi, ters problemlerin temelini oluşturan bir sorudur. Isı transferi - difüzyon denklemleri (Alifanov,1994; Beck, Blackwell, Clair, 1985), petrol rezervinin modellenmesi ve yeraltı su kaynaklarının modellenmesi gibi güncel alanlarda ters katsayı problemleri önemli bir yer kaplamaktadır (Bear, 1972, Zheng, Bennett, 1995). Bu türlü problemler iyi tanımlı olmayan problemler olarak da bilinir. Bu bölümde, ters katsayı probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili ele alacağımız yöntem, monotonluk yöntemidir. Bu yöntemin uygulanması, önce bir eşlenik problemin tanımlanmasını gereketirir. Eşlenik problemler, $\varphi(x,t) \in D :\equiv C_0^\infty(R^2)$ keyfi fonksiyonu ile düz problemi çarpıp, kısmi integralleme yöntemi kullanılarak elde edilir. Bu ise, deneysel ölçümlerin verim türüne bağlı olarak, aynı düz problem için farklı eşlenik problemler elde edilebilmesi anlamına gelir. Sonuç olarak, orijinal problem ile eşlenik problem arasında çeşitli bağıntılar, integral özdeşlikler, elde edilir. Monotonluk yöntemi de giriş-çıkış verileri arasındaki bu integral bağıntılara dayanmaktadır (DuChateau,1995; DuChateau, Thelwell, Butters, 2004; Hasanov, DuChateau, Pektas, 2006; Hasanov, Demir, Erdem, 2007). Burada, maksimum prensibini ve integral bağıntıyı kullanarak girdi-çıktı operatörünün özelliklerini belirleyeceğiz. Bu özelliklerden faydalanarak operatörün tersinirliği ile ilgili sonuçlar elde edeceğiz.

3.1. Neumann-Neumann Sınır Koşullu Düz Problem ile Birlikte Dirichlet-Dirichlet Ek Koşullu Ters Katsayı Problemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ k(0)u_x(0,t) = \mu_0(t), & 0 < t < T, \\ k(1)u_x(1,t) = \mu_1(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.1}$$

Burada $\Omega_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < t \le T\}$ parabolik bölgedir. $c_1 > k(x) \ge c_0 > 0$ fonksiyonu ve $\mu_0(t), \mu_1(t)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(C1) $k(x) \in C^1[0,1]$,

(C2) $\mu_0(t), \mu_1(t) \in C[0,T]$.

Bu koşullar altında (3.1) başlangıç sınır değer probleminin $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ tek çözümü vardır (Ladyzhenskaya, Solonnikov, Uralceva, 1968).

Aşağıdaki Dirichlet-Dirichlet ölçülmüş sınır koşulları ile verilmiş $k = k(x)$ bilinmeyen katsayısını bulma ters problemini düşünelim:

$$u(0,t) = h_0(t), \quad u(1,t) = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.2}$$

Burada $u = u(x,t)$ fonksiyonu (3.1) parabolik probleminin $k(x) \in K$ katsayısına karşılık gelen çözümüdür. (3.1)-(3.2) ters problemi Hasanov, DuChateau ve Pektas (2006) tarafından $\mu_1(t) = 0$ durumu için ele alınmıştır. (3.8) integral ilişkisinde de görüleceği üzere $\mu_1(t) \neq 0$ durumunda Neumann koşulunun etkisi dikkate alınabilir. Dolayısıyla burada problem genel ele alınmıştır.

$h_0(t), h_1(t)$ ölçülmüş çıkış verileri $C^1[0,T]$ sınıfından olsun. $K \subset C^1[0,1]$ ve $H_0, H_1 \subset C^1[0,T]$, sırasıyla, $k = k(x)$ aranan katsayıların uygun kümesi ve $h_0(t), h_1(t)$ ölçülmüş çıkış verilerinin kümesi olsun.

Verilen bir $k = k(x) \in K$ katsayı için, (3.1) düz problemin çözümünü $u = u(x,t;k)$ ile gösterelim. Bu durumda ters problemi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$u(x,t;k)\big|_{x=0} = h_0(t), \quad u(x,t;k)\big|_{x=1} = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.3}$$

Girdi-çıktı operatörlerini $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$, $\Phi[k] := u(x,t;k)\big|_{x=0}$, $\Psi[k] := u(x,t;k)\big|_{x=1}$, olarak gösterirsek, (3.3) lineer olmayan denklemini aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazabiliriz:

$$\Phi[k](t) = h_0(t), \quad \Psi[k](t) = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.4}$$

Böylece $h_0(t)$ ve $h_1(t)$ ölçülmüş verileri ile verilen (3.1)-(3.2) ters problemi, (3.3) lineer olmayan denkleminin çözümüne ya da (3.4) ile tanımlanan $\Phi: K \mapsto H_0$, $\Psi: K \mapsto H_1$ girdi-çıktı operatörlerinin tersinirliğinin araştırılması problemine indirgenir.

3.1.1. (3.1)-(3.2) ters kaysayı probleminde girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki ve maksimum prensibi

Aşağıda elde edilen sonuçlar, $\mu_0(t), \mu_1(t)$ Neumann-Neumann giriş verilerinin işaretinin (3.1) düz probleminin $u = u(x,t)$ çözümüne etkisini göstermektedir.

Teorem 3.1. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.1) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer Neumann sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\mu_0(t) < 0, \mu_1(t) \le 0,\ 0 < t < T$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall (x,t) \in \Omega_\tau$, $\forall \tau \in (0,T)$ için $u_x(x,t) \le 0$ eşitsizliği sağlanır.

$\varphi(x,t) \in D :\equiv C_0^\infty(R^2)$ keyfi fonksiyon olmak üzere (3.1) denklemini $\varphi_x(x,t)$: ile çarpalım:

$$\iint_{\Omega_\tau} [u_t - (k(x)u_x)_x]\varphi_x dxdt = 0.$$

Kısmi integralleme yöntemini uygulandığında aşağıdaki eşitlik bulundu:

$$\int_0^1 u\varphi_x\Big|_{t=0}^{t=\tau} dx - \iint_{\Omega_\tau} u\varphi_{xt} dxdt - \int_0^\tau k(x)u_x\varphi_x\Big|_{x=0}^{x=1} dt + \iint_{\Omega_\tau} k(x)u_x\varphi_{xx} dxdt = 0.$$

İkinci integrale tekrar kısmi integralleme yöntemini uyguladığımızda,

$$\int_0^1 u\varphi_x\Big|_{t=0}^{t=\tau} dx - \int_0^\tau u\varphi_t\Big|_{x=0}^{x=1} dt + \iint_{\Omega_\tau} u_x\varphi_t dxdt - \int_0^\tau k(x)u_x\varphi_x\Big|_{x=0}^{x=1} dt + \iint_{\Omega_\tau} k(x)u_x\varphi_{xx} dxdt = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece,

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(\varphi_t + k(x)\varphi_{xx})\, dxdt = \int_0^\tau [u(1,t)\varphi_t(1,t) - u(0,t)\varphi_t(0,t)]\, dt$$
$$+\int_0^\tau [k(1)u_x(1,t)\varphi_x(1,t) - k(0)u_x(0,t)\varphi_x(0,t)]\, dt \tag{3.5}$$
$$-\int_0^1 [u(x,\tau)\varphi_x(x,\tau) - u(x,0)\varphi_x(x,0)]dx$$

integral eşitliğini buluruz. $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki ters yönlü parabolik problemin çözümü olarak seçelim:

$$\begin{cases} \varphi_t + k(x)\varphi_{xx} = F(x,t) & ,(x,t) \in \Omega_\tau, \\ \varphi(x,\tau) = 0 & ,x \in (0,1), \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0 & ,t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{3.6}$$

burada $F(x,t)$ keyfi fonksiyondur.

$\varphi = \varphi(x,t)$ fonksiyonu için (3.6) ters yönlü parabolik problemi iyi tanımlıdır. Çünkü, (3.6) denkleminde $t \in (0,\tau)$ değişkenini $\tau - t$ ile değiştirdiğimizde, (3.6) denkleminden, $\varphi_t = k(x)\varphi_{xx} - F(x,\tau - t)$ denklemini elde ederiz. Bu ise parabolik denkleme karşılık gelmektedir.

Burada, (3.6) da başlangıç ve sınır koşullarından, $\varphi_t(0,t) = \varphi_t(1,t) = \varphi_x(x,\tau) = 0$ elde edilir. Bu koşulları (3.5) integralinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = \int_0^\tau [\mu_1(t)\varphi_x(1,t) - \mu_0(t)\varphi_x(0,t)]dt \tag{3.7}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, (3.6) eşlenik probleminde maksimum prensibini, $F(x,t) > 0,\ \forall(x,t) \in \Omega_\tau$ fonksiyonu için uygulandığında $\varphi(x,t) < 0, \forall(x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuç, $\varphi(0,t) = 0, \varphi(1,t) = 0$ sınır koşullu ile birlikte,

$$\varphi_x(0,t) := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h,t)-\varphi(0,t)}{h} \le 0,\ \ \varphi_x(1,t) := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(1,t)-\varphi(1-h,t)}{h} \ge 0$$

değerlendirmesine götürür. Burada klasik çözümden bahsettiğimiz için $\varphi(x,t)$ fonksiyonu sürekli fonksiyondur. Bu yüzden limitte kesin eşitsizlik söz konusudur. Diğer yandan $\mu_0(t) < 0, \mu_1(t) \le 0,\ 0 < t < \tau$ olması ile, (3.7) integral özdeşliğinin sağ tarafını negatif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \le 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \le 0, \forall(x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu elde ederiz.

Yukarıdaki teoremde Neumann sınır koşullarındaki eşitsizliklerin yönü değiştiğinde aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.2. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega_T})$ fonksiyonunun (3.1) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer Neumann sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\mu_0(t) \ge 0, \mu_1(t) > 0,\ 0 < t < T$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall(x,t) \in \Omega_\tau$, $\forall \tau \in (0,T)$ için $u_x(x,t) \ge 0$ eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.1 (Hasanov, DuChateau, Pektas, 2006). $x = 0$ noktasındaki akıyı $Fl(t)\big|_{x=0} := -k(0)u_x(0,t)$ olarak tanımlayabiliriz. Buna göre, $Fl(t)\big|_{x=0} := -k(0)u_x(0,t) = -\mu_0(t) > 0,\ \mu_1(t) = 0$ durumu, ısı transferinin, sıcaklığın yüksek olduğu bölgeden daha düşük olan bir bölgeye doğru değişimini ifade etmektedir. Bu durum ise Teorem 3.1 ile aynı anlamı taşır.

Sonuç 3.2. $x = 1$ noktasındaki akıyı $Fl(t)\big|_{x=1} := k(1)u_x(1,t)$ olarak tanımlayabiliriz. Buna göre, $Fl(t)\big|_{x=1} := k(1)u_x(1,t) = \mu_1(t) > 0,\ \mu_0(t) = 0$ durumu, ısı transferinin, sıcaklığın düşük olduğu bir bölgeden daha yüksek olan bir bölgeye doğru değişimini ifade etmektedir. Bu durum da Teorem 3.2 ile aynı anlamı taşır.

3.1.2. (3.4)'te tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği

Aşağıdaki sonuçlar bize $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğunu vermektedir. Aşağıdaki Lemma Hasanov, DuChateau, Pektas, (2006) tarafından verilmiştir. Ancak bu çalışmada ele alınan problemde $\mu_1(t) \equiv 0$ olarak alınmıştır. Burada $\mu_1(t)$ fonksiyonu için pozitif veya negatif fonksiyon olma koşulu ile Hasanov, DuChateau, Pektas, (2006) tarafından verilen sonucun genellemesi olarak ele alacağız.

Lemma 3.1. $u_1(x,t) = u(x,t;k_1)$ ve $u_2(x,t) = u(x,t;k_2)$ fonksiyonlarının (3.1) probleminin $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayılarına karşılık gelen birer çözümü olduğunu varsayalım. $h_{0,j}(t) = u(0,t;k_j)$, $h_{1,j}(t) = u(1,t;k_j)$ ($j = 1,2$) fonksiyonları bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri olsun. $\forall \tau \in (0,T)$ için $h_{0,j}(t)$, $h_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar.

$$\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t) \varphi_x(x,t) dxdt = -\int_0^\tau [\beta_1(t)\Delta h_1(t) - \beta_0(t)\Delta h_0(t)]dt, \tag{3.8}$$

burada $\Delta h_0(t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t)$, $\Delta h_1(t) = h_{1,1}(t) - h_{1,2}(t)$ $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x)$ olarak tanımlanır ve $\beta_0(t), \beta_1(t) \in C(0,\tau)$ için $\varphi(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,\beta_1)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \varphi_t + (k_1(x)\varphi_x)_x = 0, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1), \\ k_1(0)\varphi_x(0,t) = \beta_0(t), & t \in (0,\tau), \\ k_1(1)\varphi_x(1,t) = \beta_1(t), & t \in (0,\tau). \end{cases} \tag{3.9}$$

İspat. $\Delta u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ olarak tanımlayalım.

$\Delta u_t = u_{1,t} - u_{2,t} = (k_1 u_{1,x})_x - (k_2 u_{2,x})_x = (k_1 \Delta u_x)_x + ((k_1 - k_2)u_{2,x})_x$ sağlandığından, $\Delta u = \Delta u(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} \Delta u_t - (k_1 \Delta u_x)_x = (\Delta k u_{2,x})_x, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \Delta u(x,0) = 0, & x \in (0,1), \\ -k_1(0)\Delta u_x(0,t) = \Delta k(0) u_{2,x}(0,t), & t \in (0,T), \\ -k_1(1)\Delta u_x(1,t) = \Delta k(1) u_{2,x}(1,t), & t \in (0,T). \end{cases}$$

Denklemi keyfi $\varphi(x,t)$ fonksiyonu ile $\Omega_\tau = (0,1)\times(0,\tau)$, $0<\tau \le T$ bölgesinde integralleyelip, kısmi integralleme yöntemini kullanalım:

$$\begin{aligned} &-\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt + \int_0^\tau [\Delta k(1)u_{2,x}(1,t)\varphi(1,t) - \Delta k(0)u_{2,x}(0,t)\varphi(0,t)]dt = \\ &\int_0^1 [\Delta u(x,\tau)\varphi(x,\tau) - \Delta u(x,0)\varphi(x,0)]\, dx \\ &-\int_0^\tau [\varphi(1,t)k_1(1)\Delta u_x(1,t) - \varphi(0,t)k_1(0)\Delta u_x(0,t)]dt \\ &+\int_0^\tau [\Delta u(1,t)k_1(1)\varphi_x(1,t) - \Delta u(0,t)k_1(0)\varphi_x(0,t)]dt - \iint_{\Omega_\tau} (\varphi_t + (k_1\varphi_x)_x)\Delta u\, dxdt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Şimdi $\varphi = \varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.9) eşlenik probleminin çözümü olarak seçelim. Böylece yukarıdaki problemin ve (3.9) eşlenik probleminin başlangıç ve sınır koşullarını (3.10)'da göz önüne alırsak istenen sonucu elde ederiz.

(3.8) integral özdeşliği, düz proble ve ilgili eşlenik problem arsındaki ilişkiyi göstermektedir. (3.9) probleminde $\beta_0(t), \beta_1(t) \in C(0,\tau)$ fonsiyonlarının keyfi fonksiyonlar olması ise operatörün monotonluğu ve Lipschitz sürekliliğinin kanıtlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca bu fonksiyonların seçimi ile ilgili sayısal algoritmalar geliştirilebilir. (Hasanov, DuChateau, Pektas (2006); Hasanov , Demir , Erdem (2007).)

Aşağıdaki sonuç, bize (3.8) integral özdeşliğinin özel bir durumunu vermektedir.

Sonuç 3.3. $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çözümü olsun. $h_{0,j}(t) = u(0,t;k_j)$, $h_{1,j}(t) = u(1,t;k_j)$ ($j = 1,2$), bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri olsun. $\forall \tau \in (0,T)$ için $h_{0,j}(t), h_{1,j}(t), t \in (0,\tau)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar:

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt = \iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x} \varphi_{0,x} dxdt, \tag{3.11}$$

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt = -\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x} \varphi_{1,x} dxdt. \tag{3.12}$$

Burada $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, (3.9) eşlenik probleminin, sırasıyla $\beta_1(t) \equiv 0$ ve $\beta_0(t) \equiv 0$ için çözümüdür:

Bu sonuç ile $\Phi : K \to H_0$, $\Psi : K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.3. $\varphi_0(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonlarının Teorem 3.1'in, $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.2'nin koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $h_{0,i}(t), h_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları da

(i) $h_{0,1}(t) = u(0,t;k_1) \le h_{0,2}(t) = u(0,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$,
(ii) $h_{1,1}(t) = u(1,t;k_1) \ge h_{1,2}(t) = u(1,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$.

eşitsizlikleri sağlar.

$\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, sırasıyla (3.9) eşlenik probleminin $(\beta_0(t),0)$ ve $(0,\beta_1(t))$ giriş verilerine karşılık gelen çözümü ve $\beta_0(t)<0,\beta_1(t)>0$ olsun. Teorem 3.1'den $\varphi_{0,x}\le 0, u_{2,x}\le 0$ ve Teorem 3.2'den $\varphi_{1,x}\ge 0$ sonucunu elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x)=k_1(x)-k_2(x)>0$ koşulundan, (3.11) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt=\iint_{\Omega_\tau}\Delta k(x)u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt\ge 0, \forall\beta_0(t)<0\ ,\ \forall\tau\in(0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta h_0(t)=h_{0,1}(t)-h_{0,2}(t)\le 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.12) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt=-\iint_{\Omega_\tau}\Delta k(x)u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt\ge 0, \forall\beta_1(t)>0, \forall\tau\in(0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.4. $\varphi_0(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.1'in, $\varphi_1(x,t),u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.2'nin koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $k_1(x),k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x)>k_2(x)$, $\forall x\in[0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $h_{0,i}(t),h_{1,i}(t)$, $i=1,2$, çıktı fonksiyonları da

(i) $h_{0,1}(t)=u(0,t;k_1)\ge h_{0,2}(t)=u(0,t;k_2)$, $\quad\forall t\in(0,\tau)$,
(ii) $h_{1,1}(t)=u(1,t;k_1)\le h_{1,2}(t)=u(1,t;k_2)$, $\quad\forall t\in(0,\tau)$.

eşitsizliklerini sağlar.

$\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, sırasıyla (3.9) eşlenik probleminin çözümü ve $\beta_0(t)<0,\beta_1(t)>0$ olsun.

Teorem 3.1'den $\varphi_{0,x} \le 0$ ve Teorem 3.2'den $\varphi_{1,x} \ge 0, u_{2,x} \ge 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulundan, (3.11) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt = \iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt \le 0, \forall \beta_0(t) < 0, \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta h_0(t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t) \ge 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.12) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt = -\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt \le 0, \forall \beta_1(t) > 0$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4'ün koşullarının sağlanması durumunda $\Phi : K \to H_0$ ve $\Psi : K \to H_1$ girdi-çıktı operatörleri monotondur. Dahası, Teorem 3.3'ün koşullarının sağlanması durumunda, $\Phi : K \to H_0$ operatörü monoton azalan $\left(k_1(x) > k_2(x) \Rightarrow \Phi[k_1] < \Phi[k_2]\right)$ ve $\Psi : K \to H_1$ operatörü monoton artan $\left(k_1(x) > k_2(x) \Rightarrow \Psi[k_1] > \Psi[k_2]\right)$ olur. Teorem 3.4'ün koşullarının sağlanması durumunda ise, tersine $\Phi : K \to H_0$ operatörü monoton artan ve $\Psi : K \to H_1$ is operatörü monoton azalan olur

Teorem 3.5. $\Phi : K \to H_0$ ve $\Psi : K \to H_1$ operatörleri sırasıyla $L_0 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{0,x}\|_0$, $L_1 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{1,x}\|_0$ Lipschitz sabitleri ile

(i) $\|h_{0,1} - h_{0,2}\|_0 \le L_0 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

(ii) $\|h_{1,1} - h_{1,2}\|_0 \le L_1 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

olacak şekilde Lipschitz süreklidir ve $\|\cdot\|_0$ ile $\|\cdot\|_\infty$ sırasıyla L_2 ve L_∞-normları; $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$, $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\beta_1)$, (3.9) eşlenik probleminin çözümüdür.

İspat. $\beta_0(t)$ ve $\beta_1(t)$ fonksiyonlarını

$$\beta_0(t)=\frac{h_{0,1}(t)-h_{0,2}(t)}{\left\|h_{0,1}-h_{0,2}\right\|_0},\quad \beta_1(t)=\frac{h_{1,1}(t)-h_{1,2}(t)}{\left\|h_{1,1}-h_{1,2}\right\|_0},\quad \tau\in(0,T),$$

olarak seçelim. (3.11) ve (3.12) özdeşliklerinden,

$$\left\|h_{0,1}-h_{0,2}\right\|_0\le\left(\iint_{\Omega_\tau}u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt\right)\left\|k_1-k_2\right\|_\infty,$$
$$\left\|h_{1,1}-h_{1,2}\right\|_0\le\left(\iint_{\Omega_\tau}u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt\right)\left\|k_1-k_2\right\|_\infty,$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada Lipschitz sabitini sırasıyla $L_0=\left\|u_{2,x}\right\|_0\left\|\varphi_{0,x}\right\|_0$, $L_1=\left\|u_{2,x}\right\|_0\left\|\varphi_{1,x}\right\|_0$ olarak belirlersek teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

$K^*=\{k\in K : k \text{ karşılaştırılabilir}\}$ fonksiyonlar kümesini tanımlayalım. Bu kümenin tanımı gereği $k_1(x),k_2(x)\in K^*$ elemanları için $k_1(x)<k_2(x)$ ya da $k_1(x)>k_2(x)$ olacaktır. Buna göre bu küme üzerinde (3.4) ile tanımlanan operatörler için, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4.'ün sonucu olarak $R\left(\Phi\left(K^*\right)\right)$ ve $R\left(\Psi\left(K^*\right)\right)$ görüntü kümeleri de karşılaştırılabilir fonksiyonlardan oluşmaktadır. $H_i^*=\{h\in H_i : h \text{ karşılaştırılabilir}\}$, $i=1,2$ kümeleri için, $\Phi^*:K^*\to H_0^*$ ve $\Psi^*:K^*\to H_1^*$ operatörlerinin tersinden bahsedebiliriz. Burada $\Phi^*=\Phi\big|_{K^*}, \Psi^*=\Psi\big|_{K^*}$ olarak verebiliriz.

Sonuç 3.4. Teorem 3.3 (Teorem 3.4) in koşulları sağlandığında (3.4) ile tanımlanmış $\Phi:K\to H_0$, $\Psi:K\to H_1$ sürekli operatörlerinin K^* kümesi üzerinde tersi vardır.

İspat. $\Phi\big|_{K^*}:K^*\to H_0$ operatörünün 1-1 olduğunu gösterirsek, daralma operatörünün $\Phi^{-1}:H_0^*\to K^*$ ters operatörü olduğu sonucunu söyleyebiliriz. Bunu kanıtlamak için, $\forall k_1,k_2\in K^*,\Phi[k_1]=\Phi[k_2]$ olduğunda $k_1(x)\neq k_2(x)$, olsun. Bu durumda

$k_1(x) > k_2(x), \forall x \in (0,1)$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.3 (Teorem 3.4)'ü kullandığımızda, $\Phi[k_1] \le \Phi[k_2] (\Phi[k_1] \ge \Phi[k_2])$ elde ederiz ki bu baştaki varsayım ile çelişir. Buna göre $\Phi|_{K^*} : K^* \to H_0$ operatörü 1-1 dir. Benzer şekilde $\forall k_1, k_2 \in K^*, \Psi[k_1] = \Psi[k_2]$ olduğunda $k_1(x) \ne k_2(x)$, olsun. Bu durumda $k_1(x) > k_2(x), \forall x \in (0,1)$ olduğunu varsayarak, Teorem 3.3 (Teorem 3.4)'ü kullandığımızda, $\Psi[k_1] \ge \Psi[k_2] (\Psi[k_1] \le \Psi[k_2])$ elde ederiz ki bu yine baştaki varsayım ile çelişir. Böylece $\Phi|_{K^*} : K^* \to H_0$, $\Psi|_{K^*} : K \to H_1$ daralma operatörlerinin $\Phi^{-1} : H_0^* \to K^*, \Psi^{-1} : H_1^* \to K^*$ ters operatörü olduğu sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.5. (3.1)-(3.2) ters problemi koşullu iyi tanımlı problemdir.

Örnek 3.1. $u_n(x,t) = \exp\left(-\frac{t}{4n}\right)\cos\left(\frac{\pi - \pi x}{2n}\right)$ fonksiyonu $k_n(x) = \frac{n}{\pi^2}$, $\forall n = 1,2,3,\ldots$ için aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = \cos\left(\dfrac{\pi - \pi x}{2n}\right), & 0 < x < 1, \\ k(0)u_x(0,t) = \dfrac{\pi}{2n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{4n}\right), & 0 < t < T, \\ k(1)u_x(1,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases}$$

Teorem 3.2'nin sonucundan $u_{n,x}(x,t) \ge 0$ dır. Ayrıca $i < j$ koşulunu sağlayan $\forall i, j = 1,2,3,\ldots$ için $k_i(x) < k_j(x)$ eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.4'ten $u(1,t;k_i) < u(1,t;k_j)$ sağlanır. Buna göre Sonuç 3.4'ten $h_{1,n}(x) = \exp\left(-\frac{t}{4n}\right)$, $\forall n = 1,2,3,\ldots$ ölçülmüş verisi ile katsayıyı bulma ters probleminin tek çözümünün olduğunu buluruz.

3.2. Dirichlet-Neumann Sınır Koşullu Düz Problem ile Birlikte Neumann-Dirichlet Ek Koşullu Ters Katsayı Problemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (k(x)u_x(x,t))_x, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \nu_0(t), & 0 < t < T, \\ k(1)u_x(1,t) = \mu_1(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.13}$$

Burada $\Omega_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < t \le T\}$ parabolik bölgedir. $c_1 > k(x) \ge c_0 > 0$ fonksiyonu ve $\nu_0(t), \mu_1(t)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(C1) $k(x) \in C^1[0,1]$;

(C2) $\nu_0(t) \in C^1[0,T], \mu_1(t) \in C[0,T]$.

Bu koşullar altında (3.13) başlangıç sınır değer probleminin $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ tek çözümü vardır (Ladyzhenskaya, Solonnikov, Uralceva, 1968).

Aşağıdaki sınır koşulları ile verilmiş $k = k(x)$ bilinmeyen katsayısını bulma ters problemini düşünelim:

$$k(0)u_x(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.14}$$

Burada $u = u(x,t;k)$ fonksiyonu (3.13) parabolik probleminin $k(x) \in K$ katsayısına karşılık gelen çözümüdür. (3.13)-(3.14) ters problemi Hasanov, Demir ve Erdem (2007) tarafından $\mu_1(t) = 0$ durumu ve yalnızca $g_0(t)$ ek koşulu için ele alınmıştır.

$K \subset C^1[0,1]$ ve $G_0 \subset C[0,T], H_1 \subset C^1[0,T]$, sırasıyla, $k = k(x)$ aranan katsayıların uygun kümesi ve $g_0(t), h_1(t)$ ölçülmüş çıkış verilerinin kümesi olsun. Bu durumda ters problemi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=0} = g_0(t), \quad u(x,t;k)\big|_{x=1} = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.15}$$

Girdi-çıktı operatörlerini $\Phi[\cdot]: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$, $\Phi[k] := k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=0}$, $\Psi[k] := u(x,t;k)\big|_{x=1}$, olarak gösterirsek, (3.15) lineer olmayan denklemi aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazabiliriz:

$$\Phi[k](t) = g_0(t), \quad \Psi[k](t) = h_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.16}$$

3.2.1. (3.13)-(3.14) ters katsayı probleminde girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki

Aşağıda elde edilen sonuçlar, $\nu_0(t)$ Dirichlet ve $\mu_1(t)$ Neumann giriş verilerinin (3.13) düz probleminin $u = u(x,t)$ çözümüne etkisini göstermektedir.

Teorem 3.6. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.13) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer Neumann sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\mu_1(t) = 0,\ 0 < t < T$ ve $\sup\limits_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_0(t)$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall (x,t) \in \Omega_\tau$, $\forall \tau \in (0,T)$ için, $u_x(x,t) \le 0$ eşitsizliği sağlanır.

$\varphi(x,t) \in D :\equiv C_0^\infty(R^2)$ keyfi fonksiyon olmak üzere (3.13) denklemini $\varphi_x(x,t)$: ile çarparak Teorem 3.1'deki işlemleri devam ettirdiğimizde elde ettiğimiz (3.5) integral eşitliğini elde ederiz. Burada keyfi $F(x,t)$ fonksiyonu için $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.6) ters yönlü parabolik problemin çözümü olsun. (3.6) probleminin başlangıç ve sınır koşullarından, $\varphi_t(0,t) = \varphi_t(1,t) = \varphi_x(x,\tau) = 0$ elde edilir. Bu koşulları ve $\mu_1(t) = 0,\ 0 < t < \tau$ ifadesini (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = -\int_0^\tau k(0)u_x(0,t)\varphi_x(0,t)dt \tag{3.17}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, (3.6) eşlenik probleminde maksimum prensibini, $F(x,t) > 0,\ \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ fonksiyonu için uygulanıldığında $\varphi(x,t) < 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuç ve $\varphi(0,t) = 0$ sınır koşulu ile birlikte,

$$\varphi_x(0,t) := \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h,t) - \varphi(0,t)}{h} \le 0,$$

değerlendirmesini buluruz. Diğer yandan $\sup_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_0(t)$ hipotezinden

$$u_x(0,t) := \lim_{h\to 0} \frac{u(h,t) - u(0,t)}{h} \le 0,$$

elde ederiz. Böylece (3.17) integral özdeşliğinin sağ tarafını negatif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \le 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \le 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

Teorem 3.7. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.13) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer Neumann sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\nu_0(t) = 0, \mu_1(t) > 0,\ 0 < t < T$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall (x,t) \in \Omega_\tau \quad \forall \tau \in (0,T)$ için $u_x(x,t) \ge 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ eşitsizliği sağlanır.

Burada keyfi $F(x,t) > 0$ fonksiyonu için $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu maksimum değerini $\Gamma_3 := \{x = 1, 0 \le t \le T\}$ sınırında alacak ve aşağıdaki ters yönlü parabolik problemin çözümü olacak şekilde seçelim:

$$\begin{cases} \varphi_t + k(x)\varphi_{xx} = F(x,t), & (x,t) \in \Omega_\tau \\ \varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1) \\ \varphi_x(0,t) = \varphi(1,t) = 0, & t \in (0,\tau) \end{cases} \tag{3.18}$$

Burada, (3.18) probleminde başlangıç ve sınır koşullarından, $\varphi_t(1,t) = \varphi_x(x,\tau) = 0$ elde edilir. Bu koşullar ile birlikte (3.13),(3.18) problemlerinin sınır koşullarını (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = \int_0^\tau \mu_1(t)\varphi_x(1,t)dt \tag{3.19}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, (3.18) eşlenik probleminin $\varphi(x,t)$ çözümü maksimum değerini $\Gamma_3 := \{x = 1, 0 \le t \le T\}$ sınırında aldığından,

$$\varphi_x(1,t) := \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(1,t) - \varphi(h,t)}{h} \ge 0,$$

değerlendirmesini buluruz. Diğer yandan hipoteze göre $\mu_1(t) > 0,\ 0 < t < T$ olduğundan (3.19) integral özdeşliğinin sağ tarafını pozitif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \ge 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \ge 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

3.2.2. (3.16)'da tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to H_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği

Lemma 3.2. $u_1(x,t) = u(x,t;k_1)$ ve $u_2(x,t) = u(x,t;k_2)$ fonksiyonları (3.13) probleminin $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayılarına karşılık gelen birer çözümü olduğunu varsayalım. $g_{0,j}(t) = k_j(0)u_x(0,t;k_j)$, $h_{1,j}(t) = u(1,t;k_j)$ ($j = 1,2$) fonksiyonları bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri ise. $\forall \tau \in (0,T)$ için $g_{0,j}(t), h_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar.

$$\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t) \varphi_x(x,t) dxdt = -\int_0^\tau [\beta_1(t)\Delta h_1(t) + \alpha_0(t)\Delta g_0(t)]dt, \tag{3.20}$$

burada $\Delta g_0(t) = g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t)$, $\Delta h_1(t) = h_{1,1}(t) - h_{1,2}(t)$ $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x)$ olarak tanımlanır ve $\alpha_0(t) \in C^1(0,\tau), \beta_1(t) \in C(0,\tau)$ fonksiyonları için $\varphi(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,\beta_1)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \varphi_t + (k_1(x)\varphi_x)_x = 0, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1), \\ \varphi(0,t) = \alpha_0(t), & t \in (0,\tau), \\ k_1(1)\varphi_x(1,t) = \beta_1(t), & t \in (0,\tau). \end{cases} \tag{3.21}$$

İspat. $\Delta u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ olarak tanımladığımız fonksiyonu aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} \Delta u_t - (k_1 \Delta u_x)_x = (\Delta k u_{2,x})_x, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \Delta u(x,0) = 0, & x \in (0,1) \\ \Delta u(0,t) = 0, & t \in (0,T) \\ -k_1(1)\Delta u_x(1,t) = \Delta k(1) u_{2,x}(1,t), & t \in (0,T). \end{cases}$$

Lemma 3.1'de olduğunu gibi denklemi keyfi $\varphi(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp $\Omega_\tau=(0,1)\times(0,\tau)$, $0<\tau\le T$ bölgesinde integrallediğimizde elde edilen ifade (3.10) özdeşliği olacaktır. $\varphi=\varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.21) eşlenik probleminin çözümü olarak seçip yukarıdaki problemin ve (3.21) başlangıç ve sınır koşullarını göz önüne alındığında, (3.20) integral özdeşliğini elde ederiz.

(3.20) integral özdeşliğinde, sırasıyla $\beta_1(t)=0$ ve $\alpha_0(t)=0$ seçerek aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz.

Sonuç 3.6. $k_1(x),k_2(x)\in K$ katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çözümü olsun. $g_{0,j}(t)=k_j(0)u_x(0,t;k_j)$, $h_{1,j}(t)=u(1,t;k_j)$ ($j=1,2$) bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri olsun. $\forall\tau\in(0,T)$ için $g_{0,j}(t),h_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar:

$$\int_0^\tau \alpha_0(t)\Delta g_0(t)dt=-\iint_{\Omega_\tau}\Delta k(x)u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt, \tag{3.22}$$

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt=-\iint_{\Omega_\tau}\Delta k(x)u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt, \tag{3.23}$$

Burada $\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, (3.21) eşlenik probleminin, sırasıyla $\beta_1(t)\equiv 0$ ve $\alpha_0(t)\equiv 0$ için, çözümüdür. $\beta_1(t)=0$ durumu için elde edilen (3.22) özdeşliği Hasanov, Demir ve Erdem (2007) tarafından elde edilen bir sonuçtur.

Bu sonuç ile $\Phi:K\to G_0$, $\Psi:K\to H_1$ operatörlerinin monotonluğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.8. $\varphi_0(x,t),u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.6'in, $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.7'nin koşullarını sağlansın. Eğer $k_1(x),k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x)>k_2(x)$, $\forall x\in[0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $g_{0,i}(t),h_{1,i}(t)$, $i=1,2$, çıktı fonksiyonları için

(i) $g_{0,1}(t)=k_1(0)u_x(0,t;k_1)\le g_{0,2}(t)=k_2(0)u_x(0,t;k_2)$, $\quad \forall t\in(0,\tau)$,

(ii) $h_{1,1}(t)=u(1,t;k_1)\ge h_{1,2}(t)=u(1,t;k_2)$, $\quad \forall t\in(0,\tau)$.

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, sırasıyla (3.21) eşlenik probleminin $\left(\alpha_0(t),0\right)$ ve $\left(0,\beta_1(t)\right)$ giriş verilerine karşılık gelen çözümü olsun. $\sup\limits_{\Omega_\tau}\left|\varphi_0(x,t)\right|<\alpha_0(t)$ ve $\beta_1(t)>0$ olsun. Teorem 3.6'dan $\varphi_{0,x}\le 0, u_{2,x}\le 0$ ve Teorem 3.7'den $\varphi_{1,x}\ge 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x)=k_1(x)-k_2(x)>0$ koşulunu (3.22) özdeşliğinde kullanıldığında

$$\int_0^\tau \alpha_0(t)\Delta g_0(t)dt\le 0, \forall\alpha_0(t)>0, \forall\tau\in(0,T),$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta g_0(t)=g_{0,1}(t)-g_{0,2}(t)\le 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.23) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt\ge 0, \forall\beta_1(t)>0, \forall\tau\in(0,T),$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.9. $\varphi_0(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.6'in, $\varphi_1(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.7'nin koşullarını sağlansın. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $g_{0,i}(t), h_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları da

(i) $g_{0,1}(t) = k_1(0)u_x(0,t;k_1) \geq g_{0,2}(t) = k_2(0)u_x(0,t;k_2)$, $\forall t \in (0,\tau)$,

(ii) $h_{1,1}(t) = u(1,t;k_1) \leq h_{1,2}(t) = u(1,t;k_2)$, $\forall t \in (0,\tau)$.

eşitsizliklerini sağlar.

$\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\beta_1)$ fonksiyonları, sırasıyla (3.21) eşlenik probleminin çözümü olsun. $\alpha_0(t), \beta_1(t)$ fonksiyonları için $\sup_{\Omega_\tau} |\varphi_0(x,t)| < \alpha_0(t)$ ve $\beta_1(t) > 0$, $\forall t \in (0,\tau)$ koşulları sağlansın. Teorem 3.6'den $\varphi_{0,x} \leq 0$ ve Teorem 3.7'den $\varphi_{1,x} \geq 0, u_{2,x} \geq 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulundan, (3.22) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^\tau \alpha_0(t)\Delta g_0(t)dt \geq 0, \forall \alpha_0(t) > 0, \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta g_0(t) = g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t) \geq 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.23) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \beta_1(t)\Delta h_1(t)dt \leq 0, \forall \beta_1(t) > 0, \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.8 ve Teorem 3.9'un koşullarının sağlanması durumunda (3.10)'da tanımlanan $\Phi: K \to G_0$ ve $\Psi: K \to H_1$ girdi-çıktı operatörleri monotondur. Dahası, Teorem 3.8'in koşullarının sağlanması durumunda, $\Phi: K \to G_0$ operatörü monoton azalan ve $\Psi: K \to H_1$ is operatörü monoton artan olur. Teorem 3.9'un koşullarının sağlanması durumunda ise, tersine Φ operatörü monoton artan ve Ψ is operatörü monoton azalan olur

Teorem 3.10. $\Phi: K \to G_0$ ve $\Psi: K \to H_1$ operatörleri sırasıyla $L_0 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{0,x}\|_0$, $L_1 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{1,x}\|_0$ Lipschitz sabitleri ile süreklidir:

(i) $\|g_{0,1} - g_{0,2}\|_0 \le L_0 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

(ii) $\|h_{1,1} - h_{1,2}\|_0 \le L_1 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

olacak şekilde Lipschitz sürekldir ve $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$, $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\beta_1)$ (3.21) eşlenik probleminin çözümüdür.

İspat. $\alpha_0(t)$ ve $\beta_1(t)$ fonksiyonlarını

$$\alpha_0(t) = \frac{g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t)}{\|g_{0,1} - g_{0,2}\|_0}, \quad \beta_1(t) = \frac{h_{1,1}(t) - h_{1,2}(t)}{\|h_{1,1} - h_{1,2}\|_0}, \quad \tau \in (0,T),$$

olarak seçelim. (3.22) ve (3.23) özdeşliklerinden,

$$\|g_{0,1} - g_{0,2}\|_0 \leq \left(\iint_{\Omega_T} u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt \right) \|k_1 - k_2\|_\infty$$

$$\|h_{1,1} - h_{1,2}\|_0 \leq \left(\iint_{\Omega_T} u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt \right) \|k_1 - k_2\|_\infty$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada Lipschitz sabitini sırasıyla $L_0 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{0,x}\|_0$, $L_1 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{1,x}\|_0$ olarak belirlersek teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

Sonuç 3.7. Teorem 3.6 (Teorem 3.7) nin koşulları sağlandığında (3.16) ile tanımlanmış $\Phi : K \to G_0$ ve $\Psi : K \to H_1$ sürekli operatörlerinin $K^* = \{k \in K : k$ karşılaştırılabilir$\}$ kümesi üzerinde tersi vardır.

Sonuç 3.8. (3.13)-(3.14) ters problemi koşullu iyi tanımlı problemdir.

3.3. Neumann - Dirichlet Sınır Koşullu Düz Problem ve Dirichlet - Neumann Ek Koşulu ile Tanımlanmış Ters Katsayı Problemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (k(x)u_x(x,t))_x, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ k(0)u_x(0,t) = \mu_0(t), & 0 < t < T, \\ u(1,t) = \nu_1(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.24}$$

Burada $\Omega_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ parabolik bölgedir. $c_1 > k(x) \geq c_0 > 0$ fonksiyonu ve $\mu_0(t), \nu_1(t),$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(C1) $k(x) \in C^1[0,1]$;

(C2) $\mu_0(t) \in C[0,T], \nu_1(t) \in C^1[0,T]$.

Bu koşullar altında (3.24) başlangıç sınır değer probleminin $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ tek çözümü vardır (Ladyzhenskaya, Solonnikov, Uralceva, 1968).

Aşağıdaki sınır koşulları ile verilmiş $k = k(x)$ bilinmeyen katsayısını bulma ters problemini düşünelim:

$$u(0,t) = h_0(t), \quad k(1)u_x(1,t) = g_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.25}$$

$K \subset C^1[0,1]$ ve $H_0 \subset C^1[0,T], G_1 \subset C[0,T]$, sırasıyla, $k = k(x)$ aranan katsayıların uygun kümesi ve $h_0(t), g_1(t)$ ölçülmüş çıkış verilerinin kümesi olsun. $u = u(x,t;k)$ ile verilen bir $k = k(x)$ katsayı için, (3.24) düz problemin çözümünü gösterelim. Bu durumda (3.24)-(3.25) ters problemini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$u(x,t;k)\big|_{x=0} = h_0(t), \quad k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=1} = g_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.26}$$

Girdi-çıktı operatörlerini $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$, $\Phi[k] := u(x,t;k)\big|_{x=0}$, $\Psi[k] := k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=1}$, olarak gösterirsek, (3.26) lineer olmayan denklemi aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazabiliriz:

$$\Phi[k](t) = h_0(t), \quad \Psi[k](t) = g_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.27}$$

3.3.1. (3.24)-(3.25) ters problemi ile ilgili girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki

Aşağıda elde edilen sonuçlar, $\mu_0(t)$ Neumann ve $\nu_1(t)$ Dirichlet giriş verilerinin (3.24) düz probleminin $u = u(x,t)$ çözümüne etkisini göstermektedir.

Teorem 3.11. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.24) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\mu_0(t) < 0, \nu_1(t) = 0,\ 0 < t < T$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall \tau \in (0,T)$, $\forall (x,t) \in \Omega_\tau$ için $u_x(x,t) \le 0$ eşitsizliği sağlanır.

Burada keyfi $F(x,t) > 0$ fonksiyonu için $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu maksimum değerini $\Gamma_1 := \{x = 0, 0 \le t \le T\}$ sınırında alacak şekilde aşağıdaki ters yönlü parabolik problemin çözümü olsun:

$$\begin{cases} \varphi_t + k(x)\varphi_{xx} = F(x,t), & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1), \\ \varphi(0,t) = \varphi_x(1,t) = 0, & t \in (0,\tau). \end{cases} \tag{3.28}$$

(3.28) probleminin başlangıç ve sınır koşullarından, $\varphi_t(0,t) = \varphi_x(x,\tau) = 0$ elde edilir. Bu koşullar ile birlikte (3.24), (3.28) problemlerinin sınır koşullarını (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = -\int_0^\tau \mu_0(t)\varphi_x(0,t)dt \tag{3.29}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, (3.28) eşlenik probleminin $\varphi(x,t)$ çözümü maksimum değerini $\Gamma_1 := \{x = 0, 0 \le t \le T\}$ sınırında aldığından,

$$\varphi_x(0,t) := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h,t)-\varphi(0,t)}{h} \le 0,$$

değerlendirmesini buluruz. Diğer yandan hipoteze göre $\mu_0(t) < 0,\ 0 < t < T$ olduğundan (3.29) integral özdeşliğinin sağ tarafını negatif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \le 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) < 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

Teorem 3.12. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.24) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\mu_0(t) = 0,\ 0 < t < T$ ve $\sup_{\Omega_T}|u(x,t)| < \nu_1(t)$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall \tau \in (0,T)$, $\forall (x,t) \in \Omega_\tau$ için $u_x(x,t) \ge 0$. eşitsizliği sağlanır.

$\varphi(x,t) \in D :\equiv C_0^\infty(R^2)$ keyfi fonksiyon olmak üzere (3.24) denklemini $\varphi_x(x,t)$: ile çarparak Teorem 3.1'deki işlemleri devam ettirelim. Keyfi $F(x,t) > 0$ fonksiyonu için $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.6) ters yönlü parabolik problemin çözümü olsun. (3.6) probleminin başlangıç ve sınır koşullarından, $\varphi_t(0,t) = \varphi_t(1,t) = \varphi_x(x,\tau) = 0$ elde edilir. Bu koşulları ve $\mu_0(t) = 0,\ 0 < t < \tau$ ifadesini (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = \int_0^\tau k(1)u_x(1,t)\varphi_x(1,t)dt \tag{3.30}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, (3.6) eşlenik probleminde maksimum prensibini, $F(x,t) > 0,\ \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ fonksiyonu için uygulandığında $\varphi(x,t) < 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu elde ederiz. Bu sonuç ve $\varphi(1,t) = 0,$ sınır koşulları ile birlikte,

$$\varphi_x(1,t) := \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(1,t)-\varphi(h,t)}{h} \geq 0,$$

değerlendirmesini buluruz. Diğer yandan $\sup_{\Omega_T}|u(x,t)| < \nu_1(t)$ hipotezinden

$$u_x(1,t) := \lim_{h\to 0}\frac{u(1,t)-u(h,t)}{h} \geq 0,$$

elde ederiz. Böylece (3.30) integral özdeşliğinin sağ tarafını pozitif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \geq 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \geq 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

3.3.2. (3.27)'de tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to H_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği

Lemma 3.3. $u_1(x,t) = u(x,t;k_1)$ ve $u_2(x,t) = u(x,t;k_2)$ fonksiyonlarının (3.24) probleminin $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayılarına karşılık gelen birer çözümü olsun. $h_{0,j}(t) = u(0,t;k_j)$, $g_{1,j}(t) = k_j(1)u_x(1,t;k_j)$ $(j = 1,2)$ bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri ise $\forall \tau \in (0,T)$ için $h_0(t), g_1(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar.

$$\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt = \int_0^\tau [\beta_0(t)\Delta h_0(t) + \alpha_1(t)\Delta g_1(t)]dt, \tag{3.31}$$

burada $\Delta h_0(t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t)$, $\Delta g_1(t) = g_{1,1}(t) - g_{1,2}(t)$ $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x)$ olarak tanımlanır ve $\beta_0(t) \in C(0,\tau), \alpha_1(t) \in C^1(0,\tau)$ fonksiyonları için $\varphi(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,\alpha_1)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümüdür:

$$
\begin{cases}
\varphi_t + (k_1(x)\varphi_x)_x = 0, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\
\varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1), \\
k_1(0)\varphi_x(0,t) = \beta_0(t), & t \in (0,\tau), \\
\varphi(1,t) = \alpha_1(t), & t \in (0,\tau).
\end{cases} \tag{3.32}
$$

İspat. $\Delta u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ olarak tanımladığımız fonksiyonu aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$
\begin{cases}
\Delta u_t - (k_1 \Delta u_x)_x = (\Delta k(u_2)_x)_x, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\
\Delta u(x,0) = 0, & x \in (0,1), \\
-k_1(0)\Delta u_x(0,t) = \Delta k(0) u_{2,x}(0,t), & t \in (0,T), \\
\Delta u(1,t) = 0, & t \in (0,T).
\end{cases}
$$

Lemma 3.1'de olduğunu gibi denklemi keyfi $\varphi(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp $\Omega_\tau = (0,1)\times(0,\tau)$, $0 < \tau \le T$ bölgesinde integrallediğimizde elde edilen ifade (3.10) özdeşliği olacaktır. $\varphi = \varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.32) eşlenik probleminin çözümü olarak seçip (3.24), (3.32) problemlerindeki başlangıç ve sınır koşullarını göz önüne alındığında,

$$
-\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t)\varphi_x dxdt = -\int_0^\tau \Delta u(0,t) k_1(0)\varphi_x(0,t)dt
$$
$$
-\int_0^\tau [k_1(1)u_{1,x}(1,t) - k_2(1)u_{2,x}(1,t)]\varphi(1,t)dt
$$

integral özdeşliğini elde ederiz.

$$
\Delta u(0,t) = u_1(0,t) - u_2(0,t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t) = \Delta h_0(t),
$$
$$
k_1(1)u_{1,x}(1,t) - k_2(1)u_{2,x}(1,t) = \Delta g_1(t),
$$

ifadelerini yukarıdaki integral özdeşlikte yazıldığında (3.31) integral özdeşliğini buluruz.

(3.31) integral özdeşliğinde, sırasıyla $\beta_0(t) = 0$ ve $\alpha_1(t) = 0$ seçerek aşağıdaki integral özdeşlikleri elde ederiz.

Sonuç 3.9. $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çözümü olsun. $h_{0,j}(t) = u(0,t;k_j)$, $g_{1,j}(t) = k_j(1)u_x(1,t;k_j)$ $(j=1,2)$ bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri olsun. $\forall \tau \in (0,T)$ için $h_{0,j}(t), g_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar:

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt = \iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}\varphi_{0,x} dxdt, \tag{3.33}$$

$$\int_0^\tau \alpha_1(t)\Delta g_1(t)dt = \iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}\varphi_{1,x} dxdt, \tag{3.34}$$

Burada $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları, (3.32) eşlenik probleminin, sırasıyla $\alpha_1(t) \equiv 0$ ve $\beta_0(t) \equiv 0$ için, çözümüdür.

Bu sonuç ile $\Phi : K \to H_0$, $\Psi : K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.13. $\varphi_0(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.11'in koşullarını, $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.12'nin koşullarını sağlansın.. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $h_{0,i}(t), g_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları

(i) $h_{0,1}(t) = u(0,t;k_1) \le h_{0,2}(t) = u(0,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$,

(ii) $g_{1,1}(t) = k_1(1)u_x(1,t;k_1) \le g_{1,2}(t) = k_2(1)u_x(1,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$.

eşitsiliklerini sağlar.

$\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları (3.32) eşlenik probleminin çözümü olsun. $\beta_0(t) < 0$, $\forall t \in (0,\tau)$ ve $\sup_{\Omega_\tau} |\varphi_1(x,t)| < \alpha_1(t)$ olsun.

Teorem 3.11'den $\varphi_{0,x} \le 0, u_{2,x} \le 0$ ve Teorem 3.12'den $\varphi_{1,x} \ge 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulunu (3.33) özdeşliğinde kullanıldığında,

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt \ge 0, \forall \beta_0(t) < 0 \ , \ \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta h_0(t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t) \le 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.34) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \alpha_1(t)\Delta g_1(t)dt \le 0, \forall \alpha_1(t) > 0 \ , \ \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.14. $\varphi_0(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.11'in, $\varphi_1(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.12'nin koşullarını sağlansın. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $h_{0,i}(t), g_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları için

(i) $h_{0,1}(t) = u(0,t;k_1) \ge h_{0,2}(t) = u(0,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$,

(ii) $g_{1,1}(t) = k_1(1)u_x(1,t;k_1) \ge g_{1,2}(t) = k_2(1)u_x(1,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$.

eşitsizlikleri sağlanır.

$\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları, sırasıyla (3.32) eşlenik probleminin çözümü olsun. $\beta_0(t) > 0$, $\forall t \in (0,\tau)$ ve $\sup_{\Omega_\tau} |\varphi_1(x,t)| < \alpha_1(t)$ olsun. Teorem 3.11'den $\varphi_{0,x} \le 0$ ve Teorem 3.12'den $\varphi_{1,x} \ge 0, u_{2,x} \ge 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulundan, (3.33) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^\tau \beta_0(t)\Delta h_0(t)dt \le 0, \forall \beta_0(t) < 0, \, , \ \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta h_0(t) = h_{0,1}(t) - h_{0,2}(t) \ge 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.34) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \alpha_1(t)\Delta g_1(t)dt \ge 0, \forall \alpha_1(t) > 0, \quad \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.13 ve Teorem 3.14'ün koşullarının sağlanması durumunda (3.27) ile tanımlanan $\Phi : K \to H_0$ ve $\Psi : K \to G_1$ girdi-çıktı operatörleri monotondur. Dahası, Teorem 3.13'ün koşullarının sağlanması durumunda, $\Phi : K \to H_0$, $\Psi : K \to G_1$ operatörleri monoton azalan ve Teorem 3.9'un koşullarının sağlanması durumunda ise, tersine $\Phi : K \to H_0$, $\Psi : K \to G_1$ operatörleri monoton artandır.

Teorem 3.15. Teorem 3.11 (Teorem 3.12) in koşulları sağlandığında $\Phi : K \to H_0$ ve $\Psi : K \to G_1$ operatörleri sırasıyla $L_0 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{0,x}\|_0$, $L_1 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{1,x}\|_0$, Lipschitz sabitleri ile

(i) $\|h_{0,1} - h_{0,2}\|_0 \le L_0 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

(ii) $\|g_{1,1} - g_{1,2}\|_0 \le L_1 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

olacak şekikde Lispchitz süreklidir ve $\|\cdot\|_0$ ile $\|\cdot\|_\infty$ sırasıyla L_2 ve L_∞-normları; $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\beta_0,0)$, $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ (3.32) eşlenik probleminin çözümüdür.

İspat. $\beta_0(t)$ ve $\alpha_1(t)$ fonksiyonlarını

$$\beta_0(t)=\frac{h_{0,1}(t)-h_{0,2}(t)}{\left\|h_{0,1}-h_{0,2}\right\|_0},\quad \alpha_1(t)=\frac{g_{1,1}(t)-g_{1,2}(t)}{\left\|g_{1,1}-g_{1,2}\right\|_0},\quad \tau\in(0,T),$$

olarak seçelim. (3.33) ve (3.34) özdeşliklerinden,

$$\left\|h_{0,1}-h_{0,2}\right\|_0\le\left(\iint_{\Omega_\tau}u_{2,x}\varphi_{0,x}dxdt\right)\left\|k_1-k_2\right\|_\infty$$

$$\left\|g_{1,1}-g_{1,2}\right\|_0\le\left(\iint_{\Omega_\tau}u_{2,x}\varphi_{1,x}dxdt\right)\left\|k_1-k_2\right\|_\infty$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada Lipschitz sabitini sırasıyla $L_0=\left\|u_{2,x}\right\|_0\left\|\varphi_{0,x}\right\|_0$, $L_1=\left\|u_{2,x}\right\|_0\left\|\varphi_{1,x}\right\|_0$ olarak belirlersek teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

Teorem 3.15 ile $\Phi:K\to H_0$ ve $\Psi:K\to G_1$ operatörlerinin iyi tanımlı olduğu sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.10. Teorem 3.11 (Teorem 3.12) nin koşulları sağlandığında (3.27) ile tanımlanmış $\Phi:K\to G_0$ ve $\Psi:K\to H_1$ sürekli operatörlerinin $K^*=\{k\in K: k$ karşılaştırılabilir$\}$ kümesi üzerinde tersi vardır.

Sonuç 3.11. (3.24)-(3.25) ters problemi koşullu iyi tanımlı problemdir.

3.4. Dirichlet - Dirichlet Sınır Koşullu Düz Problem ve Neumann - Neumann Ek Koşulu ile Tanımlanmış Ters Katsayı Problemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (k(x)u_x(x,t))_x, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \nu_0(t), & 0 < t < T, \\ u(1,t) = \nu_1(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.35}$$

Burada $\Omega_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < t \le T\}$ parabolik bölgedir. $c_1 > k(x) \ge c_0 > 0$ fonksiyonu ve $\nu_0(t), \nu_1(t),$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(C1) $k(x) \in C^1[0,1]$;

(C2) $\nu_0(t), \nu_1(t) \in C^1[0,T]$.

Bu koşullar altında (3.35) başlangıç sınır değer probleminin $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ tek çözümü vardır (Ladyzhenskaya, Solonnikov, Uralceva, 1968).

Aşağıdaki sınır koşulları ile verilmiş $k = k(x)$ bilinmeyen katsayısını bulma ters problemini düşünelim:

$$k(0)u_x(0,t) = g_0(t), \quad k(1)u_x(1,t) = g_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{3.36}$$

$u = u(x,t;k)$ ile verilen bir $k = k(x)$ katsayı için, (3.35) düz problemin çözümünü gösterelim. Bu durumda ters problemi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=0} = g_0(t), \quad k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=1} = g_1(t), \quad t\in(0,T]. \tag{3.37}$$

Girdi-çıktı operatörlerini $\Phi: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$, $\Phi[k] := k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=0}$, $\Psi[k] := k(x)u_x(x,t;k)\big|_{x=1}$, olarak gösterirsek, (3.37) lineer olmayan denklemi aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazabiliriz:

$$\Phi[k](t) = g_0(t), \quad \Psi[k](t) = g_1(t), \quad t\in(0,T]. \tag{3.38}$$

3.4.1. (3.35)-(3.36) Ters problemi ile ilgili girdi-çıktı fonksiyonları arasındaki ilişki

Aşağıda elde edilen sonuçlar, $\nu_0(t), \nu_1(t)$ Dirichlet - Dirichlet giriş verilerinin (3.35) düz probleminin $u = u(x,t)$ çözümüne etkisini göstermektedir.

Teorem 3.16. $u(x,t)\in C^{2,1}(\Omega_T)\cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonunun (3.35) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer sınır koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\nu_0(t) = 0,\ \sup\limits_{\Omega_T}|u(x,t)| < \nu_1(t)$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall(x,t)\in\Omega_\tau$ $\forall\tau\in(0,T)$ için $u_x(x,t)\geq 0$ eşitsizliği sağlanır

İspat. Burada keyfi $F(x,t)>0$ fonksiyonu için $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.6) ters yönlü parabolik problemin çözümü olsun. Maksimum prensibinden $\varphi(x,t)<0, \forall(x,t)\in\Omega_\tau$. Buna göre $\forall t\in(0,\tau)$ için $\varphi_x(0,t)\leq 0, \varphi_x(1,t)\geq 0$ dır. $\nu_0(t)=0,\ \sup\limits_{\Omega_T}|u(x,t)|<\nu_1(t)$ koşulundan $\forall t\in(0,\tau)$ için $u_x(0,t)\geq 0, u_x(1,t)\geq 0$ elde ederiz. (3.35), (3.6) problemlerinin başlangıç sınır koşullarını (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt = \int_0^\tau [k(1)u_x(1,t)\varphi_x(1,t) - k(0)u_x(0,t)\varphi_x(0,t)]dt \tag{3.39}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Buna göre, $\varphi_x(0,t) \le 0, \varphi_x(1,t) \ge 0, u_x(0,t) \ge 0, u_x(1,t) \ge 0, \forall t \in (0,\tau)$, olduğundan (3.39) integral özdeşliğinin sağ tarafını pozitif elde ederiz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \ge 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \ge 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

Bu teoremin hipotezindeki $\nu_0(t) = 0, \sup_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_1(t)$ koşulu, $u(x,t)$ fonksiyonunun sınırlarda $x-$yönünde monoton artan olması anlamını taşır ki bu sınırlarda fonksiyonun x'e göre türevinin sıfırdan büyük olması ile aynıdır.

Teorem 3.17. $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega_T})$ fonksiyonunun (3.35) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Eğer koşullarını ifade eden fonksiyonlar için $\sup_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_0(t),\ \nu_1(t) = 0$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\forall (x,t) \in \Omega_\tau$, $\forall \tau \in (0,T)$ için $u_x(x,t) \le 0$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Keyfi $F(x,t) > 0$ fonksiyonu $\varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.6) ters yönlü parabolik problemin çözümü olsun. Maksimum prensibinden $\varphi(x,t) < 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$. Buna göre $\varphi_x(0,t) \le 0, \varphi_x(1,t) \ge 0, \forall t \in (0,\tau)$ dır. $\sup_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_0(t),\ \nu_1(t) = 0$ hipotezinden $u_x(0,t) \le 0, u_x(1,t) \le 0, \forall t \in (0,\tau)$ elde ederiz. (3.35), (3.6) problemlerinin başlangıç sınır koşullarını (3.5) integral özdeşliğinin sağ tarafında kullanıldığında elde ettiğimiz (3.39) integral özdeşliğinin sağ tarafını negatif olarak buluruz:

$$\iint_{\Omega_\tau} u_x(x,t)F(x,t)dxdt \le 0, \quad \forall F(x,t) > 0.$$

Bu eşitsizlik ile birlikte $u_x(x,t) \le 0, \forall (x,t) \in \Omega_\tau$ sonucunu buluruz.

Bu teoremin hipotezindeki $\sup_{\Omega_T} |u(x,t)| < \nu_0(t),\ \nu_1(t) = 0$ koşulu, $u(x,t)$ fonksiyonunun sınırlarda $x-$yönünde monoton azalan olması anlamını taşır ki bu sınırlarda fonksiyonun x'e göre türevinin sıfırdan küçük olması ile aynıdır.

3.4.2. (3.38)'de tanımlanan $\Phi[\cdot]: K \to G_0$, $\Psi[\cdot]: K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğu ve tersinirliği

Lemma 3.4. $u_1(x,t) = u(x,t;k_1)$ ve $u_2(x,t) = u(x,t;k_2)$ fonksiyonlarının (3.35) probleminin $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayılarına karşılık gelen birer çözümü olsun. $g_{0,j}(t) = k_j(0)u_x(0,t;k_j)$, $g_{1,j}(t) = k_j(1)u_x(1,t;k_j)$ $(j = 1,2)$ bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri ise $\forall \tau \in (0,T)$ için $g_{0,j}(t), g_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar.

$$\int_0^\tau [\alpha_1(t)\Delta g_1(t) - \alpha_0(t)\Delta g_0(t)]dt = \iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt, \tag{3.40}$$

burada. $\Delta g_0(t) = g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t)$, $\Delta g_1(t) = g_{1,1}(t) - g_{1,2}(t)$ $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x)$ olarak tanımlanır ve $\alpha_0(t), \alpha_1(t) \in C^1(0,\tau)$ fonksiyonları için $\varphi(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,\alpha_1)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \varphi_t + (k_1(x)\varphi_x)_x = 0, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \varphi(x,\tau) = 0, & x \in (0,1), \\ \varphi(0,t) = \alpha_0(t), & t \in (0,\tau), \\ \varphi(1,t) = \alpha_1(t), & t \in (0,\tau). \end{cases} \tag{3.41}$$

İspat. $\Delta u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ olarak tanımladığımız fonksiyonu aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} \Delta u_t - (k_1 \Delta u_x)_x = (\Delta k (u_2)_x)_x, & (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \Delta u(x,0) = 0, & x \in (0,1), \\ \Delta u(0,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \Delta u(1,t) = 0, & t \in (0,T). \end{cases}$$

Lemma 3.1'de olduğunu gibi denklemi keyfi $\varphi(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp $\Omega_\tau = (0,1) \times (0,\tau)$, $0 < \tau \le T$ bölgesinde integrallediğimizde elde edilen ifade (3.10) özdeşliği olacaktır. $\varphi = \varphi(x,t)$ fonksiyonunu (3.41) eşlenik probleminin çözümü olarak seçip (3.35), (3.41) başlangıç ve sınır koşullarını göz önüne alırsak,

$$-\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x}(x,t) \varphi_x dxdt = -\int_0^\tau [k_1(1) u_{1,x}(1,t) - k_2(1) u_{2,x}(1,t)] \varphi(1,t) dt$$
$$+\int_0^\tau [k_1(0) u_{1,x}(0,t) - k_2(0) u_{2,x}(0,t)] \varphi(0,t) dt$$

integral özdeşliğini elde ederiz.

$$k_1(0) u_{1,x}(0,t) - k_2(0) u_{2,x}(0,t) = \Delta g_0(t),$$
$$k_1(1) u_{1,x}(1,t) - k_2(1) u_{2,x}(1,t) = \Delta g_1(t),$$

ifadelerini yukarıdaki integral özdeşlikte yazıldığında (3.40) integral özdeşliğini elde ederiz.

(3.40) integral özdeşliğinde, sırasıyla $\alpha_1(t) = 0$ ve $\alpha_0(t) = 0$ seçerek aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz.

Sonuç 3.12. $k_1(x), k_2(x) \in K$ katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çözümü olsun. $g_{0,j}(t) = k_j(0)u_x(0,t;k_j)$, $g_{1,j}(t) = k_j(1)u_x(1,t;k_j)$ ($j = 1,2$) bu katsayı fonksiyonlarına karşılık gelen çıkış verileri olsun. $\forall \tau \in (0,T)$ için $g_{0,j}(t), g_{1,j}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki integral özdeşliği sağlar:

$$\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x} \varphi_{0,x} dxdt = -\int_0^\tau \alpha_0(t) \Delta g_0(t) dt, \tag{3.42}$$

$$\iint_{\Omega_\tau} \Delta k(x) u_{2,x} \varphi_{1,x} dxdt = \int_0^\tau \alpha_1(t) \Delta g_1(t) dt, \tag{3.43}$$

Burada $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları, (3.36) eşlenik probleminin, sırasıyla $\alpha_1(t) \equiv 0$ ve $\alpha_0(t) \equiv 0$ için, çözümüdür.

Bu sonuç ile $\Phi : K \to G_0$, $\Psi : K \to G_1$ operatörlerinin monotonluğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.18. $\varphi_0(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.16'in, $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.17'nin koşullarını sağlansın. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $g_{0,i}(t), g_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları için

(i) $g_{0,1}(t) = k_1(0)u_x(0,t;k_1) \geq g_{0,2}(t) = k_2(0)u_x(0,t;k_2)$, $\forall t \in (0,\tau)$,

(ii) $g_{1,1}(t) = k_1(1)u_x(1,t;k_1) \geq g_{1,2}(t) = k_2(1)u_x(1,t;k_2)$, $\forall t \in (0,\tau)$.

koşulları sağlanır.

İspat. $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları (3.41) eşlenik probleminin çözümü olsun. $\sup_{\Omega_\tau} |\varphi_0(x,t)| < \alpha_0(t)$ ve $\sup_{\Omega_\tau} |\varphi_1(x,t)| < \alpha_1(t)$ olsun.

Teorem 3.16'den $\varphi_{1,x} \geq 0, u_{2,x} \geq 0$ ve Teorem 3.17'den $\varphi_{0,x} \leq 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulundan, (3.42) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^\tau \alpha_0(t)\Delta g_0(t)dt \geq 0, \forall \alpha_0(t) > 0, \quad \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta g_0(t) = g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t) \geq 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.43) özdeşliğinden,

$$\int_0^\tau \alpha_1(t)\Delta g_1(t)dt \geq 0, \forall \alpha_1(t) > 0, , \quad \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.19. $\varphi_0(x,t)$ fonksiyonu Teorem 3.16'in, $\varphi_1(x,t), u_2(x,t)$ fonksiyonları Teorem 3.17'nin koşullarını sağlansın. Eğer $k_1(x), k_2(x)$ aranan katsayıları $k_1(x) > k_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$ koşulunu sağlıyorsa $g_{0,i}(t), g_{1,i}(t)$, $i = 1,2$, çıktı fonksiyonları da

(i) $g_{0,1}(t) = k_1(0)u_x(0,t;k_1) \leq g_{0,2}(t) = k_2(0)u_x(0,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$,

(ii) $g_{1,1}(t) = k_1(1)u_x(1,t;k_1) \leq g_{1,2}(t) = k_2(1)u_x(1,t;k_2)$, $\quad \forall t \in (0,\tau)$.

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$ ve $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ fonksiyonları (3.41) eşlenik probleminin çözümü olsun. $\sup_{\Omega_\tau}|\varphi_0(x,t)| < \alpha_0(t)$ ve $\sup_{\Omega_\tau}|\varphi_1(x,t)| < \alpha_1(t)$ olsun. Teorem 3.17'den $\varphi_{0,x} \leq 0, u_{2,x} \leq 0$ ve Teorem 3.16'den $\varphi_{1,x} \geq 0$ elde ederiz. Böylece, $\Delta k(x) = k_1(x) - k_2(x) > 0$ koşulundan, (3.42) özdeşliğinde faydalanıldığında,

$$\int_0^{\tau} \alpha_0(t)\Delta g_0(t)dt \le 0, \forall \alpha_0(t) > 0, \quad \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten, $\Delta g_0(t) = g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t) \le 0$ sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde, (3.43) özdeşliğinden,

$$\int_0^{\tau} \alpha_1(t)\Delta g_1(t)dt \le 0, \forall \alpha_1(t) > 0, , \ \forall \tau \in (0,T)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlik ile (ii) sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.16 ve Teorem 3.17'ün koşullarının sağlanması durumunda $\Phi : K \to G_0$ ve $\Psi : K \to G_1$ girdi-çıktı operatörleri monotondur.

Teorem 3.20. Theorem 3.16 (Teorem 3.17) in koşulları sağlandığında $\Phi : K \to G_0$ ve $\Psi : K \to G_1$ operatörleri sırasıyla $L_0 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{0,x}\|_0$, $L_1 = \|u_{2,x}\|_0 \|\varphi_{1,x}\|_0$ Lipschitz sabitleri için

(i) $\|g_{0,1} - g_{0,2}\|_0 \le L_0 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

(ii) $\|g_{1,1} - g_{1,2}\|_0 \le L_1 \|k_1 - k_2\|_\infty$,

olacak şekilde Lipschitz süreklidir. Burada $\|\cdot\|_0$ ile $\|\cdot\|_\infty$ sırasıyla L_2 ve L_∞ -normları; $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t;\alpha_0,0)$, $\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t;0,\alpha_1)$ eşlenik probleminin çözümüdür.

İspat. $\alpha_0(t)$ ve $\alpha_1(t)$ fonksiyonlarını

$$\beta_0(t) = \frac{g_{0,1}(t) - g_{0,2}(t)}{\|g_{0,1} - g_{0,2}\|_0}, \quad \alpha_1(t) = \frac{g_{1,1}(t) - g_{1,2}(t)}{\|g_{1,1} - g_{1,2}\|_0}, \quad \tau \in (0,T),$$

olarak seçelim. (3.42) ve (3.43) özdeşliklerinden,

$$\left\| g_{0,1} - g_{0,2} \right\|_0 \le \left(\iint_{\Omega_\tau} u_{2,x} \varphi_{0,x} dxdt \right) \left\| k_1 - k_2 \right\|_\infty$$

$$\left\| g_{1,1} - g_{1,2} \right\|_0 \le \left(\iint_{\Omega_\tau} u_{2,x} \varphi_{1,x} dxdt \right) \left\| k_1 - k_2 \right\|_\infty$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada Lipschitz sabitini sırasıyla $L_0 = \left\| u_{2,x} \right\|_0 \left\| \varphi_{0,x} \right\|_0$, $L_1 = \left\| u_{2,x} \right\|_0 \left\| \varphi_{1,x} \right\|_0$ olarak belirlersek teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

Sonuç 3.13. Teorem 3.16 (Teorem 3.17) nin koşulları sağlandığında (3.38) ile tanımlanmış $\Phi : K \to G_0$ ve $\Psi : K \to G_1$ sürekli operatörlerinin $K^* = \{k \in K : k$ karşılaştırılabilir$\}$ kümesi üzerinde tersi vardır.

Sonuç 3.14. (3.35)-(3.36) ters problemi koşullu iyi tanımlı problemdir.

4. PARABOLİK DENKLEMİN SAĞ TARAFINDA ve ROBİN KOŞULUNDA BULUNAN KUVVET FONKSİYONLARININ BELİRLENMESİ ile İLGİLİ TERS PROBLEM: EŞLENİK PROBLEM YAKLAŞIMI

Bu bölümde ele alınacak problemler, literatürde, final verisi ile veya sınırdaki ölçüm ile verilmiş ters problem olarak da adlandırılır. Bu tür ters problemler, çeşitli alanlarda örneğin, ısı transferi (Beck V, Blackwell B, Clair St. C.R., 1985), yayılma-taşıma problemlerinde (Zheng C., Bennett G.D., 1995) kullanılmaktadır. Yalnızca sağ taraf fonksiyonunu bulma ters problemleri, lineer durum için (Cannon, 1968; Wenhuan, 1997; Ivanchov, 1998; Hettlich, Rundell, 2001; Yang, Hu, Shen 2008) tarafından, yarı-lineer durum için (Gol'dman,2003; Gongsheng, 2006) ve denklem sistemi için (Park, Chung, 1999) tarafından incelenmiştir. Yalnızca sağ taraf fonksiyonunu bulma problemi lineer denklem durumu için (Shidfar ,Karamali ve Damirchi, 2006) ve lineer olmayan denklem durumu için de (Choulli, 1999, Hömberg, Yamamoto, 2006) çalışmalarında sayısal olarak incelenmiştir. İkili olarak, sınırda verilen ölçüm ile birlikte başlangıç fonksiyonu ve sağ taraf fonksiyonunun bulunması problemi ise Capatina, Stavre (2000) tarafından sayısal olarak incelenmiştir. Final zamandaki ölçüm ile sağ taraf fonksiyonu ve Robin sınır koşulundaki kuvvet fonksiyonunun bulunması probleminin matematiksel analizi Hasanov (2007) tarafından ele alınmıştır.

Bu bölümde $w=(F,p)$ ikilisini bulma problemi ele alınacaktır. Burada $F(x,t)$ fonksiyonu parabolik denklemde sağ taraf fonksiyonudur ve $p(t)$ fonksiyonu da Robin sınır koşulu ile verilmiştir. Pratikte ölçüm ile verilen veriler belli bir hata ile verildiğinden dolayı, ters problemdeki ek koşullar tam anlamı ile sağlanmayabilir. bu anlamda zayıf çözüm teorisine ihtiyaç duyulabilir.

Böyle bir durumda ters problemin çözümü,

$$J(w_*) := \inf_{w \in W} J(w),$$

minimum probleminin çözümü olarak da aranır. Bu kısımda, $J(w)$ fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğunu ve gradyentinin Lipschitz sürekli olduğu sonucunu elde edeceğiz.

4.1. Dirichlet Ek Koşulu ile Verilmiş, Değişken Katsayılı Parabolik Ters Problem

Bu kısımda, Hasanov (2007) tarafından ele alınan final zamanda verilen ölçüm yerine sınırda verilen ölçüm ile, ilgili düz probleme karşılık gelen ters problem ele alınacaktır.

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t = (k(x)u_x)_x + F(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & x \in [0,l] \\ -k(0)u_x(0,t) = \mu_0(t), & t \in [0,T] \\ k(l)u_x(l,t) = \nu[p(t) - u(l,t)], & t \in [0,T] \end{cases} \tag{4.1}$$

Burada

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) \in L_2[0,l], \\ &p(t) \in L_2[0,l], p_{\min} \le p(t) \le p_{\max}, \\ &F(x,t) \in L_2(\Omega_T), \\ &\mu_0(t) \in L_2[0,T] \\ &k(x) \in L_2(0,l), 0 < k_* \le k(x) \le k^* \end{aligned}$$

l, T, ν pozitif verilerdir.

(4.1) problemi için sınırda ölçümü

$$u(0,t) = h(t). \qquad (4.2)$$

olarak verirsek o halde (4.1)-(4.2) ters problemini şöyle tanımlayabiliriz:

$$\exists w := \big(p(t), F(x,t)\big) \in H := L_2[0,T] \times L_2(\Omega_T) \ \ , \ J(w_0) := \inf_{w \in H} J(w)$$

$$J(w) = \int_0^T [u(0,t;w) - h(t)]^2 dt \qquad (4.3)$$

Burada $h(t)$ önceden verilmiş fonksiyondur. $\forall v \in H^{1,0}(\Omega_T)$

$$\int_0^l [u(x,T)v(x,T) - \varphi_0(x)v(x,0)]dx - \iint_{\Omega_T} (uv_t - k(x)u_x v_x)dxdt$$
$$-\iint_{\Omega_T} Fvdxdt - \int_0^T v[p(t) - u(l,t)]v(l,t)dt - \int_0^T \mu_0(t)v(0,t)dt = 0$$

integral özdeşliğini ve ayrıca (4.1) problemindeki başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan $u \in H^{1,0}(\Omega_T)$ fonksiyonuna (4.1) düz problemin genelleşmiş çözümü denir. Ayrıca (4.3) fonksiyonelinin H'da zayıf sürekliliği $\{w_n\} \subset H, w_n \rightharpoonup w, n \to \infty \Rightarrow J(w_n) \to J(w),\ n \to \infty$ olduğundan herhangi bir zayıf kompakt veya dışbükey $H_0 \subset H$ kümesi için

$$J(w_0) := \inf_{w \in H_0} J(w) \qquad (4.4)$$

probleminin, minimum problemi ile ilgili temel teoreme göre, çözümü vardır.

4.1.1. (4.3) ile tanımlanan fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ve gradyanı

$w=\left(p,F\right)$, $w+\Delta w:=\left(p+\Delta p,F+\Delta F\right)$ keyfi fonksiyonlarını ele alalım. Bunlara karşılık gelen (4.1) probleminin çözümleri $u(x,t;w), u(x,t;w+\Delta w)$ olsun. $\Delta u:=u(x,t;w+\Delta w)-u(x,t;w)$ olarak gösterirsek, Δu fonksiyonu

$$\begin{cases} \Delta u_t=(k(x)\Delta u_x)_x+\Delta F(x,t), & (x,t)\in\Omega_T \\ \Delta u(x,0)=0, & x\in[0,l] \\ -k(0)\Delta u_x(0,t)=0, & t\in[0,T] \\ k(l)\Delta u_x(l,t)=\nu[\Delta p(t)-\Delta u(l,t)], & t\in[0,T] \end{cases} \tag{4.5}$$

parabolik probleminin zayıf çözümü olacaktır. O halde (4.3) fonksiyonelinin artışını, yani

$$\Delta J(w)=J(w+\Delta w)-J(w)$$

ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J(w)=\int_0^T\{[u(0,t;w)+\Delta u(0,t)-h(t)]^2-[u(0,t;w)-h(x)]^2\}dt$$

$$\Delta J(w)=2\int_0^T[u(0,t;w)-h(t)]\Delta u(0,t)dt+\int_0^T[\Delta u(0,t)]^2dt \tag{4.6}$$

Bu artış formülünün sağ tarafındaki integralleri eşlenik problemlerden yararlanarak hesaplayalım.

Lemma 4.1. $w\in H$ fonksiyonuna karşılık gelen $u:=u(x,t;w)\in H^{1,0}(\Omega_T)$ fonksiyonu (4.1) probleminin çözümü olsun. Eğer $\psi(x,t;w)\in H^{1,0}(\Omega_T)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \psi_t+(k(x)\psi_x)_x=0, & (x,t)\in\Omega_T \\ \psi(x,T)=0, & x\in[0,l] \\ -k(0)\psi_x(0,t)=2[u(0,t;w)-h(t)], & t\in(0,T] \\ k(l)\psi_x(l,t)=-\nu\psi(l,t), t\in[0,T], & t\in(0,T] \end{cases} \tag{4.7}$$

eşlenik probleminin çözümü ise o halde $\forall\Delta p,\Delta F$ için

$$2\int_0^T [u(0,t;w)-h(t)]\Delta u(0,t)dt = \nu\int_0^T \Delta p(t)\psi(l,t)dt + \iint\limits_{\Omega_T} \Delta F(x,t)\psi(x,t)dxdt. \tag{4.8}$$

integral özdeşliği sağlanır.

İspat**.** (4.7)'deki final koşulundan ve (4.5) probleminden de faydalanıldığında, (4.8) ifadesinin sol tarafındaki integrali aşağıdaki şekilde dönüştürelim.

$$\begin{aligned}
&2\int_0^T [u(0,t;w)-h(t)]\Delta u(0,t)dt \\
&= \int_0^T \int_0^l \big(k(x)\psi_x(x,t)\Delta u(x,t)\big)_x dxdt - \int_0^T k(l)\psi_x(l,t)\Delta u(l,t)dt \\
&= \iint\limits_{\Omega_T} \Big(\big(k(x)\psi_x(x,t)\big)_x \Delta u(x,t) + k(x)\psi_x(x,t)\Delta u_x(x,t)\Big) dtdx \\
&+\nu\int_0^T \psi(l,t)\Delta u(l,t)dt \\
&= -\iint\limits_{\Omega_T} \psi_t \Delta u dxdt + \int_0^T k(x)\psi(x,t)\Delta u_x\Big|_{x=0}^{x=l} dt - \iint\limits_{\Omega_T} \psi\big(k(x)\Delta u_x\big)_x dxdt \\
&+\nu\int_0^T \psi(l,t)\Delta u(l,t)dt \\
&= -\iint\limits_{\Omega_T} \psi_t \Delta u dxdt + \nu\int_0^T [\Delta p(t)-\Delta u(l,t)]\psi(l,t)dt - \iint\limits_{\Omega_T} \psi(\Delta u_t - \Delta F)dxdt \\
&+\nu\int_0^T \psi(l,t)\Delta u(l,t)dt \\
&= -\iint\limits_{\Omega_T} \big(\psi\Delta u\big)_t dxdt + \nu\int_0^T \Delta p(t)\psi(l,t)dt + \iint\limits_{\Omega_T} \Delta F(x,t)\psi(x,t)dxdt
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte, (4.5) ve (4.7) problemlerindeki başlangıç ve final koşullarından faydalanıldığında (4.8) formülünü elde ederiz.

(4.8) formülünü (4.6)'de yazıldığında $J(w)$ fonksiyonelinin artışı için

$$\Delta J(w) = \nu\int_0^T \Delta p(t)\psi(l,t)dt + \iint\limits_{\Omega_T} \Delta F(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int_0^T [\Delta u(0,t)]^2 dt \tag{4.9}$$

formülünü elde ederiz.

Tanım 4.1. $H := L_2[0,T] \times L_2(\Omega_T)$ Hilbert uzayında $w \in H,\ w = \left(p(t), F(x,t)\right)$, $w_i := \left(p_i(t), F_i(x,t)\right)$ fonksiyonları için iç çarpımı ve normu

$$< w_1, w_2 >_H := \int_0^T p_1(t) p_2(t) dt + \iint\limits_{\Omega_T} F_1(x,t) F_2(x,t) dxdt,$$

$$\|w\|_H := \sqrt{< w, w >_H} = \left(\|p\|_0^2 + \|F\|_0^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlayalım.

Aşağıdaki lemma $t = T$ final zamanında (4.1) probleminin çözümünün artışını Δw artışı üzerinden değerlendirmesini ifade ediyor.

Lemma 4.2. $w = \left(p, F\right) \in H$ bir kontrol fonksiyonu ve $u = u(x,t;w)$ ise (4.1) probleminin çözümü olsun. Eğer (4.2) koşulu sağlanıyorsa

$$\| \Delta u(0,\cdot) \|_0^2 := \int_0^T | \Delta u(0,t) |^2 \, dt \le c \|\Delta w\|_H^2, \tag{4.10}$$

Burada $c_1 > 0$ sabiti $\Delta w := \left(\Delta p, \Delta F\right)$ 'den bağımsızdır.

İspat. (4.5) parabolik denkleminin her iki tarafını Δu ile çarpalım ve Ω_T bölgesinde integralleyelim.

$$0 = \iint\limits_{\Omega_T} [\Delta u_t - (k(x)\Delta u_x)_x - \Delta F] \Delta u dxdt$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega_T} \left((\Delta u)^2\right)_t dxdt - \iint\limits_{\Omega_T} (k(x)\Delta u_x \Delta u)_x dxdt + \iint\limits_{\Omega_T} k(x) \Delta u_x^2 dxdt - \iint\limits_{\Omega_T} \Delta F \Delta u dxdt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l (\Delta u)^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^T (k(x)\Delta u_x \Delta u) \Big|_{x=0}^{x=l} dt + \iint\limits_{\Omega_T} k(x) \Delta u_x^2 dxdt - \iint\limits_{\Omega_T} \Delta F \Delta u dxdt$$

(4.5) problemindeki sınır koşullarını da dikkate aldığımızda,

$$0=\frac{1}{2}\int_0^l |\Delta u(x,T)|^2 dx+\nu\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt-\nu\int_0^T \Delta u(l,t)\Delta p(t)dt$$
$$+\iint\limits_{\Omega_T} k(x)\Delta u_x^2 dxdt-\iint\limits_{\Omega_T} \Delta F\,\Delta u dxdt.$$

Buradan,

$$\frac{1}{2}\int_0^l |\Delta u(x,T)|^2 dx+\nu\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt+\iint\limits_{\Omega_T} k(x)\Delta u_x^2 dxdt$$
$$=\nu\int_0^T \Delta u(l,t)\Delta p(t)dt+\iint\limits_{\Omega_T} \Delta F\,\Delta u dxdt$$

özdeşliğini elde ederiz. Bu özdeşliğin sağ tarafında $\forall\alpha,\beta\in IR, \forall\varepsilon>0$ için

$$\alpha\beta\le\varepsilon\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2\varepsilon}$$

Cauchy-ε eşitsizliğinden yararlanıldığında,

$$\frac{1}{2}\int_0^l |\Delta u(x,T)|^2 dx+\nu\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt+\iint\limits_{\Omega_T} k(x)\Delta u_x^2 dxdt$$
$$\le\frac{\nu\varepsilon}{2}\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2\,dt+\frac{\nu}{2\varepsilon}\int_0^T |\Delta p(t)|^2\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\iint\limits_{\Omega_T} |\Delta u|^2\,dt+\frac{1}{2\varepsilon}\iint\limits_{\Omega_T} |\Delta F|^2\,dxdt \tag{4.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$|\Delta u(x,t)|^2=\left|\int_x^1 \Delta u_\xi(\xi,t)d\xi-\Delta u(l,t)\right|^2\le 2\left|\int_x^1 \Delta u_\xi(\xi,t)d\xi\right|^2+2|\Delta u(l,t)|^2$$
$$\le 2l\int_0^1 |\Delta u_x(x,t)|^2 dx+2|\Delta u(l,t)|^2.$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını Ω_T bölgesinde integralleyelim.

$$\iint\limits_{\Omega_T} |\Delta u(x,t)|^2\,dxdt\le 2l^2\iint\limits_{\Omega_T} |\Delta u_x(x,t)|^2 dxdt+2l\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt$$

(4.11)’in sağ tarafında bu eşitsizlikten, sol tarafındaki 3.integral için $0<k_*\le k(x)$ özelliğinden faydalanalım.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l |\Delta u(x,T)|^2 dx + \left(\nu - \frac{\varepsilon\nu}{2} - \varepsilon l\right)\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt + (k_* - \varepsilon l^2)\iint_{\Omega_T} \Delta u_x^2 dxdt \\
&\le \frac{\nu}{2\varepsilon}\int_0^T |\Delta p(t)|^2\, dt + \frac{1}{2\varepsilon}\iint_{\Omega_T} |\Delta F|^2\, dxdt \\
&\le \kappa\left\{\int_0^T |\Delta p(t)|^2 + \iint_{\Omega_T} |\Delta F|^2\, dxdt\right\}, \kappa = \max\left\{\frac{\nu}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}\right\}
\end{aligned}
$$

değerlendirmesini elde ederiz. Bu durumda, $\nu - \frac{\varepsilon\nu}{2} - \varepsilon l > 0$ talebinden, $\varepsilon < \frac{2\nu}{\nu + 2l}, \nu > 0$ koşulunu elde ederiz. $k_* - \varepsilon l^2 > 0$ talebinden de, $\varepsilon_1 < \frac{k_*}{l^2}, l > 0$ koşulunu elde ederiz. Böylece $\varepsilon > 0$ parametresini

$$
0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{2\nu}{\nu + 2l}, \frac{k_*}{l^2}\right\}
$$

olarak belirlersek,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt \le c_1 \|w\|_H^2 \\
&\iint_{\Omega_T} \Delta u_x^2 dxdt \le \frac{\kappa}{k_* - \varepsilon l^2}\|w\|_H^2
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

değerlendirmelerini buluruz. Burada $c_1 > 0$ sabitini

$$
c_1 = \frac{2\kappa}{2\nu - \varepsilon\nu - 2l\varepsilon} \tag{4.13}
$$

olarak belirleriz.

$$
\begin{aligned}
|\Delta u(0,t)|^2 &= \left|\int_0^1 \Delta u_\xi(\xi,t)d\xi - \Delta u(l,t)\right|^2 \le 2\left|\int_0^1 \Delta u_\xi(\xi,t)d\xi\right|^2 + 2|\Delta u(l,t)|^2 \\
&\le 2l\int_0^1 |\Delta u_x(x,t)|^2 dx + 2|\Delta u(l,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını Ω_T bölgesinde integralleyelip (4.12) eşitsizliklerini kullanıldığında,

$$\iint_{\Omega_T} |\Delta u(0,t)|^2\, dt \le 2l^2 \iint_{\Omega_T} |\Delta u_x(0,t)|^2 dt + 2l\int_0^T |\Delta u(l,t)|^2 dt.$$
$$\le c\|w\|_H^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada c sabitini (4.13)'te tanımlanan c_1 sabiti cinsinden

$$c = \frac{2l\kappa}{k_* - \varepsilon l^2} + 2c_1 \tag{4.14}$$

olarak belirlenir.

Tanım 4.2. J fonksiyoneli için,

$$\Delta J(w) := J(w+\Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w\rangle_H + R(\Delta w, w)$$

$$\lim_{\|\Delta w\|_H \to 0} \frac{|R(\Delta w, w)|}{\|\Delta w\|_H} = 0$$

koşulu sağlanıyorsa J fonksiyoneline Frėchet diferansiyellenebilirdir denir (Vainberg, 1973).

(4.10) değerlendirmesinden $J(w)$ fonksiyonelinin $\Delta J(w) = J(w+\Delta w) - J(w)$ artışını ifade eden (4.9) formulünün sağ tarafından yararlanalım. Frėchet diferansiyelin tanımından ve Lemma 4.2.'den $R(\Delta w, w) := \int_0^T |\Delta u(0,t)|^2\, dt$ olduğunu dikkate alırsak, $J(w)$ fonksiyonelinin gradyanının

$$J'(w) = \left(\nu\psi(l,t;w), \psi(x,t;w)\right) \tag{4.15}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

$w = (p, F)$ iki bileşenli vektör fonksiyonu olarak düşünürsek, (4.14)'ün sağ tarafındaki vektörün 1. bileşeninin $J(w)$ fonksiyonelinin $p = p(t)$ değişkenine, 2. bileşeninin de $F = F(x,t)$ değişkenine göre olduğunu görürüz.

4.1.2. $J(w)$ fonksiyonelinin gradyanının Lipschitz sürekliliği

Tanım 4.3. $J(w) \in C^1(H)$ olsun. Eğer

$$\exists L > 0, \left\| J'(w) - J'(w^*) \right\| \leq L \left\| w - w^* \right\|, \ \forall w, w^* \in H$$

koşulu sağlanıyorsa $J(w)$ fonksiyonelinin $J'(w)$ gradyanı Lipschitz koşulunu sağlar denir ve $J(w) \in C^{1,1}(H)$ olarak gösterilir (Vainberg, 1973).

Lemma 4.3. F, p fonksiyonları için uygun koşullar sağlandığında $J(w) \in C^{1,1}(H)$ ve

$$\left\| J'(w + \Delta w) - J'(w) \right\|_H \leq L \left\| \Delta w \right\|_H^2.$$

İspat. $\Delta\psi(x,t) := \psi(x,t; w + \Delta w) - \psi(x,t;w)$ fonksiyonu (4.7) problemi dikkate alındığında,

$$\begin{cases} \Delta\psi_t + (k(x)\Delta\psi_x)_x = 0, & (x,t) \in \Omega_T, \\ \Delta\psi(x,T) = 0, & x \in [0,l], \\ -k(0)\Delta\psi_x(0,t) = 2\Delta u(0,t;w), & t \in [0,T], \\ k(l)\Delta\psi_x(l,t) = -\nu\Delta\psi(l,t), & t \in [0,T], \end{cases} \tag{4.16}$$

(4.16) denkleminin her iki tarafını (4.5) probleminin çözümü olan $\Delta u(x,t)$ ile çarpalım, Ω_T bölgesinde integrallersek, başlangıç (final) ve sınır koşullarını dikkate aldığımızda:

$$2\int_0^T [\Delta u(0,t)]^2 \, dt = \nu \int_0^T \Delta p(t) \Delta\psi(l,t) dt + \iint_{\Omega_T} \Delta F(x,t) \Delta\psi(x,t) dx dt. \tag{4.17}$$

özdeşliğini elde ederiz. (4.16) integral özdeşliğini dikkate alırsak

$$\begin{aligned}\left(J'(w+\Delta w)-J'(w),\Delta w\right) &= \nu\int_0^T \Delta p(t)\Delta\psi(l,t)dt+\iint_{\Omega_T}\Delta F(x,t)\Delta\psi(x,t)dxdt \\ &= 2\int_0^T [\Delta u(0,t)]^2 dt\end{aligned} \tag{4.18}$$

buluruz. (4.10) eşitsizliğinden faydalanıldığında $L>0$ Lipschitz sabitini (4.14) ile tanımlanan c sabiti ile ilişkili olarak $L=2c$, olarak buluruz.

4.2. (4.1)-(4.2) Ters Probleminin Çözümünün Tekliği

Lemma 4.4. (4.5) probleminin çözümü için $\Delta u(0,t)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa (4.4) ile tanımlanan $J(w)$ fonksiyonelini kesin konvekstir.

Lemma 4.5. (4.4) ile tanımlanan $J(w)$ fonksiyoneli zayıf koersivdir.

İspat.

$$\begin{aligned} J(w) &= J(0)+(J'(\theta w),w),\ \forall\theta\in(0,1) \\ &\leq J(0)+\|J'(\theta w)\|\|w\| \end{aligned}$$

$J(w)\in C^{1,1}(H)$ olduğundan sınırlıdır. Böylece son eşitsilikte $w\to\infty$ için $J(w)\to\infty$ elde ederiz.

Teorem 4.1. $H^*\subset H$ konveks alt küme olsun.

$$J(w_0):=\inf_{w\in H^*} J(w)$$

minimum probleminin tek çözümü vardır.

İspat. Konveks kümler üzerinde tanımlanan minimum problemi ile ilgili temel teoremi kullanırsak istenilen sonucu elde ederiz (Zeidler, 1989)

Lemma 4.4'ün koşulu sağlanmadığı durumda tekliğin bozluduğunu aşağıdaki örnek ile açıklayalım.

Örnek 4.1. $w=(1,\sin x)$, $w+\Delta w=\left(1+\exp\left(-\delta t^2\right),\sin x+(1-2\delta t)\sin x\exp\left(-\delta t^2\right)\right)$ keyfi fonksiyonlarını ele alalım. Bunlara karşılık gelen (4.1) probleminin çözümleri $u(x,t;w)=\sin x, u(x,t;w+\Delta w)=\sin x\exp\left(-\delta t^2\right)$ formundadır. $\Delta u(0,t)=0$ olmasına rağmen $\Delta F(x,t)=(1-2\delta t)\sin x\exp\left(-\delta t^2\right)$ ve $\Delta p(t)=\exp\left(-\delta t^2\right)$ fonksiyonları sıfırdan farklıdır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezin birinci bölümünde lineer parabolik denklemler için ters katsayı problem ele alınmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

1. Problemin çözümü için eşlenik probleme dayalı yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem, düz problem ve bu problem ile ilişkili eşlenik probleme ve ayrıca maksimum prensibine dayanmaktadır.
2. Yöntemde, her bir parabolik probleme karşılık faklı eşlenik problemler elde edilmektedir.
3. Düz problemlerin ve bunlara karşılık gelen eşlenik problemlerin çözümleri arasında integral özdeşlikler elde edilmiştir
4. Elde edilen integral özdeşliklerden ve eşlenik problemlerdeki sınır fonksiyonlarının keyfi olmasından faydalanarak, girdi-çıktı operatörlerinin monotonluğu ve Lipschitz sürekliliği kanıtlanmıştır.
5. Girdi-çıktı operatörlerinin monotonluğu ve Lipschitz sürekliliğine dayanarak, ele alınan ters problemlerin çözümün varlığı kanıtlanmıştır.

Bu bölümdeki önerileri ise aşağıdaki şekilde verebiliriz:

1. Elde edilen integral özdeşliklerden yararlarak ters katsayı probleminin sayısal çözüm yöntemi geliştirilebilir.
2. Ters katsayı probleminin giriş verilerine göre sürekliliği incelenebilir.

Tezin ikinci bölümünde, Robin sınır koşullu, homojen olmayan parabolik denklem için ölçüm verisi Dirichlet koşulu ile verilmiş ters problem formüle edilmiştir. Bu ters problemde, parabolik denklemin sağ tarafı ile Robin sınır koşulundaki kaynak fonksiyonun bulunması hedeflenmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar aşağıda gibi verilir:

1. $J(w)$ deger fonksiyoneli tanımlanarak, ters problem, bu fonksiyonelin minimumu problemi olarak ifade edilmiştir.
2. $J(w)$ deger fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu ispatlanmıştır.
3. Fonksiyonelin gradyanı eşlenik problemin çözümü üzerinden açık bir şekilde ifade edilmiştir
4. Deger fonksiyonelinin gradyanının Lipschitz sürekliliği kanıtlanmıştır ve Lipschit sabiti, giriş verilerine bağlı olarak açık bir şekilde elde edilmiştir.
5. Fonksiyonelinin kesin konveksliği için yeter koşul elde edilmiştir.
6. Fonksiyonelin zayıf koersivliği kanıtlanmıştır.
7. Fonksiyonelin konveksliği ve zayıf koersivliği sonuçlarından faydalanılarak, ters problemin çözümünün varlığı kanıtlanmış, tekliği için de yeter koşul elde edilmiştir.

Bu bölümdeki öneriler ise şöyledir:

1. Bilindiği üzere gradyana dayalı yöntemlerin tümü, iterasyon parametresinin üstten değerlendirilmesini talep etmektedir. Bu durumda, bu yöntemlerin başarıya ulaşması söz konusu olabilir. Deger fonksiyonelinin gradyanının tezde kanıtlanan Lipschitz sürekliliği kanıtlanmıştır ve Lipschit sabitinin açık bçimde elde edilmesi, iterasyon parametresinin üstten değerlendirilmesini mümkün kılmaktadır. Fonksiyonelin gradyanının Lipschitz sabitinden faydalanılarak, nümerik yaklaşımlar verilebilir.
2. Ters probleim giriş verilerine göre sürekliliği incelenebilir.

6. KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

Pamuk S., Erdem A., “The Method of Lines for the Numerical Solution of a Mathematical Model for Capillary Formation: The Role of Endothelial Cells in the Capillary”, ***Applied Mathematics and Computation, vol:186, no:1***, 831-835, (2007).

Erdem A., Pamuk S., “The Method of Lines for the Numerical Solution of a Mathematical Model for Capillary Formation: The Role of Tumor Angiogenic Factor in the Extra-Cellular Matrix”, ***Applied Mathematics and Computation, vol:186, no:1***, 891-897, (2007).

Hasanov A., Demir A., Erdem A., “Monotonicity of input–output mappings in inverse coefficient and source problems for parabolic equations”, ***J. Math. Anal. Appl., vol:335, no:2***, 1434-1451, (2007).

Hasanoglu S., Erdem A., “Relationship between current response and time in ion transport problem including diffusion and convection. 2. Numerical approach”, ***the Journal of Mathematical Chemistry, vol:43, no:4***, 1458-1469, (2008).

Hasanov A., Erdem A., “Determination of uknown coefficient in a nonlinear elliptic problem related to the elasto-plastic torsion of a bar”, ***IMA Journal of Applied Mathematics, vol:73, no:4***, 579-591, (2008).

Erdem A., An analysis of the adjoint problem approach for parabolic inverse source problem with measured Dirichlet data, ***The Third International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation"***, Fethiye, Türkiye, 50, 29 Mayıs-02 Haziran (2006).

Erdem A., Differentiability and Lipschitz property of the cost function related to parabolic optimal control problems, ***International Conference, Pioneers Of Bulgarian Mathematics***, Sofia, Bulgaristan, 41, 8-10 Haziran (2006).

Erdem A., An analysis of the cost functional for parabolic inverse source problem, ***The International Conference on Modeling and Simulation (MS2006)***, Konya, Türkiye, 901-904, 28-30 Ağustos (2006).

Hasanov A., Erdem A., Monotonicity of input-output mappings and Frechet differentiability and Lipschitz continuity of related auxiliary functionals in inverse problems for parabolic equations, ***The The Fourth International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation"***, Fethiye, Türkiye, 66, 29 Mayıs-2 Haziran (2008).

Erdem A, Reconstruction algortihms for parabolic coefficient identification problems based on adjoint problem approach, ***Algorithmic Analysis of Unstable Problems***, Ekaterinburg, Rusya, 173-174, 01-06 Eylül (2008).

Hasanov A., Pektas B., Erdem A., Numerical analysis of ill-posedness of parabolic coefficient identification problems based on adjoint problem approach, ***Algorithmic Analysis of Unstable Problems***, Ekaterinburg, Rusya, 175-177, 01-06 Eylül (2008).

Hasanov A., Erdem A., Monotonicity of inpu-output mappings and Lipschitz continuity of cost functionals in parabolic coefficient identification problems, ***Algorithmic Analysis of Unstable Problems***, Ekaterinburg, Rusya, 178-179, 01-06 Eylül (2008).

KAYNAKLAR

Alifanov O.M., "Inverse Heat Transfer Problems", ***Wiley***, (1994).

Bear J., "Dynamics of Fluids in Porous Media", ***Elsevier***, (1972).

Beck V., Blackwell B., Clair St. C.R., "Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems", ***Wiley-Interscience***, (1985).

Budak B.M., Samarskii A.A. and Tikhonov A.N., "A Collection of Problems in Mathematical Physics", ***Dover Publications***, (1988).

Cannon J.R., "Determination of an Unknown Heat Source from Overspecified Boundary Data", ***SIAM Journal on Numerical Analysis, 5/2***, 275-286, (1968).

Cannon J.R., Browder F.E., "The One-Dimensional Heat Equation", ***Addison-Wesley Publishing Company***, (1984).

Cannon J.R., DuChateau P., "Determining Unknown Coefficients in a Nonlinear Heat Conduction Problem", ***SIAM Journal on Applied Mathematics, 24/3***, 298-314, (1973).

Cannon J.R., DuChateau P., "An Inverse Problem for a Nonlinear Diffusion Equation", ***SIAM Journal on Applied Mathematics, 39/2***, 272-289, (1980).

Capatina A., Stavre R., "Algorithms and convergence results for an inverse problem in heat propagation", ***International Journal of Engineering Science, 38***, 575-587, (2000).

Carlemen T., "Les functions quasi analytiques", ***Gauthier-Villars***, (1926).

Choulli M., "On the determination of an unknown boundary function in a parabolic equation", ***Inverse Problems, 15***, 659–667, (1999).

DuChateau P., "Monotonicity and Uniqueness Results in Identifying an Unknown Coefficient in a Nonlinear Diffusion Equation", ***SIAM Journal on Applied Mathematics, vol:41, no:2***, 310-323, (1981).

DuChateau P., "Monotonicity and invertibility of coefficient-to-data mappings for parabolic inverse problems", ***SIAM J. Math. Anal***., ***vol:26, no:6,*** 1473-1487, (1995).

DuChateau P., Thelwell R., Butters G., "Analysis of an adjoint problem approach to the identification of an unknown diffusion coefficient", ***Inverse Problems***, ***vol:20, no:2***, 601-625, (2004).

Elayyan A, Isakov V., “On an Inverse Diffusion Problem”, ***SIAM Journal on Applied Mathematics, vol:57, no:6***, 1737-1748, (1997).

Fucik S., Kufner A., “Nonlinear Differential Equation”, ***Elesevier Scientific Publishing Company***, 1980

Gol'dman N.L., “An inverse problem with final overdetermination for a quasilinear parabolic equation with an unknown right-hand side”, ***Numerical Methods and Programming, 4,*** 155-166, (2003).

Gongsheng Li., “Data compatibility and conditional stability for an inverse source problem in the heat equation”, ***Applied Mathematics and Computation***, ***vol:173, no:1***, 566-581, (2006).

Hadamard J., “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equation”, ***Yale University Press***, (1923).

Hasanov A., DuChateau P. Pektas B., “An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation”, ***Journal of Inverse and Ill-Posed Problems***, ***vol:14, no:5***, 435-463, (2006).

Hasanov A., Demir A., Erdem A., “Monotonicity of input–output mappings in inverse coefficient and source problems for parabolic equations”, ***J. Math. Anal. Appl.***, ***vol:335, no:2***, 1434-1451, (2007).

Hasanov A., “Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: weak solution approach”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330***, 766-779, (2007).

Hettlich F., Rundell W., “Identification of a discontinuous source in the heat equation”, ***Inverse Problems, 17***, 1465–1482, (2001).

Hömberg D., Yamamoto M., “On an inverse problem related to laser material treatments”, ***Inverse Problems, 22***, 1855–1867, (2006).

Ivanchov M.I., “The inverse problem of determining the heat source power for a parabolic equation under arbitrary boundary condition”, ***Journal of Mathematical Science***, ***vol:88, no:3***, (1998).

Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P., “Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications”, ***Nauka, Moscow.***, (1978).

Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov VA., Urel’ceva N.N., “Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type”, ***American Mathematical Society Providence***, (1968).

Lavrent’ev M.M., “Some improperly posed problems of mathematical physics”, ***Springer Verlag***, (1967).

Lavrent'ev M.M., Savel'ev L.Ya., "Operator Theory and Ill-Posed Problems", ***VSP***, (2006).

Özışık M.N., "Boundary Value Problems of Heat Conduction", ***International Textbook Company***, (1968).

Park H.M., Chung O.Y., "An inverse natural convection problem of estimating the strength of a heat source", ***International Journal of Heat and Mass Transfer***, ***42***, 4259-4273, (1999).

Protter, M. H., Weinberger, H. F., "Maximum Principles in Differential Equations", ***Springer-Verlag***, (1984)

Shidfar A.,Karamali G.R., and Damirchi J., "An inverse heat conduction problem with a nonlinear source term", ***Nonlinear Analysis***, ***vol:65, no: 3***, 615-621, (2006).

Slodicka M., Keer R.V., "Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements", ***Inverse Problems***, ***18***, 139–152, (2002).

Tikhonov A.N., "On the stability of inverse problems", ***Dokl. Akad. Nauk SSSR***, ***vol:39, no:5***, 195-198, (1943).

Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya., "Methods of solving ill-posed problem", ***Nauka,*** (1986).

Wenhuan Y., "Well Posedness of a parabolic inverse problem", ***Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 13,***,3, (1997).

Vainberg M.M., "Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations", ***John Wiley***, (1973).

Yang X.-H., Hu X.-X., Shen Z.-Y., "DNA Evolutionary Algorithm (DNAEA) for Source Term Identification in Convection –Diffusion Equation", ***Journal of Physics: Conference Series, 96*** ,012125, (2008).

Zeghal A., "Uniqeness of Determination of the Unknown Source Term in Some Multidimensional Parabolic Equations", ***Proyecciones Journal of Mathematics***, ***vol:23, no:2***, 81-90, (2004).

Zheng C., Bennett G.D., "Applied Contaminant Transport Modelling: Theory and Practice", ***Van Nostrand Reinhold***, (1995).

Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Part 2 A: Linear Monotone Operators", ***Springer,*** 512-516, (1989).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında İzmit-Kocaeli'nde doğdu. İlk, orta ve lise ögrenimini İzmit'te tamamladı. 1997 yılında girdigi Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2002 yılında Matematikçi olarak bölüm birinciliği ile mezun oldu. 2002-2005 yılları arasında, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans ögrenimini tamamladı. 2003 yılından beri Kocaeli Üniversitesi'nde Uzman olarak görev yapmaktadır.