

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VERİ ANALİZİNDE DALGACIK TEORİSİNİN ETKİNLİĞİ

TUBA MERAL

KOCAELİ 2013

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VERİ ANALİZİNDE DALGACIK TEORİSİNİN ETKİNLİĞİ

TUBA MERAL

Yrd.Doç.Dr. Hülya KODAL
SEVİNDİR
Danışman, Kocaeli Üniv.

Doç.Dr. Cemil ÖZ
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.

Yrd.Doç.Dr. Ali DEMİR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.


.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 04.07.2013

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

İşaret ayrıştırmanın temelinde yatan fikir, o işaretin spektrumunu alt spektrum parçalarına ayrıştırarak tek tek ele alıp, mevcut yöntemlerle işlemektir. Bir analiz ve sentez sisteminden beklenen ise işareti işledikten sonra tekrar tersinir bir işlemle yeniden elde edebilmeye imkan sağlamaktır. Son zamanlarda işaret modellenmesinde dalgacık analizi olarak bilinen güçlü bir yöntem uygulamalı matematik ve mühendislik araştırmalarında kullanılmaya başlanmıştır.

Çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübesiyle yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR'e, Matematik Bölüm Başkanı ve Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı değerli hocam sayın Prof.Dr. Halis AYGÜN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca, Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında beni destekleyen, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca tezin oluşturulma sürecinde desteklerini hep yanımda hissettiğim, maddi ve manevi desteklerini hiç bir zaman benden esirgemeyen çok sevgili annem, babam ve kardeşim başta olmak üzere tüm aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Mayıs – 2013

Tuba MERAL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
TABLolar DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
GİRİŞ	1
1. VERİ ANALİZİNE BİR BAKIŞ	4
1.1. İstatistiksel Anlamlılık Testleri.....	6
1.2. İstatistiksel Analizde Yaygın Olarak Kullanılan Testlerin Sınıflandırılması.....	6
2. SPEKTRAL ANALİZ VE YÖNTEMLERİ	11
2.1. Frekans Analizi ve Kullanılan Metotlar	11
2.2. Sinyal Analiz Metotlarının Gelişimi	12
2.3. Klasik (Parametrik Olmayan) Spektral Analiz Yöntemleri	15
2.3.1. Fourier dönüşümü	15
2.3.2. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü	18
2.3.3. Akan Fourier dönüşümü.....	20
2.3.4. Ayrık Fourier dönüşümü	21
2.3.5. Hızlı Fourier dönüşümü	22
2.3.6. Zak dönüşümü.....	23
2.3.7. Periodogram yöntemi	23
2.3.8. Parametrik olmayan spektral analiz yöntemlerinin incelenmesi.....	24
2.4. Modern (Parametrik) Spektral Analiz Yöntemleri.....	24
2.4.1. Autoregressive modelleme.....	25
2.4.2. Moving average modelleme	26
2.4.3. Autoregressive moving average modelleme	26
2.5. Altuzay Yöntemleri.....	27
2.6. Dalgacığın Kuramsal Temellerine Giden Yol.....	27
2.6.1. Dalgacık tanımı	28
2.7. Dalgacık (Wavelet) Dönüşümü.....	29
2.7.1. Sürekli dalgacık dönüşümü	34
2.7.1.1. Dalgacık katsayıları	36
2.7.2. Ayrık dalgacık dönüşümü	37
2.7.2.1. Çoklu çözünürlük analizi	41
2.7.2.2. Dalgacık paket dönüşümü	43
3. DALGACIK TEORİSİ.....	44
3.1. Sürekli Dalgacık Dönüşümleri.....	44
3.2. Ayrık Dalgacık Dönüşümü ve Dalgacık Serisi	56
4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI	66
4.1. Dalgacık Dönüşümünün Uygulama Alanları	66
4.2. Literatür Taraması.....	69

4.3. Dalgacık Dönüşümünün Etkinliği Üzerine Uygulamalar	71
4.3.1. EEG verilerine bir boyutlu dalgacık dönüşümü ve Fourier dönüşümü uygulaması	72
4.3.2. EEG verilerine bir boyutlu dalgacık dönüşümü ve KZFD uygulaması	81
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	89
KAYNAKLAR	91
EKLER.....	96
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER	99
ÖZGEÇMİŞ	100

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Hipotez testleri	7
Şekil 2.1. Zaman frekans-genlik düzlemi	12
Şekil 2.2. Bir işaretin Fourier dönüşümü	16
Şekil 2.3. Fourier dönüşümü	18
Şekil 2.4. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü	20
Şekil 2.5. Sinüs dalgacık ve dalgacık örneği	30
Şekil 2.6. Dalgacık dönüşümü	30
Şekil 2.7. Sinyal analiz yöntemleri arasındaki ilişki	32
Şekil 2.8. Dalgacık analizinin aşamaları	34
Şekil 2.9. Fourier ve dalgacık analizlerinin zaman- frekans ölçeğinde gösterimi	34
Şekil 2.10. Dalgacık dönüşümünden hesaplanan katsayıların zamanla değişen iki boyutlu gösterimi	37
Şekil 2.11. Dalgacık dönüşümünden hesaplanan katsayıların zamanla değişen üç boyutlu gösterimi	37
Şekil 2.12. Filtreleme işlemi	38
Şekil 2.13. ADD zaman-frekans düzlemi	39
Şekil 2.14. Dalgacık ayrıştırma ağacı	40
Şekil 2.15. Dalgacık ayrıştırma ve yapılandırma	41
Şekil 2.16. Çoklu çözünürlüklü analiz ile $x(t)$ işaretinin ayrıştırılması	42
Şekil 2.17. Dalgacık paket dönüşümü	43
Şekil 3.1. Haar dalgacığı	48
Şekil 3.2. Meksika şapka dalgacığı	51
Şekil 4.1. Dalgacık dönüşümünün uygulama alanları.....	66
Şekil 4.2. Bir parmak izinin dalgacık dönüşümü ile sıkıştırılması	68
Şekil 4.3. Bir boyutlu EEG verisi.....	72
Şekil 4.4. S1 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması	73
Şekil 4.5. S2 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması	73
Şekil 4.6. S3 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması	73
Şekil 4.7. S1 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması.....	75
Şekil 4.8. S1 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı	75
Şekil 4.9. S2 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması.....	76
Şekil 4.10. S2 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı	76
Şekil 4.11. S3 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması.....	77
Şekil 4.12. S3 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı	77
Şekil 4.13. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayılarının karşılaştırılması	78

Şekil 4.14. S1 hastasının, S2 hastasının ve S3 hastasının 2-boyutlu skalogramları.....	79
Şekil 4.15. S1 hastasının, S2 hastasının ve S3 hastasının 3-boyutlu skalogramları.....	80
Şekil 4.16. 9 yaşında sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işareti	81
Şekil 4.17. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan bir EEG işareti.....	81
Şekil 4.18. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretine kısa zamanlı Fourier dönüşümünün 5 pencerede uygulanması	82
Şekil 4.19. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretine kısa zamanlı Fourier dönüşümünün 5 pencerede uygulanması	83
Şekil 4.20. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “db10” dalgacık dönüşümü uygulanması	85
Şekil 4.21. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “Meyer” dalgacık dönüşümü uygulanması.....	85
Şekil 4.22. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “db10” dalgacık dönüşümü uygulanması.....	86
Şekil 4.23. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “Meyer” dalgacık dönüşümü uygulanması.....	86
Şekil 4.24. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocukla Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki bir çocuğun enerji katsayıları değerlerinin grafiği.....	87
Şekil 4.25. (a) 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin 2 boyutlu skalogramı (b) Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin 2 boyutlu skalogramı	88
Şekil 4.26. (a) 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin 3 boyutlu skalogramı (b) Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin 3 boyutlu skalogramı	88

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayıları	78
----------------------------------------------------------------------------------	----

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

α	: Alfa
β	: Beta
δ	: Delta
ε	: Epsilon
ϕ	: Fi
γ	: Gamma
η	: İta
ξ	: Ksi
λ	: Lamda
μ	: Mi
ω	: Omega
ψ	: Psi
θ	: Teta

Kısaltmalar

ADD	: Ayrık Dalgacık Dönüşümü
AFD	: Ayrık Fourier Dönüşümü
AR	: Auto Regressive (Oto regresif)
ARMA	: Auto Regressive Moving Average (Oto regresif Hareketli Ortalama)
BT	: Bilgisayarlı Tomografi
ÇÇA	: Çoklu Çözünürlük Analizi
DD	: Dalgacık Dönüşümü
EEG	: Elektroensefalogram
EKG	: Elektrokardiyogram
EMG	: Elektromiyogram
EV	: Eigenvector (Özvektör Analiz Yöntemi)
FD	: Fourier Dönüşümü
HFD	: Hızlı Fourier Dönüşümü
Hz	: Hertz
KZFD	: Kısa Zaman Fourier Dönüşümü
MA	: Moving Average (Hareketli Ortalama)
MUSIC	: Multiple Signal Classification (Çoklu Sinyal Sınıflama)
SDD	: Sürekli Dalgacık Dönüşümü
SPSS	: Statistical Package for the Social Sciences
STFT	: Short Time Fourier Transform (Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü)
TAFD	: Ters Ayrık Fourier Dönüşümü
TSDD	: Ters Sürekli Dalgacık Dönüşümü

VERİ ANALİZİNDE DALGACIK TEORİSİNİN ETKİNLİĞİ

ÖZET

Yaşadığımız dünyayı daha iyi anlayabilmemiz ve yaşamı kolaylaştırabilmemiz için, insan sesi, makine titreşimleri, biyolojik işaretler, müzik gibi çevremizde var olan birçok sinyalin incelenmesi kaçınılmazdır. Bu sinyallerin kodlanması, sıkıştırılması, temizlenmesi, analiz ve teşhisi, depolanması, taşınması, tekrar elde edilmesi, modellenmesi gibi işlemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada, çeşitli sinyaller üzerinde spektral analiz yöntemleri tanıtılarak optimal yöntemin belirlenmesi üzerine yapılan çalışmalar özetlenmiştir. Bu yöntemlerin işleyişi için kullanılan Fourier ve dalgacık dönüşüm algoritmalarından elde edilen sonuçların karşılaştırılmasının yapılması, en yüksek doğruluk oranını sağlayan sinyal analiz metodunun tespitinin yapılması ve geleneksel işaret işlemede kullanılan Fourier dönüşümünün bazı yetersizliklerinin ortadan kaldırmak amaçlı ortaya çıkan dalgacık dönüşümünün etkinliğini tespit etmek için bir boyutlu medikal sinyallerden Elektroensefalografi (EEG) verisi üzerine bir uygulama yapmak hedeflenmiştir.

Bu amaçla medikal sinyallerden EEG verisine, Fourier dönüşümü, kısa zamanlı Fourier dönüşümü ve bir boyutlu dalgacık dönüşümü uygulanıp elde edilen sonuçların uygunluğu incelenmiştir. Bu uygulamada kullanılan EEG verileri Kocaeli Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Projesi kapsamında devam eden 2010/003 nolu EEG Sinyallerinin Spektral Analizinde Dalgacık ve Fourier Dönüşümleri isimli BAP projesinden alınmıştır. Kullanılan EEG verilerine matlab paket programında uygun kodlar yazılarak sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dalgacık Teorisi, Sinyal İşleme Metodları, Veri Analizi.

THE EFFECTIVENESS OF THE WAVELET THEORY AT THE DATA ANALYSIS

ABSTRACT

To better understand the world we live in and facilitate our lives, analysis of signals surrounding us such as the human voice, machine vibrations, biological signals, music, etc. is inevitable. Operations such as coding, compression, washing, analysis and identification, storage, transportation, reestablishing, modeling of these signals are needed indeed.

In this study, by introducing the methods of spectral analysis on the various signals, studies are summarized on the determination of the optimal method. Fourier and wavelet algorithms to the comparison of the results obtained, providing the highest accuracy of detection of the method of signal analysis is aimed. Wavelet transform has emerged aiming eliminating some of the deficiencies of Fourier transform used in the traditional signal processing. To determine the effectiveness of the wavelet transform, one-dimensional medical signals Electroencephalography (EEG) data is aimed to make an application on.

For that purpose in this thesis one of the medical data, EEG signals, are chosen for applications. Fourier transform, short time Fourier transform and one-dimensional wavelet transform is performed and the results obtained were examined suitability. EEG data used in this application have been obtained from Kocaeli University Medical Hospital. EEG data used in matlab package program results have been obtained by writing the appropriate codes.

Keywords: Data Analysis, Signal Processing Methods, Wavelet Theory.

GİRİŞ

Çevremizde incelenmesi gereken çeşitli sinyaller mevcuttur. Örneğin insan sesi, makine titreşimleri, biyolojik işaretler, müzik gibi. Birçok sinyalin kodlanması, sıkıştırılması, temizlenmesi, analiz ve teşhisi, depolanması, taşınması, tekrar elde edilmesi, modellenmesi gibi işlemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sinyallerde saklı olan çok miktardaki bilgilerin kullanılabilmesi için sinyal işleyicileri çok çeşitli araştırmalar yapmaktadırlar. 1970'lerden sonra bilgisayarların bu sinyalleri kayıt etmeleri ve spektral analiz yöntemlerinin geliştirilmesi bu bilgilerin bulunmasında frekans bileşenlerinden faydalanılmayı mümkün kılmıştır.

Sinyal işlemecilerin en çok kullandığı Fourier analizi bir sinyali zaman alanından frekans alanına dönüştürür. Bu frekans bileşenlerinin tespiti önemli olduğu zaman sıkça başvurulan bir tekniktir. Fourier analizinde, frekans alanına geçildiğinde zaman alanı kaybolur. Durağan sinyallerde Fourier analizi iyi bir yöntem olmaktadır, fakat bazı işaretler durağan olmayıp sürekli değişir. Örneğin medikal sinyallerden Elektroensefalografi (EEG), Elektrokardiyografi (EKG) gibi. Bu işaretlerde arada sırada kısa süreli ortaya çıkan dik darbeler ve kompleks dalgalar teşhis açısından önemli bilgiler taşır. Bu durumda bu özel spektral bileşenlerin hangi zaman aralığında meydana geldiği önemlidir ve Fourier analizi yetersiz kalır (Yazgan ve Korürek, 1996).

Bu sorunu çözmek için farklı algoritmalara başvurulmuştur. Fourier dönüşümü zamanlama eksikliğini gidermek için, Gabor (1946) Kısa zamanlı Fourier dönüşümü (KZFD) olarak bilinen Fourier temelli analiz yöntemini sunmuştur. Bu yöntemle sinyali zaman alanında küçük pencereler halinde analiz edebileceği fikrini ortaya atmış ve başarı sağlamıştır. KZFD, bir sinyalin zaman ve frekans görünüşü arasında uzlaşmasını sağlar. Yani sinyalin ne zaman ve hangi frekansla oluştuğu hakkında bilgi verir. Fakat bu bilgiler sınırlı doğrulukta elde edilir. Çünkü doğruluk penceresinin boyutuyla ilgilidir. Yöntem, zaman sinyali ve bir yaklaşık zaman penceresinin çarpılmasıyla klasik Fourier dönüşümü tekniğinden türetilir.

KZFD'nin en önemli sorunu pencere boyutunun sabit olmasıdır. KZFD sinyalin zaman ve frekans bilgilerini içermesi önemini artırır ama pencere fonksiyonunun bütün sinyal boyunca sabit kalması iyi bir analiz değildir. Çözünürlüğün yani detayların fazla olması gereken sinyal zamanları olabilir, bu durumda pencere boyutunun değişebilir boyutta olması istenir. Birçok işaret daha esnek yaklaşımlara yani zaman veya frekans hakkında daha çok bilgi alabilmek için değişebilen pencereleme tekniklerine ihtiyaç duymaktadır (Fliege, 1996). Pencere fonksiyonu sabit zaman-frekans çözünürlüğü vererek KZFD'yi sınırlar.

KZFD, sinyal analiz etkinliğini arttırmış olmasına karşın ani frekans değişimleri tespitinde istenilen sonuçları verememektedir. Fourier dönüşümlerindeki bu eksiklik, sinyalin analizinde yetersiz kalınmasına sebep olur. Bu sinyaller içerisinde küçük geçici sinyaller olabileceği için Fourier metotlarının hiçbiri dinamik sinyallerin analizinde uygun değildir. Bu eksikliği ortadan kaldırmak için kullanılan dalgacık dönüşümünün, Kısa zamanlı Fourier dönüşümüne benzer bir mantığı vardır.

Dalgacık dönüşümü, Kısa zamanlı Fourier dönüşümünün bir alternatifi olarak çözünürlük probleminin üstesinden gelmek için ortaya çıkmıştır. Dalgacık analizi, bir ileri ki yöntem olup pencereleme tekniği büyüklüğü değiştirilebilir. Dalgacıklar durağan veya durağan olmayan sinyallerin zaman-ölçek analizi için olanak sağlar. Dalgacıklar sonlu süreli dirler ve bu yüzden yerel sinyal özelliklerinin analizini mümkün kılarlar. Dalgacık dönüşümleri tüm sinyal frekans-zaman bilgisini korurlar. Bu sebeplerden dolayı durağan olmayan gerçek doğal sinyallerin dalgacık temelli metotlarla işlenmesi geleneksel metotlardan daha iyi sonuçlar sağlarlar (Miner, 1998). Dalgacığın en önemli avantajlarından birisi, büyük işaretlerin yerel analizine olanak tanınmasıdır.

Dalgacık dönüşümü, farklı pencereleme fonksiyonları ve asimetrik dalgacıklar için kullandığından işareti tam olarak betimleyebilmektedir. Böylece işaret hakkında ayrıntılı bilgiye sahip olunmaktadır. Bundan dolayı dalgacık dönüşümü; işaret işleme (gürültü süzme, işaret gösterimi vb.), görüntü işleme (sıkıştırma, gürültü süzme vb.), haberleşme, biyomedikal, matematik, istatistik vb. alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışmada öncelikle spektral analiz yöntemleri üzerinde durulacak ve veri analizinde dalgacık dönüşümünün etkinliğinin incelenmesi amacıyla dalgacık dönüşümünün teori ve uygulamaları hakkında bilgi verilecektir.

Birinci bölümde veri, veri türleri, veri analizi ve hipotez testlerinin temel tanımları yapılacak ve veri analizinde parametrik ve parametrik olmayan testlerin uygulandığı çalışma örneklerine yer verilecektir.

İkinci bölümde, sinyalin frekans bileşenleri ve güçlerinin bir kestirimini bulmak üzere kullanılan spektral analiz yöntemleri tanıtılacaktır. Sinyal işleme, sinyal işleme metotlarının gelişimi, spektral analiz yöntemleri, dalgacığın kuramsal temellerine giden yol, dalgacık dönüşümü ve türleri hakkında ayrıntılı bilgi verilecektir. Ayrıca bu bölümde tanıtılan yöntemlerin avantaj ve dezavantajlarından bahsedilecektir.

Üçüncü bölümde, sürekli dalgacık dönüşümü, ayrık dalgacık dönüşümü ve dalgacık serisi teorik şekilde derinlemesine incelenecektir.

Dördüncü ve son bölümde, sinyal analizinde dalgacığın çeşitli uygulama alanlarından bahsedilecektir ve bu uygulama alanlarında dalgacık dönüşümünün etkinliği üzerine literatürden makale ve çalışma örneklerine yer verilecektir. Ayrıca bir boyutlu medikal verilerden EEG için dalgacık dönüşümünün etkinliği gösterilecektir.

Bu tez çalışmasında, medikal sinyallerden EEG için spektral analiz yöntemlerinin incelenmesi hedeflenmiştir. Bu yöntemlerin işleyişi için kullanılan algoritmalarından elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılarak, en yüksek doğruluk oranını sağlayan sinyal analiz metodunun tespitini yapmak ve geleneksel işaret işlemede kullanılan Fourier dönüşümünün bazı yetersizliklerini ortadan kaldırmak amaçlı ortaya çıkan dalgacık dönüşümünün etkinliğini tespit etmek amaçlanmıştır.

1.VERİ ANALİZİNE BİR BAKIŞ

Günümüzde çok karmaşık bir niteliğe sahip olan sosyal ve ekonomik olayların sayısal olarak analiz edilmesi gün geçtikçe daha da zorlaşmaktadır. Bu nedenle toplumsal yaşamda sürekli olarak yeni sorunlarla karşılaşmakta ve bu sorunların çözümleri için yeni araştırmaların yapılmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Genel olarak bireylere ve olaylara ilişkin sayısal bilgileri içeren verilerin toplanması, düzenlenmesi, özetlenmesi, analizi ve bu analizler aracılığıyla elde edilen sonuçların yorumlanması ve karar verilmesi olarak tanımlanan istatistik bilimine ilişkin yöntem ve tekniklerin fen ve sosyal bilimlerde yapılan çalışmalarda kullanılması giderek bir zorunluluk halini almaktadır.

Gerek fen gerekse sosyal bilimlerde bilimsel araştırmalarda elde edilen verilerin çözümlenmesinde ve bulguların yorumlanmasında çeşitli istatistik yöntemler ve teknikler yoğun olarak kullanılmaktadır.

Kişisel bilgisayarların yaygınlaşması ve kapasitelerinin gelişmesi ile birlikte MINITAB, STATISTICA, SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) ve SAS (Statistical Analysis System) gibi istatistik işlemlerin yapılabileceği hazır programların yapılması daha önceleri hesap makineleri ile yapılan ve zaman alan pek çok işlemi saniyelik hatta milisaniyelik sürelerle indirmiştir. Sonuç olarak artık istatistikler işlemlerin yapılmasından daha çok uygun istatistiksel tekniğin seçimi ve bu tekniğe uygun bilgilerin elde edilmesi önemli hale gelmiştir. Araştırmacı tarafından çalışma kapsamında elde edilen verilerin hangi istatistiksel tekniklerle analiz edilebileceğinin bilinmesi büyük önem taşımaktadır.

Veri, bir araştırmacı tarafından gözlemlerden elde edilen sayısal olan ya da olmayan sonuçlara, bilimsel araştırmalarda verilen isimdir.

Veriler nitel ve nicel, olgusal ve yargısal olarak sınıflandırılabilirler. Nicelik belirten yani ölçülerek ya da sayılarak elde edilen verilere nicel veriler; bireylerin sahip olduğu belli özelliklerin sınıflara ayrılarak belirtildiği verilere de nitel veriler denir.

Örneğin; yaş, ağırlık, boy gibi veriler nicel veri örnekleri iken cinsiyet, medeni durum, başarılı-başarısız olma gibi veriler nitel veri örneklerindedir.

Veri analizi ise; verinin toplanması, modellenmesi ve gerekirse biçiminin değiştirilmesi sürecidir. Veri genellikle dört farklı yolla toplanır.

- 1-Yayınlanmış kaynaklardan,
- 2-Tasarlanmış bir denemeden,
- 3-Anket sonuçlarından ve
- 4-Gözlem sonuçlarının toplanmasından.

İstatistiksel tahmin, örneklemelerden toplanan verileri kullanarak kitlelerin parametrelerini tahmin etmeyi; hipotez testi, savlarının doğru olup olmadığını tespit etmeyi; korelasyon, veriler arasındaki ilişkiyi yorumlayabilmeyi ve regresyon analizi, bu ilişkinin modellenmesini sağlar.

Veri analizinde gözlenen verinin düzenlenerek grafiklerle sunulması çoğu kez yeterli olmadığından genel durumu yansıtacak olan merkezi eğilim ölçülerine ihtiyaç duyulur. Merkezi eğilim ölçüleri nicel dağılımlarda kullanılan ve bu dağılımların odaklaşma noktasını özetleyecek olan ölçülerdir. Veri analizi değerleri pratik olarak hesaplanabileceği gibi, paket programlarla da kolaylıkla hesaplanabilir.

Bir araştırmada yöntemin belirlenerek uygulanmasından sonra elde edilen verilerin istatistiksel analizi ve sonuçların yorumlanması aşamasına gelinir. İstatistiksel analiz yapılmadan önce, verilerin kategorik (nominal, ordinal) ya da sürekli (aralıklı, oransal) olup olmadığına bakılmalıdır. Bu aşamada elde edilen verilere göre hangi istatistik testlerin uygulanacağı ve test sonuçlarının nasıl yorumlanacağı bilinmesi gerekir. Kategorik verilerde parametrik olmayan testler kullanılırken, sürekli verilerde ise parametrik testler kullanılır.

1.1. İstatistiksel Anlamlılık Testleri (Hipotez Testleri)

Verilen istatistiksel analizde kullanılan testler parametrik ve parametrik olmayan testler, kullanılan değişken sayısına göre de tek değişkenli ve çok değişkenli testler olmak üzere ikiye ayrılır.

Parametrik Testler: İlgili parametreye, belirli bir dağılma ve varyans kavramına dayanarak işlemler yapan esnek olmayan istatistiksel yöntemlerdir.

Parametrik Olmayan Testler: Parametreye, belirli bir dağılma ve varyans kavramına dayanmadan işlemler yapan, genellikle veriler yerine onların sıralama puanlarını kullanarak işlem yapan esnek istatistiksel yöntemlerdir (Özdamar, 2002).

Her hipotez testi, her türlü veriye uygulanamaz. Öncelikle o testin uygulanabilmesi için gerekli koşulların sağlanması/varsayımların yerine getirilmesi gerekir.

Genel olarak, parametrik olmayan testlerle nominal, ordinal ya da normal dışı dağılım gösteren sayısal veriler analiz edilebilirken, parametrik testlerle normal dağılım gösteren sayısal verilerin analizi yapılabilir. Öte yandan normal dağılıma uygun verilere parametrik olmayan test uygulanması pek hatalı sayılmazken, ordinal ya da normal dışı dağılım gösteren verilere parametrik test uygulanması daha sakıncalıdır. Her testin uygulanabilmesi için gerekli koşulların neler olduğu ve verilerin bu koşullara uygunluğunun nasıl saptanacağının mutlaka iyi bilinmesi gerekir. Eğer koşulların sağlanıp sağlanmadığı bilinmiyorsa, verilerin analizinde parametrik olmayan test kullanılması daha güvenli olur.

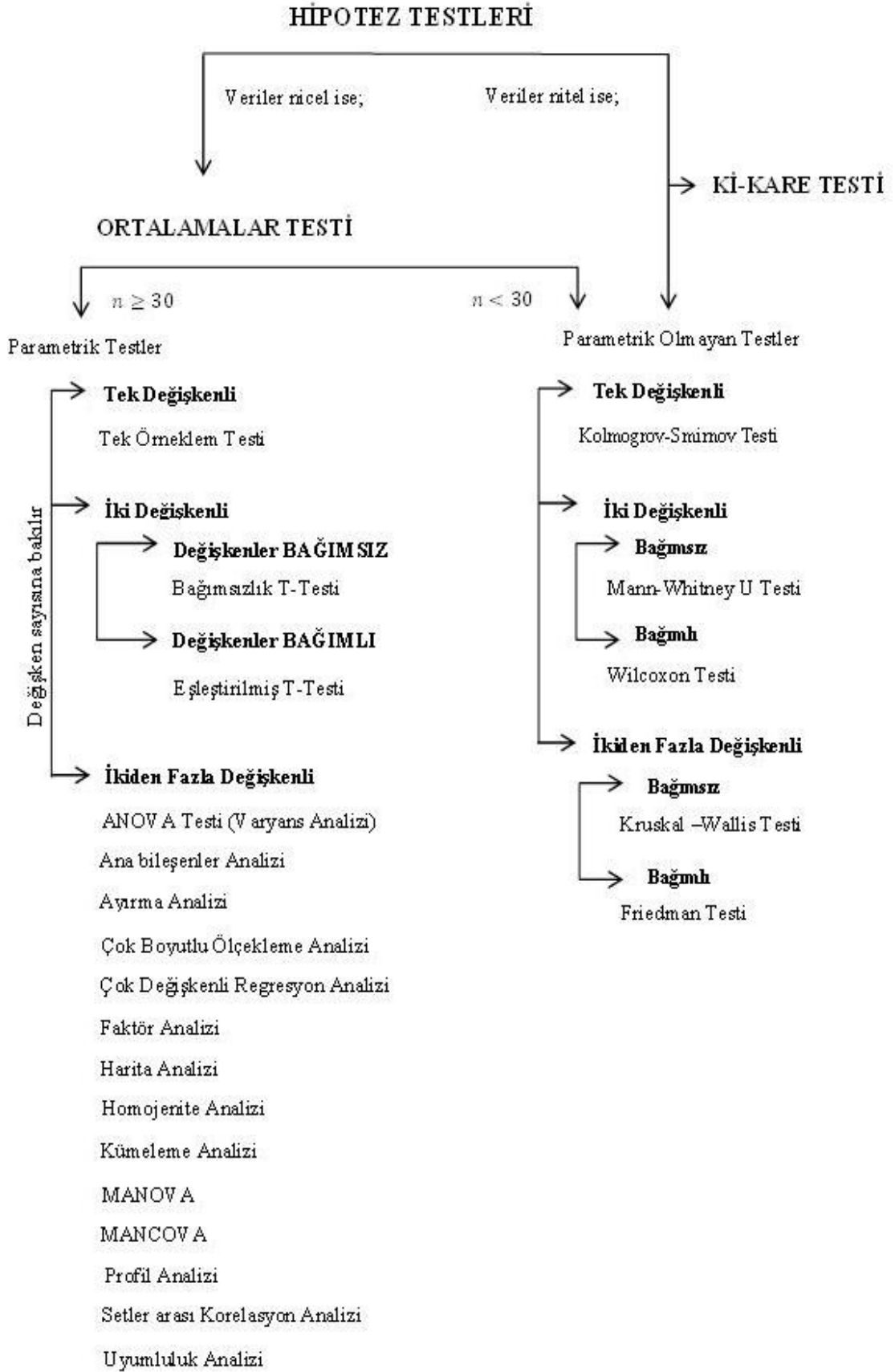
1.2. İstatistiksel Analizde Yaygın Olarak Kullanılan Testlerin Sınıflandırılması

Bu testler sahip oldukları değişkenlere göre; tek değişkenli testler ve çok değişkenli testler olmak üzere ikiye ayrılırlar (Özdamar, 2002).

Tek Değişkenli Testler: Bir değişkenle analiz yapan testlerdir.

Çok Değişkenli Testler: Aynı anda iki veya daha çok değişkenle analiz yapan testlerdir.

Şekil 1.1’de hipotez testlerinin bir sınıflandırılması görülmektedir.



Şekil 1.1. Hipotez testleri

Sinyal de bir veri çeşididir. Yukarıda adı geçen istatistik analiz yöntemleri, matematiksel dönüşüm teknikleri sayesinde sinyal analizinde uygulanmıştır.

Veri analizinde bilinen en eski yöntemlerden istatistiki yöntemler günümüzde de araştırma makalelerinin vazgeçilmezlerindedirler. Bu pek çok örnekle görülebilir:

Turan ve ark. (1999), Cage testi ile alkol kullanımı üzerine yaptıkları epidemiyolojik bir çalışmada deneklerden alınan veriler SPSS'te t testi, ki kare testi ve korelasyon analizi ile değerlendirilmiştir.

2001 yılında Tekeli ve ark., Alt ekstremitte iskemi reperfüzyonunu takiben oluşan akciğer hasarını önlemede FK506'nın rolünü araştırdıkları bu çalışmada değerler $\text{mean} \pm \text{Standart Deviasyon (SD)}$ olarak belirtilmiştir. Kruskal Wallis nonparametrik, ANOVA ve Dunn's multiple comparison testleri çalışma ve kontrol grubunu karşılaştırmak için kullanılmıştır.

