

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFÜZYON DENKLEMİNDE BİLİNMEYEN KATSAYININ
BULUNMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe İKİER

Anabilim Dalı : Fizik

Danışman : Doç.Dr. Emine CAN

KOCAELİ, 2010

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

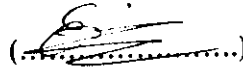
**DİFÜZYON DENKLEMİNDE BİLİNMEYEN KATSAYININ
BULUNMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Tuğçe İKİER

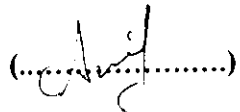
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24 Aralık 2009

Tezin Savunulduğu Tarih: 21 Ocak 2010

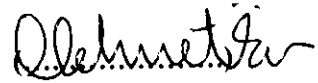
Tez Danışmanı
Doç. Dr. Emine CAN


(.....)

Üye
Yrd. Doç. Dr. M. Aylin BAYRAK


(.....)

Üye
Doç. Dr. Mehmet ÖZER



KOCAELİ, 2010

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde başlangıç, sınır ve ek koşullar kullanılarak bilinmeyen katsayıların bulunması ve bu denklemlerle ilişkili modellemelerinin yapılması uygulamalı bilimlerin güncel problemlerinden biridir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve destekleyen danışmanım, sayın Doç. Dr. Emine Can'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., FİZİK BÖLÜMÜ) ve sayın Yrd.Doç.Dr. M.Aylin Bayrak'a (KO.Ü., FEN-EDE. FAK., MATEMATİK BÖLÜMÜ) yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
TABLolar DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
İNGİLİZCE ÖZET.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. PROBLEMİN TANIMLANMASI.....	11
2.1. Trace-Type-Functional (TTF) Formülasyonu.....	12
2.2. Fixed Point Projection (FPP) Metodu.....	13
3. PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	15
3.1. Takip Yöntemi (Tridiagonal Matrix Algorithm).....	15
3.2. Sonlu Fark Şeması	17
3.2.2. Kapalı şema.....	18
4. SAYISAL ÖRNEKLER	20
4.1. Örnek 1.....	20
4.2. Örnek 2.....	22
4.3. Örnek 3.....	25
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	28
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	32

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3:1: $\Omega_{h\tau}$ kafesi	18
Şekil 4.1: N=20, M=40 için $\delta = 5\%, \delta = 10\%$ c(x)'deki random hatalar.....	24
Şekil 4.2: N=100, M=40 $\delta = 5\%, \delta = 10\%$ için c(x) random hataları	27

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 4.1: $N=20$ ve $M=50$ için $c(x)$ 'in gerçek ve sayısal değerleri.....	21
Tablo 4.2: $N=100$ ve $M=40$ için $c(x)$ 'in gerçek ve iterasyon değerleri	22
Tablo 4.3: $N=20$ ve $M=40$ için $c(x)$ 'in değerleri	23
Tablo 4.4: $N=20$ ve $M=40$ değerleri için $c(x)$ sonuçları	26

DİFÜZYON DENKLEMİNDE BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI

Tuğçe İKİER

Anahtar Kelimeler: Parabolik denklemler, Difüzyon Denklemi, Ters problemler, Bilinmeyen Ana katsayılar, Sonlu fark şeması

Özet: Bu çalışmada, parabolik denklemde son ölçüm noktasından baş katsayının belirlenmesi ters problemi ele alınmıştır. Yeni bir değişken uygulandıktan sonra, problem başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte klasik olmayan parabolik denklem olarak yeniden formüle edilmiştir.

Yapılan bu çalışmada, problemin çözümü için TTF (Trace-Type-Functional) formülasyonu kullanılmıştır. Metodun amacı, ele alınan problemlerdeki kısmi diferansiyel denklemden bilinmeyen ana katsayıyı ek koşul yardımı ile ortadan kaldırarak, problemi yeniden başlangıç ve sınır değer problemi olarak ifade etmektir. Yeni formüle edilmiş problemi çözmek için FPP (Fixed Point Projection) iteratif algoritması uygulanmıştır.

Ele alınan probleme kapalı sonlu fark şeması uygulanmıştır.

FINDING UNKNOWN COEFFICIENTS IN DIFFUSION EQUATIONS

Tuğçe İKİER

Keywords: Parabolic equations, diffusion equation, Inverse problems, Unknown leading coefficients, Finite difference scheme

Abstract: In this work, the inverse problem of determination of a leading coefficient in the parabolic equation from the final measurement is considered. After introducing a new variable, the problem is reformulated as a nonclassical parabolic equation along with the initial and boundary conditions.

Here, the solution of this problem is obtained by using TTF (Trace- Type-Functional) formulation. The strategy of method is to use additional specification to eliminate the unknown function from the partial differential equation and to can reformulate the considered problem as a initial-boundary value problem, then FPP (Fixed Point Projection) iterative algorithm is applied to solve the reformulated problem.

The finite difference scheme is used for solution of the problem.

1. GİRİŞ

Doğa olayları incelenirken birçoğunun lineer olmayan davranış sergilediği görülmektedir. Lineer olmayan bu tip problemler kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu tip problemler parabolik, hiperbolik ve eliptik tipteki denklemlerdir.

Kısmi diferansiyel denklemler için fiziksel süreçlerin belirlenmesini ifade eden olaylar ters problemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin problemin herhangi bir durumunun zamana göre önceki durumlarının belirlenmesi, sınır koşullarını veya sınır koşullarının içerdiği bazı parametrelerin bulunması, sadece sınır ölçümlerleri ile bir akışkanın, o sınırlarının belirlediği hacim içerisindeki akış profilinin belirlenmesi, gözenekli bir ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, bilinmeyen kaynak teriminin veya kapasite teriminin belirlenmesi v.s. ters problemlerle ifade edilebilir (Bellassoured ve Yamamoto, 2006).

Herhangi iki problemlerden her birinin formüle edilmesi diğerinin çözümü hakkında bilgi gerektiriyor ise bu problemlerden birisi ters diğeri düz problem olarak isimlendirilir. Ters problem çoğu zaman çözümün kararsızlığı ile ilişkili olarak doğru formüle edilmemiş (ill-posed) problemlerdir. Böylece bu problemlerin çözümü için Tikhonov regularizasyon yöntemi, Freidman iterasyon yöntemi ve benzeri gibi özel yöntemler gerekmektedir.

Bir problemin çok boyutlu lineer olmayan ve ill- posed olması bu tip problemlerin çözümü için özel ve etkili iterasyon yöntemlerinin kullanılmasını gerektirir ki Hadamard'a göre; aşağıdaki koşulları sağlayan probleme iyi formüle edilmiş (well-posed) problem denir.

- a-) Problemin çözümü vardır.
- b-) Problemin yalnız bir çözümü vardır.
- c-) Çözüm giriş verilerine sürekli bağlıdır; yani çözüm kararlıdır.

Ters katsayı problemleri 1955 yılında Lehner ve Wing, 1957 yılında Bykhovsky, 1959-1960 yıllarında Lax ve Phillips, 1961 yılında Sobolevsky, 1962 yılında B.F. Jones, Kato ve Futija tarafından ele alınmıştır. Daha sonra J.R.Canon ve P.C. Duchateau da dahil çok sayıda bilim adamı tarafından araştırılmış ve bu konuda yüzlerce yayınlanmış makaleleri bulunmaktadır.

