KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İLE ISI TRANSFER DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEM ANALİZİ

ESRA KORKMAZ

KOCAELİ, 2012

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İLE ISI TRANSFER DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEM ANALİZİ

ESRA KORKMAZ

Yrd.Doç.Dr. Ali DEMİR **Danışman, Kocaeli Üniv.**	....
Prof.Dr. Zahir MURADOĞLU **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	....
Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR **Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.**	....

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.12.2012

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmada, ters ısı transfer denklemlerinin bilinmeyen kaynak fonksiyonuna Adomian ayrıştırma metodu ile çözüm aranmış, düz ve ters problemler tanımlanmıştır. Daha sonra ise ters problemler analitik olarak çözülmüştür.

Çalışmalarım boyunca benden bilgi birikimini esirgemeyen, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanını bana ayıran tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali DEMİR' e; desteğiyle bana güç veren Ardahan Üniversitesi Rektörü Prof. Dr. Ramazan KORKMAZ' a; yardımlarını benden esirgemeyen Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU' na ve Kocaeli Üniversitesi Matematik bölümünün değerli hocalarına; her zaman her konuda bana yardımcı olan ve birlikte çalışmaktan keyif aldığım Arş. Gör. Berrak ÖZGÜR' e ve doktora öğrencisi Sertaç ERMAN' a; sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan AİLEME ve varlığıyla bana güç veren müstakbel eşim Engin BOZTEPE' ye teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık-2012 Esra KORKMAZ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

A_n	: Adomian polinomu
L	: Lineer operatör
L^{-1}	: Lineer operatörün tersi
Nu	: Lineer olmayan terim
$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu
Ω	: Tanım bölgesi
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
Δ	: Laplacian
∇	: Gradient

Kısaltmalar

ADM	: Adomian Decomposition Method (Adomian Ayrıştırma Metodu)
HPM	: Homotopy Perturbation Method (Homotopi Pertürbasyon Metodu)
MFS	: The method of fundamental solutions (Esas Çözüm Metodu)
RBFM	: The Radial Basis Function Method
TRM	: Tikhanov Regularization Method
WHAM	: Weighted Homotopy Analysis Method (Ağırlıklı Homotopi Analiz Metodu)

ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İLE ISI TRANSFER DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEM ANALİZİ

ÖZET

Uygulamalı bilimlerde, üzerinde çalışılan olayı matematiksel olarak modelleyerek, bu modelin analitik çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Çünkü bu çözümler modellenen olayın karakteri hakkında bilgi verir. Bu yüzden lineer ve ya lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada verilen bir ısı denkleminde x'e bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ile t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu; daha sonra yine verilen bir ısı denkleminde t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ve bilinmeyen sınır şartı Adomian Ayrıştırma Metodu ile çözüm fonksiyonunu bulmaksızın belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrıştırma Metodu, Isı Transfer Denklemi, Kaynak Fonksiyonu, Lineer Parabolik Denklem, Ters Problem.

ANALYSIS OF INVERSE PROBLEM FOR HEAT TRANSFER EQUATION BY ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

ABSTRACT

It is absolutely important to model the current events mathematically in applied science and have information about this model's analytical solution as these solutions give information about the character of the modelled event. Thus, getting the analytical solutions of the linear, non-linear, ordinary-partial differential equations is considerably important in the fields of physics, chemistry, biology and engineering. In this study, at a heat equation, the unknown source function of x-liked and the unknown source function of t-liked, and ,at a heat equation that has been given once again, the unknown source function of t-liked and the unknown boundary condition have been determined by the Adomian decomposition method without getting the solution function.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Heat Transfer Equation, Source Function, Linear Parabolic Equation, Inverse Problem.

GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarının çoğunda, doğrudan ölçümlerle erişilemeyen bir fiziksel sistemi karakterize eden bazı parametreleri hesaplamaya ihtiyaç duyulur. Bu nedenle ters problemler olarak adlandırılan bu problem alanı, son yıllarda çok etkin, disiplinler arası ve köklü bir araştırma alanı haline gelmiştir. Ters problemler; mühendislik, endüstri, tıp gibi bilimlerin yanı sıra yeryüzü bilimleri ile ilgili problemleri de kapsamaktadır.

Ters problemler denklem türlerine göre, verilerin türüne göre ve bilinmeyen fonksiyona göre sınıflandırılmaktadır. Bu tezde üzerinde durulacak olan kaynak fonksiyonun belirlendiği ters problemler ile ilgili çalışmalar 1960'lara dayanmaktadır. Cannon, verilen bir sınır şartından hareketle, kaynak fonksiyonu belirlemiştir [1-3]. Savateev, kaynak fonksiyonu $f(t).g(x)$ olan tek boyutlu parabolik denklemler üzerine çalışmıştır [4]. Fatullayev; FDM ile, belirtilen verilere dayalı minimizasyon probleminin çözümünden ardışık olarak elde edilen linner parçalardan hareketle, kaynak fonksiyonunu yaklaşık olarak elde etmiştir [5]. [7]'de Farcas ve Lesnic; [9]'da Ahmadabadi ve arkadaşları; [8]'de Yan ve Yang tek değişkene bağlı kaynak fonksiyonunu MFS ile bulmuşlardır. [6]' de Dehghan ve Tatari RBFM ile; [10]' da Geng ve Lin varyasyonel iterasyon metodu ile; [11]' de Cheng ve arkadaşları TRM ile; [12]' de Shidfar ve arkadaşları WHAM ile; [13]' de Hetmaniok ve arkadaşları HPM ile; [14]' de Li ve arkadaşları bir dönüşüm yardımıyla elde etmiştir.

Bu çalışmada, kaynak fonksiyonu yer-bağımlı (space-dependent) ve zaman-bağımlı (time-dependent) olan tek boyutlu parabolik ters problemlerinçözümleri Adomian ayrıştırma metodu ile ele alınmaktadır.

Bölüm 1' de kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı verilmiş ve denklem türlerine değinilmiştir.

Bölüm 2’ de düz ve ters problemlerle ilgili temel tanımlar verilmiş ve bu denklemlerle ilgili sınıflandırmalar yapılmıştır.

Bölüm 3’ de Adomian Ayrıştırma Metodu incelenmiş ve Adomian polinomlarının tanımı verilmiştir.

Bölüm 4’de Adomian Ayrıştırma Metodu ile ters problem çözümü üzerinde durulmuştur. Çalışmanın esas kısmını oluşturan bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, verilen bir ısı denkleminde çözüm fonksiyonu bulunmadan, x’ e bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu başlangıç-sınır şartlarını kullanarak ADM ile belirlenmiştir. İkinci kısımda verilen bir ısı denkleminde t’ ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu yine çözüm fonksiyonu bulunmaksızın, başlangıç-sınır şartları kullanılarak ADM ile belirlenmiştir. Üçüncü kısımda ilk iki kısımla ilgili örnekler çözülmüştür. Dördüncü kısımda verilen bir ısı denkleminde t’ ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu çözüm fonksiyonu bulunmaksızın ve sınır şartı kullanılmaksızın bir dönüşüm yardımıyla ADM ile belirlenmiştir. Son kısımda dördüncü kısımla ilgili örnekler çözülmüştür.

1. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan bir matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, çoğunlukla, bir bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bu tür bir denkleme Diferansiyel Denklem denir. Eğer diferansiyel denklem bir tek bağımsız değişkene bağlı ise, diferansiyel denkleme Adi Diferansiyel Denklem denir [35].

İki veya daha çok bağımsız değişkenle, bir veya daha çok bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenlere göre türevlerini kapsayan denkleme Kısmi Diferansiyel Denklem denir. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken olmak üzere kısmi diferansiyel denklem, genel olarak

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots) = 0$$

biçiminde yazılır [35].

Genel olarak A, B, C, D, E, F ve G bağımsız değişkenlere bağlı, x ve y'ye bağlı bilinmeyen fonksiyon $u = u(x, y)$ olmak üzere, iki boyutlu kısmi diferansiyel denklem;

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \qquad (1.1)$$

şeklinde verilir.

İkinci mertebeden kısmi türevler, diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında önemli rol oynar. Denklem (1.1), $B^2 - AC$ diskriminantının işaretine göre hiperbolik, parabolik ve eliptik olarak sınıflandırılabilir;

$B^2 - AC < 0$ ise eliptik,

$B^2 - AC = 0$ ise parabolik,

$B^2 - AC > 0$ ise hiperbolik olduğu ifade edilir.

Kısmi diferansiyel denklemler mühendislik bilimlerinde ve fen bilimlerinin uygulamalı bilim dallarında önemli bir yer tutar. Özellikle fizik, kimya, ekonomi ve mühendisliğin pek çok dalında ki olayların incelenmesinde bu tür denklemler karşımıza çıkar. Örneğin, bir katı cisim içinde veya belli homojen ortam içinde ısının yayılmasının incelendiği ısı yayılım denklemleri ile bir telin titreşimin incelendiği dalga yayılım denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir.

Kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte denklemin t bağımsız değişkeninin $t = t_0$ değeri için $u(t_0) = u_0$ koşulu verilirse buna başlangıç koşulu ve bu koşul altında denklemin çözümünün aranmasına ise, Başlangıç Değer Problemi adı verilir [35].