Söğüt ve ark. (2004), Sıçanlarda sisplatine bağlı akut renal yetmezlik modelinde E vitamininin koruyucu etkilerinin olup olmadığının araştırıldığı bu çalışmada denekler üç gruba ayrılmış ve yapılan istatistiksel analizlerde, SPSS 9.5 programı kullanılmıştır. Grupların dağılımları non- parametrik testlerden 'One-sample Kolmogorov-Smirnov Test' ile değerlendirilmiştir. Grupların normal dağılım göstermesinden dolayı istatistiksel karşılaştırma için parametrik testlerden 'One-way Anova' testi kullanılmıştır.

2010 yılında Mete ve ark., siklosporin ve takrolimusun (FK506) Apo E-/- sıçanlarda yeni oluşan de novo ateroskleroz üzerine olan etkisi, karşılaştırmalı olarak incelenen bu çalışmada kullanılacak olan Apo E-/- sıçanlar üç gruba ayrılmış ve yapılan istatistiksel analizlerde, sıçanların aortundan alınan kan örneğinden her üç grubun total kolesterol, trigliserit ve HDL kolesterol değerleri karşılaştırılmıştır. İstatistiksel analizlerde öncelikle üç grubun parametrelerinin meydanları Kruskal-Wallis testi ile karşılaştırıldı. İstatistiksel olarak anlamlı bulunan parametreler için ikili karşılaştırmalarda, Bonferroni düzeltilmeli Mann-Whitney U-testi kullanılmıştır. Tüm analizler için SPSS Windows için 15.0 versiyon (SPSS Inc., Chicago, Illionis, USA) paket programı kullanılmıştır.

Kasman (2011), Paslanmaz çelik ve alüminyum alaşımı malzemelerin fiber lazer ile işlenmesinde yüzey pürüzlülüğünün tespiti için yaptığı çalışmada istatistiksel yöntemlerden varyans analizi (Anova) kullanmıştır.

2011 yılında Karaca ve ark., Türk meme kanserli kadın hastaların normal ve kanserli dokularını, FGFR2 geninin 2 nolu intronundaki rs2981582 polimorfizmi açısından taramak ve bu polimorfik dağılışın hastaların klinikopatolojik bulgularıyla olası ilişkisini saptamak üzerine olan bu çalışmada 2008-2009 yılları arasında Ege Üniversitesi Genel Cerrahi bölümünde ameliyat edilen 48 kadın meme kanseri hastasının her birinden alınan normal ve kanserli dokular kullanılmıştır. İstatistiksel analiz sürekli değişkenlerin grup (normal doku vs. kanserli doku) karşılaştırılmasında iki yönlü Student t-testi kullanılmıştır. Normal dağılım göstermeyen sürekli değişkenlerin grup karşılaştırılmasında nonparametrik Mann-Whitney U-testi; kategorik değişkenlerin karşılaştırılmasında ise Fisher testi kullanılmış ve ikiden fazla grup ortalamaları normal dağılım göstermeyen ikiden fazla grup ortalamaları ise Kruskal-Wallis testiyle karşılaştırılmıştır.

Tubay ve arkadaşları (2012), makalelerinde Hemiplejik ağırlı omuzda supraskapular sinir blokajı ve glenohumeral eklem enjeksiyonunun ağrı ve özürülük üzerindeki etkilerinin karşılaştırılması üzerine bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada verilerin değerlendirilmesinde SPSS 15.0 paket programı kullanılmış olup, hasta özelliklerinin belirlenmesinde tanımlayıcı istatistikler, SSS blokajı uygulanan ve GH eklem enjeksiyonu uygulanan hasta gruplarının karşılaştırılmasında MannWhitney U testi ve ki-kare testleri, grup içi karşılaştırmalarda Wilcoxon Signed Ranks testi, grup içi tekrarlayan ölçümlerin karşılaştırmalarında Friedman iki yönlü varyans analiz testi kullanılmıştır.

2013 yılında Yüksel ve ark., ankilozan spondilitli (AS) hastalarda adipositokin düzeyleri ve insülin direnci üzerine yaptıkları çalışmada AS hastalarında serum leptin, omentin ve chemerin seviyeleri ile insülin direncini hastalık aktivitesi ve tedavi ile olan ilişkisini, kardiyovasküler risk açısından incelemişlerdir. Analizler SPSS 12 ile yapılmıştır. Hastalardan alınan verilerin dağılımları Kolmogorov-Smirnov analizi ile değerlendirilmiştir. İki grup karşılaştırmalarında sürekli değişkenler için Kruskal-Wallis testi, non-parametrik ölçümler için Mann-Whitney U

testi veya dikotom veriler için ki-kare testi kullanılmıştır. Korelasyon, Spearman korelasyon analizi ile değerlendirilmiştir.

Örnekler çoğaltılabilir: (Öztürk ve diğ., 2007), (Metem ve diğ., 2010), (Yeşil ve diğ., 2010), (Erçetin ve diğ., 2011), (Yılmaz, 2012), , gibi.

Bu bölümde sinyal analiz yöntemlerinin gelişimine değinilerek tez çalışmasında kullanılan spektral analiz yöntemleri hakkında ayrıntılı bilgi verilecektir.

2. SPEKTRAL ANALİZ VE YÖNTEMLERİ

Sinyal işleme, sinyalde bulunan bilgilerin elde edilmesi için kullanılan teknikleri içerir (Meyer, 1993). Sinyal işleme, sistem analiz ve sentezi için, sistemlerin sinyallerde yaptığı değişimlerin bulunması veya sinyalde istenen değişiklikleri yerine getirecek bir sistemin tasarlanması işidir.

Sinyallerin analiz edilmesi direk sinyalin kendisi veya sinyalin gösteriminin başka boyutlara (zaman, frekans, zaman-ölçek vb.) taşınarak gerçekleştirilmesiyle yapılmaktadır. Amaç; sinyalin bilgi kaybına uğratılmadan bu boyutlardan birisine dönüşümü yapılarak işlenmemiş haldeki verilerden sağlıklı seçilemeyen anlamlı detay bilgilerine ulaşmaktır. Öncelikle herhangi bir sinyalden daha fazla bilgi almak için matematiksel dönüşüm işlemleri uygulanır. Mevcut birçok dönüşüm tekniği farklı tip sinyaller ve amaçlar için kullanılmaktadır. Sinyal işleyicileri birçok modern dönüşüm tekniği kullanılmaktadır. Hilbert dönüşümü, Fourier dönüşümü, Kısa zamanlı Fourier dönüşümü, Zak dönüşümü, Akan Fourier dönüşümü, Wigner, Radon ve Dalgacık dönüşümleri ve parametrik yöntemler gibi. Her bir dönüşüm tekniğinin kendine göre avantajları ve dezavantajları vardır.

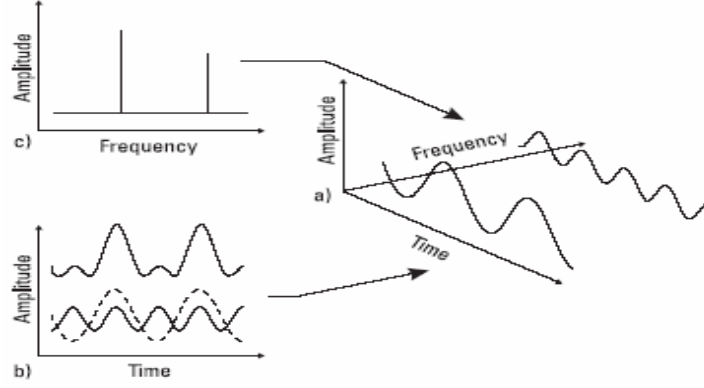
Bütün analiz yöntemlerinde olduğu gibi spektral analiz yöntemlerinde de ihtiyaç duyulan bilgilerin en doğru ve en detaylı şekilde sunulması gerekmektedir. Bu nedenle kullanılan alana göre çeşitli spektral analiz yöntemleri kıyaslanarak en uygun yöntem belirlenmelidir (Alkan, 2005).

Sinyal işleme metotları, frekans tabanlı metotlar olup görsel sistemi model alırlar ve görüntüleri, çok sayıda bant geçiren filtreli görüntülere bölmektedirler. Bu filtreli görüntülerin her biri, belli dokusal özelliklere benzeyecek olan bir dizi frekans (boyut) ve yönelimin üzerinde yoğunluk varyasyonları içerirler.

2.1. Frekans Analizi ve Kullanılan Metotlar

Sinyal işlemenin yüzyıla aşkın zaman önce babası olarak kabul edilen Fourier, bir sinyalin sinüs ve cosinüs sinyallerinin eklenmesi ile elde edilebileceğini ispatlamıştır.

Fourier'in de ispatladığı gibi ve şu anda da çok kullanılan bir veri sinyali, sinüs sinyallerinin genlik, frekans ve faz değerleri doğru şekilde seçilerek birleştirilmesi ile elde edilebilir veya bir veri sinyali birden fazla sinüs sinyaline ayrıştırılabilir.



Şekil 2.1. Zaman-frekans-genlik düzlemi (Namba ve Ishida, 1998)

Sinyaller, sinüs sinyallerinin zaman-genlik veya zaman-frekans bölgelerinde gösterilebilir. Sinyallerin frekans bölgesindeki gösterimine sinyal spektrumu denir, her bir spektrumdaki çizgi ise sinyalin bileşeni olarak adlandırılır. Frekans spektrumunu sinyali ifade etmede kullanılır. Esasında frekans spektrumuna, sinyalin frekans bilgisinin, grafiksel gösterimi de denir.

2.2. Sinyal Analiz Metotlarının Gelişimi

19. yüzyılda Fourier herhangi bir periyodik fonksiyonun sonsuz sayıdaki kompleks üstel fonksiyonların toplamıyla ifade edilebileceğini söylemiştir. Fourier temelli dönüşüm teknikleri daha sonraki yıllarda Ayrık Fourier dönüşümü ve Hızlı Fourier dönüşümü algoritmalarının geliştirilmesiyle bilgisayarlarda veri işleme için önemli bir basamak atlanmıştır.

Denis Gabor 1946 yılında Gabor dönüşümü olarak bilinen Fourier temelli analiz yöntemini sunmuştur. Bu metot da pencereleme yöntemi kullanılarak işaretin küçük bir parçası zaman tanım aralığında ele alınmış, işaret zaman ve frekansın fonksiyonu olarak iki boyutta ifade edilmiştir. Burada pencere fonksiyonu Gauss hata fonksiyonudur. Böylece durağan olmayan sinyallerin işlenmesi daha sağlıklı hale gelmiştir. Gabor dönüşümü, bugün Kısa zamanlı Fourier dönüşümü olarak yöntemin kaynağı olarak görülmektedir.

Fourier temelli analiz yaklaşımlarının ilerleyen kısımlarda da bahsedileceği, zaman ve/veya frekans çözünürlüğü sorunu gibi dezavantajları var olmuştur. Bu dezavantajlar, sinyal analizcilerini daha farklı yollara, modern ve parametrik yöntemlere yöneltmiştir.

Fourier serisi yaklaşımıyla başlayan sinyal frekans analizi kavramı günümüze değin ölçek analizi kavramına ve bununla sıkı sıkıya bağlı dalgacık dönüşümüne kadar gelişmiştir. Ölçek analizi, en sade haliyle bir $f(x)$ fonksiyonunun ölçeği değişen matematiksel yapılar oluşturarak analiz edilmesidir. Önce basit bir temel fonksiyon tasarlanır, sonra bir miktar ötelenir ve ölçeği değiştirilir. Bu yapı herhangi bir fonksiyonun yaklaşımında kullanılır ve aynı işlemler tekrar edilir. Böylelikle yeni yaklaşımlar aynı basit yapısal temel fonksiyondan türetilerek elde edilir. Bu ölçek analizi dizisi, sinyalin farklı ölçeğe sahip ortalama dalgalanmalarını ölçtüğünden gürültüye de en az duyarlıdır.

Dalgacıkların ilk bahsi A. Haar'ın (1909) tezinde bulunan bir ekte geçti. Haar dalgacıklar bazı sınırlı uygulamalar için geçerli olup, bilinen en basit ve en eski dalgacık fonksiyonudur. Haar dalgacığının bir özelliği, tam dayanağa sahip olmasıdır. Yani Haar dalgacığı sonlu bir aralık dışında sıfır olur. Ne yazık ki, Haar dalgacıklarının türevi sürekli değildir ve bu özellik onların uygulamalarını biraz sınırlar.

1930'lu yıllarda değişken ölçekli taban fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalarda, Littlewood ve Paley (1937), ölçeği değişirken enerjisini koruyan fonksiyonlar elde etmişlerdir. Baz fonksiyonları ve ölçeği değişen baz fonksiyonları kavramlarını anlama, dalgacıkları anlamanın temelidir. 1950–1960 yıllarda Littlewood-Paley teorisi, kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemlerine uygulandı.

1960-1980 yıllarında matematikçiler Guido Weiss ve Ronald R. Coifman 'atoms' adı verilen bir fonksiyon uzayının en küçük elemanı üzerinde çalışmışlardır. Amaç sıradan bir fonksiyon için bu atomların bulunması ve bu atomlar kullanılarak fonksiyon uzayının tüm elemanlarını tekrar meydana getirecek birleştirme kuralını bulmaktı (Batar, 2005). 1977'lerde Esteban ve Galand, yeni bir süzgeç kavramını ortaya attı ancak bu yolla ana sinyalin yeniden elde edilmesinde hata çok yüksekti.

Dalgacık terimi ilk kez 1984'de Morlet ve Grossman tarafından kuantum fiziği çalışmalarında kullanıldı. Alex Grossman ve Jean Morlet bu fonksiyon yapı blokları için ilk defa Fransızca'da küçük dalga anlamına gelen 'Wavelet' yani dalgacık adını önermişlerdir ve o zamana kadar Littlewood- Paley teorisi olarak belirtilen teori 'Wavelet' dalgacık teorisi olarak adlandırılarak gelmiştir.

1985 yılında, Stephane Mallat sayısal işaret işleme konusundaki çalışmaları sonucunda dalgacıkların gelişimine ek bir hız kazandırdı. 1987'de Mallat, ikinci derece ayna filtreleri, piramit algoritmaları ve ortonormal dalgacık bazları arasında bazı ilişkiler olduğunu keşfetti.

Y. Meyer, bu sonuçları bir kısmından esinlenerek kendi adıyla anılan ilk dalgacıkları ortaya attı. Haar dalgacıklarının türevi sürekli olmadığı halde, Meyer dalgacıklarının türevi sürekli; ama buna rağmen Meyer dalgacıkları tam dayanağa sahip değildi.

Almanya, Kaiserslautern Üniversitesinde 1989 yaz aylarında bir seminer sırasında; Coifman, Meyer ve Wickerhauser 'Dalgacık paketleri' kavramını tanıttı.

Yıllar geçtikçe, Ingrid Daubechies belki şimdiye kadarkilerin en düzenlisi olan, dalgacık uygulamalarının kilometre taşı olmuş ve bugün hala olmaya devam eden dalgacık ortonormal baz fonksiyonları kümesi oluşturmak için Mallat'ın çalışmasını kullandı. Dalgacık araştırmalarının öncüleri olarak sayabileceğimiz Ingrid Daubechies, Ronald Coifman ve Victor Wickerhauser gibi araştırmacılar sayesinde yöntem oldukça sağlam temellere oturtmuştur.

Spektral analiz yöntemleri, klasik (parametrik olmayan) spektral analiz yöntemleri, modern (parametrik) spektral analiz yöntemleri ve alt uzay yöntemleri olmak üzere üç başlık altında sınıflandırılabilir.

2.3. Klasik (Parametrik Olmayan) Spektral Analiz Yöntemleri

2.3.1. Fourier dönüşümü

Fransız bilim adamı olan Jean Baptise Joseph Fourier (1768-1830), sinyalleri sinüzoidal bileşenler ayırtmıştır ve Fourier analizi olarak tarihe ismini yazdırmıştır. Fourier, sürekli bir sinyali, düzgün seçilmiş sinüzoidal sinyallerin toplamı biçiminde göstermeyi başarmıştır.

Başka bir ifadeyle, bir periyodik fonksiyonun, sonsuz sayıdaki karmaşık üstel fonksiyonları toplamıyla ifade edilebileceği kanıtlanmıştır. Fourier dönüşümü (FD) sonuçları frekans bileşenlerinin yerel zaman, başlangıç veya bitiş bilgileri hakkında kesin veriler sağlamaz; çünkü bu bilgi Fourier spektrumu boyunca yayılmıştır; yani Fourier dönüşümü ancak genel bir bakış sağlar. Bunun sebebi Fourier temel fonksiyonlarının (sinüs ve kosinüs) tam dayanaklı olmamalarıdır (Robert, 1987). Bu yüzden durağan sinyallerde yani devamlı sinyallerde Fourier dönüşümü iyi netice verir. Çünkü durağan sinyallerde zamana göre frekans değişmez. Şayet sinyalin zamana göre frekansı değişiyorsa bunlara durağan olmayan sinyaller denir. Fourier dönüşümünü durağan olmayan sinyallerde ne tür bir spektral bileşen olduğunu öğrenmek için kullanılabilir, fakat nerede oluştuğunu söyleyemez.

Fourier dönüşümünde, ham veri sinyali, birçok sinüzoidal frekanstan oluşmaktadır. Fourier dönüşümü aslında bir sinyali zaman bölgesinden frekans bölgesine dönüştürür. Bu dönüşümde sinyalin zaman bilgisinin kaybolması gibi bir dezavantaj da söz konusudur. Yani bir sinyalin Fourier dönüşümüne bakıldığında, özel bir olayın nerede gerçekleştiğine dair bir şey söylemek imkansızdır (Abbak, 2007; Graps, 2006).

Şekilde periyodik bir sinyalin frekans dönüşümü ile elde edilen sinüs bileşenleri gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Bir İşaretin Fourier Dönüşümü (Türkmenoğlu, 2006)

Fourier analizi, matematikte Fourier serileri adı altında incelenir. Periyodik olan bir $f(x)$ fonksiyonu sonsuz sayıdaki sinüs ve kosinüslerin toplamının bir açılımı olarak ifade edilir. Bir fonksiyonun, sinyalin, analizinde Fourier serileri, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının ortogonal ilişkilerini kullanarak analiz yapar. Bir fonksiyon Fourier serileri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (2.1)$$

Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (2.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (2.4)$$

formülleriyle katsayılar bulunur.

$f(t) = f\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ olduğu kabul edilirse, Fourier serilerinin formülü aşağıdaki gibi olur.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (2.5)$$

Bu eşitlikte katsayılar,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (2.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (2.7)$$

$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ Euler bağıntısı kullanılırsa,

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-i \frac{2\pi nt}{T}} \quad (2.8)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi nt}{T}} dt \quad (2.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.11)$$

olur.

Yukarıdaki formüllerde zaman bölgesinden frekans bölgesine geçiş yapılmıştır, Bağıntılardaki t zamanı, ω ifadesi frekansı yani açısal hızı ifade eder. Burada $e^{-j\omega t}$ karmaşık ve periyodik üstel fonksiyonu ifade etmektedir. $F(\omega)$ ise $f(t)$ sinyalinin Fourier Dönüşümü'dür. Sinyalin yeniden elde edilmesi için frekans katsayıları belirlenen üstel fonksiyonlarla katsayıların çarpılıp zaman aralığı boyunca toplanması gerekmektedir. Böylece farklı frekanslardaki periyodik fonksiyonlar toplanarak sinyal yeniden oluşturulmaktadır. Fourier dönüşümleri, periyodik olmayan sürekli sinyallere, periyodik sürekli sinyallere, periyodik olmayan ayırık sinyallere ve periyodik ayırık sinyallere uygulanır. Bu sinyallerin matematiksel karşılığı birbirinden farklı zamana göre değişen fonksiyonlardır.



Şekil 2.3. Fourier dönüşümü (Türkmenoğlu, 2006)

Daha sonra Fourier'in fikirleri genelleştirilerek periyodik olmayan fonksiyonlarında bu şekilde ifade edilebileceği benimsenmiştir.

Gabor tarafından ortaya atılan Gabor Dönüşümü, pencere fonksiyonu olarak tanımlanan bir sabit fonksiyonun zamanda ötelenmesi ile taranan herhangi bir sinyalin Fourier dönüşümü (FD) alınarak, bölgesel frekans analizinin yapılmasına olanak sağlamıştır. Bu durumda, pencerelenmiş sinyalin Fourier dönüşümü, işaretin frekans bileşenleri yanında zaman bilgisini de içermektedir. Dönüşümde kullanılan pencere fonksiyonu, zaman ve frekans bölgelerinde (domain) sınırlı olan Gaussian fonksiyonudur. 1965'de ortaya atılan, yeni bir algoritmayla Gabor dönüşüm, değişik pencere fonksiyonlarının kullanıldığı Kısa zamanlı Fourier dönüşümü (KZFD) olarak genişletilmiştir (Korürek, 1996).

2.3.2. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü

Daha önce Fourier Dönüşümünün (FD) durağan olmayan sinyaller için elverişli olmadığı ifade edilmişti. Denis Gabor, 1946 yılında pencereleme yöntemini kullanarak, işaretin küçük bir parçasını zaman tanım aralığında ele almış, işareti zaman ve frekansın fonksiyonu olarak iki boyutta ifade etmiş ve haritalamıştır. Bu dönüşüm yönteminde işaretin belirli bir kesiminin durağan olduğu kabul edilebilecek (Miner, 1998) bir pencereden geçirilir ve yerel bir frekans parametresiyle FD işlemi gerçekleştirilir. KZFD ile FD arasında çok az bir fark bulunur. KZFD'de sinyal küçük çerçevelere (segmentler) bölünür ve bu çerçeve anlarında sinyalin durağan olduğu kabul edilir. Durağanlığın geçerli olduğu bu segmentlere pencere denmektedir ve bu çerçeveler sinyalin bir pencere fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilir. FD'nin yerelleştirilmesi fikrine dayanan bu teknik ilgilenilen yerde uygun bir pencere seçilerek dönüşüm işlemi gerçekleştirilir (Polikar, 1999). Durağan olmayan

sinyallerin spektral analizi çok iyi zaman ve frekans çözünürlüğü sunması gereken yetenekli fonksiyonlara ihtiyaç duyar (Keeton ve Schlindwein, 1998).

KZFD, temel bir pencere fonksiyonundan zaman alanında kaydırma ve frekans parametreleri olmak üzere iki ayrı şekilde türetilir. Burada kullanılan pencere fonksiyonu Denklem (2.12) ile ifade edilmiştir. Pencere fonksiyonu sonlu enerjiye sahip olması ve integralinin alınabilmesi gerekmektedir.

KZFD yönteminde zaman ekseninde bir τ noktasına $w(t)$ pencere;

$$g_{w,\tau}(t) = e^{j\omega t} w(t-\tau) \quad (2.12)$$

fonksiyonunu yerleştirilerek pencerelenmiş fonksiyonun Fourier dönüşümü gerçekleştirilir. Daha sonra pencere kaydırılır ve tekrar Fourier dönüşümü alınarak işleme devam edilir. Bu yöntemin matematiksel ifadesi eşitlik ifade edilmiştir.

$$KZFD(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{w}(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \langle g_{w,\tau}(t), f(t) \rangle \quad (2.13)$$

Burada; $f(t)$ sinyali, $w(t)$ pencere fonksiyonu, - karmaşık eşleniği, τ zamanda ötelenmedir. KZFD, bir pencere fonksiyonuyla çarpılan sinyalin FD'nden oluşmaktadır. Her t ve τ için yeni bir KZFD katsayı takımı hesaplanmaktadır. Bu şekliyle FD, sadece frekansın bir fonksiyonu iken KZFD, hem frekansın, hem de zamanın bir fonksiyonudur. KZFD'deki $f(t)$ fonksiyonu tekrar elde edilebilir özelliktedir. Bu durum Denklem (2.14) ile ifade edilmiştir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} KZFD(w, \tau) g_{w,\tau}(t) dw d\tau \quad (2.14)$$

Sinyal spektrumundaki değişikliğin düzeyi en uygun çerçeve boyunu belirlemede önemli bir faktördür (Güler ve diğ., 2001). KZFD ile ilgili analiz penceresinin seçimi farklı sinüzoidal bileşenlerin ortaya çıkarılmasını ve spektrumun düzgünlüğünü de belirler (Miner, 1998).

KZFD'nin zaman çözünürlüğü pencere fonksiyonu zaman genişliği tarafından belirlenir dolayısıyla spektrum sonlu çözünürlükle elde edilir. KZFD pencere fonksiyonun bant genişliği ile zaman genişliği çarpımı sabittir ve sadece kullanılan pencere fonksiyonun şekline bağlıdır dolayısıyla sabit çözünürlükle dönüşüm elde edilebilir (Fliege, 1996).

Dolayısıyla KZFD'de uygun bir pencere kullanılmalıdır (Şekil 2.4). Pencere boyutu büyükse frekans çözünürlüğü iyi, pencere boyutu küçükse frekans çözünürlüğü düşük olur (Sweldens, 1994). Dikdörtgensel bir pencere zayıf bir frekans çözünürlüğü doğurur. Örneğin üçgensel bir pencere $1/w^2$ ye göre azalan bir frekans spektrumu verir ve dikdörtgene göre daha iyi bir pencere sayılır. Fakat daha iyi pencereler sinyal analizcileri tarafından geliştirilmiştir (Polikar, 1999). Bunlardan birisi de Hanning penceresidir.



Şekil 2.4. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü (Türkmenoğlu, 2006)

KZFD' nin diğer bir ismi de Gabor dönüşümüdür. Gabor tarafından kullanılan klasik pencerelerden birisi de Gaussian penceresidir.

KZFD, zaman ve frekans bilgilerini kapsamı yönüyle önemli olsa bile, seçilen pencere fonksiyonunun bütün frekanslar için sabit olması bir dezavantajdır. Birçok işaret daha esnek yaklaşımlara, yani zaman veya frekans hakkında daha çok bilgi alabilmek için değişebilen pencereleme tekniklerine ihtiyaç duymaktadır. Pencere fonksiyonu sabit zaman-frekans çözünürlüğü vererek KZFD'yi sınırlar. Bu sınırlama Heisenberg belirsizlik ilkesi olarak adlandırılır.

2.3.3 Akan Fourier dönüşümü

Bir $f(t)$ sinyalinin Akan Fourier dönüşümü ifadesi; c verilen bir sabit olmak üzere Denklem (2.15) ile verilir. $F(t,\omega)$, $f(t)$ sinyalinin τ dilimine karşılık gelen $f(t+\tau)$ sinyalinin Fourier dönüşümüdür. Böylelikle durağan olmayan sinyaller için

spektrumun değişimi sinyalin durağan kabul edildiği τ dilimleri ile belirlenebilmektedir.

$$F(t,\omega) = \int_{-c}^c f(t+\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j\omega t} \int_{t-c}^{t+c} f(\alpha)e^{-j\omega\alpha} d\alpha \quad (2.15)$$

$F(t,\omega)$ 'nin Ters Dönüşümü ifadesi de $\omega_0 = \frac{\pi}{c}$ olmak üzere

$$f(t) = \frac{1}{2c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(t, m\omega_0) \quad (2.16)$$

eşitliği ile verilir (Papoulis, 1984).

2.3.4. Ayrık Fourier dönüşümü

Fonksiyonların teorik olarak tanımlı olduğu hallerde Fourier dönüşümleri rahatlıkla hesaplanabilir. Ancak uygulamada sinyallerin kesin fonksiyonel ifadeleri yoktur ve işlenmeleri için analog sinyallerden örneklenmiş sınırlı sayıda sayısal ayrık dizileri mevcuttur. Bu yüzden daha önce bahsedilen şekilde Fourier dönüşümleri hesaplanamaz.

Ayrıca bütün frekans boyutunun analog olarak gösterimi sonsuz sayıda örneklenmiş işareti gerektirmektedir bu ise uygulamada mümkün değildir. Sayısal işaretlerin Fourier dönüşümünün hesaplanması için belirli sınırlamalı içindeki yaklaşıklıklarla verilebilir. Bir $f[k]$ ayrık dizisinin N örneği için tanımlanan bu yeni dönüşüm, Ayrık (Kesikli) Fourier dönüşümü (AFD) olarak adlandırılır.

Tersi de alınabilen bu dönüşümün önemli özellikleri vardır. Ayrık Fourier Temelli dönüşümler dizinin periyodik olduğunu kabul ederler (Torrence ve diğ., 1998). Dolayısıyla bir ayrık zaman sinyali periyodik ise bunun yaklaşık Fourier dönüşümü AFD'dir (Roberts ve diğ., 1987). Özellikle iki AFD'nin çarpımı bunlara karşı düzen dizilerin ayrık-zaman boyutunda konvolüsyon toplamıdır (Roberts ve diğ., 1987). Ayrıca sayısal ortamdaki birçok spektral analiz yöntemi AFD'ye dayanmaktadır.

AFD, $f(k)$, $k=0,1,\dots,N-1$, gibi bir sonlu diziyi, $F(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$, gibi diğer bir sonlu diziyeye eşleyen önemli bir operatördür. Normalize edilmiş örnekleme frekansı 2π olmak üzere (Roberts ve diğ., 1987):

$$F[n]=AFD\{f[k]\}=\sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-j2\pi kn/N} \quad (2.17)$$

Ters Ayırık Fourier dönüşümü (TAFD) ise $F[n]$ 'yi yeniden $f[k]$ dizisine dönüştürür:

$$f[k]=TAFD\{F[n]\}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{j2\pi kn/N} \quad (2.18)$$

2.3.5. Hızlı Fourier dönüşümü

Hızlı Fourier dönüşümü (HFD), işaret içindeki frekans bileşenlerinin güç yoğunluğunu belirlemek için kullanılır. Temeli, Fourier dönüşümüne dayanmaktadır. Fourier Dönüşümü en basit anlatımı ile zaman uzayındaki bir ifadenin, frekans uzayına dönüştürülmesidir. Fourier tarafından bulunan bu dönüşüm ile, her işaret, farklı genlik, frekans ve faz değerlerine sahip sinüs işaretlerinin bileşimi şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla her işaret Fourier serisi ile ifade edilebilir ve tersine, Fourier serisi bilinen her işaret tekrar türetilir.

Hızlı Fourier dönüşümü ise, Fourier dönüşümünün hızlı bir şekilde yapılmasını sağlayan ve ilk olarak 1965 yılında Cooley ve Tukey tarafından ele alınan bir algoritmadır (<http://mathworld.wolfram.com/FastFourierTransform.html>).

Ayrık Fourier dönüşümünün doğrudan hesaplanmasında her bir $f[k]$ değeri için N karmaşık çarpma ve $N-1$ karmaşık toplama işlemi kullanılmaktadır. Bu nedenle N adet AFD değeri bulunurken, N^2 çarpma ve $N(N-1)$ toplama işlemi gereklidir.

Ayrıca her karmaşık çarpma işlemi için dört gerçel çarpma ve iki gerçel toplama işlemi ve her bir karmaşık toplama iki gerçel toplama ile gerçekleştirilmektedir. Neticede dizi uzunluğu olan N nin 1000 in üzerinde olması halinde doğrudan AFD'nin hesaplanması çok fazla miktarda işlem gerektirmektedir. Yani N sayısı artarken gereken işlem sayısı çok fazla artmaktadır.