Genel olarak parabolik denklemler

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, p) \quad (1.1)$$

olarak ifade edilir.

Parabolik denklemlerde ısı transferi, difüzyon olayları ve popülasyon dinamiği gibi problemleri ifade etmekte ve bu denklem fizikte korunum kanunlarından (enerjinin korunum kanunu, kütleinin korunumu kanunu ve momentum korunum kanunu) elde edilmektedir.

Yukarıda verilen (1.1) denklemindeki p giriş verileri, denklemin katsayıları veya bu denklemin çözümünün var ve tek olması için verilen sınır ve başlangıç koşulları olabilir. p verildiğinde (1.1) denklemin düzgün formüle edilmesi için yeterli bir teori vardır. p bilinmiyorsa, bu fonksiyonu elde edilmek için ek koşula ihtiyaç vardır.

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar, iç noktalarda ve sadece çözümün arandığı bölge sınırlarında olmak üzere iki türlü verilebilir. Bazı durumlarda ek koşulların iç noktalarda elde edilmesi imkânsız olduğundan, sadece sınırda verilen koşullarda problem çözülmektedir. Ele alınan fiziksel süreçte çeşitli ölçme şekilleri olabilir.

Bazı durumlarda ek koşul için yapılan ölçüm şekli seçilebilir. Bu ek koşullar çoğu zaman lokal özelliğe sahiptir. Üç farklı tipi vardır:

i) Dirichlet tipi, $u(x_0, t) = h(t) \quad 0 \leq t \leq T$

ii) Neumann tipi, $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h(t) \quad 0 \leq t \leq T$

iii) Robin tipi, α ve β sabit olmak $\alpha u(x_0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h(t)$

Parabolik denklemlerin uygulamalarına örnekler olarak;

Isı iletimi: $u_t - \nabla \cdot (D \nabla u) = f$

Kimyasal Kinetik: $u_t - D_1 u_{xx} = f_1(u, v)$

$$v_t - D_2 v_{xx} = f_2(u, v)$$

Nüfus dinamiği: $\frac{dP}{dT} = \alpha P$ veya $\frac{\partial P}{\partial t} - D_{Pxx} = f(p)$

verilebilir.

Burada D difüzyon katsayısı ve f kaynak terimi olarak ifade edilir.

Difüzyon gazlarda, sıvılarda ve katılarda olur. Difüzyon için ilgili denklem Fick yasası olarak bilinir. Bu yasadaki D tam olarak sabit değildir. D sadece mutlak sıcaklıkla değişmekle kalmayıp biraz da konsantrasyonla değişir. Ancak uygulamaların birçoğunda belirli bir problem için D sabit olarak alınır. Bu durumda Fick yasası

$$\frac{dm}{dt} = -DA \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1.2)$$

ile verilir. Burada $\frac{dm}{dt}$, A alanından birim zamanda geçen kütle, C ise akışkandaki moleküllerin konsantrasyonudur.

Difüzyon katsayısının büyüklüğü, konsantrasyon farkı, sıcaklık, molekül büyüklüğü, basınç farkı gibi faktörlere bağlı olarak değişir; ve

$$D = k_B T / 6\pi r \eta \quad (1.3)$$

ile verilir.

Genel halde D 'nin u, x, t , ve ∇u 'nun karmaşık bir fonksiyonu olması beklenebilir. Şayet malzeme çok düzgün ise, malzeme katsayılarının x uzaysal değişkene bağlı olacağını bekleriz.

Eğer $D = D(t)$, $D = D(x)$, veya $D = D(u)$ bağıllığını biliyorsak, modeli bu bağlantıya göre oluşturabiliriz.

Bir ilk yaklaşım için D 'ye ait bir açılımda ilk birkaç terime karşılık gelmek üzere

$$D(x,t,u) \approx D_1(x) + D_2(u) + D_3(t) \quad (1.4)$$

düşünülebilir. Eğer terimlerden biri diğerlerinden üstün ise, bir ön bağıntı elde edebiliriz ve mümkün şekilde ana bağıllığın biçimini sabit tuttuktan sonra diğer terimleri yeniden elde edebiliriz.

İlave olarak, malzeme özellikleri, bağlı değişkenler sabit tutuldukları takdirde, zamanla değişmezler, o zaman katsayıların t 'ye sıkı bağlı olmadıklarını bekleyebiliriz. D katsayısı x ' in bir fonksiyonu ise, genellikle iç bölge ölçmelerine ihtiyaç vardır veya birçok sınır ölçmelerine ihtiyaç duyabiliriz.

Genellikle, parabolik denklemlerdeki katsayılar fiziksel önemi olan ölçümleri ve parametreleri (örneğin, genlikleri, frekansları) yansıtır. Sadece, bir (veya mümkün olabilen birkaç) parametrenin değiştiği deneylerin kurulmasına çalışılır ve tekrarlanan gözlem ile bilinmeyen katsayıların bağıllık biçimini yeniden elde etmek gerekir. Ancak; fiziksel kanunları ifade eden çoğu denklem gerçekte lineer olmayan denklemdir.

Parabolik denklemler için ters problemin klasik örnekleri şunlardır:

$$u_t - u_{xx} = a(t)F[u(x,t)] \quad \text{Zamana bağlı kaynak terimi}$$

$u_t = [a(u)u_x]_x$ Difüzyon denkleminde bilinmeyen katsayısı

$c(u)u_t(x,t) = (k(u)u_x)_x = 0$ hiperbolik özelliklerinin eş zamanlı belirlenmesi

Ters problemlerin çözüm yöntemlerini açıklamak için

$$u_t = (a(u)u_x)_x \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1.5)$$

başlangıç koşulu

$$u(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (1.6)$$

Sınır koşulu

$$u(0,t) = f(t) \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$u(1,t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.8)$$

Ek koşul

$$a[u(0,t)]u_x(0,t) = g(t) \quad t > 0 \quad (1.9)$$

denklem (1.5)-(1.9) sistemini ele alalım.

Bu örnekte $f(t), g(t)$ bilindiğini varsayarak $\{u, a\}$ çifti bulunur.

$\{u, a\}$ çifti (1.7) denkleminde

$$a[u(0,t)] = \frac{g(t)}{u_x(0,t)} \quad (1.10)$$

elde edilir.

Yukarıdaki (1.5) denkleminde $a(u)$ katsayısını ortadan kaldırdığımızda aşağıdaki denklem (1.12)–(1.15) sistemi elde edilir.

$$u_t = (a[g;u](u)u_x)_x \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1.11)$$

$$u(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (1.12)$$

$$u(0,t) = f(t) \quad t > 0 \quad (1.13)$$

$$u(1,t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.14)$$

$$a[g;u](z) \equiv \frac{g(f^{-1}(z))}{u_x(0, f^{-1}(z))} \quad (1.15)$$

$A[g;u]$ katsayısı bilinmeyen fonksiyon $u = u(x,t)$ 'nin TTF formunu içerir. TTF formu, kısmi diferansiyel denklemden difüzyon katsayısını kaldırmak için akı sınır koşulunun kullanılmasıyla elde edilir (D.Collen, W.Rundell, R. Ewing).