Kısmi diferansiyel denklemle beraber çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri problemi belirleyecek şekilde verilmişse bunlara sınır koşulları ve bu koşullar altında denklemin çözümünün aranmasına da Sınır Değer Problemi denir [35].

Hem başlangıç, hem de sınır koşullarını içeren problemlere de Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri denir [35].

Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Analitik çözümün bulunamadığı ya da karmaşık olduğu bazı problemlerde problemi çözebilmek için nümerik metotlara başvurulur.

1.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

1.1.1. Eliptik kısmi diferansiyel denklemler

Eliptik denklemler genel olarak zamanla değişmeyen fiziksel sistemleri modellemektedir. Yani, "potansiyel" adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Potansiyel, bir büyüklüğün sıklığını ölçer. Örneğin, sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. $u = u(x, y)$ bağımlı değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada örneğin, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge veya daimi durum değerlerini belirtir.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemi

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R$ Poisson denklemi ($R, (x, y)$ konumunun bir fonksiyonu olabilir.)

Laplace denklemi potansiyel teorinin temel denklemlerinden birisi olduğundan fiziksel uygulamaları çoktur. Örneğin, yüzeyleri izole edilmiş bir ortamda zamandan bağımsız bir ısı dağılımı varsa (ki buna kararlı ısı denir) herhangi bir (x, y) noktasındaki ısı miktarını veren $u(x, y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar.

Ayrıca ısı kaynağı olmayan bir bölgede kararlı sıcaklık dağılımı, iletkenlerle çevrili yüksüz bir bölgede elektrostatik potansiyel, kaynak veya kuyu olmayan bir akışkanda hız dağılımı vs. problemlerinde karşımıza çıkar.

Dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir telin zamana bağlı olarak denge konumuna gelmesi Poisson denklemi ile ifade edilir.

1.1.2. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler

Titreşim olayları ve cisimlerin dinamik hareketleri hiperbolik denklemlerle ifade edilir ve çoğu kez zamana bağlıdırlar. Bir ortam içerisindeki titreşimlerin ve özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımlarlar.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ Dalga denklemi ($F = F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$)

Bir boyutlu dalga denkleminin çözümü, l uzunluğunda titreşim halinde olan bir telden t zaman sonra bir ucundan x kadar uzaklıktaki enine yer değişimini verir. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır koşulları bilinir. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve kuantum teorisi gibi alanlarda çok kullanılmaktadır.

1.1.3. Parabolik kısmi diferansiyel denklemler

Isı yayılım problemleri parabolik denklemlerle ifade edilirler ve bu tip problemlerde çözüm açık bir bölge içinde tanımlanır. Verilen başlangıç ve sınır koşulları ile yayılma başlar, fakat bu yayılım belli bir sınıra kadar gerçekleşir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (K\text{, pozitif difüzyon sabiti})$$

denklemi tek boyutlu ısı akış denkleminin genel halidir.

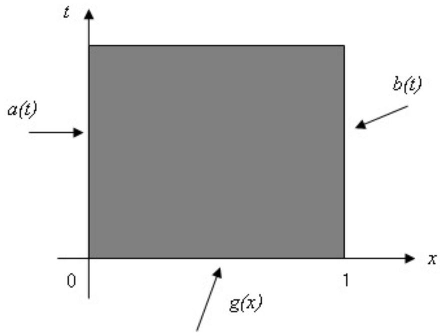
Bu denklem ısı transferi teorisinden elde edilmiş olup, çözümü termal olarak izole edilmiş bir çubuğun bir ucundan x kadar uzaklıktaki noktasında t zamanındaki veya t zamanından sonraki sıcaklığının belirlenmesine imkan sağlamaktadır.

Şimdi, bir model olarak bir boyutlu ısı denklemini, başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & (t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1) \\ u(x,0) = g(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0,t) = a(t) & (t \geq 0) \\ u(1,t) = b(t) & (t \geq 0) \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

(1.2) başlangıç ve sınır değer problemi uçları sırası ile $a(t)$ ve $b(t)$ sıcaklıklarıyla verilen birim uzunluktaki bir çubuğun sıcaklık yayılımını modeller (Şekil 1.1.). g, a ve b fonksiyonlarının verildiğini kabul edelim. Başlangıç ısı profili, g fonksiyonu tarafından verilir. Şekil 1.2.' de, x ve t değişkenleriyle belirlenen düzlemin alt kümesi olan $u(x,t)$ 'nin tanım alanı gösterilmektedir.

Şekil 1.1. Birim uzunluktaki çubuk



Şekil 1.2. Çözüm bölgesi

2.TERS PROBLEMLER

Şüphesiz ki, modern bilimde “Ters Problemler” ve “İyi Tanımlanmamış Problemler” 20. yüzyılın ortalarından itibaren popüler konular arasında yerini almaya başlamıştır. Bu süre zarfında klasik matematikte çeşitli dallarda kullanılan problemlerin büyük çoğunluğunun (bilgisayar uygulamalı cebir, diferansiyel ve integral denklemleri, kısmi diferansiyel denklemeler, fonksiyonel analiz) ters problem veya iyi tanımlanmamış problemler olarak sınıflandırılabileceği görülmüştür ve bu problemler kararsız ve genellikle non-lineer olduğundan dolayı karmaşık denklemler arasında yer almaktadır. Aynı zamanda ters ve iyi tanımlanmamış problemler, fizik, jeofizik, tıp, astronomi ve matematiksel metotların kullanıldığı diğer alanlarda da kullanılmaya ve uygulanmaya başlanmıştır. Ters problem çözümlerinin önemli olmasının sebebi, yapılan çalışmayla beraber ortamın önemli özelliklerinin (dalga yayılımının yoğunluğu ve hızı, esneklik parametreleri, iletkenlik, elektrik geçirgenliği, manyetik geçirgenlik ve ulaşılamayan alanlardaki homojensizliğin özellikleri ve yeri, vb.) tanımlanmasıdır.

Gelişen bilgisayar teknolojisiyle, ters ve iyi tanımlanmamış problemler teorisi, fen bilimlerinde matematiksel metotların kullanıldığı birçok alanda gelişme göstermiştir. Matematiksel fizikte düz problem çözerken araştırmacılar, çeşitli fiziksel olayların (sesin yayılımı, ısının yayılımı, sismik dalgaların yayılımı, elektromanyetik dalgaların yayılımı, vb.) tanımlanmış olduğu fonksiyonlar için kesin veya yaklaşık çözüm bulmaya çalışırlar [28-34]. Bu tip problemlerde, ortamın özelliklerinin (denklemin katsayıları ile ifade edilir) ve çalışma kapsamında sürecin başlangıç halinin (durgun olmayan durumlarda) veya sınırlardaki özelliklerinin (tanım bölgesinin sınırlı olduğu veya durağan durumlarda) bilindiği varsayılır. Ancak çoğu kez ortamın özellikleri kesin olarak bilinmemektedir. Düz problemin çözümüne yönelik bilgilerden, denklemin katsayılarının belirlenmesinin gerekliliği ters problemlerin ortaya çıkmasına yol açar. Bu problemlerin çoğu iyi tanımlanmamıştır (ölçme hatalarına göre kararsız) ve aynı zamanda denklemin katsayıları genellikleortamın önemli özelliklerini (yoğunluk, elektriksel yayılım, ısı yayılımı, vb.) belirtmektedir. Ters problemleri çözmek ısı, dalga, potansiyel fark, kirlilik gibi kavramların konumunu, şeklini, hataların ve kaynakların yapısını ve buna benzer olguları belirlemede de yardımcı olabilir [27].

Ters problemler ve iyi tanımlanmamış problemler hakkındaki ilk yayınlar 20. yüzyılın ilk yarısına dayanmaktadır. Yapılan yayınların konuları fizikle (kuantum saçılma teorisinde ters problemler), jeofizikle (elektrikli aramada, sismolojide ve potansiyel teoride ters problemler), astronomiyle ve fen bilimlerinin diğer alanlarıyla ilgiliydi [27].

Ters problemler teorisi kullanılmaya başlandığı günden bu yana hızlı bir gelişme göstermiştir ve uygulama alanları o kadar geniştir ki doğrudan veya dolaylı olarak ters problemlerle ilgili bilimsel yayın sayısını tahmin etmek neredeyse mümkün değildir. Buna karşın, ters problemler teorisi gelişmeye ve elde edilen birçok önemli sonuç halen tartışmaya açıktır [27].

Ters problemlerin evrensel bir tanımı yoktur, "iyi tanımlanmamış problem" istenen sınıfta herhangi bir çözümü olmayan veya birden çok çözümü olan (iki veya daha çok) veya çözüm metodu kararsız (yani ölçüm verilerindeki keyfi küçük hatalar, çözümde büyük hatalara yol açabilir.) problemdir. İyi tanımlanmamış problemleri çözmedeki en büyük zorluklar çözümün kararsızlığından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle "iyi tanımlanmamış problem" terimi genellikle kararsız problemler için kullanılır. [27]

Ters problemi tanımlamak için önce "düz" problemi tanımlamamız gerekir.