AFD doğasındaki periyodiklik nedeniyle bir sinyalin N-noktalı AFD alındığında işaretin N periyodu ile periyodikmiş gibi işlem görmektedir. Bu nedenle, AFD hesabı, en az sinyalin örnek sayısı kadar ayırık frekans değerinde gerçekleştirilmesi gerekmektedir. AFD sinyalin örnek sayısından daha az sayıda ayırık frekans değerinde hesaplandığında, sinyalin frekans spektrumunun seyrek örneklenmesi nedeniyle zamanda örtüşme (aliasing) meydana gelmektedir. Bu durumda zaman örtüşmesinden dolayı işaret değerleri TAFD ile geri oluşturulamamaktadır. AFD hesabındaki N değeri sinyalin örnek sayısından fazla olabilir ve bu durumda işaretin sonuna sıfır değerlerinin eklenmesi ile sinyalin uzunluğu N'ye çıkarılabilmektedir.

AFD hesaplanmasında bugün kullanılmakta olan verimli ve etkin bir yaklaşım Hızlı Fourier dönüşüm algoritmalarıdır. İlk dönemlerde fark edilmeyen ve sonuçlardaki periyodik sayısal tekrarlama özelliğine dayanan dairesel katlamadan (circular convolution) (Roberts ve diğ., 1987) yararlanılarak geliştirilen birbirinden farklı algoritmalar mevcuttur. Her ne kadar farklı bir dönüşüm olarak adlandırılmışsa da HFD, AFD'den farklı değildir.

AFD'nin hesaplanması için etkili ve mükemmel bir algoritmadır. AFD'nin sayısal sinyal işleme alanında spektrum analizi ve korelasyon gibi işlemlerin yapılmasında önemli rol oynamasının nedeni HFD algoritmalarından kaynaklanmaktadır. Sadece kullanılan hesaplama yöntemi FD tahmini için HFD'yi cazip kılar.

Kullanılmakta olan bazı HFD algoritmalarına göre zaman desimasyonlu, frekans desimasyonlu HFD en genel olanlarıdır (Roberts ve diğ., 1987).

2.3.6. Zak dönüşümü

Bir fonksiyonun Zak dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır (Sweldens, 1994).

$$Zf(x,\omega)=\sum_1 f(x+l)e^{-i\omega l} \quad (2.19)$$

2.3.7. Periodogram yöntemi

Parametrik olmayan spektral analiz yöntemlerinden bir diğeri olan Periodogram yöntemi, bir işaretteki frekans bileşenlerinin güç yoğunluğunu belirlemek için

kullanılır. İlk defa 1898 yılında Schuster tarafından ortaya konan bu yöntem Temel olarak Hızlı Fourier dönüşümüne dayanmaktadır. Bu yöntemin hesaplanması kolay olmakla birlikte, özellikle kısa data kayıtları için iyi sonuçlar vermektedir. Parametrik olmayan spektral analiz yöntemlerinin HFD ve periodogram haricinde, iyileştirilmiş periodogram yöntemi, Bartlett yöntemi, Welch yöntemi ve Blackman-Tukey yöntemi gibi alt kategorileri mevcuttur (Hayes, 1996; <http://en.wikipedia.org/wiki/Periodogram>).

2.3.8. Parametrik olmayan spektral analiz tekniklerinin incelenmesi

Parametrik olmayan yöntemler parametrik yöntemlere göre daha az işlem yükü gerektirirler. Ancak parametrik yöntemlerle kıyaslandıklarında spektrumun bozulması sonucu zayıf işaretlerin maskelenmesi gibi bir dezavantajları vardır. Fourier dönüşümünde, gözlem süresi kısa olan işaretlerde iyi bir frekans çözünürlüğü elde edilememektedir. Parametrik metotlarda ise performans daha iyi olmasına karşın, işlem yükü de aynı şekilde fazla olduğundan, daha fazla işlem zamanı ve daha güçlü bilgisayarlar gerektirmektedir. Yani modern spektral analiz yöntemleri ise performans açısından avantajlı olmalarına karşın işlem yükleri fazla olduğundan zaman açısından problem oluşturmaktadır. Klasik yöntemlerden hızlı Fourier dönüşümü yöntemi, modern yöntemlerden ise AR modelleme yaygın kullanıma sahiptir (Alkan, 2005).

2.4. Modern (Parametrik) Spektral Analiz Yöntemleri

Modern spektral analiz yöntemlerinde güç spektrumu, tepe frekansı, band genişliği veya güç içeriği gibi bir dizi parametre ile özetlenebildiğinden, bu yöntemlere parametrik analiz yöntemleri de denmektedir (Alkan, 2005).

Bir işareti uygun bir şekilde modellemek için işaretin özelliklerinin dikkate alınması gerekmektedir (Alkan, 2005). Spektral hesaplama yapılırken, kullanılacak modeller AR (Autoregressive), MA (Moving Average) ve ARMA (Autoregressive Moving Average) gibi zaman serisine uygulanan modellerdir. Bir zaman serisinin en uygun şekilde modellenmesi, en düşük sayıda parametre içeren modeli kullanmakla mümkündür. Örneğin AR modeli, frekans spektrumunda ani pikleri bulunan işaretlerin zaman serileri için daha uygundur. MA modeli ise derin çukurlara sahip

fakat keskin pikleri olmayan dar aralıklı frekans cevaplarının zaman serileri için daha uygundur. ARMA modeli ise her iki işaret türü için kullanılabilir (Hayes, 1996; Semmlow, 2004).

Modern spektral analiz yöntemleri ile modelleme yapılırken dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli nokta ise iyi sonuç verecek optimum model derecesini belirleme işidir. Model derecesinin doğru belirlenmemesi hata oranının yüksek çıkmasına, bu da frekans spektrumunun hatalı olmasına yol açar. Hatalı bir spektrumda olmayan tepeler varmış gibi görülebilir veya tersine olan tepeler kaybedilebilir (Hayes, 1996; Semmlow, 2004).

2.4.1. Autoregressive (AR) modelleme

Bazı ayrık zamanlı sistem uygulamalarında, yalnız çıkış değerlerinin yardımıyla sistemin modellenmesi gerekir. Bu tür sistemler AR modelleme yöntemi ile modellenebilir (Patrick, 1974). Kompleks frekans düzleminde sadece kutuplara sahip olan AR modelinin matematiksel denklemi Denklem (2.20) de verilmiştir.

$$y(n) = -b_1y(n-1) - b_2y(n-2) - \dots - b_p y(n-p) + x(n)$$

$$= - \sum_{k=1}^p b_k y(n-k) + x(n) \quad (2.20)$$

Eşitlikte $y(n)$ çıkış dizisini, $x(n)$ giriş işaretini, b_k ise AR parametrelerini belirtir. AR modellerde yapılan işlem en genel anlamda, sistem parametrelerinin ayarlanması, sistemden elde edilen çıkış işaretinin önceki değerlerini bazı katsayılarla ağırlıklandırarak çıkışın istenilen özellikte olması işlemidir.

Modern spektral analiz yöntemlerinden AR kapsamında altta verilen yöntemler sayılabilir:

1. Otoregresif (Özbağlanımlı) Parametre Tahmini
2. Otoregresif (Özbağlanımlı) Parametre Tahmini için Burg Yöntemi
3. Yule-Walker AR Yöntemi
4. Kovaryans Yöntemi
5. İyileştirilmiş Kovaryans Yöntemi (Alkan, 2005).

2.4.2. Moving Average (MA) modelleme

MA modelleme yapısı kullanılarak yapılan modellemede veri olarak yalnızca giriş işareti değerleri kullanılır (Patrick, 1974). Kompleks frekans düzleminde sadece sıfırlara sahip olan bu yapının matematiksel denklemi Denklem (2.21) de verilmiştir.

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+\dots+a_qx(n-q)=\sum_{k=0}^q a_k x(n-k) \quad (2.21)$$

Burada $y(n)$ çıkış dizisini, $x(n)$ giriş dizisini ve a_k ise MA parametrelerini belirtir. MA modellerde yapılan işlem en genel anlamda, sistem parametrelerinin ayarlanması, sisteme uygulanan giriş işaretinin o andaki ve önceki değerlerini bazı katsayılarla ağırlıklandırarak çıkışın istenilen özellikte olmasıdır.

2.4.3. Autoregressive Moving Average (ARMA) modelleme

AR model yapısı sadece kutuplara sahip olan sistemlerin matematiksel modelinin oluşturulmasında, MA model yapısı ise sadece sıfırlara sahip olan sistemlerin matematiksel modelini oluşturmada kullanılmaktadır. Çoğu fiziksel sistemler hem kutuplara hem de sıfırlara sahip olmasından dolayı AR ve MA modelleme yeterli olamamıştır. Bu yüzden kutup ve sıfırlara sahip sistemlerin matematiksel modellenmesi için ARMA modelleme yöntemleri geliştirilmiştir (Raeside, 1978) Genel olarak bu modellerde, giriş dizisi $x(n)$ ile, çıkış dizisi ise $y(n)$ ile ifade edilir. Bu diziler arasındaki bağlantı Denklem (2.22) deki doğrusal fark denklemiyle verilmiştir.

$$y(n)=-\sum_{k=1}^p b_k y(n-k)+\sum_{k=0}^q a_k x(n-k) \quad (2.22)$$

Burada p , AR model derecesini ve q ise MA model derecesini belirtir. Bir ARMA modelin transfer fonksiyonu ele alındığında bütün sıfırları ve kutupları z düzleminde birim dairenin içinde olduğu varsayılır. Eğer sistemin bütün kutupları ve sıfırları birim dairenin içindeyse bu tür sistemlere kararlı ve minimum fazlı sistemler adı verilir. Kutuplardan birinin birim dairenin dışında olması durumunda sistem kararsız sistem olarak adlandırılır. Lineer modeller (AR, MA, ARMA), ses, radyo, radar ve

sismoloji gibi sürekli işaretlerin, ayrık zamanlı olarak gösterilimi için kullanılırlar (Kulikowski, 1979; Greenes, 1969).

2.5. Altuzay Yöntemleri

Altuzay yöntemleri aynı zamanda yüksek çözünürlük yöntemleri olarak da bilinmektedirler. Bu yöntemde bir işaretin korelasyon matrisinin özvektör analizi temelli frekans bileşeni tahminleri yapılır. Çoklu sinyal sınıflandırma (MUSIC) ve Özvektör (Eigenvektör, EV) yöntemleri bu kategoride yer alan yöntemlerdendir. Bu yöntemler özellikle sinüzoidal işaretlerin spektrumlarının oluşturulmasına uygundur ve özellikle düşük işaret gürültü oranlı, gürültüye gömülmüş sinüzoidlerin belirlenmesinde etkili olmaktadır (Alkan, 2005).

Alt uzay yöntemleri kapsamında altta verilen yöntemler sayılabilir:

1. Çoklu Sinyal Sınıflama Yöntemi (Multiple Signal Classification-MUSIC)
2. Özvektör Analiz Yöntemi (Eigenvector-EV) (Alkan, 2005).

2.6. Dalgacığın Kuramsal Temellerine Giden Yol

Sinyal analiz yöntemlerinin temel amacı, uygun bir dönüşüm metodu uygulandıktan sonra analiz edilen sinyalden istenen bilgiyi elde etmektir. Günümüzde mühendisler ve matematikçiler, herhangi bir fiziksel sistemden elde edilen sinyallerin analizinde birçok dönüşüm teknikleri kullanmaktadır. Bu yöntemlerinin başlıcaları Fourier dönüşümü, Shannon dönüşümü, Kısa zamanlı Fourier dönüşümü, Dalgacık dönüşümü ve Çoklu çözünürlüklü analizidir. Bu teknikler karşılaştırıldığında birbirlerine göre bazı üstünlüklerinin ya da dezavantajlarının oldukları görülür. Fourier dönüşümü ile işarete var olan bütün frekanslar belirlenebilir, yüksek frekans çözünürlüğüne sahiptir ancak bu frekansların ne zaman var olduklarına ilişkin bir zaman bilgisi elde edilemez. Diğer yandan Shannon dönüşümü yüksek zaman çözünürlüğüne sahipken, frekans çözünürlüğü yoktur. Kısa zamanlı Fourier dönüşümü tekniğinde ise bir işaret, seçilmiş bir pencere fonksiyonu ile pencerelenir ve daha sonra işaretin bu pencere fonksiyonu ile iç çarpımının Fourier dönüşümü hesaplanır. Kısa zamanlı Fourier dönüşümünde tek bir pencere kullanıldığından zaman-frekans tanım bölgesinde gösterilen bir işaretin zamandaki ve frekanstaki

çözünürlükleri aynıdır. Eğer seçilen pencere fonksiyonu dar bir pencere ise, iyi zaman fakat kötü frekans çözünürlüğü, geniş bir pencere ise kötü zaman fakat iyi frekans çözünürlüğü elde edilmektedir (Mallat, 1989). Dalgacık dönüşümünden önce kullanılan bu dönüşümdeki pencere fonksiyonunun, tarama sırasında sabit genişlikte olması, işaretin hızlı değişen yüksek frekanslı değişimlerinin zaman ortamında tam olarak bölgelendirilememesine neden olmuştur. Bu soruna çözüm olarak, sabit genişlikteki pencereler yerine, işarettaki yavaş değişimleri yakalamak üzere geniş pencere fonksiyonları ve hızlı değişimlerin olduğu yerlerde ise dar pencere fonksiyonlarının kullanımı düşünülmüş ve sonuçta, dalgacık dönüşümü analizi konusu ortaya çıkmıştır. Tanım olarak bir dalgacık ise, ortalama değeri sıfır olan ve zamanla sınırlı bir dalga şeklindedir. Zaman ekseninde kaydırma ve ölçekleme parametrelerinin değişimi dalgacık dönüşümünün temelini oluşturmaktadır (Mallat, 1989).

2.6.1.Dalgacık tanımı

Dalgacıklar, bir sinyalin içerdiği bilgiyi, farklı frekans bileşenlerine ayıran ve sonra kendi ölçekleriyle eşleştirilmiş bir çözünürlüğe sahip bileşenler üzerinde çalışan, matematiksel fonksiyonlardır. Dalgacıkların arkasındaki temel fikir, belirlenen bir ölçeğe göre analiz etmektir (Graps, 1995).

1800'lü yıllarda Joseph Fourier, fonksiyonları temsil etmesi için, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının kullanılabilceğini bulmuştur ve bununla birlikte, veriye bakmak için kullanılan ölçek de dalgacık analizinde özel bir rol oynar.

Dalgacık algoritmaları, veriyi farklı ölçek veya çözünürlüklerde işler. Eğer geniş bir pencereden bir işarete bakılırsa, büyük özellikler fark edilir. Benzer şekilde, küçük bir pencereden bir işarete bakılırsa, küçük özellikler fark edilir. Dalgacıkları ilginç ve aynı zamanda yararlı kılan bu özelliktir.

Bilim adamları yıllarca çok sayıda kısa ve düzensiz dalgalara sahip olan işaretleri yaklaşık olarak temsil etmesi için, Fourier analizinin bazılarını oluşturan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından çok daha uygun fonksiyonlar aramışlardır. Tanımlarına göre bu fonksiyonlar yöresel değildir (ve sonsuza doğru uzanırlar). O yüzden, bu fonksiyonlar sivri uçları yaklaşık olarak temsil etme konusunda çok yetersiz kalırlar.

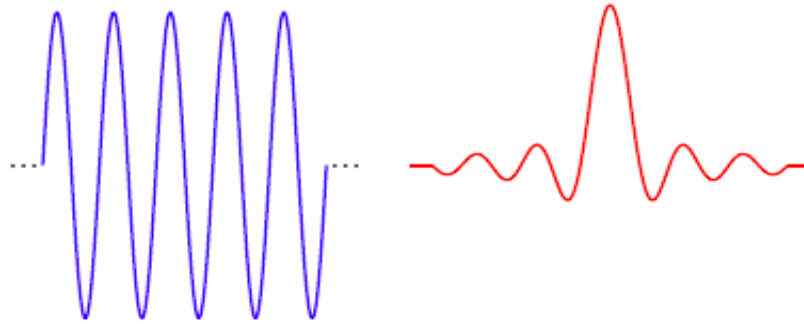
Ama dalgacık çözümlenmesiyle, sonlu tanım bölgelerinde düzgün olarak bulunan, yaklaşık olarak temsil edilmiş fonksiyonlar kullanılabilir. Dalgacıklar sivri süreksizliklere sahip olan veriyi yaklaşık olarak temsil etmek için oldukça uygunlardır.

Dalgacık analizinde amaç, “analiz eden dalgacık” veya “ana dalgacık” diye isimlendirilen bir dalgacık örnek fonksiyonunu elde etmektir. Zaman analizi, örnek dalgacığın daraltılmış, yüksek frekans versiyonu ile yapılır. Buna karşılık frekans analizi ise, aynı dalgacığın genişletilmiş, düşük frekans versiyonu ile yapılır. Orijinal sinyal veya fonksiyon, dalgacık açılımı (dalgacık fonksiyonlarının doğrusal bileşimlerindeki katsayıları kullanarak) cinsinden temsil edilebildiği için, veri işlemleri yalnız karşı gelen dalgacık katsayılarını kullanarak yapılabilir. İlave olarak eğer veriye uygun en iyi dalgacıklar seçilirse veya bir başlangıç değerinin altında kalan katsayılar atılırsa, veri kısmen temsil edilmiş olur. Bu kısmi kodlama, veri sıkıştırma alanında dalgacıkları mükemmel bir araç yapar.

Dalgacık dönüşümü veya dalgacık analizi, şu ana kadar uygulanan analiz yöntemlerindeki noksanlıkları ortadan kaldırmak için kullanılan en son çözümlerden biridir (Valens, 1999). Fourier dönüşümündeki zaman bilgisinin kaybolması ve konvolüsyon gibi problemleri ortadan kaldıran dalgacık analizi, bir sinyalin içerisindeki tüm frekans bileşenlerinin hangi zamanlarda ve hangi genliklerde olduğunu tespit edebilir.

2.7. Dalgacık (Wavelet) Dönüşümü

Dalgacık (Wavelet) teorisi matematikçilerin, bilgisayarlıların ve sinyal işleyicilerin çalıştığı popüler bir konu olup halen gelişmektedir. Dalgacık temelli sinyal analizi, durağan olmayan sinyaller ve nümerik sinyal işleme üzerine pek çok uygulama olanağı vardır. Dalgacık teorisi bu tip sinyal işleme üzerine yeni bir konudur. Birçok veri sinyali önemli sayılabilecek durağansızlıklar veya geçici özellikler (eğim, ansızın değişim, kırılma ve olayların başlangıç ve bitişleri) içerebilir. Bu beklenmedik özellikler ve durağansızlıklar, veri sinyalinin en önemli kısımları olabilmektedir (özellikle EEG ve EKG vb.), bu noktada dalgacık dönüşümü (DD) kullanımını bir zorunluluk olarak karşımıza çıkarmaktadır (Daubechies, 1992).



Şekil 2.5. Sinüs dalgası ve dalgacık örneği (Abbak, 2007)

DD’de farklı pencere genişlikleri, skala çarpanı (faktörü) değiştirilerek “Ana dalgacık fonksiyonu” olarak adlandırılan tek bir fonksiyon ile sağlanır. DD’deki bazı fonksiyonları ‘dalgacıklar’ olarak adlandırılır (Gümüş, 2003). Farklı özellik ve kullanım amaçlarına sahip birçok ana dalgacık mevcuttur (Fliege, 1996).

Dalgacık dönüşümü, veri sinyali ile ana dalgacık dediğimiz sinyallerin bileşimi olarak karşımıza çıkar, yani sinyalden sinyal üretmektir ve bu sinyali bir şekilde kodlayarak ifade etmek diyebiliriz. Dalgacık dönüşümünde veriler yani bir ana dalgacık ile birleştirilir ve elde edilen sinyal ölçek katsayısı denilen bir katsayı ile ölçek-zaman boyutunda ifade edilir. Burada istenilen zaman ölçek boyutunda gösterilen eğride esasında frekans bilgisi de mevcuttur. Haliyle bu Fourier analize göre bir avantaj hatta üstünlük sağlamaktadır, çünkü sinyali hem frekans bölgesinde hem de zaman bölgesinde inceleyebilmektedir. (Batar, 2005; Polikar 1999).

Dalgacık dönüşümü, değişken boyutlu pencereleme tekniğidir. Ayrıca hem uzun zaman aralığında alçak frekans bilgisini, hem de kısa zaman aralığında yüksek frekans bilgilerini belirlemeye yardımcı olur. Fourier dönüşümünün aksine sadece zaman-frekans bölgesinde değil, aynı zamanda zaman-ölçek bölgesini kullanır.



Şekil 2.6. Dalgacık dönüşümü (Türkmenoğlu, 2006)

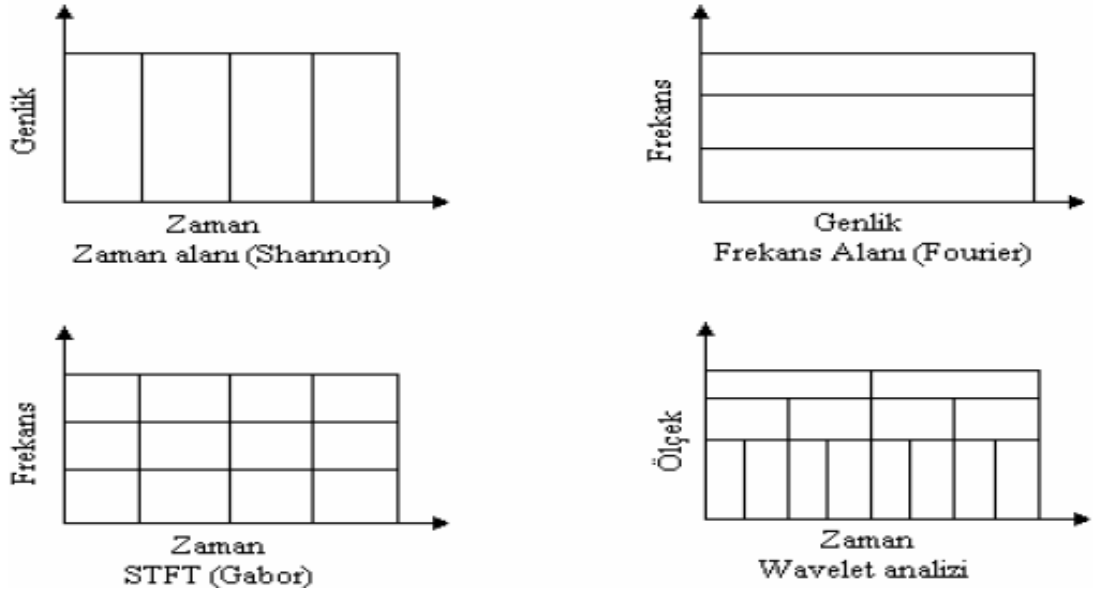
Dalgacık analizi, Fourier dönüşümünün bir gelişmiş versiyonu olan KZFD'nin bir alternatifi olarak çözünürlük probleminin üstesinden gelmek için ortaya çıkmıştır. KZFD de zaman-frekans alanında elde edilen bilgiler sınırlı bir hassasiyetle elde edilebilmektedir. Bu hassasiyet pencerenin büyüklüğüne bağlıdır. Çoğu sinyaller daha hassas yaklaşıma ihtiyaç duyar ve bu pencerenin büyüklüğünün sürekli değişmesi gerekmektedir. KZFD'de zaman penceresi bütün frekanslarda değişmeyen büyüklüktedir.

Dalgacık analizi, pencereleme tekniği büyüklüğü değiştirilebilir ve bu yönüyle ileri bir yöntemdir. Dalgacık dönüşümünün en önemli avantajlarından birisi, sinyallerin yersel analizine olanak tanınmasıdır. Gözle fark edilemeyecek kadar küçük süreksizliği olan işaretlerle gerçek hayatta sürekli karşılaşılır.

Süreksiz sinüzoidal bir işaret ele alınacak olursa, işaretin FD'nde sadece işaretin uç noktalarında pik değerleri oluşurken, Dalgacık Dönüşümü ile süreksizlik civarındaki değişimi de gerçek zamanlı olarak gözlemlenebilir. Süreksizlik gösteren ve keskin sıçramalar içeren sinyallerin analizinde dalgacık dönüşümünün Fourier dönüşümüne göre avantajları vardır (Fomitchev, 1994). Dalgacık analizi, başka analiz yöntemlerinin yakalayamadığı eğilimleri, bozulma noktalarını, yüksek dereceli türevlerde süreksizlikleri ve benzerlikleri çıkarmada başarılıdır.

Dalgacık analizi ile işaretin özelliğini bozmadan sıkıştırma ve görüntüden ayırma işlemlerini iyi bir şekilde gerçekleştirilir. Şekil 2.7, Zaman tabanlı (Shannon), frekans tabanlı (Fourier), KZFD (Gabor) ve dalgacık analizlerini ilişkilendirmektedir (Polikar, 1999).

Bir dalgacık, sınırlı yapıda olup ortalama değeri sıfır olan bir dalgacıktır. Sinüzoidal dalga, sınırı olmayan düzgün bir dalga olup Dalgacık ise düzensiz yapıya sahip ve asimetriktir.



Şekil 2.7. Sinyal analiz yöntemleri arasındaki ilişki (Matlab Wavelet Toolbox Dökümanları)

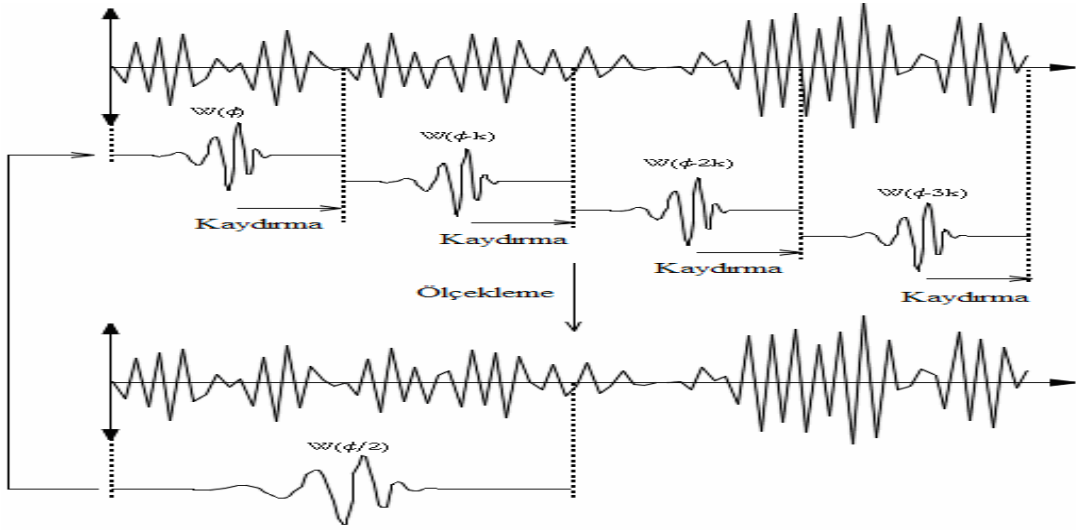
Esasında olayın matematiğine inilirse, veriyi farklı frekans bileşenlerine ayıran ve sonra her bir bileşeni, bileşenin ölçeğiyle eşleştirilmiş bir çözünürlükte çalışan fonksiyonlardır denilebilir. Bu olay keskin, sivri uçlara sahip verilerin analizinde çok büyük kolaylıklar ve kesin net sonuçlar verir; bu noktada Fourier analizi, bu veri incelemelerinde sinyal analizi için yetersiz kalır, tabi bu istenmeyen bir durumdur. Dalgacık dönüşümü, veriyi farklı ölçeklerde ve çözünürlükte analiz ettiği için ayrıntılı bir analiz yapmış olur, çünkü ölçek her defasında iki kat artar ve buna göre analiz tekrarlanır, dolayısıyla çözünürlük artmış olur, çözünürlük fazla olunca sinyal işlemede haliyle ayrıntılı olmaktadır, bu haliyle tıp elektronikinde aranan bir durumdur, özellikle kalp atışlarının incelenmesi, beyin dalgalarının incelenmesi durumlarında üstünlük sağlar ve oldukça fazla kullanılır.

Dalgacık dönüşümünde, sinyale, zaman-ölçek perspektifinden bakılır, ölçek yerel düzenlilik bilgisini (genlik) verirken, zaman dalgacığının oluşum anını gösterir. Ölçekleme işleme, bir fonksiyonu yatay eksen boyunca belli bir oranda sündürmek veya büzmektir. Ölçek küçüldükçe dalgacık o oranda sıkıştırılır. Küçük ölçekli dalgacıklarda, veri sinyalinin kırılma anı, kenar tespiti vb. olayların daha iyi analiz yapılacağı görülmektedir, bu da dalgacık dönüşümünün KZFD'den bir üstünlüğüdür (Lee, 1999).

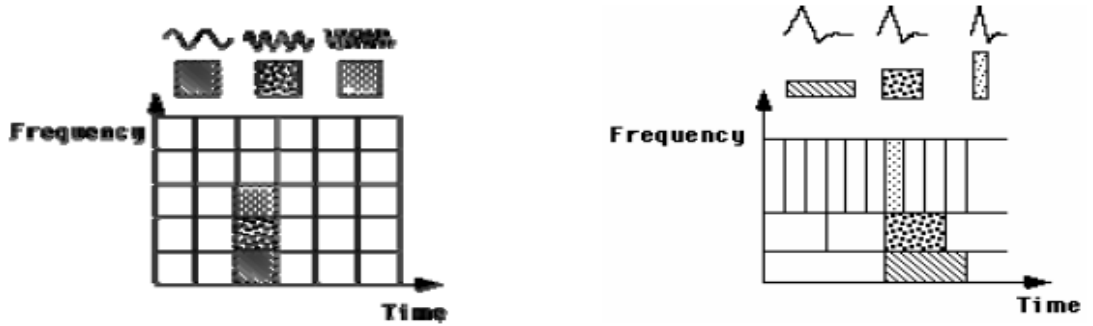
Dalgacık dönüşümü de Fourier analizindeki gibi sinyali alt bileşenlere böler. Fourier analizi bir sinyalin analizini yaparken sinyalin farklı frekanslardaki sinüs ve kosinüs bileşenlerine böler. Dalgacık dönüşümü ise sinyali ana dalgacığın ölçeklenmiş ve kaydırılmış alt dalgacıklarına böler.

Durağan olmayan türdeki sinyallerin işlenmesinde, sinyalin zaman ve frekans bölgeleri arasında bir ilişki elde etmek çok yararlı olmaktadır. Fourier analizi sinyali sadece frekans bölgesine taşıdığından sinyalin zamandaki bilgileri kaybolmaktadır buda özellikle tıp elektroniğinde büyük sorunlara yol açmaktadır, çünkü burada doktorlar zamanla sinyalin yerel bilgilerini oldukça fazla kılınmaktadır. Dolayısıyla sinyalin zaman içerisindeki dalgalanmalarını yani yerel bilgilerini görmek istemektedirler. Bu noktada dalgacık dönüşümü ana dalgacığın kaydırılmasıyla zaman bölgesinde, ana dalgacığın ölçeklenmesiyle de frekans bölgesinde sinyallerin bilgilerini içinde barındırır, ana dalgacık kaydırılır ve ölçeklenir ve sinyale uygulanır, sinyal ile bileşenler elde edilir buradan sinyalin içindeki bilgiler ile dalgacık arasındaki ilişki ölçek katsayıları olarak karşımıza çıkar (Misiti, 1996-1997).

Dalgacık dönüşümü zamana göre kaydırılan aynı ölçek katsayısına sahip dalgacığı kullanılır, bu olaya aynı zamanda pencereleme de denir. Pencere sinyal boyunca kaydırılarak veri sinyali ve dalgacık bileşenlerine ayrıştırılır. Bu pencereleme küçük büyük ölçekli dalgacıklarla tekrar edilir ve sonunda sinyalin bir zaman-frekans bilgileri bir grafik olarak bulunur. Dalgacık dönüşümü sinyal analizinin gerçekte üstünlüğü bu noktada ortaya çıkar çünkü ayarlanabilir ölçekteki pencereleme sistemi sinyalin tam ayrıntısıyla incelenebilmesini sağlar (Grap, 1995).



Şekil 2.8. Dalgacık analizinin aşamaları (Aygün, 2006)



Şekil 2.9. Fourier ve dalgacık analizlerinin zaman-frekans ölçeğinde gösterimi (Aygün, 2006)

Dalgacık dönüşümünde çoklu pencereleme sistemi kullanıldığı için, sinyal analiz çözünürlüğü oldukça iyidir, sinyalin zaman-frekans bölgesi gösterimini değil, zaman-ölçek bölgesi gösterimini kullanır (Namba, 1998; Demir, 2008).

DD iki durumda incelenmelidir: Sürekli dalgacık dönüşümü ve Ayrık dalgacık dönüşümü. Sürekli dalgacık dönüşümünde ölçeklendirme ve dönüşüm parametreleri sürekli değiştiğinden her bir ölçek için dalgacık katsayılarının hesaplanması zor ve zaman alıcıdır. Bu nedenle daha çok ADD kullanılmaktadır (Güler ve Übeyli, 2004).

2.7.1. Sürekli dalgacık dönüşümü

Sürekli dalgacık dönüşümü (SDD), bütün zaman aralığı boyunca dalgacık fonksiyonu ψ 'nin ölçeklenmiş ve kaydırılmış şekliyle sinyalin çarpımından oluşur. Sürekli dalgacık dönüşümünün sonucunda birçok dalgacık katsayısı elde edilir bunlar

ölçek ve pozisyon fonksiyonlarıdır (Fliege, 1996). Dalgacık dönüşümü ana dalgacık fonksiyonu olan $\psi(t)$ nin a ölçek parametresi ve b zaman parametresi öteleme kullanılarak zamana bağlı $f(t)$ fonksiyonuna uygulanmasıdır.

Ana dalgacık terimi, isminden de anlaşılacağı gibi iki önemli kelimedenden oluşup bunlar sırası ile: Dalgacık terimi, küçük dalga anlamında dalgacık olarak ifade edilir. Buradaki küçüklük belirli uzunlukta pencere fonksiyonu olarak tarif edebiliriz. Dalga ise buradaki pencere fonksiyonunun titreşimli olduğunu ifade etmektedir. Buradaki ana kelimesi ise; bir ana fonksiyondan dönüşüm tekniği ile türetilip değişik alanları desteklemek için oluşturulan fonksiyonlardır. Diğer bir ifade ile ana dalgacık diğer pencere fonksiyonlarını üretmek için prototiptir.

ψ dönüşüm fonksiyonunda öteleme terimi KZFD de olduğu gibi pencerenin yerini belirler ve sinyal boyunca pencereyi kaydırır. Bu terim transfer alanında zaman bilgilerini içerir. Bu dönüşümde frekans bilgisine sahip olunmaz fakat ölçek parametresi $1/\text{frekans}$ olduğu için bu parametreden yararlanır. Burada yüksek ölçek sinyalin daha az detaylı görünüşü ve düşük ölçek ise detaylı görünüşü oluşturur. Ölçek bir matematiksel işlem olup sinyali hem açar hem de sıkıştırır. Yüksek ölçekler sinyali açar, düşük ölçekler ise sinyali sıkıştırırlar (Polikar, 1996).

SDD, KZFD ile oldukça benzerdir. Aralarındaki temel fark SDD’de zaman-frekans domeninin, yüksek veya alçak frekans bileşenlerini en iyi analiz edecek şekilde farklı büyüklükteki parçalara (pencerelere) ayrılmış olmasıdır. KZFD ise pencerelerin büyüklüğü sabittir, tüm frekans bileşenleri aynı zaman veya frekans çözünürlüğü ile analiz edilir. Sürekli dalgacık dönüşümü, ana dalgacık fonksiyonu olan $\psi_{a,b}(t)$ ile $f(t)$ sinyalinin iç çarpımı olarak yazılabilir.

$$\text{SDD} \left\{ f(t), \psi_{a,b}(t) \right\} = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.23)$$

Denklem (2.23) ile verilen bu fonksiyonda, $f(t)$ sinyalinin, zamanda kaydırılan ve ölçeklendirilen ψ dalgacığı ile çarpılması görülmektedir. Her ölçeği değiştirme işlemi tespit edilecek frekans değerini belirlemek için, her zamanda kaydırma işlemi de sinyalin farklı bir bölgesini incelemek için kullanılır (Ayaz, 1997; Valens, 1999).

Orijinal sinyal mükemmel olarak sinyalin dalgacık dönüşümünden Denklem (2.24) ile verilen ifade kullanılarak tekrar elde edilebilir. Ters Sürekli Dalgacık dönüşümü (TSDD) ise c_w ana dalgacık olabilme sabiti olmak üzere aşağıdaki şekilde verilir:

$$f(t) = \text{SDD}^{-1}\{f(t), \psi(t)_{a,b}\}$$

$$= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SDD}\{f(t), \psi(t)_{a,b}\} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \quad (2.24)$$

Bir fonksiyonun ana-dalgacık olabilmesi için sağlaması gereken koşul Denklem (2.25) ile verilmiştir. Bu dalgacık olabilme koşulu'dur:

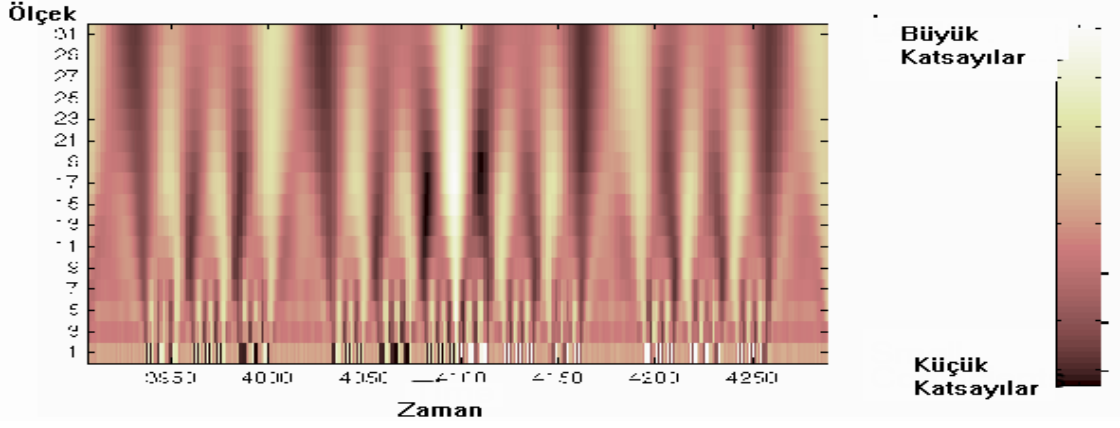
$$c_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (2.25)$$

Burada a ve b parametreleri sürekli değişen ölçek ve öteleme değişkenleridir. $\psi(t)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ise temel dalgacık fonksiyondan öteleme ve ölçeklemeyle türetilen dalgacık fonksiyonudur (Torrence ve diğ., 1997). Ölçeği belirleyen her a değerinde dalgacık, zamanı belirleyen b değeri ile zamanda kaydırılır. Bu işlem diğer ölçeklerde de devam edilerek dalgacık katsayıları elde edilir. Analiz sonucunda oluşan değerlere dalgacık katsayıları denir ve seçilen dalgacık tipi ile orijinal sinyalin, Denklem (2.23) sonucundaki üretilen değerlerdir.

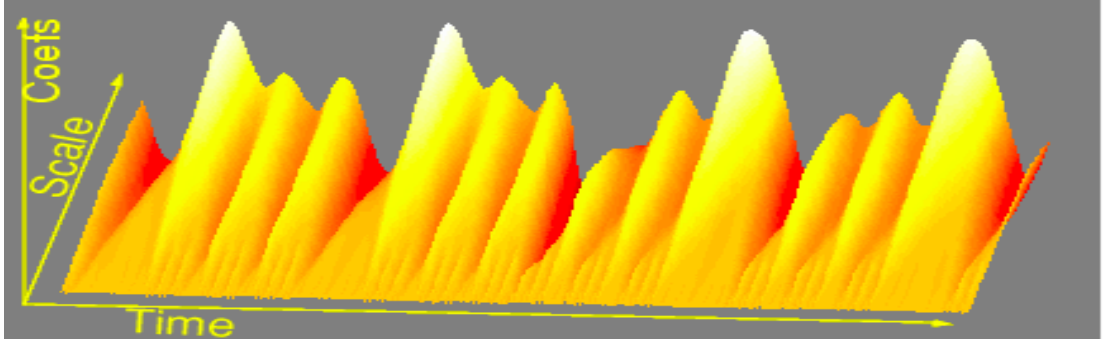
2.7.1.1. Dalgacık katsayıları

Dalgacık dönüşümü sonunda, sinyalin farklı zamanlarında, farklı ölçeklerdeki katsayıları elde edilir. Bu, sinyalin ölçek-zaman eğrisini verir ve aşağıdaki eğriler elde edilir (Şekil 2. 10, Şekil 2. 11).

Sinyalde hiçbir değişme, bozulma söz konusu değildir sadece sinyalin analizi yapılmıştır, tüm bilgiler sinyalde mevcuttur. SDD'nin genliği skolagram olarak adlandırılır. Skolagram sayesinde SDD'nin iki boyutlu veya üç boyutlu grafikleri çizilebilir (Phillips, 2003).



Şekil 2.10. Dalgacık dönüşümünden hesaplanan katsayıların zamanla değişen iki boyutlu gösterimi (Misiti ve diğ., 1996-1997)



Şekil 2.11. Dalgacık dönüşümünden hesaplanan katsayıların zamanla değişen üç boyutlu gösterimi (Misiti ve diğ., 1996-1997)

Dalgacık dönüşümü sonucunda elimizde ölçek katsayıları bulunur, geniş ölçekli ana dalgacık katsayıları bize sinyalin kaba sinyal özelliklerini koyar, küçük ölçekli ana dalgacık katsayıları ise küçük ayrıntı özelliklerini ortaya çıkarır. Bu da çok karmaşık sinyallerin analizinde üstünlük sağlar ve aranan bir durumdur. Dalgacık dönüşümünde yapılacak işleme göre ana dalgacık prototipini seçmek önemlidir.

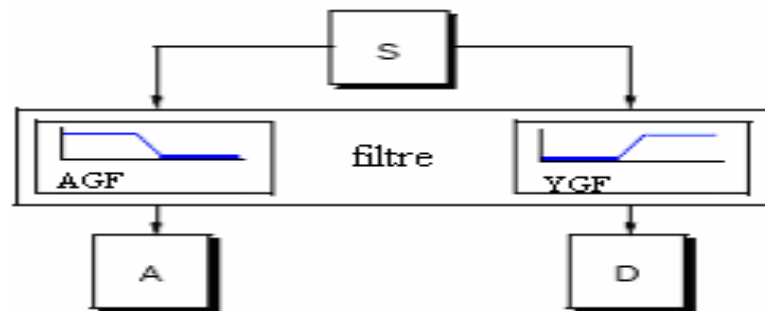
2.7.2. Ayrık dalgacık dönüşümü

Dalgacık dönüşümünde tüm ölçek aralığında analiz yapılırsa çok büyük veri yığınları oluşur ve çok fazla işlem yapmak gerektirir. Bu istenmeyen bir durumdur bu yüzden belirli ölçek grupları tespit edilir ve bu aralıkta analizler yapılırsa, bu analize Ayrık (Kesikli) dalgacık dönüşümü (ADD) denir (Misiti, 1996-1997). Pratikte en çok kullanılan yöntem, ölçek ve konum değerleri için ikinin kuvveti olacak şekilde seçilmesidir. Çalışma sistemi ve matematiksel kuram olarak her şey SDD'deki gibidir.

Uygulamalarda SDD'nin kullanılmasını zorlaştıran durumlar vardır. SDD ile tek boyutlu sinyalin, iki boyutlu zaman-skala birleşik gösterimi elde edilir. Bu gerekenden fazla lüzumsuz gösterim şeklidir. Çoğu uygulama için bu fazlalığın giderilmesi gerekmektedir. Fazlalık giderilmesine rağmen, SDD'de sonsuz sayıda baz fonksiyonuna gereksinim devam etmektedir. Bu sayı kontrol edilebilir düzeye çekilmelidir. Çoğu sinyalin DD'sinin analitik çözümü mümkün değildir sadece nümerik olarak veya görsel analog bilgisayarlarla hesaplanabilir. Ayrıca SDD'nin zaman-band genişliği çarpımı, sinyalin zaman-band genişliği çarpımının karesine eşittir. Mümkün olduğu kadar az bileşenle bir sinyalin tarifini çıkarmaya yani analizini yapmaya çalışan çoğu uygulama için bu dezavantajlar, SDD'nin kullanımını kullanışsız hale getirir. Bundan dolayı pratikte SDD'nin ayrık versiyonu kullanılır (Gümüş, 2003).

ADD, 1988 yılında Mallat tarafından filtreler kullanılarak geliştirilmiştir. Mallat algoritması olarak da bilinen bu yöntem, iki kanal alt bant kodlayıcısıyla yapılan hızlı bir dalgacık dönüşümü yapan filtreleme algoritmasıdır (Percival, 2002; Lee, 1999; Misiti 1996-1997). Şekil 2.12'de bir sinyale filtre uygulanışı ve elde edilen değerler verilmiştir. En temel filtre devresinde S sinyaline uygulanan bir filtre ile sinyal içerisindeki alçak ve yüksek frekanslar ayrılmıştır.

ADD, sinyalleri, iki ana bileşene ayırır. Bu işlem filtreler kullanılarak yapılır. Bu ana bileşenlerden birincisi düşük frekanslı bileşenler yani alçak geçiren filtre çıkışlarıdır, bir diğeri ise yüksek frekanslı bileşenler yani yüksek geçiren filtre çıkışlarıdır.

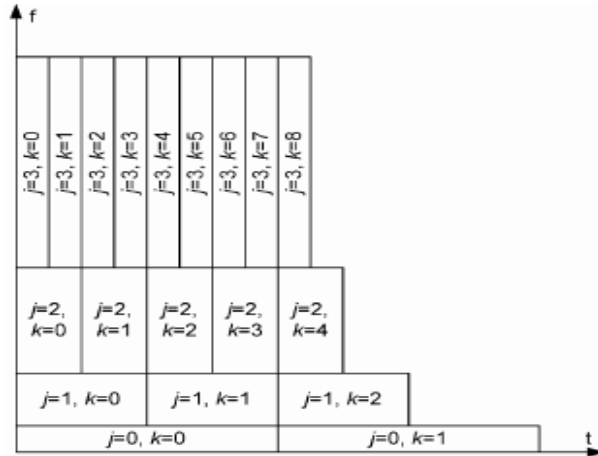


Şekil 2. 12. Filtreleme işlemi (Misiti ve diğ., 1996-1997)

Filtre sonucunda oluşan iki ayrı sinyalden A ile gösterilene yaklaşım (Approximation) ve D ile gösterilene de detay (Detail) ismi verilir (Şekil 2.12). Yaklaşım sinyalleri, orijinal sinyali temsil eder ve sinyalin tanımını verir. Detaylar

ise sinyalin karakteristiğini yada ayrıntısını içerir (Misiti ve diğ., 2003). Örnek olarak insan sesini ele alırsak; insan sesinden yüksek frekanslar kaldırılırsa konuşmanın içeriği anlaşılabilir. Ancak düşük frekanslar kaldırılırsa içeriği anlaşılmayan, anlam verilemeyen sesler duyulur. Dalgacık dönüşümünde de yaklaşımlar sinyalin orijinalini temsil eder ve yüksek ölçek ile elde edilir. Detaylar ise düşük ölçekteki bilgilerdir ve sinyalin yüksek frekanslı bileşenleridir.

Şekil 2.13, ADD'nin frekans-zaman düzlemini göstermektedir. Burada ki j ölçeği, k ise filtreleme sonucunda oluşan alçak ve yüksek frekansları temsil etmek için kullanılmıştır. k değerinin düşük değerle temsil ettiği bölgeler, düşük frekanslı bileşenleri göstermektedir. Başka bir deyişle, düşük k değerleri bir frekans bandı içerisindeki yaklaşımları, yüksek k değerleri detayları nitelendirir.

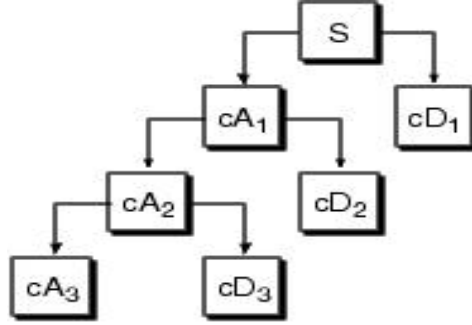


Şekil 2.13. ADD zaman-frekans düzlemi (Zanardelli ve diğ., 2005)

Şekil 2.13'den de anlaşılacağı gibi ADD, yüksek frekanslarda mükemmel frekans çözünürlüğüne, alçak frekanslarda da çok iyi zaman çözünürlüğüne sahiptir (Zanardelli ve diğ., 2005). Ayrıştırma işlemi teorikte sonsuza kadar devam ettirilebilir. Uygulamada ise ayrıştırma işlemi, en son elde edilen yaklaşım bilgisine göre karar verilebilir.

Alt bileşenlerine ayrıştırma işlemi, aynı sinyal üzerinde birkaç kez, hatta ihtiyaca göre daha fazla gerçekleştirilebilir, genelde alçak geçiren çıkışları yani yaklaşım çıkışları tekrar ADD'ye tabi tutulur. Burada anlamlı bir sinyal çözümü üretene kadar

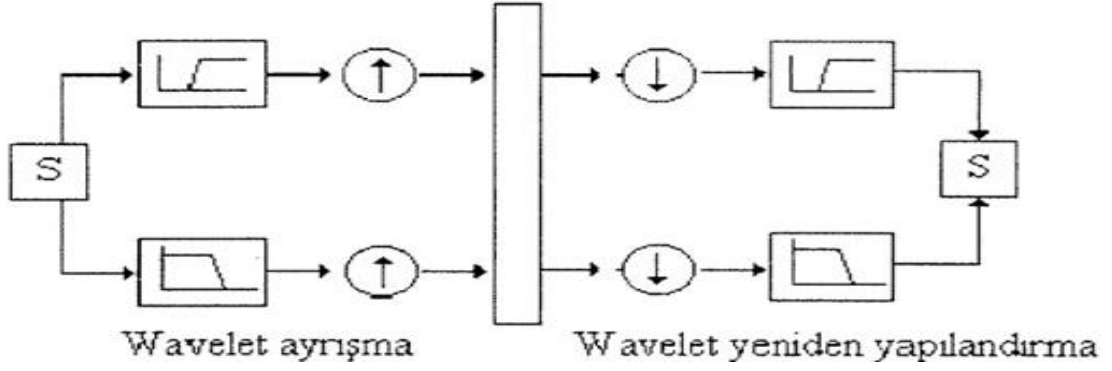
ADD yani alt bileşenlerine ayrıştırma işlemine devam edilir. Bu işleme dalgacık ayrıştırma ağacı da denir. Şekil 2.13'de bir sinyalin birden fazla filtreleme işlemine tabi tutularak yaklaşım ve detay bileşenlerine ayrıştırılması verilmiştir. Şekil 2.14'te ayrıştırma işlemi blok diyagramlar kullanılarak gösterilmiştir.



Şekil 2.14. Dalgacık ayrıştırma ağacı (Matlab Wavelet Toolbox Dökümanları)

Şekil 2.14'den de görüldüğü üzere, ADD'ye tabi tutulan sinyal (S) hiçbir kayba uğramaz, sadece ana dalgacıkla çarpılarak, bileşenlerine ayrıştırılmıştır. Buradaki A_3 yaklaşım bileşeni, temel bileşendir. Yaklaşımlar, yüksek ağırlıklı, düşük frekanslı bileşenlerdir. Detaylar ise düşük ağırlıklı, yüksek frekanslı bileşenlerdir. Dalgacık dönüşümünde amaç görüldüğü üzere, sinyali yaklaşım ve detaylarına ayırmaktır. Elde edilen yaklaşım tekrar ikinci seviye yaklaşım ve detayına ayrıştırılır, bu işlem istenilen sonuç elde edilene kadar tekrarlanabilir.

Orijinal bir S sinyaline bu işlemi uyguladığımızda mevcut verinin iki katı veriye ihtiyaç duyulur. Bu problemi düzeltmek için downsampling dediğimiz örnekleme hızını düşürerek wavelet ayrıştırması gerçekleştirilir. Sinyallerin ve görüntülerin analizi ve ayrıştırılması ayrık dalgacık dönüşümü ile yapıldığı gibi bunun tersi olan ayrıştırılmış sinyalleri de dalgacık ile yeniden yapılandırılarak orijinal sinyal elde edilebilir. Şekil 2.15 bunu özetlemektedir.



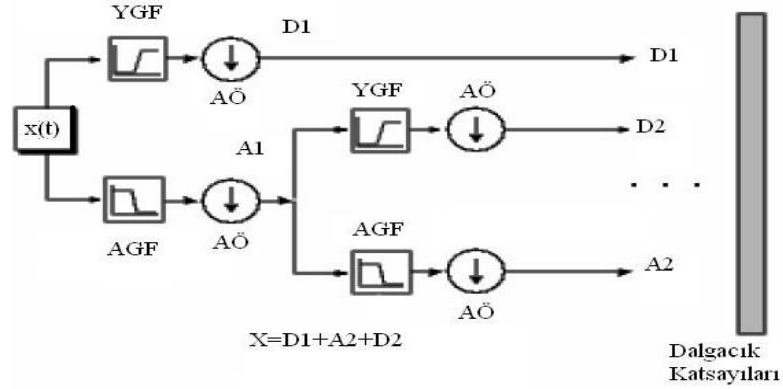
Şekil 2.15. Dalgacık ayrıştırma ve yapılandırma (Misiti ve diğ., 1996-1997)

Ayrık dalgacığın ortaya çıkmasından sonra, aynı yıllarda benzer bir çalışmayı da Crochiere, Weber ve Flanagan konuşma işaretlerini kodlama üzerinde kullandılar. Bu tekniğe altbant kodlama (subband coding) adını verdiler. 1993 yılında, altbant kodlamaya benzer bir teknik olan ve çok çözünürlüklü analiz olarak da bilinen piramidal kodlama yöntemini geliştirdi. ADD’de ölçek işaretin boyutuyla ilişkiliyken, çözünürlük işarete bulunan detay miktarıyla bağlantılıdır. ADD ele alınırken anlaşılması gereken en önemli nokta büyük ölçekler için alt örneklenmiş işaretin “genel görünümünü” ele alırken, küçük ölçekler için işareteki küçük “ayrıntılar” ele alınır (Kıymık ve diğ., 2001).

2.7.2.1. Çoklu çözünürlük analizi

Dalgacık katsayılarının bütün ölçek değerlerinde hesaplanması çok miktarda katsayının oluşmasına ve işlem yüküne neden olduğundan dolayı, katsayıların yalnızca seçilen ölçekler ve zaman dilimleri için hesaplanması birçok avantajlar sağlar. Sürekli dalgacık dönüşümünde elde edilen dalgacık dönüşümü katsayıları gereksiz terimler ve gereksiz bilgi içermektedir ve hesaplama zamanını arttırmaktadır. Ayrık dalgacık dönüşümü, yeterli bilgiyi sağlamakla birlikte hesaplama zamanında da önemli bir azalma getirmektedir. Ölçek ve pozisyon belli bir basamağa göre seçilerek, örneğin ölçek ve pozisyonların 2’nin katları olarak seçilerek analizin daha verimli bir şekilde doğru sonuçlar vermesi sağlanmaktadır. Bu işlemi yapmanın diğer bir yolu ise filtreleme tekniklerinin kullanmasıdır. İşaret bu tip analizde birbirine seri bağlı yüksek geçiren ve alçak geçiren filtrelerden geçirilmektedir. Böylece işarete var olan yüksek ve alçak frekans bileşenleri ayrı ayrı analiz edilmektedir. İşaretin çözünürlüğü filtreler yardımıyla değiştirilirken, alt

ve üst-örnekleme (downsampling ve upsampling) yardımıyla da işaretin ölçeği ve üst-örnekleme (downsampling ve upsampling) yardımıyla da işaretin ölçeği değiştirilmektedir.



Şekil 2.16. Çoklu çözünürlük analiz ile $x(t)$ işaretinin ayrıştırılması (YGF: Yüksek geçiren filtre AGF: Alçak geçiren filtre AÖ: Alt örnekleme)

Ayrık dalgacık dönüşümünün çoklu çözünürlüklü analiz (multiresolution analysis, ÇÇA) adlı başka bir şekli daha vardır. Mallat (1989) tarafından önerilen ADD'nin genel çalışma prensibi şöyledir.

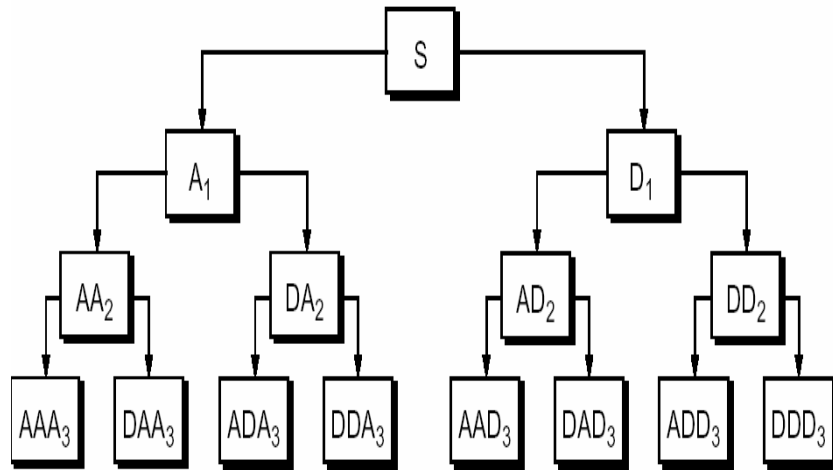
İşaret, ADD yardımıyla bir çeşit filtrelemeden geçirilerek, yaklaşık bileşenine ve detay bileşenine ayrıştırılır. Ardından işlem yaklaşıklık serisinin diğer filtreden geçirilmesiyle devam eder. Her seferinde kalan yaklaşık serisi tekrar, yaklaşık ve detay olmak üzere ayrıştırılabilir. Bileşenlerine ayırma işlemi ardışık tekrar ederek işaret istenilen çözünürlük seviyesinde bileşenlerine ayrılabilir. Sonuçta işaret birçok alt çözünürlük seviyesinde bileşenlerine ayrılmış olur. Bu olaya çok çözünürlüklü analiz adı verilir (Şekil 2.16). Burada yaklaşım serisi işaretin yüksek ölçekli veya düşük frekanslı bileşenini, detay serisi ise düşük ölçek ve yüksek frekanslı bileşenini temsil eder.

Düşük ölçekler, sıkıştırılmış bir dalgacık yardımıyla elde edilir ve işarettaki hızlı değişimlere sahip yüksek frekanslı bileşenleri gösterir. Yüksek ölçekler ise genişletilmiş bir dalgacık fonksiyonu yardımıyla elde edilir ve işarettaki yavaş değişimleri veya düşük frekanslı değişimleri belirtir.

2.7.2.2. Dalgacık paket dönüşümü

Orijinal işarete dalgacık dönüşümü uygulandığında işaret, yüksek frekanslı kısım ve alçak frekanslı kısım olmak üzere iki parçaya bölünür. Alçak frekanslı kısım orijinal işaretin bir yaklaşımı (approximation) olarak adlandırılır. Ayırışım iteratif olarak tekrar edildiğinde bir dizi yaklaşım elde edilir. İki ardışık ayırışım arasında oluşan yaklaşımların farkına da detay denir (Eren, 2003). Çoklu çözünürlü analiz ise sadece alçak frekanslı kısımların iteratif olarak ayırışımını baz alan bir algoritmadır. Çoklu çözünürlü analizdeki yöntem, yaklaşım uzayı eden yaklaşım alt uzayı V_j 'nin onu takip eden yaklaşım alt uzayı V_{j+1} ve ona ilişkin detay alt uzayı W_{j+1} 'ye ayırışımı olarak da ifade edilebilir. Yaklaşım uzayı V_j ile ilişkili detay uzayı W_j ayırışmamış olarak kalır.

Dalgacık paket dönüşümü ise dalgacık dönüşümünün çoklu çözünürlüklü yaklaşımlama ve dalgacıklar arasındaki bağlantının genelleştirilmesi yoluyla kazanılmış bir uzantısıdır. Dalgacık paket dönüşümünde hem yaklaşım uzayı V_j , hem de detay uzayı W_j ayrıştırılmaya devam edilir (Şekil 2.17).



Şekil 2.17. Dalgacık paket dönüşümü (Matlab Wavelet Toolbox Dökümanları)

3. DALGACIK TEORİSİ

Bu bölümün alt bölümleri, Sürekli dalgacık dönüşümleri (Bölüm 3. 1) ve Ayrık dalgacık dönüşümleri (Bölüm 3. 2) dir. Bu kısımda başlıca kaynak A.H. Siddiği'nin, Uygulamalı Fonksiyonel Analiz (Applied Functional Analysis) isimli kitabıdır (Siddiği, 2004).

3.1. Sürekli Dalgacık Dönüşümleri

Tanım 3.1.1. Eğer bir $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ üzerinde sıfır ortalamaya sahip yani;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.1)$$

ise ψ fonksiyonuna dalgacık denir.

Uyarı 3.1.1. Eğer ψ ,

$$c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.2)$$

koşulunu sağlıyor ve $\psi \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ ise, o halde (3.1) sağlanır. Burada $\hat{\psi}(\omega)$, ψ 'nin Fourier dönüşümüdür. (3.2) koşuluna dalgacık olabilme koşulu denir.

İspat: Riemann-Lebesgue teoreminden, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ dır ve Fourier dönüşümünün sürekliliğinden,

$$0 = \hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt$$

olduğu görülür.

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ ve ψ integrallenebildiğinden, bazı $\alpha > 0$ için $\int (1+|t|)^\alpha |\psi(t)| dt < \infty$ dur. O zaman $\beta = \min(\alpha, 1)$ olmak üzere $|\hat{\psi}(\omega)| \leq c|\omega|^\beta$ dır ve c_ψ sağlanır. Aşağıdaki yardımcı teorem dalgacık oluşturmanın bir yöntemidir:

Yardımcı Teorem 3.1.1. $\varphi, \varphi^{(n)} \in L_2(\mathbb{R})$ olacak biçimde n kez ($n \geq 1$) türevlenebilir sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\psi(x) = \varphi^{(n)}(x) \quad (3.3)$$

bir dalgacıktır.

İspat: Fourier dönüşümünün özelliğinden (Ekte yer alan Sonuç (1.1)),

$$\widehat{\psi}(\omega) = |\omega|^k |\widehat{\varphi}(\omega)|$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} c_\psi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^{2k} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{-1}^1 |\omega|^{2k-1} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2k} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq 2\pi \left(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\varphi^{(k)}\|_{L_2}^2 \right) < \infty \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı, (3.2) dalgacık olabilme koşulunu sağladığından ψ bir dalgacıktır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. Bir $\beta > 1/2$ için $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx < \infty$ ve $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ olacak şekilde $0 \neq \psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ olsun. O zaman ψ bir dalgacıktır.

İspat: Genelliği bozmadan $1/2 < \beta \leq 1$ olduğu varsayılabilir. Buradan $1 + |x|^\beta \geq (1 + |x|)^\beta$ ve $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ olur.

$x \leq 0$ için, $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ fonksiyonu hemen hemen her yerde türevlenebilirdir ve $\varphi'(x) = \psi(x)$ olur. Böylece,

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt$$

veya

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^\beta |\psi(t)| dt \quad (3.4)$$

sağlanır.

$x > 0$ ise, ψ nin sıfır ortalama değerine sahip oluşu $\varphi(x) = \int_x^\infty \psi(t) dt$ anlamına gelir. Bu ise, Denklem (3.4) deki eşitsizliklerin her $x \in \mathbb{R}$ için sağlandığını gösterir ve bu nedenle $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ dir. $\varphi' = \psi \in L_2(\mathbb{R})$ olduğu için, Yardımcı Teorem (3.1.1) den, ψ bir dalgacıktır.

Sonuç 3.1.1. Sonlu dayanaklı $L_2(\mathbb{R})$ nin sıfırdan farklı her ψ elemanı için, şu ifadeler eşdeğerdir:

- (a) ψ fonksiyonu bir dalgacıktır.
- (b) (3.2) bağıntısı sağlanır.

İspat: (b) \Rightarrow (a) (Uyarı 3.1.1)

(a) \Rightarrow (b) : ψ bir dalgacık olsun. Yani, $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ve $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ dir.

$\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ve ψ sonlu dayanağa sahip olduğundan, $|\psi(x)| \in L_1(\mathbb{R})$ dir; yani, her $\beta \geq 0$ için,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dt < \infty$$

dir. Özel olarak, her $\beta > \frac{1}{2}$ için,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dt < \infty$$

olur. Yardımcı Teorem (3.1.2) den, ψ bir dalgacıktır.

Dalgacık Örnekleri

Örnek 3.1.1. (Haar Dalgacığı)

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Diğer Durumlarda} \end{cases}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(x) dx + \int_1^{\infty} \psi(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \psi(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dx \\ &= x \Big|_0^{\frac{1}{2}} + (-x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2} + (-1) + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

ve $\psi(x)$ in $[0,1]$ de sonlu dayanağa sahip olduğu açıktır.

Buradan,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx + \int_0^1 \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx + \int_1^{\infty} \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx \right] \end{aligned}$$

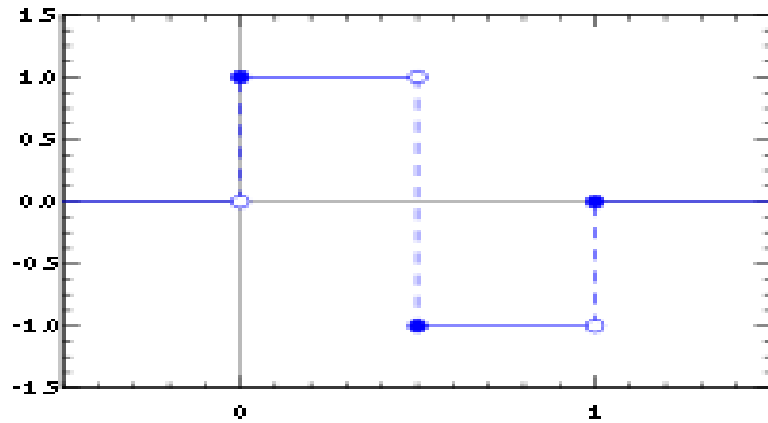
$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx + 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{1/2} \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx + \int_{1/2}^1 \psi(x) e^{-\pi i \omega x} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{1/2} e^{-\pi i \omega x} dx - \int_{1/2}^1 e^{-\pi i \omega x} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([e^{-i\omega x}]_0^{1/2} - [e^{-i\omega x}]_{1/2}^1 \right) \left(\frac{1}{i\omega} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4} \right)^2}{\omega/4} e^{-i(\omega-\pi)/2}
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \sin \frac{\omega}{4} \right|^4}{|\omega|^3} d\omega < \infty$$

olduğu görülür.

Yukarıda tanımlanan $\psi(x)$, 1909 yılında bu dalgacığı bulan Macar matematikçi Alfred Haar onuruna Haar dalgacığı olarak bilinir. Haar dalgacığı $x=0, \frac{1}{2}, 1$ noktalarında süreksizdir.



Şekil 3.1. Haar dalgacığı

Örnek 3.1.2. (Meksika şapka dalgacığı)

$$\psi(x)=(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

denklemiyle tanımlanan fonksiyon Meksika Şapka Dalgacığı olarak bilinir. $\psi(x)$, Yardımcı Teorem (3.1.1) in (3.3) denklemini sağlar, yani;

$$\psi(x)=-\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2}=(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

olur. Meksika Şapka Dalgacığının süreksizliğe sahip olmadığı açıktır. Yardımcı Teorem (3.1.1) den $\psi(x)$ bir dalgacıktır.

Örnek 3.1.3. (Gabor dalgacığı) Bir Gabor Dalgacığı,

$$\psi(x)=\omega^{-1/2}e^{-\pi(x/\omega)^2}e^{i2\pi\nu x/\omega}$$

olarak tanımlanır. Burada ω genişlik parametresini ve ν frekans parametresini ifade eder. Bu bir kompleks değerli fonksiyondur. Bu kompleks değerli fonksiyonun ψ_I sanal kısmı ve $\psi_R(x)$ gerçek kısmı,

$$\psi_R(x)=\omega^{-1/2}e^{-\pi(x/\omega)^2}\cos(2\pi\nu x/\omega)$$

$$\psi_I(x)=\omega^{-1/2}e^{-\pi(x/\omega)^2}\sin(2\pi\nu x/\omega)$$

ile tanımlanabilir.

Yeni dalgacıklar oluşturmak için aşağıdaki teorem kullanılabilir:

Teorem 3.1.1. ψ bir dalgacık ve φ sınırlı integrallenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman $\psi*\varphi$ konvolüsyon fonksiyonu bir dalgacıktır.

İspat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi*\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t)\varphi(t)dt \right|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| |\varphi(t)| dt \right)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| |\varphi(t)|^{1/2} |\varphi(t)|^{1/2} dt \right)^2 dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|^2 |\varphi(t)| dx dt \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan, $\psi^*\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ elde edilir. Diğer taraftan, ekte yer alan Teorem (1.1) den,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi^*\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \right) \sup |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 < \infty
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle, $\psi^*\varphi$ bir dalgacıktır.

NOT: Sonlu dayanaklı sıfırdan farklı dalgacıklar kümesi $L_2(\mathbb{R})$ nin yoğun bir alt kümesidir.

Teorem 3.1.2.

$$A = \left\{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi \neq 0, \psi \text{ sonlu dayanağa sahip ve } \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \right\}$$

olsun, o zaman A, $L_2(\mathbb{R})$ nin yoğun bir alt kümesidir.

İspat: $h \in L_2(\mathbb{R})$ olsun, o zaman $\widehat{h} \in L_2(\mathbb{R})$ dir. h_ε ,

$$\hat{h}_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \hat{h}(\omega) & |\omega| \geq \varepsilon \\ 0 & |\omega| < \varepsilon \end{cases}$$

ile tanımlanmış olsun. O zaman, her ε için, h_ε (3.2) dalgacık olabilme koşulunu sağlar ve Sonuç (3.1.1) den, h_ε bir dalgacıktır. Ekte yer alan Teorem (1.4) den dolayı, $\|h\|_{L_2} = \|\hat{h}\|_{L_2}$ dır. Buradan $\varepsilon \rightarrow 0$ iken,

$$\|h_\varepsilon - h\|_{L_2}^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\hat{h}(\omega)|^2 d\omega \rightarrow 0$$

dır. Bu ise L_2 deki her h fonksiyonunun bir dalgacıklar dizisinin limiti olarak ifade edilebileceği anlamına gelir ve bundan dolayı $A, L_2(\mathbb{R})$ de yoğundur.

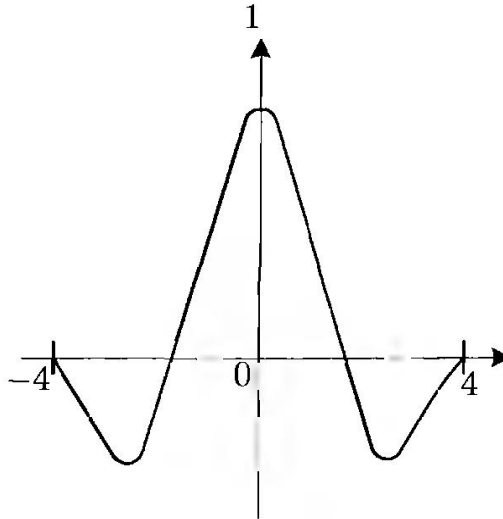
Tanım 3.1.2. (Sürekli dalgacık dönüşümü)

Bir $f \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun ψ dalgacığına dayalı T_ψ Sürekli Dalgacık Dönüşümü,

$$f(a,b) = T_\psi f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Burada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ dır ve $\bar{\psi}$ kompleks eşleniği ifade eder.

Gerçel değerli bir fonksiyon için, $\bar{\psi} = \psi$ olduğu açıktır.



Şekil 3.2. Meksika şapka dalgacığı

Uyarı 3.1.2.

(i) $\psi_{a,b}(t)$,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a > 0, b \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

bağıntısı ile verilen fonksiyonların bir ailesi olarak düşünülürse, sürekli dalgacık dönüşüm denklemi (3.5)

$$T_\psi f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = f \text{ ile } \psi_{a,b} \text{ nin iç çarpımı}$$

olarak yazılabilir. Burada ψ genellikle ana dalgacık olarak adlandırılan belirli bir fonksiyondur.

(ii) Dalgacık dönüşümü, f ile $\psi_{a,b}(t)$ nin iç çarpımı olarak ifade edildiğinden; dalgacık dönüşümü lineerdir. Aşağıda belirtilen özellikler iç çarpım özelliklerinden gösterilebilir.

ψ ve ϕ dalgacıklar ve $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ olsun. O zaman aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

1. Herhangi bir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T_\psi(\alpha f + \beta g)(a,b) = \alpha T_\psi f(a,b) + \beta T_\psi g(a,b)$,
2. $T_\psi(S_c f)(a,b) = T_\psi f(a,b-c)$. Burada $S_c, S_c f(t) = f(t-c)$ ile tanımlanan bir öteleme operatörüdür.
3. $T_\psi(D_c f)(a,b) = (1/\sqrt{c}) T_\psi f(a/c, b/c)$. Burada c pozitif bir sayı ve $D_c, D_c f(t) = (1/c) f(t/c)$ ile tanımlanan genişleme operatörüdür.
4. $T_\psi \phi(a,b) = T_\phi \psi(1/a, -b/a), a \neq 0$,
5. Herhangi bir α, β skaler için, $T_{\alpha\psi + \beta\phi}(a,b) = \alpha T_\psi f(a,b) + \beta T_\phi f(a,b)$.
6. $T_{A\psi} A f(a,b) = T_\psi f(a,-b)$. Burada $A, A\psi(t) = \psi(-t)$ ile tanımlıdır.
7. $(T S_c \psi)(f)(a,b) = T_\psi f(a,b+ca)$,
8. $(T_{D_c} \psi f)(a,b) = 1/\sqrt{c} (T_\psi f)(ac,b), c > 0$

İspat:

$$\begin{aligned}
1. \quad T_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) &= \langle \alpha f + \beta g, \psi_{a, b} \rangle \\
&= \langle \alpha f, \psi_{a, b} \rangle + \langle \beta g, \psi_{a, b} \rangle \\
&= \alpha \langle f, \psi_{a, b} \rangle + \beta \langle g, \psi_{a, b} \rangle \\
&= \alpha T_\psi f(a, b) + \beta T_\psi g(a, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad T_\psi f(a, b+ca) &= \langle f, \psi_{a, b+ca} \rangle \\
&= \langle f, |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b-ca}{a} \right) \rangle = \langle f, |a|^{-1/2} S_c \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \rangle \\
&= TS_c \psi(f)(a, b)
\end{aligned}$$

Tezin bu bölümünde dalgacık dönüşümleri için Parseval formülü, sürekli dalgacık dönüşümünün izometrisi ve ters dalgacık formülü verilecektir.

Teorem 3.1.3. (Dalgacık dönüşümleri için Parseval formülü)

$\psi \in L_2(\mathbb{R})$, (3.2) dalgacık olabilme koşulunu sağlasın, yani ψ bir dalgacık olsun. O zaman herhangi bir $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ için, aşağıdaki formül sağlanır:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (T_\psi f)(a, b) \overline{(T_\psi g)(a, b)} \frac{db da}{a^2} \quad (3.7)$$

İspat: Fourier dönüşümleri için Parseval formülünden (Ekte yer alan Teorem (1.4)),

$$\begin{aligned}
(T_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a, b} \rangle \\
&= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a, b} \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) |a|^{1/2} e^{ibx} \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \\
&= (2\pi)^{1/2} F\{|a|^{1/2} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{(T_\psi g)(a,b)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(y)} |a|^{1/2} e^{-iby} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= (2\pi)^{1/2} \overline{F\{|a|^{1/2} \hat{g}(x) \widehat{\psi}(ax)\}}(-b)
\end{aligned}$$

elde edilir.

O zaman,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (T_\psi f)(a,b) \overline{(T_\psi g)(a,b)} \frac{db da}{a^2} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\{\hat{f}(x) \widehat{\psi}(ax)\}(-b) \overline{F\{\hat{g}(x) \widehat{\psi}(ax)\}(-b)} \frac{db da}{a}
\end{aligned}$$

Fourier dönüşümleri için Parseval formülünden (Teorem (1.4)),

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{a}$$

Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(ax)|^2 \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega x)|^2}{|\omega|} d\omega \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle
\end{aligned}$$

Fourier dönüşümleri için Parseval formülünden (Teorem (1.4))

$$= c_\psi \langle f, g \rangle$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. (Calderon, Grossman, Morlet) $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, (3.2) dalgacık olabilme koşulunu sağlasın. O zaman, herhangi bir $f \in L_2(\mathbb{R})$ için, aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

(Ters Formül)

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (T_\psi f)(a,b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (3.8)$$

(Izometri)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(T_\psi f)(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2} \quad (3.9)$$

(3.9) denklemi,

$$\|f\|_{L_2} = \|T_\psi f(a,b)\|_{L_2\left(\mathbb{R}^2, \frac{dadb}{a^2}\right)} \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir.

İspat: Herhangibir $g \in L_2(\mathbb{R})$ için,

$$c_\psi \langle f, g \rangle = \langle T_\psi f, T_\psi g \rangle$$

Teorem (3.1.3) den,

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \overline{T_\psi g(a,b)} \frac{dbda}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt} \frac{dbda}{a^2} \end{aligned}$$

Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} \overline{g(t)} dt \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \psi_{a,b} \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle \end{aligned}$$

veya her $g \in L_2(\mathbb{R})$ için,

$$\langle c_\psi f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \psi_{a,b} \frac{dbda}{a^2}, g \rangle = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir.

Ekte yer alan Uyarı (1.1) den,

$$c_\psi f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_\psi f(a,b) \psi_{a,b} \frac{dbda}{a^2} = 0$$

elde edilir ve böylece Denklem (3.8) elde edilir.

Denklem (3.9)'un ispatı şu şekilde yapılabilir. $\hat{f}(\omega+\xi)\hat{\psi}(\omega)$, $(T_\psi f)(\xi,b)$ nin b deki Fourier dönüşümü olduğundan, Denklem (3.9) un en sağ tarafına uygulanan Fourier dönüşümünün izometrisine ilişkin ekte yer alan Teorem (1.4),

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(T_\psi f)(\xi,b)|^2 db \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega+\xi)\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega d\xi$$

eşitliğini verir.

Fubini teoremi ve ekte yer alan Teorem (1.4) den,

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega+\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2$$

elde edilir, (3.9) denklemi ispatlanır.

3.2. Ayrık Dalgacık Dönüşümü ve Dalgacık Serisi

Pratik uygulamalarda, özellikle hızlı algoritmaları içerenlerde, Sürekli dalgacık dönüşümü, sadece $n \in \mathbb{Z}, (a_n, b_n)$ noktasının bir ayrık penceresi üzerinde hesaplanabilir. Önemli konu, f fonksiyonunun tüm bilgilerini içerecek şekilde bu örnekleme seçmektir. Bir ψ dalgacığı için,

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{n/2} (a_0^n t - b_0 m); n, m \in \mathbb{Z},$$

olarak tanımlanabilir. Burada $a_0 > 1$ ve $b_0 > 0$ sabit parametrelerdir.

Çatı kavramı ilk önce Duffin ve Schaeffer tarafından geliştirildi; daha sonra Daubechies tek olmayan ayrışımına izin verirken kararlılığı garantileyecek şekilde

tarafından tekrar ele alındı. Çatı kavramı tanımına geçilmeden önce çatı kavramı ile ilişkili olan temel birkaç tanım ve örnek verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü ile verilen \mathbb{C} kompleks sayılar kümesi üzerinde vektör uzayı olan bir V iç çarpım uzayı $\forall x, y, z \in V$ ve skaler $\alpha \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa bir iç çarpım olarak tanımlanır.

- 1) Eşlenik Transpoze: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 2) Birinci terime göre lineerlik: $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- 3) Pozitif Tanımlılık: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Tanım 3.2.2. Bir Hilbert uzayı belirli bir norm altında tanımlanmış bir iç çarpım uzayıdır. $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Örnek 3.2.1. İyi bilinen Hilbert uzayları üzerinde iç çarpım örnekleri aşağıda verilmiştir.

- i. \mathbb{C} kümesi, $\langle x, y \rangle = x\bar{y}$ iç çarpımı altında bir Hilbert uzayıdır.
- ii. Daha genel olarak, \mathbb{C}^n , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için $x \cdot y = xy^t = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ şeklinde tanımlanan noktasal çarpım altında bir Hilbert uzayıdır.
- iii. Bu fikri, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ iç çarpımı altında (sonsuz boyutta) karesiyle toplanabilir $l^2(\mathbb{N})$ ile gösterilen bir Hilbert uzayına genişletebiliriz.
- iv. $L^2(\mathbb{N})$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ ile tanımlanan standart iç çarpım altında $L^2(a, b)$ ile gösterilen bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.2.3. H Hilbert uzayı için $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ortonormal tabanı kapalı üretici bütün uzay olan karılıklı ortogonal birim vektörleri bir dizisidir. $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}$ ve $\overline{\text{span}}\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = H$. Burada, $\delta_{j,k}$ Dirac delta fonksiyonudur.

Uyarı 3.2.1. Zorn Lemması ve Gram-Schmidt teoreminden ortonormal tabanların her zaman var olduğu bilinmektedir.

Örnek 3.2.2. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi $l^2(\mathbb{N})$ için, elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanan bir ortonormal tabandır (standart tabandır).

$$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$e_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots\}$$

⋮

Örnek 3.2.3. $\left\{\frac{1}{2\pi} e^{inx}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ailesi, standart Fourier tabanı olarak bilinen $L^2(\pi, -\pi)$ Hilbert uzayı için ortonormal bir tabandır.

Örnek 3.2.4. Legendre polinomları olarak bilinen $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, \dots\right\}$ polinomlar dizisi $L^2(1, -1)$ için bir ortonormal tabandır. Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi kullanılarak üretilmiştir.

Uyarı 3.2.2. Legendre polinomları ortonormal polinomlar olmalarına rağmen, çabukça karmaşık bir şekilde büyürler ve el ile hesaplamak yorucudur. Çatılar ise bu zorluklara mümkün olan alternatif bir çözüm sunarlar.

Ortonormal tabanlar oldukça önemlidir, istenilen özelliklerin birçoğuna sahiptirler, bu anlamda aşağıda iki çok önemli olan sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.2.1. (Mükemmel yeniden oluşturma) Bir H Hilbert uzayı için $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ortonormal bir taban ise,

$$\forall x \in H \text{ için } x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (3.12)$$

Teorem 3.2.2. (Parseval özdeşliği) Bir H Hilbert uzayı için $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ortonormal bir taban ise, bu durumda,

$$\forall x \in H \text{ için } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (3.13)$$

Parseval eşitliği çok önemli bir özdeşliktir. Şaşırtıcı olan bir durum da şudur. Birçok aile bu özelliğe sahiptir, fakat ortonormal taban değildir.

Tanım 3.2.4. Bir H Hilbert uzayının elemanlarının bir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ailesi eğer parseval özdeşliğini sağlarsa, yani,

$$\forall x \in H \text{ için } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, f_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (3.14)$$

ise bir Parseval çatıdır. Parseval çatıları sadece bu özdeşliği sağlamaz, (bu istenilen durumdur) aynı zamanda mükemmel bir şekilde yeniden oluşturma özelliği sağlarlar! Gerçekte, ortonormal taban olmayan çok sayıda parseval çatıları vardır.

Tanım 3.2.5. (Çatılar) Her $f \in H$ için,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.15)$$

olacak biçimde A ve B gibi pozitif sabitleri varsa, bir H Hilbert uzayındaki bir $\{\varphi_n\}$ dizisine bir çatı denir.

A ve B sabitlerine çatı sınırları denir.

$A=B$ ise, o zaman (3.15) de eşitlik sağlanır. Bu durumda, çatıya genellikle kompakt çatı denir. Ancak ve ancak $A=B=1$ ise bu çatı bir ortonormal tabandır.

Tanım 3.2.6. (Çatı operatörü) $\{\varphi_n\}$, bir H Hilbert uzayında bir çatı olsun. O zaman;

$$F(f) = \langle f, \varphi_n \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}$$

olarak tanımlanan (H dan l_2 üzerine) $F: H \rightarrow l_2$ operatörü bir çatı operatörüdür.

F çatı operatörünün lineer, sınırlı ve tersinin olduğu ispatlanabilir. $\{\varphi_n\}$ çatısı ile ilişkili bir F çatı operatörünün F^* eşlenik operatörünü düşünülür. Keyfi $\{a_n\} \in l_2$ için,

$$\langle F^* \{a_n\}, f \rangle = \langle \{a_n\}, Ff \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \varphi_n, f \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n, f \right\rangle$$

elde edilir.

Bu nedenle, bir F çatı operatörünün F^* eşlenik operatörü,

$$F^* (\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \quad (3.16)$$

şeklindedir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \|F f\|^2 = \langle F^* F f, f \rangle$$

olduğu için, (3.15) eşitsizliği,

$$A I \leq F^* F \leq B I \quad (3.17)$$

olarak ifade edilebilir. Burada I birim operatördür. Bundan dolayı, $F^* F$ in bir sınırlı terse sahip olduğu açıktır.

Teorem 3.2.3. $\{\varphi_n\}$, F çatı operatörü ile ilişkili, A ve B çatı sınırları olacak biçimde bir çatı olsun. $\tilde{\varphi}_n = (F^* F)^{-1} \varphi_n$ olsun. O zaman $\{\tilde{\varphi}_n\}$, $1/B$ ve $1/A$ ile sınırlı bir çatıdır.

$\{\tilde{\varphi}_n\}$ dizisine, $\{\varphi_n\}$ nin dual çatısı denir.

İspat: Ekte yer alan Teorem (1.5) den,

$$(F^* F)^{-1} = \left((F^* F)^{-1} \right)^*$$

elde edilir.

Bundan dolayı,

$$\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle = \langle f, (F^* F)^{-1} \varphi_n \rangle = \langle (F^* F)^{-1} f, \varphi_n \rangle$$

ve o zaman;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \{\tilde{\varphi}_n\} \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle (F^*F)^{-1} f, \varphi_n \rangle|^2 \\
&= \|F(F^*F)^{-1} f\|^2 \\
&= \langle F(F^*F)^{-1} f, F(F^*F)^{-1} f \rangle \\
&= \langle (F^*F)^{-1} f, f \rangle
\end{aligned}$$

dır.

Şimdi (3.17) eşitsizliğine bakıldığında,

$$\frac{1}{B} I \leq (F^*F)^{-1} \leq \frac{1}{A} I \tag{3.18}$$

doğrulanabilir.

Bu,

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \{\tilde{\varphi}_n\} \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

ifade eder.

Bu nedenle, $\{\varphi_n\}$ nın dual çatısı $\{\tilde{\varphi}_n\}$, $\frac{1}{A}$ ve $\frac{1}{B}$ ile sınırlıdır.

$\{\tilde{\varphi}_n\}$ dizisine dual çatı denir.

(3.18) nın İspatı: Aşağıdaki sonuçlardan bulunur.

- i. T, bir Hilbert uzayı üzerinde terslenebilir bir pozitif operatör ise, o zaman tersi T^{-1} de pozitiftir.
- ii. Bazı $0 < \alpha < \beta$ için T, $\alpha I \leq T \leq \beta I$ olacak biçimde bir H Hilbert uzayı üzerinde bir pozitif operatörse, o zaman $\frac{1}{\beta} I \leq T^{-1} \leq \frac{1}{\alpha} I$ dır.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $F, \{\varphi_n\}$ çatısı ile ilişkili bir çatı operatörü ve \tilde{F} , onun dual çatısı $\{\tilde{\varphi}_n\}$ ile ilişkili çatı operatörü olsun. O zaman,

$$\tilde{F}^* F = I = F^* \tilde{F} \text{ 'dır.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} F(F^*F)^{-1} f &= \left(\langle (F^*F)^{-1} f, \varphi_n \rangle \right) = \{ \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \} \\ &= \tilde{F}f \end{aligned}$$

olduğu için,

$$\tilde{F}^* F = \left(F(F^*F)^{-1} \right)^* F = (F^*F)^{-1} F^* F = I$$

ve

$$F^* \tilde{F} = F^* F (F^*F)^{-1} = I$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4. $\{\varphi_n\}$, bir H Hilbert uzayında bir çatı ve $\{\tilde{\varphi}_n\}$ onun dual çatısı olsun. O zaman, herhangi bir $f \in H$ için,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n \quad (3.19)$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n \quad (3.20)$$

dır.

İspat: $F, \{\varphi_n\}$ çatısı ile ilişkili çatı operatörü ve $\tilde{F}, \{\tilde{\varphi}_n\}$ dual çatısı ile ilişkili çatı operatörü olsun. Yardımcı Teorem (3.2.1) den $I = \tilde{F}^* F$ olduğu için, herhangi bir $f \in H$ için, (3.16) denkleminde,

$$f = \tilde{F}^* F f = \tilde{F}^* \left(\langle f, \varphi_n \rangle \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n$$

elde edilir.

Bundan dolayı, (3.19) denklemi elde edilir. (3.20) denkleminin ispatı benzer şekildedir.

Aynı şekilde, Yardımcı Teorem (3.2.1) den $I = F^* \tilde{F}$ olduğu için, herhangi bir $f \in H$ için, (3.16) denkleminde,

$$f = F^* \tilde{F} f = F^* \left(\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n$$

elde edilir. (3.20) denklemi elde edilir.

Uyarı 3.2.3. Çatı kompakt ise, o zaman $\tilde{\varphi}_n = A^{-1} \varphi_n$ dır; öyleyse (3.20) denklemi,

$$f = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

şeklini alır.

Çatı ortonormal tabanlı ise, o zaman;

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

dır.

Tanım 3.2.7. (Riesz tabanları) Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir H Hilbert uzayında $\{\varphi_n\}$ vektörlerinin bir dizisine bir Riesz tabanı denir.

1-

$$A \|\alpha\| \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n \right\| \leq B \|\alpha\|$$

olacak biçimde $0 < A \leq B$, A ve B sabitleri vardır.

Burada,

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots)$$

dır.

2- $\{\{\varphi_n\}\} = H$ dır; yani, H, $\{\varphi_n\}$ dan yayılmıştır (uzantılıdır).

(1) koşulunu sağlayan H daki bir $\{\varphi_n\}$ dizisine Reisz dizisi denir.

Bir Reisz tabanı çatıların özel bir durumudur ve bir ortonormal taban bir Reisz tabanının özel bir durumudur. Burada $A=B=1$ dir. Bu gibi durumlarda $a_0=2$ ve $b_0=1$ özel seçimi için, $m=j$ ve $n=k$ olduğu görülebilir; yani $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ dır.

Tanım 3.2.8. $\psi_{j,k}(t)$,

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (3.21)$$

ile tanımlanan fonksiyonların ailesi ise, bir $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonu bir dalgacıktır. Burada j ve k rastgele tamsayılarıdır ve $\psi_{j,k}(t)$, $L_2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayında bir ortonormal tabandır. (3.2) dalgacık olabilme koşulu $\psi_{j,k}(t)$ altında gerekli bir koşuldur; yani, genel olarak $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ bir çatıdır ve özel olarak bir ortonormal tabandır.

Tanım 3.2.9. Bir $f \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun $d_{j,k}$ ile tanımlanan dalgacık katsayıları, f ile $\psi_{j,k}(t)$ nin iç çarpımı olarak tanımlanır; yani,

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (3.22)$$

dır.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(t) \quad (3.23)$$

serilerine f in dalgacık serileri denir.

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(t)$$

ifadesine f nin dalgacık temsili denir.

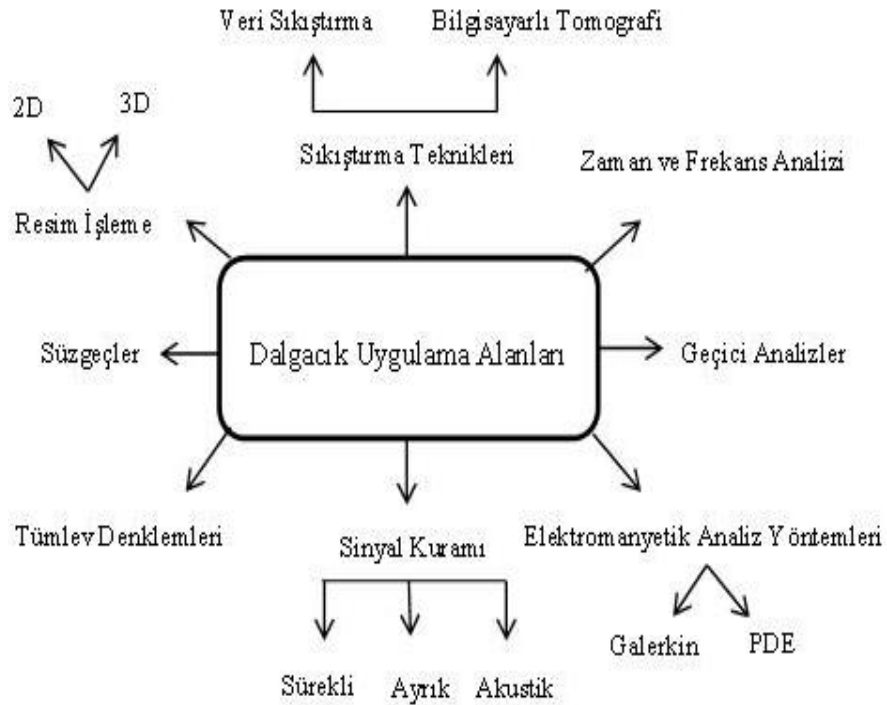
Uyarı 3.2.4.

1. $\psi_{j,k}(t)$ hızla salınım olarak (salınarak) sinyalin ince ayrıntılarını temsil etmek için daha uygundur. $d_{j,k}$ dalgacık katsayıları, j genişleme indeksi ile belirlenen bir frekansa dayalı $t=2^{-j}k$ noktasındaki dalgalanma miktarını ölçer.
2. $d_{j,k} = T_{\psi} f(2^{-j}, k2^j) = (2^{-j}, k2^j)$ noktasında ψ dalgacığına dayalı f 'in dalgacık dönüşümü.

4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

4.1. Dalgacık Dönüşümünün Uygulama Alanları

Kuantum fiziğinde, jeofizikte, elektrik-elektronik mühendisliğinin sayısal işaret işleme, biyomedikal işaret işleme, sayısal imge işleme gibi alanlardaki çalışmalar günümüzdeki imge sıkıştırma, turbülans, radar ve deprem tahmini gibi bir çok dalgacık uygulamasının geliştirilmesine yardımcı olmuştur (Arısoy, 2003; Kocaman, 2003).



Şekil 4.1. Dalgacık dönüşümünün uygulama alanları

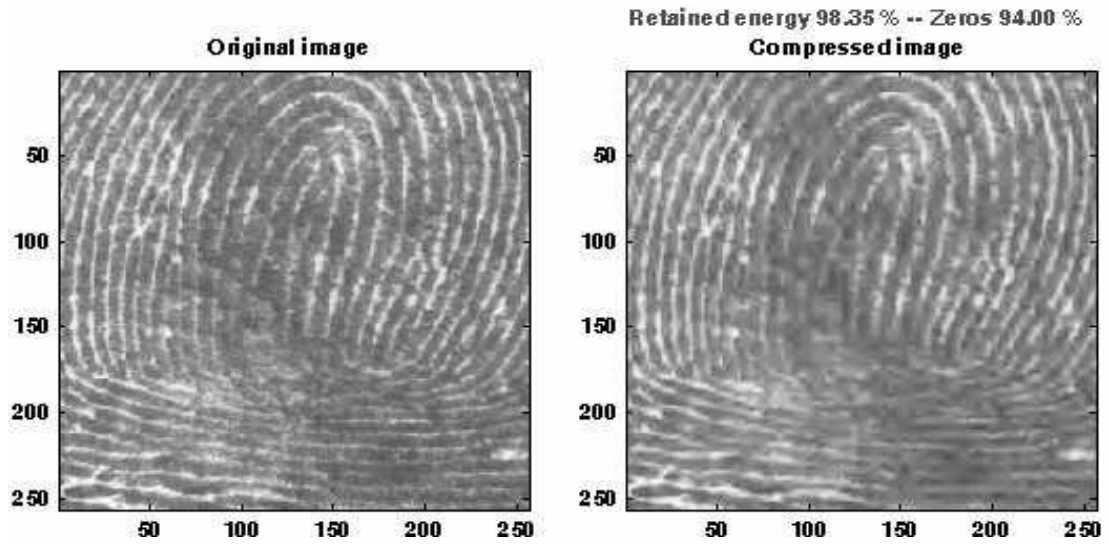
Sinyaller (İşaretler) bir dalgacık analizi için her zaman verilerdir. Dalgacık dönüşümü, farklı pencereleme fonksiyonları ve asimetric dalgacıklar için kullandığından sinyali (işareti) tam olarak betimleyebilmektedir. Böylece işaret hakkında ayrıntılı bilgiye sahip olunmaktadır. Elde edilen dalgacık katsayıları kesin sonuçlar elde etmek için çeşitli şekillerde manipüle edilebilir.

Dalgacık teorisi,

- Sinyal işleme
- Veri sıkıştırma
- Görüntü işleme ve görüntü düzgünlüğü
- Parmak izi doğrulama
- İnsan yüzü tanıma
- Ses tanıma
- Nükleer mühendislik
- Alt-band kodlama
- Müzik
- Manyetik rezonans (MR) görüntüleme
- Belge analizi
- Gürültü giderme
- Nörofizyoloji
- Karakter özellikleri tanıma. Örneğin, el yazısı.
- Doku analizi ve sınıflandırması
- Haberleşme
- DNA analizi, protein analizi
- Kan basıncı, kalp hızı ve EKG analizleri
- Finans
- Hizmet boyutu tasarımı için internet trafiğini tarifte
- Dişli tekerleğin endüstriyel denetimi
- Hareket algılama ve izleme
- Nesnelerin şekillerini tanıma
- Konuşma tanıma
- Bilgisayar grafikleri ve çoklu fraktal analizi
- Astronomi
- Deprem tahmini
- Teorik matematik uygulamaları
- Radar
- Deniz tabanı veya okyanus tabanı topografyasını analizi
- Jeofizik

- Meteoroloji çalışmaları
- Moleküler dinamiği, astrofizik, optik, türbülans ve kuantum mekaniği de dahil olmak üzere fiziğin birçok alanında kullanılır.

Ronald Coifman ve Victor Wickerhauser tarafından geliştirilen açık bir algoritma ile, hızlı bir şekilde elde edilen en ekonomik transkripsiyon bulmak için sinyal temsilleri muazzam bir dizi ile çok hızlı bir şekilde bilgisayarda arama yapmak mümkün olmuştur. Örneğin, milyonlarca parmak izine sahip FBI, arama yeteneklerini geliştirmek için parmak izlerini dijital ortama aktarmak zorundadır. FBI (2010), parmak izi görüntülerini sıkıştırmak için bir gri dalgacık/skaler nicemleme (WSQ) algoritması kullanır. SDD'nin ölçek ve öteleme parametrelerinin diyatik seçilmesi ana fonksiyonu seyrekleştirir. Bu seyrekleştirme, dalgacığı veri sıkıştırmada çok kullanışlı yapar. FBI sayısal parmak izi sıkıştırmada dalgacık kullanımını standartlaştırılmıştır. Hızlı Fourier dönüşümünde hesap sayısı $n \log n$ iken Hızlı dalgacık dönüşümünde bu sayı n 'e kadar düşer. Ayrıca bu gelişme ile FBI, 20 terabayt içine 200 terabaytlık bir parmak izi veri tabanı sıkıştırarak, iletim ve depolama maliyetinde milyonlarca dolar tasarruf sağlamıştır.



Şekil 4.2. Bir parmak izinin dalgacık dönüşümü ile sıkıştırılması (Misiti, 2003)

Dalgacık analizi geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Uygulama alanları bilimden tıpa, mühendislikten finansa kadar farklılık gösterir. Sinyal işleme, görüntü analizi, iletişim sistemi, biyomedikal görüntüleme, radar, hava akustiği, teorik

matematik, kontrol sistemleri gibi birçok sayısız alan ve uygulamalarda kullanılmaktadır.

Ingrid Daubechies, Mallat'ın çalışmaları ışığında ortonormal dalgacık serilerini ortaya atarak günümüzdeki birçok uygulamaya temel teşkil etmiştir. Bu uygulamalardan bazı örnekler bu bölümde özetlenecektir.

4.2. Literatür Taraması

Mallat ve Hwang (1991), çalışmalarında dalgacık dönüşümü maksimumunun bir analizi sayesinde gürültü ve sinyal tekilliklerinin ayrımı ile beyaz gürültüleri kaldıracak bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu matematiksel çalışma, fizik alanında gözlenen multifraktal yapılar olmak üzere düzensiz sinyallerin tekilliklerini tanımlamak için algoritmalar sağlamıştır.

1996 yılında Kuo ve Chuang, çalışmalarında dalgacık dönüşümü kullanarak etkili hesaplanabilir ve çoklu analiz yeteneğine sahip bir düzlemsel eğri tanımlayıcısı geliştirmişlerdir. Bir hiyerarşik düzlemsel eğri tanımlayıcısı, ince ölçekli bileşenler yerel ayrıntılı bilgileri içerirken kaba ölçekli bileşenler küresel yaklaşım bilgisini taşıyacak şekilde eğriyi farklı ölçek bileşenlerine ayırıştırır.

Lai, Yuen ve Fang (1999), çalışmalarında bütünsel yüz temsili için dalgacık dönüşümü ve Fourier dönüşümünü birleştiren spectroface adı verilen yeni bir yöntemi sunmuşlar dalgacık dönüşümü kullanarak bir yüz görüntüsü ayırştırmış ve düşük frekanslı yüz görüntülerinin yüz ifadesi değişimlerine daha az duyarlı olduğunu göstermiştir. Çalışma sonucunda önerilen sistemin tanıma doğruluğu %94 üzerinde bulunmuştur.

2001 yılında Haşiloğlu, Brodatz albümünden alınan 16 adet doku örneği ile yapılan çalışmada dalgacık dönüşümünde değişik dalgacıklar kullanarak dalgacık türünün sınıflandırma performansı üzerindeki etkisini araştırmıştır. Bu çalışmada en yüksek sınıflandırma performansı Haar dalgacık ile elde edilmiştir.

Sinha ve ark. (2005), çalışmalarında sürekli dalgacık dönüşümü kullanarak durağan olmayan sismik sinyaller için bir zaman-frekans harita hesaplaması için yeni bir yöntem sunmuşlardır.

2007 yılında Makeyev ve ark., çalışmalarında sınırlı alıcı alanı (LIAR) sinir sınıflandırıcı ve sürekli dalgacık dönüşümüne dayalı bir ses tanıma tekniği önermişlerdir. Önerilen teknik, ses örneklerinin skalogramlarına bir LIRA-tabanlı görüntü tanıma sistemi uygulayarak çalışır.

Özdemir ve Artıklar (2007), çalışmalarında dalgacık dönüşümü yöntemine dayalı olarak geliştirdikleri bir yüz tanıma yönteminin, içerisinde çok sayıda insan yüzü resimleri bulunan bir veri tabanı üzerine uygulanmasını incelemişlerdir.

2007 yılında Raju ve Revathy, çalışmalarında izole edilmiş el yazısı Malayalam (güney Hint dillerinden biri) karakterlerinin tanınması için dalgacık paket dönüşümü uygulanmıştır. Karakter tanıma için dalgacık katsayısının sıfır geçiş özelliği kullanılmıştır. Çalışma sonucu sınıflandırma ve tanımda doğruluk %90 bulunmuştur.

Murtagh ve Starck (2008), bu çalışmada, görüntü sınıflandırma için çoklu çözünürlük dönüşümünün katsayılarının ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden momentleri değerlendirilmiştir. Analizi yöntemi olarak, görüntü türleri, çoklu çözünürlük dönüşümleri ve ölçekler veya bantlardaki katsayıların momentleri dikkate alınmış, bunun yanı sıra uyum analizi de kullanılmıştır.

2008 yılında Kumar ve ark., çalışmalarında dalgacık dönüşüm görüntüleri üzerinde morfolojik ve istatistiksel işlem kombinasyonlarına dayalı bir segmentasyon düzeni tanıtılmıştır. Dalgacık dönüşümü kullanılan bu yöntem Brodatz dokuları üzerine uygulanmıştır ve iyi bir segmentasyon sonuçlanmıştır.

Madan, Singh ve Jain (2009), çalışmalarında Daubechies dalgacığını, bir alçak geçiren filtre uygulayarak ayırık örneklenmiş bir sinyalden gürültü filtrelemek için kullanılmıştır.

2010 yılında Tuna, makalesinde VOIP uygulamaları için en uygun genel eşikli ayırık dalgacık dönüşümü kullanılarak basit ve etkili bir ses sıkıştırma yöntemi sunmaktadır.

FBI (2010), WSQ Gray-Scale Fingerprint Image Compression Specification isimli çalışmalarında gri skala parmak izi görüntülerini sıkıştırma için bir dalgacık/skaler nicemleme (WSQ) algoritması kullanmıştır.

2011 yılında Hanbay ve Şengür, çalışmalarında dalgacık dönüşümü ve nötrozofik küme yaklaşımı ile renkli doku görüntülerinin bölütlemesi gerçekleştirmişlerdir. Yapılan deneysel çalışmaların sonuçları önerilen metodun verimli bir şekilde görüntü bölütlemeyi gerçekleştirebildiğini göstermiştir.

Parekh ve Saha (2011), çalışmalarında yüksek tanıma doğruluk, en az eğitim ve sınıflandırma zamanı ile otomatik el yazısı karakter tanıma sistemi geliştirmiştir. Bu önerilen algoritmada, bir sınıflandırıcı olarak özellik çıkarma ve çok katmanlı BP sinir ağı için dalgacık dönüşümüne dayalı el yazısı karakter tanıma için yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

2011 yılında Ceylan, Özbay ve Uçan, çalışmalarında akciğer bölgesinin bölütlenmesi için yeni bir yaklaşım olan karmaşık değerli sınıflayıcıların 3 tipini karşılaştırmışlardır. Bunlar; karmaşık- değerli yapay sinir ağı (KDYSA), karmaşık- değerli dalgacık yapay sinir ağı (KDDYSA) ve karmaşık dalgacık dönüşümü (KDD) ile kombine edilmiş KDYSA dır. Bu yapılar Akciğer Görüntüsü Veritabanı Konsorsiyumundan alınan görüntüler kullanılarak test edilmiştir. Çalışma sonucunda karşılaşılan en çarpıcı sonuç KDD-KDYSA yapısıyla elde edilmiştir ve test görüntüleri % 100 doğruluk ile bölütlenmiştir.

Patel, Som ve Singh (2012), çalışmalarında, Ayrık dalgacık dönüşümü ve Öklid mesafe metrik (EDM) ile çoklu çözünürlük tekniği kullanılarak el yazısı İngilizce karakter tanıma ile ilgili yeni bir yaklaşım tanıtmışlardır. Tanınmayan karakterler için bu yeni tekniği kullanılmıştır ve çok iyi bir tanıma performansı elde etmişlerdir.

4.3. Dalgacık Dönüşümünün Etkinliği Üzerine Uygulamalar

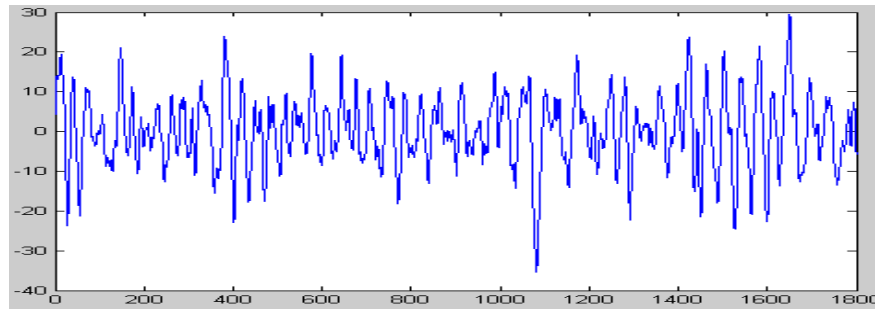
Tıbbi teşhis ve araştırmalarda kullanılan EEG işaretleri, beynin sinirsel faaliyeti sonucu elde edilen biyoelektriksel işaretler olup frekans bileşenleri son derece önemlidir. Bu işaretlerde beynin fonksiyonları ile ilgili çok miktarda bilgi saklıdır. Bu bilgilerin kullanılabilmesi için sinyal işleyicileri çok çeşitli araştırmalar

yapmaktadır. Nörologlar sağlıklı bir insanın biyoelektriksel işaretini referans olarak bu referanstan sapmaları patolojik belirti olarak kabul etmektedirler. Bazı patolojik bilgiler zaman alanında fark edilmeyebilir. Nörologlar özellikle zaman alanına göre teşhis yapmaktadırlar. Son zamanlarda EEG işaretleri sadece zaman alanında değil de frekans alanında da incelenmeye başlanmış ve bilgisayarların gelişmesiyle çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Bu algoritmalar yardımıyla teşhis ve analizler değişik yorumlamaları ortaya çıkarmıştır.

4.3.1. EEG verilerine bir boyutlu dalgacık dönüşümü ve Fourier dönüşümü uygulaması

Bu çalışmada, geleneksel işaret işlemede kullanılan Fourier dönüşümünün bazı yetersizliklerinin ortadan kaldırmak amaçlı ortaya çıkan dalgacık dönüşümünün etkinliğini tespit etmek için bir boyutlu medikal sinyallerden Elektroensefalografi (EEG) verisi üzerine bir uygulama yapılmıştır. Medikal sinyallerden EEG verisine bir boyutlu dalgacık dönüşümü uygulanıp elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Bu amaçla uygulamada kullanılan EEG verileri Kocaeli Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Projesi kapsamında devam eden 2010/003 nolu EEG Sinyallerinin Spektral Analizinde Dalgacık ve Fourier Dönüşümleri isimli BAP projesinden alınmıştır (Sevindir ve diğ., 2010). Kullanılan EEG verilerine matlab paket programında uygun kodlar yazılarak sonuçlar elde edilmiştir.

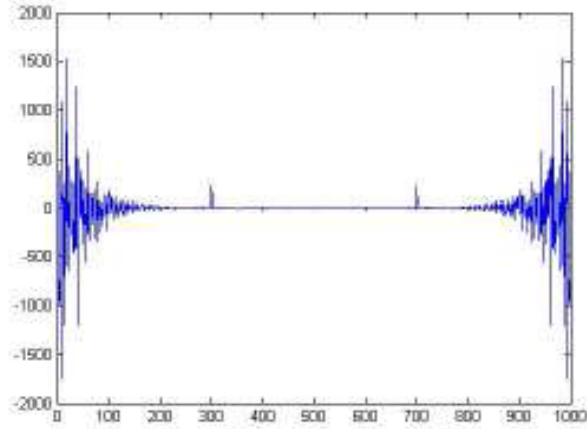
İlk önce bir boyutlu EEG verisinin grafiği Şekil 4.3'te görülmektedir.



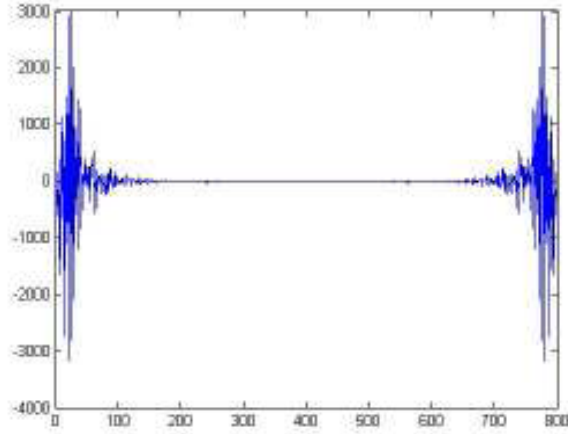
Şekil 4.3. Bir boyutlu bir EEG verisi

Sırasıyla Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6 tıp fakültesinden alınan EEG verilerinden epilepsi nöbeti geçirmeyen (S1), tekli epilepsi nöbeti geçiren (S2), çoklu epilepsi nöbeti geçiren (S3) hastaların sinyallerine uygulanan Fourier dönüşümlerini göstermektedir.

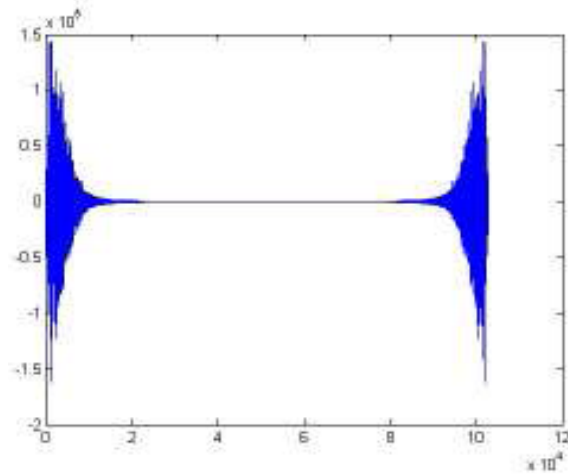
EEG sinyallerinin Fourier dönüşümleri Şekil 4.4, 4.5 ve 4.6'da gösterilmektedir.



Şekil 4.4. S1 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması



Şekil 4.5. S2 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması



Şekil 4.6. S3 sinyaline Fourier dönüşümünün uygulanması

Şekil 4.4'de bu \pm ve μ frekans bantlarında anormal genlik olan birçok pikler olduğu görülmektedir. Bu pikler epilepsi, tümörler ve travmalar gibi bir patolojik durumu gösterebilir. Bu iki şekilde, baskın frekansın farkı kolayca görülebilir. Fourier dönüşümü kullanarak bu sinyalin içerdiği frekans bileşenlerinin tahmin edilebilir olduğu anlamına gelir.

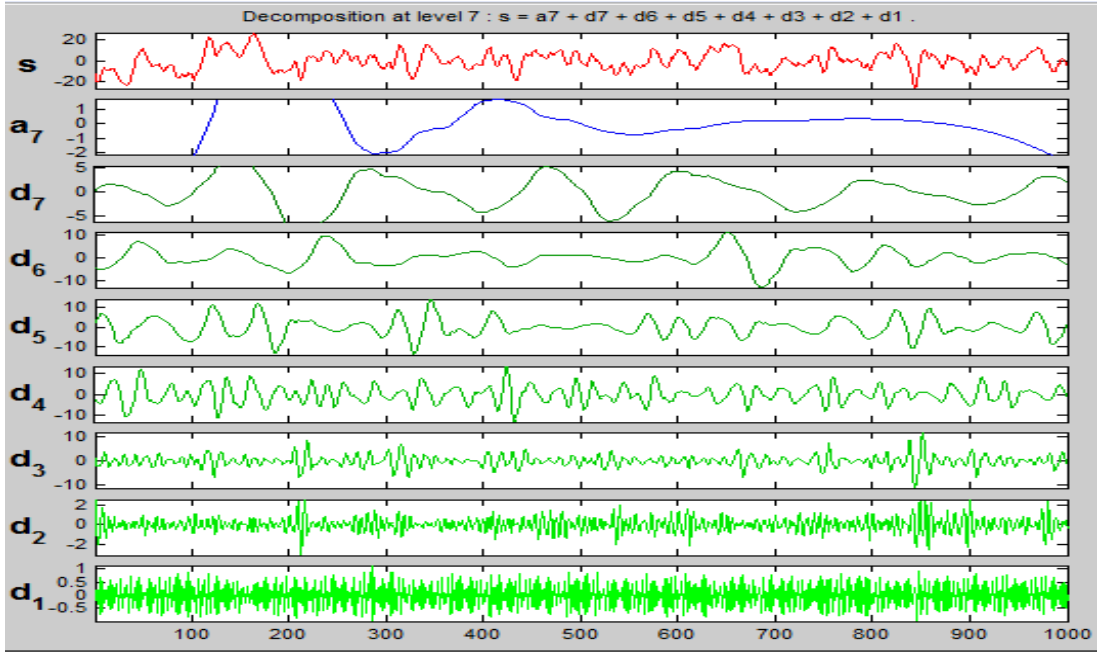
EEG sinyallerine FD algoritması uygulanıp yüksek bir frekans çözünürlüğü elde edilmek istenirse, spektral bileşenlerinde oldukça büyük ölçüde istatistiksel hata meydana gelir. Normal kişilerden alınan kayıtlar arasında büyük farklar olması bu yöntemle yeteri kadar bilgi elde edilememesine neden olurlar. EEG de bazı patolojik bilgiler çok kısa bir sürede ortaya çıkabilirler. Bu nedenlerden dolayı Fourier Dönüşüm tekniği EEG analizinde iyi bir yöntem değildir.

Fourier analizinin bazı özel spektral bileşenlerin hangi zaman aralığında gerçekleştiğini gösteremediği için zaman- frekans analizi olan Dalgacık Dönüşüm yöntemi kullanılabilir. Ayrıca ADD yöntemi kullanılarak analiz edilecek sinyal, filtrelerle alt frekanslara ayrıştırılarak ayrıntı ve detay kısımları verilerek değişik bir teşhis açısı sağlanır.

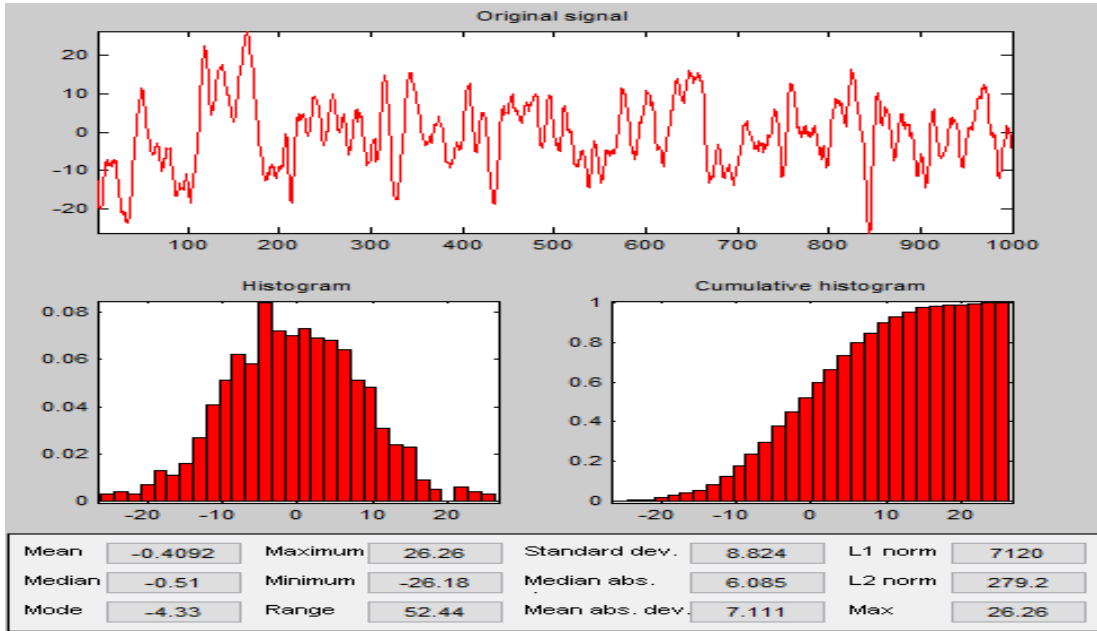
Bazı veriler için dalgacık dönüşüm histogramları ve dalgacık dönüşüm uygulamaları Şekil 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 ve 4.12'de görülebilir. Sırasıyla Şekil 4.7, Şekil 4.9, Şekil 4.11 tıp fakültesinden alınan EEG verilerinden epilepsi nöbeti geçirmeyen (S1), tekli epilepsi nöbeti geçiren (S2), çoklu epilepsi nöbeti geçiren (S3) hastaların bir kanallarına uygulanan 7. seviyedeki db4 dalgacık dönüşümlerini göstermektedir. Bu dönüşüm sayesinde EEG sinyali her bir seviyede detaylı olarak incelenebilir. Bu şekillere dikkat edilirse sinyal yaklaşım ve detay katsayılarına ayrıştırılmıştır. Bu ayrışım ikiye bölme algoritması sayesinde gerçekleştirilmiştir. Sinyal ilk etapta detay (d1) ve yaklaşım (a1) katsayılarına ayrıştırılmıştır. Daha sonra yaklaşım (a1) katsayısı tekrar ikiye bölünerek detay (d2) ve yaklaşım (a2) katsayılarına ayrışır. Bu ayrışım kaçınıcı seviyeye kadar devam etmek istiyorsak o seviyeye kadar devam eder. Şekillerimizde 7. seviyeye kadar olan sinyaller görülmektedir. Yani (d1)-(d7) ve (a7) katsayılarındaki sinyaller görülmektedir.

Şekil 4.8, Şekil 4.10, Şekil 4.12 tıp fakültesinden alınan EEG verilerinden epilepsi nöbeti geçirmeyen, tekli epilepsi nöbeti geçiren, çoklu epilepsi nöbeti geçiren

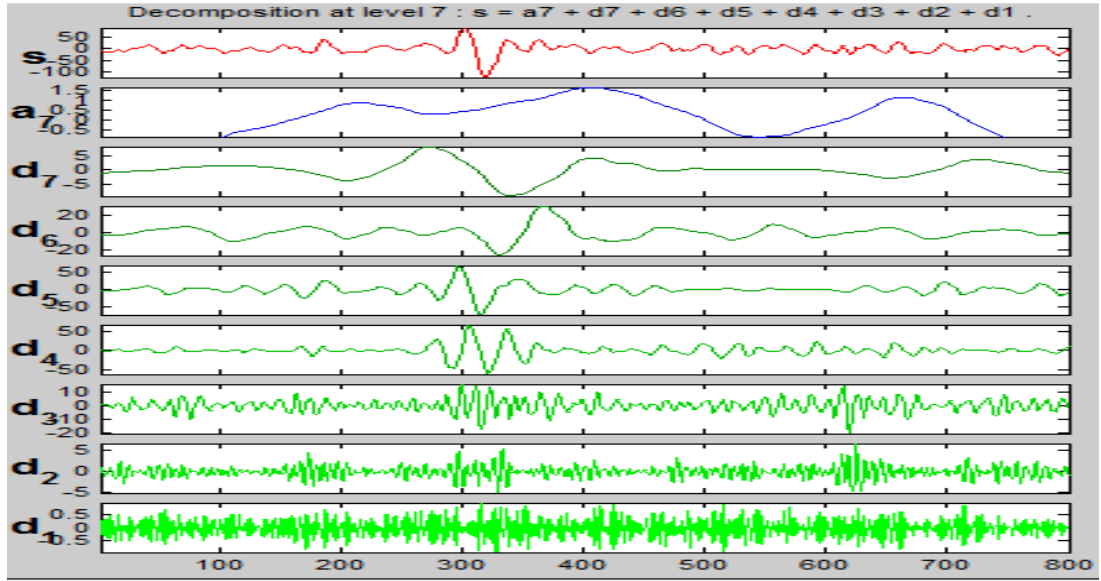
hastaların bir kanallarına db4 dalgacık dönüşümü uygulandıktan sonraki histogramlarını göstermektedir. Bu histogramlar sayesinde EEG sinyalinin parametrik değerleri hakkında bilgi sahibi olunabilir.



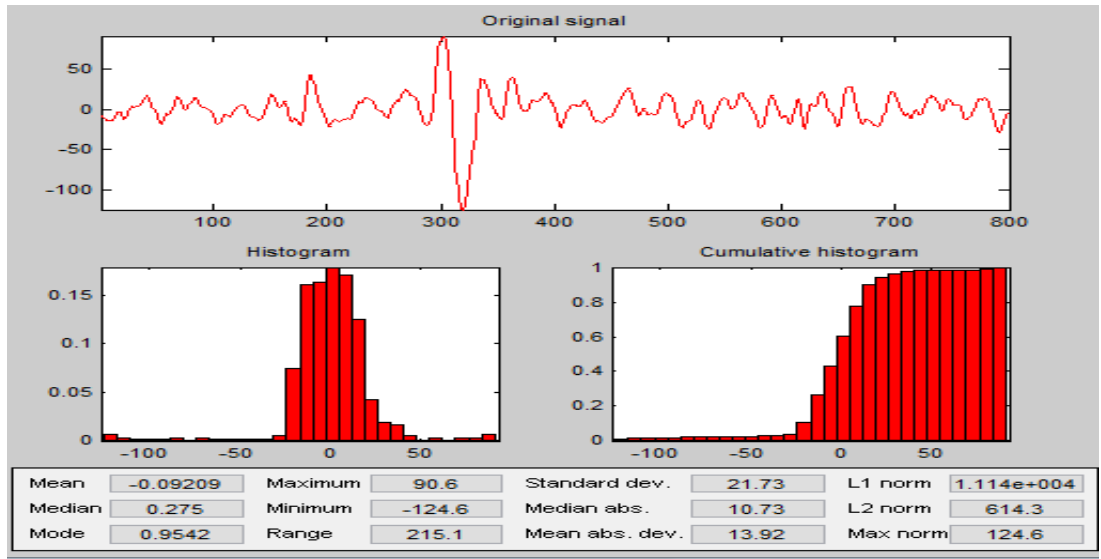
Şekil 4.7. S1 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması



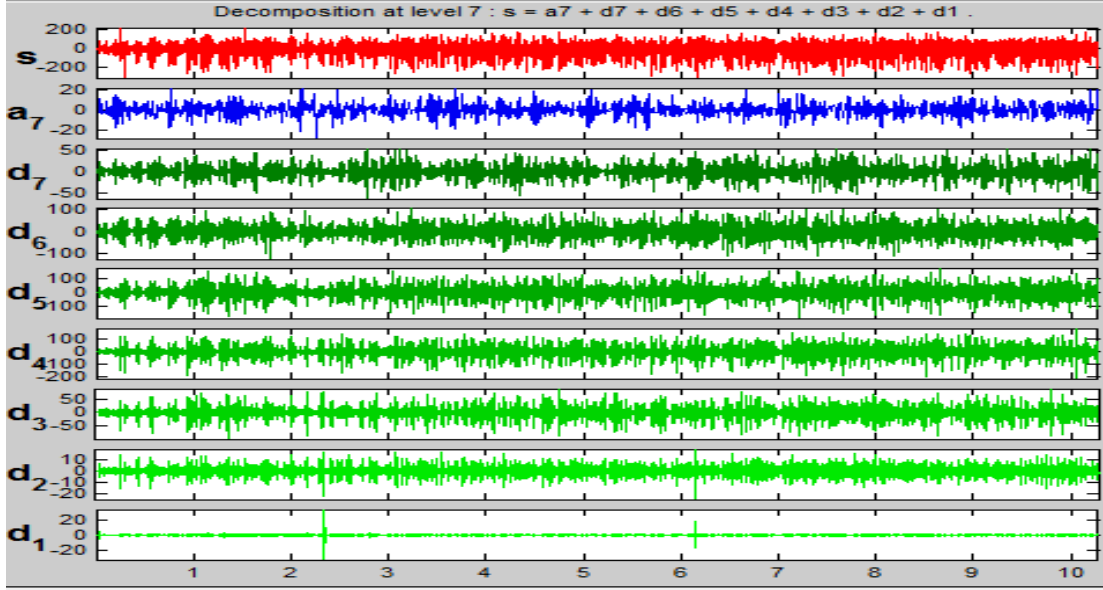
Şekil 4.8. S1 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı



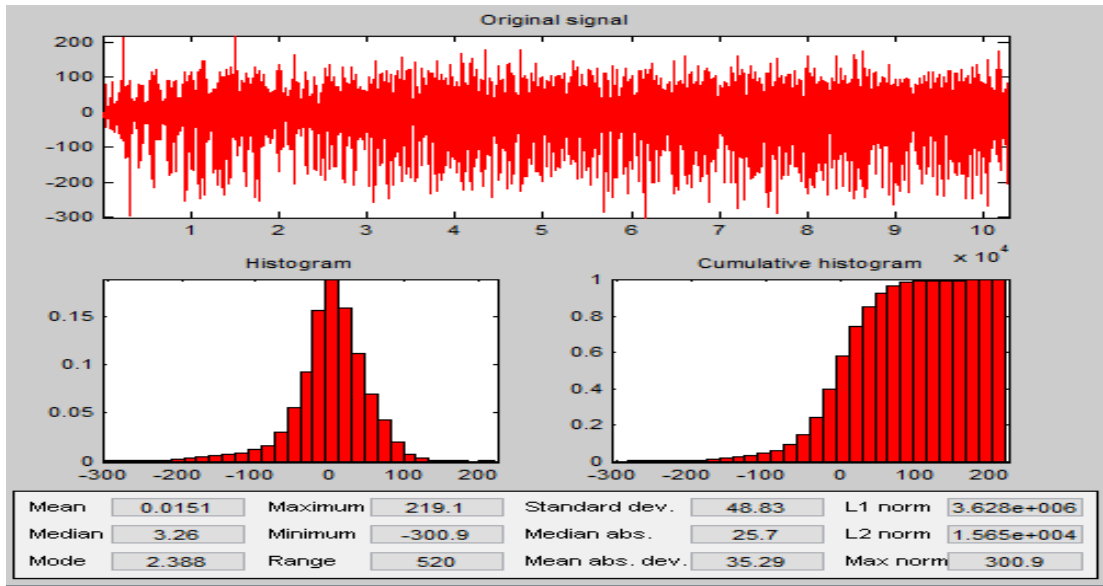
Şekil 4.9. S2 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması



Şekil 4.10. S2 hastasının EEG bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı



Şekil 4.11. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulanması



Şekil 4.12. S3 hastasının EEG verisinin bir kanalına 7. seviyede db4 dalgacık dönüşümünün uygulandıktan sonraki histogramı

Bu bölümde, epileptik hastanın frekanslarının farklı bantlarına karşılık gelen bağlı dalgacık enerji katsayıları hesaplanır ve MATLAB kullanarak epilepsiye sahip 2 hastanın ve epilepsiye sahip olmayan bir kişinin bağlı enerji dağılımları karşılaştırılır.

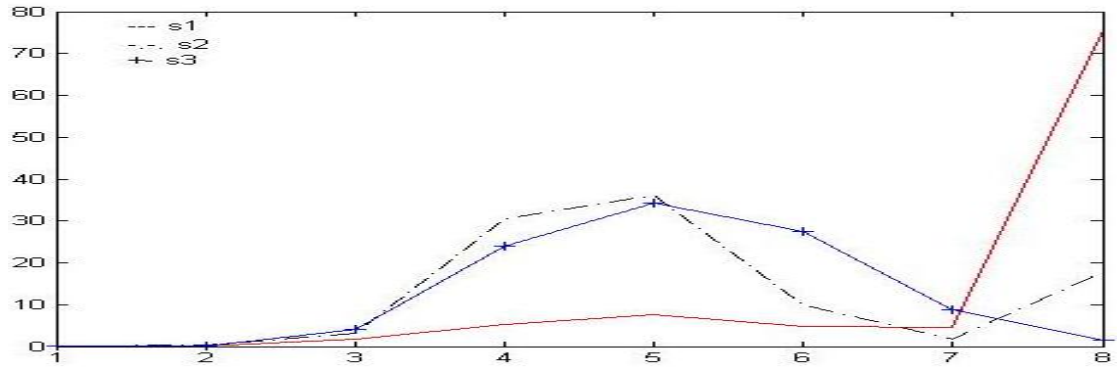
Tablo 4.1 incelenirse S1, S2 ve S3 hastalarının EEG verisinin bir kanalına db4 dalgacık dönüşümü uygulandıktan sonra her bir seviyedeki enerji katsayıları görülmektedir. Bu katsayıları dikkat edersek (d1)-(d7) arasında birbirine yakın

değerler görülmektedir. Fakat (a7) değeri dikkatle incelenirse aradaki farkın oldukça büyük olduğu görülmektedir. Yani nöbet geçirmeyen bir hastanın (a7) değeri oldukça yüksek iken, tekli nöbet geçiren hastada düşük çıkmış, çoklu nöbet gösteren bir hastada ise oldukça düşük çıkmıştır. Bu değer incelenerek hastanın nöbet geçirme durumu hakkında yorum yapılabilir. Bu durum Şekil 4.13'de çok net bir şekilde görülmektedir.

Tablo 4.1. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayıları

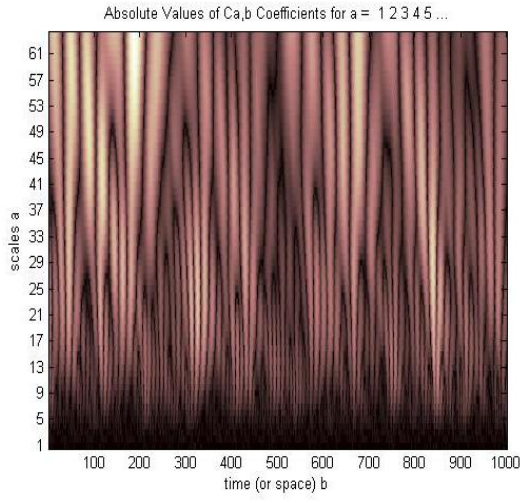
	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	a7
S1	0.0672	0.1789	1.8362	5.3261	7.6873	4.8232	4.4783	75.6027
S2	0.0211	0.3198	3.1970	50.5837	36.1856	9.9477	1.7802	17.9649
S3	0.0049	0.1459	4.0375	23.8916	34.3125	27.4314	8.7653	1.4108

Şekil 4.13'de, S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayıları görülmektedir.

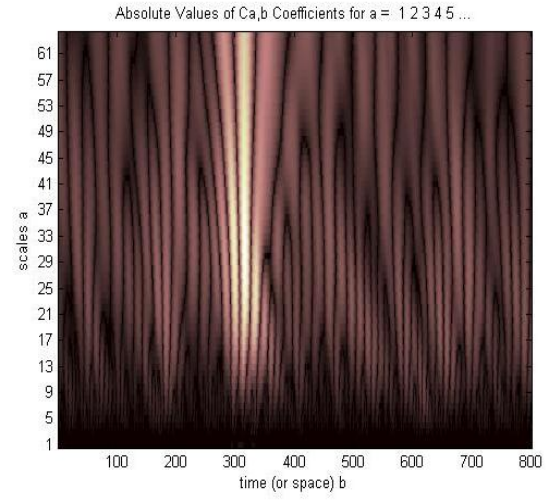


Şekil 4.13. S1, S2 ve S3 hastalarının her bir seviyedeki enerji katsayılarının karşılaştırılması

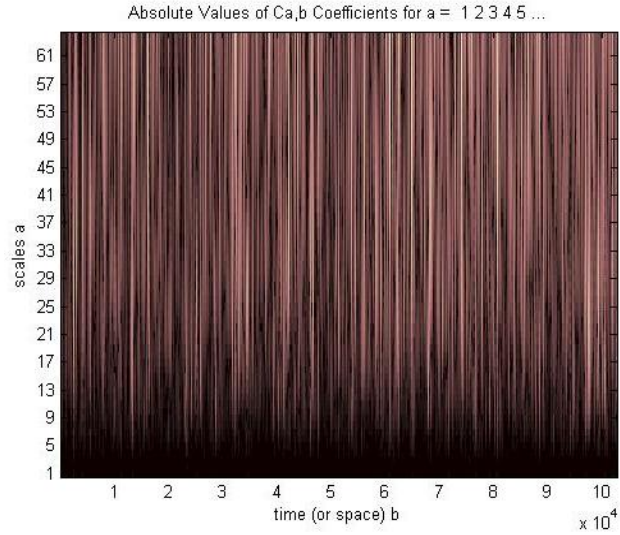
Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 aynı hastaların sırasıyla 2-boyutlu ve 3-boyutlu skalogramlarını göstermektedir. Bu skalogramlar da yine nöbet geçirmeyen hastalarla tekli nöbet geçiren ve çoklu nöbet geçiren hastaların ayrımı açısından oldukça önemlidir. Şekillerdeki sivrilikler ayrım açısından önemlidir. Skalogramlar yersel olarak daha net bilgi verdikleri için bu ayrışmaları yapmaya olanak sağlamaktadırlar.



(a)

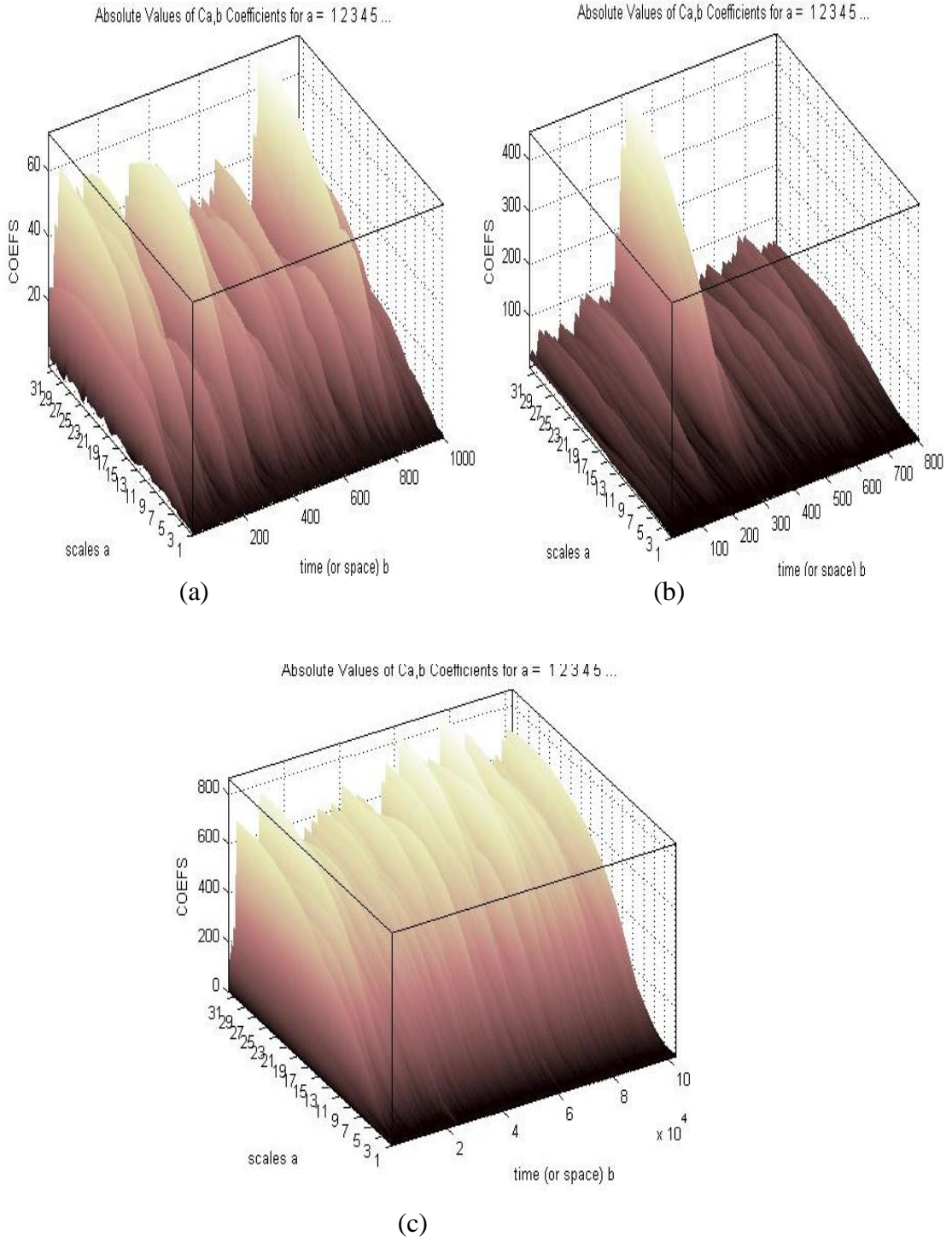


(b)



(c)

Şekil 4.14. (a) S1 hastasının, (b) S2 hastasının ve (c) S3 hastasının 2-boyutlu skalogramları



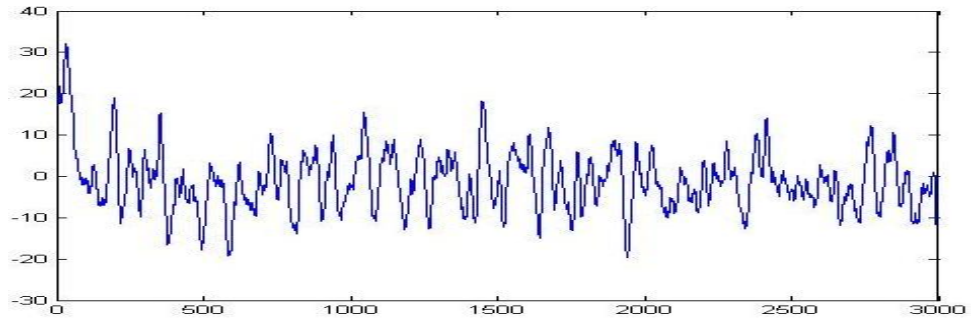
Şekil 4.15. (a) S1 hastasının, (b) S2 hastasının ve (c) S3 hastasının 3-boyutlu skalogramları

4.3.2. EEG verilerine bir boyutlu dalgacık dönüşümü ve KZFD uygulaması

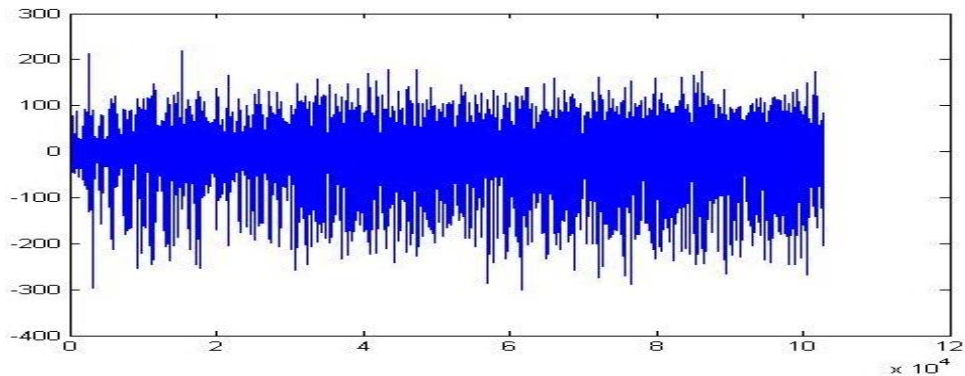
Bu çalışmada EEG işaretlerine, dalgacık dönüşümü ve kısa zamanlı Fourier dönüşüm yöntemi uygulanıp elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Bu amaçla uygulamada kullanılan EEG verileri Kocaeli Üniversitesi Tıp Fakültesinden alınmıştır. Kullanılan EEG verilerine matlab paket programında uygun kodlar yazılarak sonuçlar elde edilmiştir.

Analizdeki verilerden 2 örnek üzerinde detaylar görülebilir. Bu örneklerden biri sağlıklı diğeri ise hasta bir kişiye aittir. EEG verileri 8 kanal üzerinden çekim içermektedir. Bu kanalların her biri için tetkikler yapılmış olup çalışmada sadece bir kanala ait fonksiyon için bu iki dönüşüm uygulanıp karşılaştırılmıştır.

İlk önce bir boyutlu EEG verisinin grafiği Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’de görülmektedir.

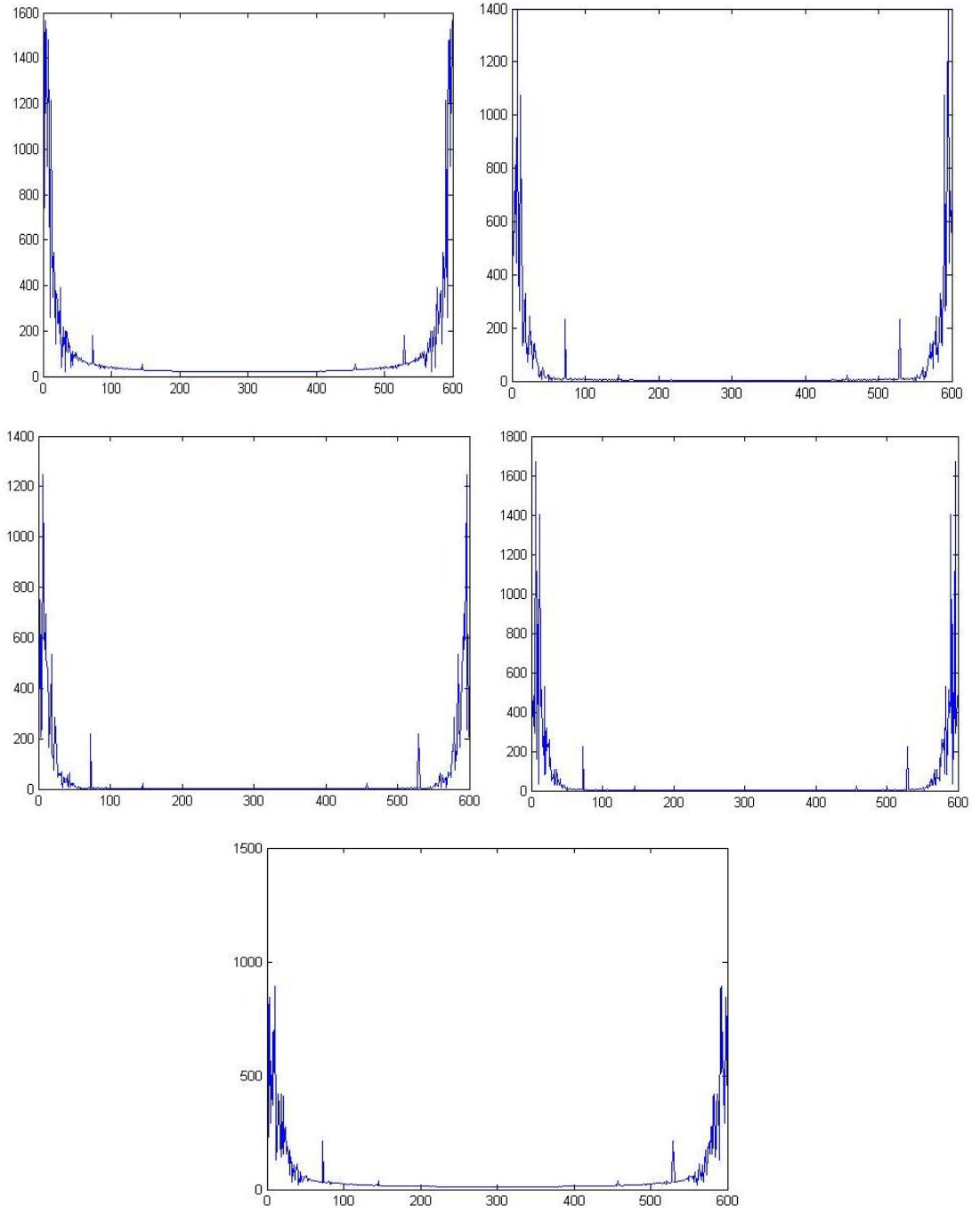


Şekil 4.16. 9 yaşında sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işareti



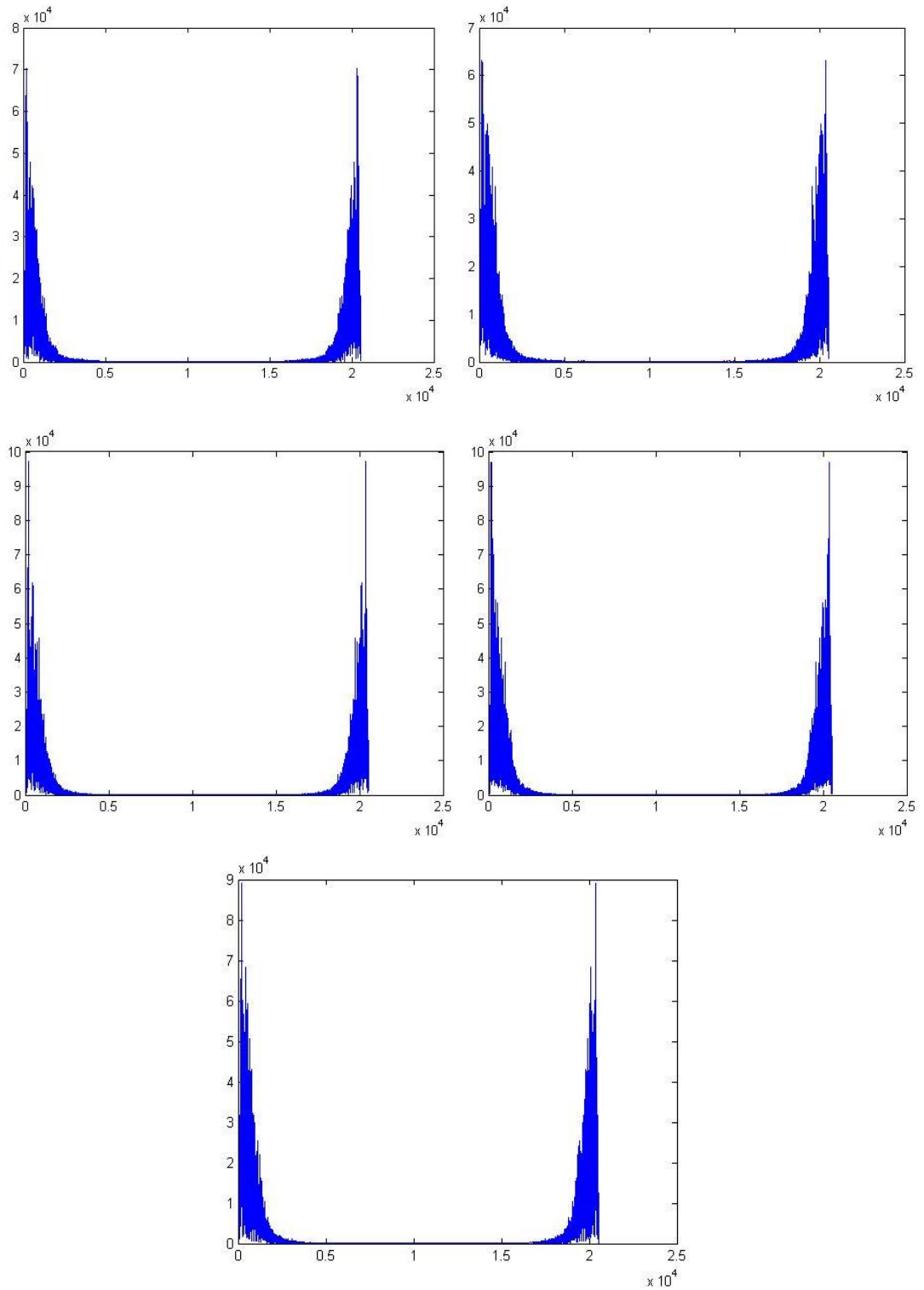
Şekil 4.17. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan bir EEG işareti

Şekil 4.18’de, 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG sinyalinin analizi, kısa zamanlı Fourier dönüşüm yöntemi ile gösterilmiştir.



Şekil 4.18. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretine kısa zamanlı Fourier dönüşümünün 5 pencerede uygulanması

Şekil 4.19'te, Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretine 5 pencerede uygulanan kısa zamanlı Fourier dönüşümü gösterilmiştir.



Şekil 4.19. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretine kısa zamanlı Fourier dönüşümünün 5 pencerede uygulanması

Beynin aktivitesini gösteren EEG işaretleri durağan olmayan bir yapıya sahiptirler ve bazı durumlarda istenilen özel spektrum bileşenleri herhangi bir anda ortaya

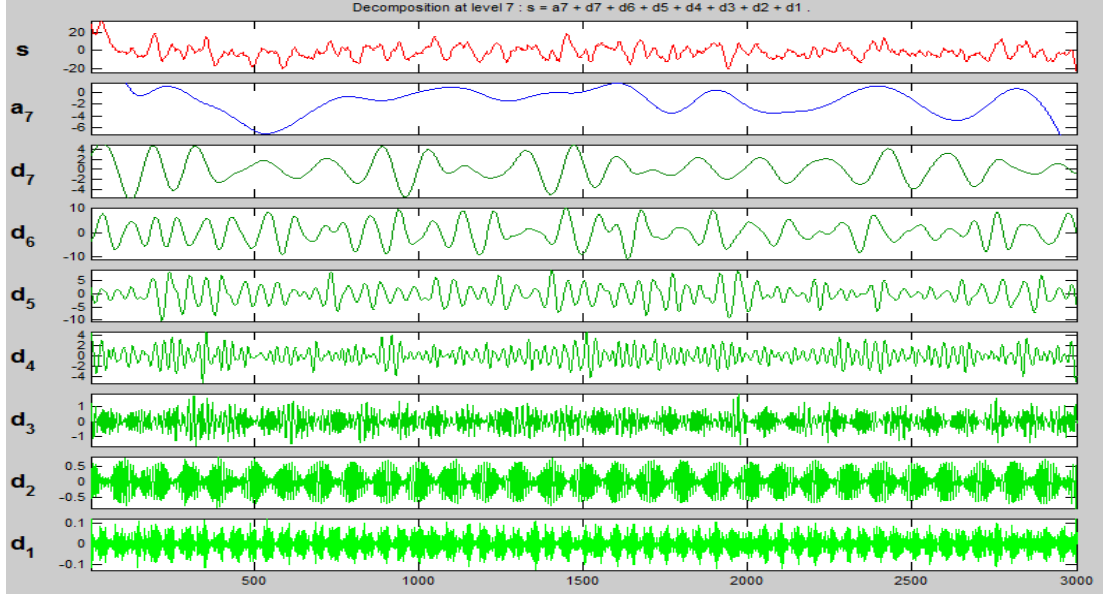
çıkabilir. Örneğin beynin şiddetli bir ışığın aniden yanmasına tepkisi veya bazı patolojik bilgilerin bir anda oluşabilmesi gibi. Bu gibi durumlarda zaman-frekans analizi daha iyi sonuçlar elde edilmesini sağlar. Durağan olmayan sinyallerin analizinde sinyalin belirli bir kesmini durağan kabul ederek inceleme yapılabilir. Kısa zamanlı Fourier dönüşüm yöntemi Fourier dönüşümünün pencerelemiş versiyonu olup bu yöntemde pencere fonksiyonu seçilir ve bu pencerenin genişliği analiz edilecek sinyaldeki durağanlığın geçerli olduğu segmente eşit olmalıdır. Bu yöntem sinyaldeki mevcut frekans bileşenlerinin yanında bu bileşenlerin hangi zamanda olduğunu gösterebilmektedir.

KZFD analizinde elde edilen analiz sonuçlarına göre pencere fonksiyonu dar seçilirse zaman çözünürlüğü daha iyi olmakta, fakat frekans çözünürlüğü zayıf olmaktadır. Geniş pencerede ise iyi bir frekans çözünürlüğü elde edilmesine rağmen zayıf bir zaman çözünürlüğü ortaya çıkmaktadır.

KZFD analizinde aynı anda hem iyi bir zaman çözünürlüğü hem de iyi bir frekans çözünürlüğü elde edilemez. Çünkü pencere genişliği analiz boyunca sabittir. Birçok işaret daha esnek yaklaşımlara, yani zaman ve frekans hakkında daha çok bilgi alabilmek için değişebilen pencereleme tekniklerine ihtiyaç duymaktadır. Çözünürlük problemi Dalgacık analizinde pencere genişliği değiştirilebildiği için kaldırılabilir. Buna göre bu analizde pencere yerine geçen dalgacık fonksiyonunun genişliği, yani ölçeği, analiz boyunca sürekli değiştiği için düşük ölçekler yüksek frekans çözünürlüğüne, yüksek ölçekler ise yüksek zaman çözünürlüğüne karşılık gelmektedir.

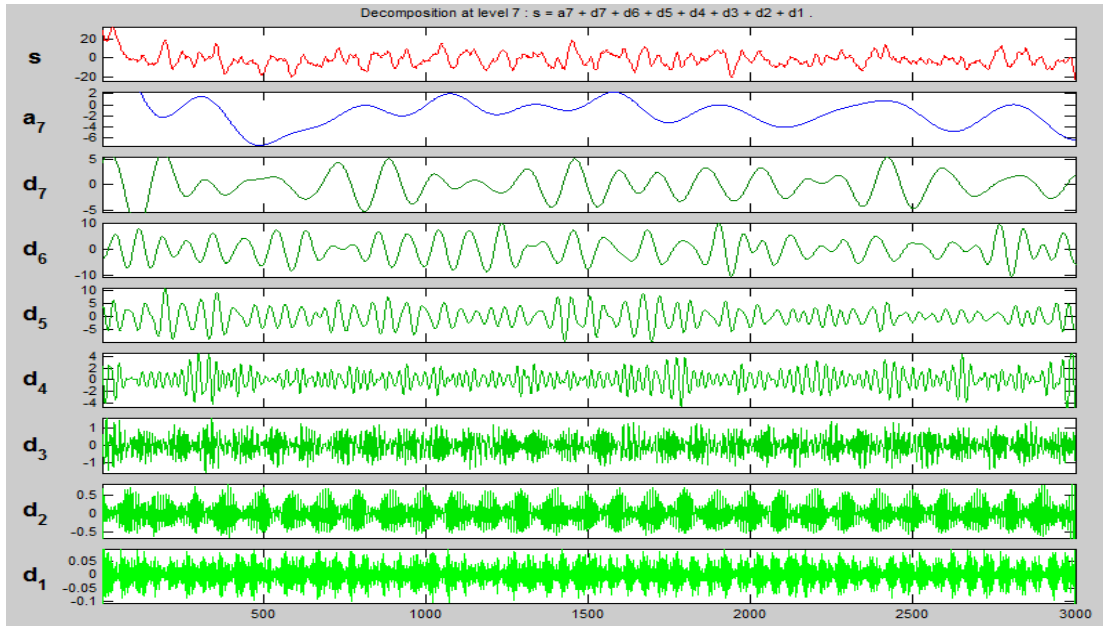
Bu veriler için dalgacık dönüşüm uygulamaları Şekil 4.20, Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23'de görülebilir.

İlk önce, 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG sinyaline Daubechies dalgacığ alınarak yapılan Dalgacık dönüşümü Şekil 4.20'de gösterilmiştir.



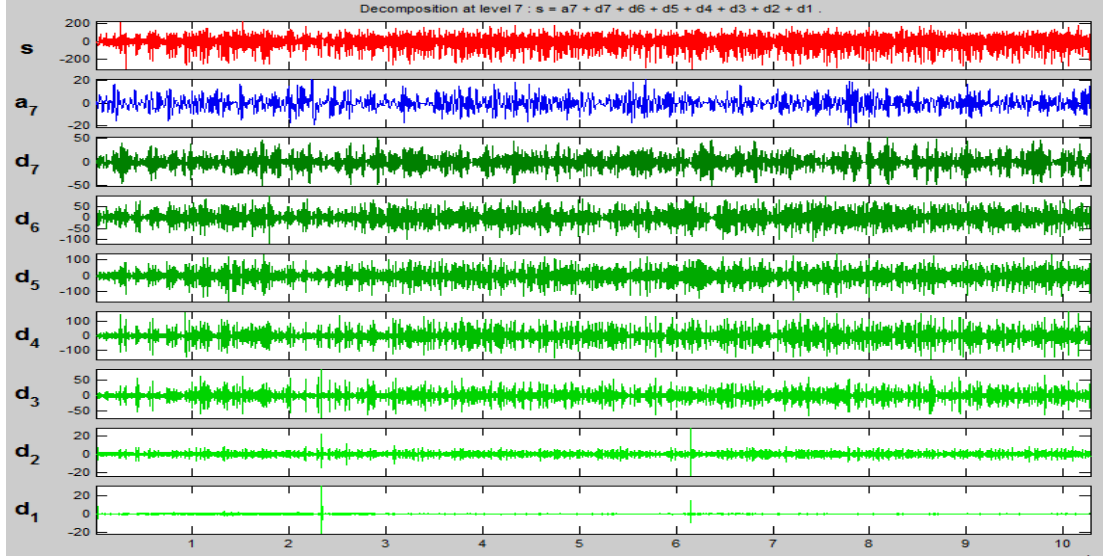
Şekil 4.20. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “db10” dalgacık dönüşümü uygulanması

Şekil 4.21’de, 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG sinyaline Meyer dalgacığı alınarak yapılan dalgacık dönüşümü gösterilmiştir.



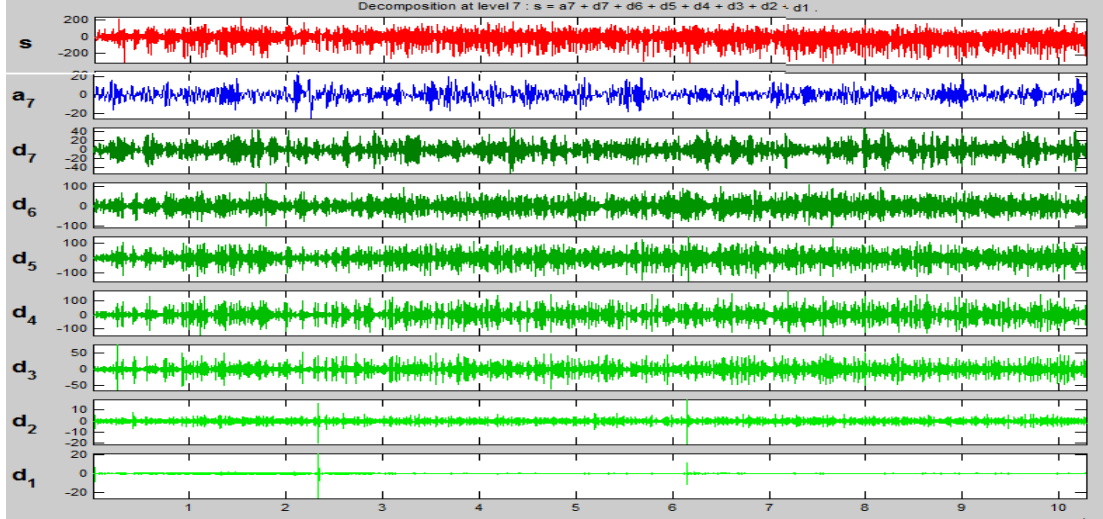
Şekil 4.21. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “Meyer” dalgacık dönüşümü uygulanması

Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG sinyaline Daubechies dalgacığı alınarak yapılan dalgacık dönüşümü Şekil 4.22’de gösterilmiştir.



Şekil 4.22. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “db10” dalgacık dönüşümü uygulanması

Şekil 4.23’de, Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG sinyaline Meyer dalgacığı alınarak yapılan dalgacık dönüşümü gösterilmiştir.

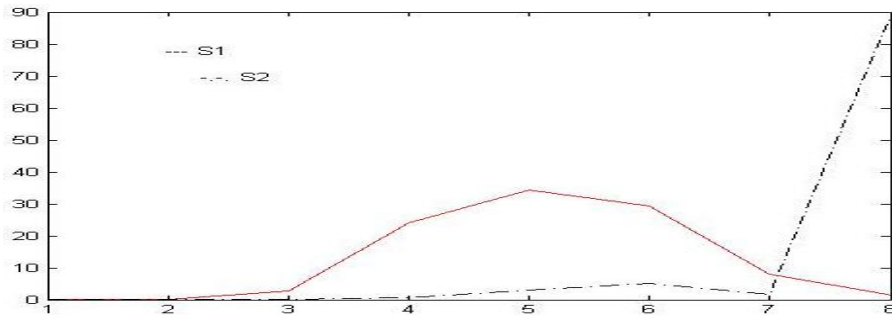


Şekil 4.23. Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin bir kanalına “Meyer” dalgacık dönüşümü uygulanması

EEG işaretlerine dalgacık dönüşümü uygulandığında, işaretin ayrıntı ve detay katsayıları elde edilmektedir. Bu analiz sonucunda ayrıntı katsayıları düşük frekans bileşenlerine; detay katsayılar ise, yüksek frekans bileşenlerine karşılık gelmektedir. Bu yöntemde çözümü yapıırken istenildiği kadar alt frekans bileşenleri elde edilebilmektedir ve teşhis açısından frekans bileşenlerine bakıldığından yararlı olur.

Dalgacık analizinde, analiz boyunca frekans ve zaman çözünürlüğü değişmektedir. Buradan, dalgacık analizi, KZFD’de olmayan çözünürlüğün analiz boyunca değiştirilmesi özelliği ile ön plana çıkmaktadır.

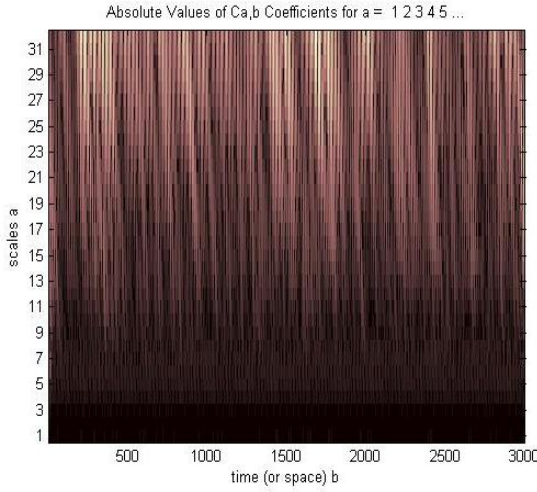
Bu bölümde, epileptik hastanın frekanslarının farklı bantlarına karşılık gelen bağıl dalgacık enerji katsayıları hesaplanır ve matlab kullanarak epilepsiye sahip hastanın ve epilepsiye sahip olmayan kişinin bağıl enerji dağılımları karşılaştırılır.



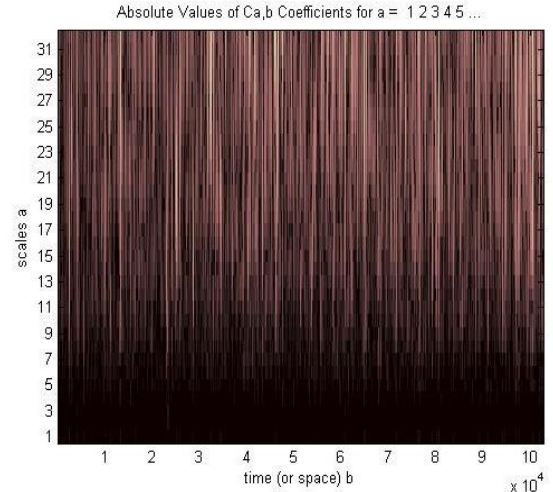
Şekil 4.24. 9 yaşındaki sağlıklı bir çocukla Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki bir çocuğun enerji katsayıları değerlerinin grafiği (S1: Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki bir çocuğun enerji katsayıları değerleri, S2: 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuğun enerji katsayıları değerleri)

Gerek dalgacık katsayılarından gerek kros-korelasyondan anlaşıldığı üzere hasta kişilerde yaklaşım (approximation) katsayıları düşük ve detay (detail) katsayıları yüksek çıkmakta ve sağlıklı kişilerde ise bunun tam tersine yaklaşım katsayıları yüksek ve detay katsayıları düşük çıkmaktadır. Bu ise dalgacık analizinin hastalığın teşhisinde oldukça kolay yorumlamaya yarayan bir araç olabileceğini göstermektedir.

Şekil 4.25 ve Şekil 4.26, aynı hastaların sırasıyla 2-boyutlu ve 3-boyutlu skalogramlarını göstermektedir.

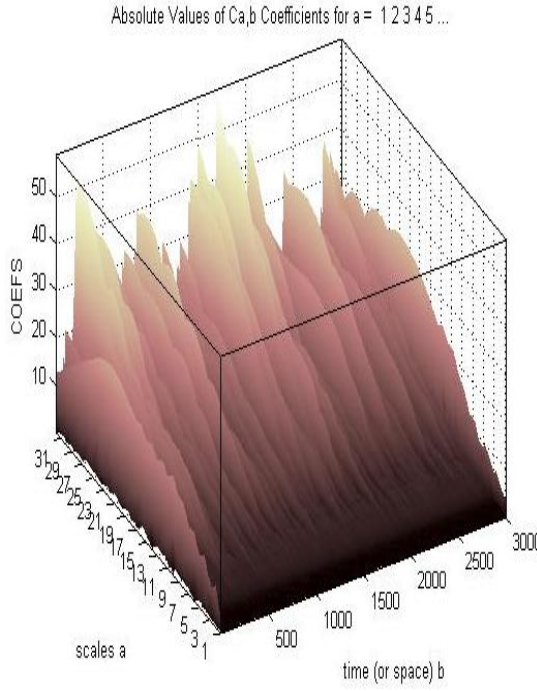


(a)

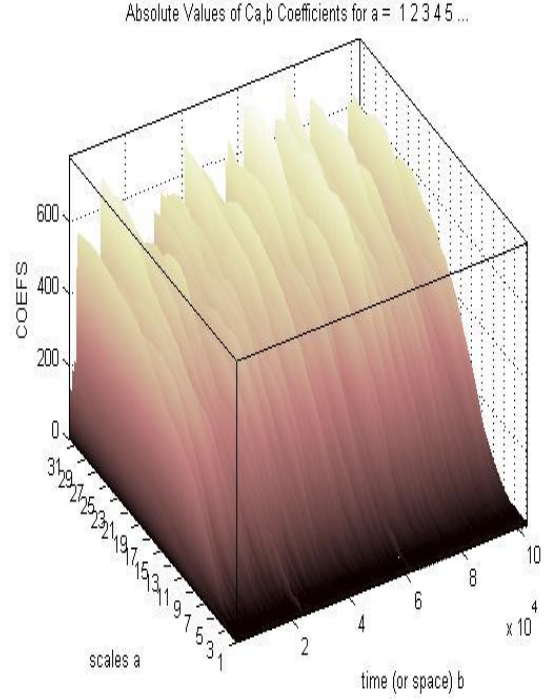


(b)

Şekil 4.25. (a) 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin 2 boyutlu skalogramı (b) Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin 2 boyutlu skalogramı



(a)



(b)

Şekil 4.26. (a) 9 yaşındaki sağlıklı bir çocuktan alınan EEG işaretinin 3 boyutlu skalogramı (b) Bilateral temporal diken rahatsızlık geçiren 4 yaşındaki çocuktan alınan EEG işaretinin 3 boyutlu skalogramı

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, medikal sinyallerden EEG için spektral analiz yöntemleri incelenmiştir. Bu yöntemlerin işleyişi için kullanılan algoritmalarından elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılarak, en yüksek doğruluk oranını sağlayan sinyal analiz metodunun tespiti ve geleneksel işaret işlemede kullanılan Fourier dönüşümünün bazı yetersizliklerini ortadan kaldırmak amaçlı ortaya çıkan dalgacık dönüşümünün etkinliğinin tespiti yapılmıştır.

İşaret ayrıştırmanın temelinde yatan fikir, o işaretin spektrumunu alt spektrum parçalarına ayrıştırarak tek tek ele alıp, mevcut yöntemlerle işlemektir. Bir analiz ve sentez sisteminden beklenen ise işareti işledikten sonra tekrar tersinir bir işlemle yeniden elde edebilmeye imkan sağlamaktır.

Herhangi bir işaret çeşitli frekanslardaki sinüzoidal dalga formlarının örtüşmesi olarak ifade edilebilir. Bunun yanı sıra biyolojik işaretlerde olduğu gibi süreksiz işaretlerin modellenmesinde işaret işlemede popüler olan Fourier analizi yetersiz kalmaktadır. Son zamanlarda dalgacık analizi olarak bilinen güçlü bir yöntem uygulamalı matematik ve mühendislik araştırmalarında kullanılmaya başlanmıştır. Sonsuza kadar salınım yapan Fourier sinüzoidlerine karşın, bir dalgacık zaman içerisinde görselleşmiş birkaç salınımda sonlanan yapıdadır. Dalgacık analizi zaman ve frekans yöreselliği konusunda iyi tahmin üretebilen, kendisinden çok şey beklenen matematiksel bir araçtır. İşaretin çeşitli çözünürlükteki analizi, zaman ve frekans tanım aralığında iyi sınırlandırılmış elementer fonksiyonlarına ayrıştırılmasıyla gerçekleştirilir.

Yeni tür bu işaret işleme yöntemi, geçici rejim ve süreksizlik davranışlarının yoğun olduğu durumlarda Fourier analizi yönteminden daha kullanışlı ve verimlidir. Bu teknik sayısal haberleşmeden, uzatan algılama, tıbbi işaret işleme, tıbbi işaret görüntüleme, astronomi ve sayısal analize kadar çok çeşitli alanlarda kullanılmaktadır.

Yaklaşık 25 yıldır dalgacığın ortaya çıkması parçalı düzenli sinyallerin etkili gösteriminin gelişmesinde çok önemli olmuştur. Dalgacık dönüşümünün bu denli başarılı olmasının arkasındaki iki önemli sebep Fourier yöntemine göre tekilliklerde daha etkili olması ve sıklıkla görülen çok geniş bir sinyal sınıfı için optimal seyrek yaklaşımı sağlamalarıdır. Bunun nedeni dalgacığın izotropik (eş-yönlü) nesnelere olmasıdır. Tek ya da sonlu sayıda üreteçlerle eş-yönlü bir şekilde genişleyerek üretilirler. Sürekli ve sayısal durumun böylesine birleştirilmiş işlemine olanak sağlayan ana özellik bir çoklu çözülme (multiresolution) analizidir.

Dalgacığın bu başarısına rağmen dalgacık çok değişkenli veri ile ilgilenildiğinde çok etkili değildir. Dalgacık ifadeleri sadece nokta tabanlı tekilliklerle yaklaşım verisi için optimaldir ve eğriler boyunca oluşan tekillikler gibi eşit ölçüde iyi dağılmış tekilliklerle başa çıkamamaktadır.

Bununla birlikte, iki ya da daha yüksek boyutlarda, yüzey sınırlarının kenarları gibi dağılmış süreksizliklerde etkili değildir ve bunun bir sonucu olarak dalgacık, çok değişkenli veriyle ilgili olarak optimalden uzaklaşmaktadır. Dalgacık ve geleneksel çoklu ölçekli sistemlerin sınırlılığı matematikçileri, mühendisleri ve uygulamalı bilimcileri yoğun bir çalışmaya itmiştir. Daha gelişmiş bir yaklaşım kompleks dalgacığın tanıtılmasıyla çok yakın bir geçmişte sunulmuştur. Bununla birlikte, uygulamalarda sıklıkla dalgacık daha iyi çalıştığı halde, bu yöntemler anizotropik özelliklerle oluşturulan çok değişkenli verinin seyrek yaklaşımlarını optimal bir şekilde sağlamamaktadır. Çok boyutlu verinin etkili bir şekilde temsil edilmesi için yapılan çalışmalar içerisinde başarılı olanların son halkası olan çalışma shearlettir.

KAYNAKLAR

Abbak R. A., Jeodezide zaman dizilerinin dalgacık (wavelet) analizi, Doktora Semineri, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2007.

Akın M., Arserim M. A., Kıymık M. K., Türkoğlu I., A new approach for diagnosis epilepsy by using wavelet transform and neural networks, *Proceeding of the 23rd Annual EMBS International Conference*, 2001, **2**, 1596-1599.

Alkan A., EEG işaretlerinin klasik ve modern yöntemlerle ön işlenmesi ve sınıflandırılması, Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2005, 168050.

Aygün O., Konuşmacı tanıma sistemlerinde dalgacık dönüşümü, Yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2006, 199577.

Batar H., EEG işaretlerinin dalgacık analiz yöntemleri kullanılarak yapay sinir ağları ile sınıflandırılması, Yüksek Lisans Tezi, Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş, 2005, 197467.

Boztoprak H., Wavelet teorisi ve uygulamaları, Yüksek Lisans Semineri, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 2005.

Ceylan M., Özbay Y., Uçan O. N., Akciğer bölgesinin bölütlenmesinde karmaşık değerli sınıflayıcıların karşılaştırılması, *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, 2011, **8**, 123-133.

Criminal Justice Information Services Division., WSQ gray-scale fingerprint image compression specification, *FBI*, IAFIS-IC-0110 (V3.1), 1-43, 2010.

Daubechies I., Runborg, O., Sweldens W., Normal Multiresolution Approximation Of Curves, <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/normalcurve/normalcurve.pdf>, (Ziyaret tarihi: 12.04.2013).

Erçetin A. P., Aktaş S., Pişkin Ö., Özcan M. A., Multipl miyelomda galektin-1 ekspresyonunun düzenleyici t hücreler ve otolog kemik iliği transplantasyonu ile ilişkisi, *2011 DEÜ Tıp Fakültesi Dergisi*, 2011, **25**, 137-143.

Fliege N. J., *Multirate digital signal processing (Multirate systems-Filter banks-Wavelets)*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

Fomitchev M., *An introduction to wavelets and wavelets transforms*, Systems And Programming Inc., Tulsa, 1994.

Grap A., An introduction to wavelets, *IEEE Computational Science And Engineering*, 1995, **2**, 1-18.

Gümüş İ., EKG sinyallerinin wavelet analizi, Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü, Bursa, 2003.

Hanbay K., Şengür A., Dalgacık dönüşümü ve nötrozofi yaklaşımı ile renkli doku görüntülerinin bölütlenmesi, *Bingöl Üniv. Fen. Bil. Dergisi*, 2011, 1(1), 9-17.

Jawert B., Sweldens W., An Overview Of Wavelet Based Multiresolution Analysis, <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/overview.pdf>, (Ziyaret Tarihi: 25.04.2013).

Karaca B., Kısım A., Atmaca H., Purcu Ü. D., Uzunoğlu S., Uslu R., Türk meme kanseri hastalarında kanserli ve normal meme dokusu örneklerinde Fgfr2 gen polimorfizminin belirlenmesi, *Meme Sağlığı Dergisi*, 2011, 7, 30 – 35.

Kasman Ş., AISI 304 paslanmaz çelik ve EN 5754 alüminyum alaşımı malzemelerin fiber lazer ile islenmesinde yüzey pürüzlülüğünün tespiti için istatistiksel bir çalışma, *Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi*, 2011, 8, 27-36.

Keeton P. I. J., Schlindwein F. S., Spectral broadening of clinical doppler signals using fft and autoregressive modelling, *European Journal of Ultrasound*, 1998, 7, 209-218.

Kıymık M. K., Güneş M., Alkan A., Öter A., Dölek F., EEG işaretlerinin parametrik yöntemlerle gerçek zamanda spektral analizinin gerçekleştirilmesi, *Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu*, 197E014 (EEEAG-249), 1-112, 2001.

Kumar V. V., Raju U. S. N., Mani M. R., Rao A. L. N., Wavelet based texture segmentation methods based on combinatorial of morphological and statistical operations, *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 2008 , 8, 176-181.

Madan R., Singh S. K., Jain N., Signal filtering using discrete wavelet transform, *International Journal of Recent Trends in Engineering*, 2009, 2, 96-98.

Makeyev O., Sazonov E., Schuckers S., Lopez-Meyer P., Melanson E., Neuman M., Limited receptive area neural classifier for recognition of swallowing sounds using continuous wavelet transform, *Proceedings of the 29th Annual International Conference of the IEEE EMBS Cité Internationale*, 2007, 3, 3128 – 3131.

Mallat S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 2, 674-693.

Matlab Wavelet Toolbox Dökümanları: <http://www.mathworks.com>, (Ziyaret Tarihi: 16.03.2013).

Mete A., Memetoğlu M. E., Erbasan O., Özbudak İ. H., Gölbaş İ., Türkay C., Bayezid Ö., Siklosporin ve takrolimus (FK506) uygulamasının, sıçanlarda yeni oluşan ateroskleroz ve lipid profiline etkisi, *Türk Göğüs Kalp Damar Cerrahisi Dergisi*, 2010, 18(1), 39 – 44.

Meyer Y., *Wavelets: algorithms and applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.

Miner N. E., An introduction to wavelet theory and analysis, *Sandia National Laboratories*, SAND98-2265, 1-25, 1998.

Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J. M., *Wavelets toolbox for use with Matlab*, The Mathworks Inc., USA, 1996-1997.

Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J. M., *Wavelets and their applications*, Hermes Science/Lavoisier, France, 2003.

Murtagh F., Starck J. L., Wavelet and curvelet moments for image classification: application to aggregate mixture grading, *arXiv*, arXiv:0802.3528v1, 2008.

Namba M., Ishida Y., Wavelet transform domain blind deconvolution, *Signal Processing*, 1998, 68, 119-124.

Önal B., EEG işaretlerindeki epileptik sürecin dalgacık dönüşüm yöntemi ile belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş, 1998.

Özdamar K., *Paket programlar ile istatistiksel veri analizi*, Kaan Kitabevi, Eskişehir, 2002.

Özdemir A., Artıklar M., İki boyutlu dalgacık dönüşümü kullanarak ön cepheden çekilmiş insan yüzü resimlerini tanıma üzerine yaklaşımlar, *KSÜ Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 2009, 12(1), 6-9.

Patel D. K., Som T., Singh M. K., Improving the recognition of handwritten characters using neural network through multi resolution technique and euclidean distance metric, *International Journal of Computer Applications*, 2012, **45**, 38-50.

Polikar R., The Engineer's Ultimate Guide To Wavelet Analysis The Wavelet Tutorial, <http://engineering.rowan.edu/~polikar/wavelets/wtpart3.html>, (Ziyaret Tarihi: 06.11.2012).

Raju G., Revathy K., Wavepackets in the recognition of isolated handwritten characters, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2007*, 2007, **1**, 5-7.

Roberts R. A., *Digital signal processing*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1987.

Saha S., Parekh R., Recognition of handwritten character based on wredf and neural network classifiers, *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, 2011, **3**, 5081- 5089.

Siddiqi H. A., Wavelet theory, Taft J. E., Nashed Z., *Applied functional analysis*, 10nd ed., Marcel Dekker, New York, 419-494, 2004.

Siegel S., *Nonparametric statistics for the behavioral sciences*, Mc Graw- Hill Book Company, Newyork, 1956.

Sinha S., Routh P. S., Anno P. D., Castagna J. P., Spectral decomposition of seismic data with continuous-wavelet transform, *geophysics* 10.1190/1.2127113, 2005, **70**, 19-25.

Söğüt S., Yılmaz H. R., Songur A., Güleç M., Kotuk M., Ağlamış S., Sıçanlarda sisplatine ile oluşturulan nefrotoksisitede bazı metabolik enzim aktiviteleri ve bunlar üzerine E vitamininin etkileri, *Tıp Araştırmaları Dergisi*, 2004, 2(1), 23 – 28.

Subaşı A., Automatic recognition of alertness level from EEG by using neural network and wavelet coefficients, *Expert System with Applications*, 2005, **28**, 701-711.

Subaşı A., EEG signal classification using wavelet feature extraction and a mixture of expert model, *Expert Systems with Applications*, 2007, **32**, 1084-1093.

Sweldens W., Wavelet Sampling Technics, <http://w3.nai.net/~alokaeng/wavelet/sampling.pdf>, (Ziyaret Tarihi: 18.01.2013).

Tekeli A., Akgün S., Civelek A., İşbir S., Ak K., Demirtaş G., Şirvancı S., Arbak S., Yaylım İ., Çobanoğlu A., Alt ekstremitte üskemi reperfizyonu sonucunda gelişen akciğer hasarının inlenmesinde farklı bir ajan: FK 506 (Takrolimus), *Türk Göğüs Kalp Damar Cerrahisi Dergisi.*, 2010, **9**, 242-246.

Torrence C., Compo P. C., A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of American Meteorological Society*, 1998, 79(1), 61-78.

Tubay A., Bal S., Bayram K. B., Koçyiğit H., Gürkan A., Hemiplejik ağırlı omuzda supraskapular sinir blokajı ve glenohumeral eklem enjeksiyonu: ağrı ve özürülük üzerindeki etkilerinin karşılaştırılması, *Türkiye Fiziksel Tıp ve Rehabilitasyon Dergisi*, DOI: 10.4274/tftr.54771.

Turan M., Çilli A. S., Aşkın R., Herken H., Telcioğlu M., Kucur R., Cage testi ile alkol kullanımı üzerine epidemiyolojik bir çalışma, *Klinik Psikiyatri*, 1999, **2**, 217-221.

Tuna G., İnternet protokolü üzerinden ses taşıma uygulamaları için dalgacık dönüşümü kullanılarak basit ve etkili bir ses sıkıştırma uygulaması, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2010, 26(3), 307-315.

Türkmenoğlu V., Güç elektroniği devrelerinin bilgisayar destekli çözümlenmesinde dalgacık yaklaşımının incelenmesi, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 2006, 181960.

Uçan O. N., *İşaret ve görüntü işlemede yeni yaklaşımlar*, İ.Ü. Mühendislik Fakültesi Yayınları, İstanbul, 2003.

Übeyli E. D., Güler İ., Combined neural network model for EEG signals classification, *INISTA 2005 International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications*, DOI: 10.1016/j.dsp.2008.07.004.

Yazgan E., Korürek M., *Tıp elektroniği*, İ.T.Ü. Ofset Baskı Atölyesi, İstanbul, 1996.

Yeşil S., Çınar Ö., Uzun E., Kahramanmaraş'ta faaliyet gösteren işletmelerin yenilik faaliyetleri üzerine bir alan çalışması, *Bilgi Ekonomisi ve Yönetimi Dergisi*, 2010, **5**, 81-100.

Yılmaz E., Bora E., Cankaya T., Ülgenalp A., Bozkaya Ö., Çoker M., Erçal D., Obez ve dislipidemik Türk çocuklarında apolipoprotein E gen polimorfizmi ve plazma lipid seviyelerinin karşılaştırılması, *2012 DEÜ Tıp Fakültesi Dergisi*, 2012, **26**, 27-35.

Zanardelli W. G., Strangas E. G., Khalil H. K., Miller J. M., Wavelet-based methods for the prognosis of mechanical and electrical failures in electric motors, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005, **19**, 411-426.

EKLER

EKLER

Bazı Temel Tanım, Teorem ve Kavramlar

Teorem 1.1. $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ için, $F(f * g) = F(f)F(g)$ eşitliği sağlanır.

Teorem 1.2. (Fubini Teoremi)

a) $f(x,y)$, $Q[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ dikdörtgeni içinde integrallenebiliyorsa, o zaman sıfır ölçüğünün bir kümesi hariç her $x \in [a,b]$ için, $f(x,y)$ fonksiyonu $[c,d]$ aralığı içinde y e göre integrallenebilirdir ve ölçü uzayının bir kümesi hariç her $y \in [c,d]$ için $f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı içinde x 'e göre integrallenebilirdir, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\iint_Q f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx \quad (1.1)$$

b) f, \mathbb{R}^2 de Lebesgue ölçülü ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy \quad (1.2)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \quad (1.3)$$

olacak şekilde sonlu sayıdaki noktaların dışında sürekli bir fonksiyon var demektir ve bunlardan biri kesinlikle yakınsaktır, o zaman her iki integral eşittir.

i.

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt \quad (1.4)$$

ii.

$$f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \varphi(x) \quad (1.5)$$

tipindeki denklemler sırasıyla birinci tür ve ikinci tür Fredholm denklemleri olarak adlandırılır.

Teorem 1.3. (Rieman-Lebesque Teoremi)

$f \in L_1(\mathbb{R})$ ise, o halde;

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\omega)| = 0 \quad (1.6)$$

dır.

Teorem 1.4. $f \in L_2(\mathbb{R})$ ise, o halde;

$$i. \quad \langle f, g \rangle_{L_2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L_2} \quad (\text{Parseval Formülü}) \quad (1.7)$$

$$ii. \quad \|\hat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2} \quad (\text{Plancherel Formülü}) \quad (1.8)$$

Sonuç 1.1. f , n -kez parçalı diferansiyellenebilir ve $f, f', \dots, f^n \in L_1(\mathbb{R})$ ve $k=0, \dots, n-1$ için,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0 \quad (1.9)$$

sürekli bir fonksiyon ise, o zaman;

$$F\{f^{(n)}\} = (i\omega)^n F(f) \quad (1.10)$$

dır.

Uyarı 1.1. Bir $y \in X$ elemanı için $\forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0$ ise $y=0$ dır.

Teorem 1.5. T , bir X Hilbert uzayından bir X Hilbert uzayına giden sınırlı lineer bir operatör olsun. O halde eşlenik operatörü T^* ,

T terslenebilir ise, o halde T^* terslenebilir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ özelliğini sağlar.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- [1] Sevindir H. K., Yazıcı C., Budak H., **Meral T.**, Yazıcı V., A study on secondary school students' mathematics anxiety in terms of demographic factors, *6th International Image Processing And Wavelet On Real World Applications Conference*, Istanbul, Turkey, 28-29 September 2012.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2004 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2008-2009 yılları arasında, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Orta Öğretim Alan Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde Tezsiz Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2010 yılında, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.