Son zamanlarda, bu tip parabolik denklemler çok fazla dikkat çekmeye başlamıştır. Bilinmeyen fonksiyonların sadece zaman değişkenine bağlı olduğu denklemlerle ve bu problemlerin iyi tanımlılığı üzerinde Jones (1962, 1963), Cannon (1964), Cannon ve Zachman (1982), gibi daha pek çok bilim adamı çalışmıştır. Bazı bilim adamları bu tip problemleri oldukça farklı bir bakış açısıyla ele almışlardır (Cannon ve Yin, 1989a). Problemden verilen ek koşul, bilinmeyen katsayıyı uzay değişkenine bağlı çözüm fonksiyonu aracılığıyla yazmak için kullanılır. Böylece klasik olmayan parabolik denklemle normal başlangıç sınır değer problemi elde edilir.

$$u_t(x,t) = F(x,t,u,u_x,u_{xx},u(x_0,t),u_x(x_0,t),u_{xx}(x_0,t)) \quad (1.16)$$

Burada x_0 sabit bir noktadır. Bu problemin varlık ve tekliği Cannon ve Yin (1989a, 1989b), Yin (1989) tarafından incelenmiştir. Parabolik denklemde bilinmeyen katsayılar uzay değişkenine bağlı olduğunda problem çok daha zor ve karmaşık hale gelir. Birkaç bilim adamı, kısmen uzay değişkenine $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, ($m < n$) bağlı bilinmeyen parametre problemi üzerinde çalışmış ve varlıkla ilgili sonuçlar için

yeterli koşullar vermiştir (Beznoshchenko, 1975, 1983). (1.17)'de bir boyutlu denklemden $c(x)$ 'in belirlenmesinde (1.18)–(1.19) başlangıç, sınır koşulu ve

$$u(x_0, t) = g(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad x_0 \in [0, 1]$$

ek koşulu kullanılarak Pierce (1979) ve Suzuki (1985) Gelfand-Levitan teorisiyle problemin tekliğini ispatlamışlardır. Rundell (1980, 1983) farklı ek koşulla benzer sonuçlar elde etmiştir. (1.17)'daki ek koşul verildiğinde Rundell (1987), pozitif fonksiyonlar sınıfında çözümün tekliğinin değişik bir ispatını verir ve bu problemin varlığını açık soru olarak bırakır. Varlık teoremi yeterli koşullar altında elde edilmiştir (Prilepko ve Solov'ev, 1987). Fakat bu koşullar bilinen veriye bağlıdır ve ispatlanması zordur. (1.17)'de $d(x)$ 'in belirlenmesinde Cannon (1968), $f(x, t) \equiv 1$ olması halinde problemin tekliğini göstermiştir. Daha sonra bu sonuç Cannon ve Ewing (1976), tarafından $f(x, t) \equiv f(x)$ ile daha genel lineer parabolik denklem için genelleştirilmiştir. Rundell (1980), analitik yarı gruplarla $f(x, t) \equiv 1$ için varlık ve tekliği göstermiştir. Bilinen veriler üzerinde bazı kısıtlamalarla genel $f(x, t)$ ile bu problemin tekliğine ek olarak varlığı da elde edilmiştir (Prilepko ve Solov'ev, 1987). Parabolik ters problemlerde çözümün tekliği ile ilgili başka sonuçlar da bulunmuştur (Isakov, 1982). Şu anki bilgilere göre $b(x)$ 'in bulunması için hiçbir varlık teoremi yoktur. Burada bilinmeyen katsayılar $b(x), c(x)$ ve $d(x)$ 'in denklemden yok edilmesinde yeni bir yol uygulanır. Problemler, zaman değişkeniyle çözüm fonksiyonunu içeren klasik olmayan parabolik denklemlere dönüştürülür (Cannon ve Yin, 1989a). Ayrıca bu durumdaki başlangıç koşulu, başlangıç ve son zaman adımı değerler içeren bir bağıntı ile verilir. Yardımcı problem ele alınarak bir operatör tanımlanır ve operatörün Schauder sabit nokta teoremiyle bir sabit noktayı içerdiği gösterilir.

$u(x, t)$ 'nin yanında $b(x), c(x)$ ve $d(x)$ gibi katsayıların birinin bulunması problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$u_t = \Delta u + b(x)b_x(x)u_x + c(x)u + d(x)f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (1.17)$$

$$u(x, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in S_T = S \times (0, T) \quad (1.18)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.19)$$

ve ek koşul

$$u(x,T) = u_1(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.20)$$

Burada $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $\Omega \subset R^n$ 'de sınırlanmış bir bölge $S = \partial\Omega$ bu bölgenin sürekli sınırı ve $i = \overline{1, n}$ ' dir.

1. $b(x)$ 'in Bulunması

$$u_t = \Delta u + b(x)b_i(x)u_{x_i} \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.21)$$

denklemini ve (1.12) – (1.15) başlangıç ve sınır koşulları ile bilinmeyen katsayı $b(x)$ ve çözüm fonksiyonu $u(x,t)$ nin bulunması problemi ele alınsın.

$$v(x,t) = u_t(x,t) \quad (x,t) \in \overline{Q_T}$$

dönüşümü uygulanıp (1.16) 'de t üzerinden diferansiyelleşirse;

$$v_t = \Delta v + b(x)b_i(x)v_{x_i} \quad (1.22)$$

elde edilir.

Ek koşul (1.14) ve $\sum_{i=0}^n b_i(x)u_{1x_i} \neq 0 \quad x \in \bar{\Omega}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{u_t(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{1x_i}(x)} \\ &= \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{1x_i}} \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Böylece (1.14) problemi aşağıdaki probleme eşdeğer olur.

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{1x_i}} b_i(x) v_{x_i} \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.24)$$

$$v(x,t) = g_t(x,t) \quad (x,t) \in S_T \quad (1.25)$$

$$v(x,0) = \Delta u_0(x) + k(x)[v(x,T) - \Delta u_1(x)] \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.26)$$

Burada $x \in \bar{\Omega}$, $0 < k(x) < 1$ ve $k(x) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{0x_i}(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{1x_i}(x)}$ 'dir.

Denklem (1.20), $u(x,T)$ yi içerdiğinden ve (1.19) daki farklı başlangıç koşulundan dolayı klasik değildir. Bu klasik olmayan denklemin varlığı Schauder sabit nokta teoremiyle gösterilebilir.

2. $c(x)$ 'in Bulunması

$$u_t = \Delta u + c(x)u \quad (1.27)$$

denklemini ve (1.17)–(1.20) başlangıç ve sınır koşulları ile bilinmeyen katsayı $c(x)$ ve çözüm fonksiyonu $u(x,t)$ 'nin bulunması problemi ele alınsın.

Böylece, (1.27) problemi

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{u_1(x)} v \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.28)$$

$$v(x,t) = g_t(x,t) \quad (x,t) \in S_T \quad (1.29)$$

$$v(x,0) = \Delta u_0(x) + \frac{v(x,T) - \Delta u_1(x)}{u_1(x)} u_0(x) \quad x \in \bar{\Omega}, u_1(x) \neq 0 \quad (1.30)$$

eşdeğer problemi haline dönüşür.

Çözümün varlığını elde etmek için, klasik olmayan (1.28)–(1.30) probleminden keyfi bir başlangıç koşulu $u_0(x)$ ile yeterli koşulları vermek zordur. Burada sadece $u_0(x) \equiv 0$ için özel koşul ele alınabilir.

3. $d(x)$ 'in bulunması

Son olarak $u(x,t)$ ve $d(x)$ 'in bulunması problemi aşağıdaki gibi gösterilir.

$$u_t = \Delta u + d(x) f(x, t) \quad (1.31)$$

Başlangıç ve sınır koşulları (1.28) – (1.30) 'da verildiği gibidir. (1.31) probleminin eşdeğer formu şöyledir:

$$v_t = \Delta v + \frac{v(x, T) - \Delta u_1(x)}{f(x, T)} f_t(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (1.32)$$

$$v(x, t) = g_t(x, t) \quad (x, t) \in S_T \quad (1.33)$$

$$v(x, 0) = \Delta u_0(x) + \frac{v(x, T) - \Delta u_1(x)}{f(x, T)} f(x, 0) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.34)$$

Maksimum prensibini uygulamak için, çok iyi bilinen

$$v(x, t) = e^{\beta t} w(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T$$

dönüşümü yapılır. Burada β sabit bir sayıdır. $w(x, t)$ için denklem şöyle yazılır:

$$w_t = \Delta w - \beta w + \frac{w(x, T) e^{\beta T} - \Delta u_1(x)}{f(x, T)} e^{-\beta t} f_t(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (1.35)$$

$$w(x, t) = e^{-\beta t} g_t(x, t) \quad (x, t) \in S_T \quad (1.36)$$

$$w(x, 0) = \Delta u_0(x) + \frac{w(x, T) e^{\beta T} - \Delta u_1(x)}{f(x, T)} f(x, 0) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.37)$$

(John M.Chadam ve Hong-Ming Yin).

Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. bölümde, difüzyon denkleminde bilinmeyen ana katsayının bulunması problemi tanımlanarak, problemin çözümü için uygulanan TTF (Trace Type Functional) ve FPP (Fixed Point Projection) metodu ele alınmış bu çözüm metotlarının uygulanması hakkında gerekli açıklamalara yer verilmiştir.

3. bölümde, problemin çözümünde kullanılan TDMA yöntemi açıklanarak; kapalı sonlu fark şeması hakkında bilgi verilmiştir.

4. bölümde, ele alınan problemle ilgili sayısal örnekler verilerek, çözüme ilişkin sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

5. bölümde, ele aldığımız problemin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiştir.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Bu bölümde, ikinci dereceden parabolik denklem için sınır değer problemi ele alınmıştır.

$$u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(x,t) \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.2)$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3)$$

Bu problemde $a(x)$, $b(x)$ ve $f(x,t)$ verilen fonksiyonlar, $c(x)$ ise bilinmeyen katsayıdır ve ek koşul,

$$u(x,T) = u_1(x) \quad 0 < x < l \quad (2.4)$$

olarak verilir. Amacımız (2.1) ve (2.4)denklem sisteminde $u(x,t)$ ve $c(x)$ fonksiyonlarını bulmaktır. Fiziksel olarak bu model homojen olmayan difüzyon sürecini tanımlar. Burada $c(x)$ difüzyon kaynağını oluşturan ortamın özelliğini verir. Uzay değişkenine bağlı bilinmeyen katsayı problemleri bu şekilde bulunur (V.Isakov-L.Yan, C.L.Fu , F.Dou) .

Literatürde bu tip problemlerin çözümünde en yaygın metod en küçük kareler yöntemidir. Ek koşulla bağlı hata fonksiyonlarını minimize etmek için optimal parametre değerleri kullanılır. Bu yaklaşımın bazı hataları vardır. Mesela, optimal problemin çözümü orijinal ters problemin çözümünü vermez ve verilerden kaynaklı hata fonksiyonları bilinmeyen fonksiyonu tanımlamakta yetersiz kalabilir. Bu çalışmada ek koşul tanımlanarak (2.1)-(2.4) problemi TTF fonksiyonu içeren lineer olmayan parabolik denklem için tekrar formüle edilir (M.S.Pilant, W.Rundell). Daha sonra formüle edilmiş problem fixed point metodu uygulayarak problem çözülür.

2.1. $c(x)$ 'in Bulunması (TTF Formülasyonu)

Bu çalışmada, ana katsayı $c(x)$ ek koşul yardımıyla çekilip, (2.1) – (2.4) problemi yeniden formüle edilir.

Basitleştirmek için,

$$a(x) \equiv 1, b(x) = f(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (2.5)$$

alınır. (2.1) denklemi

$$u_t - \Delta u + c(x)u = 0 \quad (2.6)$$

denkleme indirgenir. Daha sonra

$v(x, t) = u_t(x, t)$ dönüşümünü uygulayarak

$$c(x) = \frac{\Delta u_1(x) - v(x, T)}{u_1(x)}, \quad 0 < x < l \quad (u_{1,xx}(x) \neq 0) \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.6) denklemini $v(x, T)$ 'e göre yazarsak;

$$v_t = \Delta v + \frac{\Delta u_1(x) - v(x, T)}{u_1(x)} v, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (2.8)$$

$$v(x, t) = g_t(x, t), \quad 0 < t \leq T \quad (2.9)$$

$$v(x, 0) = \Delta u_0 + \frac{\Delta u_1(x) - v(x, T)}{u_1(x)} u_0(x), \quad 0 < x < l \quad (2.10)$$

elde edilir.

Denklemden $v(x, T)$ fonksiyonu ve başlangıç koşulu bilinmediği için (2.6) denklemi klasik değildir. Bu sebepten verilen τ değerleri için $(T - \tau, T)$ aralığında problemin integralini alırız.

Böylece denklem

$$v(x, T) = v(x, T - \tau) + \int_{T-\tau}^T \left[\Delta v + \frac{\Delta u_1(x) - v(x, T)}{u_1(x)} v \right] dt \quad (2.11)$$

M operatörü (2.9) denklemin sağ tarafına yazılırsa denklem şu hale gelir.

$$v(x, T) = M(v(x, t)) \quad (2.12)$$

(2.9) 'un çözümü için fixed point metodu kullanılır.

$$v^s(x, T) = M(v^{(s-1)}(x, T)) \quad (2.13)$$

$v^s(x, T)$ değerini elde etmek için verilen $v^{(s-1)}(x, T)$ değeri ile (2.8)–(2.10) denklem sistemini her iterasyon adımında çözebiliriz. Bu sistemin çözümünde kapalı sonlu fark şeması kullanılmıştır.

2.2. Fixed Point Projection (FPP) Metodu

Yeni formüle edilmiş problemi çözmek için FPP metodu kullanılabilir. (2.10)–(2.14) sistemine sonlu fark şeması uygulanır. $\tau = \Delta t > 0$ ve $h = \Delta x > 0$ zaman ve uzay adımları olmak üzere, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ ve $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$. Burada; $t_j = j\tau, x_i = ih$ sırasıyla $[0, T]$ ve $[0, 1]$ kafeslerini gösterir. Aynı zamanda $v_i^j, u(x_i, t_j)$ 'ye yaklaşım olsun. (2.10)–(2.14) sistemine kapalı sonlu fark şeması uygulanınca aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + \frac{\Delta u_1(x_i) - v_i^M}{u_1(x_i)} v_i^j \quad (2.14)$$

$$v_0^j = g_{1t}(t_j), \quad v_N^j = g_{2t}(t_j) \quad j = \overline{0, M}, \quad (2.15)$$

$$v_i^0 = \Delta u_0(x_i) + \frac{\Delta u_1(x_i) - v_i^M}{u_1(x_i)} u_0(x_i) \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.16)$$

(2.14)–(2.16) sistemini çözmek için FPP (Fixed Point Projection) iteratif algoritması kullanılır.