Matematiksel fizikte düz problem genellikle bazı fiziksel olayların veya süreçlerin (elektromanyetik, akustik, sismik, ısı, vb.) modellemelerinin problemlerini ifade etmektedir. Düz problemi çözmenin amacı, herhangi bir anda (eğer alan durağan değilse) verilen bir tanım bölgesinin herhangi bir noktasındaki fiziksel alan veya süreç olarak tanımlanan bir fonksiyonu bulmaktır. Düz problem, çalışılan sürecin tanım bölgesini, süreci tanımlayan denklemi, başlangıç şartlarını (eğer süreç durağan değilse), tanım bölgesinin sınır şartlarını içerir. [27]

Örneğin Ω bölgesi, R^n'de ve sınırı $\Gamma = \partial\Omega$ olan bir sınırlı bölge olsun. $u(x,t)$ akustik basınç, $c(x)$ ortamdaki sesin hızı, $\rho(x)$ ortamın yoğunluğu ve $h(x,t)$ kaynak fonksiyonu olmak üzere; başlangıç-sınır şartları

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \phi(x) \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(x,t) \tag{2.2}$$

olan akustik denklem

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln\rho(x).\nabla u + h(x,t) \tag{2.3}$$

olarak tanımlansın.

Matematiksel fizikteki birçok düz problem gibi (2.1)-(2.3) problemi iyi tanımlanmıştır. Yani problem kararlıdır ve tek çözümü vardır. (2.1)-(2.3) düz probleminde Ω tanım bölgesi, $c(x)$ ve $\rho(x)$ katsayılar, $h(x,t)$ kaynak fonksiyon, $\varphi(x)$ ve $\phi(x)$ başlangıç şartları, $g(x,t)$ sınır şartı verilir.

Bir ters problemde, $u(x,t)$'den başka, bilinmeyen fonksiyonlar düz problemin yapısından kaynaklanan, bazı fonksiyonlar içerir. Bu bilinmeyen fonksiyonlar ters problem için bir çözümdür. (2.1)-(2.3) probleminde verilen başlangıç-sınır şartları, bilinmeyen bu fonksiyonları bulmak için veri olarak kullanılır. Bazı durumlarda ters problemi çözmek için aşağıda verilen ek veriye ihtiyaç duyulabilir:

$$\left.u\right|_{\Gamma} = f(x,t) \tag{2.4}$$

Tanım 2.1a : A operatörü Q topolojik uzayından F topolojik uzayına tanımlı bir operatör olsun ($A : Q \to F$). $O(q)$, herhangi bir Q topolojik uzayı için $q \in Q$ noktasının komşuluğunu; $D(A)$ tanım kümesini ve $R(A)$ A'nın değer kümesini ifade etsin. Verilen bir $Aq = f$ probleminin Q ve F topolojik uzay çifti üzerinde iyi tanımlanmış olmasının tanım olarak gerek ve yeter koşulları, Hadamard koşulları olarak da bilinen aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

1) Herhangi bir $f \in F$ için, $Aq = f$ denkleminin $q_e \in Q$ çözümü vardır (Varlık Koşulu), yani, $R(A) = F$

2) $Aq = f$ denkleminin q_e çözümü Q'da tektir (Teklik Koşulu), yani, $A^{-1} : F \rightarrow Q$ ters operatörü vardır.

3) $Aq = f$ denkleminin q_e çözümünün herhangi bir $O(q_e) \subset Q$ komşuluğu için, f 'nin $O(f) \subset F$ komşuluğu vardır öyle ki; her $f_\delta \in O(f)$ için $A^{-1} f_\delta = q_\delta$ elemanı $O(q_e)$ komşuluğundadır, yani, A^{-1} operatörü süreklidir (Kararlılık Koşulu).

Q ve F topolojik uzaylarını metrik, Hilbert, Banach veya Öklidyen uzay olarak değiştirirsek, Tanım 2.1.a. daha özel hale gelir [27].

Tanım 2.1b : Eğer (1)-(3) koşullarından en az biri sağlanmıyorsa, $Aq = f$ problemi Q ve F uzay çifti üzerinde iyi tanımlanmamış problem olarak tanımlanır.

Aşağıdaki tabloda iyi tanımlanmış ve iyi tanımlanmamış problemler denklem türlerine göre verilmektedir.

Tablo 2.1. Denklem türlerine göre iyi tanımlanmış ve iyi tanımlanmamış problemler

	İyi Tanımlı Problemler	İyi Tanımlı Olmayan Problemler
Aritmetik	A sayısıyla çarpım $Aq = f$	Küçük bir sayıyla bölüm $q = A^{-1} f \ \ (A << 1)$
Cebir	Bir matrisle çarpım $Aq = f$	$q = A^{-1} f$
Analiz	İntegralleme $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)\, d\xi$	Diferansiyelleme $q(x) = f'(x)$
Diferansiyel denklemler	Sturm-Liouville Problemi $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x),$ $u(0) - hu'(0) = 0$ $u(1) - Hu'(1) = 0$	Ters Sturm-Liouville denklem $\{\lambda_n, \Vert u_n \Vert\}$ spektral verisi kullanılarak $q(x)$ bulunur.

Tablo 2.1. (Devam): Denklem türlerine göre iyi tanımlanmış ve iyi tanımlanmamış problemler [27]

İntegral geometri	$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)\, ds$ integrali bulunur.	$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)\, ds = f(\xi,\eta)$ denkleminden q bulunur.
İntegral denklemler	İkinci türden Volterra ve Fredholm denklemleri $q(x) + \int_0^x K(x,\xi) q(\xi)\, d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x,\xi) q(\xi)\, d\xi = f(x)$	Birinci türden Volterra ve Fredholm denklemleri $\int_0^x K(x,\xi) q(\xi)\, d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x,\xi) q(\xi)\, d\xi = f(x)$
Operatör denklemler $Aq = f$	$\exists m > 0 : \forall q \in Q$ $m\langle q,q\rangle \le \langle Aq,q\rangle$	$A : D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ A, $\sigma_n \to 0, n \to \infty$ tekil değerlerle kompakt lineer operatör
Eliptik denklemler	$\Delta u = 0, x \subset \Omega$ Dirichlet: $u\|_{\Gamma} = g$ veya Neumann: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\Gamma} = f$ veya Robin: $\left.(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})\right\|_{\Gamma} = h$	$\Delta u = 0, \; x \in \Omega$ Cauchy problemi Sınırın bir bölümünde verilen veriyle ($\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$) başlangıç-sınır değer problemi
Parabolik denklemler	$u_t = \Delta u, \; t > 0, \; x \in \Omega$ Cauchy problemi: $u\|_{t=0} = f(x)$ Başlangıç-sınır değer problemi: $u\|_{t=0} = 0$ $u\|_{\Gamma} = g(x,t)$	(Ters zamanlı (backward) parabolik denklem) $-u_t = \Delta u, t > 0, x \in \Omega,$ $u\|_{t=0} = f$ Sınırın bir bölümünde verilen veriyle başlangıç-sınır değer problemi $\begin{cases} u_t = \Delta u, \; x \in \Omega \\ u\|_{\Gamma_1} = f_1, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$
Hiperbolik denklemler	Cauchy problemi $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, t > 0, \\ u\|_{t=0} = \varphi(x), \; u_t\|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$ Başlangıç-sınır değer problemi $u\|_{\Gamma} = g$	Dirichlet ve Neumann problemleri $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \; x \in \Omega \\ u\|_{\Gamma_1} = f_1, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$

2.1. Ters Problemlerin Sınıflandırılması

(2.1)-(2.4) ters problemi göz önüne alındığında; eğer başlangıç şartları (yani $\varphi(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları) belirlenmesi gerekiyorsa probleme "geriye dönük (retrospective)" [28,29], sınır şartının (yani $g(x,t)$ fonksiyonu) belirlenmesi gerekiyorsa probleme "sınır problemi" [24], kaynak fonksiyonu (yani $h(x,t)$ fonksiyonu) belirlenmesi gerekiyorsa probleme "kaynak problemi" [26], (2.1.1) bilinmeyen ve (2.2) ile (2.4) Ω bölgesinin Γ sınırının sadece belli bir parçası üzerinde ($\Gamma_1 \subseteq \Gamma$) belirtilirse problem "continuation problem", ana denklemde ki katsayıların (yani $c(x)$ ve $\rho(x)$) yeniden belirlenmesi gerekiyorsa probleme "katsayı ters problemi" denir [30-33]. Bu sınıflandırmaların eksik olduğu ve halen üzerinde çalışıldığı bilinmelidir.

3. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU

Gelişen bilgisayar teknolojisi ile lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözüm metotları ile birlikte sayısal çözüm metotları da gelişmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için 1980'li yıllarda, birçok sayısal metot geliştirilmiştir. Sayısal metotların çoğunda, kısmi diferansiyel denklemleri indisleyerek ya da günümüzde geçerli olan sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri oluşturulmaktadır [15].

Uygulamalı bilimlerde, üzerinde çalışılan olayı matematiksel olarak modelleyerek, bu modelin analitik çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Çünkü bu çözümler modellenen olayın karakteri hakkında bilgi verir. Bu yüzden lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir [15].

Son yıllarda birçok matematikçi ve fizikçi Adomian Ayrıştırma Metodu ile ilgilenmiş ve bu konu ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır [23, 25, 36-46]. Adomian Ayrıştırma Metodu' nda çözüm seri formda aranır. Ele alınan bir problem için verilen bir başlangıç şartından hareketle serinin diğer terimlerini bulma esasına dayanır [15].

Ayrıştırma Metodu, çözüme hızlı yakınsar, non-lineer denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere göre daha basittir ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilmektedir. Ayrıca metot, verilen problemin fiziksel hareketini değiştirebilecek herhangi bir kısıtlayıcı varsayım (doğrusallaştırma, pertürbasyon, vb.) kullanmadan doğrudan etki eder [15].

Ayrıştırma Metodu, adi diferansiyel denklemlere, kısmi diferansiyel denklemelere, cebirsel denklemelere, integral denklemlere, bu denklem türlerinin lineer ve lineer olmayanlarının geniş bir sınıfına uygulanabilir. Metot, söz konusu denklemlerin yaklaşık çözümlerinin ve ayrıştırma serileri cinsinden nümerik çözümlerinin bulunmasını kolaylaştıran bir yöntemdir ve çözümler seri formda elde edilmektedir [15].

Bu tezde öncelikle, verilen bir ısı denkleminde x'e bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ile t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu; daha sonra yine verilen bir ısı denkleminde t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ve bilinmeyen sınır şartı çözüm fonksiyonu bulunmaksızın Adomian Ayrıştırma Metodu ile belirlenmiştir.

3.1. Metodun Analizi

Lineer ve lineer olmayan terimler içeren, kendisi lineer olmayan, adi veya kısmi diferansiyel operatör F ve sağ taraf fonksiyonu g olmak üzere,

$$\mathrm{Fu} = \mathrm{g} \tag{3.1}$$

denklemi ele alınsın. L, tersi kolaylıkla alınabilen ve verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini içeren lineer operatör; R, lineer operatörden kalan lineer kısım; N, diferansiyel denklemde lineer olmayan kısım olmak üzere, Denklem (3.1),

$$\mathrm{Lu} + \mathrm{Ru} + \mathrm{Nu} = \mathrm{g} \tag{3.2}$$

biçiminde ayrıştırılarak yazılsın. (3.2) eşitliğinin her iki yanına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$\mathrm{L}^{-1}\mathrm{Lu} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{g} - \mathrm{L}^{-1}\mathrm{Ru} - \mathrm{L}^{-1}\mathrm{Nu} \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliğindeki lineer olmayan Nu terimi, A_n Adomian polinomları cinsinden seri biçimde aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\mathrm{Nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n(\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots \mathrm{u}_n) \tag{3.1.4}$$

buradaki A_n polinomları Adomian polinomlarıdır [16].

Lineer diferansiyel operatörün n-inci mertebeden türev operatörü, $L = \dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$ ve ters operatörün, 0'dan t'ye n-katlı integral operatörü, $L^{-1}(.) = \int \ldots \int (.) dt^n$ olarak tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda Denklem (3.3)' ün sol tarafı,

$$L^{-1}Lu = u(x,t) - u(x,0) - tu'(x,0) - \frac{t^2}{2!}u''(x,0) - \ldots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0) \tag{3.5}$$

şeklinde olur. Denklem (3.5), Denklem (3.3)' de yerine yazılırsa,

$$u(x,t) - u(x,0) - tu'(x,0) - \ldots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0) = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

ve

$$f(x,t) = u(x,0) + tu'(x,0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0)$$

olmak üzere, u çözümü

$$u(x,t) = f(x,t) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.6}$$

olarak bulunur. Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.7}$$

biçiminde yazılabilir. Bu seri çözümü ve (3.4) eşitliği kullanılarak Denklem (3.6) tekrar yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = f(x,t) + L^{-1}g - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.8}$$

genel seri formu elde edilir. Bununla birlikte, (3.8) eşitliği

$$
\begin{aligned}
u_0(x,t) &= f(x,t) + L^{-1}g(x,t) \\
u_1(x,t) &= -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0) \\
u_2(x,t) &= -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(A_1) \\
&\vdots \\
u_k(x,t) &= -L^{-1}(Ru_{k-1}) - L^{-1}(A_{k-1}),\ k \geq 0
\end{aligned}
$$

şeklinde de yazılarak, indirgeme bağıntısı ile u_n terimleri hesaplanabilir ve (3.7) eşitliği kullanılarak çözüme ulaşılır. Fakat kısmi toplamlar dizisinin $M \to \infty$ iken limiti alındığında,

$$u(x,t) = \lim_{M \to \infty} \Psi_M(x,t)$$

için

$$\Psi_M(x,t) = \sum_{i=0}^{M} u_i \quad , i \geq 0 \tag{3.9}$$

kısmi toplamlar dizisi yaklaşık çözüm olarak ele alınır. (3.9) serisinin yakınsaklığı birçok yazar tarafından araştırılmış ve teorik olarak incelenmiştir [17-22].

3.2. Adomian Polinomları

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri lineer denklemelere göre daha zordur. Ancak literatürde var olan başka metotlar ile analitik çözümleri elde edilemeyen lineer olmayan denklemlerin, seri çözümlerinin elde edilebildiği bazı sayısal yöntemler vardır.

Lineer olmayan denklemlerin çözümü yapılırken denklemdeki lineer olmayan terimin sayısı ve non-lineerliğin kuvvetliliği çözüm esnasında bazen zorluklar çıkarabilir. Bu zorlukları aşmak için Adomian polinomları kullanılır.

(3.4) eşitliğindeki A_n polinomları, lineer olmayan her bir terim için genelleştirilebilir. A_n polinomlarının ayrıştırılmış hali, kaynaklarda

$$
\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) \\
A_2 &= u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0) \\
A_3 &= u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

veya genel biçimi ile

$$
A_n = \sum_{\upsilon=1}^{n} c(\upsilon(n)f^{(\upsilon\upsilon}(u_0), n \geq 0 \tag{3.11}
$$

şeklinde verilmektedir [16].

Burada görülür ki; A_0 sadece u_0 ’a, A_1 sadece u_0 ve u_1 ’e, A_2 sadece u_0, u_1 ve u_2 ’ye bağlıdır ve bu şekilde devam eder. $A_0 = f(u_0)$ daima doğrudur ve diğer A_n polinomlarından bağımsız olarak belirlenir.

4. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU İLE TERS PROBLEM ÇÖZÜMÜ

4.1. x'e Bağlı Bilinmeyen Kaynak Fonksiyonunun Belirlenmesi

$w(t)$ ve $h(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; başlangıç ve sınır şartları sırasıyla $g(x)$, $w(t)$, $h(t)$ fonksiyonları olan ısı denklemi

$$
\begin{aligned}
& u_t = u_{xx} + k(x) \qquad (4.1)\\
& u(x,0) = g(x)\\
& u(0,t) = w(t)\\
& u_x(0,t) = h(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde verilsin.

L_x ve L_t diferansiyel operatörlerini

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \; L_t = \frac{\partial}{\partial t} \qquad (4.2)$$

ve L_t^{-1} ters operatörünü

$$L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \qquad (4.3)$$

olarak tanımlanırsa, Denklem (4.1) operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t\big(u(x,t)\big) = L_x\big(u(x,t)\big) + k(x) \qquad (4.4)$$

L_t^{-1} integral operatörü Denklem (4.4)' ün her iki tarafına uygulanır ve başlangıç şartları kullanılırsa,

$$L_t^{-1}\Big(L_t\big(u(x,t)\big)\Big) = L_t^{-1}\Big(L_x\big(u(x,t)\big)\Big) + L_t^{-1}\big(k(x)\big)$$

$$u(x,t) = L_t^{-1}\Big(L_x\big(u(x,t)\big)\Big) + tk(x) + g(x) \qquad (4.5)$$

elde edilir.

Bilinmeyen $u(x,t)$ fonksiyonunu seriye açılırsa,

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{4.6}$$

ve (4.6) eşitliği Denklem (4.5)' te yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=g(x)+tk(x)+L_t^{-1}(L_x(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t))) \tag{4.7}$$

veya daha açık olarak

$$u_0+u_1+u_2+\ldots=g(x)+tk(x)+L_t^{-1}(L_x(u_0+u_1+u_2+\ldots)) \tag{4.8}$$

denklemini elde edilir.

Denklem (4.7) veya Denklem (4.8) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir:

$$\begin{aligned}
&u_0(x,t)=g(x)+tk(x)\\
&u_{k+1}(x,t)=L_t^{-1}(L_x(u_k(x,t))),k\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_0(x,t)=g(x)+tk(x)\\
&u_1(x,t)=L_t^{-1}(L_x(u_0(x,t))=tg''(x)+\frac{t^2}{2!}k''(x)\\
&u_2(x,t)=L_t^{-1}(L_x(u_1(x,t))=\frac{t^2}{2!}g^{(iv)}(x)+\frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x)\\
&u_3(x,t)=L_t^{-1}(L_x(u_2(x,t))=\frac{t^3}{3!}g^{(vi)}(x)+\frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x)\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Bu nedenle seri formdaki $u(x,t)$ çözümü,

$$\begin{aligned}
u(x,t)=g(x)+tg''(x)+\frac{t^2}{2!}g^{(iv)}(x)+\frac{t^3}{3!}g^{(vi)}(x)+\ldots\\
+tk(x)+\frac{t^2}{2!}k''(x)+\frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x)+\frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x)+\ldots
\end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde verilir.

Sınır şartlarını ve Taylor seri açılımını kullanarak bilinmeyen $k(x)$ kaynak fonksiyonu elde edilebilir. Öncelikle, sınır şartları (4.9) eşitliğine uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
h(t) &= g'(0) + tg'''(0) + \frac{t^2}{2!}g^{(v)}(0) + \frac{t^3}{3!}g^{(vii)}(0) + \dots \\
&\quad + tk'(0) + \frac{t^2}{2!}k'''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(v)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vii)}(0) + \dots
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
w(t) &= g(0) + tg''(0) + \frac{t^2}{2!}g^{(iv)}(0) + \frac{t^3}{3!}g^{(vi)}(0) + \dots \\
&\quad + tk(0) + \frac{t^2}{2!}k''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(0) + \dots
\end{aligned}
$$

$w(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları Taylor serisine açılır ve t' nin kuvvetlerine göre eşitleme yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&w(0) = g(0) \\
&k(0) = w'(0) - g''(0) \\
&k''(0) = w''(0) - g^{(iv)}(0) \\
&k^{(iv)}(0) = w'''(0) - g^{(vi)}(0) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&h(0) = g'(0) \\
&k'(0) = h'(0) - g'''(0) \\
&k'''(0) = h''(0) - g^{(v)}(0) \\
&k^{(v)}(0) = h'''(0) - g^{(vii)}(0) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

bulunur.

Yukarıda elde edilen bağıntılar, bilinmeyen $k(x)$ kaynak fonksiyonunun değerini ve bu fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki yüksek mertebeden türevlerini bulmada yardımcı olur. $k(x)$ kaynak fonksiyonunun Taylor seri açılımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
k(x) &= k(0) + xk'(0) + \frac{x^2}{2!}k''(0) + \frac{x^3}{3!}k'''(0) + \dots \\
&= (w'(0) - g''(0)) + x(h'(0) - g'''(0)) + \frac{x^2}{2!}(w''(0) - g^{(iv)}(0)) \\
&\quad + \frac{x^3}{3!}(h''(0) - g^{(v)}(0)) + \dots
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinin sağ taraf fonksiyonu $k(x)$ 'in başlangıç ve sınır koşulları ile olan ilişkisini gösterir.

4.2. t'ye Bağlı Bilinmeyen Kaynak Fonksiyonunun Belirlenmesi

$f(x)$ ve $r(t)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, başlangıç ve sınır şartları $f(x)$, $r(t)$ ve $h(t)$ olan ısı denklemi

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + k(t) \\
&u(x,0) = f(x) \\
&u(0,t) = r(t) \\
&u_x(0,t) = h(t)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

verilsin.

L_x ve L_t diferansiyel operatörlerini,

$$
L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \; L_t = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.12}
$$

ve L_x^{-1} ters operatörü

$$
L_x^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dx\,dx \tag{4.13}
$$

olarak tanımlanırsa, Denklem (4.11) operatör formunda aşağıdaki gibi yazabilir:

$$
L_t\big(u(x,t)\big) = L_x\big(u(x,t)\big) + k(t) \tag{4.14}
$$

L_x^{-1} integral operatörünü Denklem (4.14)' ün her iki tarafına uygular ve başlangıç şartlarını kullanılırsa

$$L_x^{-1}\left(L_t\left(u(x,t)\right)\right) = L_x^{-1}\left(L_x\left(u(x,t)\right)\right) + L_x^{-1}\left(k(t)\right)$$

$$u(x,t) = r(t) + xh(t) - \frac{x^2}{2!}k(t) + L_x^{-1}\left(L_t\left(u(x,t)\right)\right) \qquad (4.15)$$

elde edilir.

Bilinmeyen $u(x,t)$ fonksiyonunu seriye açılırsa,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (4.16)$$

ve (4.16) eşitliği Denklem (4.15)' te yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = r(t) + xh(t) - \frac{x^2}{2!}k(t) + L_x^{-1}\left(L_t\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)\right) \qquad (4.17)$$

veya

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = r(t) + xh(t) - \frac{x^2}{2!}k(t) + L_x^{-1}\left(L_t(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)\right) \qquad (4.18)$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.17) veya Denklem (4.18) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilebilir:

$$u_0(x,t) = r(t) + xh(t) - \frac{x^2}{2!}k(t)$$
$$u_{k+1}(x,t) = L_x^{-1}(L_t(u_k(x,t))), k \geq 0$$

$$u_0(x,t) = r(t) + xh(t) - \frac{x^2}{2!}k(t)$$
$$u_1(x,t) = L_x^{-1}(L_t(u_0(x,t)) = \frac{x^2}{2!}r'(t) + \frac{x^3}{3!}h'(t) - \frac{x^4}{4!}k'(t)$$
$$u_2(x,t) = L_x^{-1}(L_t(u_1(x,t)) = \frac{x^4}{4!}r''(t) + \frac{x^5}{5!}h''(t) - \frac{x^6}{6!}k''(t)$$
$$u_3(x,t) = L_x^{-1}(L_t(u_2(x,t)) = \frac{x^6}{6!}r'''(t) + \frac{x^7}{7!}h'''(t) - \frac{x^8}{8!}k'''(t)$$
$$\ldots$$

Bu nedenle seri formdaki $u(x,t)$ çözümü,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \ldots$$
$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & (r(t) + \frac{x^2}{2!}r'(t) + \frac{x^4}{4!}r''(t) + \frac{x^6}{6!}r'''(t) + \ldots) \\ & + (xh(t) + \frac{x^3}{3!}h'(t) + \frac{x^5}{5!}h''(t) + \frac{x^7}{7!}h'''(t) + \ldots) \\ & - (\frac{x^2}{2!}k(t) + \frac{x^4}{4!}k'(t) + \frac{x^6}{6!}k''(t) + \frac{x^8}{8!}k'''(t) + \ldots) \end{aligned} \tag{4.19}$$

şeklinde verilir.

(4.11)'de verilen başlangıç şartları ve Taylor seri açılımı kullanılarak bilinmeyen $k(t)$ kaynak fonksiyonu elde edilebilir. Öncelikle başlangıç şartı (4.19) eşitliğine uygulanırsa:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (r(0) + \frac{x^2}{2!}r'(0) + \frac{x^4}{4!}r''(0) + \frac{x^6}{6!}r'''(0) + \ldots) \\ & + (xh(0) + \frac{x^3}{3!}h'(0) + \frac{x^5}{5!}h''(0) + \frac{x^7}{7!}h'''(0) + \ldots) \\ & - (\frac{x^2}{2!}k(0) + \frac{x^4}{4!}k'(0) + \frac{x^6}{6!}k''(0) + \frac{x^8}{8!}k'''(0) + \ldots) \end{aligned}$$

elde edilir. f(x) fonksiyonu Taylor serisine açılır ve x'in kuvvetlerine göre eşitlenirse,

$$
\begin{aligned}
&r(0) = f(0)\\
&h(0) = f'(0)\\
&h'(0) = f'''(0)\\
&h''(0) = f^{(v)}(0)\\
&h'''(0) = f^{(vii)}(0)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&k(0) = r'(0) - f''(0)\\
&k'(0) = r''(0) - f^{(iv)}(0)\\
&k''(0) = r'''(0) - f^{(vi)}(0)\\
&k'''(0) = r^{(iv)}(0) - f^{(viii)}(0)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen bağıntılar bilinmeyen $k(t)$ kaynak fonksiyonunun ve bilinmeyen $h(t)$ fonksiyonunun değerini ve bu fonksiyonların $t = 0$ anındaki yüksek mertebeden türevlerini bulmada bize yardımcı olur. Taylor seri açılımı kullanılarak, $k(t)$ kaynak fonksiyonu ile başlangıç ve sınır koşulları arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= k(0) + tk'(0) + \frac{t^2}{2!}k''(0) + \frac{t^3}{3!}k'''(0) + \ldots\\
&= (r'(0) + tr''(0) + \frac{t^2}{2!}r'''(0) + \frac{t^3}{3!}r^{(iv)}(0) + \ldots)\\
&\quad - (f''(0) + tf^{(iv)}(0) + \frac{t^2}{2!}f^{(vi)}(0) + \frac{t^3}{3!}f^{(viii)}(0) + \ldots)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} r^{(n+1)}(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} f^{(2n+2)}(0)
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde, Taylor seri açılımı kullanılarak, $h(t)$ sınır fonksiyonu ile başlangıç şartı arasındaki ilişkiyi gösteren bağıntı,

$$
h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} f^{(2n+1)}(0)
$$

olarak elde edilir.

4.3. Örnekler

Bu bölümde kısım 4.1 ve kısım 4.2'de teorik olarak anlatılan Adomian Ayrışım Metodu ile tek değişkenli bilinmeyen kaynak fonksiyonunun belirlenmesi ile ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 1 : Aşağıda sınır-başlangıç şartları verilen ısı denkleminin $k(x)$ kaynak fonksiyonunu Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak bulunuz.

$$u_t = u_{xx} + k(x) \tag{4.20}$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = 1 - e^{-t}, t \geq 0$$
$$u_x(0,t) = 0$$

Çözüm :

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.20), operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t(u(x,t)) = L_x(u(x,t)) + k(x) \tag{4.21}$$

L_t^{-1} integral operatörü Denklem (4.21)' in her iki tarafına uygulanır ve başlangıç şartları kullanılırsa,

$$L_t^{-1}(L_t(u(x,t))) = L_t^{-1}(L_x(u(x,t))) + L_t^{-1}(k(x)) \tag{4.22}$$

$$u(x,t) = L_t^{-1}(L_x(u(x,t))) + tk(x)$$

elde edilir.

Bilinmeyen $u(x,t)$ fonksiyonunu seriye açarak,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23) eşitliği Denklem (4.22)' de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = tk(x) + L_t^{-1}(L_x(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t))) \tag{4.24}$$

veya

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = tk(x) + L_t^{-1}(L_x(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots) \tag{4.25}$$

denklemi bulunur. (4.24) veya (4.25) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= tk(x) \\
u_1(x,t) &= L_t^{-1}(L_x(u_0(x,t)) = \frac{t^2}{2!}k''(x) \\
u_2(x,t) &= L_t^{-1}(L_x(u_1(x,t)) = \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x) \\
u_3(x,t) &= L_t^{-1}(L_x(u_2(x,t)) = \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Bu bağıntıyla seri formdaki $u(x,t)$ çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \ldots \\
u(x,t) &= tk(x) + \frac{t^2}{2!}k''(x) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x) + \ldots
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Sınır şartlarını kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= tk'(x) + \frac{t^2}{2!}k'''(x) + \frac{t^3}{3!}k^{(v)}(x) + \frac{t^4}{4!}k^{(vii)}(x) + \ldots \\
u_x(0,t) &= tk'(0) + \frac{t^2}{2!}k'''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(v)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vii)}(0) + \ldots = 0
\end{aligned}$$

ve

$$u(0,t) = tk(0) + \frac{t^2}{2!}k''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(0) + \dots$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 1 - e^{-t} \\ &= 1 - (1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots) \\ &= t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \dots \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Polinomların eşitliğinden,

$$k'(0) = k'''(0) = k^{(v)}(0) = k^{(vii)}(0) = 0, \dots \tag{4.26}$$

ve

$$k(0) = 1, k''(0) = -1, k^{(iv)}(0) = 1, k^{(vi)}(0) = -1, \dots \tag{4.27}$$

bulunur. (4.26) ve (4.27) bağıntılarını $k(x)$ 'in Taylor seri açılımında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} k(x) &= k(0) + xk'(0) + \frac{x^2}{2!}k''(0) + \frac{x^3}{3!}k'''(0) + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$k(x) = \cos x$$

elde edilir.

Örnek 2: Aşağıda sınır-başlangıç şartları verilen ısı denkleminin $k(x)$ kaynak fonksiyonunu Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak bulunuz.

$$u_t = u_{xx} + k(x) \tag{4.28}$$
$$u(x,0) = -\frac{\cos 2x}{3}$$
$$u(0,t) = -\frac{1}{3}e^{-4t},\ t \geq 0$$
$$u_x(0,t) = 5(e^t - 1)$$

Çözüm :

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.28), operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathrm{L}_t(\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})) = \mathrm{L}_x(\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})) + \mathrm{k}(\mathrm{x}) \tag{4.29}$$

L_t^{-1} integral operatörü Denklem (4.29)' un her iki tarafına uygulanır ve başlangıç şartları kullanılırsa,

$$\mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{L}_t(\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}))) = \mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{L}_x(\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}))) + \mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{k}(\mathrm{x})) \tag{4.30}$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{L}_x(\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}))) + \mathrm{tk}(\mathrm{x}) + \mathrm{u}(\mathrm{x},0)$$

elde edilir.

Bilinmeyen $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ fonksiyonu seriye açılırsa,

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{u}_n(\mathrm{x},\mathrm{t}) \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.30) eşitliği Denklem (4.31)' de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{u}_n(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{tk}(\mathrm{x}) + \mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{L}_x(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{u}_n(\mathrm{x},\mathrm{t}))) \tag{4.32}$$

veya

$$\mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ldots = \mathrm{tk}(\mathrm{x}) + \mathrm{L}_t^{-1}(\mathrm{L}_x(\mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ldots) \tag{4.33}$$

denklemi bulunur. (4.32) veya (4.33) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$u_0(x,t) = tk(x) - \frac{1}{3}\cos 2x$$
$$u_1(x,t) = L_t^{-1}(L_x(u_0(x,t)) = \frac{t^2}{2!}k''(x) + \frac{4}{3}t\cos 2x$$
$$u_2(x,t) = L_t^{-1}(L_x(u_1(x,t)) = \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x) - \frac{16}{3}\frac{t^2}{2!}\cos 2x$$
$$u_3(x,t) = L_t^{-1}(L_x(u_2(x,t)) = \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x) + \frac{64}{3}\frac{t^3}{3!}\cos 2x$$
$$\vdots$$

Bu bağıntıyla seri formdaki $u(x,t)$ çözümü

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \ldots$$
$$u(x,t) = tk(x) + \frac{t^2}{2!}k''(x) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x) + \ldots - \frac{1}{3}\cos 2x(1 - 4t + 16\frac{t^2}{2!} - \ldots)$$
$$= tk(x) + \frac{t^2}{2!}k''(x) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(x) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(x) + \ldots - \frac{1}{3}\cos 2xe^{-4t}$$

olarak yazılır. Sınır şartlarını kullanılırsa,

$$u_x(x,t) = tk'(x) + \frac{t^2}{2!}k'''(x) + \frac{t^3}{3!}k^{(v)}(x) + \frac{t^4}{4!}k^{(vii)}(x) + \ldots + \frac{2}{3}\sin 2xe^{-4t}$$
$$u_x(0,t) = tk'(0) + \frac{t^2}{2!}k'''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(v)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vii)}(0) + \ldots$$
$$u_x(0,t) = 5(e^t - 1)$$
$$= 5t + 5\frac{t^2}{2!} + 5\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

ve

$$u(0,t) = tk(0) + \frac{t^2}{2!}k''(0) + \frac{t^3}{3!}k^{(iv)}(0) + \frac{t^4}{4!}k^{(vi)}(0) + \ldots - \frac{1}{3}e^{-4t}$$
$$u(0,t) = -\frac{1}{3}e^{-4t}$$

bağıntıları elde edilir. Polinomların eşitliğinden,

$$k'(0) = k'''(0) = k^{(v)}(0) = k^{(vii)}(0) = \ldots = 5 \qquad (4.34)$$

ve

$$k(0) = k''(0) = k^{(iv)}(0) = k^{(vi)}(0) = \ldots = 0 \qquad (4.35)$$

bulunur. (4.34) ve (4.35) bağıntılarını $k(x)$ 'in Taylor seri açılımında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} k(x) &= k(0) + xk'(0) + \frac{x^2}{2!}k''(0) + \frac{x^3}{3!}k'''(0) + \ldots \\ &= 5x + 5\frac{x^3}{3!} + 5\frac{x^5}{5!} + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$k(x) = 5\sinh x$$

elde edilir.

4.4. t'ye Bağlı Kaynak Fonksiyonu ve Sınır Şartı Bilinmeyen Ters Problemin Çözümü

Bu bölümde, t 'ye bağlı kaynak fonksiyonu ve sınır şartı bilinmeyen ters problemin analizi yapılacaktır. Homojen olmayan lineer parabolik problem için bir dönüşüm tanımlanacak ve bu dönüşüm yardımıyla hem verilen ters problem homojen hale getirilecek hem de bilinmeyen kaynak fonksiyonu ve sınır şartı yeni ters problemimizin sınır şartları olacaktır. Homojen ters problemin Adomian Ayrışım Metodu ile çözümü sonucunda t 'ye bağlı kaynak fonksiyonunun ve sınır şartının seri formları elde edilecektir.

$f(t)$ kaynak fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + f(t), f \in C[0,T] \qquad (4.36) \\ &u(x,0) = g(x) \\ &u(0,t) = h_1(t) \\ &u_x(0,t) = h_2(t) \end{aligned}$$

homojen olmayan ısı denklemi verilsin.

Diferansiyellenebilen $w(t)$ fonksiyonu

$$w(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi \tag{4.37}$$

olarak tanımlansın. Denklem (4.36)' dan ve (4.37) eşitliğinden

$$w'(t) = f(t)$$
$$u_t(x,t) - w'(t) = u_{xx}(x,t)$$

olduğu açıkça görülür. Homojen olmayan lineer Denklem (4.36)' yı homojen hale getirmek için

$$v(x,t) = u(x,t) - w(t)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm ile Denklem (4.36) homojen hale indirgenir:

$$\begin{aligned} &v_t = v_{xx} \\ &v(x,0) = g(x) \\ &v(0,t) = h_1(t) - w(t) \\ &v_x(0,t) = h_2(t) \end{aligned} \tag{4.38}$$

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.38), operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t\big(v(x,t)\big) = L_x\big(v(x,t)\big), \quad t \geq 0 \tag{4.39}$$

(4.39) eşitliğinin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörünü uygulanırsa,

$$L_t^{-1}\Big(L_t\big(v(x,t)\big)\Big) = L_t^{-1}\Big(L_x\big(v(x,t)\big)\Big)$$

$$v(x,t) = L_t^{-1}\Big(L_x\big(v(x,t)\big)\Big) + g(x) \tag{4.40}$$

elde edilir.

$v(x,t)$ fonksiyonunu $v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$ olarak seriye açar ve (4.40) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = g(x) + L_t^{-1}(L_x(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t))) \tag{4.41}$$

veya

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = g(x) + L_t^{-1}(L_x(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots)) \tag{4.42}$$

denklemini elde ederiz. Denklem (4.41) veya Denklem (4.42) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir:

$$v_0(x,t) = g(x)$$
$$v_{k+1}(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_k(x,t))), k \geq 0$$

$$v_0(x,t) = g(x)$$
$$v_1(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_0(x,t)) = tg''(x)$$
$$v_2(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_1(x,t)) = \frac{t^2}{2!} g^{(iv)}(x)$$
$$v_3(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_2(x,t)) = \frac{t^3}{3!} g^{(vi)}(x)$$
$$\ldots$$

Bu bağıntılarla seri formdaki $v(x,t)$ fonksiyonu

$$v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t) + \ldots$$

$$= g(x) + tg''(x) + \frac{t^2}{2!} g^{(iv)}(x) + \frac{t^3}{3!} g^{(vi)}(x) + \ldots \tag{4.43}$$

olarak yazılır ve (4.43) eşitliği, sınır koşulları kullanılarak, $f(t)$ kaynak fonksiyonunu ve bilinmeyen $h_2(t)$ sınır şartının $t = 0$ noktasındaki değerini elde etmekte yardımcı olur:

$$h_1(t) - w(t) = g(0) + tg''(0) + \frac{t^2}{2!} g^{(iv)}(0) + \frac{t^3}{3!} g^{(vi)}(0) + \ldots$$
$$w(t) = h_1(t) - (g(0) + tg''(0) + \frac{t^2}{2!} g^{(iv)}(0) + \frac{t^3}{3!} g^{(vi)}(0) + \ldots)$$

Eşitliğin her iki tarafının t 'ye göre türevi alınırsa $f(t)$ kaynak fonksiyonu

$$f(t) = w'(t) = h_1'(t) - (g''(0) + tg^{(iv)}(0) + \frac{t^2}{2!} g^{(vi)}(0) + \dots) \qquad (4.44)$$

olarak elde edilir. (4.44) eşitliği, $f(t)$ kaynak fonksiyonunun $h_1(t)$ sınır şartı ve $g(x)$ başlangıç şartı ile arasındaki ilişkiyi gösterir. (4.43)'te x'e göre türev alınır ve bulunan fonksiyonun $x = 0$ 'da ki değeri hesaplanırsa bilinmeyen $h_2(t)$ sınır şartı,

$$h_2(t) = g'(0) + tg'''(0) + \frac{t^2}{2!} g^{(v)}(0) + \frac{t^3}{3!} g^{(vii)}(0) + \dots \qquad (4.45)$$

eşitliğiyle ifade edilir. (4.45) eşitliği, bilinmeyen $h_2(t)$ sınır şartının bilinen $g(x)$ sınır şartıyla olan ilişkisini gösterir.

4.5. Örnekler

Bu bölümde Kısım 4.4' te anlatılan Adomian ayrışım metodu ile t' ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ve bilinmeyen $u_x(0,t)$ sınır şartının bir dönüşüm yardımıyla belirlenmesi ile ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 1: Aşağıda sınır-başlangıç şartları verilen ısı denkleminin $f(t)$ kaynak fonksiyonunu ve $h(t)$ sınır şartını Adomian Ayrışım Metodunu kullanarak bulunuz.

$$u_t = u_{xx} + f(t), f \in C[0,T] \qquad (4.46)$$
$$u(x,0) = 1 - e^{-x}$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u_x(0,t) = h(t)$$

Çözüm :

(4.37)'de tanımlanan diferansiyellenebilen $w(t)$ fonksiyonu kullanılarak,

$$v(x,t) = u(x,t) - w(t)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm ile Denklem (4.46) homojen hale indirgenir:

$$v_t = v_{xx} \tag{4.47}$$
$$v(x,0) = 1 - e^{-x}$$
$$v(0,t) = -w(t)$$
$$v_x(0,t) = h(t)$$

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.46), operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t\left(v(x,t)\right) = L_x\left(v(x,t)\right),\ t \geq 0 \tag{4.48}$$

(4.48) eşitliğinin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörünü uygulanırsa,

$$L_t^{-1}\left(L_t\left(v(x,t)\right)\right) = L_t^{-1}\left(L_x\left(v(x,t)\right)\right)$$

ve buradan

$$v(x,t) = 1 - e^{-x} + L_t^{-1}\left(L_x\left(v(x,t)\right)\right) \tag{4.49}$$

elde edilir.

$v(x,t)$ fonksiyonunu $v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$ olarak seriye açılır ve (4.49) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = 1 - e^{-x} + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)\right)\right) \tag{4.50}$$

veya

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = 1 - e^{-x} + L_t^{-1}(L_x(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) \tag{4.51}$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.50) veya Denklem (4.51) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir:

$$v_0(x,t) = 1 - e^{-x}$$
$$v_{k+1}(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_k(x,t))),\ k \geq 0$$

$$v_0(x,t) = 1 - e^{-x}$$
$$v_1(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_0(x,t)) = -te^{-x}$$
$$v_2(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_1(x,t)) = -\frac{t^2}{2!}e^{-x}$$
$$v_3(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_2(x,t)) = -\frac{t^3}{3!}e^{-x}$$
$$\dots$$

Bu bağıntılarla seri formdaki $v(x,t)$ fonksiyonu,

$$v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t) + \dots$$

veya açık şekilde

$$v(x,t) = 1 - e^{-x}(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots)$$

olarak yazılır.

$v(x,t)$ fonksiyonu kapalı formda yazılırsa,

$$v(x,t) = 1 - e^{-x}e^{t}$$

olur. Sınır şartları kullanılırsa

$$v(0,t) = 1 - e^{t} = -w(t)$$
$$w(t) = e^{t} - 1$$

$$f(t) = w'(t) = e^{t}$$

ve

$$v_x(0,t) = h(t) = e^{t}$$

elde edilir.

Örnek 2: Aşağıda sınır-başlangıç şartları verilen ısı denkleminin $f(t)$ kaynak fonksiyonunu ve $h(t)$ sınır şartını Adomian Ayrışım Metodunu kullanarak bulunuz.

$$u_t = u_{xx} + f(t), f \in C[0,T] \qquad (4.52)$$
$$u(x,0) = \cos x$$
$$u(0,t) = e^{-t} + \cosh t$$
$$u_x(0,t) = h(t)$$

Çözüm :

(4.37)'de tanımlanan diferansiyellenebilen $w(t)$ fonksiyonu kullanılarak,

$$v(x,t) = u(x,t) - w(t)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm ile Denklem (4.52) homojen hale indirgenir:

$$v_t = v_{xx} \qquad (4.53)$$
$$v(x,0) = \cos x$$
$$v(0,t) = e^{-t} + \cosh t - w(t)$$
$$v_x(0,t) = h(t)$$

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.53) operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t(v(x,t)) = L_x(v(x,t)), \; t \geq 0 \qquad (4.54)$$

(4.54) eşitliğinin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörünü uygularsak,

$$L_t^{-1}(L_t(v(x,t))) = L_t^{-1}(L_x(v(x,t)))$$

ve buradan

$$v(x,t) = \cos x + L_t^{-1}(L_x(v(x,t))) \qquad (4.55)$$

elde edilir.

$v(x,t)$ fonksiyonunu $v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$ olarak seriye açılır ve (4.55) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = \cos x + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \right)\right) \qquad (4.56)$$

veya

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = \cos x + L_t^{-1}(L_x(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) \qquad (4.57)$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.56) veya Denklem (4.57) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir:

$$v_0(x,t) = \cos x$$
$$v_{k+1}(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_k(x,t))), k \geq 0$$

$$v_0(x,t) = \cos x$$
$$v_1(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_0(x,t)) = -t\cos x$$
$$v_2(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_1(x,t)) = \frac{t^2}{2!}\cos x$$
$$v_3(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_2(x,t)) = -\frac{t^3}{3!}\cos x$$
$$\ldots$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t) + \ldots$$
$$v(x,t) = \cos x(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots)$$

$v(x,t)$ fonksiyonu kapalı formda yazılırsa,

$$v(x,t) = e^{-t}\cos x$$

olur. Sınır şartları kullanılırsa

$$v(0,t) = e^{-t} = e^{-t} + \cosh t - w(t)$$
$$w(t) = \cosh t$$

$$f(t) = w'(t) = \sinh t$$

ve

$$v_x(0,t) = h(t) = 0$$

bulunur.

Örnek 3: Aşağıda sınır-başlangıç şartları verilen ısı denkleminin $f(t)$ kaynak fonksiyonunu ve $h(t)$ sınır şartını Adomian Ayrışım Metodunu kullanarak bulunuz.

$$u_t = u_{xx} + f(t), f \in C[0,T] \tag{4.58}$$
$$u(x,0) = \sin x$$
$$u(0,t) = \frac{t^3}{3}$$
$$u_x(0,t) = h(t)$$

Çözüm :

(4.37)'de tanımlanan diferansiyellenebilen $w(t)$ fonksiyonu kullanılarak,

$$v(x,t) = u(x,t) - w(t)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm ile (4.58) denklemi homojen hale indirgenir:

$$v_t = v_{xx} \tag{4.59}$$
$$v(x,0) = \sin x$$
$$v(0,t) = \frac{t^3}{3!} - w(t)$$
$$v_x(0,t) = h(t)$$

L_x ve L_t diferansiyel operatörleri ve L_t^{-1} ters operatörü (4.2) ve (4.3)' deki gibi tanımlanırsa, Denklem (4.59), operatör formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_t\big(v(x,t)\big) = L_x\big(v(x,t)\big), t \geq 0 \tag{4.60}$$

(4.60) eşitliğinin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörünü uygulanırsa,

$$L_t^{-1}\Big(L_t\big(v(x,t)\big)\Big) = L_t^{-1}\Big(L_x\big(v(x,t)\big)\Big)$$

ve buradan

$$v(x,t) = \sin x + L_t^{-1}\Big(L_x\big(v(x,t)\big)\Big) \tag{4.61}$$

elde edilir.

$v(x,t)$ fonksiyonunu $v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$ olarak seriye açılır ve (4.61) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = \sin x + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \right)\right) \tag{4.62}$$

veya

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = \sin x + L_t^{-1}(L_x(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots)) \tag{4.63}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.62) veya Denklem (4.63) kullanılarak aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir:

$$v_0(x,t) = \sin x$$
$$v_{k+1}(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_k(x,t))), k \geq 0$$

$$v_0(x,t) = \sin x$$
$$v_1(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_0(x,t)) = -t\sin x$$
$$v_2(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_1(x,t)) = \frac{t^2}{2!}\sin x$$
$$v_3(x,t) = L_t^{-1}(L_x(v_2(x,t)) = -\frac{t^3}{3!}\sin x$$
$$\ldots$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + v_3(x,t) + \ldots$$
$$v(x,t) = \sin x(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots)$$

$v(x,t)$ fonksiyonu kapalı formda yazılırsa,

$$v(x,t) = e^{-t}\sin x$$

olur. Sınır şartları kullanılırsa,

$$v(0,t) = 0 = \frac{t^3}{3} - w(t)$$

$$w(t) = \frac{t^3}{3}$$

$$f(t) = w'(t) = t^2$$

ve

$$v_x(0,t) = h(t) = e^{-t}$$

elde edilir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada literatürde 1980'li yıllardan başlayarak günümüze kadar halen de detaylı olarak incelenen Adomian Ayrıştırma Metodu konu edilmiştir. Çalışmamızda, verilen bir ısı transfer denkleminde x'e bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ile t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu; daha sonra yine verilen bir ısı denkleminde t'ye bağlı bilinmeyen kaynak fonksiyonu ve bilinmeyen sınır şartı Adomian Ayrıştırma Metodu ile çözüm fonksiyonunu bulmaksızın belirlenmiştir ve örneklerle desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Cannon J. R., Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data, *IMA J. Numer. Anal.*, 1968, **5**(2), 275-286.

[2] Cannon J. R., An inverse problem for an unknown source in a heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1980, **75**(2)**,** 465-485.

[3] Cannon J. R., Duchateau, P., Structural identification of an unknown source term in a heat equation, *Inverse Probl.*, 1998, **14**, 535-551.

[4] Savatev E. G., On problems of determining the source function in a parabolic equation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1995, **3**, 83-102.

[5] Fatullayev A. G., Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a heat equation, *Math. Comput. Simulation*, 2002, **8**(2), 161-168.

[6] Dehghan M., Tatari M., Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions, *Math. Comput. Modelling*, 2006, **44**(11), 1160-1168.

[7] Farcas A., Lesnic D., The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable, *J. Engrg. Math.*, 2006, **54**, 375-388.

[8] Yan L., Fu C. L., Yang F. L., The method of fundamental solutions fort he inverse heat source problem, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2008, **32**, 216-222.

[9] Ahmadabadi N. A., Arab M., Maalek G. F. M., The method of fundamental solutions fort he inverse space-dependent heat source problem, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2009, **33**, 1231-1235.

[10] Geng F., Lin Y., Application of the variational iteration method to inverse heat source problems, *Comput. Math. Appl.*, 2009, **58**, 2098-2102.

[11] Cheng W., Zhao L., Fu C. L., Source term identification for an axisymmetric inverse heat conduction problem, *Comput. Math. Appl.*, 2010, **59**, 142-148.

[12] Shidfar A., Babaei A., Molabahrami A., Solving the inverse problem of identifying an unknown source term in a parabolic equation, *Comput. Math. Appl.*, 2010, **60**, 1209-1213.

[13] Hetmaniok E., Nowak I., Slota D., Witula R., Application of the homotopy perturbation method fort he solution of inverse heat conduction problem, *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2012, **39**, 30-35.

[14] Li H., Lei J., Liu Q., An inversion approach fort he inverse heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2012, **55**, 4442-4452.

[15] Adomian G., “A rewiew of decomposition method in applied mathematics”, *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, **135**, 501-544.

[16] Adomian G., The Decomposition Method for Ordinary Differential Equations, Editor: Van Der Merwe, Alwyn, Solving *Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 6-190, 1994.

[17] Cherruault Y., Convergence of Adomian’s method, *Mathl. Comput. Model.*, 1989, **14**, 83-86.

[18] Cherruault Y., Convergence of Adomian’s method, *Kybernotes*, 1990, **18**(20), 31-38.

[19] Cherruault Y., Adomian G., Decomposition methods: a new prof of convergence, *Mathl. Comput. Modelling*, 1993, **18**, 103-106.

[20] Abbaoui K., Cherruault Y., Convergence of Adomian’s method applied to differential equations, *Computers Math. Applic.*, 1994, **28**(5), 103-109.

[21] Abbaoui K., Cherruault Y., Convergence of Adomian’s method applied to nonlinear equations, *Mathl. Comput. Modelling.*, 1994, **20**(9), 69-73.

[22] Kaya D., A convergence analysis of the ADM and an application, *Appl. Math. Comput.*, 2005, **161**(3), 1015-1025.

[23] Luo X. G., Wu Q. B., Zhang B. Q., Revisit on partial solutions in the Adomian decomposition method: Solving heat and wave equations, *J. Math. Anal. Appl.,* 2006, **321**(1), 353-363.

[24] Ebrahimian M., Pourgholi R., Emamjome M., Reihani P., A numerical solution of an inverse parabolic problem with unknown boundary conditions, *Appl. Math. Comput.*, 2007, **189**, 228-234.

[25] Alizadeh E., Sedighi K., Farhadi M., Ebrahimi-Kebria H. R., Analytical approximate solutions of the cooling problem by Adomian decomposition method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2009, **14**(2), 462-472.

[26] Mierzwiczak M., Kolodziej J. A., Application of the method of fundamental solutions and radial basis functions for inverse transient heat source problem, *Comput. Phys. Commun.*, 2010, **181**(12), 2035-2043.

[27] Kabanikhin S. S., Definitions and examples of inverse and ill-posed problems, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2008, **16**, 317-357.

[28] Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V., *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Problems*, Begell House *Inc.*, Newyork, 1995.

[29] Engl H. W., Hanke M., Neubauer A., *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996.

[30] Romanov V. G., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, 1st ed., VSP, Utrecht, (1987).

[31] Romanov V. G., *Investigation Methods for Inverse Problems*, 1st ed., VSP, Utrecht, 2002.

[32] Isakov U. M., Inverse *Problems in Partial Differential Equations*, Springer, Berline-New York, 1998.

[33] Kabanikhin S. I., Lorenzi A., *Identification Problems of Wave Phenomena*, 1st ed., VSP, Utrecht, 1999.

[34] Lavrentiev M. M., *Some Improperly Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Springer, Berlin, 1967.

[35] Çağlıyan M., Çelebi O., Birinci Basamaktan Doğrusal K. T. D., *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, 2. Baskı, Dora Yayınları, Bursa, 31-32, 2010.

[36] Gabet L., The decomposition method and linear partial differential equations, *Math. Comput. Model.*, 1993, **17**(6), 11-22.

[37] Wazwaz A. M., A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions, *Appl. Math. Comput.*, 1998, **97**(1), 37-44.

[38] Wazwaz A. M., El-Sayed S. M., A new modification of the Adomian decomposition method for linear and non linear operators, *Appl. Math. Comput.*, **122**(3), 2001, 393-405.

[39] Luo X. G., A two step Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 2001, **170**(1), 570-583.

[40] Kaya D., Yokuş A., A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations, *Math. Comput. Simulat.*, 2002, **60**, 507-512.

[41] Dehghan, M., The use of Adomian decomposition method for solving the one-dimensional parabolic equation with non-local boundary specifications, *Int. J. Comput. Math.*, 2004, **81**(1), 25–34.

[42] Chen W., Lu Z., An algorithm for Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 2004, **159**(1), 221-235.

[43] Soufyane A., Boulmalf M., Solution of linear and nonlinear parabolic equations by the decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 2005, **162**(2), 687-693.

[44] Pamuk S., An application for linear and nonlinear heat equations by Adomian's decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 2005, **163**(1), 89-96.

[45] Jang B., Exact solutions to one dimensional non-homogeneous parabolic problems by the homogeneous Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 2007, **186**(2), 969-979.

[46] Abassy A. T., Improved Adomian decomposition method, *Comput. Math. Appl.*, 2010, **59**(1), 42-54.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] Demir A., **Korkmaz E.**, Erman S., Özgür B., Inverse Problem of Determining Source Function in Linear Parabolic Equation by Adomian Decomposition Method, *International Congress in Honour of Professor H.M. Srivastava*, Uludag University, Bursa, 23-26 August 2012.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Sivas'ta, lise öğrenimini Iğdır'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda tezsiz yüksek lisans yaptı. 2010 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2009 yılından beri Ardahan Üniversitesi Sosyal Bilimler Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır.