<u>KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

LATİS DEĞERLİ BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS

Vildan ÇETKİN

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Halis AYGÜN

KOCAELİ, 2009

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LATİS DEĞERLİ BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Vildan ÇETKİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 MAYIS 2009
Tezin Savunulduğu Tarih: 03 TEMMUZ 2009

Tez Danışmanı
Prof.Dr. Halis AYGÜN
(...................)

Üye
Prof.Dr. İsmet YILDIZ
(...................)

Üye
Yrd.Doç.Dr. Arzu ARI
(...................)

KOCAELİ, 2009

ÖNSÖZ

İlk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından verilen bulanık küme tanımı çeşitli matematiksel kavramların bulanık matematiğe genelleştirilmesinde doğal bir yapı oluşturmuştur. 1968 yılında Chang klasik topolojik uzayların bir genellemesi olarak bulanık topolojik uzay tanımını vermiştir. Sonrasında ise birçok topolojici bulanık topolojik uzaylar teorisine çeşitli katkılarda bulunmuştur. Chang tarafından verilen orijinal bulanık topoloji tanımı ve bunun modifikasyonları, yani Goguen' ın tanımladığı L-topolojik uzaylar ve Lowen (1976) tarafından tanımlanan tabakalaşmış bulanık topolojik uzayların yapı olarak bulanık küme teorisi ruhuna uygun olmadığı gözlenmiştir. Çünkü, sözü edilen tanımların her birinde kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasiktir. Bunun üzerine Sostak (1985), hem klasik topolojinin hem de bulanık topolojinin bir genellemesi olarak, sadece kümelerin değil aynı zamanda topoloji aksiyomlarının da bulanık olduğu bulanık topolojinin yeni tanımını vermiştir. 1992 yılında birbirinden bağımsız olarak Chattopadhyay aynı yapıyı açıklığın bir derecelendirmesi ve Ramadan ise birim aralık yerine bir latis alarak pürüzsüz (smooth) topoloji adı altında yeniden tanımlamıştır. Kotze (2003) genel bir yaklaşımla, L ve M birer çatı olmak üzere, (L,M)-topolojik uzay kavramını tanıtmıştır. Höhle ve Sostak ise 1995 yılında Kotze' nin tanımının bir genellemesi olarak (L,M)-bulanık topolojik uzay yapısını tanımlamışlardır ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. Burada, L ve M özel bir latis yapısı olan çatının bir genellemesi olan iki farklı GL-monoidi ifade etmektedir.

Höhle ve Sostak 1999 yılında bulanık iç uzayı yapısını tanıtmışlardır. Ardından Ramadan ve arkadaşları (2002) ise L bir kesin iki-yanlı, değişmeli quantale latis (q-latis) olmak üzere L-bulanık iç uzayı kavramını tanımlamışlardır ve çeşitli özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca L-bulanık iç uzayları ile L-bulanık topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler ile çarpım L-bulanık iç uzay yapısını incelemişlerdir. Bu çalışmada ise L ve M birbirinden farklı kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda (L,M)-bulanık iç uzayı yapısı incelenmiştir.

Bulanık topolojik uzayların tanımlanmasının ardından Chattopadhyay ve Samanta (1993) Sostak' ın bulanık topoloji tanımını baz alarak bulanık kapanış uzayı kavramını tanımlamışlardır. Kim ise 2003 yılında birim aralık yerine bir L tam dağılımlı tam latisini alarak Chattopadhyay ve Samanta tarafından verilen tanımı L-bulanık kapanış uzaylarına genellemiştir ve L-bulanık topolojik uzaylar ile aralarındaki ilişkileri incelemiştir. 2006 yılında Hussein, L bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere L-bulanık kapanış uzayı tanımını farklı bir yaklaşımla vermiştir. Bu çalışmada ise L tam dağılımlı tam latisi yerine daha genel bir yapı olan q-latislerin alınmasıyla Kim tarafından tanımlanan L-bulanık kapanış uzayları kavramı (L,M)-bulanık kapanış uzayları kavramına genişletilmiştir.

Bir bulanık noktanın bulanık kümeye ait olması ile elde edilen komşuluk sistemi tanımı bulanık topolojik uzaylara uygun bir genelleştirme olmadığı için klasik topolojik uzaylardaki komşuluk sistemi yapısı 1980 yılında Pao-Ming ve Ying-Ming tarafından q-çakışımsı olma bağıntısı kullanılarak Chang anlamındaki bulanık topolojik uzaylara genelleştirilmiştir. Klasik topolojik uzaylarda, bulanık topolojik uzayların özel bir hali olduğundan, bu iki komşuluk yapısı burada çakışmaktadır. L-topolojik uzaylarda ise bu tanım Ying-Ming ve Mao-Kang tarafından 1997 yılında verilmiştir. 1997 yılında Demirci birim aralığı kullanarak pürüzsüz (I-bulanık) topolojik uzaylarda komşuluk sistemini tanımlamıştır. 2006 yılında ise Jinming q-çakışımsı olma bağıntısını kullanarak L-bulanık topolojik uzaylarda Q-komşuluk sistemini tanımlamıştır ve L-bulanık topolojik uzaylar ile aralarındaki ilişkileri incelemiştir. Yine 2006 yılında Hussein L bir tam dağılımlı tam latis ve M ise bir kesin iki-yanlı değişmeli q-latis olmak üzere (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemini tanımlamıştır ve çeşitli özelliklerini incelemiştir.

Bilindiği gibi, bir küme üzerindeki filtre kavramı klasik topolojideki temel yapılardan birisidir ve bu kavram klasik topolojide önemli bir rol oynamaktadır. Bu kavram 1999 yılında Burton ve arkadaşları tarafından klasik bir kümenin güç kümesinden birim aralığa tanımlanan topolojik uzaylarda genelleştirilmiş filtreler adı altında tanımlanmıştır. Yine 1999 yılında Höhle ve Sostak L bir cqm-latis (complete quasi monoidal lattice) olmak üzere, L-bulanık topolojik uzaylarda L-bulanık filtre kavramını vermişlerdir. 2003 yılında Luna-Torres ve Ochoa ise Höhle ve Sostak tarafından verilen L-bulanık filtrelerin çeşitli özellikleri incelenmişlerdir. 2006 yılında Kim ve Ko, L’ yi bir kesin iki-yanlı değişmeli q-latis alarak L-bulanık filtre tabanı kavramını tanımlamışlardır ve filtrelerle arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Yine 2006 yılında Hussein, L bir tam dağılımlı tam latis ve M ise bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere, L-bulanık filtre yakınsaklığını incelemiştir. Bu çalışmada ise bulanık filtreler, bulanık filtre tabanları ve filtre yakınsaklığı ile ilgili kavramlar Hussein’ in doktora tezindeki bazı eksikliklerinde giderilmesiyle daha genel bir yapı olan (L,M) bulanık filtreler adı ile tek bir çatı altında yeniden verilmiş ve kategorik olarak göz önüne alınarak önemli özellikleri elde edilmiştir.

Özet olarak, bu çalışmada Höhle ve Sostak’ ın 1995 yılında yayınlanan “A General Theory of Fuzzy Topological Spaces ” adlı makalesi ve Hussein’ in 2006 yılında yaptığı “On Fuzzy Topological Spaces” adlı doktora tezindeki kavramlar baz alınarak (L,M)-bulanık topolojik uzaylar, (L,M)-bulanık tabanlar, (L,M)-bulanık iç ve kapanış uzayları, (L,M)-bulanık komşuluk uzayları ve (L,M)-bulanık filtreler ile filtre yakınsaklığı kavramları ve de bu kavramlar arasındaki ilişkiler kategorik yapıları da göz önüne alınarak incelenmiştir. Böylece, yukarıda sözü edilen kavramların detaylı olarak ele alındığı Türkçe bir kaynağı literatüre kazandırmak hedeflenmiştir.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen, daha da önemlisi bana topolojiyi bu kadar candan sevdiren Sayın Hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN’ e yoğun çalışmaları arasında göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden ötürü teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisans çalışmalarım süresince beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER........ iii
ŞEKİLLER DİZİNİ........ iv
SİMGELER........ v
ÖZET........ vii
İNGİLİZCE ÖZET........ viii
1. ÖN BİLGİLER........ 1
1.1. Latis Teorideki Temel Kavramlar........ 1
1.2. De-Morgan, Boole ve Heyting Cebirleri 6
1.3. Üçgensel Normlar........ 11
1.4. Quantale Latisler 14
1.5. Kategoriler ve Funktorlar 20
2. L-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR........ 28
2.1. Bulanık Kümeler 28
2.2. L – Bulanık Topolojik Uzaylar........ 32
2.3. L – Bulanık Topolojik Uzayların Kategorileri 37
2.4. L – Bulanık Topolojik Uzaylarda İç ve Kapanış Operatörleri 41
2.5. L – Bulanık Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri........ 42
3. (L, M)-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR 45
3.1. (L, M)-Bulanık Topoloji Tanımı ve Temel Özellikleri........ 45
3.2. (L, M)-Bulanık Tabanlar 49
4. (L, M)-BULANIK İÇ VE KAPANIŞ UZAYLARI........ 56
4.1. (L, M)-Bulanık İç Uzayları........ 56
4.2. (L, M)-Bulanık Kapanış Uzayları........ 70
5. (L, M)-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK 86
5.1. (L, M)-Bulanık Q – Komşuluk Uzayları 86
5.2. (L, M)-Bulanık Filtreler........ 92
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 110
KAYNAKLAR 111
ÖZGEÇMİŞ 114

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil1. 1: Dağılımlı latis 3
Şekil1. 2: (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis 3
Şekil1. 3: Cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler diyagramı 10
Şekil1. 4: (a) Minimum t-norm, (b) Maksimum t-conorm, (c) Çarpım t-norm, (d) Cebirsel toplam, (e) Lukasiewicz t-norm, (f) Sınırlı toplam.. 13

SİMGELER

$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\subseteq$	: Alt küme
$\cap$ $(\cup)$	: Arakesit (Birleşim)
$\in$	: Eleman
$X, Y, \ldots$	: Klasik kümeler
$\lambda, \mu, \nu, \ldots$	: Bulanık kümeler
$\underline{\alpha}$	: α değerli sabit bulanık küme
χ_A	: A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
I	: [0, 1] kapalı aralığı
2	: {0, 1} iki noktalı kümesi
L, M	: Latis (kafes, örgü)
L^X	: L-Bulanık kümeler ailesi
$\vee$ $(\wedge)$	: Supremum (İnfimum)
$\varphi, \psi, \ldots$	: Fonksiyonlar
0_L (1_L)	: L latisinin en küçük (en büyük) elemanı
$f, g, \ldots$	: Latisler üzerindeki fonksiyonlar
$'$	: Sırayı tersine koruyan üst alma operatörü
$\urcorner$	: Bütünleme operatörü
M_0	: $M - \{0\}$
$M(L)$	: L' nin 0 dan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi
$P(L)$	: L' nin 1 den farklı asal elemanlarının kümesi
$\mathcal{P}(X)$	: X' in güç kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak
Γ, Λ	: İndis kümesi
$\circledast, \odot, \oplus$	: Latis üzerindeki ikili işlemler
IK, IL	: Kategoriler
$ObIK$	: IK kategorisinin objelerinin sınıfı
$Mor(X, Y)$	: X' den Y' ye tanımlı morfizmler kümesi
$\circ$	: Bileşke işlemi
IK^o	: IK' nın dual kategorisi
F, G	: Funktorlar
x_α, x_t	: Bulanık nokta
$x_\alpha q \lambda$	: x_α bulanık noktası ile λ bulanık kümesi q-çakışımsıdır.
$M(L^X)$	: Bulanık noktaların kümesi
$\varphi^{\rightarrow}(\lambda)$	: λ bulanık kümesinin φ altındaki görüntüsü
$\varphi^{\leftarrow}(\lambda)$	: λ bulanık kümesinin φ altındaki ters görüntüsü
τ, τ'	: Bulanık topoloji, bulanık co-topoloji
$\mathcal{I}$ $(\mathcal{C})$	: Bulanık iç (kapanış) operatörü

$\mathcal{Q}$	: Q-komşuluk sistemi
$\mathcal{F},\mathcal{G}$	: Bulanık filtre
$\mathcal{B}$	: Bulanık taban (filtre tabanı)
p_i	: i-inci izdüşüm fonksiyonu

LATİS DEĞERLİ BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Vildan ÇETKİN

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, L-topoloji, L-bulanık topoloji, Bulanık taban, Bulanık iç operatörü, Bulanık kapanış operatörü, Bulanık komşuluk sistemi, Bulanık filtre, Bulanık filtre tabanı, Filtre yakınsaklığı.

Özet: Bu tezin amacı; L ve M özel bir latis yapısı olan çatının bir genişlemesi olan farklı kesin iki-yanlı, değişmeli quantale latis (q-latis) olmak üzere topolojik yapıları tanıtmak, özelliklerini incelemek ve bu yapılar arasındaki ilişkileri araştırmaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, latis teorideki bazı temel tanımlar ve kavramlar, latisler üzerindeki cebirsel yapılar, üçgensel normlar, q-latisler ve bazı kategorik kavramlar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle bulanık küme tanımı ve bazı özellikleri tanıtılmıştır. Bulanık topolojiye literatürde getirilen farklı yaklaşımlar verildikten sonra bu yaklaşımlar arasındaki ilişkiler kategorik olarak incelenmiştir. Ayrıca L-bulanık iç (kapanış) operatörleri ve L-bulanık komşuluk sistemi kavramlarına da yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (L,M)-bulanık topoloji ve (L,M)-bulanık taban tanımı verildikten sonra başlangıç (L,M)-bulanık topoloji kavramı inşa edilmiştir. Böylece (L,M)-bulanık topolojik uzaylar kategorisinin topolojik bir kategori olduğu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, (L,M)-bulanık iç ve (L,M)-bulanık kapanış operatörleri kavramları tanıtılmış ve bu kavramlar ile (L,M)-bulanık topoloji arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Başlangıç (L,M)-bulanık iç (kapanış) operatörü oluşturularak (L,M)-bulanık iç (kapanış) operatörlerinin çarpımı tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda bir bulanık noktanın Q-komşuluk sistemi tanıtılmıştır. Ardından, (L,M)-bulanık filtre tanımı verildikten sonra çarpım kümesi üzerinde (L,M)-bulanık filtre yapısı oluşturulmuştur. Ayrıca, (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda (L,M)-bulanık filtrelerin yakınsaklığı da bu bölümde incelenmiştir.

LATTICE VALUED FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Vildan ÇETKİN

Keywords: Fuzzy set, L-topology, L-fuzzy topology, Fuzzy base, Fuzzy interior operator, Fuzzy closure operator, Fuzzy neighborhood system, Fuzzy filter, Fuzzy filter base, Filter convergence.

Abstract: The aim of this thesis is to introduce (L,M)-fuzzy topological structures, study their properties and investigate the relations between these structures where L and M are different strictly two-sided, commutative quantale lattices (q-lattices) as an extension of frames which is a special kind of lattices.

This thesis includes five chapters. In the first chapter, some basic definitions and notions in lattice theory, algebraic structures on lattices, triangular norms, q-lattices and some categorical concepts were summarized.

In the second chapter, first of all the definition of a fuzzy set and some of its properties were introduced. After giving the different approaches to fuzzy topology in literature, the relations between these approaches were studied as categorical aspect. Moreover, there were also given the notions of L-fuzzy interior (closure) operators and L-fuzzy neighborhood systems.

In the third chapter, after giving the definition of (L,M)-fuzzy topology and (L,M)-fuzzy base the notion of initial (L,M)-fuzzy topology was constructed. By this way, it was obtained that the category of (L,M)-fuzzy topological spaces is a topological category.

In the fourth chapter, the notions of (L,M)-fuzzy interior and (L,M)-fuzzy closure operators were introduced and the relationships among these notions and (L,M)-fuzzy topology were investigated. By constructing the initial (L,M)-fuzzy interior (closure) operators, the product of (L,M)-fuzzy interior (closure) operators were defined.

In the fifth chapter, Q-neighborhood system of a fuzzy point in (L,M)-fuzzy topological spaces was introduced. Then, after giving the definition of (L,M)-fuzzy filter there was constructed the concept of (L,M)-fuzzy filter on the product set. Furthermore, the convergence of (L,M)-fuzzy filter in (L,M)-fuzzy topology was also studied in this chapter.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle tezin geri kalan kısımlarında kullanılacak olan latisler, üçgensel normlar (t-normlar) ve kategoriler gibi kavramlar ve bunların temel özellikleri verilecektir. Ayrıca, latisler üzerinde tanımlanan farklı cebirsel yapılar ve bu yapılar arasındaki ilişkilerde yine bu bölümde verilecektir.

1.1. Latis Teorideki Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere;

(a) L nin sonlu her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir üst-yarı latis (join-semilattice) denir ve $(L, \vee, 0_L)$ ile gösterilir.

(b) L nin sonlu her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir alt-yarı latis (meet-semilattice) denir ve $(L, \wedge, 1_L)$ ile gösterilir.

(c) L nin sonlu her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve $L = (L, \vee, \wedge\, 0_L, 1_L)$ ile gösterilir.

Burada, $0_L = \bigvee\emptyset$ ve $1_L = \bigwedge\emptyset$ sırasıyla L nin en küçük ve en büyük elemanını ifade etmektedir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Özel olarak, $I := [0,1]$ kapalı birim aralık ve $2 \coloneqq \{0,1\}$ iki noktalı kümesi birer latisdir.

Önerme 1.1.2: $L = (L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır. (Birkhoff, 1967)

(i) $\forall\ a \in L$ için $a \vee a = a$ ve $a \wedge a = a$.

(ii) $\forall\ a, b \in L$ için $a \wedge b \leq a,\ \ b \leq a \vee b$.

(iii) $\forall\, a, b \in L$ için $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

(iv) $\forall\, a, b, c \in L$ için $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ve $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Önerme 1.1.3: $(L, \vee, 0_L)$ ve $(L, \wedge, 1_L)$ yarı-latisler olsunlar. Bu takdirde,

$(L, \vee, \wedge\, 0_L, 1_L)$ bir latisdir $\iff \forall\, a, b \in L$ için $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$ sağlanır. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.1.4: L ve M iki latis ve $f: L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(i) f bir üst-yarı latis (alt-yarı latis) homomorfizmidir $:\iff$

$\forall\, A \subset L$ sonlu için $f(\bigvee_{a \in A} a) = \bigvee_{a \in A} f(a)$ ($f(\bigwedge_{a \in A} a) = \bigwedge_{a \in A} f(a)$) .

(ii) f bir latis homomorfizmidir $:\iff$

$\forall\, A \subset L$ sonlu için $f(\bigvee_{a \in A} a) = \bigvee_{a \in A} f(a)$ ve $f(\bigwedge_{a \in A} a) = \bigwedge_{a \in A} f(a)$.

(iii) f bir üst-yarı latis (sırasıyla, alt-yarı latis, latis) izomorfizmidir $:\iff f$ bijektif ve hem f hemde f^{-1} birer üst-yarı latis (sırasıyla, alt-yarı latis, latis) homomorfizmidir.

Eğer, L ve M latisleri arasında bir latis izomorfizmi mevcut ise bu iki latis birbirine latis olarak izomorftur denir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Not 1.1.5: (1) Yukarıdaki tanımlardan açıktır ki, her üst-yarı latis homomorfizmi latisin en küçük elemanını ve her alt-yarı latis homomorfizmi ise latisin en büyük elemanını korur. Böylece, her latis homomorfizmi latisin en küçük (0_L) ve en büyük (1_L) elemanını korur.

(2) Kolaylıkla görülebilir ki, her yarı-latis homomorfizmi aynı zamanda sıralamayı korur.

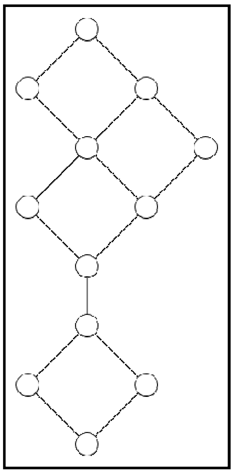
Önerme 1.1.6: L bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki koşullar denktir.

$\forall\, a, b, c \in L$ için,

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.1.7: Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan bir L latisine dağılımlı latis (Şekil 1. 1) adı verilir. (Johnstone, 1992, Birkhoff, 1967)



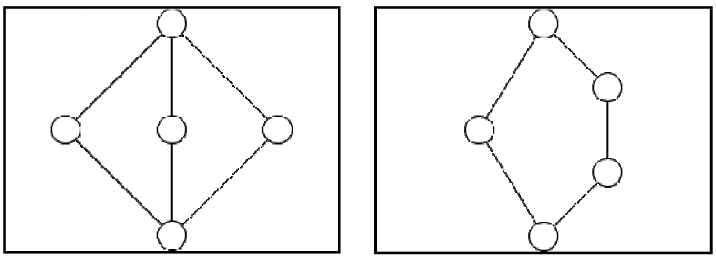
Şekil1. 1: Dağılımlı latis

Önerme 1.1.8: L bir latis olsun. Bu takdirde,

L dağılımlıdır $\Leftrightarrow \forall\, a, b, c \in L$ için $a \wedge c = b \wedge c$ ve $a \vee c = b \vee c$ ise $a = b$ sağlanır. (Birkhoff, 1967)

Dağılımlı olmanın diğer bir karakterizasyonu ise aşağıdaki teorem yardımıyla yapılmaktadır.

Teorem 1.1.9: Bir L latisi dağılımlıdır ancak ve ancak bu latis içerisinde dağılımlı olmayan köşegensel (Şekil 1.2 (a)) veya beşgen (Şekil 1.2 (b)) latisden birini içermez. (Terziler ve Öner, 2002)



(a) (b)

Şekil1. 2: (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis

Tanım 1.1.10: L kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde,

(i) L nin her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir tam üst-yarı latis (complete join-semilattice) denir.

(ii) L nin her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir tam alt-yarı latis (complete meet-semilattice) denir.

(iii) L nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir tam latis (complete lattice) denir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.1.11: L, M iki tam latis ve $f: L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(i) f bir tam üst-yarı latis (tam alt-yarı latis) homomorfizmidir $:\Leftrightarrow$

$\forall A \subset L$ için $f(\bigvee_{a \in A} a) = \bigvee_{a \in A} f(a)$ $\left(f(\bigwedge_{a \in A} a) = \bigwedge_{a \in A} f(a) \right)$.

(ii) f bir tam latis homomorfizmidir $:\Leftrightarrow$

$\forall A \subset L$ için $f(\bigvee_{a \in A} a) = \bigvee_{a \in A} f(a)$ ve $f(\bigwedge_{a \in A} a) = \bigwedge_{a \in A} f(a)$.

(iii) f bir tam üst-yarı latis (sırasıyla, tam alt-yarı latis, tam latis) izomorfizmidir $:\Leftrightarrow$ f bijektif ve hem f hemde f^{-1} birer tam üst-yarı latis (sırasıyla, tam alt-yarı latis, tam latis) homomorfizmidir.

Eğer, L ve M tam latisleri arasında bir tam latis izomorfizmi mevcut ise bu iki latis birbirine birer tam latis olarak izomorftur denir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.1.12: L sonlu infimum ve keyfi supremum işlemleri altında kapalı bir latis olmak üzere, L ye bir çatı (frame) adı verilir $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in L, \{b_i\}_{i \in \Gamma} \subset L$ için

$a \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} b_i) = \bigvee_{i \in \Gamma} (a \wedge b_i)$ sağlanır. (Johnstone, 1992)

Örnek 1.1.13: X bir topolojik uzay olmak üzere, $\Omega(X) \coloneqq \{G \subset X : G$ açık$\}$ ailesi bir çatıdır.

Tanım 1.1.14: L bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L ye sonsuz dağılımlı latis adı verilir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

(i) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b \in B}(a \wedge b)$.

(ii) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b \in B}(a \vee b)$.

Tanım 1.1.15: L bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L ye tam dağılımlı tam latis (completely distributive lattice) adı verilir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Her $\left\{\{a_{i,j} \middle| j \in J_i\} \mid i \in K\right\} \subset \mathcal{P}(L) \backslash \{\emptyset\}$, $(K \neq \emptyset)$ için

(CD1) $\bigwedge_{i \in K}(\bigvee_{j \in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi \in \prod_{i \in K} J_i}(\bigwedge_{i \in K} a_{i,\varphi(i)})$.

(CD2) $\bigvee_{i \in K}(\bigwedge_{j \in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi \in \prod_{i \in K} J_i}(\bigvee_{i \in K} a_{i,\varphi(i)})$.

Tanım 1.1.16: L bir latis ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa α ya L nin bir indirgenemez elemanı (irreducible, coprime, molecule) denir.

L nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi,

$M(L) \coloneqq \{\alpha \in L \mid \alpha \neq 0$ ve $\forall a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b \;\; \Rightarrow \alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b\,\}$

ile gösterilir. (Gierz, 1980)

Tanım 1.1.17: L bir latis ve $p \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa p ye L nin bir asal (prime) elemanı veya atom denir.

L nin birden farklı asal elemanlarının kümesi,

$Pr(L) \coloneqq \{p \in L \mid p \neq 1$ ve $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p \Rightarrow a \leq p$ veya $b \leq p\,\}$

ile gösterilir. (Gierz, 1980)

Tanımlar karşılaştırıldığında, L bir bulanık latis olmak üzere

$\alpha \in M(L) \;\Leftrightarrow\; \alpha' \in \mathrm{Pr}\,(L)$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 1.1.18: L bir tam dağılımlı tam latis olmak üzere, L' deki her eleman L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olarak yazılabilir. Benzer şekilde, L bir bulanık latis iken L' nin her elemanı bazı asal elemanlarının infimumu olarak yazılabilir. (Gierz, 1980)

1.2. De-Morgan, Boole ve Heyting Cebirleri

Tanım 1.2.1: L bir latis olmak üzere, L üzerindeki bir $' : L \longrightarrow L,\ a \mapsto a'$ dönüşümüne

(i) üst alma operatörü (involution) denir $:\Leftrightarrow\ \forall\, a \in L$ için $(a')' = a$.

(ii) sırayı tersine koruyan operatör denir $:\Leftrightarrow\ \forall\, a, b \in L$ için $a \leq b\ \Rightarrow a' \geq b'$.

$' : I \longrightarrow I,\ a \mapsto a' \coloneqq 1 - a$ olarak tanımlanan dönüşüm I üzerinde sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.2.2: Sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü ile bir tam dağılımlı tam latis bir bulanık latis (fuzzy lattice) olarak adlandırılır ve $L = (L, \leq, \wedge, \vee, ')$ ile gösterilir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.2.3: $\mathcal{L} = (L, \leq, ')$ üçlüsüne bir tam De-Morgan cebiri (complete De-Morgan algebra) denir $:\Leftrightarrow$ $(L, \leq)$ bir dağılımlı tam latisdir ve $', L$ üzerinde sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür. (Gehrke ve diğ., 2003)

Her tam latis bir tam De-Morgan cebiri içine gömülebilir. Gerçekten, L bir tam latis olmak üzere $L \times L$ üzerinde kısmi sıralama

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)\ \Leftrightarrow\ a_1 \leq a_2 \text{ ve } b_2 \leq b_1$$

olarak tanımlanırsa $(L \times L, \leq)$ bir tam latisdir. Ayrıca, $' : L \times L \longrightarrow L \times L$ sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü de

$$(a, b)' = (b, a)\ ,\ \forall\, (a, b) \in L \times L$$

olarak tanımlanırsa $(L \times L, \leq, ')$ bir tam De-Morgan cebiridir.

Önerme 1.2.4: L bir dağılımlı latis ve $a, b, c \in L$ olsun. Bu takdirde,

$x \wedge a = b$ ve $x \vee a = c$

olacak şekilde en çok bir $x \in L$ mevcuttur. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.2.5: L bir latis ve $a \in L$ olsun. Eğer,

$x \wedge a = 0_L$ ve $x \vee a = 1_L$

olacak şekilde bir $x \in L$ mevcut ise bu x elemanına a nın bir bütünleyeni veya komplementi (complement) denir ve $\urcorner a$ ile gösterilir.

Burada, $\urcorner : L \longrightarrow L,\ a \mapsto \urcorner a$ ile tanımlanan dönüşüme ise L üzerinde bir bütünleme operatörü adı verilir. (Johnstone, 1992)

Önerme 1.2.4, eğer varsa dağılımlı bir latisde bütünleyenin tek türlü belirli olduğunu garanti eder.

Teorem 1.2.6: L bir dağılımlı latis olsun. Bu takdirde, L üzerindeki her bütünleme operatörü aynı zamanda sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 1.2.7: L bir dağılımlı latis olsun. Eğer, L üzerinde bir $\urcorner : L \longrightarrow L\,, a \mapsto \urcorner a$ bütünleme operatörü mevcut ise L ye bir Boole cebiri (Boolean algebra) denir. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.2.8: B ve C iki Boole cebiri ve $f : B \longrightarrow C$ bir fonksiyon olsun.

f bir Boole cebiri homomorfizmidir :$\Leftrightarrow$ f bir latis homomorfizmi ve $\forall b \in B$ için $f(\urcorner b) = \urcorner f(b)$ sağlanır. (Johnstone, 1992)

Bütünleyenin tekliğinden Boole cebirleri arasındaki herhangi bir latis homomorfizmi gerçekte bir Boole cebiri homomorfizmidir.

Örnek 1.2.9: (1) X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, $\mathcal{P}(X)$ güç kümesi, $\leq$ bağıntısı içerme $\subseteq$ bağıntısı, $\vee, \wedge$ operatörleri sırasıyla birleşim ve arakesit, en küçük ve en büyük elemanlar ise sırasıyla $\emptyset$ ve X olmak üzere bir tam dağılımlı tam latisdir. Ayrıca $\mathcal{P}(X)$ in her elemanının bütünleyeni mevcut olduğundan $\mathcal{P}(X)$ bir Boole cebiridir.

(2) A en küçük ve en büyük elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan tam sıralı bir küme olsun. Bu takdirde, $\vee := maks,\ \wedge := min$ operatörleri olmak üzere A bir dağılımlı latisdir. Fakat A ikiden fazla elemana sahip ise A bir Boole cebiri olamaz. Çünkü, 0 ve 1 dışındaki hiçbir elemanın bütünleyeni yoktur.

Tanım 1.2.10: A, 1 birim elemanlı bir halka ve her $a \in A$ için $a^2 = a$ ise A ya bir Boole halkası (Boolean ring) denir. (Johnstone, 1992)

Uyarı 1.2.11: Her Boole cebiri bir Boole halkasıdır. Gerçekten, herhangi bir A Boole cebirinde her $a, b \in A$ için $+$ ve $.$ işlemleri

$a + b := (a \wedge \urcorner b) \vee (\urcorner a \wedge b)$ ve $a.b := a \wedge b$

olarak tanımlanırsa bu işlemler ile A bir Boole halkasıdır.

Tersine, eğer A bir 1 birim elemanlı bir Boole halkası ise

$a \wedge b := a.b$ ve $a \vee b := a + b + a.b$

işlemleri ile A yı bir Boole cebiri olarak göz önüne alabiliriz.

Ayrıca açıktır ki, herhangi bir Boole cebiri homomorfizmi bir Boole halka homomorfizmidir ve bunun terside doğrudur. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.2.12: A bir üst-yarı latis ve $D \subset A$ olsun. D‘ ye A nın bir ideali (ideal) denir $:\Leftrightarrow$

(i) $0_A \in D$ ve $a, b \in D \Rightarrow a \vee b \in D.$

(ii) $a \in D$ ve $b \leq a \Rightarrow b \in D.$ (Johnstone, 1992)

Örnek 1.2.13: (1) Herhangi bir $a \in A$ için $\downarrow(a) := \{b \in A \mid b \leq a\} \subset A$ alt kümesi A nın bir idealidir ve açık olarak a yı içeren en küçük idealdir. Böylece halka teorisindeki benzerlik ile bu ideale a ile üretilen esas ideal denir.

(2) $f: A \longrightarrow B$ bir yarı latis homomorfisi olsun. Bu takdirde, $\{ a \in A \mid f(a) = 0_B \}$ (f nin çekirdeği) kümesi A nın bir idealidir. (Johnstone, 1992)

Önerme 1.2.14: A bir latis ve D, A nın bir ideali olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) D nin bütünleyeni A da bir filtredir (yani, Tanım 1.2.12 deki özelliklerin duallerini sağlar).

(ii) $1_A \notin D$ ve $a \wedge b \in D \Longrightarrow a \in D$ veya $b \in D$.

(iii) $D,$ bir $f: A \longrightarrow 2$ latis homomorfisinin çekirdeğidir. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.2.15: Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan bir ideale asal ideal (prime ideal) denir. Bir asal idealin bütünleyenine ise asal filtre (prime filter) adı verilir. (Johnstone, 1992)

Önerme 1.2.16: A bir Boole cebiri ve $D \subset A$ olsun. Bu takdirde,

D, A nın latis olarak (asal) idealidir $\Leftrightarrow$ D, A nın halka olarak (asal) idealidir. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.2.17: L bir latis olsun. L ye bir Heyting cebiri (Heyting algebra) denir $:\Leftrightarrow$ her bir (a, b) eleman çifti için

$c \leq (a \longrightarrow b) \;\Leftrightarrow\; c \wedge a \leq b$

önermesini sağlayan bir $(a \longrightarrow b)$ elemanı mevcuttur. (Johnstone, 1992)

Önerme 1.2.18: L bir latis ve " $\longrightarrow$ "$, L$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde, "$\longrightarrow$ " işlemi L yi bir Heyting cebirine dönüştürür $\Leftrightarrow$ $\forall\, a, b, c \in L$ için aşağıdakiler sağlanır. (Johnstone, 1992)

(i) $a \longrightarrow a = 1$,

(ii) $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge b$,

(iii) $b \wedge (a \longrightarrow b) = b$,

(iv) $a \longrightarrow (b \wedge c) = (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow c)$.

Önerme 1.2.19: Her Boole cebiri bir Heyting cebiridir.

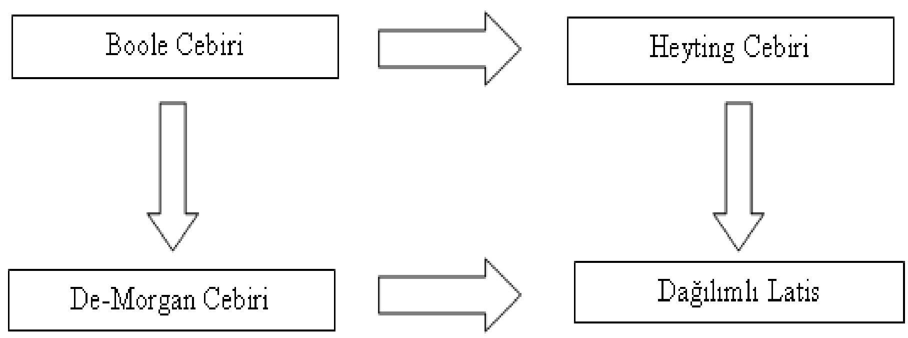
Gerçekten, A bir Boole cebiri ve $a, b \in A$ için $a \longrightarrow b := \urcorner a \vee b$ olarak tanımlanırsa A nın bir Heyting cebiri olduğu görülür.

Bir genel Heyting cebirinde $\urcorner$ işlemi $\urcorner a \coloneqq a \longrightarrow 0$ olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan $\urcorner a$ elemanına a nın yarı tümleyeni denir. Açık olarak, $a \wedge \urcorner a = 0$ dır. Fakat, $a \vee \urcorner a = 1$ olması gerekmez. (Johnstone, 1992)

Lemma 1.2.20: (1) Her Heyting cebiri dağılımlıdır.

(2) Bir L Heyting cebiri bir Boole cebiridir $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in L$ için $\urcorner\urcorner a = a$. (Johnstone, 1992)

Sonuç olarak aşağıdaki diyagram (Şekil 1. 4) elde edilir.



Şekil1. 3: Cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler diyagramı

Fakat bu içermelerin terslerinin sağlanması gerekmez.

Örnek 1.2.21: (1) A en küçük elemanı 0 ve en büyük elemanı 1 olan bir tam sıralı küme olsun. Bu takdirde, A aşağıda tanımlanan işlem ile bir Heyting cebiridir.

$$a \longrightarrow b \coloneqq \begin{cases} 1, a \leq b \\ b, \text{diğer} \end{cases}$$

Fakat, A bir Boole cebiri değildir. Gerçekten, her $a \in A, (a \neq 0)$ için $\urcorner\urcorner a = 1$ dir.

(2) Standart bulanık cebir ile $I = ([0,1], maks, min, 0, 1, 1-a)$ bir De-Morgan cebiridir, fakat Boole cebiri değildir.

Önerme 1.2.22: A bir Heyting cebiri ve $a \in A$ olmak üzere $A_{\neg\neg} := \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$ olarak tanımlanan $A_{\neg\neg}$ kümesi bir Boole cebiridir.

Burada, $A_{\neg\neg}$ nın elemanlarına A nın regüler elemanları denir. (Johnstone, 1992)

1.3. Üçgensel Normlar

Tanım 1.3.1: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $T: I \times I \longrightarrow I$ dönüşümüne bir üçgensel (triangular) norm (kısaca, t-norm) adı verilir.

(TN1) $\forall a, b \in I$ için $T(a, b) = T(b, a)$.

(TN2) $\forall a, b, c \in I$ için $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$.

(TN3) $\forall a, b, c \in I$ için $a \leq b \implies T(a, c) \leq T(b, c)$.

(TN4) $\forall a \in I$ için $T(a, 1) = a$.

Bir T t-normu için $I = [0,1]$ üzerinde rezidium ve birezidium adı verilen $\longrightarrow_T, \longleftrightarrow_T$ ikili işlemleri aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir.

$a \longrightarrow_T b := \bigvee\{c \in I : T(a, c) \leq b\}$,

$a \longleftrightarrow_T b := (a \longrightarrow_T b) \wedge (b \longrightarrow_T a), \forall a, b \in I$.

Buna göre, $\forall a, b, c \in I$ için

$T(a, b) \leq c \Leftrightarrow a \leq (b \longrightarrow_T c)$ önermesi sağlanır.

Bir T t-normu I ve $I \times I$ üzerindeki standart topolojilere göre bir fonksiyon olarak sürekli ise bu T t-normuna süreklidir denir. Buna göre,

Minimum t-norm: $T_{min}(a, b) := \min\{a, b\}$, (Şekil 1. 4 (a))

Çarpım t-norm: $T_{prod}(a, b) := a \cdot b$, (Şekil 1. 4 (c))

Lukasiewicz t-norm: $T_{Luk}(a, b) := \text{maks}\{a + b - 1, 0\}$ (Şekil 1. 4 (e))

olarak tanımlı dönüşümler birer sürekli t-normdur. (Klement ve diğ., 2000)

Önerme 1.3.2: T sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\forall a, b, c \in I$ için $a \longrightarrow_T b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$.

(ii) $\forall a \in I$ için $1 \longrightarrow_T a = a$.

(iii) $\forall a, b \in I$ için $T(a, a \longrightarrow_T b) \leq b$. (Klement ve diğ., 2000)

Uyarı 1.3.3: Bir T t-normu için I üzerinde $*_T$ yarı tümleme operatörü,

$*_T\,(a) \coloneqq a \longrightarrow_T 0, \forall a \in I$

olarak tanımlanır. Açıktır ki, yarı tümleme operatörü sırayı-tersine koruyan bir operatördür (Tanım 1.2.1 (ii)), ancak her zaman bunun bir üst alma operatörü (Tanım 1.2.1 (i)) olması gerekmez. Örneğin;

Minimum t-norm için, $a \longrightarrow_T b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & \text{diğer} \end{cases}$

Çarpım t-norm için, $a \longrightarrow_T b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b/a, & \text{diğer} \end{cases}$

Lukasiewicz t-norm için, $a \longrightarrow_T b = \min\{1 - a + b, 1\}$, $a \longleftrightarrow_T b = 1 - |a - b|$ biçiminde tanımlıdır. (Klement ve diğ., 2000)

Tanım 1.3.4: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $S: I \times I \longrightarrow I$ dönüşümüne bir üçgensel (triangular) conorm (kısaca, t-conorm veya s-norm) adı verilir.

(SN1) $\forall a, b \in I$ için $S(a, b) = S(b, a)$.

(SN2) $\forall a, b, c \in I$ için $S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$.

(SN3) $\forall a, b, c \in I$ için $a \leq b \Rightarrow S(a, c) \leq S(b, c)$.

(SN4) $\forall a \in I$ için $S(a, 0) = a$.

T bir t-norm olmak üzere bu t-normun duali olan S t-conormu

$S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b), \ \forall a, b \in I$

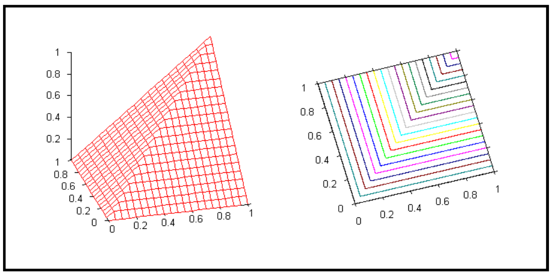
olarak belirlidir. (Klement ve diğ., 2000)

Buna göre, yukarıda tanımlanan t-normların dualleri olan t-conormlar şu şekilde belirlidir:

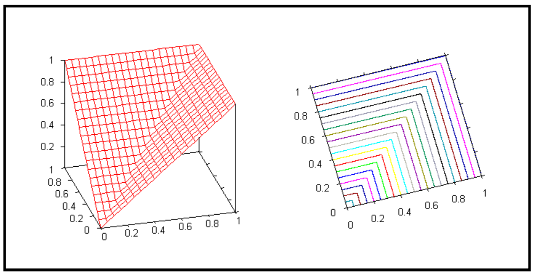
Maksimum t-conorm: $S_{maks} \coloneqq \text{maks}\{a, b\}$, (Şekil 1. 4 (b))

Cebirsel toplam: $S_{top} \coloneqq a + b - a.b$, (Şekil 1. 4 (d))

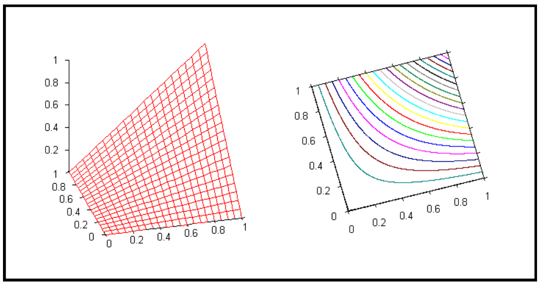
Sınırlı toplam: $S_{Luk}(a, b) \coloneqq \min\{a + b, 1\}$ (Şekil 1. 4 (f))



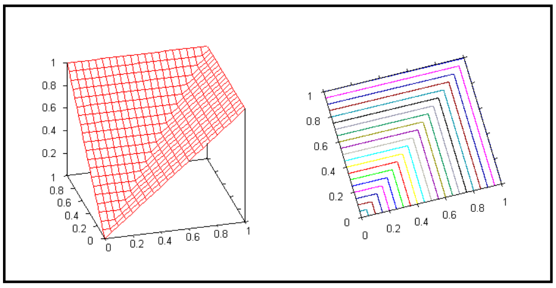
(a)



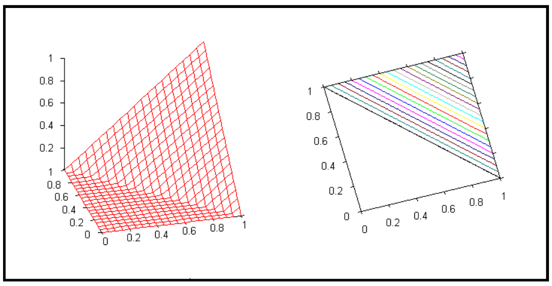
(b)



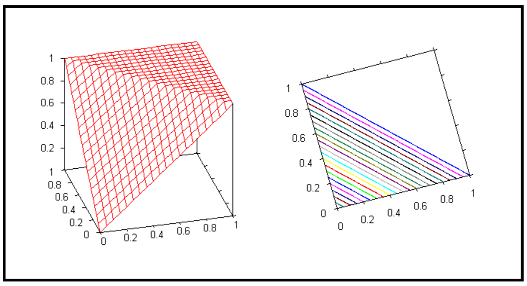
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil1. 4: (a) Minimum t-norm, (b) Maksimum t-conorm, (c) Çarpım t-norm, (d) Cebirsel toplam, (e) Lukasiewicz t-norm, (f) Sınırlı toplam

1.4. Quantale Latisler

Tanım 1.4.1: $(L, \leq)$ sonsuz dağılımlı bir tam latis olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $(L, \leq, \circledast)$ üçlüsüne GL-monoid adı verilir. (Burada, GL genelleştirilmiş mantık (Generalized Logic) ifadesine karşılık gelmektedir.)

(1) $\forall\, a, b, c \in L$ için $a \leq b \;\Longrightarrow a \circledast c \leq b \circledast c$,

(2) $\forall\, a, b \in L$ için $a \circledast b = b \circledast a$,

(3) $\forall\, a \in L$ için $a \circledast 1_L = a$ ve $a \circledast 0_L = 0_L$,

(4) $\circledast$ işlemi keyfi supremum üzerine dağılımlıdır, yani

$a \circledast (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \circledast b_i)$,

(5) $\forall\, a, b \in L$ için $a \leq b \;\Longrightarrow \exists\, c \in L : a = b \circledast c$.

Bir $(L, \leq, \circledast)$ GL-monoidi bir kareköklü GL-monoiddir $:\Longleftrightarrow$

(6) L üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $S\colon L \longrightarrow L$ işlemi mevcuttur.

(i) $S(a) \circledast S(a) = a$,

(ii) $b \circledast b \leq a \;\Longrightarrow b \leq S(a)$.

S işlemi (i) ve (ii) den tek türlü belirlidir. Bu nedenle $S(a)$ yerine $\sqrt{a}$ yazılabilir. Özel olarak, $\sqrt{a}$ ya $a \in L$ nin karekökü denir. (Höhle ve Sostak, 1995)

Örnek 1.4.2: (1) $\circledast = \wedge$ ve $\forall\, a \in L$ için $\sqrt{a} = a$ olarak tanımlanırsa her L tam Heyting cebiri bir kareköklü GL-monoiddir.

(2) $I = [0,1]$ kapalı birim aralık sol sürekli bir T t-normu ile birlikte bir kareköklü GL-monoiddir. Özel olarak, Lukasiewicz t-normu ele alındığında $\forall\, a \in L$ için $\sqrt{a} = (a+1)/2$ olarak tanımlıdır.

Her GL-monoid üzerinde rezidium mevcuttur ve "$\longrightarrow$" işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır: $a \longrightarrow b = \bigvee\{c \in L : a \circledast c \leq b\}$. (Höhle ve Sostak, 1995)

Lemma 1.4.3: $(L, \leq, \circledast)$ bir kareköklü GL-monoid olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $a \circledast b \leq a \wedge b$,

(ii) $(\bigvee_{i\in\Gamma} a_i) \longrightarrow b = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a_i \longrightarrow b)$,

(iii) $a \longrightarrow (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a \longrightarrow b_i)$,

(iv) $a \wedge b = a \circledast (a \longrightarrow b)$,

(v) $a \circledast a = a \implies \forall b \in L$ için $a \circledast b = a \wedge b$,

(vi) $a \leq \sqrt{a}\,,\ \sqrt{a} \circledast \sqrt{b} \leq \sqrt{a \circledast b}$,

(vii) $a \leq b \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$,

(viii) $\sqrt{a \longrightarrow b} = \sqrt{a} \longrightarrow \sqrt{b}$,

(ix) $a \leq b$ ve $b = \sqrt{a} \circledast \sqrt{b} \implies a = b$. (Höhle ve Sostak, 1995)

Tanım 1.4.4: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(L, \leq, \odot)$ üçlüsüne bir quantale latis (kısaca, q-latis) adı verilir.

(1) $(L, \leq)$ bir tam latis.

(2) $(L, \odot)$ bir yarı-grup.

(3) $\odot$ işlemi keyfi supremum üzerine dağılımlıdır, yani

$a \odot (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \odot b_i)$ ve $(\bigvee_{i\in\Gamma} a_i) \odot b = \bigvee_{i\in\Gamma}(a_i \odot b)$.

Herhangi bir q-latisde sağ ve sol implikasyonlar mevcuttur ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$a \overset{r}{\rightarrow} b = \bigvee\{c \in L : a \odot c \leq b\}$ ve $a \overset{l}{\rightarrow} b = \bigvee\{c \in L : c \odot a \leq b\}$.

(Paseka, 1996)

Tanım 1.4.5: $(L, \leq, \odot)$ bir q-latis olsun. Bu takdirde,

(i) $a \in L$ elemanına sol yanlı (sağ yanlı) denir $:\Longleftrightarrow 1 \odot a \leq a$ $(a \odot 1 \leq a)$.

(ii) $a \in L$ elemanına kesin sol yanlı (sağ yanlı) denir $:\Leftrightarrow 1 \odot a = a \;\; (a \odot 1 = a)$.

(iii) $a \in L$ elemanına (kesin) iki yanlı denir $:\Leftrightarrow a$ (kesin) sağ yanlı ve (kesin) sol yanlıdır.

(iv) $(L, \leq, \odot)$ q-latisi birimlidir $:\Leftrightarrow$ $(L, \odot)$ bir monoiddir.

Herhangi bir birimli q-latisde her sol yanlı (sağ yanlı) eleman kesin sol yanlı (kesin sağ yanlı) dır. (Paseka, 1996)

Tanım 1.4.6: $(L, \leq)$ bir tam latis olmak üzere, $(L, \leq, \odot)$ üçlüsüne bir kesin iki-yanlı, değişmeli quantale latis denir $:\Leftrightarrow$

(L1) $(L, \odot)$ bir değişmeli yarı-grup.

(L2) $\forall\, a \in L$ için $a \odot 1_L = a$ ve $a \odot 0_L = 0_L$.

(L3) $\odot$ işlemi keyfi supremum üzerine dağılımlıdır, yani

$a \odot (\bigvee_{i \in \Gamma} b_i) = \bigvee_{i \in \Gamma}(a \odot b_i)$.

Bir $(L, \leq, \odot)$ kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisine idempotent denir $:\Leftrightarrow$

$\forall\, a \in L$ için $a \odot a = a$ sağlanır.

$L = (L, \leq, \odot, ')$, $'$ sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü ile birlikte bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olsun. Bu takdirde, L üzerinde $\odot$ işleminin duali olan $\oplus$ işlemi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$\forall\, a, b \in L$ için $a \oplus b = (a' \odot b')'$. (Höhle ve Sostak, 1999)

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $L = (L, \leq, \odot, \oplus, ')$, $'$ sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü ile bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olarak ele alınacaktır.

Örnek 1.4.7: (1) Her çatı (Tanım 1.1.12) bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir.

(2) $\odot = \wedge$ olarak alındığında her tam dağılımlı tam latis (Tanım 1.1.15) bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir. Özel olarak, $([0,1], \leq, \wedge)$ bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir.

(3) Her GL-monoid (Tanım 1.4.1) bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir.

(4) $\odot = T$ sürekli t-norm (Tanım 1.3.1) olarak alındığında her $([0,1], \leq, T)$ üçlüsü bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir.

(5) X herhangi bir küme olmak üzere, $L = \mathcal{P}(X)$ güç kümesi ve $\odot = \cap$ olarak alındığında $(L, \subseteq, \cap)$ üçlüsü bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir.

L bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere, L üzerinde bir " $\longrightarrow$ " işlemi $\forall\, a, b \in L$ için

$$a \longrightarrow b = \bigvee\{c \in L : a \odot c \leq b\}$$

olarak tanımlanır. Bu takdirde,

$$a \odot b \leq c \iff a \leq (b \longrightarrow c)$$

önermesi sağlanır.

Bir L kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisinde $a \in L$ için $a^* \coloneqq a \longrightarrow 0_L$ elemanına a nın yarı bütünleyeni denir.

Tanım 1.4.8: Bir L kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisine bir MV-cebiri (MV-algebra) adı verilir $:\iff$ $\forall\, a \in L$ için $(a \longrightarrow 0_L) \longrightarrow 0_L = a$ sağlanır.

Bir L MV-cebiri tamdır $:\iff$ (MV) $\forall\, a, b \in L$ için $(a \longrightarrow b) \longrightarrow b = a \vee b$ sağlanır. Burada, MV çok değerli mantık (Multi Valued Logic) ifadesine karşılık gelmektedir. (Höhle ve Sostak, 1999)

Örnek 1.4.9: $L = I$ ve $a \odot b = \text{maks}\{a + b - 1, 0\}$ olarak alındığında L bir tam MV-cebiridir.

Lemma 1.4.10: $L = (L, \leq, \odot, \oplus, ')$ bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olsun. Bu takdirde, $\forall\, a, b, c, d \in L$ ve $\forall\, \{b_i\}_{i \in \Gamma} \subset L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır. (Höhle ve Sostak, 1999)

(1) $b \leq c \implies a \odot b \leq a \odot c$ ve $a \oplus b \leq a \oplus c$.

(2) $a \odot b \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq a \oplus b$.

(3) $(\bigvee_{i \in \Gamma} b_i)' = \bigwedge_{i \in \Gamma} b_i'$ ve $(\bigwedge_{i \in \Gamma} b_i)' = \bigvee_{i \in \Gamma} b_i'$.

(4) $a \oplus (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a \oplus b_i)$.

(5) $(a \vee b) \odot (c \vee d) \leq (a \vee c) \vee (b \odot d) \leq (a \oplus c) \vee (b \odot d)$.

(6) $a \odot (a \longrightarrow b) \leq b$ ve $a \longrightarrow b \leq (b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \longrightarrow c)$.

(7) Eğer L bir MV-cebiri ise $a \longrightarrow b = b^* \longrightarrow a^*$.

(8) Eğer L bir MV-cebiri ise $a \odot (a^* \oplus b^*) \leq b^*$.

(9) Eğer L bir tam MV-cebiri ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $(a^*)^* = a$ ve $a \leq b \implies a^* \geq b^*$.

(ii) $a \odot b = (a \longrightarrow b^*)^*$ ve $a \oplus b = a^* \longrightarrow b$.

(iii) $(a \oplus c) \odot b \leq a \oplus (b \odot c)$.

(iv) $a \odot b \odot (c \oplus d) \leq (a \odot c) \oplus (b \odot d)$.

(v) $a \wedge b = a \odot (a \longrightarrow b)$ ve $b \leq c \implies a \longrightarrow b \leq a \longrightarrow c$.

(vi) $a \longrightarrow (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \longrightarrow b_i)$ ve $a \longrightarrow (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a \longrightarrow b_i)$.

(vii) $(\bigvee_{i\in\Gamma} a_i) \longrightarrow b = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a_i \longrightarrow b)$ ve $(\bigwedge_{i\in\Gamma} a_i) \longrightarrow b = \bigvee_{i\in\Gamma}(a_i \longrightarrow b)$.

(viii) $a \oplus (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \oplus b_i)$ ve $a \odot (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a \odot b_i)$.

İspat: (1) $b \leq c \implies c = b \vee c$

$a \odot b \leq (a \odot c) \vee (a \odot b) = a \odot (b \vee c) = a \odot c \implies a \odot b \leq a \odot c$

$b \leq c \implies b' \geq c' \implies a' \odot b' \geq a' \odot c' \implies a \oplus b \leq a \oplus c$ elde edilir.

(2) $\forall\, a, b \in L$ için $a, b \leq 1$ olduğundan $a \odot b \leq b, a \implies a \odot b \leq a \wedge b$ dir. $a' \odot b' \leq a' \wedge b' \implies (a' \odot b')' \geq (a' \wedge b')' \implies a \vee b \leq a \oplus b$.

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i \leq b_i \implies \forall\, i \in \Gamma$ için $(\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i)' \geq b_i' \implies (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i)' \geq \bigvee_{i\in\Gamma} b_i'$

$\forall\, i \in \Gamma$ için $b_i' \leq \bigvee_{i\in\Gamma} b_i' \implies \forall\, i \in \Gamma$ için $b_i \geq (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i')'$

$\implies \bigwedge_{i\in\Gamma} b_i \geq (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i')' \implies (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i)' \leq \bigvee_{i\in\Gamma} b_i'$

Böylece, $(\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i)' = \bigvee_{i\in\Gamma} b_i'$ elde edilir. Benzer şekilde diğeri de görülür.

(4) $a \oplus (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i) = (a' \odot (\bigwedge_{i\in\Gamma} b_i)')' = (a' \odot \bigvee_{i\in\Gamma} b_i')' = (\bigvee_{i\in\Gamma}(a' \odot b_i'))'$

$$=\bigwedge_{i\in\Gamma}(a' \odot b_i')' = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a \oplus b_i).$$

(5) $(a \vee b) \odot (c \vee d) = \big((a \vee b) \odot c\big) \vee ((a \vee b) \odot d)$

$$= (a \odot c) \vee (b \odot c) \vee (a \odot d) \vee (b \odot d)$$

$$\leq (a \vee c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \odot d)$$

$$\leq (a \vee c) \vee (c \vee a) \vee (b \odot d)$$

$$= (a \vee c) \vee (b \odot d)$$

$$\leq (a \oplus c) \vee (b \odot d).$$

(6) $a \longrightarrow b \leq a \longrightarrow b$ olduğundan $a \odot (a \longrightarrow b) \leq b$

$a \longrightarrow b \leq (b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \longrightarrow c) \Leftrightarrow (a \longrightarrow b) \odot (b \longrightarrow c) \leq (a \longrightarrow c)$

$$\Leftrightarrow a \odot (a \longrightarrow b) \odot (b \longrightarrow c) \leq c.$$

(7) L bir MV-cebiri ve $a^* = a \longrightarrow 0_L$ olsun. (6) da $c = 0_L$ alınırsa

$$a \longrightarrow b \leq (b \longrightarrow 0_L) \longrightarrow (a \longrightarrow 0_L) = b^* \longrightarrow a^* \tag{1.1}$$

$$b^* \longrightarrow a^* \leq a^{**} \longrightarrow b^{**} = a \longrightarrow b \tag{1.2}$$

$\Longrightarrow$ (1.1) ve (1.2) den, $a \longrightarrow b = b^* \longrightarrow a^*$.

(8) L bir MV-cebiri olsun.(6) dan,

$(a \odot b) \odot ((a \odot b) \longrightarrow 0_L) \leq 0_L \Longrightarrow a \odot ((a \odot b) \longrightarrow 0_L) \leq b \longrightarrow 0_L$

$a \odot (a^* \oplus b^*) = a \odot (a^{**} \odot b^{**})^* = a \odot (a \odot b)^* \leq b \longrightarrow 0_L = b^*$.

(9) (i) Tanımlardan kolaylıkla görülür.

(ii) (8) den, $a \odot (a^* \oplus b^*) \leq b^* \Longrightarrow a^* \oplus b^* \leq a \longrightarrow b^*$

$a \odot b = (a^* \oplus b^*)^* \geq (a \longrightarrow b^*)^* \Longrightarrow a \odot b \geq (a \longrightarrow b^*)^*$

$a \odot b \leq (a \longrightarrow b^*)^* \Leftrightarrow a \leq b \longrightarrow (a \longrightarrow b^*)^*$

$\Leftrightarrow a \leq (a \longrightarrow b^*)^{**} \longrightarrow b^*$

$\Leftrightarrow a \leq a \vee b^*.$

$a \oplus b = (a^* \odot b^*)^* = (a^* \longrightarrow b^{**})^{**} = a^* \longrightarrow b.$

(iii) $(a \oplus c) \odot b \leq a \oplus (b \odot c) \Leftrightarrow (a^* \longrightarrow c) \odot b \leq a^* \longrightarrow (b \odot c)$

$\Leftrightarrow a^* \odot (a^* \longrightarrow c) \odot b \leq b \odot c.$

(iv) $a \odot b \odot (c \oplus d) \leq a \odot \big(c \oplus (b \odot d)\big)$

$= \big((b \odot d) \oplus c\big) \odot a$

$\leq (a \odot c) \oplus (b \odot d).$

Tanım 1.4.11: $(L, \leq_1, \odot_1)$, $(M, \leq_2, \odot_2)$ iki kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere, $f: L \longrightarrow M$ fonksiyonu bir q-latis homomorfizmidir : $\Leftrightarrow$

(i) f keyfi supremumu korur.

(ii) $\forall\, a, b \in L$ için $f(a \odot_1 b) = f(a) \odot_2 f(b)$.

(iii) $f(1_L) = 1_M$, yani evrensel üst sınır korunur.

1.5. Kategoriler ve Funktorlar

Küme teorisinde, kümeler ve kümeler arasında tanımlanan fonksiyonlar göz önüne alınır. Topolojide bir topolojik uzaydan diğerine sürekli fonksiyonlar, grup teorisinde bir gruptan diğerine grup homomorfizmleri tanımlanır. Bunları ayrı ayrı birer çatı altında toplarsak, bu yapı bazı objelerden ve bir objeden diğerine gitmek için tanımlanan kurallar veya yollardan oluşur. İşte bu kavramlar kategorinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 1.5.1: Bir IK kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:

(K1) Bir $ObIK$ sınıfı ki, bu sınıfın elemanlarına IK nın objeleri (nesneleri) denir.

(K2) IK nın objelerinin her (X, Y) ikilisi için bir $M(X, Y)$ kümesi karşılık getirilir ve bu kümenin elemanlarına X den Y ye morfizmler yada IK-morfizmler denir.

Her $X, Y, Z, W \in ObIK$ için $(X, Y) \neq (Z, W)$ ise $M(X, Y) \cap M(Z, W) = \emptyset$ dir. (Yani, tanım ve değer bölgeleri tek türlü belirlidir.)

Bazen $M(X, Y)$ kümesi, $Mor(X, Y)$ yada $Mor_{IK}(X, Y)$ ile gösterilir.

(K3) IK nın objelerinin her X, Y, Z üçlüsü için bir $\circ$ dönüşümü ki bileşke adı verilen bu dönüşüm

$\circ: M(X, Y) \times M(Y, Z) \longrightarrow M(X, Z), \quad \circ(f, g) \coloneqq g \circ f$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Bileşke asosyatiftir. Yani, $\forall\, f \in Mor(X, Y), g \in Mor(Y, Z)$ ve $h \in Mor(Z, W)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) IK nın her X objesi için X in idantik (birim) morfizmi adı verilen bir $1_X \in Mor(X, X)$ elemanı vardır öyle ki,

$\forall\, f \in Mor(X, Y), g \in Mor(Y, Z)$ için $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$.

Kategorideki objelerin sınıfının kümelerden oluşması gerekmez (o yalnızca bir sınıftır). Buna rağmen herhangi iki obje için birinden diğerine olan morfizmler bir küme formunda olmak zorundadır.

$X, Y \in ObIK$ ve $f \in Mor(X, Y)$ için X kümesine f nin tanım bölgesi, Y ye ise değer bölgesi denir. X ve Y nin küme olmadığı durumlarda f nin de bir fonksiyon olması gerekmez. (Adamek ve diğ., 2004)

Örnek 1.5.2: (1) En önemli kategori örneklerinden birisi kümeler ve fonksiyonların oluşturduğu SET kategorisidir. Yani,

(a) $Ob(SET) \coloneqq \{\, X \mid X \text{ bir küme } \}$,

(b) $Mor(X,Y) \coloneqq \{ f \mid f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi,

(d) $X \in Ob(SET)$ için $1_X: X \longrightarrow X, 1_X(x) \coloneqq x$ özdeşlik fonksiyon.

Burada bütün kümeleri ya da bir kümeden diğerine tanımlı bütün fonksiyonları almak gerekli değildir. (K3) koşulu kaldığı müddetçe seçilen bazı fonksiyonlarla da (örneğin, bire-bir örten fonksiyonlar) bir kategori yapılabilir. Buna ileride alt kategori diyeceğiz.

(2) TOP: Topolojik uzaylar ve bunlar arasındaki sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategori, yani

(a) $Ob(TOP) \coloneqq \{ (X,T) \mid (X,T)$ bir topolojik uzay $\}$,

(b) $Mor\big((X,T),(Y,T^*)\big) \coloneqq \{ f \mid f: (X,T) \longrightarrow (Y,T^*)$ bir sürekli fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke dönüşümü sürekli fonksiyonların bileşkesi.

(3) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye aşağıda açıklandığı gibi bir IK kategorisi gözüyle bakılabilir.

$ObIK \coloneqq \{ x \mid x \in X \}$, $\quad \forall\, x,y \in ObIK \quad$ için $\quad Mor(x,y) \coloneqq \begin{cases} \{(x,y)\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$

$\leq$ bağıntısının geçişme özelliği IK nın her üç objesi için bir tek bileşke olduğunu, yansıma özelliği de idantik morfizmin varlığını garanti eder. (Adamek ve diğ., 2004)

(4) Frm: Çatılar kategorisi, yani

(a) $ObFrm \coloneqq \{ L \mid L$ bir çatı (frame) $\}$,

(b) $Mor(L,K) \coloneqq \{ f \mid f$ sonlu infimum ve keyfi supremum koruyan dönüşüm$\}$.

(5) $\mathbb{G}$: Gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{R}$: Halkalar ve halka homomorfizmleri kategorisi,

Lat: Latisler ve latis homomorfizmleri kategorisi,

$Bool$: Boole cebirleri ve homomorfizmleri kategorisi. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.5.3: IK ve IL iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, IL ye IK nın bir alt kategorisi (subcategory) denir.

(a) $ObIL \subset ObIK$,

(b) $\forall\, X, Y \ \in ObIL$ için $Mor_{IL}(X, Y) \subset Mor_{IK}(X, Y)$,

(c) $\forall\, X, Y, Z \ \in ObIL$ ve $\forall\, f \in Mor_{IL}(X, Y), g \in Mor_{IL}(Y, Z)$ için

$g \circ f \in Mor_{IL}(X, Z) \ \Rightarrow \ g \circ f \in Mor_{IK}(X, Z)$,

(d) $\forall\, X \ \in ObIL$ için $1_X \in Mor_{IL}(X, X) \Rightarrow \ 1_X \in Mor_{IK}(X, X)$.

Eğer yukarıda verilen (b) koşulu için eşitlik sağlanıyorsa IL ye IK nın bütünüyle alt kategorisi (full subcategory) denir. (Adamek ve diğ., 2004)

Örnek 1.5.4: (1) Objeleri kümeler, morfizmleri bire-bir örten fonksiyonlar olan kategori SET kategorisinin bir alt kategorisidir. Objeleri bütün sonlu kümeler ve morfizmleri fonksiyonlar olan kategori de SET kategorisinin bütünüyle alt kategorisidir.

(2) Objeleri kompakt (veya bağlantılı, Hausdorff vs.) topolojik uzaylar ve morfizmleri homeomorfizmler olan kategori TOP kategorisinin bir alt kategorisidir.

Tanım 1.5.5: IK herhangi bir kategori olsun. Aşağıda tanımlanan kategoriye IK nın dual kategorisi (duali) denir ve IK^o ile gösterilir.

$ObIK^o \coloneqq ObIK$ ve $\forall\, X, Y \in ObIK^o$ için $Mor_{IK^o}(X, Y) \coloneqq Mor_{IK}(Y, X)$

Yani, IK^o nin morfizmleri IK nın morfizmlerinin tanım ve değer kümelerinin yer değiştirilmesi ile elde edilir. Açık olarak, $(IK^o)^o = IK$ dir. (Adamek ve diğ., 2004)

Örnek 1.5.6: (1) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye Örnek 1.5.2 (3) den bir kategori gözüyle bakılabileceğinden, bu kategorinin duali $(X, \geq)$ kısmi sıralı kümesidir. (Adamek ve diğ., 2004)

(2) Frm çatılar kategorisinin dualine lokaller kategorisi denir ve bu kategori Loc ile gösterilir. (Johnstone, 1992)

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece IK bir kategori ve $f: X \longrightarrow Y$, IK da bir morfizm olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.5.7: (a) $\forall\, Z \in ObIK$ ve $\forall\, g_1, g_2: Y \longrightarrow Z$ morfizmleri için

$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$ sağlanıyorsa f ye bir epimorfizm denir.

(b) $\forall\, Z \in ObIK$ ve $\forall\, h_1, h_2: Z \longrightarrow X$ morfizmleri için

$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Longrightarrow h_1 = h_2$ sağlanıyorsa f ye bir monomorfizm denir.

Eğer f hem bir epimorfizm hemde bir monomorfizm ise f ye bimorfizm denir.

SET kümeler kategorisinde bir epimorfizm örten fonksiyon ve bir monomorfizm de bir bire-bir fonksiyondur.

Bu ifadenin diğer kategoriler için genel olarak doğru olması gerekmez.

Eğer IK morfizmleri fonksiyonlar olan bir kategori ise bu kategoride örten fonksiyon olan her morfizm bir epimorfizmdir, fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Örneğin, Hausdorff topolojik uzayların kategorisinde, eğer X bir Y Hausdorff uzayının yoğun bir alt uzayı ise $i : X \longrightarrow Y, i(x) \coloneqq x$ olarak tanımlanan dönüşüm bir epimorfizm olmasına rağmen örten fonksiyon değildir. (Mitchell, 1965)

Tanım 1.5.8: Eğer f'nin sağ tersi varsa, yani $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise f ye bir büzülme (retraksiyon) adı verilir. Eğer f sol terse sahip ise f ye bir karşı (eş) büzülme (co-retraksiyon) denir.

Her retraksiyon bir epimorfizmdir. Kümeler kategorisinde bunun terside doğrudur, ancak genelde doğru olması gerekmez. (Mitchell, 1965)

Tanım 1.5.9: $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise f ye IK da bir özdeşlik veya izomorfizm denir. (Adamek ve diğ. , 2004)

Kolaylıkla görülebilir ki, SET kategorisinde izomorfizm bir bijeksiyon, TOP kategorisinde izomorfizm bir homeomorfizm ve $\mathbb{G}$ de ise bir grup izomorfizmine karşılık gelir.

Tanım 1.5.10: IK ve IL iki kategori olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan F ye IK dan IL ye bir kovaryant (kontravaryant) funktor denir ve $F: IK \longrightarrow IL$ biçiminde yazılır. (Adamek ve diğ., 2004)

(a) $\forall X \in ObIK$ için $F(X) \in ObIL$,

(b) $\forall f \in Mor_{IK}(X, Y)$ için $F(f) \in Mor_{IL}(F(X), F(Y))$

($\forall f \in Mor_{IK}(X, Y)$ için $F(f) \in Mor_{IL}(F(Y), F(X))$),

(c) $\forall f \in Mor_{IK}(X, Y), g \in Mor_{IK}(Y, Z)$ için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

($\forall f \in Mor_{IK}(X, Y), g \in Mor_{IK}(Y, Z)$ için $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$),

(d) $\forall X \in ObIK$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Örnek 1.5.11: (1) Z sabit bir küme olmak üzere, $F: SET \longrightarrow SET$ dönüşümü $F(X) \coloneqq X \times Z$ ve $f : X \longrightarrow Y$ için $F(f): X \times Z \longrightarrow Y \times Z$, $F(f) := f \times 1_Z$ olarak tanımlanırsa F bir kovaryant funktordur.

(2) $IK \coloneqq TOP$ ve $IL \coloneqq$ Halkalar kategorisi olmak üzere, $F: IK \longrightarrow IL$ dönüşümü,

$F(X) \coloneqq C(X) = \{ \lambda : X \longrightarrow IR \mid \lambda$ sürekli fonksiyon $\}$ ve $F(f) \coloneqq f^*$

($\lambda \in C(Y)$ için $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$) olarak tanımlanırsa, F bir kontravaryant funktordur.

(3) $\Omega : TOP \longrightarrow Loc$, $\Omega(X, \tau) \coloneqq \tau$ ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $f^{-1} : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ fonksiyonu olmak üzere $\Omega(f) \coloneqq f^{-1}$ olarak tanımlanan Ω bir kontravaryant funktordur.

(4) IK^o, IK nın dual kategorisi olsun. Bu takdirde, $I: IK \longrightarrow IK^o, I(X) \coloneqq X$ ve $I(f) \coloneqq f$ olarak tanımlanan I bir kontravaryant funktordur. Ayrıca, $F: IK \longrightarrow IL$ herhangi bir funktor olmak üzere, $F^o \circ I = F$ olacak şekilde bir tek $F^o : IK^o \longrightarrow IL$ funktoru vardır. Açık olarak,

F funktoru kovaryanttır $\Longleftrightarrow$ F^o funktoru kontravaryanttır. (Adamek ve diğ., 2004)

Funktorlar bir kategori hakkındaki verileri diğer bir kategoriye taşır. Bazı kategorilerin objeleri diğer bir kategorinin objeleri üzerine ilave bazı yapılar koyularak elde edilirler. Örneğin, bir topolojik uzay bir küme (yani, SET

kategorisinin bir objesi) üzerine topolojik yapı ilave edilmesi ile elde edilir. Bir halka bir Abel grubundan, bir Abel grubu da bir kümeden elde edilebilir. Bu durumların her birinde ilk kategoriden ikinci (yani, ilave özelliğin unutulduğu) kategoriye bir funktor tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan funktorlara unutkan (forgetful) funktor adı verilir.

Örneğin, $F : TOP \longrightarrow SET, F(X,\tau) := X$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir unutkan funktordur. Çünkü, X objesini ikinci tarafa götürürken üzerindeki τ topolojisini ve f morfizmini götürürken de sürekliliğini dikkate almıyor. Benzer şekilde, $\mathbb{G}$ gruplar kategorisinden ve $\mathbb{R}$ halkalar kategorisinden SET kümeler kategorisine unutkan funktorlar tanımlanabilir.

Unutkan funktorların tersine olarak, bir kategoriden diğer bir kategoriye ilk kategorinin objelerine daha fazla yapı ekleyecek şekilde funktorlarda tanımlanabilir. Örneğin, $F : SET \longrightarrow TOP,\ F(X) := (X, \tau_D)$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir funktordur. Benzer şekilde, $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ diskret topoloji yerine $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ trivial topoloji de alınabilir. (Adamek ve diğ., 2004)

Tanım 1.5.12: (1) Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, IK kategorisine, IK dan SET kategorisine tanımlanan unutkan funktora göre bir topolojik kategori denir.

(TC1) Başlangıç yapının varlığı: Bir X kümesi, J sınıfı, $\{(X_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ IK-objelerin ailesi ve $\{f_j : X \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ dönüşümler ailesi için, X kümesi üzerinde $\{f_j : X \longrightarrow (X_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ kaynağına göre başlangıç olan bir tek φ IK-yapısı vardır. Bunun anlamı, bir (Y,ψ) IK-objesi için bir $g : (Y,\psi) \longrightarrow (X,\varphi)$ dönüşümü bir IK-morfizmdir ancak ve ancak her $j \in J$ için $f_j \circ g : (Y,\psi) \longrightarrow (X_j, \varphi_j)$ dönüşümleri bir IK-morfizmdir.

(TC2) Yapı (fibre) küçüklüğü: Herhangi bir X kümesi için $IK(X)$ ile gösterilen X in IK-fibresi, yani X üzerindeki tüm IK-yapıların sınıfı bir kümedir.

(2) IL bir kategori ve E, IL-bimorfizmlerin bir sınıfı olsun.

IL nin IK bütünüyle alt kategorisine IL de E-reflektif (E-yansımalı) (yada, bireflektif) denir :$\Leftrightarrow$ Her IL-objesi bir bimorfizm olarak E de bir IK-yansıma okuna sahiptir.

Bunun anlamı, IL deki herhangi bir B objesi için, $A \;\; IK$ nın bir objesi olmak üzere en az bir $r : B \longrightarrow A \;\; IK$-yansıma (ya da, IK-yansıma bimorfizmi) vardır öyle ki aşağıdaki özellik sağlanır:

A', IK nın bir objesi olmak üzere, herhangi bir $f : B \longrightarrow A'$ için bir tek $f' : A \longrightarrow A'$ IK-morfizmi vardır öyle ki $f' \circ r = f$ dir. (Adamek ve diğ., 2004)

2. L-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle bulanık küme tanımı ve bazı özellikleri tanıtılacaktır. Bulanık topolojiye literatürde getirilen farklı yaklaşımlar verildikten sonra bu yaklaşımlar arasındaki ilişkiler kategorik olarak incelenecektir. Ayrıca L-bulanık iç (kapanış) operatörleri ve L-bulanık komşuluk sistemi kavramlarına da yer verilecektir.

2.1. Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir tam latis olmak üzere her $\lambda : X \longrightarrow L$ fonksiyonuna X in bir L-bulanık alt kümesi adı verilir.

X in tüm L-bulanık alt kümelerinin ailesi L^X ile gösterilir. Şu halde,

$L^X \coloneqq \{ \lambda \mid \lambda : X \longrightarrow L \text{ bir fonksiyon}\}$.

$x \in X$ ve $\lambda \in L^X$ olmak üzere $\lambda(x)$ değerine x noktasının λ L-bulanık alt kümesine ait olma (üyelik) derecesi denir.

Özel olarak, $L = I$ olması halinde her $\lambda : X \longrightarrow I$ fonksiyonu X in bir bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

$\{ x \in X \mid \lambda(x) > 0_L \} \subset X$ klasik alt kümesine λ L-bulanık alt kümesinin desteği denir ve suppλ veya λ_0 notasyonlarından biri ile gösterilir.

Her $\alpha \in L$ için $\{ x \in X \mid \lambda(x) \geq \alpha \} \subset X$ klasik alt kümesine λ L-bulanık alt kümesinin α-seviyesi denir ve $\lambda_{[\alpha]}$ notasyonu ile gösterilir.

$\alpha \in L$ olmak üzere her $x \in X$ için $\underline{\alpha}(x) \coloneqq \alpha$ olarak tanımlanan fuzzy kümesi X' in sabit L-bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

Buna göre, $\forall\, x \in X$ için $\underline{0}(x) \coloneqq 0_L$ ve $\underline{1}(x) \coloneqq 1_L$ biçiminde tanımlanır.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi de A nın karakteristik fonksiyonu, $\chi_A : X \longrightarrow 2 \coloneqq \{0,1\}$

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

ile X in bir bulanık alt kümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla, her klasik küme bir bulanık kümedir. (Zadeh, 1965)

Not 2.1.2: Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece X boştan farklı klasik bir kümeyi ve L ise bir bulanık latisi ifade edecektir.

Tanım 2.1.3: $\lambda, \mu \in L^X$ olmak üzere,

(a) $\lambda = \mu :\Leftrightarrow \ \forall\, x \in X$ için $\lambda(x) = \mu(x)$.

(b) $\lambda \leq \mu :\Leftrightarrow \ \forall\, x \in X$ için $\lambda(x) \leq \mu(x)$.

(c) $\lambda' : X \longrightarrow L, \forall\, x \in X$ için $\lambda'(x) \coloneqq (\,\lambda(x))'$. ($L = I$ ise, $\lambda'(x) \coloneqq 1 - \lambda(x)$).

(d) λ, μ L-bulanık alt kümelerinin birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(\lambda \vee \mu)(x) \coloneqq maks\{\lambda(x), \mu(x)\}$ ve $(\lambda \wedge \mu)(x) \coloneqq min\{\lambda(x), \mu(x)\}$, $(\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

(e) Daha genel olarak, $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ ailesi için birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i)(x) \coloneqq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i\,(x)$ ve $(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i)(x) := \bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i\,(x)$, $(\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki işlemler ile L^X de bir bulanık latisdir. Ayrıca,

(i) $(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i)' = \bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i'$,

(ii) $(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i)' = \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i'$

De-Morgan kuralları da sağlanır. (Zadeh, 1965)

Buna ek olarak, $L = (L, \leq, \odot, \oplus, ')$ bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere, L üzerindeki cebirsel yapılar da noktasal olarak L^X e genişletilebilir. Yani, $\forall\, x \in X$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $(\lambda \odot \mu)(x) \coloneqq \lambda(x) \odot \mu(x)$,

(ii) $(\lambda \oplus \mu)(x) \coloneqq \lambda(x) \oplus \mu(x)$,

(iii) $(\lambda \longrightarrow \mu)(x) \coloneqq \lambda(x) \longrightarrow \mu(x)$.

Tanım 2.1.4: $M(L), L$ nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde,

$$M(L^X) = \{\, x_\alpha \mid x \in X, \alpha \in M(L) \,\}$$

kümesinin elemanları x_α lar X in L-bulanık noktaları olarak adlandırılır. Burada,

$$x_\alpha : X \longrightarrow L,\ \forall\, y \in X \text{ için } x_\alpha(y) \coloneqq \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0_L, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada x'e x_α L-bulanık noktasının desteği, α değerine de x_α L-bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir ve sırasıyla supp$x_\alpha = x$ ve h(x_α) = α ile gösterilir.

$x_\alpha \in M(L^X)$ olmak üzere

$x_\alpha \in \lambda :\Leftrightarrow\ \alpha\ \leq\ \lambda(x)$.   (Dongsheng, 1987)

Uyarı 2.1.5: X üzerindeki her L-bulanık kümesi $M(L^X)$ deki bazı L-bulanık noktaların birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

Diğer bir deyişle, $\lambda = \bigvee_{x_\alpha \in \lambda} x_\alpha$ sağlanır.

Tanım 2.1.6: $\lambda \in L^X$ ve $x_\alpha \in M(L^X)$ olmak üzere, x_α λ ile q-çakışımsıdır (quasi-coincident) denir ve bu durum x_αqλ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow$ $x_\alpha \notin \lambda'$ sağlanır. Buna göre,

x_αq$\lambda :\Leftrightarrow\ \alpha\ \nleq \lambda'(x)$.   (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Özel olarak, $L = I$ olması halinde $x_\alpha \mathrm{q} \lambda :\Leftrightarrow \alpha + \lambda(x) > 1$ dir. (Pao-Ming ve Ying-Ming, 1980)

x_α L-bulanık noktasının λ ile q-çakışımsı olmaması ise $x_\alpha \not{q} \lambda$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: $\lambda, \mu \in L^X$ olmak üzere, λ ile μ q-çakışımsıdır denir ve $\lambda q \mu$ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow \exists\, x \in X :\ \lambda\,(\mathrm{x}) \nleq \mu'(x)$.

Bu durumda, λ ile μ x de q-çakışımsıdır denir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Lemma 2.1.8: $\lambda, \mu, \nu \in L^X$, $\{\lambda_i\}_{i \in \Gamma} \subset L^X$ ve $x_\alpha \in M(L^X)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) Eğer $\lambda q \mu$ ve $\mu \leq \nu \Longrightarrow \lambda q \nu$.

(b) $x_\alpha q \bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i \iff \exists\, j \in \Gamma :\ x_\alpha q \lambda_j$.

(c) $\lambda \leq \mu \iff \forall\, x_\alpha \in \lambda$ için $x_\alpha \in \mu \iff \forall\, x_\alpha q \lambda$ için $x_\alpha q \mu$.

(d) $x_\alpha q(\lambda \wedge \mu) \iff x_\alpha q \lambda$ ve $x_\alpha q \mu$. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Tanım 2.1.9: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\lambda \in L^X$ ve $\mu \in L^Y$ L-bulanık alt kümelerinin φ fonksiyonu altındaki görüntü ve ters görüntüsü sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi^{\rightarrow}(\lambda)(y) := \begin{cases} \bigvee\{\lambda(x) : x \in X,\ y = \varphi(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \underline{0} & ,\ \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases},\ (\forall\, y \in Y)$$

ve

$$\varphi^{\leftarrow}(\mu)(x) := (\mu \circ \varphi)(x) = \mu(\varphi(x)) \quad (\forall\, x \in X).$$

Açık olarak, $\varphi^{\leftarrow}(\mu)$ ve $\varphi^{\rightarrow}(\lambda)$ sırasıyla X ve Y klasik kümelerinin birer L-bulanık alt kümeleridir. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 2.1.10: $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$, $\mu, \mu_1, \mu_2 \in L^Y$ ve $\nu \in L^Z$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(\psi \circ \varphi)^{\rightarrow}(\lambda) = \psi^{\rightarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(2) $(\psi \circ \varphi)^{\leftarrow}(\nu) = \varphi^{\leftarrow}(\psi^{\leftarrow}(\nu))$.

(3) $\lambda \leq \varphi^{\leftarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ bire-bir ise $\lambda = \varphi^{\leftarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$ sağlanır.

(4) $\mu \geq \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ örten ise $\mu = \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$ sağlanır.

(5) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies \varphi^{\rightarrow}(\lambda_1) \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda_2)$.

(6) $\mu_1 \leq \mu_2 \implies \varphi^{\leftarrow}(\mu_1) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu_2)$.

(7) $\varphi^{\rightarrow}(\lambda') \geq (\varphi^{\rightarrow}(\lambda))'$.

(8) $\varphi^{\leftarrow}(\mu') = (\varphi^{\leftarrow}(\mu))'$.

(9) $\{ \lambda_i \mid i \in \Gamma \} \subset L^X$ ailesi için

$\varphi^{\rightarrow}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi^{\rightarrow}(\lambda_i)$

$\varphi^{\rightarrow}(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) \leq \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi^{\rightarrow}(\lambda_i)$.

(10) $\{ \mu_i \mid i \in \Gamma \} \subset L^Y$ ailesi için

$\varphi^{\leftarrow}(\bigvee_{i\in\Gamma} \mu_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi^{\leftarrow}(\mu_i)$

$\varphi^{\leftarrow}(\bigwedge_{i\in\Gamma} \mu_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi^{\leftarrow}(\mu_i)$. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 2.1.11: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x_\alpha \in M(L^X)$ ise $\varphi^{\rightarrow}(x_\alpha) \in M(L^Y)$ ve $\varphi^{\rightarrow}(x_\alpha) = (\varphi(x))_\alpha$ dir.

Önerme 2.1.12: X, Y boştan farklı iki klasik küme, $\lambda, \mu \in L^X$, $\nu, \rho \in L^Y$ ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\lambda q \varphi^{\leftarrow}(\nu) \iff \varphi^{\rightarrow}(\lambda) q \nu$.

(ii) $\lambda q \mu \implies \varphi^{\rightarrow}(\lambda) q \varphi^{\rightarrow}(\mu)$.

(iii) $\varphi^{\leftarrow}(\nu) q\, \varphi^{\leftarrow}(\rho) \implies \nu q \rho$. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

2.2. L – Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ya X

üzerinde bir (Chang-Goguen) L-topoloji veya bulanık kümelerin bir topolojisi adı verilir.

(CT1) $\underline{0}, \underline{1} \in \tau$,

(CT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau \implies \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$,

(CT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in \tau \implies \bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine bir (Chang-Goguen) L-topolojik uzay adı verilir. τ nun elemanlarına da açık L-bulanık alt kümeler adı verilir.

Eğer, $\lambda' \in \tau$ ise λ ya (X, τ) da kapalı L-bulanık alt küme denir. (Chang, 1968)

Örnek 2.2.2: T X kümesi üzerinde bir klasik topoloji ise, $\tau = \chi_T \coloneqq \{ \chi_G : G \in T \}$ ailesi X üzerinde bir L-topolojidir. O halde, klasik anlamdaki her topoloji bir (Chang-Goguen) L-topolojidir.

Tanım 2.2.3: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-topolojik uzay ve $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(a) φ L-süreklidir :$\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu \in \tau_2$ için $\varphi^{\leftarrow}(\mu) \in \tau_1$.

(b) φ L-açıktır :$\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in \tau_1$ için $\varphi^{\rightarrow}(\lambda) \in \tau_2$. (Chang, 1968)

Chang-Goguen anlamında L-topolojik uzaylar ile bunlar arasında tanımlı L-sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategori CL-TOP ile gösterilir.

Uyarı 2.2.4: Açıkça görülebilir ki, klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde (Chang-Goguen) L-topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların L-sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği L-topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen (1976), L-topolojik uzay tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir. Ancak bu seferde L-topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeği kaybedilmiştir.

Tanım 2.2.5: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ya X üzerinde bir (Lowen) L-topoloji denir.

(LT1) $\forall\, \alpha \in L$ için $\underline{\alpha} \in \tau$,

(LT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau \implies \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$,

(LT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de bir (Lowen) L-topolojik uzay adı verilir. (Lowen, 1976)

Lowen anlamındaki L-topolojik uzaylar ve bunlar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlar kategorisi L-TOP ile gösterilir. Ayrıca, Lowen anlamındaki her L-topolojik uzay Chang-Goguen anlamında bir L-topolojik uzaydır. Buna göre, L-TOP⊂CL-TOP ifadesi sağlanır.

X üzerindeki bir τ L-topolojisi aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir $\tau: L^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak da göz önüne alınabilir.

(1) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$, ($\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\underline{\alpha}) = 1$),

(2) Eğer $\tau(\lambda_1) = \tau(\lambda_2) = 1$ ise $\tau(\lambda_1 \wedge \lambda_2) = 1$,

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\tau(\lambda_i) = 1$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = 1$.

Yukarıda verilen her iki L-topolojinin tanımında da kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasiktir. Bu eksikliği gidermek ve bulanık kümelerin açıklığını derecelendirmek için Sostak (1985) aşağıdaki bulanık topoloji tanımı vermiştir.

Tanım 2.2.6: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau: L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir (Sostak) L-bulanık topoloji veya açıklığın bir derecelendirmesi veya smooth (pürüzsüz) topoloji denir.

(BT1) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$,

(BT2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \wedge \tau(\lambda_2)$,

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(\lambda_i)$.

(X, τ) ikilisine de bir L-bulanık topolojik uzay veya smooth topolojik uzay denir. $\lambda \in L^X$ olmak üzere $\tau(\lambda)$ değerine de λ L-bulanık alt kümesinin açıklık derecesi denir. (Sostak, 1985)

Uyarı 2.2.7: (1) Tanımlar karşılaştırıldığında; bir L-topoloji L-bulanık kümelerin klasik bir ailesi ($\tau \subseteq L^X$) iken bir L-bulanık topoloji ise L-bulanık kümeler ailesinin bir L-bulanık alt kümesi ($\tau \in L^{(L^X)}$) dir.

(2) Aslında L ve M farklı bulanık latisler olmak üzere, bulanık topoloji $\tau: L^X \longrightarrow M$ biçiminde de tanımlanabilir. Ayrıca, Tanım 2.2.6 daki (BT1) aksiyomu yerine

(BT1)$'$ $\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\underline{\alpha}) = 1$ aksiyomu alınırsa, (X, τ) ikilisine bir tabakalaşmış (stratified, laminated) L-bulanık topolojik uzay denir.

(3) Her klasik topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçektende T, X üzerinde klasik bir topoloji olmak üzere $T: 2^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa $T = \chi_T$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

(4) Her L-topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçekten, X üzerindeki bir τ L-topolojisi için $\tau: L^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa τ, X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

Önerme 2.2.8: $\{\, \tau_k : k \in \Lambda \,\}$ ailesi X üzerinde L-bulanık topolojilerin bir ailesi ise $\tau \coloneqq \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k,\ \tau(\lambda) \coloneqq \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\,(\lambda)$

ile tanımlanan τ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topolojidir. (Ramadan, 1992)

Tanım 2.2.9: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau': L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık co-topoloji (eş topoloji) veya kapalılığın bir derecelendirmesi denir.

(1) $\tau'(\underline{0}) = \tau'(\underline{1}) = 1$,

(2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau'(\lambda_1 \vee \lambda_2) \geq \tau'(\lambda_1) \wedge \tau'(\lambda_2)$,

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ ise $\tau'(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'\,(\lambda_i)$.

$(X. \tau')$ ikilisine de bir L-bulanık co-topolojik uzay adı verilir. (Sostak, 1985)

Önerme 2.2.10: τ ve τ', X üzerinde sırasıyla bir L-bulanık topoloji ve bir L-bulanık co-topoloji olmak üzere, $\tau'_{\tau}, \tau_{\tau'}: L^X \longrightarrow L$ dönüşümleri sırasıyla $\tau'_{\tau}(\lambda) \coloneqq \tau(\lambda')$ ve $\tau_{\tau'}(\lambda) \coloneqq \tau'(\lambda')$ olarak tanımlansın. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) τ'_{τ} X üzerinde bir L-bulanık co-topolojidir.

(b) $\tau_{\tau'}$ X üzerinde bir L-bulanık topolojidir.

(c) $\tau_{\tau'_{\tau}} = \tau$ ve $\tau'_{\tau_{\tau'}} = \tau'$. (Ramadan, 1992)

Önerme 2.2.11: (X, τ) bir L-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, $\tau_A : L^A \longrightarrow L,\ \tau_A(\nu) \coloneqq \bigvee\{ \tau(\lambda) \mid \lambda \in L^X, \lambda|_A = \nu \}$

olarak tanımlanan τ_A dönüşümü A üzerinde bir L-bulanık topolojidir.

(X, τ) bir L-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, bir önceki önermede tanımlanan (A, τ_A) L-bulanık topolojik uzayına (X, τ) nun bir L-bulanık alt uzayı denir. (Peeters, 1999)

Tanım 2.2.12: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

φ fonksiyonuna L-bulanık sürekli (veya kısaca, LB-sürekli) denir :$\Leftrightarrow$

$\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau_2(\mu)$ sağlanır. (Sostak, 1985)

Önerme 2.2.13: (X, τ_1), (Y, τ_2) ve (Z, τ_3) L-bulanık topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ ve $\psi: (Y, \tau_2) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ fonksiyonları LB-sürekli ise $\psi \circ \varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ bileşkesi LB-süreklidir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür. (Sostak, 1985)

Objeleri L-bulanık topolojik uzaylar ve morfizmleri LB-sürekli fonksiyonlar olan kategori L-BTOP ile gösterilir.

Önerme 2.2.14: (X, τ'_1) ve (Y, τ'_2) iki L-bulanık co-topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

φ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau'_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau'_2(\mu)$ sağlanır. (Sostak, 1985)

Önerme 2.2.15: (X, τ_1), (Y, τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay, $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Eğer φ LB-sürekli ise, $\varphi|_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ kısıtlanış fonksiyonu da LB-süreklidir. (Peeters, 1999)

Tanım 2.2.16: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) φ LB-açıktır $:\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\tau_1(\lambda) \leq \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(b) φ LB-kapalıdır $:\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\tau^*_{\tau_1}(\lambda) \leq \tau^*_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(c) φ LB-homeomorfizmdir $:\Leftrightarrow$ φ bijektif, LB-sürekli ve φ^{-1} LB-süreklidir. (Ramadan, 1992)

2.3. L – Bulanık Topolojik Uzayların Kategorileri

Önerme 2.3.1: (X, τ) bir tabakalaşmış L-bulanık topolojik uzay olsun. Bu takdirde, $\forall\, a \in L$ için $\tau_a := \{\, \mu \in L^X : \tau(\mu) \geq a \,\}$ a-kesimi X üzerinde bir (Lowen) L-topolojidir. Ayrıca, $a \geq b$ ise $\tau_a \subset \tau_b$ sağlanır. (Lee ve diğ., 1997)

Önerme 2.3.2: $(X, \tau), (Y, \tau^*)$ iki tabakalaşmış L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$\varphi: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\, a \in L$ için $\varphi: (X, \tau_a) \longrightarrow (Y, {\tau^*}_a)$ L-süreklidir. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: $(\Longrightarrow)$ $\varphi: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ LB-sürekli ve $a \in L$ olsun.

$\mu \in {\tau^*}_a$ alalım. O halde, $\tau\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq \tau^*(\mu) \geq a \Longrightarrow \varphi^{\leftarrow}(\mu) \in \tau_a$ dır. Yani, $\varphi: (X, \tau_a) \longrightarrow (Y, {\tau^*}_a)$ L-süreklidir.

$(\Longleftarrow)$ $\forall\, a \in L$ için $\varphi: (X, \tau_a) \longrightarrow (Y, {\tau^*}_a)$ L-sürekli olsun.

$\mu \in L^Y$ alalım.

$\tau^*(\mu) = 0_L$ ise $\tau\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq \tau^*(\mu)$ olduğu açıktır.

$\tau^*(\mu) \neq 0_L$ ise bir $r \in L$ için $\tau^*(\mu) = r$ diyelim. O halde, $\mu \in \tau^*{}_r$ dir. Böylece, $\varphi^{\leftarrow}(\mu) \in \tau_r$ bulunur. Sonuç olarak, $\tau\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq r = \tau^*(\mu)$ elde edilir ki, bu ise $\varphi\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ fonksiyonunun LB-sürekli olduğunu gösterir.

Sonuç 2.3.3: $a \in L$ olmak üzere, G: L-BTOP $\longrightarrow$ L-TOP, G(X,τ) = (X,τ_a) ve G(φ) = φ ile tanımlı dönüşüm bir kovaryant funktordur. (Lee ve diğ., 1997)

Önerme 2.3.4: (X,τ) bir tabakalaşmış L-bulanık topolojik uzay ve her $a \in L$ için τ_a τ nun a-kesimi ise, $\tau(\mu) = \bigvee\{\, a \mid \mu \in \tau_a \,\}$ sağlanır. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: $\bigvee\{\, a \mid \mu \in \tau_a \,\} = \bigvee\{\, a \mid \tau(\mu) \geq a \,\} = \tau(\mu)$.

Sonuç 2.3.5: $\tau, \tau^* : L^X \longrightarrow L$ X üzerinde iki L-bulanık topoloji olsun. Bu takdirde, $\tau = \tau^* \Leftrightarrow \forall\, a \in L$ için $\tau_a = \tau^*{}_a$ dır. (Lee ve diğ., 1997)

Önerme 2.3.6: (X,T) bir (Lowen) L-topolojik uzay ve $a \in L$ olsun. $T^a\colon L^X \longrightarrow L$ dönüşümü

$$T^a(\lambda) = \begin{cases} 1_L, & \lambda \text{ sabit L}-\text{bulanık kümesi} \\ a\ , & \lambda \in T \text{ ve } \lambda \text{ sabit değil} \\ 0_L\ , & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, T^a X üzerinde bir tabakalaşmış L-bulanık topolojidir ve $(T^a)_a = T$ dir. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: (BT1)$'$ $\forall\, \underline{\alpha} \in L^X$ için $T^a\big(\underline{\alpha}\big) = 1_L$.

(BT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ alalım.

$T^a(\lambda_1) \wedge T^a(\lambda_2) = 0_L \implies T^a(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq T^a(\lambda_1) \wedge T^a(\lambda_2)$.

$T^a(\lambda_1) \wedge T^a(\lambda_2) = 1_L \implies \lambda_1, \lambda_2$ sabit $\Longrightarrow \lambda_1 \wedge \lambda_2$ sabit ve $T^a(\lambda_1 \wedge \lambda_2) = 1_L$.

$T^a(\lambda_1) \wedge T^a(\lambda_2) = a \implies T^a(\lambda_1) \geq a$ ve $T^a(\lambda_2) \geq a$ olduğundan $\lambda_1, \lambda_2 \in T$ dır. $\Longrightarrow \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in T$. Böylece, $T^a(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq a = T^a(\lambda_1) \wedge T^a(\lambda_2)$ dır.

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ olsun.

$\bigwedge_{i\in\Gamma} T^a(\lambda_i) = 0_L$ ise açıktır.

$\bigwedge_{i\in\Gamma} T^a(\lambda_i) = 1_L \implies \forall\, i \in \Gamma$ için $T^a(\lambda_i) = 1_L \implies \forall\, i \in \Gamma$ için λ_i sabittir. $\implies \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i$ sabit $\implies T^a(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = 1_L \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} T^a(\lambda_i)$.

$\bigwedge_{i\in\Gamma} T^a(\lambda_i) = a \implies \forall\, i \in \Gamma$ için $T^a(\lambda_i) \geq a$ dır. O halde, $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in T$ ve $\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \in T$ dır. Sonuç olarak, $T^a(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq a = \bigwedge_{i\in\Gamma} T^a(\lambda_i)$ dır.

Ayrıca, $\mu \in (T^a)_a \iff T^a(\mu) \geq a \iff \mu \in T$ dir. O halde, $(T^a)_a = T$ elde edilir.

Bu şekilde oluşturulan, (X, T^a) tabakalaşmış L-bulanık topolojik uzayına a-dereceli L-bulanık topolojik uzay denir.

Önerme 2.3.7: (X, T_1) ve (Y, T_2) (Lowen) L-topolojik uzaylar ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $\varphi: (X, T_1) \longrightarrow (Y, T_2)$ L-süreklidir $\iff \forall\, a \in L$ için $\varphi: (X, {T_1}^a) \longrightarrow (Y, {T_2}^a)$ LB-süreklidir. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: $(\implies)$ $\varphi: (X, T_1) \longrightarrow (Y, T_2)$ L-sürekli ve $a \in L$ olsun.

$\mu \in L^Y$ alalım. $\mu \in T_2$ veya $\mu \notin T_2$ dır.

$\mu \in T_2$ ve $\mu = \underline{\alpha}$ sabit ise $\varphi^{\leftarrow}(\underline{\alpha}) = \underline{\alpha}$ olduğundan,

${T_2}^a(\mu) = {T_2}^a(\underline{\alpha}) = 1_L \leq 1_L = {T_1}^a(\underline{\alpha}) = {T_1}^a(\varphi^{\leftarrow}(\underline{\alpha}))$ dır.

$\mu \in T_2$ ve $\mu \neq \underline{\alpha}$ ise, ${T_2}^a(\mu) = a$ dır. φ L-sürekli olduğundan $\varphi^{\leftarrow}(\mu) \in T_1$ ve ${T_1}^a(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq a = {T_2}^a(\mu)$.

$\mu \notin T_2$ ise ${T_2}^a(\mu) = 0_L \implies {T_2}^a(\mu) \leq {T_1}^a(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$.

$(\impliedby)$ $\varphi: (X, {T_1}^a) \longrightarrow (Y, {T_2}^a)$ LB-sürekli olsun. O halde, Önerme 2.3.2 den $\varphi: (X, ({T_1}^a)_a) \longrightarrow (Y, ({T_2}^a)_a)$ L-süreklidir. $({T_1}^a)_a = T_1$ ve $({T_2}^a)_a = T_2$ olduğundan, $\varphi: (X, T_1) \longrightarrow (Y, T_2)$ L-süreklidir.

Sonuç 2.3.8: F: L-TOP $\longrightarrow$ L-BTOP, F(X, T)= (X, T^a) ve F(φ) = φ ile tanımlı dönüşüm bir kovaryant funktordur.

Her $a \in L$ için a-dereceli L-bulanık topolojik uzaylar ve LB-sürekli dönüşümler kategorisi L_α-BTOP ile gösterilir. (Lee ve diğ., 1997)

Teorem 2.3.9: Her $a \in L$ için L-TOP ve L_α-BTOP kategorileri izomorfiktir. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: F: L-TOP ⟶ L_α-BTOP, $F(X,T) = (X, T^a)$ ve $F(\varphi) = \varphi$ ile G: L_α-BTOP ⟶ L-TOP, $G(X,\tau) = (X,\tau_a)$ ve $G(\varphi) = \varphi$ ile tanımlı dönüşümler birer kovaryant funktordur. Açıktır ki, $G \circ F(X,T) = (X,T)$ dir. O halde, $F \circ G(X,\tau) = (X,\tau)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(X,\tau) \in Ob(L_\alpha\text{-BTOP})$ alınırsa $\exists\ (X,T) \in Ob$ (L-TOP) : $\tau = T^a$ sağlanır. Buradan,

$F \circ G(X,\tau) = F(X,\tau_a) = (X,(\tau_a)^a) = (X,((T^a)_a)^a) = (X,T^a) = (X,\tau)$ olur. Sonuç olarak, her $a \in L$ için L-TOP ve L_α-BTOP kategorileri izomorfiktir.

Teorem 2.3.10: L_α-BTOP kategorisi L-BTOP kategorisinin bir bireflektif bütünüyle alt kategorisidir. (Lee ve diğ., 1997)

İspat: Açıktır ki, L_α-BTOP kategorisi L-BTOP kategorisinin bir bütünüyle alt kategorisidir.

$(X,\tau) \in Ob(\text{L-BTOP})$ alalım. Buradan, $(X,(\tau_a)^a) \in Ob(L_\alpha\text{-BTOP})$ dır ve $id_X: (X,\tau) \longrightarrow (X,(\tau_a)^a)$ fonksiyonu LB-süreklidir.

$(Y,\tau^*) \in Ob(L_\alpha\text{-BTOP})$ ve $\varphi: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ fonksiyonu LB-sürekli olsun. O halde, $\varphi: (X,(\tau_a)^a) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ fonksiyonunun LB-sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\mu \in L^Y$ alalım.

$\tau^*(\mu) = 1_L$ ise μ sabit ve $\varphi^{\leftarrow}(\mu)$ sabittir. O halde, $(\tau_a)^a\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) = 1_L \geq \tau^*(\mu)$.

$\tau^*(\mu) = 0_L$ ise $(\tau_a)^a\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq \tau^*(\mu)$ olduğu açıktır.

$\tau^*(\mu) = a$ ise $\varphi: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ LB-sürekli olduğundan $a = \tau^*(\mu) \leq \tau(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$ $\Longrightarrow \varphi^{\leftarrow}(\mu) \in \tau_a$ ve $(\tau_a)^a\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq a = \tau^*(\mu)$ dır. Sonuç olarak,

$\varphi: (X,(\tau_a)^a) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ fonksiyonu LB-süreklidir.

Yukarıdaki iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.11: L-TOP kategorisi L-BTOP kategorisinin bir bireflektif bütünüyle alt kategorisidir.

2.4. L – Bulanık Topolojik Uzaylarda İç ve Kapanış Operatörleri

Tanım 2.4.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{I}: L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık iç operatörü denir. (Burada, $L_0 \coloneqq L \setminus \{0_L\}$ dir.) $\forall\, \lambda, \mu \in L^X$ ve $r, s \in L_0$ için

(I1) $\mathcal{I}(\underline{1}, r) = \underline{1}$.

(I2) $\mathcal{I}(\lambda, r) \leq \lambda$.

(I3) $\lambda \leq \mu$ ve $r \leq s$ ise $\mathcal{I}(\lambda, s) \leq \mathcal{I}(\mu, r)$.

(I4) $\mathcal{I}(\lambda \wedge \mu, r \wedge s) \geq \mathcal{I}(\lambda, r) \wedge \mathcal{I}(\mu, s)$.

(I5) $\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), r) = \mathcal{I}(\lambda, r)$. (Höhle ve Sostak, 1999)

Önerme 2.4.2: τ X üzerinde bir L-bulanık topoloji olmak üzere,

$$\mathcal{I}_\tau(\lambda, r) \coloneqq \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda \text{ ve } \tau(\mu) \geq r \,\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{I}_\tau: L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık iç operatörüdür. (Höhle ve Sostak, 1999)

Teorem 2.4.3: $\mathcal{I}: L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık iç operatörü olmak üzere,

$$\tau_{\mathcal{I}}(\lambda) = \bigvee\{\, r \in L \mid \mathcal{I}(\lambda, r) = \lambda \,\}$$

olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{I}} : L^X \longrightarrow L$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topolojidir ve τ, X üzerinde bir L-bulanık topoloji ise $\tau_{\mathcal{I}_\tau} = \tau$ sağlanır. (Höhle ve Sostak, 1999)

Tanım 2.4.4: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{C}: L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık kapanış operatörü denir. (Sostak, 1996, Chattopadhyay ve Samanta, 1993)

(C1) $\forall\, r \in L_0$ için $\mathcal{C}(\underline{0}, r) = \underline{0}$.

(C2) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{C}(\lambda, r) \geq \lambda$.

(C3) $\forall\, r \leq s$ için $\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}(\lambda, s)$.

(C4) $\forall\, s \in L_0$ için $\mathcal{C}(\lambda \vee \mu, s) = \mathcal{C}(\lambda, s) \vee \mathcal{C}(\mu, s)$.

(C5) $\forall\, \lambda \in L^X, r \in L_0$ için $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r) = \mathcal{C}(\lambda, r)$.

Önerme 2.4.5: (X, τ') bir L-bulanık co-topolojik uzay olmak üzere,

$\forall\, \lambda \in L^X$ ve $r \in L_0$ için

$\mathcal{C}_{\tau'}(\lambda, r) \coloneqq \bigwedge\{\, \mu \in L^X \mid \mu \geq \lambda \text{ ve } \tau'(\mu) \geq r\}$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}_{\tau'} : L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık kapanış operatörüdür. (Chattopadhyay ve Samanta, 1993)

Önerme 2.4.6: $\mathcal{C} : L^X \times L_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık kapanış operatörü olmak üzere,

$\forall\, \lambda \in L^X$ için $\tau'_{\mathcal{C}}(\lambda) = \bigvee\{\, r \in L_0 \mid \mathcal{C}(\lambda, r) = \lambda\}$

olarak tanımlanan $\tau'_{\mathcal{C}} : L^X \longrightarrow L$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık co-topolojidir. (Chattopadhyay ve Samanta, 1993)

2.5. L – Bulanık Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri

Klasik topolojide, bir küme üzerindeki komşuluk sistemi yapısı önemli bir yere sahiptir. X boştan farklı klasik bir küme ve her $x \in X$ için $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{N} = \{\, \mathcal{N}_x \mid x \in X\,\}$ küme ailesine X üzerinde bir komşuluk sistemi denir.

(N1) $\forall\, U \in \mathcal{N}_x$ için $x \in U$,

(N2) $\forall\, U, V \in \mathcal{P}(X)$ için $U \in \mathcal{N}_x$ ve $U \subseteq V$ ise $V \in \mathcal{N}_x$,

(N3) $\forall\, U, V \in \mathcal{P}(X)$ için $U, V \in \mathcal{N}_x$ ise $U \cap V \in \mathcal{N}_x, \forall\, x \in X$.

(N4) $\forall\, x \in X, U \in \mathcal{N}_x$ için $\exists\, V \subseteq U : x \in V$ ve $\forall\, y \in V$ için $V \in \mathcal{N}_y$.

Böylece verilen bir X kümesi için, X üzerindeki yapı olarak yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{N}$ komşuluk sistemi alınırsa, $(X, \mathcal{N})$ ikili yapısı oluşturulur. Objeleri tüm bu $(X, \mathcal{N})$ ikilileri ve morfizmleri de uygun sürekli fonksiyonlar olan kategori TNS ile gösterilirse, TOP klasik topolojik uzaylar kategorisi ile bu TNS katgorisinin izomorfik olduğu kolaylıkla görülür. Yani, komşuluk sistemleri ve klasik topolojiler arasında bire-bir bir uygunluk söz konusudur. Böylece, klasik topolojik uzaylardaki, özellikle noktalarla ilgili olan problemler komşuluk sistemlerinde ele alınabilir.

Şimdi ise X üzerindeki bir topolojinin bir $x \in X$ noktasındaki komşuluk sisteminin iki-değerli mantık versiyonu düşünülecek olursa, $\mathcal{N}_x : \mathcal{P}(X) \longrightarrow 2$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir.

(2-N1) $\mathcal{N}_x(X) = 1,\ \mathcal{N}_x(\emptyset) = 0$,

(2-N2) $\forall\, U \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{N}_x(U) \neq 0$ ise $x \in U$,

(2-N3) $\forall\, U, V \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{N}_x(U \cap V) = \mathcal{N}_x(U) \wedge \mathcal{N}_x(V)$,

(2-N4) $\forall\, U \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{N}_x(U) = \bigvee_{x \in V \subseteq U} \bigwedge_{y \in V} \mathcal{N}_y\,(V)$.

Pao-Ming ve Ying-Ming (1980), bu klasik komşuluk sistemi teorisini I-topolojik uzaylarda q-çakışımsı komşuluk sistemine genişlettiler.

Tanım 2.5.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{Q} = \{\, \mathcal{Q}_{x_t} \subseteq L^X \mid x_t \in M(L^X)\}$ ailesine X üzerinde bir q-çakışımsı komşuluk sistemi veya kısaca Q-komşuluk sistemi denir.

(Q1) $\forall\, \lambda \in \mathcal{Q}_{x_t}$ için $x_t q \lambda$,

(Q2) $\forall\, \lambda, \mu \in L^X$ için $\lambda \in \mathcal{Q}_{x_t}$ ve $\lambda \leq \mu$ ise $\mu \in \mathcal{Q}_{x_t}$,

(Q3) $\forall\, \lambda, \mu \in L^X$ için $\lambda, \mu \in \mathcal{Q}_{x_t}$ ise $\lambda \wedge \mu \in \mathcal{Q}_{x_t}$.

(Q4) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\exists\, \mu \in \mathcal{Q}_{x_t} :\ \lambda \geq \mu$ ve $\forall\, y_s q \mu$ için $\mu \in \mathcal{Q}_{y_s}$.

Objeleri tüm $(X, \mathcal{Q})$ ikilileri ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan L-QN kategorisi L-TOP kategorisine izomorfiktir. (Pao-Ming ve Ying-Ming, 1980)

Bir önceki durumda olduğu gibi $\mathcal{Q}_{x_t} : L^X \longrightarrow 2$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Böylece, (Q1)-(Q4) özelliklerinin iki-değerli mantık versiyonu aşağıdaki gibidir.

(2-Q1) $\mathcal{Q}_{x_t}(\underline{1}) = 1, \mathcal{Q}_{x_t}(\underline{0}) = 0,$

(2-Q2) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \neq 0$ ise $x_t q \lambda,$

(2-Q3) $\forall\, \lambda, \mu \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda \wedge \mu) = \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \wedge \mathcal{Q}_{x_t}(\mu),$

(2-Q4) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) = \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}_{y_s}(\mu).$

Tanım 2.5.2: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{Q}_{x_t} : L^X \longrightarrow L$ dönüşümlerinin $\mathcal{Q} = \{ \mathcal{Q}_{x_t} \mid x_t \in M(L^X)\}$ ailesine X üzerinde bir L-bulanık Q-komşuluk sistemi denir.

(LQ1) $\mathcal{Q}_{x_t}(\underline{1}) = 1_L,\ \mathcal{Q}_{x_t}(\underline{0}) = 0_L.$

(LQ2) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \neq 0_L$ ise $x_t q \lambda.$

(LQ3) $\forall\, \lambda, \mu \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda \wedge \mu) = \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \wedge \mathcal{Q}_{x_t}(\mu).$

(LQ4) $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) = \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}_{y_s}(\mu).$

$\forall\, x_t \in M(L^X)$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda)$ değeri $\lambda \in L^X$ L-bulanık kümesinin x_t L-bulanık noktasının q-çakışımsı komşuluğu olma derecesi olarak düşünülebilir.

$(X, \mathcal{Q})$ ikilisine de bir L-bulanık Q-komşuluk uzayı denir. (Jinming, 2006)

Tanım 1.7.6: $(X, \mathcal{Q})$ ve $(Y, \mathcal{P})$ iki L-bulanık Q-komşuluk uzayı olmak üzere, $\varphi: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu bu L-bulanık Q-komşuluk uzayları arasında süreklidir: $\Longleftrightarrow$

$\forall\, x_t \in M(L^X), \forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \mathcal{P}_{\varphi(x)_t}(\mu)$ sağlanır.

L-bulanık Q-komşuluk uzaylarının ve bu uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonların kategorisi L-BQN ile gösterilir. (Jinming, 2006)

3. (L, M)-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, (L,M)-bulanık topoloji ve (L,M)-bulanık taban tanımı verildikten sonra başlangıç (L,M)-bulanık topoloji kavramı inşa edilecektir. Böylece, (L,M)-bulanık topolojik uzaylar kategorisinin topolojik bir kategori olduğu elde edilecektir.

Tezin bu bölümünde aksi belirtilmediği sürece L ve M birbirinden farklı kesin iki-yanlı, değişmeli quantale latisi (q-latisi) ifade edecektir.

3.1. (L, M)-Bulanık Topoloji Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau : L^X \longrightarrow M$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji veya açıklığın bir derecelendirmesi denir.

(BT1) $\tau\big(\underline{0}\big) = \tau\big(\underline{1}\big) = 1_M$,

(BT2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \odot \tau(\lambda_2)$,

(BT3) $\forall\, \{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ için $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau\,(\lambda_i)$.

(X, τ) ikilisine de bir (L,M)-bulanık topolojik uzay (kısaca, (L,M)-btu) denir.

Bir (X, τ) (L,M)-bulanık topolojik uzayında (BT1) özelliği yerine,

$(\mathrm{BT1})'$ $\forall\, \underline{\alpha} \in L^X$ için $\tau\big(\underline{\alpha}\big) = 1_M$ aksiyomu alınırsa bu (X, τ) (L,M)-bulanık topolojik uzayına tabakalaşmış (stratified, laminated) (L,M)-bulanık topolojik uzay denir. (Höhle ve Sostak, 1995)

Uyarı 3.1.2: (1) Eğer $\odot = \wedge$ ve $M = \{0, 1\}$ olarak alınırsa bu durumda, (L,M)-bulanık topoloji (Chang) L-topolojiyi (Tanım 2.2.1) verir.

(2) Eğer $\odot = \wedge$ ve $L = M$ olarak alınırsa (L,M)-bulanık topoloji (Sostak) L-bulanık topoloji (Tanım 2.2.6) yi verir.

(3) Eğer $(L, \wedge)$ ve $(M, \odot)$ olarak alınırsa (L,M)-bulanık topoloji Hussein' in (2006) verdiği tanım ile çakışır.

Tanım 3.1.3: τ_1 ve τ_2, X klasik kümesi üzerinde iki (L,M)-bulanık topoloji olsun. τ_1'e τ_2 den daha incedir (veya, τ_2 ye τ_1 den daha kabadır) denir ve $\tau_2 \leq \tau_1$ notasyonu ile gösterilir : $\Leftrightarrow$ [$\forall \lambda \in L^X$ için $\tau_2(\lambda) \leq \tau_1(\lambda)$] sağlanır.

Örnek 3.1.4: (1) X boştan farklı klasik bir küme olsun ve $\tau_D: L^X \longrightarrow M$, $\forall \lambda \in L^X$ için $\tau_D(\lambda) = 1_M$, $\tau_t: L^X \longrightarrow M$, $\tau_t(\lambda) = \begin{cases} 1_M, & \lambda \text{ sabit} \\ 0_M, & \text{diğer} \end{cases}$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, τ_t ve τ_D, X üzerinde iki (L,M)-bulanık topolojidir. Ayrıca. X üzerindeki herhangi bir τ (L,M)-bulanık topolojisi için $\tau_t \leq \tau \leq \tau_D$ olduğu aşikardır. (Hussein, 2006)

(2) $X = \{x, y, z\}$, $L = 2$, $M = I$ ve $a, b \in M$ için $a \odot b = maks\{a + b - 1, 0\}$ olsun. Burada,

$$\tau(A) = \begin{cases} 1, & A \in \{\emptyset, X\} \\ 0.8, & A = \{x, y\} \\ 0.6, & A = \{y\} \\ 0.7, & A = \{y, z\} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau : 2^X \longrightarrow I$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

(3) $X = \{x, y\}$, $L = M = I$ ve $\odot = \wedge$ olsun. $\nu(x) = 0.4$, $\nu(y) = 0.5$ biçiminde tanımlanan $\nu \in L^X$ bulanık kümesi için

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda \in \{\underline{0}, \underline{1}\} \\ 0.7 & , \quad \lambda = \nu \\ 0 & , \quad diğer \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir. (Hussein, 2006)

Önerme 3.1.5: $\{\tau_k\}_{k\in\Lambda}, X$ üzerindeki (L,M)-bulanık topolojilerin ailesi olmak üzere,

$\forall\ \lambda \in L^X$ için $\tau(\lambda) := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\lambda)$

olarak tanımlanan $\tau = \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir. (Hussein, 2006)

İspat: (BT1) $\tau(\underline{0}) = \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\underline{0}) = 1_M$ ve $\tau(\underline{1}) = \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\underline{1}) = 1_M$.

(BT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ alalım.

$$\begin{aligned}\tau(\lambda_1 \odot \lambda_2) &= \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\lambda_1 \odot \lambda_2)\\ &\geq \bigwedge_{k\in\Lambda}(\tau_k(\lambda_1) \odot \tau_k(\lambda_2))\\ &\geq (\bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\lambda_1)) \odot (\bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\lambda_2))\\ &= \tau(\lambda_1) \odot \tau(\lambda_2).\end{aligned}$$

(BT3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ alalım. Bu durumda,

$\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k\ (\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i)\ \geq \bigwedge_{k\in\Lambda} \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau_k(\lambda_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k(\lambda_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau\ (\lambda_i)$.

Önerme 3.1.6: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde, $\forall\ \nu \in L^A$ için $\tau_A(\nu) = \bigvee\{\ \tau(\lambda) \mid \lambda \in L^X,\ \lambda|_A = \nu\ \}$

olarak tanımlanan $\tau_A : L^A \longrightarrow M$ dönüşümü A üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

Tanım 3.1.7: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere yukarıda tanımlanan τ_A (L,M)-bulanık topolojisine τ tarafından üretilmiş (L,M)-bulanık topoloji ve (A, τ_A) ikilisine de (X, τ) nun alt uzayı adı verilir.

Tanım 3.1.8: $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ iki (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(a) φ LB-süreklidir $:\Leftrightarrow$ [$\forall\ \mu \in L^Y$ için $\tau_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau_2(\mu)$].

(b) φ LB-açıktır $:\Leftrightarrow$ [$\forall\ \lambda \in L^X$ için $\tau_1(\lambda) \leq \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$].

Objeleri tüm (L,M)-bulanık topolojik uzaylar ve morfizmleri bu uzaylar arasındaki LB-sürekli fonksiyonlar olan kategori (L,M)-BTOP ile gösterilir.

Tanım 3.1.9: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau' : L^X \longrightarrow M$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık co-topoloji veya (L,M)-bulanık eş-topoloji veya kapalılığın bir derecelendirmesi denir.

(1) $\tau'(\underline{0}) = \tau'(\underline{1}) = 1_M$,

(2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau'(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \geq \tau'(\lambda_1) \odot \tau'(\lambda_2)$,

(3) $\forall\, \{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ için $\tau'(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'\,(\lambda_i)$.

(X, τ') ikilisine de bir (L,M)-bulanık co-topolojik uzay (kısaca, (L,M)-bctu) denir. (Höhle ve Sostak, 1999)

Önerme 3.1.10: L bir tam MV-cebiri ve (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun. Bu takdirde, $\tau'_\tau : L^X \longrightarrow M,\ \tau'_\tau(\lambda) \coloneqq \tau(\lambda \longrightarrow \underline{0})$ olarak tanımlanan dönüşüm X üzerinde bir (L,M)-bulanık co-topolojidir.

İspat: (1) $\tau'_\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{0} \longrightarrow \underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1_M$,

$\tau'_\tau(\underline{1}) = \tau(\underline{1} \longrightarrow \underline{0}) = \tau(\underline{0}) = 1_M$.

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ alalım.

$\tau'_\tau(\lambda_1 \oplus \lambda_2) = \tau((\lambda_1 \oplus \lambda_2) \longrightarrow \underline{0})$ (L tam MV-cebiri olduğundan)

$= \tau((\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}) \odot (\lambda_2 \longrightarrow \underline{0}))$

$\geq \tau(\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}) \odot \tau(\lambda_2 \longrightarrow \underline{0})$

$= \tau'_\tau(\lambda_1) \odot \tau'_\tau(\lambda_2)$.

(3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ alalım.

$\tau'_\tau(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) = \tau((\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0})$ (L tam MV-cebiri olduğundan)

$= \tau(\bigvee_{i\in\Gamma}(\lambda_i \longrightarrow \underline{0})) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(\lambda_i \longrightarrow \underline{0}) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'_\tau\,(\lambda_i)$.

O halde, (X, τ'_τ) bir (L,M)-bulanık co-topolojik uzaydır.

Not 3.1.11: L' nin bir tam MV-cebiri olmadığı durumda, $\tau'_\tau(\lambda) \coloneqq \tau(\lambda')$ olarak da tanımlanabilir.

Önerme 3.1.12: L bir tam MV-cebiri ve (X, τ') bir (L,M)-bulanık co-topolojik uzay olsun. Bu takdirde, $\tau_{\tau'} : L^X \longrightarrow M,\ \tau_{\tau'}(\lambda) \coloneqq \tau'(\lambda \longrightarrow \underline{0})$ olarak tanımlanan dönüşüm X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

İspat: Önerme 3.1.10 un ispatına benzer şekilde görülür.

Önerme 3.1.13: L bir tam MV-cebiri olsun. Bu takdirde,

(1) (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ise $\tau_{\tau'_\tau} = \tau$.

(2) (X, τ') bir (L,M)-bulanık co-topolojik uzay ise $\tau'_{\tau_{\tau'}} = \tau'$.

İspat: Önerme 3.1.10 ve Önerme 3.1.11 den açıktır.

Önerme 3.1.14: L bir tam MV-cebiri ve $(X, \tau_1'), (Y, \tau_2')$ iki (L,M)-bulanık co-topolojik uzay olsun. Bu takdirde,

$\varphi: X \longrightarrow Y$ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ [$\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau_1'(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau_2'(\mu)$].

İspat: ($\Longrightarrow$) φ LB-sürekli olsun ve $\mu \in L^Y$ alalım.

$$\tau_1'(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) = \tau_{\tau_1'}(\varphi^{\leftarrow}(\mu) \longrightarrow \underline{0}) = \tau_{\tau_1'}(\varphi^{\leftarrow}(\mu \longrightarrow \underline{0})) \geq \tau_{\tau_2'}(\mu \longrightarrow \underline{0}) = \tau_2'(\mu).$$

($\Longleftarrow$) $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau_1'(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau_2'(\mu)$ olsun.

$$\tau_{\tau_1'}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) = \tau_1'(\varphi^{\leftarrow}(\mu) \longrightarrow \underline{0}) = \tau_1'(\varphi^{\leftarrow}(\mu \longrightarrow \underline{0})) \geq \tau_2'(\mu \longrightarrow \underline{0}) = \tau_{\tau_2'}(\mu).$$

3.2. (L, M)-Bulanık Tabanlar

Tanım 3.2.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{B} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık taban denir. (Abbas ve Aygün, 2006, Ramadan ve diğ., 2002)

(B1) $\mathcal{B}(\underline{0}) = \mathcal{B}(\underline{1}) = 1_M$,

(B2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\mathcal{B}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \mathcal{B}(\lambda_1) \odot \mathcal{B}(\lambda_2)$.

Aşağıdaki teoremde gösterildiği gibi bir küme üzerindeki (L,M)-bulanık taban yardımıyla aynı küme üzerinde her zaman bir (L,M)-bulanık topoloji üretilebilir.

Teorem 3.2.2: $\mathcal{B}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık taban olmak üzere,

$\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \coloneqq \bigvee\{ \bigwedge_{j\in\Lambda} \mathcal{B}(\lambda_j) \mid \lambda = \bigvee_{j\in\Lambda} \lambda_j\}$.

olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{B}} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü her $\lambda \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ koşulunu sağlayan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık topolojidir. Bu şekilde oluşturulan $\tau_{\mathcal{B}}$ (L,M)-bulanık topolojisine $\mathcal{B}$ (L,M)-bulanık tabanı ile üretilen bulanık topoloji denir. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: Öncelikle $\tau_{\mathcal{B}}$ nin X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji olduğunu gösterelim.

(BT1) $\tau_{\mathcal{B}}(\underline{0}) = \tau_{\mathcal{B}}(\underline{1}) = 1_M$ olduğu açıktır.

(BT2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım.

Her $\{ \lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j\in\Lambda} \lambda_j \}$ ve $\{ \mu_k \mid \mu = \bigvee_{k\in\Gamma} \mu_k \}$ aileleri için öyle bir $\{\lambda_j \odot \mu_k\}$ ailesi vardır ki,

$\lambda \odot \mu = \left(\bigvee_{j\in\Lambda} \lambda_j \right) \odot \left(\bigvee_{k\in\Gamma} \mu_k\right) = \bigvee_{j\in\Lambda, k\in\Gamma} (\lambda_j \odot \mu_k)$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathcal{B}}(\lambda \odot \mu) &= \bigvee\{ \textstyle\bigwedge_{i\in J} \mathcal{B}(\nu_i) \mid \lambda \odot \mu = \bigvee_{i\in J} \nu_i\} \\
&\geq \textstyle\bigwedge_{j\in\Lambda, k\in\Gamma} \mathcal{B}(\lambda_j \odot \mu_k) \\
&\geq \textstyle\bigwedge_{j\in\Lambda, k\in\Gamma} (\mathcal{B}(\lambda_j) \odot \mathcal{B}(\mu_k)) \\
&\geq \left(\textstyle\bigwedge_{j\in\Lambda} \mathcal{B}(\lambda_j)\right) \odot \left(\textstyle\bigwedge_{k\in\Gamma} \mathcal{B}(\mu_k)\right)
\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte her iki yanın $\{ \lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j\in\Lambda} \lambda_j \}$ ve $\{ \mu_k \mid \mu = \bigvee_{k\in\Gamma} \mu_k \}$ aileleri üzerinden supremumu alınırsa,

$\tau_{\mathcal{B}}(\lambda \odot \mu) \geq \tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \odot \tau_{\mathcal{B}}(\mu)$ elde edilir.

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ olsun. $\mathfrak{S}_i$ ile tüm K_i indeks kümlerinin ailesini gösterelim öyle ki $\{ \lambda_{i_k} \in L^X \mid \lambda_i = \bigvee_{k\in K_i} \lambda_{i_k} \}$ olsun. Böylece,

$\lambda = \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i = \bigvee_{i\in\Gamma} \bigvee_{k\in K_i} \lambda_{i_k}$ dır.

Her $i \in \Gamma$ ve her $\psi \in \prod_{i \in \Gamma} \mathfrak{S}_i$, $\psi(i) \coloneqq K_i$ için,

$$\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \bigwedge_{i \in \Gamma}(\bigwedge_{k \in K_i} \mathcal{B}(\lambda_{i_k})) \tag{3.1}$$

sağlanır.

$a_{i,\psi(i)} = \bigwedge_{k \in K_i} \mathcal{B}(\lambda_{i_k})$ diyelim. (3.1) den,

$\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \bigvee_{\psi \in \prod_{i \in \Gamma} \mathfrak{S}_i}(\bigwedge_{i \in \Gamma} a_{i,\psi(i)})$ (L tam dağılımlı tam latis)

$= \bigwedge_{i \in \Gamma}(\bigvee_{M_i \in \mathfrak{S}_i} a_{i,M_i})$

$= \bigwedge_{i \in \Gamma} (\bigvee_{M_i \in \mathfrak{S}_i}(\bigwedge_{m \in M_i} \mathcal{B}\,(\lambda_{i,m}))) = \bigwedge_{i \in \Gamma} \tau_{\mathcal{B}}(\lambda_i)$ elde edilir.

Böylece $\tau_{\mathcal{B}}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

Ayrıca, her $\lambda \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ olduğu tanımdan açıktır.

Şimdi ise $\tau_{\mathcal{B}}$ nin bu koşulu sağlayan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık topoloji olduğunu gösterelim.

X üzerindeki bir τ (L,M)-bulanık topolojisi için $\tau \geq \mathcal{B}$ olsun.

$\lambda \in L^X$ alalım. Her $\{ \lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j \in \Lambda} \lambda_j \}$ ailesi için

$\tau(\lambda) = \tau(\bigvee_{j \in \Lambda} \lambda_j) \geq \bigwedge_{j \in \Lambda} \tau\,(\lambda_j) \geq \bigwedge_{j \in \Lambda} \mathcal{B}\,(\lambda_j)$ sağlanır.

Her iki yanın $\{ \lambda_j \in L^X \mid \lambda = \bigvee_{j \in \Lambda} \lambda_j \}$ üzerinden supremumu alınırsa,

$\tau(\lambda) \geq \tau_{\mathcal{B}}(\lambda\,)$ bulunur.

Böylece, $\tau_{\mathcal{B}}$ X üzerinde her $\lambda \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ koşulunu sağlayan en kaba (L,M)-bulanık topolojidir.

Lemma 3.2.3: τ, X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji ve $\mathcal{B}, Y$ üzerinde bir (L,M)-bulanık taban olsun. Bu takdirde,

$\varphi: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\mathcal{B}})$ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \mathcal{B}(\mu)$ sağlanır. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: ($\Longrightarrow$) $\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_{\mathcal{B}})$ LB-sürekli olsun ve $\mu\in L^Y$ alalım.

$\tau(\varphi^{\leftarrow}(\mu))\geq\tau_{\mathcal{B}}(\mu)\geq\mathcal{B}(\mu)$.

($\Longleftarrow$)$\forall\,\mu\in L^Y$ için $\tau(\varphi^{\leftarrow}(\mu))\geq\mathcal{B}(\mu)$ olsun.

$\lambda\in L^Y$ alalım. Her $\{\,\lambda_j\in L^Y\mid\lambda=\bigvee_{j\in\Lambda}\lambda_j\,\}$ ailesi için

$$\begin{aligned}\tau\big(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)\big)&=\tau(\varphi^{\leftarrow}(\textstyle\bigvee_{j\in\Lambda}\lambda_j\,))\\&=\tau(\textstyle\bigvee_{j\in\Lambda}\varphi^{\leftarrow}(\lambda_j))\\&\geq\textstyle\bigwedge_{j\in\Lambda}\tau\,(\varphi^{\leftarrow}(\lambda_j))\geq\bigwedge_{j\in\Lambda}\mathcal{B}(\lambda_j)\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte her iki yanın $\{\,\lambda_j\mid\lambda=\bigvee_{j\in\Lambda}\lambda_j\,\}$ üzerinden supremumu alınırsa,

$\tau\big(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)\big)\geq\tau_{\mathcal{B}}(\lambda),\ \forall\,\lambda\in L^Y$ elde edilir. Sonuç olarak, φ LB-süreklidir.

Teorem 3.2.4: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık topolojik uzayların bir ailesi, X klasik bir küme ve her $i\in\Gamma$ için $\varphi_i:X\longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. X üzerinde bir $\mathcal{B}:\,L^X\longrightarrow M$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{B}(\lambda)=\bigvee\Big\{\bigodot_{j=1}^{n}\tau_{k_j}\big(\nu_{k_j}\big)\;\Big|\;\lambda=\bigodot_{j=1}^{n}\varphi_{k_j}^{\leftarrow}\big(\nu_{k_j}\big)\Big\}$$

Bu takdirde,

(a) $\mathcal{B}$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık tabandır.

(b) $\mathcal{B}$ ile üretilen $\tau_{\mathcal{B}}$ (L,M)-bulanık topolojisi her $i\in\Gamma$ için X üzerindeki φ_i fonksiyonlarını LB-sürekli yapan en kaba (L,M)-bulanık topolojidir.

(c) $\varphi:(Y,\mathcal{U})\longrightarrow(X,\tau_{\mathcal{B}})$ fonksiyonu LB-süreklidir $\Longleftrightarrow$ $\forall\,i\in\Gamma$ için $\varphi_i\circ\varphi:(Y,\mathcal{U})\longrightarrow(X_i,\tau_i)$ bileşke fonksiyonu LB-süreklidir. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: (a) (B1) $\forall\,\lambda\in\{\underline{0},\underline{1}\}$ için $\lambda=\varphi^{\leftarrow}(\lambda)$ dir. Ayrıca, $\tau\big(\underline{0}\big)=\tau\big(\underline{1}\big)=1_M$ olduğundan $\mathcal{B}\big(\underline{0}\big)=\mathcal{B}\big(\underline{1}\big)=1_M$ olduğu açıktır.

(B2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım. $\lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})$ ve $\mu = \bigodot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}(\mu_{j_i})$ olacak şekildeki Γ nın bütün sonlu $K = \{k_1, \dots, k_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q\}$ alt kümeleri için

$\lambda \odot \mu = \left(\bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right) \odot \left(\bigodot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}(\mu_{j_i})\right)$ dır.

Ayrıca, $k \in K \cap J$ ise $\varphi_k^{\leftarrow}(\lambda_k) \odot \varphi_k^{\leftarrow}(\mu_k) = \varphi_k^{\leftarrow}(\lambda_k \odot \mu_k)$ dır.

$\lambda \odot \mu = \bigodot_{m_i \in K \cup J} \varphi_{m_i}^{\leftarrow}(\rho_{m_i})$ yazalım. Burada,

$$\rho_{m_i} = \begin{cases} \lambda_{m_i}, & m_i \in K - (K \cap J) \\ \mu_{m_i}, & m_i \in J - (K \cap J) \\ \lambda_{m_i} \odot \mu_{m_i}, & m_i \in K \cap J \end{cases} .$$

$\mathcal{B}(\lambda \odot \mu) \geq \bigodot_{j \in K \cup J} \tau_j(\rho_j) \geq \left(\bigodot_{i=1}^{p} \tau_{k_i}(\lambda_{k_i})\right) \odot \left(\bigodot_{i=1}^{q} \tau_{j_i}(\mu_{j_i})\right)$

Her iki yanın sırasıyla $\{\lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\}$ ve $\{\mu = \bigodot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}(\mu_{j_i})\}$ aileleri üzerinden supremumu alınır ve $\odot$ işleminin supremum üzerine dağılma özelliği kullanılırsa,

$\mathcal{B}(\lambda \odot \mu) \geq \mathcal{B}(\lambda) \odot \mathcal{B}(\mu)$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{B}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık tabandır.

(b) $\forall \lambda_i \in L^{X_i}$ için öyle bir $\{\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i)\}$ ailesi vardır ki,

$\forall i \in \Gamma$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i)) \geq \mathcal{B}(\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i)) \geq \tau_i(\lambda_i)$ sağlanır.

Böylece, $\forall i \in \Gamma$ için $\varphi_i : (X, \tau_{\mathcal{B}}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ LB-süreklidir.

Şimdi ise $\tau_{\mathcal{B}}$ nin her bir $i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonlarını LB-sürekli yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık topoloji olduğunu gösterelim.

Her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i : (X, \tau^o) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ LB-sürekli, yani $\forall i \in \Gamma$ ve $\forall \lambda_i \in L^{X_i}$ için $\tau^o(\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i)) \geq \tau_i(\lambda_i)$ olsun.

$\lambda \in L^X$ alalım. Γ nın $\lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})$ koşulunu sağlayan her sonlu $K = \{k_1, \dots, k_p\}$ alt kümesi için,

$\tau^o(\lambda) = \tau^o(\bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})) \geq \bigodot_{i=1}^{p} \tau^o(\varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})) \geq \bigodot_{i=1}^{p} \tau_{k_i}(\lambda_{k_i})$

Her iki yanın $\left\{\lambda_{k_i} \,\middle|\, \lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right\}$ üzerinden supremumu alınırsa, $\tau^{o}(\lambda) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ olur ki, $\tau_{\mathcal{B}}, X$ üzerinde her $\lambda \in L^{X}$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ koşulunu sağlayan en kaba (L,M)-bulanık topoloji olduğundan, $\forall\, \lambda \in L^{X}$ için $\tau^{o}(\lambda) \geq \tau_{\mathcal{B}}(\lambda)$.

(c) $(\Longrightarrow)$ $\varphi: (Y, \mathcal{U}) \longrightarrow (X, \tau_{\mathcal{B}})$ fonksiyonu LB-sürekli olsun. $\forall\, i \in \Gamma$, $\lambda_i \in L^{X_i}$ için,

$\mathcal{U}\big((\varphi_i \circ \varphi)^{\leftarrow}(\lambda_i)\big) = \mathcal{U}(\varphi^{\leftarrow}({\varphi_i}^{\leftarrow}(\lambda_i)))$ (φ LB-sürekli)

$\geq \tau_{\mathcal{B}}\, ({\varphi_i}^{\leftarrow}(\lambda_i))$ ((b) den)

$\geq \tau_i(\lambda_i)$

Böylece, $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i \circ \varphi: (Y, \mathcal{U}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ LB-süreklidir.

$(\Longleftarrow)$ $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i \circ \varphi: (Y, \mathcal{U}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ LB-sürekli olsun.

$\lambda \in L^{X}$ alalım. Bu durumda, Γ nın $\lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})$ koşulunu sağlayan her sonlu $K = \{k_1, \dots, k_p\}$ alt kümesi için, $\varphi_{k_i} \circ \varphi: (Y, \mathcal{U}) \longrightarrow (X_{k_i}, \tau_{k_i})$ LB-süreklidir. Yani, $\mathcal{U}\left(\left(\varphi_{k_i} \circ \varphi\right)^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right) = \mathcal{U}\left(\varphi^{\leftarrow}\left({\varphi_{k_i}}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right)\right) \geq \tau_{k_i}(\lambda_{k_i})$ dır. Buradan,

$$\mathcal{U}(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)) = \mathcal{U}\left(\varphi^{\leftarrow}\left(\bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right)\right)$$

$$= \mathcal{U}\left(\bigodot_{i=1}^{p} \varphi^{\leftarrow}\left({\varphi_{k_i}}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right)\right)$$

$$\geq \bigodot_{i=1}^{p} \mathcal{U}\left(\varphi^{\leftarrow}\left({\varphi_{k_i}}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right)\right)$$

$$\geq \bigodot_{i=1}^{p} \tau_{k_i}(\lambda_{k_i}).$$

Son eşitsizlikte her iki yanın $\left\{\lambda_{k_i} \,\middle|\, \lambda = \bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right\}$ üzerinden supremumu alınırsa, $\mathcal{U}(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)) \geq \mathcal{B}(\lambda)$ elde edilir. Lemma 3.2.3 den, $\varphi: (Y, \mathcal{U}) \longrightarrow (X, \tau_{\mathcal{B}})$ fonksiyonu LB-süreklidir.

Önerme 3.2.5: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $i: A \longrightarrow X$, $i(x) \coloneqq x$ içerme fonksiyonu olmak üzere, A üzerinde i fonksiyonunu LB-sürekli yapan en kaba topoloji A üzerindeki alt uzay topolojisi ile çakışır. Yani,

$\forall\, \nu \in L^{A}$ için $\tau_A(\nu) = \bigvee\{\, \tau(\rho): \rho \in L^{X}, \nu = i^{\leftarrow}(\rho)\}$ dır. (Peeters, 1999)

İspat: Tanımlar yardımıyla kolaylıkla görülür.

Tanım 3.2.6: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık topolojik uzayların bir ailesi, $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ kartezyen çarpım kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i: X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Her $i \in \Gamma$ için p_i izdüşüm fonksiyonunu LB-sürekli yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık topolojiye $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık topolojilerinin çarpım topolojisi adı verilir.

Teorem 3.2.7: $(X,\tau), (Y,\tau_1)$ ve (Z,τ_2) (L,M)-bulanık topolojik uzaylar ve $\varphi: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_1)$, $\psi: (X,\tau) \longrightarrow (Z,\tau_2)$ LB-sürekli olsun. $\tau_1 \otimes \tau_2, Y \times Z$ üzerinde (Y,τ_1) ve (Z,τ_2) (L,M)-bulanık topolojik uzaylarından üretilen çarpım topolojisi olmak üzere, $\gamma: (X,\tau) \longrightarrow (Y \times Z, \tau_1 \otimes \tau_2)$, $\gamma(x) = (\varphi(x), \psi(x))$ biçiminde tanımlı fonksiyon LB-süreklidir. (Hussein, 2006)

İspat: Teorem 3.2.4 (c) den kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.8: (L,M)-BTOP kategorisi unutkan funktora göre SET kümeler kategorisi üzerine topolojik bir kategoridir.

İspat: Teorem 3.2.4 den açıktır.

4. (L, M)-BULANIK İÇ VE KAPANIŞ UZAYLARI

Bu bölümde, (L,M)-bulanık iç ve (L,M)-bulanık kapanış operatörleri kavramları tanıtılacak ve bu kavramlar ile (L,M)-bulanık topoloji arasındaki ilişkiler incelenecektir. Başlangıç (L,M)-bulanık iç (kapanış) operatörü oluşturularak (L,M)-bulanık iç (kapanış) operatörlerinin çarpımı tanımlanacaktır.

4.1. (L, M)-Bulanık İç Uzayları

Tanım 4.1.1: (a) X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, $\mathcal{I}: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık iç operatörü denir : $\Longleftrightarrow$

(I1) $\forall\, r \in M_0$ için $\mathcal{I}\left(\underline{1}, r\right) = \underline{1}$,

(I2) $\forall\, r \in M_0$ için $\mathcal{I}(\lambda, r) \leq \lambda$,

(I3) $\lambda \leq \mu$ ve $r \leq s$ ise $\mathcal{I}(\lambda, s) \leq \mathcal{I}(\mu, r)$,

(I4) $\mathcal{I}(\lambda \odot \mu\, , r \odot s) \geq \mathcal{I}(\lambda, r) \odot \mathcal{I}(\mu, s)$,

$(X, \mathcal{I})$ ikilisine de bir (L,M)-bulanık iç uzayı adı verilir.

(b) Bir $(X, \mathcal{I})$ (L,M)-bulanık iç uzayı aşağıdaki (I5) özelliğini de sağlıyorsa $(X, \mathcal{I})$ ya topolojiktir denir.

(I5) $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), r) = \mathcal{I}(\lambda, r)$.

(c) Bir $(X, \mathcal{I})$ (L,M)-bulanık iç uzayına zayıf tabakalaşmış denir : $\Longleftrightarrow$

[$\forall\, \alpha \in L, r \in M_0$ için $\mathcal{I}\left(\underline{\alpha}, r\right) \geq \underline{\alpha}$] sağlanır. (Ramadan ve diğ., 2002)

Uyarı 4.1.2: $\odot = \wedge$ ve $L = M$ olarak alınırsa Tanım 4.1.1 ile Tanım 2.4.1 çakışır.

Tanım 4.1.3: $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2, X$ üzerinde iki (L,M)-bulanık iç operatörü olsun. $\mathcal{I}_1$'e $\mathcal{I}_2$ den daha incedir (veya, $\mathcal{I}_2$ ye $\mathcal{I}_1$ den daha kabadır) denir ve $\mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_1$ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow \forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{I}_2(\lambda, r) \leq \mathcal{I}_1(\lambda, r)$ sağlanır. (Ramadan ve diğ., 2002)

Teorem 4.1.4: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in L^X, r \in M_0$ için

$$\mathcal{I}_\tau(\lambda, r) = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda,\ \tau(\mu) \geq r \,\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{I}_\tau : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir topolojik (L,M)-bulanık iç operatörüdür ve eğer $r = \bigvee\{\, r' \in M_0 \mid \mathcal{I}_\tau(\lambda, r') = \lambda \,\}$ ise $\mathcal{I}_\tau(\lambda, r) = \lambda$ sağlanır. (Burada, $\mathcal{I}_\tau(\lambda, r)$ bulanık kümesi $\lambda \in L^X$ bulanık kümesinin r-inci seviyeden içini ifade etmektedir.) (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: $\mathcal{I}_\tau$ nun X üzerinde bir topolojik (L,M)-bulanık iç operatörü olduğunu göstermek için Tanım 4.1.1 deki (I1-I5) özelliklerinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

(I1) ve (I2) tanımdan açıktır.

(I3) $\lambda, \mu \in L^X$ ve $r.s \in M_0$ alalım. $\lambda \leq \mu$ ve $r \leq s$ olsun. Buradan,

$$\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r \,\} \subset \{\, \rho \in L^X \mid \rho \leq \mu, \tau(\rho) \geq r \,\}$$

$$\Rightarrow \bigvee\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r \,\} \leq \bigvee\{\, \rho \in L^X \mid \rho \leq \mu, \tau(\rho) \geq r \,\}$$

$\Rightarrow \mathcal{I}_\tau(\lambda, r) \leq \mathcal{I}_\tau(\mu, r)$ ve

$$\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq s\} \subset \{\nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r \,\}$$

$$\Rightarrow \bigvee\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq s \,\} \leq \bigvee\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r \,\}$$

$\Rightarrow \mathcal{I}_\tau(\lambda, s) \leq \mathcal{I}_\tau(\lambda, r) \Rightarrow \mathcal{I}_\tau(\lambda, s) \leq \mathcal{I}_\tau(\mu, r)$ elde edilir.

(I4) $\lambda, \mu \in L^X$ ve $r.s \in M_0$ alalım.

$\mathcal{I}_\tau(\lambda \odot \mu, r \odot s) = \bigvee\{\, \nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda \odot \mu, \tau(\nu) \geq r \odot s\}$ dır.

$$\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \leq \lambda \text{ ve } \mathcal{I}_\tau(\mu,s) \leq \mu \implies \mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \odot \mathcal{I}_\tau(\mu,s) \leq \lambda \odot \mu \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\tau\big(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \odot \mathcal{I}_\tau(\mu,s)\big) &\geq \tau\big(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r)\big) \odot \tau\big(\mathcal{I}_\tau(\mu,s)\big)\\
&= \tau(\vee\{\rho \mid \rho \leq \lambda, \tau(\rho) \geq r\}) \odot \tau(\vee\{\eta \mid \eta \leq \mu, \tau(\eta) \geq s\})\\
&\geq \wedge\{\tau(\rho) \mid \rho \leq \lambda, \tau(\rho) \geq r\} \odot \wedge\{\tau(\eta) \mid \eta \leq \mu, \tau(\eta) \geq s\}\\
&\geq r \odot s\end{aligned}$$

$$\implies \tau\big(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \odot \mathcal{I}_\tau(\mu,s)\big) \geq r \odot s \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) den, $\mathcal{I}_\tau(\lambda \odot \mu, r \odot s) \geq \mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \odot \mathcal{I}_\tau(\mu,s)$ elde edilir.

(I5) $\lambda \in L^X$ ve $r \in M_0$ alalım. $\mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r),r) = \vee\{\mu \in L^X \mid \mu \leq \mathcal{I}_\tau(\lambda,r), \tau(\mu) \geq r\}$

$\tau\big(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r)\big) = \tau(\vee\{\nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r\}) \geq \wedge\{\tau(\nu) \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r\} \geq r$

$\implies \mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r),r) = \mathcal{I}_\tau(\lambda,r)$ dır. Yani, $(X, \mathcal{I}_\tau)$ bir topolojik (L,M)-bulanık iç uzayıdır.

Şimdi, $r = \vee\{r' \in M_0 \mid \mathcal{I}_\tau(\lambda,r') = \lambda\}$ olsun. (I2) den, $\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \leq \lambda$ olduğu biliniyor. O halde, $\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) \geq \lambda$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}\tau(\lambda) = \tau\big(\mathcal{I}_\tau(\lambda,r')\big) &= \tau(\vee\{\mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda, \tau(\mu) \geq r'\})\\
&\geq \wedge\{\tau(\mu) \mid \mu \leq \lambda, \tau(\mu) \geq r'\}\\
&\geq r'\end{aligned}$$

$\mathcal{I}_\tau(\lambda,r') = \lambda$ olacak şekildeki her $r' \in M_0$ için $\tau(\lambda) \geq r'$ olduğundan, $\tau(\lambda) \geq r$ dır. Buradan, $\mathcal{I}_\tau(\lambda,r) = \vee\{\nu \in L^X \mid \nu \leq \lambda, \tau(\nu) \geq r\} = \lambda$ elde edilir.

Teorem 4.1.4 de oluşturulan $\mathcal{I}_\tau$ (L, M)-bulanık iç operatörüne τ (L,M)-bulanık topolojisi tarafından üretilen iç operatör adı verilir.

Teorem 4.1.5: $\mathcal{I}: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık iç operatörü olsun. X üzerinde

$$\tau_{\mathcal{I}}(\lambda) = \vee\{r \in M_0 \mid \mathcal{I}(\lambda,r) = \lambda\} \qquad (\forall \lambda \in L^X \text{ için})$$

olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{I}} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) $\tau_{\mathcal{J}}$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

(b) Eğer τ, X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji ise $\tau_{\mathcal{J}_\tau} = \tau$ sağlanır.

(c) $\mathcal{J}_{\tau_{\mathcal{J}}} = \mathcal{J} \iff \mathcal{J}$ topolojiktir ve $\mathcal{J}(\lambda, s) = \lambda$ olan $\forall\, s \in K \neq \emptyset$ için $\mathcal{J}(\lambda, \bigvee_{s\in K} s) = \lambda$ sağlanır. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: (a) (BT1) $\tau_{\mathcal{J}}(\underline{0}) = \tau_{\mathcal{J}}(\underline{1}) = 1_M$ olduğu tanımdan açıktır.

(BT2) Varsayım, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1) \odot \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_2)$ olsun. Buradan, $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1)$ in tanımından, $\exists\, r_1 \in M_0 : \mathcal{J}(\lambda_1, r_1) = \lambda_1$ ve $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq r_1 \odot \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_2)$ $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_2)$ nin tanımından, $\exists\, r_2 \in M_0 : \mathcal{J}(\lambda_2, r_2) = \lambda_2$ ve $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq r_1 \odot r_2$ (4.3) $\mathcal{J}(\lambda_1 \odot \lambda_2, r_1 \odot r_2) \geq \mathcal{J}(\lambda_1, r_1) \odot \mathcal{J}(\lambda_2, r_2) = \lambda_1 \odot \lambda_2$ dır. Ayrıca, her zaman $\mathcal{J}(\lambda_1 \odot \lambda_2, r_1 \odot r_2) \leq \lambda_1 \odot \lambda_2$ olduğundan $\mathcal{J}(\lambda_1 \odot \lambda_2, r_1 \odot r_2) = \lambda_1 \odot \lambda_2$ dır. Buradan, $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) = \bigvee\{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}(\lambda_1 \odot \lambda_2, r) = \lambda_1 \odot \lambda_2\} \geq r_1 \odot r_2$ bulunur. Bu ise (4.3) ile çelişir. O halde, varsayım yanlıştır. Yani, $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_1) \odot \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_2)$ elde edilir.

(BT3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ alalım ve $\tau_{\mathcal{J}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_i)$ olduğunu gösterelim.

$\tau_{\mathcal{J}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = \bigvee\{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r) = \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \}$

$\bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(\lambda_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \bigvee\{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}(\lambda_i, r) = \lambda_i \}$

$A \coloneqq \{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r) = \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \}$ ve $B \coloneqq \{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}(\lambda_i, r) = \lambda_i \}$ diyelim. $\forall\, i \in \Gamma$ için $r \in B$ alalım.

$\Longrightarrow\ \forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{J}(\lambda_i, r) = \lambda_i$ dır.

$\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \leq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i$ olduğundan $\forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{J}(\lambda_i, r) \leq \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r)$ dır. $\Longrightarrow\ \forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \leq \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r) \leq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \Longrightarrow \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \leq \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r) \leq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i$ $\Longrightarrow \mathcal{J}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i, r) = \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \Longrightarrow r \in A$ elde edilir.

$\forall\, i \in \Gamma$ için $B \subset A$ olduğundan $\tau_{\mathcal{J}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau_{\mathcal{J}}(\lambda_i)$ elde edilir.

(b) τ, X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji olsun.

$\lambda \in L^X$ alalım. $\tau_{\mathcal{J}_\tau}(\lambda) = \bigvee\{ r \in M_0 \mid \mathcal{J}_\tau(\lambda, r) = \lambda \}$ olduğundan,

$\lambda = \mathcal{I}_\tau(\lambda, r) = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda, \tau(\mu) \geq r \,\} \iff \tau(\lambda) \geq r$

$\implies \tau_{\mathcal{I}_\tau}(\lambda) = \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \tau(\lambda) \geq r\} = \tau(\lambda),\ \forall \lambda \in L^X$ dır. O halde, $\tau_{\mathcal{I}_\tau} = \tau$ dır.

(c) ($\Longrightarrow$) $\mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ olsun.

$\mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\lambda, r) = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda, \tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r\}$ dır.

$\tau_\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r)) = \tau_\mathcal{I}\big(\mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\lambda, r)\big)$

$= \tau_\mathcal{I}(\bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda, \tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r\})$

$\geq \bigwedge\{\, \tau_\mathcal{I}(\mu) \mid \mu \leq \lambda, \tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r\}$

$\geq r.$

$\implies \mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), r) = \mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\mathcal{I}(\lambda, r), r) = \mathcal{I}(\lambda, r)$ dır. Yani, $\mathcal{I}$ (L,M)-bulanık iç operatörü topolojiktir.

$r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{I}(\lambda, s) = \lambda \,\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}(\lambda, r) = \lambda$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{I}(\lambda, r) = \mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\lambda, r) = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda,\ \tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r \,\}$

$\tau_\mathcal{I}(\lambda) = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{I}(\lambda, s) = \lambda\} = r \implies \mathcal{I}(\lambda, r) = \lambda$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) $\mathcal{I}$ topolojik ve $r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{I}(\lambda, s) = \lambda \,\}$ için $\mathcal{I}(\lambda, r) = \lambda$ olsun.

$\mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\lambda, r) = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda,\ \tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r \,\}$ dır. Ayrıca, $\mathcal{I}(\lambda, r) \leq \lambda$ dır.

İddia: $\tau_\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r)) \geq r$

$\tau_\mathcal{I}\big(\mathcal{I}(\lambda, r)\big) = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), s) = \mathcal{I}(\lambda, r) \,\}$

$(X, \mathcal{I})$ topolojik olduğundan, $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), r) = \mathcal{I}(\lambda, r)$ dır. O halde, $\tau_\mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda,)) \geq r$ dır. Buradan,

$$\mathcal{I}_{\tau_\mathcal{I}}(\lambda, r) \geq \mathcal{I}(\lambda, r) \quad \text{bulunur.} \tag{4.4}$$

$\mu \leq \lambda$ ve $\tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r$ olan her $\mu \in L^X$ için $\mu \leq \mathcal{I}(\lambda, r)$ olduğunu gösterirsek ispat biter. $r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{I}(\lambda, s) = \lambda \,\}$ için $\mathcal{I}(\lambda, r) = \lambda$ olduğundan, $\mathcal{I}\big(\mu, \tau_\mathcal{I}(\mu)\big) = \mu$ dır. $\tau_\mathcal{I}(\mu) \geq r$ olduğundan, $\mu = \mathcal{I}\big(\mu, \tau_\mathcal{I}(\mu)\big) \leq \mathcal{I}(\mu, r) \leq \mathcal{I}(\lambda, r)$ dır.

$\Longrightarrow\ \mu \leq \lambda$ ve $\tau_{\mathcal{I}}(\mu) \geq r$ olan her $\mu \in L^X$ için $\mu \leq \mathcal{I}(\lambda, r)$

$\Longrightarrow\ \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda,\ \tau_{\mathcal{I}}(\mu) \geq r \,\} \leq \mathcal{I}(\lambda, r)$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{I}_{\tau_{\mathcal{I}}}(\lambda, r) \leq \mathcal{I}(\lambda, r) \tag{4.5}$$

(4.4), (4.5) den, $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{I}_{\tau_{\mathcal{I}}}(\lambda, r) = \mathcal{I}(\lambda, r)$ elde edilir.

Tanım 4.1.6: $(X, \mathcal{I}_1)$ ve $(Y, \mathcal{I}_2)$ iki (L,M)-bulanık iç uzayı olsun.

(a) $\varphi: X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna bir bulanık LI-dönüşümü denir : $\Longleftrightarrow$

$\forall\, \mu \in L^Y, r \in M_0$ için $\mathcal{I}_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r) \geq \varphi^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_2(\mu, r)\big)$.

(b) $\varphi: X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna bir bulanık LI-açık dönüşümü denir : $\Longleftrightarrow$

$\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\varphi^{\rightarrow}(\mathcal{I}_1(\lambda, r)) \leq \mathcal{I}_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)$. (Ramadan ve diğ., 2002)

Teorem 4.1.7: $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ iki (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun.

(a) $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu LB-süreklidir $\Longleftrightarrow$ $\varphi: \big(X, \mathcal{I}_{\tau_1}\big) \longrightarrow (Y, \mathcal{I}_{\tau_2})$ fonksiyonu bir bulanık LI-dönüşümüdür.

(b) $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu LB-açıktır $\Longleftrightarrow$ $\varphi: \big(X, \mathcal{I}_{\tau_1}\big) \longrightarrow (Y, \mathcal{I}_{\tau_2})$ fonksiyonu bir bulanık LI-açık dönüşümüdür. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: (a) ($\Longrightarrow$) $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-sürekli olsun. $\mu \in L^Y, r \in M_0$ alalım.

$$\begin{aligned}
\varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{\tau_2}(\mu, r)\right) &= \varphi^{\leftarrow}\big(\bigvee\{\, \nu \in L^Y \mid \nu \leq \mu,\ \tau_2(\nu) \geq r \,\}\big) \\
&\leq \varphi^{\leftarrow}\big(\bigvee\{\, \nu \in L^Y \mid \varphi^{\leftarrow}(\nu) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu),\ \tau_1\big(\varphi^{\leftarrow}(\nu)\big) \geq r\}\big) \\
&= \bigvee\{\, \varphi^{\leftarrow}(\nu) \mid \varphi^{\leftarrow}(\nu) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu),\ \tau_1\big(\varphi^{\leftarrow}(\nu)\big) \geq r\} \\
&\leq \bigvee\{\, \lambda \in L^X \mid \lambda \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu),\ \tau_1(\lambda) \geq r\} \\
&= \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r)
\end{aligned}$$

Böylece, $\varphi: \big(X, \mathcal{I}_{\tau_1}\big) \longrightarrow (Y, \mathcal{I}_{\tau_2})$ bir bulanık LI-dönüşümüdür.

$(\Longleftarrow)$ $\forall\, \mu \in L^Y, r \in M_0$ için $\mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r) \geq \varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{\tau_2}(\mu, r)\right)$ olsun.

$\nu \in L^Y$ alalım.

$$\tau_2(\nu) = \tau_{\mathcal{I}_{\tau_2}}(\nu) = \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{I}_{\tau_2}(\nu, r) = \nu \,\}$$

$$\leq \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{\tau_2}(\nu, r)) = \varphi^{\leftarrow}(\nu) \,\}$$

$$\leq \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\nu), r) = \varphi^{\leftarrow}(\nu) \,\}$$

$$= \tau_{\mathcal{I}_{\tau_1}}(\varphi^{\leftarrow}(\nu)) = \tau_1(\varphi^{\leftarrow}(\nu)).$$

Böylece, $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-süreklidir.

(b) $(\Longrightarrow)$ $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-açık olsun. $\lambda \in L^X$ ve $r \in M_0$ alalım.

$$\varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{I}_{\tau_1}(\lambda, r)\right) = \varphi^{\rightarrow}(\bigvee\{\, \rho \in L^X \mid \rho \leq \lambda,\ \tau_1(\rho) \geq r \,\})$$

$$\leq \varphi^{\rightarrow}(\bigvee\{\, \rho \in L^X \mid \varphi^{\rightarrow}(\rho) \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda),\ \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\rho)) \geq r \,\})$$

$$= \bigvee\{\, \varphi^{\rightarrow}(\rho) \mid \varphi^{\rightarrow}(\rho) \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda),\ \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\rho)) \geq r \,\}$$

$$\leq \bigvee\{\, \mu \in L^Y \mid \mu \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda),\ \tau_2(\mu) \geq r \,\} = \mathcal{I}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)\,.$$

$(\Longleftarrow)$ $\varphi : \left(X, \mathcal{I}_{\tau_1}\right) \longrightarrow (Y, \mathcal{I}_{\tau_2})$ bir bulanık LI-açık dönüşümü olsun. $\lambda \in L^X$ alalım.

$$\tau_1(\lambda) = \tau_{\mathcal{I}_{\tau_1}}(\lambda) = \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{I}_{\tau_1}(\lambda, r) = \lambda \,\}$$

$$\leq \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \varphi^{\rightarrow}(\mathcal{I}_{\tau_1}(\lambda, r)) = \varphi^{\rightarrow}(\lambda) \,\}$$

$$\leq \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{I}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r) \geq \varphi^{\rightarrow}(\lambda) \,\}$$

$$= \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{I}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r) = \varphi^{\rightarrow}(\lambda) \,\}$$

$$= \tau_{\mathcal{I}_{\tau_2}}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)) = \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)).$$

O halde, $\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu LB-açıktır.

Örnek 4.1.8: $L = M = I$ ve $\odot = \wedge$ olsun. $\mu \notin \{\underline{0}, \underline{1}\}$ için $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2: I^X \times I_0 \longrightarrow I^X$ (L,M)-bulanık iç operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{I}_1(\lambda, r) = \begin{cases} \underline{1} & , \quad \lambda = \underline{1}, r \in M_0 \\ \mu & , \quad \underline{1} \neq \lambda \geq \mu, r < 1/2 \\ \lambda & , \quad r = 0 \\ \underline{0} & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_2(\lambda, r) = \begin{cases} \underline{1} & , \quad \lambda = \underline{1}, r \in M_0 \\ \mu & , \quad \underline{1} \neq \lambda \geq \mu, r \leq 1/2 \\ \lambda & , \quad r = 0 \\ \underline{0} & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Bu takdirde, $id_X: (X, \mathcal{I}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{I}_2)$ birim fonksiyonu bir bulanık LI-dönüşümü değildir. Çünkü, $\mu = \mathcal{I}_2\left(\mu, \frac{1}{2}\right) > \mathcal{I}_1\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = \underline{0}$ dir.

Diğer yandan, Teorem 4.1.5 yardımıyla bu iç operatörlerin ürettiği $\tau_{\mathcal{I}_1}, \tau_{\mathcal{I}_2}: I^X \longrightarrow I$ (L,M)-bulanık topolojileri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tau_{\mathcal{I}_1}(\lambda) = \tau_{\mathcal{I}_2}(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda \in \{\underline{0}, \underline{1}\} \\ 1/2 & , \quad \lambda = \mu \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Buradan, $id_X: \left(X, \tau_{\mathcal{I}_1}\right) \longrightarrow \left(X, \tau_{\mathcal{I}_2}\right)$ fonksiyonu LB-süreklidir.

Sonuç olarak, $id_X: (X, \mathcal{I}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{I}_1)$ bir bulanık LI-dönüşümü değildir, fakat $id_X: \left(X, \tau_{\mathcal{I}_2}\right) \longrightarrow \left(X, \tau_{\mathcal{I}_1}\right)$ bir bulanık LI-açık dönüşümüdür.

Teorem 4.1.9: M idempotent, $\{(X_i, \mathcal{I}_i)\}_{i \in \Gamma}$ (L,M)-bulanık iç uzayların ailesi, X bir küme ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. Γ nın tüm sonlu $K = \{i_1, \ldots, i_n\}$ alt kümeleri için bir $\mathcal{I}: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{I}(\lambda, r) = \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right\}$$

Bu takdirde, $\mathcal{I}$ her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: X \longrightarrow X_i$ fonksiyonlarını bir bulanık LI-dönüşüm yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık iç operatörüdür. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: Öncelikle $\mathcal{I}: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümünün X üzerinde bir (L,M)-bulanık iç operatörü olduğunu görelim.

(I1) $\mathcal{J}(\underline{1},r) \geq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_i(\underline{1},r)\right)$ olduğundan $\mathcal{J}(\underline{1},r) = \underline{1}$ dır.

(I2) Γ nın tüm sonlu $K = \{i_1, \dots, i_n\}$ alt kümeleri için,

$$\mathcal{J}(\lambda,r) = \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k},r)\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\right\}$$

$$\leq \lambda.$$

(I3) $\lambda \leq \mu$ ve $r \leq s$ olsun.

$$\mathcal{J}(\lambda,r) = \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k},r)\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\mu}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k},r)\right)\right\}$$

$$= \mathcal{J}(\mu,r).$$

$$\mathcal{J}(\lambda,r) = \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k},r)\right)\right\}$$

$$\geq \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k},s)\right)\right\}$$

$$= \mathcal{J}(\lambda,s).$$

(I4) $\lambda,\mu \in L^X$ ve $r,s \in M_0$ alalım. Γ nın tüm sonlu $K = \{k_1, \dots, k_p\}$ ve $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ alt kümeleri için, $\bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i}) \leq \lambda$ ve $\bigodot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}(\mu_{j_i}) \leq \mu$

$\Longrightarrow \left(\bigodot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}(\lambda_{k_i})\right) \odot \left(\bigodot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}(\mu_{j_i})\right) \leq \lambda \odot \mu$ sağlanır.

Ayrıca, her $k \in K \cap J$ için $\varphi_k^{\leftarrow}(\lambda_k) \odot \varphi_k^{\leftarrow}(\mu_k) = \varphi_k^{\leftarrow}(\lambda_k \odot \mu_k)$ olduğundan,

$\varphi_k^{\leftarrow}(\mathcal{J}_k(\lambda_k,r)) \odot \varphi_k^{\leftarrow}(\mathcal{J}_k(\mu_k,r)) \leq \varphi_k^{\leftarrow}(\mathcal{J}_k(\lambda_k \odot \mu_k, r \odot s))$ sağlanır.

$P = K \cup J = \{m_1, \dots, m_r\}$ için

$$\rho_{m_i} = \begin{cases} \lambda_{m_i} \odot \underline{1}, & m_i \in K - (K \cap J) \\ \mu_{m_i} \odot \underline{1}, & m_i \in J - (K \cap J) \\ \lambda_{m_i} \odot \mu_{m_i}, & m_i \in K \cap J \end{cases}$$ diyelim.

Eğer $m_i \in K-(K \cap J)$ ise,

$$\varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\lambda_{m_i}, r)\big) = \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\lambda_{m_i}, r)\big) \odot \underline{1}$$

$$= \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\lambda_{m_i}, r)\big) \odot \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\underline{1}\,, s)\big)$$

$$\leq \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\lambda_{m_i} \odot \underline{1}, r \odot s)\big)$$

$$= \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\rho_{m_i}, r \odot s)\big).$$

Benzer şekilde eğer $m_i \in J-(K \cap J)$ ise,

$\varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\mu_{m_i}, s)\big) \leq \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\big(\mathcal{I}_{m_i}(\rho_{m_i}, r \odot s)\big)$ dır. Buradan,

$$\mathcal{I}(\lambda, r) \odot \mathcal{I}(\mu, s) = \left(\bigvee_{\odot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}\left(\lambda_{k_i}\right) \leq \lambda} \left\{ \odot_{i=1}^{p} \varphi_{k_i}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{k_i}\big(\lambda_{k_i}, r\big)\right)\right\}\right)$$

$$\odot \left(\bigvee_{\odot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}\left(\mu_{j_i}\right) \leq \mu} \left\{ \odot_{i=1}^{q} \varphi_{j_i}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{j_i}\big(\mu_{j_i}, s\big)\right)\right\}\right)$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{i=1}^{r} \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\left(\rho_{m_i}\right) \leq \lambda \odot \mu} \left\{ \odot_{i=1}^{r} \varphi_{m_i}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{m_i}\big(\rho_{m_i}, r \odot s\big)\right)\right\}$$

$$\leq \mathcal{I}(\lambda \odot \mu, \mathrm{r} \odot s).$$

Böylece, $\mathcal{I}(\lambda \odot \mu, \mathrm{r} \odot s) \geq \mathcal{I}(\lambda, r) \odot \mathcal{I}(\mu, s)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\mathcal{I}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık iç operatörüdür.

Şimdi $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i: (X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{I}_i)$ fonksiyonlarının birer bulanık LI-dönüşüm olduğunu gösterelim.

$\forall\, i \in \Gamma, \lambda_i \in L^{X_i}$ ve bir $\{\, \varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i)\, \}_{i \in \Gamma}$ ailesi için

$\mathcal{I}(\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i), r) \geq \varphi_i^{\leftarrow}(\mathcal{I}_i(\lambda_i, r))$ dir. Böylece $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i: (X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{I}_i)$ bir bulanık LI-dönüşümüdür.

Şimdi ise, bu $\mathcal{I}$ iç operatörünün $\forall\, i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonlarını birer bulanık LI-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L, M)-bulanık iç operatörü olduğunu gösterelim. $\mathcal{I}^*$ X üzerinde $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i: (X, \mathcal{I}^*) \longrightarrow (X_i, \mathcal{I}_i)$ bulanık LI-dönüşümü olacak şekilde bir (L, M)-bulanık iç operatörü olsun. O halde, her $\lambda_i \in L^{X_i}$ ve $r \in M_0$

için $\mathcal{J}^*(\varphi_i^{\leftarrow}(\lambda_i), r) \geq \varphi_i^{\leftarrow}(\mathcal{J}_i(\lambda_i, r))$ dır. $\lambda \in L^X$ ve $r \in M_0$ alalım. Γ nın tüm sonlu $K = \{i_1, \dots, i_n\}$ alt kümeleri için,

$$\mathcal{J}(\lambda, r) = \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r)\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \mathcal{J}^*\left(\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}), r\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \mathcal{J}^*\left(\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}), \odot_{k=1}^{n} r\right)\right\} \qquad \text{(M idempotent)}$$

$$= \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \mathcal{J}^*\left(\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}), r\right)\right\} \leq \mathcal{J}^*(\lambda, r).$$

Tanım 4.1.10: $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i \in \Gamma}$ (L,M)-bulanık iç uzayların bir ailesi, X bir küme ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. X üzerinde Teorem 4.1.9 da oluşturulan $\mathcal{J}$ (L,M)-bulanık iç operatörüne X üzerindeki başlangıç (L,M)-bulanık iç operatörü denir. X üzerindeki başlangıç (L,M)-bulanık iç operatörü, her bir $i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonlarını bulanık LI-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık iç operatörüdür.

Tanım 4.1.11: M idempotent, $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i \in \Gamma}$ (L,M)-bulanık iç uzayların bir ailesi, $X = \prod_{i \in \Gamma} X_i$ kartezyen çarpım kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Her $i \in \Gamma$ için p_i izdüşüm fonksiyonlarını bulanık LI-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık iç operatörüne çarpım (L,M)-bulanık iç operatörü adı verilir.

Teorem 4.1.9 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.12: M idempotent ve $\mathcal{J}, Y$ üzerinde bir (L,M)-bulanık iç operatörü olsun. $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{J}^{\varphi}(\lambda, r) = \bigvee_{\varphi^{\leftarrow}(\mu) \leq \lambda} \varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}(\mu, r)\right)$$

olarak tanımlanan $\mathcal{J}^{\varphi} : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü φ fonksiyonunu bir bulanık LI-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık iç operatörüdür. (Ramadan ve diğ., 2002)

Sonuç 4.1.13: M idempotent ve $\{\mathcal{J}_i\}_{i \in \Gamma}, X$ üzerindeki (L,M)-bulanık iç operatörlerin bir ailesi olsun. Tüm sonlu $K = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \Gamma$ için

$$\mathcal{I}^*(\lambda, r) = \bigvee_{\lambda_{i_1} \odot \lambda_{i_2} \odot \ldots \odot \lambda_{i_n} \leq \lambda} (\mathcal{I}_{i_1}(\lambda_{i_1}, r) \odot \ldots \odot \mathcal{I}_{i_n}(\lambda_{i_n}, r))$$

olarak tanımlanan $\mathcal{I}^*: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{I}_i$ (L,M)-bulanık iç operatörlerinden daha ince olan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık iç operatörüdür. (Ramadan ve diğ., 2002)

Teorem 4.1.14: M idempotent, $\{(X_i, \mathcal{I}_i)\}_{i \in \Gamma}$ (L,M)-bulanık iç uzayların ailesi, X bir küme, her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon ve $\mathcal{I}$ Teorem 4.1.9 da oluşturulan (L,M)-bulanık iç operatörü olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) En az bir $i \in \Gamma$ için $\mathcal{I}_i$ zayıf tabakalaşmış ise $\mathcal{I}, X$ üzerinde zayıf tabakalaşmıştır.

(b) Her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{I}_i$ iç operatörleri topolojik ise, $\mathcal{I}$ iç operatörü de topolojiktir.

(c) $\varphi : (Y, \mathcal{I}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{I})$ fonksiyonu bir bulanık LI-dönüşümüdür $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i \circ \varphi : (Y, \mathcal{I}^*) \longrightarrow (X_i, \mathcal{I}_i)$ bir bulanık LI-dönüşümüdür. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: (a) Bir $i \in \Gamma$ için $\mathcal{I}_i$ zayıf tabakalaşmış olsun. Her $\underline{\alpha} \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{I}_i(\underline{\alpha}, r) \geq \underline{\alpha}$ ve $\varphi_i^{\leftarrow}(\underline{\alpha}) = \underline{\alpha}$ olduğundan, her $\underline{\alpha} \in L^X, r \in M_0$ için

$$\mathcal{I}(\underline{\alpha}, r) = \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \underline{\alpha}} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r)\right)\right\}$$

$$\geq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_i(\underline{\alpha}, r)\right) \geq \underline{\alpha}\,.$$

Böylece, $\mathcal{I}$ X üzerinde zayıf tabakalaşmıştır.

(b) Γ nın tüm sonlu $K = \{i_1, \ldots, i_n\}$ alt kümeleri için,

$$\mathcal{I}(\lambda, r) = \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r)\right)\right\}$$

$$= \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r), r\right)\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r)\right) \leq \mathcal{I}(\lambda, r)} \left\{ \odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r), r\right)\right)\right\}$$

$$\leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(\lambda, r), r)\,.$$

Çünkü, $\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda$ ise $\odot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}(\lambda_{i_k}, r)\right) \leq \mathcal{I}(\lambda, r)$ dır.

(c) Tüm sonlu $K = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \Gamma$ alt kümeleri için,

$$\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}(\lambda, r)) \ = \varphi^{\leftarrow}\left(\bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\ \odot_{k=1}^{n}\ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right\}\right)$$

$$= \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\varphi^{\leftarrow}\left(\ \odot_{k=1}^{n}\ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right)\right\}$$

$$= \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\odot_{k=1}^{n}\ \varphi^{\leftarrow}\left(\ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{i_k}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right)\right\}$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\odot_{k=1}^{n}\ \mathcal{I}^{*}(\varphi^{\leftarrow}(\ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})), r)\ \right\}$$

$$\leq \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\mathcal{I}^{*}(\varphi^{\leftarrow}\left(\odot_{k=1}^{n}\ \ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\right), \odot_{k=1}^{n}\ r)\ \right\} \quad \text{(M idempotent)}$$

$$= \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\lambda_{i_k}\right)\leq\lambda}\left\{\mathcal{I}^{*}(\varphi^{\leftarrow}\left(\odot_{k=1}^{n}\ \ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\right), r)\ \right\}$$

$$\leq \mathcal{I}^{*}(\varphi^{\leftarrow}(\lambda), r).$$

Objeleri (L,M)-bulanık iç uzayları ve morfizmleri de bulanık LI-dönüşümler olan kategori (L,M)-BI ile gösterilir.

Teorem 4.1.15: (L,M)-BI kategorisi unutkan funktora göre SET kümeler kategorisi üzerine topolojik bir kategoridir.

İspat: Teorem 4.1.9 ve Teorem 4.1.14 (c) yardımıyla kolaylıkla görülür.

Aşağıdaki teorem; verilen (L,M)-bulanık topolojilerden elde edilen (L,M)-bulanık iç uzaylarla oluşturulan başlangıç iç operatörünün ürettiği bulanık topoloji ile verilen (L,M)-bulanık topolojiler ile üretilen başlangıç topolojinin aynı olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 4.1.16: M idempotent, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık topolojik uzayların ailesi, X bir küme ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. X üzerinde bir $\mathcal{I}: L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü tüm sonlu $K = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \Gamma$ alt kümeleri için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{I}(\lambda, r) \ = \bigvee_{\odot_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k})\leq\lambda}\left\{\ \odot_{k=1}^{n}\ \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right\}$$

Bu takdirde, $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{J}}$ dır.

Burada, $\tau_{\mathcal{J}}$ $\mathcal{J}$ ile üretilen (L,M)-bulanık topoloji ve $\tau_{\mathcal{B}}$ ise Teorem 3.2.4 deki (L,M)-bulanık topolojidir. (Ramadan ve diğ., 2002)

İspat: Varsayım, $\exists\, \lambda \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \ngeq \tau_{\mathcal{J}}(\lambda)$ olsun. Teorem 4.1.5 $\tau_{\mathcal{J}}$ tanımından, $\exists\, r \in M_0 :\ \mathcal{J}(\lambda, r) = \lambda$ ve $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \ngeq r$ dır. Her $K = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \Gamma$ için,

$$\lambda = \mathcal{J}(\lambda, r) = \bigvee_{\bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda} \left\{ \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)\right\}$$

Teorem 4.1.4 den, $\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right) = \mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right), r\right)$ olduğundan ve Teorem 4.1.5 den $\tau_i = \tau_{\mathcal{J}_{\tau_i}}$ olduğu kullanılırsa,

$$\tau_{i_k}\left(\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right) \geq r \text{ dır.}$$

$\mu_k = \varphi_{i_k}^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right)$ diyelim. Teorem 3.2.4 den,

$$\mathcal{B}\left(\bigodot_{k=1}^{n} \mu_k\right) \geq \bigodot_{k=1}^{n} \tau_{i_k}\left(\mathcal{J}_{\tau_{i_k}}\left(\lambda_{i_k}, r\right)\right) \geq \bigodot_{k=1}^{n} r = r \qquad \text{(M idempotent)}$$

$\mu_K = \bigodot_{k=1}^{n} \mu_k$ diyelim. Her $\{ K \subset \Gamma \mid \bigodot_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}^{\leftarrow}(\lambda_{i_k}) \leq \lambda \}$ kümeleri için, Teorem 3.2.4 deki $\tau_{\mathcal{B}}$ nin tanımından,

$$\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) = \tau_{\mathcal{B}}\left(\bigvee_{K \subset \Gamma} \mu_K\right) \geq \bigwedge_{K \subset \Gamma} \mathcal{B}(\mu_K) \geq r.$$

Bu ise bir çelişkidir. O halde, $\forall\, \mu \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\mu) \geq \tau_{\mathcal{J}}(\mu)$ sağlanır.

Şimdi ise $\forall\, \mu \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\mu) \leq \tau_{\mathcal{J}}(\mu)$ olduğunu ya da buna denk olarak, $id_X : (X, \tau_{\mathcal{J}}) \longrightarrow (X, \tau_{\mathcal{B}})$ birim fonksiyonun LB-sürekli olduğunu gösterelim. Teorem 3.2.4 (c) den, sadece $\varphi_i \circ id_X : (X, \tau_{\mathcal{J}}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ fonksiyonunun LB-sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $r \in M_0$ için $\tau_i(\nu_i) \geq r$ ise Teorem 4.1.4 den,

$\mathcal{J}_{\tau_i}(\nu_i, r) = \nu_i$ dır. $\mathcal{J}$ nın tanımından,

$$\mathcal{J}(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i), r) \geq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{J}_{\tau_i}(\nu_i, r)\right) = \varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i)\,.$$

Teorem 4.1.5 den, $\tau_{\mathcal{J}}(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i)) \geq r$ dır.

Böylece, $\forall\, \nu_i \in L^{X_i}$ için $\tau_i(\nu_i) \leq \tau_{\mathcal{J}}(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i))$ sağlanır.

Sonuç olarak, $\forall\, \mu \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\mu) \leq \tau_{\mathcal{J}}(\mu)$ ve böylece de $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{J}}$ elde edilir.

4.2. (L, M)-Bulanık Kapanış Uzayları

Tanım 4.2.1: (a) X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, $\mathcal{C} : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık kapanış operatörü denir $:\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda, \mu \in L^X,\ r, s \in M_0$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(C1) $\mathcal{C}(\underline{0}, r) = \underline{0}$,

(C2) $\mathcal{C}(\lambda, r) \geq \lambda$,

(C3) $\lambda \leq \mu$ ise $\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}(\mu, r)$,

(C4) $r \leq s$ ise $\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}(\lambda, s)$.

(C5) $\mathcal{C}(\lambda \oplus \mu, \mathrm{r} \odot \mathrm{s}) \leq \mathcal{C}(\lambda, r) \oplus \mathcal{C}(\mu, s)$,

$(X, \mathcal{C})$ ikilisine de bir (L,M)-bulanık kapanış uzayı adı verilir.

(b) Bir $(X, \mathcal{C})$ (L,M)-bulanık kapanış uzayına topolojiktir denir $:\Leftrightarrow$

(C6) $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r) = \mathcal{C}(\lambda, r)$.

(c) $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2, X$ üzerinde iki (L,M)-bulanık kapanış operatörü olsun. $\mathcal{C}_1$'e $\mathcal{C}_2$ den daha incedir (veya $\mathcal{C}_2$ ye $\mathcal{C}_1$ den daha kabadır) denir ve $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow \forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}_1(\lambda, r) \leq \mathcal{C}_2(\lambda, r)$.

Uyarı 4.2.2: (1) $L = M = I$ ve $\odot = \wedge$ olarak alındığında Tanım 4.2.1 Chattopadhyay ve Samanta (1993) tarafından verilen tanım ile çakışır.

(2) $L = M$ ve $\odot = \wedge, \oplus = \vee$ olarak alındığında Tanım 4.2.1 ile Y. C. Kim (2003) tarafından verilen tanım çakışır.

(3) $\odot = \wedge, \oplus = \vee$ olarak alındığında Tanım 4.2.1 Sostak (1996) tarafından verilen tanım ile çakışır.

Tanım 4.2.3: $(X, \mathcal{C}_1)$ ve $(Y, \mathcal{C}_2)$ iki (L,M)-bulanık kapanış uzayı olsun.

$\varphi : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna bulanık LC-dönüşümü denir $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\varphi^{\rightarrow}\big(\mathcal{C}_1(\lambda, r)\big) \leq \mathcal{C}_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)$ sağlanır. (Kim, 2003)

Teorem 4.2.4: L bir tam MV-cebiri ve (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzayı olsun. $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için

$\mathcal{C}_\tau(\lambda, r) = \bigwedge\{\, \mu \in L^X \mid \mu \geq \lambda,\ \tau\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\}$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}_\tau : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde bir topolojik (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür ve eğer $r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{C}_\tau(\lambda, s) = \lambda \,\}$ ise $\mathcal{C}_\tau(\lambda, r) = \lambda$ sağlanır.($\mathcal{C}_\tau$ ya τ ile üretilen (L,M)-bulanık kapanış operatörü denir.)

İspat: Öncelikle $\mathcal{C}_\tau$ nun X üzerinde bir (L,M)-bulanık kapanış operatörü olduğunu gösterelim.

(C1) ve (C2) tanımlardan açıktır.

(C3) $\lambda, \mu \in L^X$ ve $\lambda \leq \mu$ olsun.

$\{\, \nu \in L^X \mid \mu \leq \nu, \tau\big(\nu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\} \subseteq \{\, \rho \in L^X \mid \lambda \leq \rho, \tau\big(\rho \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\}$

$\bigwedge\{\, \nu \in L^X \mid \mu \leq \nu, \tau\big(\nu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\} \geq \bigwedge\{\, \rho \in L^X \mid \lambda \leq \rho, \tau\big(\rho \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\}$

$\Longrightarrow\ \mathcal{C}_\tau\,(\lambda, r) \leq \mathcal{C}_\tau\,(\mu, r)$ elde edilir.

(C4) $r \leq s$ olsun.

$\{\, \nu \in L^X \mid \lambda \leq \nu, \tau\big(\nu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\} \supseteq \{\, \rho \in L^X \mid \lambda \leq \rho, \tau\big(\rho \longrightarrow \underline{0}\big) \geq s \,\}$

$\bigwedge\{\, \nu \in L^X \mid \lambda \leq \nu, \tau\big(\nu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r \,\} \leq \bigwedge\{\, \rho \in L^X \mid \lambda \leq \rho, \tau\big(\rho \longrightarrow \underline{0}\big) \geq s \,\}$

$\Longrightarrow\ \mathcal{C}_\tau\,(\lambda, r) \leq \mathcal{C}_\tau\,(\lambda, s)$ elde edilir.

(C5) $\lambda, \mu \in L^X, r, s \in M_0$ alalım.

$\mathcal{C}_\tau\,(\lambda, r) \geq \lambda$ ve $\mathcal{C}_\tau\,(\mu, s) \geq \mu$ olduğundan, $\mathcal{C}_\tau(\lambda, r) \oplus \mathcal{C}_\tau(\mu, s) \geq \lambda \oplus \mu$ (4.6)

$$\tau\Big(\big(\mathcal{C}_\tau(\lambda,r)\oplus\mathcal{C}_\tau(\mu,s)\big)\longrightarrow\underline{0}\Big)=\tau\Big(\big(\mathcal{C}_\tau(\lambda,r)\longrightarrow\underline{0}\big)\odot\big(\mathcal{C}_\tau(\mu,s)\longrightarrow\underline{0}\big)\Big)$$

$$\geq\tau(\mathcal{C}_\tau(\lambda,r)\longrightarrow\underline{0})\odot\tau\big(\mathcal{C}_\tau(\mu,s)\longrightarrow\underline{0}\big)$$

$$=\tau\big(\wedge\{\,\nu\mid\nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\}\longrightarrow\underline{0}\big)$$

$$\odot\,\tau\big(\wedge\{\,\rho\mid\rho\geq\mu,\ \tau\big(\rho\longrightarrow\underline{0}\big)\geq s\}\longrightarrow\underline{0}\big)$$

$$=\tau\big(\vee\big\{\,\nu\longrightarrow\underline{0}\,\big|\,\nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\,\big\}\big)$$

$$\odot\,\tau\big(\vee\big\{\,\rho\longrightarrow\underline{0}\,\big|\ \rho\geq\mu,\ \tau\big(\rho\longrightarrow\underline{0}\big)\geq s\big\}\big)$$

$$\geq\wedge\big\{\tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\big|\ \nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\,\big\}$$

$$\odot\wedge\big\{\tau\big(\rho\longrightarrow\underline{0}\,\big)\big|\ \rho\geq\mu,\ \tau\big(\rho\longrightarrow\underline{0}\big)\geq s\,\big\}$$

$$\geq r\odot s \tag{4.7}$$

$\Longrightarrow$(4.6), (4.7) den, $\mathcal{C}_\tau(\lambda\oplus\mu,\mathrm{r}\odot\mathrm{s}\,)\leq\mathcal{C}_\tau(\lambda,r)\oplus\mathcal{C}_\tau(\mu,s)$ elde edilir.

(C6) $\tau\big(\mathcal{C}_\tau(\lambda,r)\longrightarrow\underline{0}\big)=\tau(\wedge\{\,\nu\mid\nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\}\longrightarrow\underline{0})$

$$=\tau\big(\vee\big\{\,\nu\longrightarrow\underline{0}\,\big|\,\nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\,\big\}\big)$$

$$\geq\wedge\big\{\tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\big|\ \nu\geq\lambda,\ \tau\big(\nu\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\,\big\}$$

$$\geq r$$

Ayrıca, $\mathcal{C}_\tau\,(\lambda,r)\geq\lambda$ olduğundan $\mathcal{C}_\tau\,(\mathcal{C}_\tau\,(\lambda,r),r)=\mathcal{C}_\tau\,(\lambda,r)$ elde edilir.

Böylece, $(X,\mathcal{C}_\tau)$ bir topolojik (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür.

Şimdi de, teoremdeki son iddiayı ispatlayalım.

$r=\vee\{\,s\in M_0\mid\mathcal{C}_\tau(\lambda,s)=\lambda\,\}$ olsun.

$\lambda=\mathcal{C}_\tau(\lambda,s)=\wedge\{\,\mu\in L^X\mid\mu\geq\lambda,\ \tau(\mu\longrightarrow\underline{0})\geq s\}\ \Longleftrightarrow\ \tau(\lambda\longrightarrow\underline{0})\geq s$

$\Longrightarrow\tau\big(\lambda\longrightarrow\underline{0}\big)\geq r\ \Longrightarrow\ \mathcal{C}_\tau(\lambda,r)=\lambda$ elde edilir.

Uyarı 4.2.5: L' nin bir tam MV-cebiri olmadığı durumda, Teorem 4.2.4 deki $\mathcal{C}_\tau : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ (L,M)-bulanık kapanış operatörü $\mu \longrightarrow \underline{0}$ yerine μ' alınarak da tanımlanabilir.

Teorem 4.2.6: L bir tam MV-cebiri ve $\mathcal{C}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık kapanış operatörü olsun. X üzerinde

$$\tau_{\mathcal{C}}(\lambda) = \bigvee\{\, r \in M_0 \mid \mathcal{C}\big(\lambda \longrightarrow \underline{0},\ r\big) = \lambda \longrightarrow \underline{0}\,\}$$

olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{C}}: L^X \longrightarrow M$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(Burada $\tau_{\mathcal{C}}$ ye $\mathcal{C}$ ile üretilen (L,M)-bulanık topoloji adı verilir.)

(a) $\tau_{\mathcal{C}}$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

(b) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}} \iff (X, \mathcal{C})$ ikilisi aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) Topolojiktir.

(ii) Eğer $r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{C}(\lambda, s) = \lambda\,\}$ ise $\mathcal{C}(\lambda, r) = \lambda$ dır.

İspat: $\tau_{\mathcal{C}}$ nin X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji olduğunu göstermek için Tanım 3.1.1 deki koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir.

(a) (BT1) $\tau_{\mathcal{C}}\big(\underline{0}\big) = \tau_{\mathcal{C}}\big(\underline{1}\big) = 1_M$ olduğu tanımdan açıktır.

(BT2) Varsayım, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1) \odot \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_2)$ olsun. $\tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1)$ tanımından,

$$\exists\, r \in M_0 :\ \mathcal{C}\big(\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}, r\big) = \lambda_1 \longrightarrow \underline{0} \ \text{ ve }\ \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq r \odot \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_2)$$

$\tau_{\mathcal{C}}(\lambda_2)$ tanımından,

$$\exists\, s \in M_0 :\ \mathcal{C}\big(\lambda_2 \longrightarrow \underline{0}, s\big) = \lambda_2 \longrightarrow \underline{0} \ \text{ ve }\ \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \ngeq r \odot s.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\big((\lambda_1 \odot \lambda_2) \longrightarrow \underline{0}, r \odot s\big) &= \mathcal{C}\Big(\big(\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}\big) \oplus \big(\lambda_2 \longrightarrow \underline{0}\big), r \odot s\Big)\\ &\le \mathcal{C}\big(\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}, r\big) \oplus \mathcal{C}\big(\lambda_2 \longrightarrow \underline{0}, s\big)\\ &= \big(\lambda_1 \longrightarrow \underline{0}\big) \oplus \big(\lambda_2 \longrightarrow \underline{0}\big) = (\lambda_1 \odot \lambda_2) \longrightarrow \underline{0}.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq r \odot s$ dir. Bu ise varsayım ile çelişir. O halde,$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_1) \odot \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_2)$ sağlanır.

(BT3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ alalım.

$\forall\ i \in \Gamma$ için $\lambda_i \longrightarrow \underline{0} \geq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \longrightarrow \underline{0}$ olduğundan

$\mathcal{C}(\lambda_i \longrightarrow \underline{0}, r) \geq \mathcal{C}((\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}, r)$ dır. Ayrıca,

$\forall\ i \in \Gamma$ için $\mathcal{C}(\lambda_i \longrightarrow \underline{0}, r) = \lambda_i \longrightarrow \underline{0}$ olduğundan,

$\forall\ i \in \Gamma$ için $\lambda_i \longrightarrow \underline{0} \geq\ \mathcal{C}\left((\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right)$

$\Longrightarrow\ \bigwedge_{i\in\Gamma}(\lambda_i \longrightarrow \underline{0}) \geq\ \mathcal{C}\left((\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right)$

$\Longrightarrow (\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}\ \geq\ \mathcal{C}\left((\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right)\ \geq (\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}$

$\Longrightarrow (\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0} =\ \mathcal{C}\left((\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right)$

O halde, $\tau_{\mathcal{C}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau_{\mathcal{C}}(\lambda_i)$ dır. Yani, $\tau_{\mathcal{C}}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

(b) ($\Longrightarrow$) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ olsun.

(i) $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(\lambda, r), r) = \bigwedge\{\, \mu \in L^X \mid \mu \geq \mathcal{C}(\lambda, r),\ \tau_{\mathcal{C}}(\mu \longrightarrow \underline{0}) \geq r \,\}$

$\tau_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0}) = \tau_{\mathcal{C}}(\bigwedge\{\, \nu \in L^X \mid \nu \geq \lambda,\ \tau_{\mathcal{C}}(\nu \longrightarrow \underline{0}) \geq r \,\}\ \longrightarrow \underline{0})$

$$= \tau_{\mathcal{C}}\left(\bigvee\left\{\, \nu \longrightarrow \underline{0} \,\middle|\, \nu \geq \lambda,\ \tau_{\mathcal{C}}(\nu \longrightarrow \underline{0}) \geq r \,\right\}\right)$$

$$\geq \bigwedge\left\{\, \tau_{\mathcal{C}}(\nu \longrightarrow \underline{0}) \,\middle|\, \nu \geq \lambda,\ \tau_{\mathcal{C}}(\nu \longrightarrow \underline{0}) \geq r \,\right\}\ \geq r.$$

$\Longrightarrow\ \mathcal{C}(\lambda, r) = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(\lambda, r), r) =\ \mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r)$ dır. Yani, $(X, \mathcal{C})$ topolojiktir.

(ii) $r = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{C}(\lambda, s) = \lambda \,\}$ olsun.

$\mathcal{C}(\lambda, r) = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\lambda, r) = \bigwedge\{\, \mu \in L^X \mid \mu \geq \lambda\,,\ \tau_{\mathcal{C}}(\mu \longrightarrow \underline{0}) \geq r \,\}$

$\tau_{\mathcal{C}}(\lambda \longrightarrow \underline{0}) = \bigvee\{\, s \in M_0 \mid \mathcal{C}(\lambda, s) = \lambda \,\} = r\ \Longrightarrow\ \mathcal{C}(\lambda, r) = \lambda$ elde edilir.

$(\Longleftarrow)$ $\mathcal{C}(\lambda, r) \geq \lambda$ olduğu biliniyor. İddia: $\tau_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r$

$\tau_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0}\big) = \bigvee\{\, r' \in M_0 \mid \mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r') = \mathcal{C}(\lambda, r)\,\}$ dır. $(X, \mathcal{C})$ topolojik olduğundan,

$\tau_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r$ dır. Buradan, $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}(\lambda, r)$ (4.8)

$\mu \geq \lambda$ ve $\tau_{\mathcal{C}}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r$ olan $\forall\, \mu \in L^X$ için $\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mu$ olduğunu gösterelim. (ii) den, $\mathcal{C}\Big(\mu, \tau_{\mathcal{C}}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big)\Big) = \mu$ dır. Ayrıca, $\tau_{\mathcal{C}}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big) \geq r$ olduğundan,

$$\mu = \mathcal{C}\Big(\mu, \tau_{\mathcal{C}}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big)\Big) \geq \mathcal{C}(\mu, r) \geq \mathcal{C}(\lambda, r) \implies \mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\lambda, r) \tag{4.9}$$

$\implies$ (4.8), (4.9) dan $\mathcal{C}(\lambda, r) = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\lambda, r)$ elde edilir.

Örnek 4.2.7: $L = M = I,\ X = \{x, y, z\}$ ve $A \subset X$ olsun.

(a) Eğer bir $(X, \mathcal{C})$ (L,M)-bulanık kapanış uzayı Teorem 4.2.6 (b) (i) koşulunu sağlamıyorsa genel olarak $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ olması gerekmediğini gösterelim.

$\mathcal{C} :\ I^X \times I_0 \longrightarrow I^X$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{C}(\lambda, r) = \begin{cases} \underline{0} & , \quad \lambda = \underline{0}, r \in I_0 \\ \chi_{\{x,y\}} & , \quad \lambda = x_t \in \chi_{\{x,y\}}, 0 < r \leq 1/2 \\ \chi_{\{z\}} & , \quad \lambda = z_s \in \chi_{\{z\}}, 0 < r \leq 1/2 \\ \underline{1} & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Bu takdirde, $(X, \mathcal{C})$ bir (L,M)-bulanık kapanış uzayıdır. Ayrıca, $\mathcal{C}\left(x_t, \frac{1}{3}\right) = \chi_{\{x,y\}}$ ve $\mathcal{C}\left(\chi_{\{x,y\}}, \frac{1}{3}\right) = \underline{1}$ olduğundan $\mathcal{C}\left(\mathcal{C}\left(x_t, \frac{1}{3}\right), \frac{1}{3}\right) \neq \mathcal{C}\left(x_t, \frac{1}{3}\right)$ dır. O halde, $(X, \mathcal{C})$ topolojik değildir.

Teorem 4.2.6 dan, $\tau_{\mathcal{C}}: I^X \longrightarrow I$ (L,M)-bulanık topolojisi aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$\tau_{\mathcal{C}}(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda = \underline{0}, \underline{1} \\ 1/2 & , \quad \lambda = \chi_{\{x,y\}} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

Buradan, $\quad \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\lambda, r) = \begin{cases} \underline{0} & , \qquad \lambda = \underline{0}, r \in I_0 \\ \chi_{\{z\}} & , \ \lambda = z_s \in \chi_{\{z\}}, 0 < r \leq 1/2 \\ \underline{1} & , \qquad \text{diğer} \end{cases}$ $\quad$ dır.

Sonuç olarak, $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ olduğu görülür.

(b) Eğer bir $(X, \mathcal{C})$ (L,M)-bulanık kapanış uzayı Teorem 4.2.6 (b) (ii) koşulunu sağlamıyorsa genel olarak $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ olması gerekmez. Gerçekten, $\mu \in I^X$ ve $\mu \neq \underline{0}, \underline{1}$ için $\mathcal{C} : I^X \times I_0 \longrightarrow I^X$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{C}(\lambda, r) = \begin{cases} \underline{0}, & \lambda = \underline{0}, r \in I_0 \\ \mu, & \lambda \leq \mu, r < 1/2 \\ \underline{1}, & \text{diğer} \end{cases}$$

Buradan, $(X, \mathcal{C})$ bir topolojik (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür. Teorem 4.2.6 dan, $\tau_{\mathcal{C}}: I^X \longrightarrow I$ dönüşümü şöyle belirlenir:

$$\tau_{\mathcal{C}}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = \underline{0}, \underline{1} \\ 1/2, & \lambda = \underline{1} - \mu \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$\forall\, r < \frac{1}{2}$ için $\mathcal{C}(\mu, r) = \mu$ olduğundan $\bigvee\{\, r \in I_0 \mid \mathcal{C}(\mu, r) = \mu \,\} = 1/2$ dır, ancak $\mathcal{C}\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = \underline{1}$ dır. Diğer yandan, $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = \mu$ olduğundan $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ dır. (Kim, 2003)

Teorem 4.2.8: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{C}_\tau, X$ üzerinde τ ile üretilen (L,M)-bulanık kapanış operatörü olsun. Bu takdirde, $\tau_{\mathcal{C}_\tau}$ X üzerinde $\tau = \tau_{\mathcal{C}_\tau}$ eşitliğini sağlayan bir (L,M)-bulanık topolojidir.

İspat: Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.6 dan kolaylıkla elde edilir.

Aşağıdaki Lemma bir (L,M)-bulanık topolojiden üretilen iç ve kapanış operatörleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Lemma 4.2.9: L bir tam MV-cebiri ve τ X üzerinde bir (L,M)-bulanık topoloji olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}_\tau\big(\lambda \longrightarrow \underline{0}, r\big) = \mathcal{I}_\tau(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0}$.

İspat: L tam MV-cebiri olduğundan,

$\bigvee_{i\in\Gamma} a_i \longrightarrow \underline{0} = \bigwedge_{i\in\Gamma}(a_i \longrightarrow \underline{0})$ ve $\left(a \longrightarrow \underline{0}\right) \longrightarrow \underline{0} = a$ sağlanır. Buradan,

$$\mathcal{I}_\tau(\lambda, r) \longrightarrow \underline{0} = \bigvee\{\, \mu \in L^X \mid \mu \leq \lambda,\ \tau(\mu) \geq r\,\} \longrightarrow \underline{0}$$

$$= \bigwedge\left\{\mu \ \longrightarrow \underline{0} \,\middle|\, \mu \leq \lambda,\ \tau(\mu) \geq r\right\}$$

$$= \bigwedge\left\{\mu \ \longrightarrow \underline{0} \,\middle|\, \mu \longrightarrow \underline{0} \geq \lambda \longrightarrow \underline{0},\ \tau\left((\mu \longrightarrow \underline{0}) \longrightarrow \underline{0}\right) \geq r\right\}$$

$$= \bigwedge\{\rho \in L^X \mid \rho \geq \lambda \longrightarrow \underline{0},\ \tau\left(\rho \longrightarrow \underline{0}\right) \geq r\} = \mathcal{C}_\tau\left(\lambda \longrightarrow \underline{0}, r\right).$$

Teorem 4.2.10: L bir tam MV-cebiri ve $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ iki (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-süreklidir.

(b) $\forall\, \mu \in L^Y, r \in M_0$ için $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{\tau_2}(\mu, r)) \leq \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r)$.

(c) $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\varphi^{\rightarrow}(\mathcal{C}_{\tau_1}(\lambda, r)) \leq \mathcal{C}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)$. (Sostak, 1996)

İspat: (a)⟺(b): Teorem 4.1.7 (a).

(b)⟹(c): $\lambda \in L^X, r \in M_0$ alalım. Lemma 4.2.9 dan,

$$\varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)\right) = \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda) \longrightarrow \underline{0}, r) \longrightarrow \underline{0})$$

$$= \varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{I}_{\tau_2}\left(\varphi^{\rightarrow}(\lambda) \longrightarrow \underline{0}, r\right)\right) \longrightarrow \underline{0}$$

$$\geq \mathcal{I}_{\tau_1}\left(\varphi^{\leftarrow}\left(\varphi^{\rightarrow}(\lambda) \longrightarrow \underline{0}\right), r\right) \longrightarrow \underline{0}$$

$$= \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)), r) \longrightarrow \underline{0}$$

$$\geq \mathcal{I}_{\tau_1}\left(\lambda \longrightarrow \underline{0}, r\right) \longrightarrow \underline{0}$$

$$= \mathcal{C}_{\tau_1}((\lambda \longrightarrow \underline{0}) \longrightarrow \underline{0}, r)$$

$$= \mathcal{C}_{\tau_1}(\lambda, r)$$

$\Longrightarrow\ \mathcal{C}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)\ \geq \varphi^{\rightarrow}\left(\varphi^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)\right)\right) \geq \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}_{\tau_1}(\lambda, r)\right)$ elde edilir.

(c)⟹(b): $\mu \in L^Y,\ r \in M_0$ alalım.

$$\mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu),r) \longrightarrow \underline{0} = \mathcal{C}_{\tau_1}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu) \longrightarrow \underline{0},r\big)$$

$$= \mathcal{C}_{\tau_1}\big(\varphi^{\leftarrow}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big),r\big)$$

$$\leq \varphi^{\leftarrow}\Big(\varphi^{\rightarrow}\Big(\mathcal{C}_{\tau_1}\big(\varphi^{\leftarrow}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big),r\big)\Big)\Big)$$

$$\leq \varphi^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_{\tau_2}\Big(\varphi^{\rightarrow}\Big(\varphi^{\leftarrow}\big(\mu \longrightarrow \underline{0}\big)\Big),r\Big)\Big)$$

$$\leq \varphi^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_{\tau_2}\big(\mu \longrightarrow \underline{0},r\big)\Big)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu),r) \geq\ \varphi^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_{\tau_2}\big(\mu \longrightarrow \underline{0},r\big)\Big) \longrightarrow \underline{0}$$

$$= \varphi^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_{\tau_2}\big(\mu \longrightarrow \underline{0},r\big) \longrightarrow \underline{0}\big)$$

$$= \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{\tau_2}(\mu,r)).$$

$\Longrightarrow \forall\ \mu \in L^Y, r \in M_0$ için $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{\tau_2}(\mu,r)) \leq \mathcal{I}_{\tau_1}(\varphi^{\leftarrow}(\mu),r)$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem; verilen kapanış operatörleri ve fonksiyonlar ailesi yardımıyla başlangıç kapanış operatörü üretildiğini ifade etmektedir.

Teorem 4.2.11: L bir tam MV-cebiri, M idempotent, $\{(X_i,\mathcal{C}_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık kapanış uzaylarının bir ailesi, X boştan farklı klasik bir küme ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i\colon X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. X kümesi üzerinde

$$\mathcal{C}(\lambda,r) = \bigwedge\Big\{ \oplus_{j=1}^{p} \Big(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i{}^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_i\big(\varphi_i{}^{\rightarrow}(\lambda_j),r\big)\Big)\Big)\Big\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}\colon L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır. (Burada, ilk infimum $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j\ \}$ üzerinden alınmaktadır.)

(a) $\mathcal{C}$ dönüşümü her $i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonlarını bulanık LC-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür.

(b) $\forall\ i \in \Gamma$ için $\mathcal{C}_i$ (L,M)-bulanık kapanış operatörleri topolojik ise $\mathcal{C}$ de topolojiktir.

(c) $\varphi : (Y, \mathcal{C}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{C})$ fonksiyonu bir bulanık LC-dönüşümüdür $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i \circ \varphi : (Y, \mathcal{C}^*) \longrightarrow (X_i, \mathcal{C}_i)$ bir bulanık LC-dönüşümüdür.

İspat: (a) Öncelikle $\mathcal{C}$ nin X üzerinde bir (L,M)-bulanık kapanış operatörü olduğunu gösterelim.

(C1) ve (C4) tanımdan kolaylıkla görülür.

(C2) Tüm sonlu $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j \}$ ailesi ve her $i \in \Gamma$ için

$$\lambda_j \leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j)\right) \leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\right)\right) \text{ dır.}$$

Böylece, $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}(\lambda, r) \geq \lambda$ sağlanır.

(C3) $\lambda, \mu \in L^X$ için $\lambda \leq \mu$ olsun. Her sonlu $\{\mu_k \mid \mu = \bigvee_{k=1}^{q} \mu_k \}$ ailesi için en az bir $\{\lambda \wedge \mu_k \mid \lambda = \bigvee_{k=1}^{q} (\lambda \wedge \mu_k)\}$ ailesi vardır öyle ki,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda, r) &\leq \bigoplus_{k=1}^{q} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda \wedge \mu_k), r)\right)\right)\\ &\leq \bigoplus_{k=1}^{q} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu_k), r)\right)\right)\end{aligned}$$

Böylece, $\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \mathcal{C}(\mu, r)$ elde edilir.

(C5) Her sonlu $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j \}$ ve $\{\mu_k \mid \mu = \bigvee_{k=1}^{q} \mu_k \}$ ailesi için en az bir sonlu $\{\lambda_j, \mu_k \mid \lambda \oplus \mu = (\bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j) \oplus (\bigvee_{k=1}^{q} \mu_k)\}$ ailesi vardır öyle ki,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda \oplus \mu, r \odot s) \leq &\left(\bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\right)\right)\right)\right)\\ &\oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{q} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu_k), s)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$\rho = \left(\bigoplus_{k=1}^{q} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu_k), s)\right)\right)\right)$ diyelim. L, M tam dağılımlı tam latis ise

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda \oplus \mu, r \odot s) &\leq \bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\right)\right)\right) \oplus \rho\right)\\ &= \left(\bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\right)\right)\right)\right)\right) \oplus \rho\\ &= \mathcal{C}(\lambda, r) \oplus \rho.\end{aligned}$$

Burada ilk infimum tüm sonlu $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j \}$ ailesi üzerinden alınmaktadır. Tekrar, $\mathcal{C}(\lambda \oplus \mu, r \odot s) \leq \wedge(\mathcal{C}(\lambda, r) \oplus \rho)$

$$= \mathcal{C}(\lambda, r) \oplus \left(\wedge\left(\oplus_{k=1}^{q} \left(\wedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu_k), s)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \mathcal{C}(\lambda, r) \oplus \mathcal{C}(\mu, s).$$

Burada ilk infimum tüm sonlu $\{\mu_k \mid \mu = \bigvee_{k=1}^{q} \mu_k \}$ ailesi üzerinden alınmaktadır. Böylece, $\mathcal{C}$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür.

İkinci olarak $\mathcal{C}$ nin tanımından, $\{ \lambda \mid \lambda = \lambda \}$ ailesi için

$\mathcal{C}(\lambda, r) \leq \wedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)\right) \leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)\right)$ dır.

$\Longrightarrow \varphi_i^{\rightarrow}(\mathcal{C}(\lambda, r)) \leq \varphi_i^{\rightarrow}\left(\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)\right)\right) \leq \mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)$ dır.

Böylece, her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: (X, \mathcal{C}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{C}_i)$ bir bulanık LC-dönüşümdür.

Şimdi ise, bu $\mathcal{C}$ kapanış operatörünün $\forall\, i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonlarını bulanık LC-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık kapanış operatörü olduğunu gösterelim. $\mathcal{C}^*$ X üzerinde $\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i: (X, \mathcal{C}^*) \longrightarrow (X_i, \mathcal{C}_i)$ fonksiyonunu bulanık LC-dönüşümü yapan bir (L,M)-bulanık kapanış operatörü olsun. Buradan,

$\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi_i^{\rightarrow}(\mathcal{C}^*(\lambda, r)) \leq \mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)$.

$\Longrightarrow \mathcal{C}^*(\lambda, r) \leq \varphi_i^{\leftarrow}(\varphi_i^{\rightarrow}(\mathcal{C}^*(\lambda, r))) \leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)\right)$

Buradan, $\mathcal{C}^*(\lambda, r) \leq \wedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda), r)\right)$ (4.10)

Tüm sonlu $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j \}$ ailesi için,

$$\mathcal{C}(\lambda, r) = \wedge\left\{ \oplus_{j=1}^{p} \left(\wedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\right)\right)\right)\right\}$$

$$\geq \wedge\left\{ \oplus_{j=1}^{p} \left(\mathcal{C}^*(\lambda_j, r)\right)\right\} \qquad \text{((4.10) dan)}$$

$$\geq \wedge\left\{ \mathcal{C}^*(\oplus_{j=1}^{p} \lambda_j, r)\right\} \qquad \text{((C4) ve M idempotent)}$$

$$\geq \wedge\left\{ \mathcal{C}^*(\bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j, r)\right\} = \mathcal{C}^*(\lambda, r). \qquad \text{((C3) den)}$$

(b) $\forall\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r) \leq \mathcal{C}(\lambda, r)$ olduğunu gösterelim. Tüm sonlu $\{\lambda_j \mid \lambda = \bigvee_{j=1}^{p} \lambda_j \}$ ailesi için,

$$\mathcal{C}(\lambda, r) = \bigwedge\left\{ \bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\big(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\big)\right)\right)\right\}$$

$$= \bigwedge\left\{ \bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\big(\mathcal{C}_i\big(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j), r\big), r\big)\right)\right)\right\}$$

$$\geq \bigwedge\left\{ \bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\big(\varphi_i^{\rightarrow}(\mathcal{C}_i(\lambda_j, r)), r\big)\right)\right)\right\} \geq \mathcal{C}(\mathcal{C}(\lambda, r), r).$$

(c) Bulanık LC-dönüşümlerin bileşkesi bulanık LC-dönüşümü olduğundan gerek koşul açıktır.

Tersine, $\varphi_i \circ \varphi$ bir bulanık LC-dönüşümü olduğundan, $\forall\, \mu \in L^X$ için

$$\varphi_i^{\rightarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\mathcal{C}^*(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r))) \leq \mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}\left(\varphi^{\rightarrow}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)\right), r\right) \leq \mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu), r).$$

$\forall\, i \in \Gamma$ için $\varphi^{\rightarrow}(\mathcal{C}^*(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r)) \leq \varphi_i^{\leftarrow}(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu), r)$.

Buradan, $\varphi^{\rightarrow}(\mathcal{C}^*(\varphi^{\leftarrow}(\mu), r)) \leq \bigwedge_{i\in\Gamma}\big(\varphi_i^{\leftarrow}(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu), r))\big)$ (4.11)

Her sonlu $\{ \mu_j \mid \varphi^{\rightarrow}(\lambda) = \bigvee_{j=1}^{p} \mu_j \}$ ailesi için,

$$\varphi^{\rightarrow}\big(\mathcal{C}^*(\lambda, r)\big) \leq \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}^*\big(\varphi^{\leftarrow}\big(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)\big), r\big)\right)$$

$$= \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}^*\big(\varphi^{\leftarrow}\big(\textstyle\bigvee_{j=1}^{p} \mu_j\big), r\big)\right)$$

$$\leq \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}^*\big(\varphi^{\leftarrow}\big(\textstyle\bigoplus_{j=1}^{p} \mu_j\big), r\big)\right)$$

$$= \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}^*\big(\textstyle\bigoplus_{j=1}^{p} \varphi^{\leftarrow}(\mu_j), r\big)\right)$$

$$\leq \varphi^{\rightarrow}\left(\textstyle\bigoplus_{j=1}^{p} (\mathcal{C}^*\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_j), r\big))\right)$$

$$\leq \bigoplus_{j=1}^{p} \varphi^{\rightarrow}\left(\mathcal{C}^*\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_j), r\big)\right)$$

$$\leq \bigoplus_{j=1}^{p} \left(\bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\big(\varphi_i^{\rightarrow}(\mu_j), r\big)\right)\right).$$

Böylece, $\forall\, \lambda \in L^Y, r \in M_0$ için $\varphi^{\rightarrow}\big(\mathcal{C}^*(\lambda, r)\big) \leq \mathcal{C}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda), r)$ elde edilir. Yani, $\varphi : (Y, \mathcal{C}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{C})$ fonksiyonu bir bulanık LC-dönüşümüdür.

Objeleri (L,M)-bulanık kapanış uzayları ve morfizmleri de bulanık LC-dönüşümler olan kategori (L,M)-BC ile gösterilir.

Teorem 4.2.12: (L,M)-BC kategorisi unutkan funktora göre SET kategorisi üzerine topolojik bir kategoridir.

İspat: Teorem 4.2.11 den açıktır.

Tanım 4.2.13: L bir tam MV-cebiri, M idempotent, $\{(X_i, \mathcal{C}_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık kapanış uzaylarının bir ailesi, X boştan farklı klasik bir küme ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. Teorem 4.2.11 de oluşturulan ve her $i \in \Gamma$ için φ_i fonksiyonunu bulanık LC-dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık kapanış operatörüne $(X, \varphi_i, (X_i, \mathcal{C}_i), \Gamma)$ dörtlüsüne göre bir başlangıç (L,M)-bulanık kapanış operatörü denir.

Tanım 4.2.14: $\{(X_i, \mathcal{C}_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık kapanış uzaylarının bir ailesi, $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ kartezyen çarpım kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Her bir p_i izdüşüm fonksiyonunu bulanık LC-dönüşümü yapan X üzerindeki başlangıç (L,M)-bulanık kapanış operatörüne $\{(X_i, \mathcal{C}_i)\}_{i\in\Gamma}$ ailesinin çarpım (L,M)-bulanık kapanış operatörü denir.

Teorem 4.2.15: L, M tam sıralı ve M idempotent olsun. $\{(X_i, \mathcal{C}_i)\}_{i\in\{1,2\}}$ (L,M)-bulanık kapanış uzaylarının ailesi, X bir küme ve $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olmak üzere her $\lambda \in L^X$ ve $r \in M_0$ için

$$\mathcal{C}^{\lhd}(\lambda, r) = \bigwedge\Big\{ \oplus_{j=1}^{2} \Big(\varphi_1{}^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_1\big(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\lambda_j), r\big)\Big) \wedge \varphi_2{}^{\leftarrow}\Big(\mathcal{C}_2\big(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\lambda_j), r\big)\Big)\Big) \Big\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}^{\lhd} : L^X \times M_0 \longrightarrow L^X$ dönüşümü X üzerinde $(X, \varphi_i, (X_i, \mathcal{C}_i), \{1, 2\})$ dörtlüsüne göre başlangıç (L,M)-bulanık kapanış operatörüdür.

(Burada, ilk infimum tüm $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ öyle ki $\lambda = \lambda_1 \vee \lambda_2$ ailesi üzerinden alınmaktadır.)

İspat: $\mathcal{C},\ X$ üzerinde $(X, \varphi_i, (X_i, \mathcal{C}_i), \{1,2\})$ dörtlüsüne göre başlangıç (L,M)-bulanık kapanış operatörü olsun. $\mathcal{C}^{\lhd} = \mathcal{C}$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{C}$ nin tanımından $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}^{\lhd}$ olduğu kolaylıkla ispatlanır. Tersine,

Varsayım, $\exists\, \lambda \in L^X, r \in M_0$ için $\mathcal{C}^{\lhd}(\lambda, r) \nleq \mathcal{C}(\lambda, r)$ olsun. L, M tam sıralı olduğundan,

$\exists\, x \in X :\ \mathcal{C}^{\lhd}(\lambda, r)(x) > \mathcal{C}(\lambda, r)(x).$

$\mathcal{C}$ nin tanımından, $\exists\, K = \{1, \dots, q\}$ sonlu indeks kümesi için $\{\, \lambda_k \mid \lambda = \bigvee_{k \in K} \lambda_k\} :$

$$\mathcal{C}^{\lhd}(\lambda, r)(x) > \bigoplus_{k=1}^{q} \left(\varphi_1{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_1(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x) \wedge \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\,\lambda_k), r)\big)(x)\right)$$

$J = \{\, k \in K \mid \varphi_1{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_1(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x) \leq \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x)\}$ ve $H = K - J$ diyelim,

$$\bigoplus_{k=1}^{q} \left(\varphi_1{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_1(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x) \wedge \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x)\right)$$
$$= \left(\bigoplus_{k \in J} \varphi_1{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_1(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x)\right) \oplus \left(\bigoplus_{k \in H} \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\lambda_k), r)\big)(x)\right)$$

$$\geq \varphi_1{}^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_1\big(\varphi_1{}^{\rightarrow}\big(\bigoplus_{k \in J} \lambda_k\big), r\big)\right)(x) \oplus \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\bigoplus_{k \in H} \lambda_k), r)\big)(x)$$

$$\geq \varphi_1{}^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_1\big(\varphi_1{}^{\rightarrow}\big(\bigvee_{k \in J} \lambda_k\big), r\big)\right)(x) \oplus \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\bigvee_{k \in H} \lambda_k), r)\big)(x).$$

Diğer yandan, $\lambda_J = \bigvee_{k \in J} \lambda_k$ ve $\lambda_H = \bigvee_{k \in H} \lambda_k$ olsun. O halde,

$\exists \left\{\, \lambda_J,\ \lambda_H \right\} :\ \lambda = \lambda_J \vee \lambda_H$ ve

$$\mathcal{C}^{\lhd}(\lambda, r) \leq \left(\varphi_1{}^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_1\big(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\,\lambda_J), r\big)\right) \wedge \varphi_2{}^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_2\big(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\,\lambda_J\,), r\big)\right)\right)$$
$$\oplus \left(\varphi_1{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_1(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\,\lambda_H), r)\big) \wedge \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\,\lambda_H\,), r)\big)\right)$$
$$\leq \varphi_1{}^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_1\big(\varphi_1{}^{\rightarrow}(\,\lambda_J), r\big)\right) \oplus \varphi_2{}^{\leftarrow}\big(\mathcal{C}_2(\varphi_2{}^{\rightarrow}(\,\lambda_H\,), r)\big)\,.$$

Bu ise bir çelişkidir. O halde, varsayım yanlıştır. Yani, $\mathcal{C}^{\lhd} \leq \mathcal{C}$ sağlanır.

Aşağıdaki teorem verilen topolojiler yardımıyla oluşturulan başlangıç (L,M)-bulanık topoloji ile verilen topolojilerin ürettiği (L,M)-bulanık kapanış operatörlerinden elde edilen başlangıç (L,M)-bulanık kapanış operatörünün ürettiği topolojinin aynı olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 4.2.16: L bir tam MV-cebiri, M idempotent ve $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık topolojik uzayların bir ailesi ve her $i\in\Gamma$ için $\varphi_i\colon X\longrightarrow X_i$ bir fonksiyon olsun. X üzerinde

$$\mathcal{C}(\lambda,r)=\bigwedge\left\{\bigoplus_{j=1}^{p}\left(\bigwedge_{i\in\Gamma}\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\lambda_j),r\right)\right)\right)\right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}\colon L^X\times M_0\longrightarrow L^X$ dönüşümü için $\tau_{\mathcal{B}}=\tau_{\mathcal{C}}$ sağlanır.

(Burada, infimum $\left\{\lambda_j \,\middle|\, \lambda=\bigvee_{j=1}^{p}\lambda_j\right\}$ üzerinden alınmaktadır ve $\mathcal{C}_i$ ler Teorem 4.2.4 de τ_i lerden üretilen (L,M)-bulanık kapanış operatörleridir. Ayrıca, $\tau_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}$ ile üretilen (L,M)-bulanık topoloji ve $\tau_{\mathcal{B}}$ ise Teorem 3.2.4 de oluşturulan (L,M)-bulanık topolojidir.)

İspat: Varsayım, $\exists\,\lambda\in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda)\ngeq\tau_{\mathcal{C}}(\lambda)$ olsun. $\tau_{\mathcal{C}}$ nin tanımından, $\exists\, r\in M_0$: $\mathcal{C}\left(\lambda\longrightarrow\underline{0},r\right)=\lambda\longrightarrow\underline{0}$ ve $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda)\ngeq r$ dır. $\mathcal{C}\left(\lambda\longrightarrow\underline{0},r\right)=\lambda\longrightarrow\underline{0}$ olduğundan $\lambda=\mathcal{C}\left(\lambda\longrightarrow\underline{0},r\right)\longrightarrow\underline{0}$

$$=\left(\bigwedge\left\{\bigoplus_{j=1}^{p}\left(\bigwedge_{i\in\Gamma}\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)\right)\right)\right\}\right)\longrightarrow\underline{0}$$

$$=\bigvee\left\{\bigodot_{j=1}^{p}\left\{\bigwedge_{i\in\Gamma}\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)\right)\right\}\longrightarrow\underline{0}\right\}$$

$$=\bigvee\left\{\bigodot_{j=1}^{p}\left\{\bigvee_{i\in\Gamma}\left\{\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)\right)\right\}\longrightarrow\underline{0}\right\}\right\}$$

$$=\bigvee\left\{\bigodot_{j=1}^{p}\left\{\bigvee_{i\in\Gamma}\left\{\varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)\right)\longrightarrow\underline{0}\right\}\right\}\right\}$$

$$=\bigvee\{\bigodot_{j=1}^{p}\{\bigvee_{i\in\Gamma}\{\varphi_i^{\leftarrow}(\mathcal{C}_i(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r)\longrightarrow\underline{0})\}\}\}$$

Burada ilk supremum tüm sonlu $\left\{\nu_j \,\middle|\, \lambda\longrightarrow\underline{0}=\bigvee_{j=1}^{p}\nu_j\right\}$ üzerinden alınmaktadır. $\forall\, i\in\Gamma$, $\mathrm{j}\in\{1,2,\dots,p\}$ için $\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)=\mathcal{C}_i\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right),r\right)$ olduğu ve $\tau_i=\tau_{\mathcal{C}_i}$ olduğu kullanılırsa

$$\tau_i\left(\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j),r\right)\right)\longrightarrow\underline{0}\right)\geq r.$$

$\mu_{i_j} = \varphi_i^{\leftarrow}\left(\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j), r\right)\right) \longrightarrow \underline{0}\right)$ diyelim.

$\mathcal{B}(\mu_{i_j}) \geq \tau_i\left(\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\nu_j), r\right)\right) \longrightarrow \underline{0}\right) \geq r$ dır. $\tau_{\mathcal{B}}$ nin tanımından,

$\tau_{\mathcal{B}}\left(\bigvee_{i\in\Gamma} \mu_{i_j}\right) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{B}(\mu_{i_j}) \geq r$ sağlanır.

Böylece, $\tau_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq r$ dır. Bu ise çelişkidir. O halde, $\forall\, \mu \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\mu) \geq \tau_{\mathcal{C}}(\mu)$. Tersine, $\forall\, \mu \in L^X$ için $\tau_{\mathcal{B}}(\mu) \leq \tau_{\mathcal{C}}(\mu)$ olduğunu ya da buna denk olarak $id_X : (X, \tau_{\mathcal{C}}) \longrightarrow (X, \tau_{\mathcal{B}})$ fonksiyonunun LB-sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için Teorem 3.2.4 (c) den sadece $\varphi_i \circ id_X : (X, \tau_{\mathcal{C}}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ dönüşümünün LB-sürekli olduğunu yani $\forall\, \nu_i \in L^{X_i}$ için $\tau_i(\nu_i) \leq \tau_{\mathcal{C}}(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i))$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer $\forall\, r \in M_0$ için $r \leq \tau_i(\nu_i)$ ise $\mathcal{C}_i\left(\nu_i \longrightarrow \underline{0}, r\right) = \nu_i \longrightarrow \underline{0}$ (4.12)

$\mathcal{C}$ nin tanımından, $\mathcal{C}\left(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right) \leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i) \longrightarrow \underline{0}), r\right)\right)$

$$= \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\varphi_i^{\rightarrow}\left(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i \longrightarrow \underline{0})\right), r\right)\right)$$

$$\leq \varphi_i^{\leftarrow}\left(\mathcal{C}_i\left(\nu_i \longrightarrow \underline{0}, r\right)\right) \qquad \text{((4.12) den)}$$

$$= \varphi_i^{\leftarrow}\left(\nu_i \longrightarrow \underline{0}\right) = \varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i) \longrightarrow \underline{0}.$$

Tanım 4.2.1 (C2) den, $\mathcal{C}\left(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i) \longrightarrow \underline{0}, r\right) = \varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i) \longrightarrow \underline{0}$ dır. O halde, Teorem 4.2.6 dan, $\tau_{\mathcal{C}}\left(\varphi_i^{\leftarrow}(\nu_i)\right) \geq r$ bulunur. Bu ise ispatı bitirir.

5. (L, M)-BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK

Bu bölümde, L bir tam dağılımlı latis ve M bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latis olmak üzere (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda bir bulanık noktanın Q-komşuluk sistemi tanıtılacaktır. (L,M)-bulanık filtre tanımı verildikten sonra çarpım kümesi üzerinde (L,M)-bulanık filtre yapısı oluşturulacaktır. Her (L,M)-bulanık filtrenin bir (L,M)-bulanık topoloji ürettiği ispatlanacaktır. Ayrıca, (L,M)-bulanık topolojik uzaylarda (L,M)-bulanık filtrelerin yakınsaklığı da bu bölümde incelenecektir.

5.1. (L, M)-Bulanık Q – Komşuluk Uzayları

Bu bölümde, L bir tam dağılımlı tam latisi ve M ise bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisi ifade edecektir.

Tanım 5.1.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, $\mathcal{Q}_{x_t} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümlerinin $\mathcal{Q} = \left\{ \mathcal{Q}_{x_t} \middle| \, x_t \in M(L^X) \right\}$ ailesine X üzerinde bir (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi denir :⟺ $\forall \, \lambda, \mu \in L^X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(KS1) $\mathcal{Q}_{x_t}(\underline{0}) = 0_M, \, \mathcal{Q}_{x_t}(\underline{1}) = 1_M,$

(KS2) $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) > 0_M$ ise $x_t q \lambda,$

(KS3) $\lambda \leq \mu$ ise $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \leq \mathcal{Q}_{x_t}(\mu),$

(KS4) $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda \wedge \mu) \geq \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \odot \mathcal{Q}_{x_t}(\mu),$

(KS5) $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) = \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}_{y_s}(\mu).$

(X, Q) ikilisine de bir (L,M)-bulanık Q-komşuluk uzayı adı verilir. (Burada, $Q_{x_t}(\lambda)$ değeri $\lambda \in L^X$ bulanık kümesinin $x_t \in M(L^X)$ bulanık noktasının hangi dereceden Q-komşuluğu olduğunu ifade etmektedir.) (Hussein, 2006)

Uyarı 5.1.2: (1) $L = M$ ve $\odot=\wedge$ olarak alınırsa Tanım 5.1.1 ile Jinming (2006) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) $L = M = I$ ve $\odot=\wedge$ olarak alınırsa Tanım 5.1.1 ile Demirci (1997) tarafından verilen tanım çakışır.

Tanım 5.1.3: (X, Q_1) ve (Y, Q_2) iki (L,M)-bulanık Q-komşuluk uzayı ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonuna bir bulanık KS-dönüşümü denir $:\Leftrightarrow$

$\forall\ \mu \in L^Y, x_t \in M(L^X)$ için $(Q_1)_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq (Q_2)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu)$ sağlanır.

Objeleri (L,M)-bulanık Q-komşuluk uzayları ve morfizmleri de bulanık KS-dönüşümleri olan kategori (L,M)-BKS ile gösterilir. (Hussein, 2006)

Teorem 5.1.4: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $x_t \in M(L^X)$ olmak üzere X kümesi üzerinde

$$Q_{x_t}^{\tau}(\lambda) = \begin{cases} \vee\{\ \tau(\mu) |\ x_t q \mu \leq \lambda\}, & x_t q \lambda \\ 0_M, & x_t \not{q} \lambda \end{cases}$$

olarak tanımlanan $Q_{x_t}^{\tau}: L^X \longrightarrow M$ dönüşümleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $Q^{\tau} = \left\{ Q_{x_t}^{\tau} \,\middle|\, x_t \in M(L^X) \right\}$ ailesi X üzerinde bir (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemidir.

(b) $t, s \in M(L)$ için $t < s$ ise $Q_{x_t}^{\tau}(\lambda) \leq Q_{x_s}^{\tau}(\lambda)$. (Hussein, 2006)

İspat: (a) (KS1) $Q_{x_t}(\underline{0}) = 0_M, Q_{x_t}(\underline{1}) = 1_M$ olduğu tanımdan açıktır.

(KS2) Tanımdan $Q_{x_t}^{\tau}(\lambda) > 0_M$ ise $x_t q \lambda$ olduğu açıktır.

(KS3) $x_t \in M(L^X), \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2$ olsun.

Eğer $x_t \not{q} \lambda_1$ ise açıktır.

Eğer $x_t q \lambda_1$ ise $x_t q \lambda_2$ dır. Buradan,

$\{\, \nu \in L^X \mid x_t q \nu \leq \lambda_1 \,\} \subseteq \{\, \rho \in L^X \mid x_t q \rho \leq \lambda_2 \,\}$ olduğundan, $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1) \leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_2)$ dır.

(KS4) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ ve $x_t \in M(L^X)$ alalım.

Eğer $x_t \not{q} \lambda_1$ veya $x_t \not{q} \lambda_2$ ise $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1) = 0_M$ veya $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_2) = 0_M$ dır. Bu durumda, $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1) \odot \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_2) = 0_M$ olacağından $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1) \odot \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_2)$.

Eğer $x_t q \lambda_1$ ve $x_t q \lambda_2$ ise $x_t q(\lambda_1 \wedge \lambda_2)$ sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1) \odot \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_2) &= \left(\bigvee_{x_t q \mu_1 \leq \lambda_1} \tau(\mu_1)\right) \odot \left(\bigvee_{x_t q \mu_2 \leq \lambda_2} \tau(\mu_2)\right) \\
&= \bigvee\{\, \tau(\mu_1) \odot \tau(\mu_2) \mid x_t q \mu_1 \leq \lambda_1, x_t q \mu_2 \leq \lambda_2 \,\} \\
&\leq \bigvee\{\, \tau(\mu_1 \wedge \mu_2) \mid x_t q(\mu_1 \wedge \mu_2) \leq \lambda_1 \wedge \lambda_2 \,\} \\
&\leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2)
\end{aligned}$$

(KS5) $\forall\, y_s q \mu$ için $\mathcal{Q}^{\tau}_{y_s}(\mu) = \bigvee\{\, \tau(\nu) \mid y_s q \nu \leq \mu \,\} \geq \tau(\mu)$

$x_t q \mu \leq \lambda$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in L^X$ için

$$\tau(\mu) \leq \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}^{\tau}_{y_s}(\mu) \leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\mu) \leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda)$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda) = \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \tau(\mu) \leq \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}^{\tau}_{y_s}(\mu) \leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda)$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda) = \bigvee_{x_t q \mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q \mu} \mathcal{Q}^{\tau}_{y_s}(\mu).$$

(b) $t, s \in M(L)$ için $t < s$ ve $\lambda \in L^X$ olsun. $x_t q \mu$ ise $x_s q \mu$ olacaktır. O halde,

$\{\, \mu \in L^X \mid x_t q \mu \leq \lambda \,\} \subseteq \{\, \mu \in L^X \mid x_s q \mu \leq \lambda \,\} \Longrightarrow \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda) \leq \mathcal{Q}^{\tau}_{x_s}(\lambda)$ elde edilir.

Örnek 5.1.5: $X = \{x, y\}$ bir küme, $L = M = [0,1]$ ve M üzerinde $\odot$ işlemi $a \odot b \coloneqq maks\{a + b - 1, 0\}$ olsun. Bu durumda, $(I, \leq, \odot)$ bir kesin iki-yanlı, değişmeli q-latisdir. $\mu, \rho \in I^X$ bulanık kümeleri de aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$\mu(x) = 0.6,\ \mu(y) = 0.3,\ \rho(x) = 0.5,\ \rho(y) = 0.7$.

$\tau : I^X \longrightarrow I$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \{\underline{0}, \underline{1}\} \\ 0.8, & \lambda = \mu \\ 0.3, & \lambda = \rho \\ 0.7, & \lambda = \mu \vee \rho \\ 0.2, & \lambda = \mu \wedge \rho \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Bu takdirde, $\mathcal{Q}^{\tau}_{x_{0.5}} : I^X \longrightarrow I$ aşağıdaki şekilde belirlidir.

$$\mathcal{Q}^{\tau}_{x_{0.5}}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = \underline{1} \\ 0.8, & \mu \leq \lambda \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}.$$

Teorem 5.1.6: $\mathcal{Q} = \{ \mathcal{Q}_{x_t} \mid x_t \in M(L^X) \}$ Tanım 5.1.1 deki (KS1)-(KS4) özelliklerini sağlayan $\mathcal{Q}_{x_t} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümlerinin bir ailesi olmak üzere X üzerinde

$$\tau^{\mathcal{Q}}(\lambda) = \begin{cases} \wedge\{\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \mid x_t q \lambda\}, & \lambda \neq \underline{0} \\ 1_M, & \lambda = \underline{0} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau^{\mathcal{Q}} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) $\tau^{\mathcal{Q}}$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

(b) Eğer $\mathcal{Q} = \{ \mathcal{Q}_{x_t} \mid x_t \in M(L^X) \}$ ailesi X üzerinde bir (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi ise her $x_t \in M(L^X)$ için ${\mathcal{Q}_{x_t}}^{\tau^{\mathcal{Q}}} = \mathcal{Q}_{x_t}$ dır.

(c) Eğer $\mathcal{Q}_1$ ve $\mathcal{Q}_2$, $\tau^{\mathcal{Q}_1} = \tau^{\mathcal{Q}_2}$ olacak şekilde X üzerinde iki (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi ise $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$ dır. (Hussein, 2006)

İspat: (a) (BT1) $\tau^{\mathcal{Q}}(\underline{0}) = \tau^{\mathcal{Q}}(\underline{1}) = 1_M$ olduğu açıktır.

(BT2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım. $\lambda \wedge \mu = \underline{0}$ ise $\tau^{\mathcal{Q}}(\lambda \wedge \mu) = 1_M \geq \tau^{\mathcal{Q}}(\lambda) \odot \tau^{\mathcal{Q}}(\mu)$.

$\lambda \wedge \mu \neq \underline{0}$ ise $\lambda, \mu \neq \underline{0}$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} \tau^{\mathcal{Q}}(\lambda \wedge \mu) &= \wedge\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda \wedge \mu) \mid x_t q(\lambda \wedge \mu)\} \\ &\geq \wedge\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \odot \mathcal{Q}_{x_t}(\mu) \mid x_t q(\lambda \wedge \mu)\} \\ &\geq \left(\wedge\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \mid x_t q(\lambda \wedge \mu)\}\right) \odot \left(\wedge\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\mu) \mid x_t q(\lambda \wedge \mu)\}\right) \end{aligned}$$

$\geq \left(\bigwedge\left\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda) \mid x_t q\lambda \right\}\right) \odot \left(\bigwedge\left\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\mu) \middle| x_t q\mu \right\}\right)$

$= \tau^{\mathcal{Q}}(\lambda) \odot \tau^{\mathcal{Q}}(\mu).$

(BT3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq L^X$ alalım.

$\tau^{\mathcal{Q}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = \bigwedge\left\{ \mathcal{Q}_{x_t}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \middle| x_t q(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \right\}$

$\geq \bigwedge\left\{ \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda_i) \mid x_t q\lambda_i \right\}$

$\geq \bigwedge_{i\in\Gamma}\{ \bigwedge \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda_i) \mid x_t q\lambda_i \} = \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau^{\mathcal{Q}}(\lambda_i).$

(b) $\mathcal{Q} = \left\{ \mathcal{Q}_{x_t} \middle| x_t \in M(L^X) \right\}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi olsun. $\lambda \in L^X$ ve $x_t \in M(L^X)$ alalım.

$\mathcal{Q}_{x_t}{}^{\tau^{\mathcal{Q}}}(\lambda) = \bigvee\{\tau^{\mathcal{Q}}(\mu) \middle| x_t q\mu \leq \lambda\}$

$= \bigvee_{x_t q\mu \leq \lambda} \bigwedge_{y_s q\mu} \mathcal{Q}_{y_s}(\mu)$

$= \mathcal{Q}_{x_t}(\lambda).$

$\Longrightarrow \ \forall\, x_t \in M(L^X)$ için $\mathcal{Q}_{x_t}{}^{\tau^{\mathcal{Q}}} = \mathcal{Q}_{x_t}$ sağlanır.

(c) $\tau^{\mathcal{Q}_1} = \tau^{\mathcal{Q}_2}$ olsun. $\lambda \in L^X$ ve $x_t \in M(L^X)$ alalım.

$(\mathcal{Q}_1)_{x_t}(\lambda) = \bigvee\left\{ \bigwedge(\mathcal{Q}_1)_{y_s}(\mu) \mid y_s q\mu \right\} \mid x_t q\mu \leq \lambda\right\}$

$= \bigvee\{\tau^{\mathcal{Q}_1}(\mu) \middle| x_t q\mu \leq \lambda\}$

$= \bigvee\{\tau^{\mathcal{Q}_2}(\mu) \middle| x_t q\mu \leq \lambda\}$

$= \bigvee\left\{ \bigwedge(\mathcal{Q}_2)_{y_s}(\mu) \mid y_s q\mu \right\} \mid x_t q\mu \leq \lambda\right\} = (\mathcal{Q}_2)_{x_t}(\lambda).$

Teorem 5.1.7: (X,τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{Q}^\tau$ ise Teorem 5.1.4 de τ ile üretilen (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi olsun. Bu takdirde, $\tau^{\mathcal{Q}^\tau} = \tau$ sağlanır. (Jinming, 2006)

İspat: $\forall\, x_t q\lambda$ için $\mathcal{Q}^\tau_{x_t}(\lambda) = \bigvee\{ \tau(\mu) \mid x_t q\mu \leq \lambda \} \geq \tau(\lambda)$

$\Longrightarrow \ \tau^{\mathcal{Q}^\tau}(\lambda) = \bigwedge_{x_t q\lambda} \mathcal{Q}^\tau_{x_t}(\lambda) \geq \tau(\lambda) \Longrightarrow \ \tau^{\mathcal{Q}^\tau} \geq \tau.$

Tersine, $\tau^{\mathcal{Q}^{\tau}} \leq \tau$ olduğunu gösterelim.

$$\bigwedge_{x_t q\lambda} \mathcal{Q}^{\tau}_{x_t}(\lambda) = \bigwedge_{x_t q\lambda} \bigvee_{x_t q\mu \leq \lambda} \tau(\mu)$$

$$= \bigvee_{f \in \prod_{x_t q\lambda} B(x_t)} \bigwedge_{x_t q\lambda} \tau(f(x_t)) \qquad \text{((CD) özelliğinden)}$$

$$\leq \bigvee_{f \in \prod_{x_t q\lambda} B(x_t)} \tau\left(\bigvee_{x_t q\lambda} f(x_t)\right) = \tau(\lambda)$$

Burada, $B(x_t) = \{ \mu \in L^X |\, x_t q\mu \leq \lambda \}$ dır. Son eşitlik ise, her $f \in \prod_{x_t q\lambda} B(x_t)$ için $\bigvee_{x_t q\lambda} f(x_t) = \lambda$ olmasından ileri gelmektedir.

Teorem 5.1.8: $(X, \mathcal{Q}_1)$ ve $(Y, \mathcal{Q}_2)$ iki (L,M)-bulanık Q-komşuluk uzayı ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$\varphi : (X, \mathcal{Q}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{Q}_2)$ bir bulanık KS-dönüşümüdür $\Leftrightarrow$ $\varphi : (X, \tau^{\mathcal{Q}_1}) \longrightarrow (Y, \tau^{\mathcal{Q}_2})$ fonksiyonu LB-süreklidir. (Hussein, 2006)

İspat: $(\Longrightarrow) \forall\, \mu \in L^Y, x_t \in M(L^X)$ için $(\mathcal{Q}_1)_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq (\mathcal{Q}_2)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu)$ olsun.

$\mu \in L^Y, x_t \in M(L^X)$ için $x_t q\varphi^{\leftarrow}(\mu) \Leftrightarrow \varphi^{\rightarrow}(x_t) q\mu$ dır.

$\{ y_t \in M(L^Y) \mid y_t q\lambda \} \supset \{\varphi^{\rightarrow}(x_t) \in M(L^Y) \mid x_t \in M(L^X), \varphi^{\rightarrow}(x_t) q\lambda \}$

$$\tau^{\mathcal{Q}_2}(\lambda) = \bigwedge\{(\mathcal{Q}_2)_{y_t}(\lambda) \big|\ y_t q\lambda \}$$

$$\leq \bigwedge\{ (\mathcal{Q}_2)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\lambda) \big|\, \varphi^{\rightarrow}(x_t) q\lambda \}$$

$$\leq \bigwedge\{ (\mathcal{Q}_1)_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)) \,\big|\, x_t q\varphi^{\leftarrow}(\lambda) \} = \tau^{\mathcal{Q}_1}\left(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)\right)$$

$\Longrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^Y$ için $\tau^{\mathcal{Q}_1}\left(\varphi^{\leftarrow}(\lambda)\right) \geq \tau^{\mathcal{Q}_2}(\lambda)$ olduğundan φ LB-süreklidir.

$(\Longleftarrow)$ $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau^{\mathcal{Q}_1}\left(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\right) \geq \tau^{\mathcal{Q}_2}(\mu)$ olsun.

$\mathcal{Q}^{\tau^{\mathcal{Q}_1}} = \mathcal{Q}_1$ ve $\mathcal{Q}^{\tau^{\mathcal{Q}_2}} = \mathcal{Q}_2$ olduğundan,

$$(\mathcal{Q}_2)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu) = \left(\mathcal{Q}^{\tau^{\mathcal{Q}_2}}\right)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu)$$

$$= \bigvee\{ \tau^{\mathcal{Q}_2}(\nu) \,\big|\, \varphi^{\rightarrow}(x_t) q\nu \leq \mu \}$$

$$\leq \bigvee\{ \tau^{\mathcal{Q}_2}(\nu) \,\big|\, x_t q\varphi^{\leftarrow}(\nu) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu) \}$$

$\leq \bigvee\{ \tau^{Q_1}(\varphi^{\leftarrow}(\nu)) \mid x_t q \varphi^{\leftarrow}(\nu) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu) \}$

$\leq (Q^{\tau^{Q_1}})_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) = (Q_1)_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)).$

$\Longrightarrow\ \forall\, \mu \in L^Y$ için $(Q_1)_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq (Q_2)_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu)$ olduğundan φ bir bulanık KS-dönüşümüdür.

Sonuç 5.1.9: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun. Bu takdirde, $\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varphi : (X, Q^{\tau_1}) \longrightarrow (Y, Q^{\tau_2})$ bir bulanık KS-dönüşümüdür. (Hussein, 2006)

İspat: Teorem 5.1.7 den, $\tau^{Q^{\tau}} = \tau$ dır. Buradan,

$\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-süreklidir $\Leftrightarrow \varphi : (X, \tau^{Q^{\tau_1}}) \longrightarrow (Y, \tau^{Q^{\tau_2}})$ LB-süreklidir.

$\Leftrightarrow \varphi : (X, Q^{\tau_1}) \longrightarrow (Y, Q^{\tau_2})$ bulanık KS-dönüşümüdür. (Teorem 5.1.8 den)

Teorem 5.1.10: (L,M)-BTOP ve (L,M)-BKS kategorileri izomorfiktir. (Jinming, 2006)

İspat: G: (L,M)-BTOP $\longrightarrow$ (L,M)-BKS, $G(X, \tau) = (X, Q^{\tau})$ ve $G(\varphi) = \varphi$ ve H: (L,M)-BKS$\longrightarrow$(L,M)-BTOP, $H(X, Q) = \tau^{Q}$, $H(\varphi) = \varphi$ olarak tanımlansın. Bu takdirde, G ve H birer kovaryant funktordur. Ayrıca,

$(G \circ H)(X, Q) = G(X, \tau^{Q}) = (X, Q^{\tau^{Q}}) = (X, Q) = id_{(L,M)-BKS}$

$(H \circ G)(X, \tau) = H(X, Q^{\tau}) = (X, \tau^{Q^{\tau}}) = (X, \tau) = id_{(L,M)-BTOP}$

Böylece, (L,M)-BTOP ve (L,M)-BKS kategorileri izomorfiktir.

5.2. (L, M)-Bulanık Filtreler

Tanım 5.2.1: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, $\mathcal{F} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre adı verilir : $\Leftrightarrow$

(LF1) $\mathcal{F}(\underline{0}) = 0_M, \mathcal{F}(\underline{1}) = 1_M,$

(LF2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\mathcal{F}(\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \mathcal{F}(\lambda_1) \odot \mathcal{F}(\lambda_2),$

(LF3) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ise $\mathcal{F}(\lambda_1) \leq \mathcal{F}(\lambda_2)$.

$(X, \mathcal{F})$ ikilisine de bir (L,M)-bulanık filtre uzayı adı verilir. (Höhle ve Sostak, 1999)

Tanım 5.2.2: $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2, X$ üzerinde iki (L,M)-bulanık filtre olsun. Eğer $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{F}_2(\lambda) \leq \mathcal{F}_1(\lambda)$ ise $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ den daha incedir (veya, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$ den daha kabadır) denir ve $\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1$ notasyonu ile gösterilir.

Uyarı 5.2.3: (1) L bir cqm-latis olarak alınırsa Tanım 5.2.1 ile Luna-Torres ve Ochoa' nın (2003) tanımı çakışır.

(2) $L = 2, M = I$ ve $\odot = \wedge$ olarak alınırsa Tanım 5.2.1 ile Burton ve arkadaşlarının (1999) tanımı çakışır.

(3) $\mathcal{Q}_{x_t} : L^X \longrightarrow M$ Q-komşuluk dönüşümü (Tanım 5.1.1) de X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir.

Önerme 5.2.4: $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\Gamma}$ sabit bir X kümesi üzerindeki (L,M)-bulanık filtrelerin bir ailesi olmak üzere

$$\mathcal{F}(\lambda) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i\,(\lambda)$$

olarak tanımlanan $\mathcal{F} = \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. (Hussein, 2006)

İspat: (LF1) $\mathcal{F}(\underline{0}) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i\,(\underline{0}) = 0_M, \mathcal{F}(\underline{1}) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i\,(\underline{1}) = 1_M$.

(LF2) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda_1 \odot \lambda_2) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i\,(\lambda_1 \odot \lambda_2) &\geq \bigwedge_{i\in\Gamma}\big(\mathcal{F}_i(\lambda_1) \odot \mathcal{F}_i(\lambda_2)\big) \\ &\geq \big(\bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i(\lambda_1)\big) \odot \big(\bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i(\lambda_2)\big) \\ &= \mathcal{F}(\lambda_1) \odot \mathcal{F}(\lambda_2).\end{aligned}$$

(LF3) $\lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\lambda_1 \leq \lambda_2$ olsun. $\forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}_i(\lambda_1) \leq \mathcal{F}_i(\lambda_2)$ olduğundan $\big(\bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i(\lambda_1)\big) \leq \big(\bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i(\lambda_2)\big) \implies \mathcal{F}(\lambda_1) \leq \mathcal{F}(\lambda_2)$ elde edilir.

Önerme 5.2.5: $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$\varphi(\mathcal{F})(\mu) = \mathcal{F}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$ ($\forall\, \mu \in L^Y$ için)

olarak tanımlanan $\varphi(\mathcal{F}) : L^Y \longrightarrow M$ dönüşümü Y üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. (Luna-Torres ve Ochoa, 2003)

İspat: (LF1) $\varphi(\mathcal{F})(\underline{0}) = \mathcal{F}\left(\varphi^{\leftarrow}(\underline{0})\right) = \mathcal{F}(\underline{0}) = 0_M$

$\varphi(\mathcal{F})(\underline{1}) = \mathcal{F}\left(\varphi^{\leftarrow}(\underline{1})\right) = \mathcal{F}(\underline{1}) = 1_M.$

(LF2) $\mu_1, \mu_2 \in L^Y$ alalım. Buradan,

$$\varphi(\mathcal{F})(\mu_1 \odot \mu_2) = \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_1 \odot \mu_2)\big) = \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_1) \odot \varphi^{\leftarrow}(\mu_2)\big)$$

$$\geq \mathcal{F}(\varphi^{\leftarrow}(\mu_1)) \odot \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_2)\big) = \varphi(\mathcal{F})(\mu_1) \odot \varphi(\mathcal{F})(\mu_2).$$

(LF3) $\mu_1, \mu_2 \in L^Y$ ve $\mu_1 \leq \mu_2$ olsun. Bu takdirde, $\varphi^{\leftarrow}(\mu_1) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu_2)$ olduğundan $\mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_1)\big) \leq \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu_2)\big) \implies \varphi(\mathcal{F})(\mu_1) \leq \varphi(\mathcal{F})(\mu_2)$ dır.

Önerme 5.2.6: $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre olmak üzere,

$$\tau_{\mathcal{F}}(\lambda) = \begin{cases} \mathcal{F}(\lambda), \lambda \neq \underline{0} \\ 1_M, \ \lambda = \underline{0} \end{cases} \qquad (\ \forall\, \lambda \in L^X \text{ için })$$

olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{F}}: L^X \longrightarrow M$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir. (Hussein, 2006)

İspat: (BT1) ve (BT2) tanımdan açıktır.

(BT3) $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq L^X$ alalım. $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \leq \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i$

$\implies \forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}(\lambda_i) \leq \mathcal{F}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \implies \bigwedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}(\lambda_i) \leq \mathcal{F}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i)$

$\implies \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau_{\mathcal{F}}(\lambda_i) \leq \tau_{\mathcal{F}}(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i).$

Böylece, $\tau_{\mathcal{F}}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir.

Tanım 5.2.7: $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ sırasıyla X ve Y klasik kümeleri üzerinde birer (L,M)-bulanık filtre olsun.

(a) $\varphi : (X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_2)$ fonksiyonuna bir bulanık filtre dönüşümü denir : $\Leftrightarrow$

$\forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{F}_1\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq \mathcal{F}_2(\mu)$ sağlanır.

(b) $\varphi : (X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_2)$ fonksiyonuna bir bulanık filtre koruyan dönüşüm denir : $\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{F}_1(\lambda) \leq \mathcal{F}_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$ sağlanır.

Objeleri (L,M)-bulanık filtre uzayları ve morfizmleri de bulanık filtre dönüşümleri olan kategori (L,M)-FIL ile gösterilir. (Hussein, 2006)

Notasyon 5.2.8: $\mathcal{B} : L^X \longrightarrow M$ bir dönüşüm ve $\lambda \in L^X$ olsun. Bu takdirde,

$< \mathcal{B} >\ (\lambda) = \bigvee_{\mu \leq \lambda} \mathcal{B}(\mu)$ biçiminde ifade edilir. (Kim ve Ko, 2006)

Tanım 5.2.9: X boştan farklı klasik bir küme olmak üzere, $\mathcal{B} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümüne X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre tabanı veya bazı denir : $\Leftrightarrow$

(FB1) $\mathcal{B}\big(\underline{0}\big) = 0_M,\ \mathcal{B}\big(\underline{1}\big) = 1_M,$

(FB2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $< \mathcal{B} >\ (\lambda_1 \odot \lambda_2) \geq \mathcal{B}(\lambda_1) \odot \mathcal{B}(\lambda_2)$.

$\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2, X$ üzerinde iki (L,M)-bulanık filtre tabanı olmak üzere $< \mathcal{B}_2 > \leq < \mathcal{B}_1 >$ sağlanıyorsa $\mathcal{B}_1$'e $\mathcal{B}_2$ den daha incedir denir. (Kim ve Ko, 2006)

Uyarı 5.2.10: (1) $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre ise $\mathcal{F}, X$ üzerinde aynı zamanda bir (L,M)-bulanık filtre tabanıdır ve $<\mathcal{F}> = \mathcal{F}$ dır.

Teorem 5.2.11: $\mathcal{B}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre tabanı olsun. Bu takdirde, $<\mathcal{B}>$ X üzerinde $\mathcal{B} \leq < \mathcal{B} >$ koşulunu sağlayan en kaba (L,M)-bulanık filtredir. (Kim ve Ko, 2006)

İspat: Öncelikle $< \mathcal{B} >$ nin X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre olduğunu gösterelim.

(LF1) ve (LF3) tanımdan kolaylıkla görülür.

(LF2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım. Her $\lambda_1 \leq \lambda$ ve $\mu_1 \leq \mu$ için $\lambda_1 \odot \mu_1 \leq \lambda \odot \mu$ olduğundan, $< \mathcal{B} >\ (\lambda \odot \mu) \geq < \mathcal{B} >\ (\lambda_1 \odot \mu_1) \geq \mathcal{B}(\lambda_1) \odot \mathcal{B}(\mu_1)$

Buradan $\lambda_1 \leq \lambda$ ve $\mu_1 \leq \mu$ üzerinden supremuma geçilirse ve $\odot$ işleminin supremum üzerine dağılma özelliği kullanılırsa,

$< \mathcal{B} > (\lambda \odot \mu) \geq < \mathcal{B} > (\lambda) \odot < \mathcal{B} > (\mu)$ elde edilir.

Böylece, $< \mathcal{B} >$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir.

Şimdi de $< \mathcal{B} >$ nin X üzerinde $\mathcal{B} \leq < \mathcal{B} >$ olan en kaba bulanık filtre olduğunu gösterelim. $\mathcal{F}, X$ üzerinde $\mathcal{B} \leq \mathcal{F}$ koşulunu sağlayan başka bir (L,M)-bulanık filtre olsun. Buradan,

$< \mathcal{B} > (\lambda) = \bigvee_{\mu \leq \lambda} \mathcal{B}(\mu) \leq \bigvee_{\mu \leq \lambda} \mathcal{F}(\mu) \leq \mathcal{F}(\lambda) \Rightarrow < \mathcal{B} > \leq \mathcal{F}$ sağlanır.

Teorem 5.2.12: $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde (L,M)-bulanık filtre tabanları ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $\varphi : (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (Y, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre dönüşümüdür $\Leftrightarrow$

$\forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{B}_2(\mu) \leq < \mathcal{B}_1 > \big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)$ sağlanır.

(b) $\varphi : (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (Y, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre koruyan dönüşümdür $\Leftrightarrow$

$\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{B}_1(\lambda) \leq < \mathcal{B}_2 > \big(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)\big)$ sağlanır.

(c) Eğer $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{B}_2(\mu) \leq \mathcal{B}_1\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)$ ise, $\varphi : (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (Y, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre dönüşümüdür.

(d) Eğer $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\mathcal{B}_1(\lambda) \leq \mathcal{B}_2\big(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)\big)$ ise $\varphi : (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (Y, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre koruyan dönüşümdür. (Kim ve Ko, 2006)

İspat: (a) ($\Longrightarrow$) $\mu \in L^Y$ alalım. Hipotezden, $< \mathcal{B}_1 > \big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \geq < \mathcal{B}_2 > (\mu) \geq \mathcal{B}_2(\mu)$.

($\Longleftarrow$) $\mu \in L^Y$ alalım.

$< \mathcal{B}_2 > (\mu) = \bigvee_{\nu \leq \mu} \mathcal{B}_2(\nu) \leq \bigvee_{\nu \leq \mu} < \mathcal{B}_1 > \big(\varphi^{\leftarrow}(\nu)\big) \leq < \mathcal{B}_1 > \big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)$

$\Longrightarrow$ $\varphi : (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (Y, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre dönüşümüdür.

(d) $\lambda \in L^X$ alalım.

$$< \mathcal{B}_1 > (\lambda) = \vee_{\rho \leq \lambda} \mathcal{B}_1(\rho) \leq \vee_{\rho \leq \lambda} \mathcal{B}_2\big(\varphi^{\rightarrow}(\rho)\big)$$

$$\leq \vee_{\varphi^{\rightarrow}(\rho) \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda)} \mathcal{B}_2\big(\varphi^{\rightarrow}(\rho)\big) \leq < \mathcal{B}_2 > \big(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)\big)$$

$\Longrightarrow \forall \lambda \in L^X$ için $< \mathcal{B}_1 > (\lambda) \leq < \mathcal{B}_2 > \big(\varphi^{\rightarrow}(\lambda)\big)$ olduğundan φ bir bulanık filtre koruyan dönüşümdür.

Benzer şekilde diğer özelliklerinde sağlandığı gösterilebilir.

Uyarı 5.2.13: Teorem 5.2.12 nin (c)-(d) özelliklerinin terslerinin her zaman sağlanması gerekmez.

Örnek 5.2.14: $X = \{x, y\},\ L = M = I$ ve $\forall\, a, b \in I,\ a \odot b = maks\{a + b - 1, 0\}$ olsun. $\lambda, \mu \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanan bulanık kümeler olsun.

$\lambda(x) = 0.6,\ \lambda(y) = 0.5,\ \mu(x) = 0.1,\ \mu(y) = 0$.

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \colon I^X \longrightarrow I$ dönüşümleri de aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{B}_1(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = \underline{1} \\ 0.6, & \nu = \lambda \\ 0.3, & \nu = \mu \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}, \qquad \mathcal{B}_2(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = \underline{1} \\ 0.4, & \nu = \lambda \\ 0.3, & \nu = \lambda \odot \lambda \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Bu takdirde, $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ dönüşümleri X üzerinde (L,M)-bulanık filtre değildirler ancak bunlar X üzerinde (L,M)-bulanık filtre tabanlarıdır.

Ayrıca, $< \mathcal{B}_2 > \leq < \mathcal{B}_1 >$ olduğundan $id_X \colon (X, < \mathcal{B}_1 >) \longrightarrow (X, < \mathcal{B}_2 >)$ bir bulanık filtre dönüşümü ve $id_X \colon (X, < \mathcal{B}_2 >) \longrightarrow (X, < \mathcal{B}_1 >)$ bir bulanık filtre koruyan dönüşümdür, fakat $\mathcal{B}_2 \nleq \mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_1 \nleq \mathcal{B}_2$. (Kim ve Ko, 2006)

Notasyon 5.2.15: $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre olmak üzere

$\mathcal{F}^0 \coloneqq \{\, \lambda \in L^X \mid \mathcal{F}(\lambda) > 0_M \,\}$

olarak ifade edilir.

Teorem 5.2.16: L bir tam MV-cebiri ve $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\Gamma}, X$ üzerindeki (L,M)-bulanık filtrelerin aşağıdaki koşulu sağlayan bir ailesi olsun.

(C) $\forall\ i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in (\mathcal{F}_i)^0$ ise her $K \subset \Gamma$ sonlu için $\bigwedge_{i\in K} \lambda_i \neq \underline{0}$.

Bu takdirde, X üzerinde

$$\bigvee_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i\,(\lambda) = \begin{cases} \bigvee\{\bigodot_{i\in K} \mathcal{F}_i(\lambda_i)\}, & \lambda = \bigwedge_{i\in K} \lambda_i\,, \lambda_i \in (\mathcal{F}_i)^0 \\ 0_M, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\bigvee_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}_i$ lerden daha ince olan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık filtredir. (Hussein, 2006, Çetkin ve diğ., 2008)

(Burada supremum her sonlu $K \subset \Gamma$ için $\lambda = \bigwedge_{i\in K} \lambda_i$ üzerinden alınmaktadır.)

İspat: Öncelikle, $\mathcal{H} = \bigvee_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_i : L^X \longrightarrow M$ dönüşümünün X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre olduğunu gösterelim.

(LF1) $\mathcal{H}(\underline{0}) = 0_M, \mathcal{H}(\underline{1}) = 1_M$ olduğu tanımdan ((C) koşulundan) açıktır.

(LF2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım. Her sonlu $K, J \subset \Gamma :\ \lambda = \bigwedge_{k\in K} \lambda_k$ ve $\mu = \bigwedge_{j\in J} \mu_j$ için $\lambda \odot \mu = (\bigwedge_{k\in K} \lambda_k) \odot \left(\bigwedge_{j\in J} \mu_j\right)$. L bir tam MV-cebiri olduğundan,

$$\lambda \odot \mu = \bigwedge_{m\in K\cup J} \rho_m$$

$$\rho_m = \begin{cases} \lambda_m, & m \in K - (K \cap J) \\ \mu_m, & m \in J - (K \cap J) \\ \lambda_m \odot \mu_m, & m \in K \cap J \end{cases} \quad \text{diyelim.}$$

$$\mathcal{H}(\lambda \odot \mu) \geq \bigodot_{m\in K\cup J} \mathcal{F}_m(\rho_m) \geq \left(\bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k)\right) \odot \left(\bigodot_{j\in J} \mathcal{F}_j(\mu_j)\right)$$

$\lambda = \bigwedge_{k\in K} \lambda_k\,, \mu = \bigwedge_{j\in J} \mu_j$ üzerinden supremuma geçilir ve $\odot$ işleminin supremum üzerine dağılma özelliği kullanılırsa,

$\mathcal{H}(\lambda \odot \mu) \geq \mathcal{H}(\lambda) \odot \mathcal{H}(\mu)$ elde edilir.

(LF3) $\lambda, \mu \in L^X$ ve $\lambda \leq \mu$ olsun.

$\lambda = \underline{0}$ ise $\mathcal{H}(\lambda) = 0_M$ olacağından açıktır.

$\lambda \neq \underline{0}$ olsun. Her $K \subset \Gamma$: $\lambda = \bigwedge_{k\in K} \lambda_k$ için $\mathcal{H}(\lambda) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k)$ dır.

$\mu = \lambda \vee \mu = (\bigwedge_{k\in K} \lambda_k) \vee \mu = \bigwedge_{k\in K}(\lambda_k \vee \mu)$

$\Longrightarrow \mathcal{H}(\mu) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k \vee \mu) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k)$

$\Longrightarrow \mathcal{H}(\mu) \geq \mathcal{H}(\lambda)$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{H}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir.

Şimdi $\forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}_i(\lambda) \leq \mathcal{H}(\lambda)$ olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F}_i(\lambda) = 0_M$ ise açıktır.

$\mathcal{F}_i(\lambda) \neq 0_M$ ise $\lambda = \lambda \wedge \underline{1}$ olduğundan

$\mathcal{H}(\lambda) \geq \mathcal{F}_i(\lambda) \odot \mathcal{F}_j(\underline{1}) = \mathcal{F}_i(\lambda) \odot 1_M = \mathcal{F}_i(\lambda)$

$\Longrightarrow$ $\forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}_i(\lambda) \leq \mathcal{H}(\lambda)$ dır.

$\mathcal{K}$, $\forall\, i \in \Gamma$ için $\mathcal{K} \geq \mathcal{F}_i$ olacak şekilde X üzerinde başka bir (L,M)-bulanık filtre olsun. $\lambda \in L^X$ alalım. $\mathcal{H}$ nin tanımından $\exists\, K \subset \Gamma$ sonlu : $\lambda = \bigwedge_{k\in K} \lambda_k$ için $\mathcal{H}(\lambda) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k)$ dır.

$\forall\, i \in$ K için $\mathcal{K} \geq \mathcal{F}_i$ olduğundan

$\mathcal{K}(\lambda) = \mathcal{K}(\bigwedge_{k\in K} \lambda_k) \geq \mathcal{K}(\bigodot_{k\in K} \lambda_k) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{K}(\lambda_k) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\lambda_k)$

$\lambda = \bigwedge_{k\in K} \lambda_k$ üzerinden supremuma geçilirse, $\mathcal{K}(\lambda) \geq \mathcal{H}(\lambda)$ elde edilir.

Teorem 5.2.17: $\mathcal{F}, Y$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) = \begin{cases} \bigvee\{\, \mathcal{F}(\mu) \mid \lambda = \varphi^{\leftarrow}(\mu)\}, & \lambda \neq \underline{0} \\ 0_M, & \lambda = \underline{0} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F}) : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü L nin idempotent ve zincir olması halinde X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. (Hussein, 2006, Çetkin ve diğ., 2008)

İspat: (LF1) $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\underline{0}) = 0_M$ ve $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\underline{1}) = 1_M$ dır.

(LF2) $\lambda, \mu \in L^X$ alalım. $\lambda = \underline{0}$ veya $\mu = \underline{0}$ ise $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) = 0_M$ veya $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu) = 0_M$ olacağından $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda \odot \mu) \geq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) \odot \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu)$.

$\lambda, \mu \neq \underline{0}$ olsun. L idempotent ve zincir olduğundan, $\lambda \odot \mu \neq \underline{0}$ dır.

$$\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) \odot \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu) = (\bigvee\{ \mathcal{F}(\rho) \mid \lambda = \varphi^{\leftarrow}(\rho)\})$$

$$\odot (\bigvee\{ \mathcal{F}(\nu) \mid \mu = \varphi^{\leftarrow}(\nu)\})$$

$$= \bigvee\{ \mathcal{F}(\rho) \odot \mathcal{F}(\nu) \mid \lambda = \varphi^{\leftarrow}(\rho), \mu = \varphi^{\leftarrow}(\nu)\}$$

$$\leq \bigvee\{ \mathcal{F}(\rho \odot \nu) \mid \lambda \odot \mu = \varphi^{\leftarrow}(\rho \odot \nu)\}$$

$$\leq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda \odot \mu)$$

$\Longrightarrow \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda \odot \mu) \geq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) \odot \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu)$ elde edilir.

(LF3) $\lambda, \mu \in L^X$ ve $\lambda \leq \mu$ olsun.

$\lambda = \underline{0}$ ise açıktır. O halde, $\lambda \neq \underline{0}$ olsun. Bir $r \in M$ için $r \leq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda)$ diyelim. Buradan, $\lambda = \varphi^{\leftarrow}(\lambda_1)$ olacak şekilde en az bir $\lambda_1 \in L^Y : r \leq \mathcal{F}(\lambda_1)$ dır.

$$\lambda \leq \mu \Longrightarrow \mu = \lambda \vee \mu = \varphi^{\leftarrow}(\lambda_1) \vee \mu = \varphi^{\leftarrow}(\lambda_1) \vee \varphi^{\leftarrow}(\mu_1) = \varphi^{\leftarrow}(\lambda_1 \vee \mu_1)$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_1 \vee \mu_1 \Longrightarrow r \leq \mathcal{F}(\lambda_1) \leq \mathcal{F}(\lambda_1 \vee \mu_1) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu)$$

$\Longrightarrow \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\lambda) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})(\mu)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\varphi^{\leftarrow}(\mathcal{F})$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir.

Teorem 5.2.18: $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\Gamma}$ X_i üzerinde (L,M)-bulanık filtrelerin bir ailesi, $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ kartezyen çarpım kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. X üzerinde

$$\mathcal{F}(\lambda) = \begin{cases} \bigvee\{\bigodot_{i\in K} \mathcal{F}_i(\lambda_i)\}, & \lambda = \bigwedge_{i\in K} p_i^{\leftarrow}(\lambda_i), \lambda_i \in (\mathcal{F}_i)^0 \\ 0_M, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{F} : L^X \longrightarrow M$ dönüşümü L nin idempotent ve zincir olması halinde aşağıdaki özellikleri sağlar.

(Burada supremum her sonlu $K \subset \Gamma$ indis kümesi için $\lambda = \bigwedge_{i\in K} p_i^{\leftarrow}(\lambda_i)$ üzerinden alınmaktadır.)

(a) $\mu \in L^X$ için $\mathcal{F}(\mu) = \bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)(\mu)$.

(b) $\mathcal{F}$ her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonunu bir bulanık filtre dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık filtredir.

(c) $\varphi : (Y, \mathcal{H}) \longrightarrow (X, \mathcal{F})$ bir bulanık filtre dönüşümüdür $\Leftrightarrow$

$\forall\, i \in \Gamma$ için $p_i \circ \varphi :\ (Y, \mathcal{H}) \longrightarrow (X_i\,, \mathcal{F}_i)$ bir bulanık filtre dönüşümüdür. (Hussein, 2006, Çetkin ve diğ., 2008)

İspat: (a) Teorem 5.2.17 den her $i \in \Gamma$ için $p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i), X$ üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. Öncelikle, $\bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)$ dönüşümünün mevcut olduğunu yani, Teorem 5.2.16 daki (C) koşulunun sağlandığını gösterelim.

(C) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in (p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i))^0$ ise $\exists\, \nu_i \in L^{X_i} :\ \lambda_i = p_i^{\leftarrow}(\nu_i)$ ve $\mathcal{F}_i(\nu_i) > 0_M$ dır. Buradan, $\nu_i \neq \underline{0}$ yani, $\exists\, x_i \in X_i\ :\ \nu_i(x_i) > 0_M$ dır. O halde, her sonlu $K \subset \Gamma$ için

$$x = \begin{cases} p_k(x) = x_k, & \forall\, k \in K \text{ için } x_k \in X_k \\ p_j(x) = x_j, & \forall\, j \in \Gamma - K \text{ için } x_j \in X_j \end{cases} \quad \text{denirse,}$$

$$\bigodot_{i\in K} \lambda_i(x) = \bigodot_{i\in K} p_i^{\leftarrow}(\nu_i)(x) = \bigodot_{i\in K} \nu_i(x_i) > 0_M$$

$\Longrightarrow \bigodot_{i\in K} \lambda_i \neq \underline{0}$ dır. Böylece (C) koşulu sağlanır.

Şimdi ise $\mathcal{F} = \bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\lambda \in L^X$ alalım. $\mathcal{F}$ nin tanımından $\lambda = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ olacak şekilde $\exists\, K \subset \Gamma$ sonlu : $\mathcal{F}(\lambda) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\nu_k)$ $\forall\, k \in K$ için $\mu_k = p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ denirse,

$\lambda = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k) = \bigwedge_{k\in K} \mu_k$ için

$$\bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)(\lambda) \geq \bigodot_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\mathcal{F}_k)(\mu_k) \geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\nu_k)$$

Burada, $\lambda = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ üzerinden supremuma geçilirse,

$$\bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)(\lambda) \geq \mathcal{F}(\lambda), \forall\, \lambda \in L^X$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i) \geq \mathcal{F} \qquad \text{elde edilir.} \tag{5.1}$$

$\lambda_0 = \bigwedge_{j\in J} \lambda_j$ olacak şekildeki her sonlu $J \subset \Gamma$ için

$$\bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)(\lambda_0) \geq \bigodot_{j\in J} p_j^{\leftarrow}(\mathcal{F}_j)(\lambda_j)$$

$\lambda_j = p_j^{\leftarrow}(\nu_j)$ olacak şekilde $\exists\, \nu_j \in L^{X_j} : \bigodot_{j\in J} p_j^{\leftarrow}(\mathcal{F}_j)(\lambda_j) \geq \bigodot_{j\in J} \mathcal{F}_j(\nu_j)$ dır. Diğer yandan,

$\lambda_0 = \bigwedge_{j\in J} \lambda_j = \bigwedge_{j\in J} p_j^{\leftarrow}(\nu_j)$ için, $\mathcal{F}(\lambda_0) \geq \bigodot_{j\in J} \mathcal{F}_j(\nu_j)$

$\Longrightarrow \mathcal{F} \geq \bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)$ elde edilir. (5.2)

$\Longrightarrow$ (5.1), (5.2) den, $\mathcal{F} = \bigvee_{i\in\Gamma} p_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i)$ elde edilir.

(b) (a) şıkkından ve Teorem 5.2.16 ile Teorem 5.2.17 den, $\mathcal{F}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir.

$\forall\, i \in \Gamma, \nu_i \in L^{X_i}$ için $\mathcal{F}$ nin tanımından, $\mathcal{F}(p_i^{\leftarrow}(\nu_i)) \geq \mathcal{F}_i(\nu_i)$ dır. Böylece, $\forall\, i \in \Gamma$ için $p_i : (X,\mathcal{F}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{F}_i)$ bir bulanık filtre dönüşümüdür.

$\mathcal{G}$, $\forall\, i \in \Gamma$ için $p_i : (X,\mathcal{G}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{F}_i)$ izdüşüm fonksiyonlarını bir bulanık filtre dönüşümü yapan X üzerinde başka bir (L,M)-bulanık filtre olsun. O halde, $\forall\, i \in \Gamma, \nu_i \in L^{X_i}$ için $\mathcal{G}(p_i^{\leftarrow}(\nu_i)) \geq \mathcal{F}_i(\nu_i)$ sağlanır.

$\mu = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ olacak şekildeki her sonlu $K \subset \Gamma$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mu) = \mathcal{G}(\textstyle\bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)) &\geq \mathcal{G}\big(\textstyle\bigodot_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\big)\\ &\geq \textstyle\bigodot_{k\in K} \mathcal{G}\big(p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\big)\\ &\geq \textstyle\bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\nu_k).\end{aligned}$$

Burada $\mu = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ üzerinden supremuma geçilirse,

$\forall\, \mu \in L^X$ için $\mathcal{G}(\mu) \geq \mathcal{F}(\mu)$ elde edilir.

(c) ($\Longrightarrow$) Bulanık filtre dönüşümlerinin bileşkesi de yine bir bulanık filtre dönüşümüdür.

($\Longleftarrow$) $\forall\, i \in \Gamma$ için $p_i \circ \varphi : (Y,\mathcal{H}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{F}_i)$ bir bulanık filtre dönüşümü olsun.

$\mu \in L^X$ alalım.

$\mu = \bigwedge_{k\in K} p_k^{\leftarrow}(\nu_k)$ olacak şekildeki her sonlu $K \subset \Gamma$ için,

$\mathcal{H}\left(\varphi^{\leftarrow}\left(p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\right)\right) \geq \mathcal{F}_k(\nu_k)$ sağlanır.

$$\mathcal{H}\left(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\right) = \mathcal{H}\left(\bigwedge_{k\in K} \varphi^{\leftarrow}\left(p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\right)\right)$$

$$\geq \mathcal{H}\left(\bigodot_{k\in K} \varphi^{\leftarrow}\left(p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\right)\right)$$

$$\geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{H}\left(\varphi^{\leftarrow}\left(p_k^{\leftarrow}(\nu_k)\right)\right)$$

$$\geq \bigodot_{k\in K} \mathcal{F}_k(\nu_k).$$

$\Longrightarrow\ \forall\, \mu \in L^X$ için $\mathcal{H}\left(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\right) \geq\ \mathcal{F}(\mu)$ elde edilir.

Yukarıdaki teoremde, L latisinin idempotent veya zincir olmaması durumunda oluşturulan $\mathcal{F} :\ L^X \longrightarrow M$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre tabanıdır.

Tanım 5.2.19: $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\Gamma}$, X_i üzerinde (L,M)-bulanık filtrelerin bir ailesi, $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ kartezyen çarpım kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \longrightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Her $i \in \Gamma$ için p_i izdüşüm fonksiyonlarını bulanık filtre dönüşümü yapan X üzerindeki en kaba (L,M)-bulanık filtreye $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\Gamma}$ (L,M)-bulanık filtrelerinin çarpımı adı verilir. (Hussein, 2006)

Sonuç 5.2.20: (L,M)-FIL kategorisi SET kümeler kategorisi üzerine unutkan funktora göre topolojiktir. (Çetkin ve diğ., 2008)

İspat: Teorem 5.2.18 den açıktır.

Not 5.2.21: Bu bölümün geriye kalan kısmında $L = (L, \leq, \wedge, \vee)$ bir tam dağılımlı tam latisi ifade edecektir.

Tanım 5.2.22: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay, $\mathcal{F}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre, $\lambda, \mu \in L^X$ ve $x_t \in M(L^X)$ olsun.

(a) x_t bulanık noktasına $\mathcal{F}$ nin bir yığılma noktası denir ve $\mathcal{F} \infty x_t$ notasyonu ile gösterilir :$\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\forall\, \lambda \in \mathcal{F}^0$ için $\lambda \wedge \mu \neq \underline{0}$ sağlanır.

(b) x_t bulanık noktasına $\mathcal{F}$ nin bir limit noktası denir ve $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ notasyonu ile gösterilir :$\Leftrightarrow$ $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{F}$ sağlanır.

(c) $\mathcal{F}$ nin tüm yığılma ve limit noktalarının supremumları sırasıyla $clu_\tau(\mathcal{F})$ ve $lim_\tau(\mathcal{F})$ ile gösterilir. Yani,

$clu_\tau(\mathcal{F}) = \bigvee\{\, x_t \in M(L^X) \mid \mathcal{F} \infty x_t \,\}$

$lim_\tau(\mathcal{F}) = \bigvee\{\, x_t \in M(L^X) \mid \mathcal{F} \longrightarrow x_t \,\}$. (Hussein, 2006)

Not 5.2.23: Tanımdaki $\mathcal{Q}_{x_t}$ dönüşümü Teorem 5.1.4 de τ topolojisi tarafından üretilen (L,M)-bulanık Q-komşuluk sistemi dönüşümüdür.

Teorem 5.2.24: (X,τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ ile $\mathcal{G}$, X üzerinde $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olacak şekilde iki (L,M)-bulanık filtre olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\mathcal{Q}_{x_t} \longrightarrow x_t$.

(ii) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \implies \mathcal{F} \infty x_t$.

(iii) $lim_\tau(\mathcal{F}) \leq clu_\tau(\mathcal{F})$.

(iv) $\mathcal{F} \infty x_t \geq x_s \implies \mathcal{F} \infty x_s$.

(v) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \geq x_s \implies \mathcal{F} \longrightarrow x_s$.

(vi) $\mathcal{F} \infty x_t \iff x_t \leq clu_\tau(\mathcal{F})$.

(vii) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \iff x_t \leq lim_\tau(\mathcal{F})$.

(viii) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \implies \mathcal{G} \longrightarrow x_t$.

(ix) $lim_\tau(\mathcal{F}) \leq lim_\tau(\mathcal{G})$.

(x) $\mathcal{G} \infty x_t \implies \mathcal{F} \infty x_t$.

(xi) $clu_\tau(\mathcal{G}) \leq clu_\tau(\mathcal{F})$. (Hussein, 2006)

İspat: (i) Tanımdan açıktır.

(ii) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ olsun. O halde, $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{F}$ sağlanır. $\mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\lambda \in \mathcal{F}^0$ alalım. $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{F}$ olduğundan $\mu \in \mathcal{F}^0$ dır. Buradan,

$\mathcal{F}(\lambda \wedge \mu) \geq \mathcal{F}(\lambda) \odot \mathcal{F}(\mu) > 0_M \implies \lambda \wedge \mu \in \mathcal{F}^0 \implies \lambda \wedge \mu \neq \underline{0} \implies \mathcal{F} \infty x_t$.

(iii) (ii) den, $lim_\tau(\mathcal{F}) \leq clu_\tau(\mathcal{F})$ sağlanır.

(iv) $\mathcal{F} \propto x_t \geq x_s$ olsun. Teorem 5.1.4 (b) den, $\mathcal{Q}_{x_s} \leq \mathcal{Q}_{x_t}$ dır. Bu nedenle

$\forall \mu \in (\mathcal{Q}_{x_s})^0$ için $\mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ dır. $\mathcal{F} \propto x_t$ olduğundan $\forall \lambda \in \mathcal{F}^0$ için $\lambda \wedge \mu \neq \underline{0}$ dır. Sonuç olarak, $\mathcal{F} \propto x_s$ dır.

(v) $x_s \leq x_t \Longrightarrow \mathcal{Q}_{x_s} \leq \mathcal{Q}_{x_t}$ ve $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \Longrightarrow \mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{F}$ olduğundan $\mathcal{Q}_{x_s} \leq \mathcal{F}$ bulunur. Buradan, $\mathcal{F} \longrightarrow x_s$ elde edilir.

(vi) $(\Longrightarrow)$ $\mathcal{F} \propto x_t \Longrightarrow x_t \leq clu_\tau(\mathcal{F})$ olduğu açıktır.

$(\Longleftarrow)$ $x_t \leq clu_\tau(\mathcal{F})$ olsun. $\mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ alalım. Buradan, $\mathcal{Q}_{x_t}(\mu) > 0_M$ dır. $\mathcal{Q}_{x_t}$ nin tanımından, $\exists\, \mu_1 \in L^X :\ x_t q \mu_1 \leq \mu$ ve $\mathcal{Q}_{x_t}(\mu) \geq \tau(\mu_1) > 0_M$ dır. $x_t q \mu_1$ olduğundan $\mu_1 q\, clu_\tau(\mathcal{F})$ dır. $clu_\tau(\mathcal{F})$ tanımından,

$\exists\, x_s \in M(L^X),\ \mathcal{F} \propto x_s :\ \ x_s q \mu_1 \leq \mu$ ve $\mathcal{Q}_{x_s}(\mu) \geq \tau(\mu_1) > 0_M$

$\Longrightarrow \mu \in (\mathcal{Q}_{x_s})^0$ ve $\mathcal{F} \propto x_s$ dır.

$\Longrightarrow \forall \lambda \in \mathcal{F}^0$ için $\lambda \wedge \mu \neq \underline{0} \Longrightarrow \mathcal{F} \propto x_t$ elde edilir.

(vii) $(\Longrightarrow)$ $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \Longrightarrow x_t \leq lim_\tau(\mathcal{F})$ olduğu açıktır.

$(\Longleftarrow)$ $x_t \leq lim_\tau(\mathcal{F})$ olsun. $\Longrightarrow \exists\, x_s \in M(L^X),\ \mathcal{F} \longrightarrow x_s :\ x_s \geq x_t$ dır.

$\mathcal{F} \longrightarrow x_s \geq x_t \Longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow x_t$ elde edilir.

(viii) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \Longrightarrow \mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olduğundan $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{G} \Longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow x_t$ dır.

(ix) (viii) den, $lim_\tau(\mathcal{F}) \leq lim_\tau(\mathcal{G})$ dır.

(x) $\mathcal{G} \propto x_t$ olsun. $\mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\lambda \in \mathcal{F}^0$ alalım. $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olduğundan $\lambda \in \mathcal{G}^0$ ve $\mathcal{G} \propto x_t$ olduğundan $\lambda \wedge \mu \neq \underline{0} \Longrightarrow \mathcal{F} \propto x_t$ elde edilir.

(xi) (x) den, $clu_\tau(\mathcal{G}) \leq clu_\tau(\mathcal{F})$ olduğu görülür.

Örnek 5.2.25: $X = \{x, y\},\ L = M = I$ olsun ve $\mu \in I^X$ bulanık kümesi $\mu(x) = 0.3$ ve $\mu(y) = 0.4$ olarak tanımlansın.

$$\tau(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in\{\underline{0},\underline{1}\}\\ 1/2, & \lambda=\mu\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau: I^X \longrightarrow I$ dönüşümü X üzerinde bir (L,M)-bulanık topolojidir. Bu bulanık topolojinin komşuluk sistemini oluşturan dönüşümler aşağıdaki gibidir.

(1) $t \leq 0.7$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\underline{1}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$

(2) $t > 0.7$ için $\mathcal{Q}_{x_t}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\underline{1}\\ 1/2, & \lambda\geq\mu\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$

(3) $s \leq 0.6$ için $\mathcal{Q}_{y_s}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\underline{1}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$

(4) $s > 0.6$ için $\mathcal{Q}_{y_s}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\underline{1}\\ 1/2, & \lambda\geq\mu\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$

$$\mathcal{F}: I^X \longrightarrow I,\ \mathcal{F}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\underline{1}\\ 2/3, & x_{0.5}\leq\lambda<\underline{1}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

olarak tanımlı dönüşüm X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. Burada,

$\mathcal{F}^0=\{\,\nu\in I^X \mid \mathcal{F}(\nu)>0_M\}=\{\,\nu\in I^X \mid 0.5\leq\nu(x)\,\}$ şeklindedir.

Aşağıdaki (i) ve (ii) den, $clu_\tau(\mathcal{F})=\underline{1}$ olduğu görülür :

(i) $\forall\,\lambda\in(\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\rho\in\mathcal{F}^0$ için $\lambda\wedge\rho\neq\underline{0}$ $(t\in I_0)$.

(ii) $t\in I_0$ için $\mathcal{F}\infty y_s$. $\forall\,\lambda\in(\mathcal{Q}_{y_s})^0$ ve $\rho\in\mathcal{F}^0$ için $\lambda\wedge\rho\neq\underline{0}$.

Aşağıdaki (iii)-(vi) den, $lim_\tau(\mathcal{F})=\underline{1}-\mu$ olduğu görülür:

(iii) $t\leq 0.7$ için $\mathcal{F}\longrightarrow x_t$ dır. Çünkü, $\mathcal{Q}_{x_t}\leq\mathcal{F}$ dır.

(iv) $t>0.7$ için $\mathcal{F}\nrightarrow x_t$ dır. Çünkü, $\mathcal{Q}_{x_t}(\mu)=\frac{1}{2}$ fakat $\mathcal{F}(\mu)=0_M$ dır.

(v) $s\leq 0.6$ için $\mathcal{F}\longrightarrow y_s$ dır. Çünkü, $\mathcal{Q}_{y_s}\leq\mathcal{F}$ dır.

(vi) $s > 0.6$ için $\mathcal{F} \nrightarrow y_s$ dır. Çünkü, $\mathcal{Q}_{y_s}(\mu) = \frac{1}{2}$ fakat $\mathcal{F}(\mu) = 0_M$ dır.

$(\underline{1} - \mu)(x) = 0.7$ ve $(\underline{1} - \mu)(y) = 0.6$ dır.

$t \leq 0.7$ için $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ olduğundan $x_t \leq lim_\tau(\mathcal{F})$.

$s \leq 0.6$ için $\mathcal{F} \longrightarrow y_s$ olduğundan $y_s \leq lim_\tau(\mathcal{F})$.

$\Longrightarrow lim_\tau(\mathcal{F}) = \underline{1} - \mu$ dır.

Teorem 5.2.26: (X, τ) bir (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $x_t \in M(L^X)$ olsun. Bu takdirde, $\mathcal{F} \infty x_t \Leftrightarrow [\, \exists\, \mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ (L, M) − bulanık filtre : $\mathcal{G} \longrightarrow x_t \,]$ sağlanır. (Hussein, 2006)

İspat: $(\Longrightarrow)$ $\mathcal{F} \infty x_t$ olsun. Buradan, $\forall\, \mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\forall\, \lambda \in \mathcal{F}^0$ için $\lambda \wedge \mu \neq \underline{0}$ dır. Böylece Teorem 5.2.16 daki (C) koşulu sağlanır. Buradan, $\mathcal{G} = \mathcal{Q}_{x_t} \vee \mathcal{F}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtredir. Ayrıca, $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{G}$ olduğundan $\mathcal{G} \longrightarrow x_t$ dır ve $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olduğu da açıktır.

$(\Longleftarrow)$ $\mathcal{G}$ X üzerinde bir (L,M)-bulanık filtre öyle ki, $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G} \longrightarrow x_t$ olsun. $\mathcal{G} \longrightarrow x_t$ olduğundan $\mathcal{Q}_{x_t} \leq \mathcal{G}$ sağlanır.

$\mu \in (\mathcal{Q}_{x_t})^0$ ve $\lambda \in \mathcal{F}^0$ alalım. Hipotezden, $\lambda, \mu \in \mathcal{G}^0 \Longrightarrow \lambda \wedge \mu \in \mathcal{G}^0 \Longrightarrow \lambda \wedge \mu \neq \underline{0}$ dır. Sonuç olarak, $\mathcal{F} \infty x_t$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem bulanık topolojik uzaylarda LB-sürekli fonksiyonlar ile filtre yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi karakterize etmektedir.

Teorem 5.2.27: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki (L,M)-bulanık topolojik uzay olsun. X üzerindeki her $\mathcal{F}$ (L,M)-bulanık filtre, $x_t \in M(L^X)$ ve $\mu \in L^Y$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ dönüşümü LB-süreklidir.

(b) $\mathcal{Q}_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu) \leq \mathcal{Q}_{x_t}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$.

(c) $\mathcal{F} \longrightarrow x_t \Longrightarrow \varphi(\mathcal{F}) \longrightarrow (\varphi(x))_t$.

(d) $\varphi\left(lim_{\tau_1}(\mathcal{F})\right) \leq lim_{\tau_2}(\varphi(\mathcal{F}))$. (Hussein, 2006)

İspat: (a) $\Leftrightarrow$ (b): Sonuç 5.1.9.

(b) $\Longrightarrow$ (c): $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ olsun. Buradan, $\forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{Q}_{x_t}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \leq \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)$. Hipotezden, $\mathcal{Q}_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu) \leq \mathcal{Q}_{x_t}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \leq \mathcal{F}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) = \varphi(\mathcal{F})(\mu)$.

$\Longrightarrow \forall\, \mu \in L^Y$ için $\mathcal{Q}_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu) \leq \varphi(\mathcal{F})(\mu) \Longrightarrow \varphi(\mathcal{F}) \longrightarrow (\varphi(x))_t$ elde edilir.

(c) $\Longrightarrow$ (d): $\varphi^{\rightarrow}(x_t) \in \varphi\left(lim_{\tau_1}(\mathcal{F})\right)$, yani $t \leq \varphi\left(lim_{\tau_1}(\mathcal{F})\right)\big(\varphi(x)\big)$ olsun. Böylece, $\exists\, x \in \varphi^{-1}(y) :\ t \leq lim_{\tau_1}(\mathcal{F})(x)$, yani $x_t \in lim_{\tau_1}(\mathcal{F})$ ve $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ dır. (c) den, $\varphi(\mathcal{F}) \longrightarrow (\varphi(x))_t \Longrightarrow (\varphi(x))_t \in lim_{\tau_2}\big(\varphi(\mathcal{F})\big) \Longrightarrow \varphi\left(lim_{\tau_1}(\mathcal{F})\right) \leq lim_{\tau_2}\big(\varphi(\mathcal{F})\big)$.

(d) $\Longrightarrow$ (c): $\mathcal{F} \longrightarrow x_t$ olsun. (d) den, $(\varphi(x))_t \in lim_{\tau_2}\big(\varphi(\mathcal{F})\big)$ dır. Buradan, $\varphi(\mathcal{F}) \longrightarrow (\varphi(x))_t$ elde edilir.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Varsayım, $\varphi :\ (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-sürekli olmasın.

$\Longrightarrow\ \exists\, \mu \in L^Y :\ \tau_1\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \ngeq \tau_2(\mu)$ dır. Buradan, $\varphi^{\leftarrow}(\mu) \neq \underline{0}$ olduğu açıktır.

$\Longrightarrow\ x_t \in M(L^X) :\ x_t q \varphi^{\leftarrow}(\mu)$ için $\mathcal{Q}_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu) \nleq \mathcal{Q}_{x_t}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big)$ dır.

$\mathcal{Q}_{x_t} \longrightarrow x_t$ olduğundan, $\varphi\big(\mathcal{Q}_{x_t}\big)(\mu) = \mathcal{Q}_{x_t}\big(\varphi^{\leftarrow}(\mu)\big) \ngeq \mathcal{Q}_{\varphi^{\rightarrow}(x_t)}(\mu)$ olacaktır. Sonuç olarak, $\varphi\big(\mathcal{Q}_{x_t}\big) \nrightarrow (\varphi(x))_t$ dır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde, varsayım yanlıştır. Yani, $\varphi :\ (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-süreklidir.

Teorem 5.2.28: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki (L,M)-bulanık topolojik uzay ve $\varphi :\ (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ LB-sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\mathcal{F}$ (L,M)-bulanık filtresi ve $x_t \in M(L^X)$ bulanık noktası için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $\mathcal{F} \infty\, x_t \Longrightarrow \varphi(\mathcal{F}) \infty\, (\varphi(x))_t$.

(b) $\varphi\left(clu_{\tau_1}(\mathcal{F})\right) \leq clu_{\tau_2}\big(\varphi(\mathcal{F})\big)$. (Hussein, 2006)

İspat: (a) $\mathcal{F} \infty\, x_t$ olsun. Teorem 5.2.26 dan, $\exists\, \mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ (L,M)-bulanık filtre : $\mathcal{G} \longrightarrow x_t$ dır. φ LB-sürekli olduğundan Teorem 5.2.27 (c) den, $\varphi(\mathcal{G}) \longrightarrow (\varphi(x))_t$ dır. Teorem 5.2.24 (ii) den, $\varphi(\mathcal{G}) \infty (\varphi(x))_t$ dır. $\varphi(\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathcal{F})$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2.24 (x) den, $\varphi(\mathcal{F}) \infty(\varphi(x))_t$ elde edilir.

(b) Teorem 5.2.27 (c) $\Longrightarrow$ (d) koşulunun ispatına benzer şekilde görülür.

Örnek 5.2.29: $X = \{x, y\}$, $L = M = I$ ve $\odot = \wedge$ olsun. $\tau_1, \tau_2 : I^X \longrightarrow I$ (L,M)-bulanık topolojileri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\tau_1(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \{\underline{0}, \underline{1}\} \\ 1/2\,, & \lambda = \underline{0.4} \\ 0, & diğer \end{cases}, \qquad \tau_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \{\underline{0}, \underline{1}\} \\ 2/3\,, & \lambda = \underline{0.4} \\ 0, & diğer \end{cases}$$

Burada, $id_X : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ birim fonksiyonu LB-sürekli değildir. Çünkü, $\tau_2(\underline{0.4}) \nleq \tau_1(\underline{0.4})$ dır. Her $x_t \in M(I^X)$ için $(\mathcal{Q}_{x_t}^{\tau_2})^0 = (\mathcal{Q}_{x_t}^{\tau_1})^0$ olduğundan $\mathcal{F} \infty\, x_t$ ancak ve ancak $id_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \infty\, x_t$ dır. Bu ise Teorem 5.2.28 in tersinin genel olarak doğru olmasının gerekmediğini gösterir. (Hussein, 2006)

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak latis teorisindeki temel kavramlar, üçgensel normlar, latisler üzerindeki cebirsel yapılar ve kategorik kavramlar önemli özellikleri de verilerek özetlenmiştir. İkinci olarak, çeşitli yazarlar tarafından özel bir latis yapısı olan quantale latislerin (q-latislerin) kullanılmasıyla verilen ve daha önce tanımlanmış olan bulanık yapıların bir genellemesi olan latis değerli bulanık yapılara ve bu yapılar arasındaki ilişkilere değinilmiştir. Bunlara ek olarak, Kim (2003) tarafından verilen L-bulanık kapanış operatörü kavramı ve bu kavram kullanılarak elde edilen sonuçlar q-latislerin kullanılmasıyla daha genel bir yapı olan (L,M)-bulanık kapanış operatörlerine genişletilmiştir. Ayrıca bu kavram ile (L,M)-bulanık iç operatörleri ve (L,M)-bulanık topoloji arasındaki ilişkiler kategorik yapılarda kullanılarak incelenmiştir. Çalışmamızın son bölümünde ise, Hussein’ in tezindeki filtre kavramı ile ilgili bir takım eksiklikler giderilmiştir. Böylece, yukarıda sözü edilen yapıların tanıtıldığı ve aralarındaki ilişkilerin incelendiği Türkçe bir kaynağın literatüre kazandırılması hedeflenmiştir.

Bu tezde değinilmemiş olan diğer bir takım topolojik yapılarda yine q-latisler kullanılarak daha genel bir yapıya taşınabilir. Örneğin, filtre kavramının duali olan ideal kavramı ve Q-komşuluk sistemi kavramının duali olan R-komşuluk (uzak (remote) komşuluk) sistemi kavramları sırasıyla genelleştirilerek (L,M)-bulanık idealler ve (L,M)-bulanık R-komşuluk sistemi kavramları tanımlanabilir. Ayrıca, bu (L,M)-bulanık R-komşuluk sistemi kullanılarak (L,M)-bulanık ideal yakınsaklığı da incelenebilir.

Bunun yanı sıra, bir bulanık kümenin açık olmasının yanında açık olmamasının da derecelendirildiği farklı bir yapı olan “sezgisel bulanık topolojik uzaylarda” da yine q-latisler yardımıyla benzer genellemeler yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abbas, S., E., Aygün, H., “Intuitionistic fuzzy semiregularization spaces”, ***Information Sciences***, 176, 745-757, (2006).

Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G., E., “Abstract and Concrete Categories”, Online edition, ***Wiley***, 18-360, (2004).

Birkhoff, G., “Lattice Theory”, ***Amer. Math. Soc. Colloquium Publications***, Third Edition, 1-12, (1967).

Burton, M., H., Muraleetharan, M., Garcia, J., G., “Generalised filters 1”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 106, 275-284, (1999).

Chang, C., L., “Fuzzy Topological Spaces”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, vol:24, no:1, 182-190, (1968).

Chattopadhyay, K., C., Samanta, S., K., “Fuzzy Topology: Fuzzy Closure Operator, Fuzzy Compactness and Fuzzy Connectedness”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 54, 207-212, (1993).

Çetkin, V., Pazar, B., and Aygün, H., “(L,M)-Intuitionistic Fuzzy Filters”, ***The 20th International Congress of Jangjeon Mathematical Society***, Uludağ University, Bursa, 21-23 August (2008).

Demirci, M., “Neighborhood Structures of Smooth Topological Spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 92, 123-128, (1997).

Dongsheng, Z., “The N-compactness in L-fuzzy Topological Spaces”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 128, 64-79, (1987).

Gehrke, M., Walker, C. and Walker, E., “Fuzzy Logics Arising From Strict De Morgan Systems”, Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, S.E. Rodabaugh and E.P. Klement (ed.), ***Kluwer Academic Publishers***, Chapter 9, 257-276, (2003).

Gierz, G., et al, “A Compendium of Continuous Lattices”, ***Springer-Verlag***, 8-84, (1980).

Höhle, U., Sostak, A., P., “A General Theory of Fuzzy Topological Spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 73, 131-149, (1995).

Höhle, U., Sostak, A., P., “Axiomatic Foundations of Fixed-basis Fuzzy Topology”, U. Höhle, S. E. Rodabaugh (ed.), Mathematics of Fuzzy Sets, Logic, Topology and Measure Theory, The Handbook of Fuzzy Set Series, vol:3, ***Kluwer Academic Publisher***, 123-237, (1999).

Hussein, U., M., “On Fuzzy Topological Spaces”, Ph.D. Thesis, ***Faculty of Science Beni-Suef University***, Egypt, 42-62, 105-119, (2006).

Jinming, F., “Categories Isomorphic to L-FTOP”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 157, 820-830, (2006).

Johnstone, P., T., “Stone Spaces”, ***Cambridge University Press***, 1-35, (1992).

Kim, Y., C., Ko J., M., “Images and Preimages of L-filterbases”, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 1913-1927, (2006).

Kim, Y., C., “Initial L-fuzzy Closure Spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 133, 277-297, (2003).

Klement, E., P., Mesiar, R., Pap E., “Triangular Norms”, ***Kluwer Academic Publishers***, 3-51, (2000).

Kotze, W., “Lifting of sobriety concepts with particular reference to (L,M)-topological spaces”, Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, S.E. Rodabaugh and E.P. Klement (ed.), ***Kluwer Academic Publishers***, Chapter 16, 415-426, (2003).

Lee, S., J., Park, E., S., and Lee E., P., “A Generalization of a Lattice Fuzzy Topology”, ***Comm. Korean Math. Soc***., vol:12, no:1, 113-126, (1997).

Lowen, R., “Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 56, 621-633, (1976).

Luna-Torres, J., Ochoa C., O., “L-filters and LF-topologies”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 140, 433-446, (2003).

Mitchell, B., “Theory of Categories”, ***Academic Press***, 1-7, (1965).

Pao-Ming, P., and Ying-Ming, L., “Fuzzy Topology I. Neigborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 76, 571-599, (1980).

Paseka, J., “Simple Quantales”, ***Proceedings of the 8th Prague Topological Symposium***, Czech Republic, 314-328, (1996).

Peeters, W., “Subspaces of Smooth Fuzzy Topologies and Initial Smooth Fuzzy Structures”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 104, 423-433, (1999).

Ramadan, A., A., “Smooth Topological Spaces”, ***Fuzzy Sets and Systems***, 48, 371-375, (1992).

Ramadan, A., A., Abdel-Sattar, M., A., and Kim, Y., C., “Fuzzy Interior Spaces”, ***Bull. Korean Math. Soc***., vol:39, no: 4, 617-633, (2002).

Sostak, A., P., “On a Fuzzy Topological Structure”, ***Suppl. Rend.Circ. Math. Palermo Ser. II***, 11, 89-103, (1985).

Sostak, A., P., “Basic Structures of Fuzzy Topology”, ***Journal of Mathematical Sciences***, vol:78, no:6, 662-701, (1996).

Terziler, M., Öner, T., “Kafes Teorisi” (çeviri), ***Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Ders Kitapları Serisi***, no:178, 159-166, (2002).

Ying-Ming, L., Mao-Kang, L., “Fuzzy Topology”, ***World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Uto-Print Singapore***, 32-65, (1997).

Zadeh, L., A., “Fuzzy Sets”, ***Information and Control***, vol:8, no:3, 338-353, (1965).

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İzmit' te doğdu. İlk ve ortaokulu Leyla Atakan İ.Ö. okulunda liseyi ise İzmit Lisesinde tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında TÜBİTAK burslusu olarak Yüksek Lisans Öğrenimine başladı. Şubat 2009 dan beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.