Başlangıç zaman adımında $v_i^{M,0}$ 'ifadesini $v_0^M = g_{1t}(t_M)$ ve $v_N^M = g_{2t}(t_M)$ 'nin lineer interpolasyonu olarak $v_i^{M,0} = g_{1t}(t_M) + (g_{2t}(t_M) - g_{1t}(t_M))x_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ biçiminde yazılır. Bir sonraki değer $v_i^{M,1}$ 'yi bulmak için aşağıdaki sistem çözülür. s iterasyon sayısını göstermek üzere;

$s = 1$ için

$$\frac{v_i^{j,s} - v_i^{j-1,s}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^{j,s} - 2v_i^{j,s} + v_{i-1}^{j,s}}{h^2} + \frac{\Delta u_1(x_i) - v_i^{M,s-1}}{u_1(x_i)} v_i^{j,s}, j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.17)$$

$$v_0^{j,s} = g_{1t}(t_j), \quad v_N^{j,s} = g_{2t}(t_j) \quad j = \overline{0, M}, \quad (2.18)$$

$$v_i^{0,s} = \Delta u_0(x_i) + \frac{\Delta u_1(x_i) - v_i^{M,s-1}}{u_1(x_i)} u_0(x_i) \quad i = \overline{1, N-1} \quad (2.19)$$

Verilen ε ve bazı s 'ler için;

$$\max_i |v_i^{M,s} - v_i^{M,s-1}| \leq \varepsilon \quad (2.20)$$

koşulu sağlanıncaya kadar işleme devam edilir. Daha sonra;

$$c_h(x_i) = \frac{v_i^{M,s} - \Delta u_1(x_i)}{u_1(x_i)}$$

bulunur.

elde edilir. (3.4) denklemini (3.5) 'de yerleştirilirse,

$$y_{j-1} = \alpha_j (\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + \alpha_j \beta_{j+1}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.6)$$

ifadesi bulunur. Bütün bunlar (3.2) 'de yazıldığında

$$[\alpha_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + b_j] y_{j+1} + [\beta_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + a_j \beta_j + f_j] = 0, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.7)$$

denklemini elde edilir. Eşitliğin sağlanması için α_{j+1} ve β_{j+1} katsayıları öyle seçilmelidir ki parantezler içi sıfıra eşit olsun; o zaman

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - a_j \alpha_j}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.8)$$

olmalıdır ve $\alpha_j, \beta_j (j > 1)$ 'lerin bulunması için başlangıç α_1 ve β_1 değerlerinin verilmesi gerekir. (3.4) denkleminde $j = 0$ olduğunda,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1 \quad (3.9)$$

bulunur ki; bu durumda $\alpha_1 = \chi_1, \beta_1 = \mu_1$ elde edilir. Dolayısıyla (3.8) ifadesi ile α_{j+1} ve β_{j+1} katsayıları bulunur ve buna takip yönteminin (TDMA) düz gidişi denir. Eğer ters takip yöntemi kullanılacaksa önce y_N 'nin bilinmesi gerekir. (3.4) denkleminde $j = N-1$ yazılırsa $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$ bulunur ve buradan,

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N} \quad (3.10)$$

elde edilir. y_N bilindikten sonra (3.8) formülü ile tüm y_j 'lerin bulunmasına ters takip denir. Takip (TDMA) yönteminin kullanılabilmesi için,

$$a_j \neq 0, b_j \neq 0, |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

ve

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 2 \quad (3.12)$$

koşullarının sağlanması gerekir.

3.2. Sonlu Fark Şeması

τ zamana bağlı adım uzunlukları, h uzay koordinatları, M ve N tamsayılar olmak üzere,

x değişkeni için Ω_h kafesi

$$\Omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}$$

t değişkeni için Ω_τ kafesi

$$\Omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M\tau = T\}$$

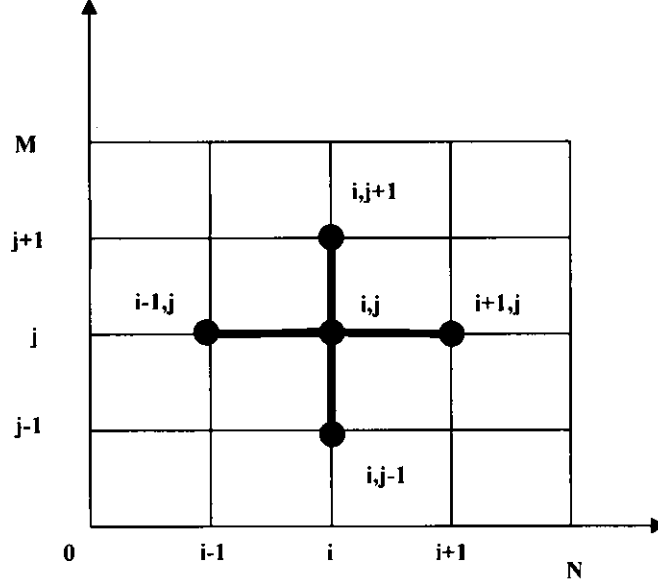
şeklinde oluşturulur.

(x_i, t_j) , $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$ noktaları, $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ şebekelerinin noktaları olmak üzere

$$\tau = \Delta T > 0, \quad h = \Delta x > 0$$

$$\Omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = ih, t_j = \tau j, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{T}{M} \right\} \quad (3.13)$$

kafesi yazılır ve Şekil (3.1) deki gibi gösterilir.



Şekil 3.1: $\Omega_{h\tau}$ kafesi

$(x_0, t_j), (x_1, t_j), \dots, (x_N, t_j)$ noktaları kümesine j . katman denir.

3.2.2. Kapalı şema

Zamana bağlı geri fark t_j ve uzaya bağlı ikinci dereceden merkezi fark x_i kullanılarak (2.10) denklemini

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + \frac{v_i^m - \Delta u_1(x_i)}{u_1(x_i)} v_i^j \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır.

(3.14) denkleminin başlangıç koşulu

$$v_i^0 = \Delta u_0(x_i) + \frac{v_i^M - u_{1xx}(x_i)}{u(x_i, t_j)} u_0(x_i) \quad i = \overline{1, N-1} \quad (3.15)$$

ve sınır koşulları

$$v'_0 = g_{1r}(t_j), \quad v'_N = g_{2r}(t_j) \quad j = \overline{0, M}, \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada

$$c_i = \frac{v_i^M - u_{1xx}(x_i)}{u(x_i, t_j)} u_0(x_i) \text{ alınarak, denklem TDMA katsayılarına göre düzenlenirse}$$

$$\tau v'_{i-1} - (\tau h^2 c_i - h^2 - 2\tau) v'_i + \tau v'_{i+1} = -(h^2 v_i^{j-1}) \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-1 \quad (3.17)$$

denklemini elde edilir. Kapalı şemanın kararlılığı için benzer şekilde harmonikler yöntemi uygulanır.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} \quad 2 \square$$

(3.18)

$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi}$ biçimindeki özel çözüm (3.18)'de yerine yazılır.

$$\frac{q-1}{\tau} = \tilde{a} \frac{q(e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi})}{h^2} \text{ ve buradan}$$

$$q = (1 + 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2})^{-1}, \quad \gamma = \frac{\tau \tilde{a}}{h^2}, \quad |q| \leq 1 \text{ bulunur.}$$

Kapalı şema koşulsuz kararlılık göstermektedir ve yakınsaktır (Dehghan, 2005).

4. SAYISAL ÖRNEKLER

4.1. Örnek 1:

(2.1) denklemini basitleştirmek için $a(x) \equiv 1$, $b(x) = f(x) = 0$ aldığımızda bu denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x)u \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T \quad (4.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad 0 < x < 1 \quad (4.2)$$

$$u(0,t) = g_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.3)$$

$$u(1,t) = g_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.4)$$

Sistemi elde edilir.

Ve ek koşul

$$u(x,T) = u_1(x) \quad 0 < x < 1 \quad (4.5)$$

ile verilir.

İlk olarak $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t) = \frac{\sin(\pi x)e^t}{e^T} \quad (4.6)$$

alınarak, başlangıç ve sınır koşulları yerine yazıldığında;

$$u(x,0) = \frac{\sin \pi x}{e^T} \quad (4.7)$$

$$g_1(t) = u(0,t) = 0 \quad (4.8)$$

$$g_2(t) = u(1,t) = \frac{e^t \sin \pi}{e^T} \quad (4.9)$$

ve ek koşul

$$u(x,T) = \frac{e^T \sin \pi x}{e^T} \quad (4.10)$$

olarak belirlenirse,

Ek koşul $T = 1$ için $u(x,1) = \frac{e^1 \sin \pi x}{e^1}$ biçiminde yazılır.

$u(x,t)$ fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevleri alınır

$$u_t(x,t) = v(x,t) = \frac{\sin \pi x e^t}{e^T} \quad (4.11)$$

$$u_x(x,t) = \frac{e^t \pi \cos \pi x}{e^T} \quad (4.12)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{-\pi^2 e^t \sin \pi x}{e^T} \quad (4.13)$$

ve bunları (4.1) denkleminde yazarsak,

$$c(x) = -(1 + \pi^2) \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Bu probleme ait sayısal sonuçlar Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1: N=20, M=50 için $c(x)$ 'in gerçek ve sayısal değerleri

c(x)	Gerçek c(x)	Sayısal c(x)
0.10	-10.8703	-10.860211
0.20	-10.8703	-10.860212
0.30	-10.8703	-10.860212
0.40	-10.8703	-10.860213
0.50	-10.8703	-10.860214
0.60	-10.8703	-10.860216
0.70	-10.8703	-10.860217
0.80	-10.8703	-10.860217
0.90	-10.8703	-10.860217

Tablo 4.1'de görüldüğü gibi önerilen yöntem sonucunda elde edilen sonuçlar gerçek sonuca yakındır.

Tablo 4.2: N=100 , M=40 için gerçek ve iterasyonlu c(x) değerleri

x	Gerçek c(x)	1.iterasyon	5.iterasyon	10.iterasyon
0.1	-10.8703	-10.8814	-10.9411	-11.0691
0.2	-10.8703	-10.8813	-10.9410	-11.0689
0.3	-10.8703	-10.8807	-10.9404	-11.0683
0.4	-10.8703	-10.8817	-10.9413	-11.0693
0.5	-10.8703	-10.8816	-10.9412	-11.0692
0.6	-10.8703	-10.8832	-10.9429	-11.0709
0.7	-10.8703	-10.8822	-10.9419	-11.0698
0.8	-10.8703	-10.8848	-10.9445	-11.0724
0.9	-10.8703	-10.8818	-10.9415	-11.0695

Tablo(4.2)'de iterasyon sayısı arttıkça gerçek çözümden uzaklaşmakta olduğumuzu görüyoruz.

4.2. Örnek 2:

(4.1) - (4.5) probleminde

$$u(x,t) = e^{t+x^2} \quad (4.15)$$

alınarak, başlangıç ve sınır koşulları yerine yazıldığında;

$$u(x,0) = e^{x^2} \quad (4.16)$$

$$g_1(t) = u(0,t) = e^t \quad (4.17)$$

$$g_2(t) = u(1,t) = e^{t+1} \quad (4.18)$$

ve ek koşul

$$u(x,T) = e^{T+x^2} \quad (4.19)$$

$u(x,t)$ fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevleri alınırsa.

$$u_t(x,t) = v(x,t) = e^{t+x^2} \quad (4.20)$$

$$u_x(x,t) = 2x e^{t+x^2} \quad (4.21)$$

$$u_{xx}(x,t) = (2 + 4x^2) e^{t+x^2} \quad (4.22)$$

(2.6) denklemine (4.15) ile (4.22) 'leri yerleştirirsek ve (2.7) denkleminde $c(x)$ 'i

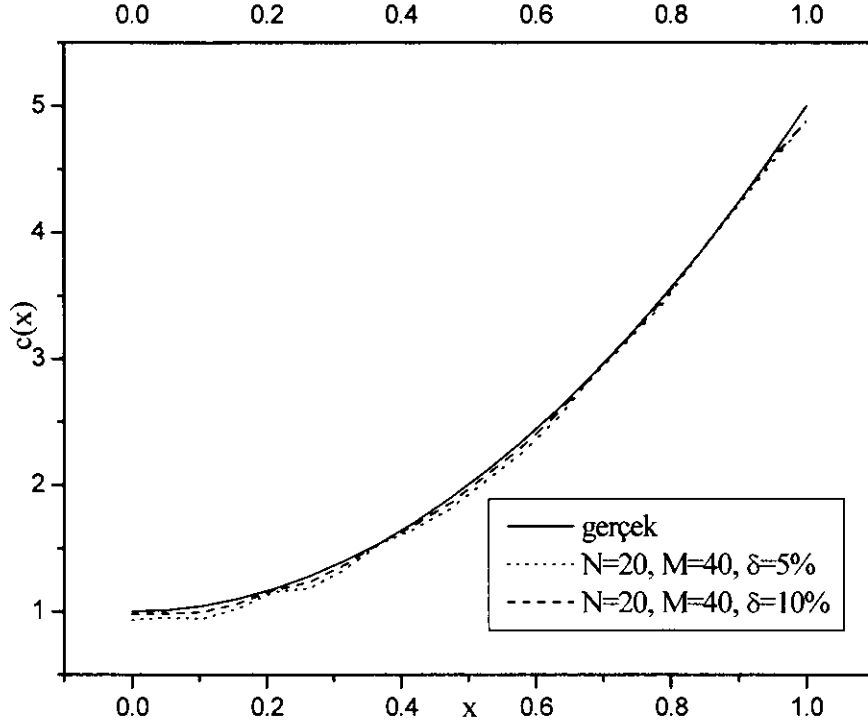
$$c(x) = 1 + 4x^2 \quad (4.23)$$

bulunur.

Tablo 4.3: M=40 ve N=20 için $c(x)$ değerleri

x	Sayısal Çözüm	Gerçek Çözüm	Hata
0	1.0176	1	0.0176
0.05	1.0122	1.01	0.0022
0.1	1.042	1.04	0.0020
0.15	1.0919	1.09	0.0019
0.2	1.1619	1.16	0.0019
0.25	1.252	1.25	0.0020
0.3	1.3622	1.36	0.0022
0.35	1.4925	1.49	0.0025
0.4	1.6428	1.64	0.0028
0.45	1.8133	1.81	0.0033
0.5	2.0039	2	0.0039
0.55	2.2146	2.21	0.0046
0.6	2.4454	2.44	0.0054
0.65	2.6962	2.69	0.0062
0.7	2.9673	2.96	0.0073
0.75	3.2584	3.25	0.0084
0.8	3.5696	3.56	0.0096
0.85	3.901	3.89	0.0110
0.9	4.2525	4.24	0.0125
0.95	4.6241	4.61	0.0141
1	4.1018	5	0.8982

Tablo 4.3' de görüldüğü gibi N ve M için elde ettiğimiz c(x) değerleri gerçek sonuca çok yakın olduğu için hata değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 4.1: N=20, M=40 için ve $\delta = 5\%$ ve $\delta = 10\%$ c(x)'deki random hataları

Şekil 4.1 'de önerilen yöntemin random hatalara karşı duyarlılığı test edilmiştir. N, M değerleri sabit tutularak farklı random hata değerleri (0.05 ve 0.10) alınıp ve $\epsilon=0.005$ elde edilen c(x) değerleri gösterilmiştir.

FPP metodunun kararlılığını göstermek için;

$u_i^*(x_i) = u_i(x)(1 + \delta(x, d))$ $i = 1, 2, \dots, N$. alındı. Burada; $\delta(x, d)$ x'in $(-d, d)$ 'de düzgün dağılımlı random fonksiyonudur.

4.3. Örnek 3:

(4.1) - (4.5) probleminde farklı $u(x,t)$ için

$$u(x,t) = e^t (x^2 - x + 1) \quad (4.24)$$

başlangıç ve sınır koşulları;

$$u(x,0) = x^2 - x + 1 \quad (4.25)$$

$$g_1(t) = u(0,t) = e^t \quad (4.26)$$

$$g_2(t) = u(1,t) = e^t \quad (4.27)$$

ve ek koşul

$$u(x,T) = e^T (x^2 - x + 1) \quad (4.28)$$

elde edilir.

Yeni $u(x,t)$ fonksiyonu için denklem (4.1) tekrar düzenlenirse alınır.

$$u_t(x,t) = v(x,t) = (x^2 - x + 1)e^t \quad (4.29)$$

$$u_x(x,t) = (2x - 1)e^t \quad (4.30)$$

$$u_{xx}(x,t) = 2e^t \quad (4.31)$$

ve bunları (4.1) denkleminde yazarsak,

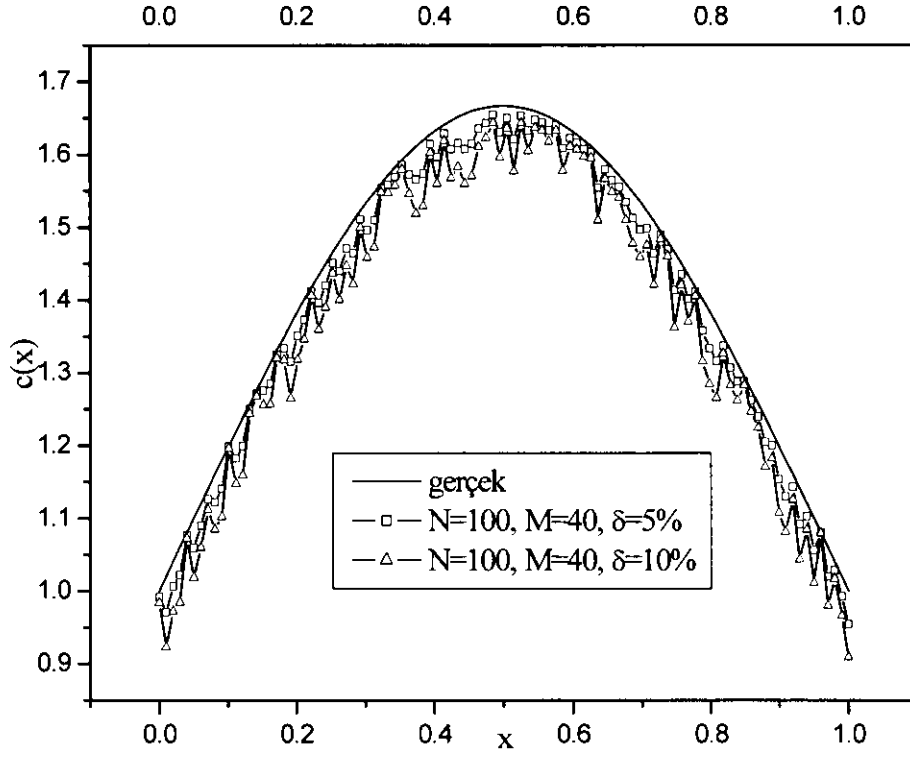
$$c(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (4.32)$$

elde edilir.

Tablo 4.4: $N=20$ $M=40$ değerleri için $c(x)$ sonuçları

x	Sayısal çözüm	Gerçek Çözüm	Hata
0	1	1	0
0.05	1.0989	1.0997	0.0009
0.1	1.196	1.1978	0.0018
0.15	1.2898	1.2923	0.0025
0.2	1.3777	1.381	0.0033
0.25	1.4577	1.4615	0.0039
0.3	1.5272	1.5316	0.0045
0.35	1.5841	1.589	0.0049
0.4	1.6263	1.6316	0.0053
0.45	1.6524	1.6578	0.0054
0.5	1.6611	1.6667	0.0055
0.55	1.6524	1.6578	0.0054
0.6	1.6263	1.6316	0.0053
0.65	1.5841	1.589	0.0049
0.7	1.5272	1.5316	0.0045
0.75	1.4577	1.4615	0.0039
0.8	1.3777	1.381	0.0033
0.85	1.2898	1.2923	0.0025
0.9	1.196	1.1978	0.0018
0.95	1.0989	1.0997	0.0009
1	1	1	0

Tablo 4.4'den görüldüğü gibi farklı $u(x,t)$ fonksiyonu için gerçek ve yaklaşık $c(x)$ değerleri birbirine çok yakın olduğu için hatası gösterilmiştir.



Şekil 4.2: $N=100$ ve $M=40$ için $\delta = 0.10$ ve $\delta = 0.05$ hatalarındaki $c(x)$ değerleri

Şekil 4.2’de $u(x,t) = e^t(x^2 - x + 1)$ alındığı zaman önerilen yöntemin random hatalara karşı duyarlılığı gösterilmiştir. Farklı random hata değerleri için $c(x)$ ’deki dalgalanmalar görülmektedir. Hata değeri büyüdükçe gerçek değerden uzaklaşmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Bir boyutlu ters parabolik problemin çözümünü ele aldık. Denklemdaki uzay değişkenine bağlı katsayının belirlenmesi için kararlı sayısal bir yöntem uyguladık. Ele aldığımız denklem homojen olmayan difüzyon sürecini tanımlar. Bulmak istediğimiz katsayıda difüzyonu oluşturan ortamın özelliklerini belirlediği için ayrı bir öneme sahiptir. Ancak bu katsayı uzay değişkenine bağlı olması nedeniyle problemin öncelikli olarak varlığı ve tekliği ispat edilmiş olmalı ki önerilen yöntem veya algoritma uygulanabilsin.

Lineer olmayan parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen katsayısı ek koşullara dayanarak bulunmaya çalışıldı. Bu problemin klasik örneklerinden biri olan FPP yöntemi her iterasyonda bir düz çözüme denktir. Çok küçük sayıda iterasyonlar için yakınsaktır.

Tablolardaki $c(x)$ değerlerinin gerçek ile sayısal değerleri ile iterasyonlu değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek ile sayısal yöntem bu metotlar sayesinde birbirine çok yakinken, iterasyonların artması sonucu gerçek değerden uzaklaşır. Grafiklerde bu özellik çok net görülmektedir. Random hatalara göre bu algoritmanın duyarlılığı test edilmiş ve küçük hatalara karşın gerçek çözümlerle fark olmadığı halde; büyük hatalara karşın TTF yöntemi duyarlılık daha fazla göstermiştir.

Ele alınan bu problem için ,bu çalışmada önerilen yöntem diğer yöntemlere göre en iyisidir. Bu yöntem ,çok bilinmeyenli ters katsayı problemlerinin ve çok boyutlu ters katsayı problemlerinin çözümü içinde genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Filiz B.E., "TTF yönteminin bir boyutlu parabolik denkleme uygulanması", Yüksek Lisans Tezi, *Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmit, (2008)

John M.Chadam ve Hong-Ming Yin "Determination of unknown Function in a parabolic Equation with an Overspecifield condition" *Mathematical Methods in the Applied Science*, 13, 421-430 (1990).

Bellasoued, M. ve Yamamoto, M., "Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation", *J. Inv. III-Posed Problems*, 1, 47-56, (2006).

Beznoshchenko, N., Ya., "Determination of the coefficients of the highest derivatives in parabolic equations", *Differ Uravn*, 11, 19-26, (1975).

Beznoshchenko, N., Ya., "Sufficient conditions for the existence of solutions of the problem in the determination of coefficients of leading derivatives of parabolic equations", *Differ Uravn*, 19, 1908-1915, (1983).

Can, E., "Isı transferi ve difüzyon olaylarında ters problemler", Doktora Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 1-13, (2000).

Can, E., "Numerical procedures for determining of an unknown parameter in parabolic equation", *Applied Mathematics and Computation*, 162, 1219-1226, (2005).

Cannon, J.R., "Determination of certain parameter in heat conduction problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 8, 188-321, (1964).

Cannon, J.R., "Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data", *SIAM J. Numer Anal.*, 5, 275-286, (1968).

Cannon, J.R. ve Zachman, D., "Parameter determination in parabolic differential equations from overspecified boundary data", *Int. J. Engng. Sci.*, 20, 779-788, (1982).

Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of nonlinear nonclassical parabolic problems", *J. Diff. Eqs*, 79, 266-288, (1989a).

Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of multidimensional nonclassical parabolic equations", in *Proc. Int. Conf. on Differential Equations and Applications*, Ohio University Pres, 122-127, (1989b).

Cannon, J.R., ve Lin, Y., "An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 145, 470-484, (1990).

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Wang, S., "Determination of source parameter in parabolic equations", *Meccanica*, 27, 85-94, (1992).

Dehghan, M., "Parameter determination in a partial differential equation from the overspecified data", *Mathematical and Computer Modelling*, 41, 197-213, (2005).

Isakov, V., "On a class of inverse problems for parabolic equations", *Sov. Math. Dokl.*, 25, 519-521, (1982).

Jiang, L.S. ve Tao, Y., "Identifying the volatility of underlying assets from option prices", *Inverse Problems*, 17, 137-155, (2001).

Jones, B.F., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I, Existence and uniqueness", *J. Math. Mech.*, 11, 907-918, (1962).

Jones, B.F., "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations", *Comm. Pure and Appl. Math.*, 16, 33-34, (1963)

Pierce, A., "Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem", *SIAM J. Control and Optimization*, 17, 494-499, (1979).

Prilepko, A.I. and Solov'ev, V.V., "Solvability of the inverse boundary-value problem of finding a coefficient of a lower-order derivative in a parabolic equation", *Differ Uravn.*, 23, 136-143, (1987).

Rundell, W., "Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data", *Appl. Anal.*, 10, 231-242, (1980).

Rundell, W., "An inverse problems for a parabolic partial differential equation", *Rocky Mountain J. Math.*, 13, 679-688, (1983).

Rundell, W., "The determination of parabolic equation from the initial and final data", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99, 637-642 (1987)

Suzuki, T., "Gelfand-Levitan's theory, deformation formulas and inverse problems", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, Math., 32, 223-271, (1985).

David C., Richard E., William R., "Inverse problems in partial differential equation", *SIAM*, (1990)

V.Isakov, "Inverse problems for partial differential equations", *Springer, New York*, 1998

V.Isakov, "On inverse problems in secondary oil recovery", *European J. Appl. Math* 19, 459-478, 2008

B.T.Johansson , D.Lesnic , A procedure for determining a spacewise-dependent heat source and initial temperature *Apply Anal.***87**,265-276,2008

B.T Johansson, D.Lesnic, A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source , *IMA J.Appl.Math.***72** (2007)748-760

B.T Johansson, D.Lesnic, " Determination of a spacewise-dependent heat source", *J.Comput.Appl. Math* .209 (2007)66-80

L.Yan, C.L.Fu, F.Dou, "A computational method for identifying a spacewise-dependent heat source", *Commun.Numer Methods Eng.* (2008) in press (doi:10.1002/cnm.1155)

H.T.Banks, K.Kunisch, Estimations Techniques for distributed parameter system, Birkhauser, Boston, MA, USA,1989.

H.W.Engl, M,Hanke, A. Neubauer, Regularization of inverse problems, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, Germany, 1996.

A.G.Fatullayev, S.Cula, " An iterative procedure for determining an unknown spacewise-dependent coefficient in a parabolic equation", *Appl. Math Letters* 22(2009) 1033-1037.

Y.L.Keung, J.Zou, Numerical identification of parameters in parabolic systems, *Inverse problems* **14** (1998) 83-100.

S.Gutman, "Identification of discontinuous parameters in flow equations", *SIAM J.Control Optim.* 28 (5) (1990) 1049-1060.

D.Lesnic, L.Elliott , D.B.Ingham, B.Clennell, R.J.Knipe, The identification of the piecewise homogeneous thermal conductivity of conductors subjected to a heat flow test, *Internat. J.Heat Mass Transfer* **42** (1) (1990) 143-152.

S.Xiong, Y.Li, Evolutionary algorithm for parameter identification inverse problems in parabolic system, *in:Proceedings of the 4th World Congress on intelligent Control and Automation, Shanghai, PR China, June 2002.*

M.S.Pilant,W.Rundell,"Undetermined coefficient problems for quasi-linear parabolic equations, Inverse Problems in Partial Differential Equations", *Siam, Philadellphia*, 1990.

V.L.Kamynin , "On the inverse problem of determining the leading coefficient in parabolic equation"

David Collen ,Richard Ewing, William Rundell, "Inverse problems in partial differential equations" *California,July 29-August 4*

A.A Samarskii, P.N. Vabishchevich "Numerical Methods for solving inverse problems of mathematical physics" *Walter de Gruyter* Berlin, Germany, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İstanbul'da doğdu. Orta okulu Özel Ortadoğu Kolejinde, lise öğrenimini ise Maltepe Anadolu lisesinde tamamladı. 2003 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır.