

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI**

DOKTORA TEZİ

**EŞ MERKEZLİ SİLİNDİRİK YAPILARDA
ELEKTROMANYETİK İŞİNİM**

KUTLU KARAYAHŞI

KOCAELİ 2015

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EŞ MERKEZLİ SİLİNDİRİK YAPILARDA
ELEKTROMANYETİK İŞİNİM

KUTLU KARAYAHŞI

Yrd.Doç.Dr. Arif DOLMA
Danışman, Kocaeli Üniv.

Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY
Eş Danışman, Okan Üniv.

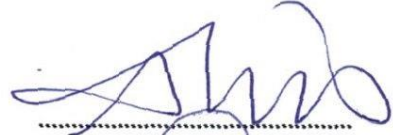
Prof.Dr. Namık YENER
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

Doç.Dr. Gonca ÇAKIR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

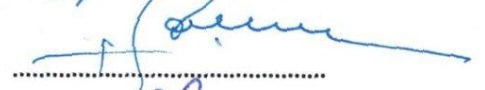
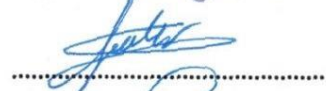
Prof.Dr. Gökhan UZGÖREN
Jüri Üyesi, Gedik Üniv.

Doç.Dr. Alp Oral SALMAN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

Doç.Dr. İsmail Hakkı TAYYAR
Jüri Üyesi, Karabük Üniv.



Namık Yener



A. Oral Salman



Tezin Savunulduğu Tarih: 01.07.2015

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Eş merkezli silindirik yapılarda elektromanyetik ışınımın incelenmesi için Wiener-Hopf tekniği, mode-matching tekniği yardımıyla kullanılabilir. Bu yöntem sayesinde eş merkezli silindirik yapının içinde ve dışındaki alan ifadeleri seri açılımı biçiminde ifade edilebilir. Böyle yapıların alan ifadelerinin çözümü monopol antenlerin ve ilerleyen dalga antenlerinin modellenmesinde önemli bir yer teşkil etmektedir.

Bu çalışmada dış silindiri yarı sonsuz, sonsuz ince ve mükemmel iletken olan, iç silindiri ise eksenel doğrultuda sonsuza uzarken her iki yarısı farklı empedans sınır koşulları ile modellenmiş eş merkezli dalga kılavuzunda yayılan hibrid TEM (TM_{00}) modunun ışınması problemi çözülmüştür.

Tez aşamasında fikirleri ile beni yönlendiren ve teşvik eden danışmanlarım Sn. Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY ve Sn. Yrd. Doç. Dr. Arif Dolma ile yardımlarını hiç esirgemeyen Sn. Doç. Dr. İsmail Hakkı TAYYAR'a teşekkür ederim. Ayrıca hayatım boyunca beni destekleyen ve bugünlere getiren babam İbrahim KARAYAHŞİ ve annem Müberra KARAYAHŞİ ile her türlü zorlukta yanımda olan eşim Nuray KARAYAHŞİ'ye sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Haziran - 2015

Kutlu KARAYAHŞİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
GİRİŞ	1
1. WIENER-HOPF PROBLEMİ	3
1.1. Kompleks Düzlemde Fourier Dönüşümü.....	3
1.1.1. $F_+(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi.....	4
1.1.2. $F_-(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi.....	4
1.1.3. $F(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi.....	5
1.1.4. $P(\alpha)$ 'nın tamlığı.....	6
1.1.5. Kompleks fourier integralinin asimptotik davranışları.....	6
1.2. Wiener-Hopf Probleminin Tanımlanması	7
1.3. Homojen Wiener-Hopf Denklemi	7
1.3.1. Birinci temel problem için teklik teoremi.....	8
1.3.2. Birinci temel problemin bir özel çözümü	9
1.4. Sağ Yanlı Wiener-Hopf Denklemi	11
1.4.1. İkinci temel problem için teklik teoremi.....	13
1.4.2. İkinci temel problemin bir özel çözümü.....	14
2. İÇ SİLİNDİRİ EKSENEL DOĞRULTUDA SONSUZA UZAYAN, DİŞ İLETKENİ İSE YARI SONSUZ EŞ MERKEZLİ DAİRESEL DALGA KILAVUZUNDA TEM MODUNUN İŞİMASI.....	18
2.1. Problemin Tanımlanması ve Matematiksel Olarak Modellenmesi	18
2.2. Sınır, Süreklilik, Ayrıt ve Radyasyon Koşullarının Belirlenmesi	20
2.3. u_1 ve u_2 Alan İfadelerinin Fourier Dönüşümlerinin Elde Edilmesi	22
2.4. Wiener-Hopf Denklemine Elde Edilmesi	29
2.5. Wiener-Hopf Denklemine Çözümü	30
2.6. Açınım Katsayılarının Hesabı	32
2.7. Saçılan Alanın Hesabı ve Sayısal Sonuçlar.....	34
3. PARÇALI EMPEDANSA SAHİP SONSUZ İÇ SİLİNDİR VE YARI SONSUZ DİŞ İLETKENDEN OLUŞAN EŞ MERKEZLİ DAİRESEL DALGA KILAVUZUNDA HİBRİD TEM MODUNUN İŞİMASI	40
3.1. Problemin Tanımlanması ve Matematiksel Olarak Modellenmesi	40
3.2. Sınır, Süreklilik, Ayrıt ve Radyasyon Koşullarının Belirlenmesi	42
3.3. u_1 ve u_2 Alan İfadelerinin Fourier Dönüşümlerinin Elde Edilmesi	44
3.4. Wiener-Hopf Denklemine Elde Edilmesi	50
3.5. Wiener-Hopf Denklemine Çözümü	52
3.6. Gelen Dalga u^i 'nin Elde Edilmesi.....	54
3.7. Açınım Katsayılarının Hesabı	55
3.8. Saçılan Alanın Hesabı ve Sayısal Sonuçlar.....	57

4. İKİ PROBLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI VE NÜMERİK HESAPLAMALARIN YAKINSAKLIĞI	64
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	67
KAYNAKLAR	69
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER	72
ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	$F_+(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi	4
Şekil 1.2.	$F_-(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi	5
Şekil 1.3.	$F(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi	6
Şekil 1.4.	Kompleks α düzlemindeki integrasyon çizgileri.....	11
Şekil 1.5.	Kompleks ζ düzlemindeki integrasyon çizgileri.....	15
Şekil 2.1.	İç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzayan dış iletkeni ise yarı sonsuz bir eşeksenli dairesel dalga kılavuzu.....	18
Şekil 2.2.	Kompleks α düzlemi	22
Şekil 2.3.	İç iletkenin yarıçapının (a), yansımaya katsayısı $ c_0 $ 'a etkisi.....	36
Şekil 2.4.	Dış iletkenin yarıçapının (b), yansımaya katsayısı $ c_0 $ 'a etkisi	37
Şekil 2.5.	Empedansın (η), yansımaya katsayısı $ c_0 $ 'a etkisi	37
Şekil 2.6.	İç iletkenin yarıçapının (a), radyasyon alanına etkisi	38
Şekil 2.7.	Dış iletkenin yarıçapının (b), radyasyon alanına etkisi.....	38
Şekil 2.8.	Empedansın (η), radyasyon alanına etkisi.....	39
Şekil 3.1.	İç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzanan ve $z < 0$ ile $z < 0$ 'da iki farklı empedans değerine sahip olan, dış iletkeni ise yarı sonsuz bir eşeksenli dairesel dalga kılavuzu	40
Şekil 3.2.	Yarıçap a 'nın yansımaya katsayısına etkisi.....	60
Şekil 3.3.	Yarıçap b 'nin yansımaya katsayısına etkisi.....	60
Şekil 3.4.	η_2 'nin yansımaya katsayısına etkisi.....	61
Şekil 3.5.	η_1 'in yansımaya katsayısına etkisi	61
Şekil 3.6.	η_1 'in saçılan alana etkisi	62
Şekil 3.7.	η_2 'nin saçılan alana etkisi	62
Şekil 3.8.	k 'nin saçılan alana etkisi	63
Şekil 4.1.	$a = 0,3$, $b = 1,7$, $\eta = \eta_2 = 0,2i$, $\eta_1 = 10^{-3}i$ için iki problemin çözümü	65
Şekil 4.2.	$a = 0,5$, $b = 1,5$, $\eta = \eta_2 = 0,2i$, $\eta_1 = 10^{-3}i$ için iki problemin çözümü	65
Şekil 4.3.	Yansıyan alan genliğinin kesme sayısı ile değişimi.....	66

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

a, b, ρ	: İç silindirin, dış silindirin ve gözlem noktasının yarıçapları
c_n, f_m, g_m	: Seri açılım katsayıları
C	: Euler Sabiti
E	: Elektrik alan (V./ m.)
$F(\rho, \alpha)$: $u_1(\rho, z)$ 'in Fourier dönüşümü
$G(\rho, \alpha)$: $u_2(\rho, z)$ 'in Fourier dönüşümü
$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha)$: Green Fonksiyonu
H	: Manyetik alan (A. / m.)
$H_m^{(1)}$: Birinci cins Hankel Fonksiyonu
$J_m(\alpha)$: Birinci cins Bessel Fonksiyonu
k	: Dalga sayısı
$K(\alpha)$: $\alpha = k$ 'den $\alpha = k + i\infty$ 'a ve $\alpha = -k$ 'dan $\alpha = -k - i\infty$ 'a kadar kesilmiş kompleks α düzleminde tanımlı karekök fonksiyonu
$u_{1,2,3}(\rho, z)$: Toplam alanı oluşturan fonksiyonlar
$u^i(\rho, z)$: Gelen dalga
$u^T(\rho, z)$: Toplam alan ifadesi
$Y_m(\alpha)$: İkinci cins Bessel Fonksiyonu
Z_0	: Boşluğun karakteristik empedansı (Ohm)
α	: Kompleks Fourier dönüşüm değişkeni
η	: İç silindirin $z > 0$ bölgesindeki yüzey empedansı
$\eta_{1,2}$: İç silindirin iki parçalı yüzey empedansı

Kısaltmalar

PEC	: Perfect Electric Conductor (Mükemmel Elektriksel İletken)
-----	---

EŞ MERKEZLİ SİLİNDİRİK YAPILARDA ELEKTROMANYETİK IŞINIM

ÖZET

Bu çalışmada, iç silindiri sonsuz ve parçalı bir yüzey empedansına sahip, dış silindiri ise sonsuz ince ve yarı sonsuz olup mükemmel elektriksel iletkenliğe sahip olan bir koaksiyel dalga kılavuzunda yayılmakta olan bir dalganın saçınımı Wiener-Hopf tekniği kullanılarak incelenmiştir. Kullanılan işlemleri daha anlaşılır kılmak için, önce Wiener-Hopf tekniğinin temelleri açıklanmıştır. Sayısal sonuçları, bu çalışmada elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu göstermek için kullanılacak daha önce çözülmüş bir örnek problemin çözümü açıklanmıştır. Ardından, bu çalışmada çözülen problem, saçılan alana ve sınır koşullarına Fourier dönüşümü uygulanarak bir Wiener-Hopf denklemi biçiminde ifade edilmiştir. Dalga kılavuzunun içinde saçılan alan, dalga kılavuzu modları cinsinden seriye açılmış ve elektromanyetik alanlara süreklilik koşulları uygulanıp problemin üç set sonsuz katsayı içeren üç adet sonsuz cebrik denklem sistemi biçiminde ifade edilmesiyle problemin çözümü elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar bölümünde, dalga kılavuzunun iç ve dış silindirlerinin yarıçapları ile iç silindirin empedans değerlerinin yayılan alana ve yansıma katsayısına etkileri gözlemlenmiştir. Son olarak, sayısal sonuçlar referans problemin sayısal sonuçları ile kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik Işınım, Koaksiyel Dalga Kılavuzu, Wiener-Hopf Problemleri.

ELECTROMAGNETIC RADIATION FROM CONCENTRIC STRUCTURES

ABSTRACT

In the present work, the scattering of a wave radiating inside a waveguide consisting of two coaxial cylinders the inner of which is infinite and has piecewise surface impedance while the outer cylinder is infinitely thin, semi-infinite and has a perfect electrical conductor surface has been analyzed using Wiener-Hopf technique. In order to make the procedures involved more understandable, the mathematical foundations of Wiener-Hopf technique has been explained first. A previously solved example problem whose solution can be used to validate the numerical results obtained in the present work has been explained. Afterwards, the problem solved in the present work has been defined as a Wiener-Hopf equation by applying Fourier transformation to the scattered field and to the boundary conditions. The scattered field inside the waveguide has been expanded to series in terms of waveguide modes and the solution of the problem has been obtained by using the continuity conditions for the electromagnetic fields and transforming the problem into three infinite sets of algebraic equations containing three infinite sets of constants. In the numerical results section, the effects of the radii of the inner and the outer cylinders and the impedances of the inner cylinder to the radiated field and the reflection coefficient have been observed. Lastly, the results have been compared to the reference problem.

Key Words: Electromagnetic Radiation, Coaxial Waveguide, Wiener-Hopf Problems.

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında iç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzayan, dış iletkeni ise yarı sonsuz olan eş merkezli dairesel dalga kılavuzlarına dair iki problem incelenmiştir.

Birinci problem daha önce çözülmüş olup, bu tez çalışmasında ilk kez çözülen ikinci probleme kaynak teşkil etmektedir. Böyle yapılar, uzun monopol antenler ve ilerleyen dalga antenleri için iyi birer model oluşturduklarından bu güne kadar bir çok kez incelenmiştir [1-3]. Saçınım teorisinde çok önemli bir yer kapsayan eş merkezli yazpılarda elektromanyetik ışınım, pek çok farklı yöntemle incelenmiştir. Bu yöntemler arasında mode matching [4], FDTD [5-6] ve başka nümerik yöntemler [7-13] bulunmaktadır. Eş merkezli yapının TEM modu ile uyarıldığı özel durumlarla ilgili de pek çok çalışma bulunmaktadır [14-21]. Ayrıca bu tez çalışmasında yoğun olarak kullanılan Wiener-Hopf tekniği daha önce benzer yapılardaki akustik problemlerde de uygulanmıştır [22-24].

Bu tez çalışmasında ise, önce incelenecek problemlerin çözümünde kullanılan Wiener-Hopf tekniğine dair matematiksel tanımlar verilmiştir. Kompleks Fourier dönüşümü ve Fourier integrali ile gösterilen fonksiyonların regülerlik özelliklerine değinildikten sonra Wiener-Hopf problemi tanımlanmış ve özellikleri irdelenmiştir.

Daha sonra, iç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzayan ve yarısı mükemmel iletken iken diğer yarısının empedans sınır koşulu ile modellendiği, dış silindiri ise yarı sonsuz, sonsuz incelikte ve mükemmel iletken olan eş merkezli dalga kılavuzunda yayılan TEM modunun ışınması Wiener-Hopf tekniği kullanılarak incelenmiştir [28]. Bu problem daha önce çözülmüş olup, bu tez çalışmasında ilk kez çözülen diğer probleme temel oluşturmakla birlikte matematiksel ve yazılımsal olarak farklı yapıların kullanılmasını gerektirmektedir. Ayrıca daha önce çözülmüş bu problemin sonuçları, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların doğruluğunun kontrol edilmesinde kullanılmıştır.

Fourier dönüşümü kullanılarak, yapıya dair sınır değer problemi bir modifiye Wiener-Hopf denklemi olarak elde edilmiştir. Bu denklemin çözümü, üç adet bilinmeyen sonsuz açınım katsayıları setinin elde edilmesini gerektirmiştir. Açınım katsayılarının elde edilmesinin ardından kaynak teşkil eden makaledeki farklı fiziksel parametrelerle sayısal sonuçlar, nümerik yöntemler kullanılarak elde edilmiştir.

Bir sonraki bölümde, yine dış silindiri yarı sonsuz, sonsuz ince ve mükemmel iletken olan, ancak iç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzarken her iki yarısı da farklı empedans sınır koşulları ile modellenmiş eş merkezli dalga kılavuzunda yayılan hibrid TEM (TM_{00}) modunun ışıması problemi çözülmüştür. Bu tez çalışmasında ilk kez çözülen bu problem, bir önceki bölümde sunulan problemin çözümlerini de içermektedir.

Yine Fourier dönüşümü yardımıyla, bu kez farklı sınır koşulları altında bir modifiye Wiener-Hopf denklemi elde edilmiştir. Problemin çözümünün tamamlanması için, bir önceki problemde daha karmaşık bir matematiksel yapıda olan gelen dalga ifadesi elde edilmiştir. Wiener-Hopf denkleminin çözülmesi ile elde edilen üç adet sonsuz açınım katsayıları setinin yardımıyla nümerik yollarla sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak, tez çalışmasında çözülen problemin çözümünün doğruluğunun kanıtlanması amacıyla ilk problemde elde edilen sayısal sonuçlarla ikinci problemde elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her iki problem de başka yöntemlerle çözülmemiş orijinal problemler oldukları için, sonuçların doğruluğunu kanıtlamak için eldeki en uygun yöntem, ikinci problemde dalga kılavuzunun iç silindirinin dalga kılavuzunun iç bölgesinde kalan empedans değerinin sıfıra çok yakın değerler alınması ve ilk problemde elde edilen sonuçlarla kıyaslanmasıdır. Birbirinden farklı matematiksel yapılar aracılığıyla elde edilen bu sayısal sonuçların birbiriyle tutarlı olduğu görülmüştür.

1. WIENER-HOPF PROBLEMİ

Bu bölümde, tez çalışmasının sonraki bölümlerinde kullanılacak olan matematiksel işlemlerin temelleri tanımlanacaktır. Öncelikle Fourier dönüşümü ve Fourier integrali ile gösterilen fonksiyonların regülerlik özelliklerine değinildikten sonra tez çalışmasının yapılabilmesine olanak sağlayan Wiener-Hopf problemi tanımlanacak ve özellikleri irdelenecektir.

1.1. Kompleks Düzlemde Fourier Dönüşümü

Reel eksen boyunca mutlak integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, α kompleks bir parametre olmak üzere aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir.

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.1)$$

Buradaki $f(x)$ fonksiyonu Denklem (1.2)'deki gibi tanımlanırsa,

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x), & x > 0 \\ f_-(x), & x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$F(\alpha)$, yarı sonsuz $(0, \infty)$ ve $(-\infty, 0)$ aralıklarında yazılan Denklem (1.3) ve Denklem (1.4) integrallerinin süperpozisyonu olarak ifade edilebilir.

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f_+(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.3)$$

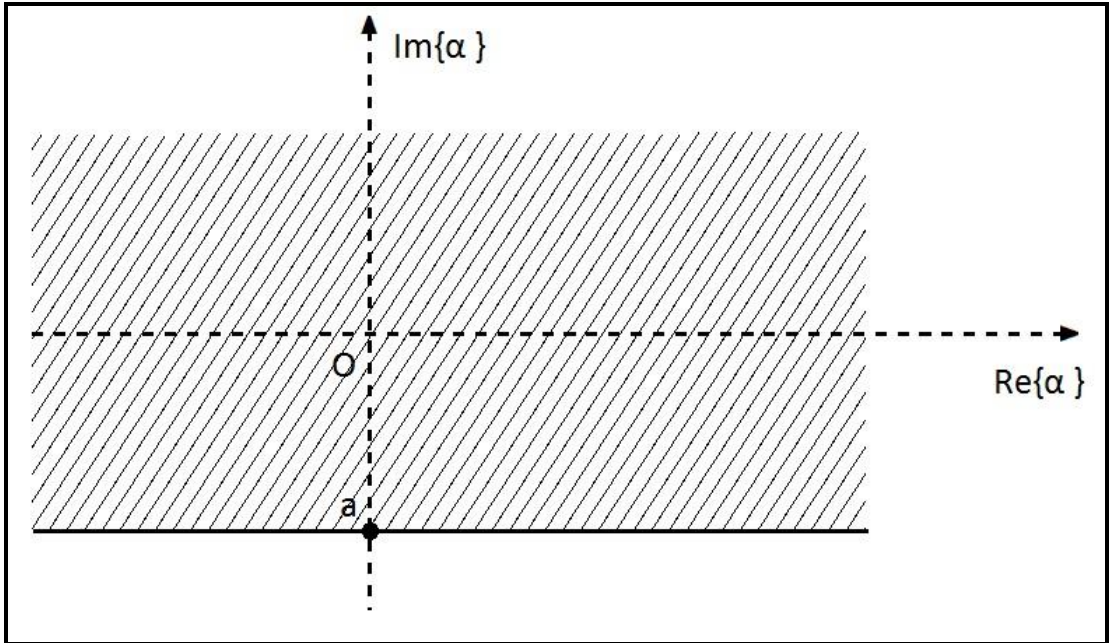
$$F_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f_-(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.4)$$

$$F(\alpha) = F_+(\alpha) + F_-(\alpha) \quad (1.5)$$

Denklem (1.1), Denklem (1.3) ve Denklem (1.4) integrallerinin regülerlik özelliklerini incelemek için aşağıda verilen teoremler kullanılacaktır.

1.1.1. $F_+(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi

$x \in (0, \infty)$ 'da tanımlanan $f_+(x)$ fonksiyonu her $R > 0$ için $(0, R)$ aralığında integrallenebilir ise ve a bir reel sayı olmak üzere, $x \rightarrow \infty$ için $f_+(x) \sim Ae^{ax}$ şeklinde üstel mertebeden oluyorsa Denklem (1.3) ile tanımlı $F_+(\alpha)$ fonksiyonu kompleks α düzleminin $\text{Im}\{\alpha\} > a$ ile belirli üst yarısında α 'nın regüler fonksiyonudur.

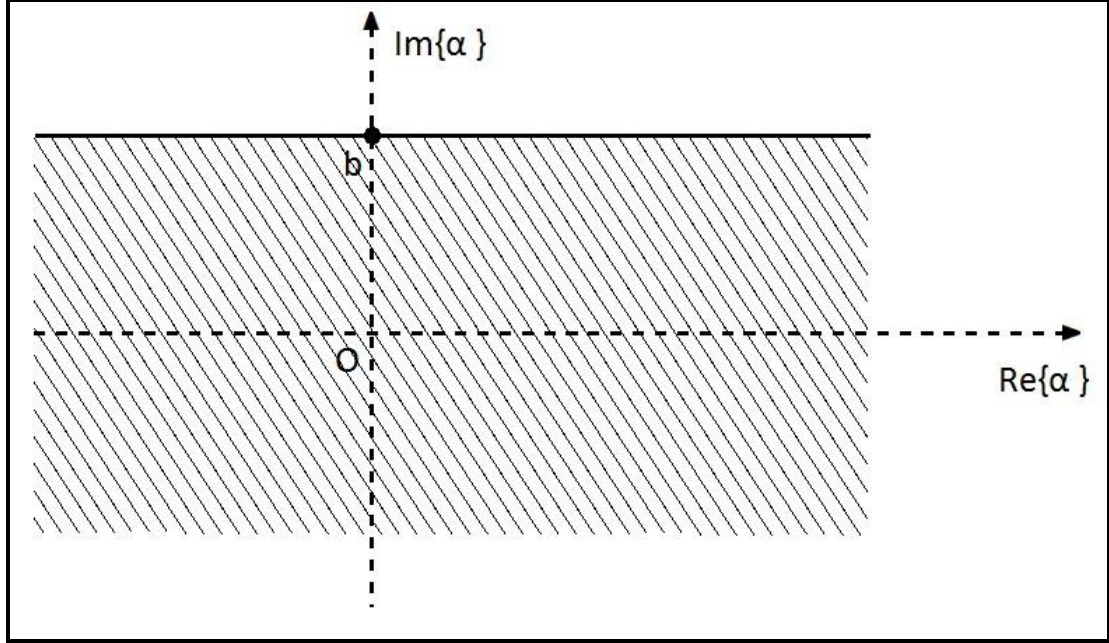


Şekil 1.1. $F_+(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi

1.1.2. $F_-(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi

$x \in (-\infty, 0)$ 'da tanımlanan $f_-(x)$ fonksiyonu her $R > 0$ için $(-R, 0)$ aralığında integrallenebilir ise ve b bir reel sayı olmak üzere, $x \rightarrow -\infty$ için $f_-(x) \sim Be^{bx}$ şeklinde üstel mertebeden oluyorsa Denklem (1.4) ile tanımlı $F_-(\alpha)$ fonksiyonu

kompleks α düzleminin $\text{Im}\{\alpha\} < b$ ile belirli alt yarısında α 'nın regüler fonksiyonudur.

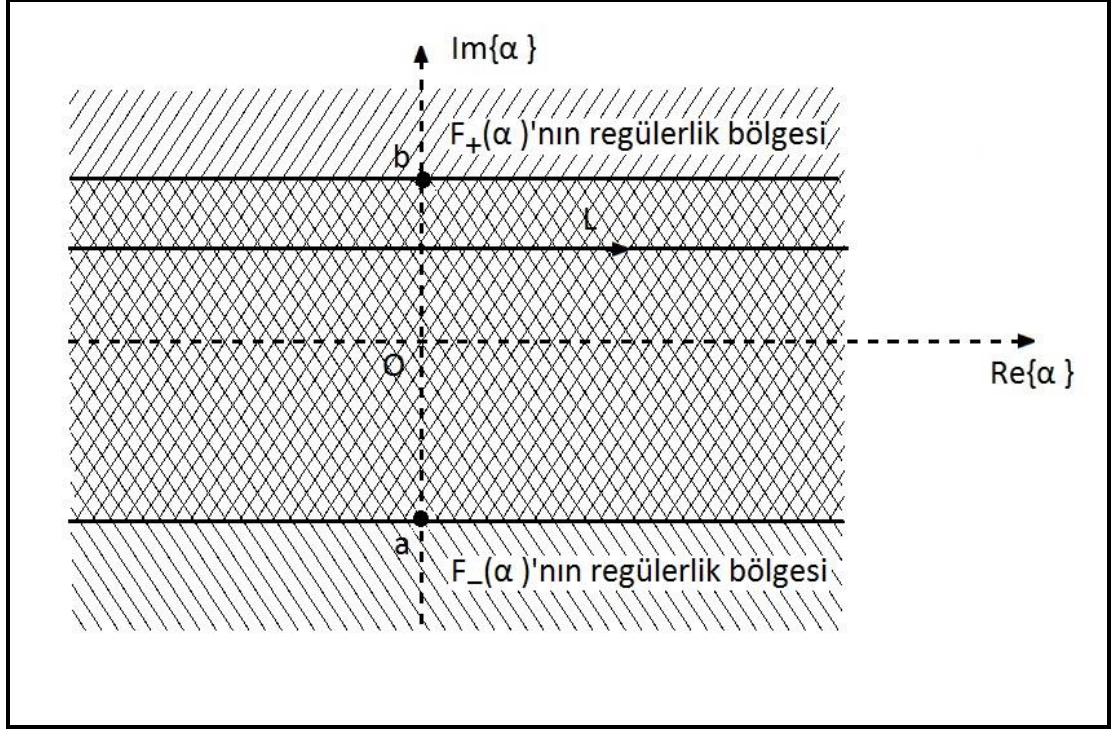


Şekil 1.2. $F_-(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi

1.1.3. $F(\alpha)$ 'nın regülerlik bölgesi

$x \in (-\infty, \infty)$ 'da tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun Denklem (1.2) ile tanımlanan $f_+(x)$ ve $f_-(x)$ parçalarının daha önceki bölümlerde açıklanan özelliklere sahip oldukları ve $a < b$ olduğu kabul edilirse, Denklem (1.1) ile tanımlanan $F(\alpha)$ fonksiyonu $\text{Im}\{\alpha\} \in (a, b)$ ile belirli yatay bir bant içinde α 'nın regüler fonksiyonudur. L bu bant içindeki herhangi bir yatay doğruyu göstermek üzere Denklem (1.6) geçerlidir.

$$F(\alpha) = \int_L F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} \quad (1.6)$$



Şekil 1.3. $F(\alpha)$ 'nın regüerlik bölgesi

1.1.4. $P(\alpha)$ 'nın tamlığı

Bir $f(x)$ fonksiyonu, $x \in (0,1)$ açık aralığında en fazla sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip ve $x \in [0,1]$ kapalı aralığında mutlak integrallenebilir reel değişkenli fonksiyon ise Denklem (1.7) ile tanımlı $P(\alpha)$.fonksiyonu α 'nın tam fonksiyonudur.

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.7)$$

1.1.5. Kompleks Fourier integralinin asimptotik davranışları

A ve p sabit ve $\text{Re}\{p\} > -1$ olmak üzere $x \rightarrow +0$ için $f_+(x) \rightarrow Ax^p$ oluyorsa, $\text{Im}\{\alpha\} > a$ üst yarı düzleminde iken Denklem (1.8) geçerlidir.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (F_+(\alpha)) = \frac{A\Gamma(p+1)}{(-i\alpha)^{p+1}} \quad (1.8)$$

B ve q sabit ve $\text{Re}\{q\} > -1$ olmak üzere $x \rightarrow -0$ için $f_-(x) \rightarrow Bx^q$ oluyorsa, $\text{Im}\{\alpha\} < b$ alt yarı düzleminde iken Denklem (1.9) geçerlidir.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (F_-(\alpha)) = \frac{B\Gamma(q+1)}{(i\alpha)^{q+1}} \quad (1.9)$$

1.2. Wiener-Hopf Probleminin Tanımlanması

$a < b$ olmak üzere, $\text{Im}\{\alpha\} > a$ ve $\text{Im}\{\alpha\} < b$ bağıntılarıyla tanımlı B_+ ve B_- bölgelerinin içinde (muhtemelen $\alpha = \infty$ hariç) her yerde regüler olan $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonları göz önüne alındığında, teorik ve pratik açıdan çok büyük öneme sahip sınır değer problemlerinin bir kısmının $B \equiv B_+ \cap B_-$ ara kesit bölgesinde Denklem (1.10) denklemini sağlayan $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonlarının belirlenmesine indirgendiği görülür [27].

$$\Phi_+(\alpha) + G(\alpha)\Phi_-(\alpha) = g(\alpha) \quad (1.10)$$

Burada $G(\alpha)$ ve $g(\alpha)$, B 'de regüler olan ve bilinen fonksiyonlardır. İlk kez 1931 yılında Norbert Wiener ve Eberhard Hopf tarafından önerilen bir yöntemin uygulanması sonucunda ortaya çıkan bu denklem Wiener-Hopf denklemi olarak adlandırılmaktadır.

Denklem (1.10)'da $g(\alpha) \equiv 0$ olması durumunda denklem homojen olur. Homojen denklemlerin çözümü, homojen olmayan denklemlerin çözümünü bulmakta önemli rol oynadığı için, bu çalışmada önce homojen denklem incelenecektir.

1.3. Homojen Wiener-Hopf Denklemi

$G(\alpha)$ fonksiyonu B 'de regüler olmak üzere Denklem (1.11) göz önüne alınsın.

$$\Phi_+(\alpha) + G(\alpha)\Phi_-(\alpha) = 0, \quad \alpha \in B \quad (1.11)$$

$\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonlarının daha önce tanımlanan özelliklerine ek olarak, $\Phi_+(\alpha)$ 'nın B_+ 'da, $\Phi_-(\alpha)$ 'nın B_- 'de sıfırlarının olmadığı kabul edilsin. Bu ek koşullarla tanımlanan Wiener-Hopf problemi “Birinci Temel Problem” olarak adlandırılır. Homojen olmayan problemlerin çözümünde önemli rol oynayan $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonları, bir anlamda $G(\alpha)$ 'nın biri B_+ üst yarı düzleminde, biri B_- alt yarı düzleminde regüler iki fonksiyonun çarpımı biçiminde gösterilmesine olanak verir. Bu nedenle Birinci Temel Problem'e çoğu zaman $G(\alpha)$ 'nın “Wiener-Hopf faktörizasyonu” denir.

1.3.1. Birinci temel problem için teklik teoremi

Eğer Birinci Temel Problem'in çözümü varsa, bu çözüm sıfırı olmayan bir tam fonksiyon çarpanı farkıyla tektir.

$\Phi_+(\alpha)$, $\Phi_-(\alpha)$ ve $\psi_+(\alpha)$, $\psi_-(\alpha)$ Birinci Temel Problem'in iki farklı çözümü olması durumunda Denklem (1.12) ve Denklem (1.13) geçerli olacaktır.

$$-G(\alpha) = \frac{\Phi_+(\alpha)}{\Phi_-(\alpha)} = \frac{\psi_+(\alpha)}{\psi_-(\alpha)} \quad (1.12)$$

$$\frac{\Phi_-(\alpha)}{\psi_-(\alpha)} = \frac{\Phi_+(\alpha)}{\psi_+(\alpha)} \quad (1.13)$$

$\psi_+(\alpha)$ fonksiyonu B_+ 'da, $\psi_-(\alpha)$ fonksiyonu ise B_- 'de sıfırdan farklı olduğundan Denklem (1.13)'ün sol yanı B_- 'de ($\alpha = \infty$ hariç olabilir), sağ yanı B_+ 'da ($\alpha = \infty$ hariç olabilir) regülerdir. Bu yarı düzlemlerin B ara kesiti içinde Denklem (1.13)'ün sol yanı ve sağ yanı eşittir. Bu durumda Denklem (1.13)'ün bir tarafındaki fonksiyon diğer taraftakinin Denklem (1.14)'teki gibi analitik devamıdır.

$$J(\alpha) = \begin{cases} \frac{\Phi_-(\alpha)}{\psi_-(\alpha)}, & \alpha \in B_- \\ \frac{\Phi_+(\alpha)}{\psi_+(\alpha)}, & \alpha \in B_+ \end{cases} \quad (1.14)$$

$J(\alpha)$ fonksiyonunun sadece $\alpha = \infty$ 'da bir tekilliği olabilir. Bu durumda $J(\alpha)$ sıfırı olmayan bir tam fonksiyondur. Böyle bir fonksiyon Denklem (1.15) biçiminde ifade edilebilir.

$$J(\alpha) = e^{Q(\alpha)} \quad (1.15)$$

$$\Phi_+(\alpha) = \psi_+(\alpha)e^{Q(\alpha)} \quad (1.16)$$

$$\Phi_-(\alpha) = \psi_-(\alpha)e^{Q(\alpha)} \quad (1.17)$$

Burada $Q(\alpha)$ bir tam fonksiyondur. Eğer $\psi_+(\alpha)$ ve $\psi_-(\alpha)$ Birinci Temel Problemin bir çözümünü ise verilen her $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ de problemin çözümü olacaktır. Bu durumda teorem ispat edilmiş olur.

Bazı durumlarda, B bandı içindeki belirli noktalarda $G(\alpha)$ 'nın alacağı değer $\Phi_+(\alpha)$ 'nın sıfıra eşit olmasını gerektirebilir. Bu durum ise $\Phi_+(\alpha)$ üzerine koyulan ek koşula aykırıdır. Böyle bir durumda $\Phi_+(\alpha)$ üzerindeki koşul, $\Phi_+(\alpha)$ 'nın sadece B içinde sıfırları olmasına izin verecek şekilde değiştirilir. $\Phi_+(\alpha)$ 'nın B içindeki bu sıfırları, aynı zamanda $G(\alpha)$ 'nın sıfırlarıdır. Birinci Temel Problem'in bu koşula uyan çözümüne "koşullu çözüm" adı verilir.

1.3.2. Birinci temel problemin bir özel çözümü

Teklik teoremi uyarınca Birinci Temel Problem'in genel çözümünü bulmak için bir özel çözümünü bulmak yeterlidir. Aşağıdaki teorem ihtiyaç duyulan özel çözümü bulmakta kullanılabilir.

B bandı içinde $\log[G(\alpha)]$ regüler olsun ve bu bandın içinde kalan her kapalı bantta düzgün olarak Denklem (1.18) geçerli olsun.

$$\left| \log[G(\sigma + i\tau)] \right| < \frac{C}{|\sigma|^p}, \quad p > 0 \quad (1.18)$$

$$\log[G_+(\alpha)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{i(a+\varepsilon)-\infty}^{i(a+\varepsilon)+\infty} \frac{\log[G(\zeta)]}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (1.19)$$

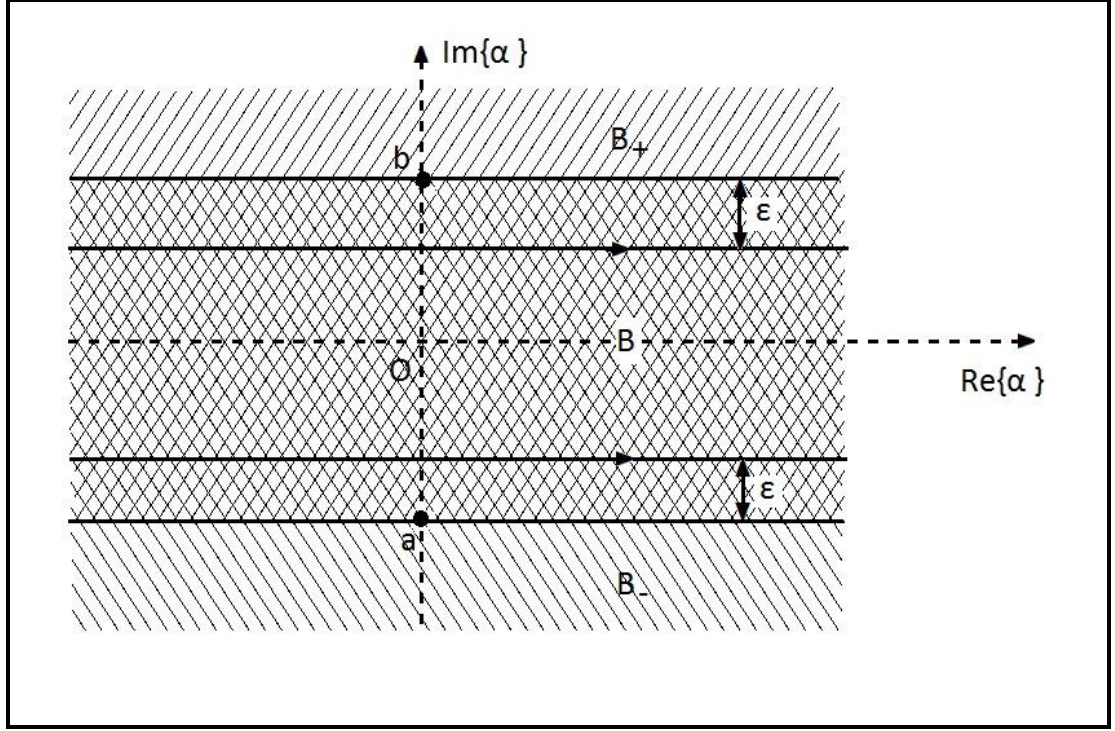
$$\log[G_-(\alpha)] = \frac{-1}{2\pi i} \int_{i(b-\varepsilon)-\infty}^{i(b-\varepsilon)+\infty} \frac{\log[G(\zeta)]}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (1.20)$$

$$G(\alpha) = G_+(\alpha)G_-(\alpha) \quad (1.21)$$

Bu halde Denklem (1.19) ve Denklem (1.20) ile tanımlı $G_+(\alpha)$ ve $G_-(\alpha)$ fonksiyonları $(a + \varepsilon) < \text{Im}\{\alpha\} < (b - \varepsilon)$ bandı için Denklem (1.21) ile ifade edilen Birinci Temel Problem'in bir özel çözümüdür. Burada ε , pozitif ve yeterince küçük bir sayıdır.

Denklem (1.20) içerisinde ζ yerine $-\zeta$ ve a yerine $-a$ koyulması durumunda ve $G(\zeta)$ 'nin çift, B 'nin ise reel eksene göre simetrik olması şartının sağlanması durumunda Denklem (1.19) elde edilir. Böyle bir durumda her zaman Denklem (1.22) geçerlidir.

$$G_-(\alpha) = G_+(-\alpha), \quad \alpha \in B_+ \quad (1.22)$$



Şekil 1.4. Kompleks α düzlemindeki integrasyon çizgileri

1.4. Sağ Yanlı Wiener-Hopf Denklemi

Denklem (1.23) ile gösterilen ve sağ tarafı sıfırdan farklı olan denklemdeki $g(\alpha)$ fonksiyonu B şeridi içinde regülerdir. Bu halde Denklem (1.23)'ün homojen kısmına ilişkin Birinci Temel Problem'in çözüldüğü ve Denklem (1.24)'te verilen $G_+(\alpha)$ ve $G_-(\alpha)$ 'nin elde edildiği durumda Denklem (1.25)'i yazmak mümkün olur.

$$\Phi_+(\alpha) + G(\alpha)\Phi_-(\alpha) = g(\alpha), \quad \alpha \in B \quad (1.23)$$

$$G(\alpha) \equiv G_+(\alpha)G_-(\alpha) \quad (1.24)$$

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{G_+(\alpha)} + G_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{G_+(\alpha)} \equiv f(\alpha), \quad \alpha \in B \quad (1.25)$$

$f(\alpha)$ fonksiyonunu Denklem (1.26) şartını sağlayacak şekilde Denklem (1.27)'deki gibi iki parçaya ayırmak mümkündür.

$$f(\alpha) \equiv f_+(\alpha) + f_-(\alpha) \quad (1.26)$$

$$f_+(\alpha) \equiv \frac{\Phi_+(\alpha)}{G_+(\alpha)}, \quad f_-(\alpha) \equiv G_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) \quad (1.27)$$

Böylece sağ yanlı Wiener-Hopf probleminin çözümü bilinen $f(\alpha)$ fonksiyonunun Denklem (1.26)'daki şekilde ayrılması problemine dönüşmüştür. Bu probleme İkinci Temel Problem adı verilmektedir. İkinci Temel Problem'in tek bir çözümü yoktur. Bu çözümlerden sadece biri Denklem (1.27)'e uygundur.

Denklem (1.26)'ya uygun ayrımlardan biri $f_+^{(0)}(\alpha)$, $f_-^{(0)}(\alpha)$ olsun. Bu durumda Denklem (1.25)'i aşağıdaki biçimde yeniden yazmak mümkündür.

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{G_+(\alpha)} - f_+^{(0)}(\alpha) = -[G_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) - f_-^{(0)}(\alpha)], \quad \alpha \in B \quad (1.28)$$

Bu durumda $P(\alpha)$ uygun bir fonksiyon olmak üzere Denklem (1.29) ve Denklem (1.30) geçerlidir.

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{G_+(\alpha)} = f_+^{(0)}(\alpha) + P(\alpha) \quad (1.29)$$

$$G_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) = f_-^{(0)}(\alpha) - P(\alpha) \quad (1.30)$$

$P(\alpha)$ 'nın belirlenmesi $G_+(\alpha)$, $G_-(\alpha)$, $\Phi_-(\alpha)$, $f_+^{(0)}(\alpha)$ ve $f_-^{(0)}(\alpha)$ 'nın $\alpha \rightarrow \infty$ için sahip oldukları asimptotik durumlar göz önünde bulundurularak yapılır. $P(\alpha)$ belirlendikten sonra Denklem (1.29) ve Denklem(1.30)'dan Denklem (1.31) ve Denklem (1.32) elde edilir.

$$\Phi_+(\alpha) = G_+(\alpha)[f_+^{(0)}(\alpha) + P(\alpha)] \quad (1.31)$$

$$\Phi_-(\alpha) = \frac{f_-^{(0)}(\alpha) - P(\alpha)}{G_-(\alpha)} \quad (1.32)$$

$\Phi_-(\alpha)$ 'nın B_- 'de kutbunun olmaması için aynı bölgede $G_-(\alpha)$ 'nın sıfırı olmamalıdır. Denklem (1.29) nedeniyle de $G_+(\alpha)$ 'nın B_+ 'da sıfırı olmamalıdır. Birinci Temel Problemin koşulları arasında bulunan $\Phi_+(\alpha)$ 'nın B_+ 'da, $\Phi_-(\alpha)$ 'nın B_- 'de sıfırının olmaması koşulu bu durumdan kaynaklanmaktadır.

Eğer Birinci Temel Problem'in sadece koşullu çözümü bulunabiliyorsa $G_-(\alpha)$ 'nın B_- 'de sıfırları olabilir. Böyle bir durumda $P(\alpha)$ öyle seçilmelidir ki $f_-^{(0)}(\alpha) - P(\alpha)$ fonksiyonu da aynı noktalarda sıfır olabilmelidir. Eğer bu koşul $P(\alpha)$ 'yı belirleyen diğer koşullarla çelişmezse Denklem (1.23) çözülebilir ve çözümü Denklem (1.31) ve Denklem (1.32) ile verilir. Aksi halde Denklem (1.23)'ün çözümü yoktur.

1.4.1. İkinci temel problem için teklik teoremi

Eğer İkinci Temel Problem'in çözümü var ise, bu çözüm toplamsal bir fonksiyon farkı ile tektir.

$f_+(\alpha)$, $f_-(\alpha)$ ve $f_+^{(0)}(\alpha)$, $f_-^{(0)}(\alpha)$ Denklem (1.26)'nın iki farklı çözümü olmak üzere bu iki çözüm Denklem (1.33)'i özdeşleyin sağlarlar.

$$f_+(\alpha) - f_+^{(0)}(\alpha) \equiv f_-(\alpha) - f_-^{(0)}(\alpha) \quad (1.33)$$

Bu durumda Denklem (1.34) ile tanımlanan $P(\alpha)$ fonksiyonu muhtemelen $\alpha = \infty$ hariç bütün düzlemde regülerdir.

$$P(\alpha) = \begin{cases} f_+(\alpha) - f_+^{(0)}(\alpha), & \alpha \in B_+ \\ f_-(\alpha) - f_-^{(0)}(\alpha), & \alpha \in B_- \end{cases} \quad (1.34)$$

Yani $P(\alpha)$ fonksiyonu bir tam fonksiyondur ve Denklem (1.35) ile Denklem (1.36)'yı sağlar.

$$f_+(\alpha) = f_+^{(0)}(\alpha) + P(\alpha) \quad (1.35)$$

$$f_-(\alpha) = f_-^{(0)}(\alpha) + P(\alpha) \quad (1.36)$$

Bununla birlikte $f_+^{(0)}(\alpha)$ ve $f_-^{(0)}(\alpha)$ İkinci Temel Problem'in bir özel çözümü ve $P(\alpha)$ keyfi bir tam fonksiyon olmak üzere Denklem (1.31) ve Denklem (1.32) ile tanımlı $f_+(\alpha)$ ve $f_-(\alpha)$ fonksiyonları da İkinci Temel Problem'in bir çözümüdür. Yani Denklem (1.35) ve Denklem (1.36) çözümün genel ifadesidir.

1.4.2. İkinci temel problemin bir özel çözümü

$f(\alpha)$ fonksiyonunun ifadesinin karışık olduğu ve tahmin yoluyla kolayca bulunamadığı hallerde aşağıdaki teorem İkinci Temel Problem'in bir özel çözümünü bulmakta faydalı olur.

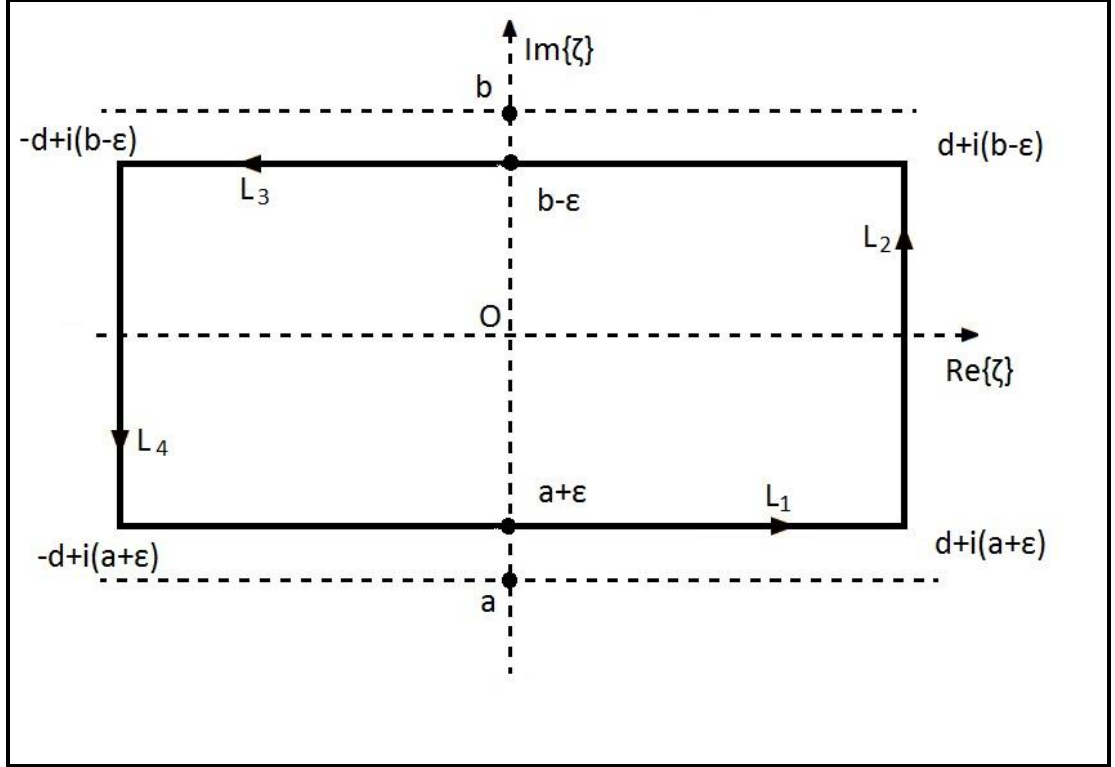
$a < \text{Im}\{\alpha\} < b$ bandı içerisinde regüler olan $f(\alpha)$ bu bant içinde kalan her kapalı bantta düzgün olarak Denklem (1.37)'yi sağlasın.

$$|f(\sigma + i\tau)| < \frac{C}{|\sigma|^p}, \quad p > 0 \quad (1.37)$$

Bu durumda Denklem (1.38) ve Denklem (1.39) ile tanımlı $f_+(\alpha)$ ve $f_-(\alpha)$ fonksiyonları $(a + \varepsilon) < \text{Im}\{\alpha\} < (b - \varepsilon)$ bandı için İkinci Temel Problem'in bir özel çözümüdür. Burada ε , pozitif ve yeterince küçük bir sayıdır.

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i(a+\varepsilon)-\infty}^{i(a+\varepsilon)+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (1.38)$$

$$f_-(\alpha) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{i(b-\varepsilon)-\infty}^{i(b-\varepsilon)+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (1.39)$$



Şekil 1.5. Kompleks ζ düzlemindeki integrasyon çizgileri

$\text{Im}\{\alpha\} = a + \epsilon$ ve $\text{Im}\{\alpha\} = b - \epsilon$ doğrularının $2d$ uzunluğundaki parçaları ile bu parçaların uçlarını birleştiren $\text{Re}\{z\} = d$ ve $\text{Re}\{z\} = -d$ doğrularına ait doğru parçalarından oluşan kapalı C eğrisi göz önünde bulundurulduğunda, d sonsuza götürüldüğünde oluşan durum da göz önüne alınıp Denklem (1.38) ve Denklem (1.39) denklemlerindeki α noktalarının C içinde düşünerek Cauchy teoremine göre Denklem (1.40) yazılır.

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (1.40)$$

$$\left| \int_{L_2, L_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right| \leq \frac{C(b-a)}{d^p (d - |\text{Re}\{\alpha\}|)} \quad (1.41)$$

Görülebileceği gibi L_2 ve L_4 üzerindeki integraller için yazılan Denklem (1.41) ifadesi $d \rightarrow \infty$ için sıfıra doğru gider. Bununla birlikte $d \rightarrow \infty$ durumunda L_1 için alınan integral Denklem (1.38) ile verilen $f_+(\alpha)$ 'ya, L_3 için alınan integral ise

Denklem (1.39) ile verilen $f_-(\alpha)$ 'ya gider. O halde gerçekten de $(a + \varepsilon) < \text{Im}\{\alpha\} < (b - \varepsilon)$ için Denklem (1.42) geçerlidir.

$$f(\alpha) \equiv f_+(\alpha) + f_-(\alpha) \quad (1.42)$$

Denklem (1.37)'den rahatlıkla görülebileceği gibi L_1 üzerindeki integrallerle ifade edilmiş olan fonksiyon L_1 'in yukarısında, L_3 üzerindeki integrallerle ifade edilmiş olan fonksiyon L_3 'ün aşağısında regüler fonksiyonlardır.

Denklem (1.39)'da ζ ve a yerine $-\zeta$ ve $-a$ koyulursa; $f(\zeta)$ 'nin çift, B 'nin de reel eksene göre simetrik olması halinde Denklem (1.38) elde edilir. Böyle bir durumda her zaman Denklem (1.43) geçerlidir.

$$f_-(-\alpha) = f_+(\alpha), \quad \alpha \in B_+, \quad f(\alpha) = f(-\alpha) \quad (1.43)$$

Benzer şekilde $f(\zeta)$ tek iken ise Denklem (1.44) geçerlidir.

$$f_-(-\alpha) = -f_+(\alpha), \quad \alpha \in B_+, \quad f(\alpha) = -f(-\alpha) \quad (1.44)$$

Birinci Temel Problemin bir özel çözümünün elde edilmesi sırasında kullanılan $\log[G(\alpha)]$ fonksiyonu, yukarıda verilen teoremin koşullarını sağlar. Bu durumda $(a + \varepsilon) < \text{Im}\{\alpha\} < (b - \varepsilon)$ bandında Denklem (1.45) şartını sağlayan $f_+(\alpha)$ ve $f_-(\alpha)$ fonksiyonları Denklem (1.38) ve Denklem (1.39) yardımıyla hesaplanabilir.

$$\log[G(\alpha)] = f_+(\alpha) + f_-(\alpha) \quad (1.45)$$

Denklem (1.46)'ya göre, Denklem (1.21)'i sağlayan öyle bir $G_+(\alpha)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyonun uygun bir logaritması Denklem (1.19) ile verilen fonksiyona eşittir. Aynı şekilde Denklem (1.21)'i sağlayan öyle bir $G_-(\alpha)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyonun uygun bir logaritması Denklem (1.20) ile verilen fonksiyona eşittir.

$$G(\alpha) = e^{\log[G(\alpha)]} \equiv e^{f_+(\alpha) + f_-(\alpha)} = e^{f_+(\alpha)} e^{f_-(\alpha)} = G_+(\alpha) G_-(\alpha) \quad (1.46)$$

$\rho = a$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ ile tanımlı iç silindir ise eksenel doğrultuda sonsuzdur ve $z < 0$ 'da mükemmel iletkendir. $z > 0$ 'da ise $Z = \eta Z_0$ ile karakterize edilen bir empedans yüzeyi vardır. Burada Z_0 boşluğun karakteristik empedansını ifade eder.

ω açısal frekansı göstermek üzere, zamana bağlılığın $e^{-i\omega t}$ çarpanı ile ifade edildiği monokromatik halde Denklem (2.1) ile verilmiş bulunan TEM modlu elektromagnetik dalganın kılavuz içerisinde $+z$ yönünde yayıldığını düşünülebilir. $H_\rho^i = 0$, $H_\phi^i = u^i$, $H_z^i = 0$ verilmiştir.

$$H_\phi^i = u^i = \frac{e^{ikz}}{\rho} \quad (2.1)$$

Problemin simetrisinden dolayı bütün alan bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$H_\phi = u(\rho, z) \quad (2.2)$$

$$E_\rho = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} u(\rho, z) \quad (2.3)$$

$$E_z = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho u(\rho, z)) \quad (2.4)$$

Problemin formülasyonunun sağlanabilmesi için toplam alan Denklem (2.5)'te gösterildiği şekilde parçalı bir fonksiyon olarak ifade edilebilir.

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z), & \rho > b, \quad z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z), & \rho \in (a, b), \quad z > 0 \\ u^i(\rho, z) + u_3(\rho, z), & \rho \in (a, b), \quad z < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Burada toplam alan dalga kılavuzunun içinde $\rho = a$ ile $\rho = b$ arasında, dalga kılavuzunun dışında $\rho = a$ ile $\rho = b$ arasında ve $\rho > b$ bölgesinde olmak üzere üç parçaya ayrılmıştır. Analizi kolaylaştıran bu ayırım sonucunda ortaya çıkan alanlar birbirlerine sınır ve süreklilik koşullarıyla bağlıdır.

Ayrıca Denklem (2.5)'te geçen $u^i(\rho, z)$, $u_1(\rho, z)$, $u_2(\rho, z)$ ve $u_3(\rho, z)$ alanları aşağıdaki Helmholtz denklemini sağlarlar.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right] u_n(\rho, z) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Burada k boşluğun dalga sayısını göstermektedir. Bazı matematik işlemleri anlamlı kılabilmek için ortamın çok küçük de olsa bir iletkenliğinin olduğu, yani k 'nın çok küçük bir sanal kısma sahip olduğunu düşünülecektir. Kayıpsız duruma ilişkin sonuçlar ise analiz sonunda $\text{Im}(k) \rightarrow 0$ yapılarak elde edilecektir.

2.2. Sınır, Süreklilik, Ayırıt ve Radyasyon Koşullarının Belirlenmesi

Bir empedans yüzeyindeki sınır koşulu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.[15]

$$E_z = \eta Z_0 H_\phi \quad (2.7)$$

Denklem (2.2) ve Denklem (2.4) yardımıyla η yüzeyi ile mükemmel iletken yüzey için Denklem (2.7) açık bir şekilde yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_1(\rho, z)] \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (2.8)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_3(\rho, z)] \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (2.9)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_3(\rho, z)] \Big|_{\rho=a} = 0, \quad z > 0 \quad (2.10)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_2(\rho, z)] \Big|_{\rho=a} = \eta Z_0 u_2(\rho, z) \Big|_{\rho=a}, \quad z > 0 \quad (2.11)$$

Denklem (2.8), Denklem (2.9), Denklem (2.10) ve Denklem (2.11) düzenlenirse ve u_1 , u_2 ile u_3 alanları için bu alanların kendilerinin ve türevlerinin sürekli olması

gerektiği koşulu göz önünde bulundurulursa aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları yazılabilir.

$$u_1(b, z) + b \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (2.12)$$

$$u_3(b, z) + b \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (2.13)$$

$$u_3(a, z) + a \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0, \quad z > 0 \quad (2.14)$$

$$(1 + ika\eta)u_2(a, z) + a \frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0, \quad z > 0 \quad (2.15)$$

$$u_2(b, z) = u_1(b, z), \quad z > 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b}, \quad z > 0 \quad (2.17)$$

$$u^i(\rho, 0) + u_3(\rho, 0) = u_2(\rho, 0), \quad \rho \in (a, b) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u^i(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \rho \in (a, b) \quad (2.19)$$

Yukarıdaki sınır ve süreklilik koşulları ve Denklem (2.6) ile tanımlı karma sınır değer probleminin çözülmesi hedeflenmektedir ve bu problemin çözümünün tek olabilmesi için aşağıdaki ayırıt ve radyasyon koşullarının da kullanılması gerekmektedir.

$$u^T(b, z) = O(|z|^{1/2}), \quad |z| \rightarrow 0 \quad (2.20)$$

$$u_1(\rho, z) = O\left(\frac{e^{ik|\rho|}}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

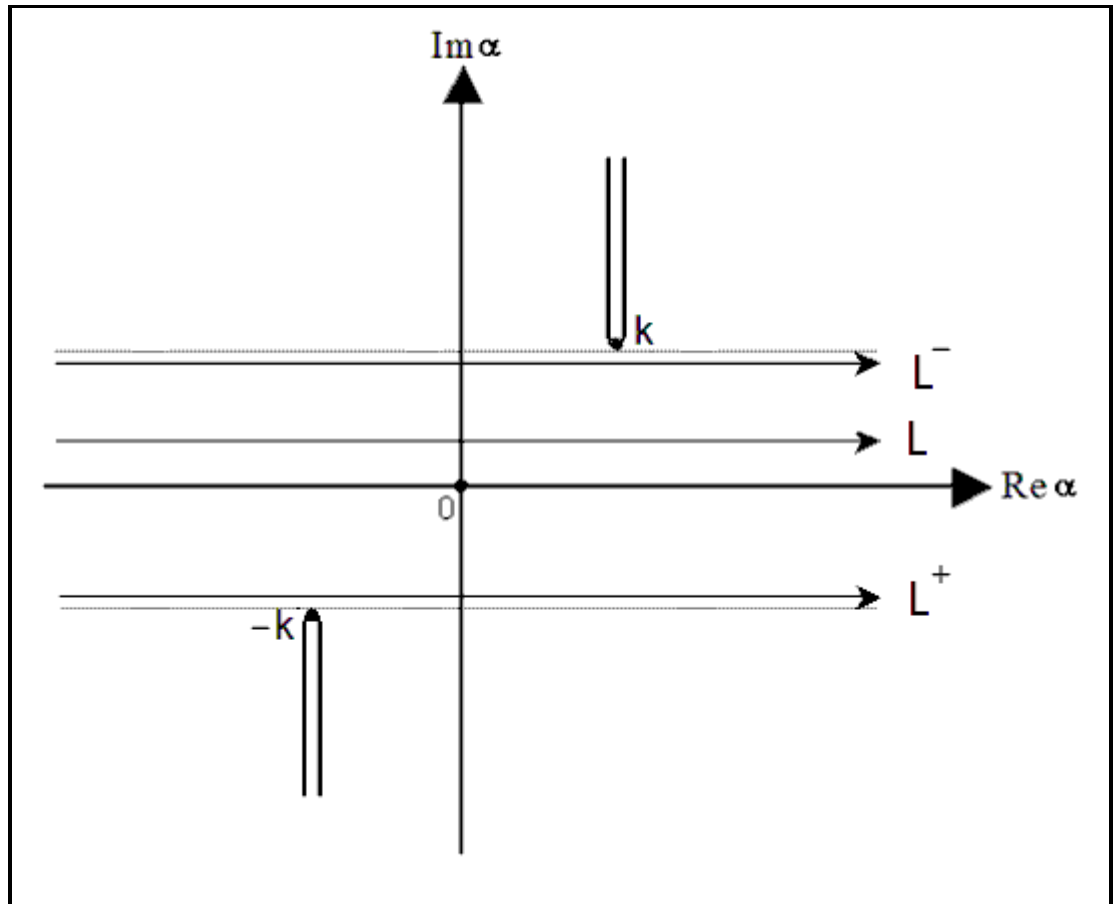
2.3. u_1 ve u_2 Alan İfadelerinin Fourier Dönüşümlerinin Elde Edilmesi

$\rho > b$ için $u_1(\rho, z)$ saçılan alanına göre Denklem (2.6)'nın $z \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde Fourier dönüşümü alındığında Denklem (2.22) elde edilir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] F(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.22)$$

Buradaki $K(\alpha)$, $\alpha = k$ 'den $\alpha = k + i\infty$ 'a ve $\alpha = -k$ 'den $\alpha = -k - i\infty$ 'a kadar kesilmiş kompleks α düzleminde tanımlı karekök fonksiyonudur.

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (2.23)$$



Şekil 2.2. Kompleks α düzlemi

$F(\rho, \alpha)$ fonksiyonu ise $u_1(\rho, z)$ 'nin Fourier dönüşümü olup α , kompleks Fourier dönüşüm değişkenidir.

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.24)$$

$\rho \rightarrow \infty$ iken radyasyon koşulu da göz önüne alınarak Denklem (2.22) homojen diferansiyel denklemi çözüldüğünde Denklem (2.25) formunda bir çözüm elde edilir.

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = A(\alpha) H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (2.25)$$

Burada, $K(0) = k$ olacaktır. $F^+(\rho, \alpha)$ ve $F^-(\rho, \alpha)$ ise sırasıyla $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ (üst yarı düzlem) ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ (alt yarı düzlem) bölgelerinde α 'nın analitik fonksiyonları olup aşağıda tanımlanmışlardır.

$$F^\pm(\rho, \alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.26)$$

Denklem (2.25)'deki $A(\alpha)$ spektral katsayısının aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak belirlenmesi mümkündür.

Denklem (2.12) sınır koşuluna Fourier dönüşümü uygulanırsa Denklem (2.27) elde edilir.

$$F^-(b, \alpha) + b\dot{F}^-(b, \alpha) = 0 \quad (2.27)$$

Burada, (\cdot) ρ 'ya göre türev alındığını göstermektedir. Denklem (2.5)'e Denklem (2.27) sınır koşulu uygulanırsa Denklem (2.28) şeklinde yapılan bir tanım yardımıyla $A(\alpha)$ spektral katsayısı aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$P^+(\alpha) = G^+(b, \alpha) + b\dot{G}^+(b, \alpha) = F^+(b, \alpha) + b\dot{F}^+(b, \alpha) \quad (2.28)$$

$$A(\alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \quad (2.29)$$

Dolayısıyla Denklem (2.25)'te Denklem (2.29)'un yerine yazılmasıyla $u_1(\rho, z)$ alanının Fourier dönüşümü Denklem (2.30)'daki haliyle elde edilmiş olur.

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (2.30)$$

Saçılan alan $u_2(\rho, z)$ 'nin Helmholtz denklemini sağladığı $\rho \in (a, b)$, $z > 0$ bölgesi ele alındığı halde ise Denklem (2.6)'nın $z \in (0, \infty)$ aralığında Fourier dönüşümü alındığında Denklem (2.31) sağ yanlı denklemi elde edilir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] G^+(\rho, \alpha) = f(\rho) - i\alpha g(\rho) \quad (2.31)$$

Burada $G^+(\rho, \alpha)$, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde α 'nın analitik fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.32)$$

Denklem (2.22)'den farklı olarak sağ tarafı sıfır olmayan Denklem (2.31)'de görülen $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$f(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, z) \Big|_{z=0} \quad (2.33)$$

$$g(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad (2.34)$$

Denklem (2.31) sağ yanlı denkleminin $\rho = a$ ve $\rho = b$ 'de sınır koşullarını sağlayan bir özel çözümünü elde etmek için Green fonksiyonu yöntemi kullanılabilir.

Denklem (2.31)'e ilişkin Green fonksiyonunun, Denklem (2.35)'i Denklem (2.36), Denklem (2.37), Denklem (2.38) ve Denklem (2.39) şartları altında sağlaması gerekmektedir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (a, b) \quad (2.35)$$

$$\mathcal{G}(\rho, t+0, \alpha) = \mathcal{G}(\rho, t-0, \alpha) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t+0, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t-0, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.37)$$

$$\mathcal{G}(b, t, \alpha) + b \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) \Big|_{\rho=b} = 0 \quad (2.38)$$

$$(1 + i k a \eta) \mathcal{G}(a, t, \alpha) + a \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (2.39)$$

Bu şartları sağlayan Green fonksiyonu aşağıdaki formda olmalıdır.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \begin{cases} AJ_1(K(\alpha)\rho) + BY_1(K(\alpha)\rho), & t < \rho \\ CJ_1(K(\alpha)\rho) + DY_1(K(\alpha)\rho), & t > \rho \end{cases} \quad (2.40)$$

Burada geçen A, B, C ve D bilinmeyen katsayılar olup Denklem (2.36), Denklem (2.37), Denklem (2.38) ve Denklem (2.39) şartları yardımıyla bulunacaklardır.

Denklem (2.38) ve Denklem (2.39) koşulları kullanılarak A ve C katsayıları sırasıyla B ve D cinsinden yazılırsa Green fonksiyonu Denklem (2.41) halinde yazılabilir.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \begin{cases} B \left\{ \begin{array}{l} Y_1(K(\alpha)\rho) \cdots \\ \cdots - J_1(K(\alpha)\rho) \frac{i k \eta_2 Y_1(K(\alpha)a) + K(\alpha) Y_0(K(\alpha)a)}{i k \eta_2 J_1(K(\alpha)a) + K(\alpha) J_0(K(\alpha)a)} \end{array} \right\}, & t < \rho \\ D \left\{ Y_1(K(\alpha)\rho) - J_1(K(\alpha)\rho) \frac{Y_0(K(\alpha)b)}{J_0(K(\alpha)b)} \right\}, & t > \rho \end{cases} \quad (2.41)$$

Denklem (2.36) ve Denklem (2.37) süreklilik bağıntıları da kullanılarak B ve D katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B = \frac{\pi J_0(K(\alpha)b) Y_1(K(\alpha)t) - Y_0(K(\alpha)b) J_1(K(\alpha)t)}{2 J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b)} \quad (2.42)$$

$$D = \frac{\pi J_0(K(\alpha)b) J(\alpha) Y_1(K(\alpha)t) - Y(\alpha) J_1(K(\alpha)t)}{2 J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b)} \quad (2.43)$$

Burada geçen $J(\alpha)$ ve $Y(\alpha)$ aşağıda tanımlanmıştır.

$$J(\alpha) = ik\eta J_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)J_0[K(\alpha)a] \quad (2.44)$$

$$Y(\alpha) = ik\eta Y_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)Y_0[K(\alpha)a] \quad (2.45)$$

Böylelikle Green fonksiyonunu Denklem (2.46) biçiminde yazmak mümkün olur.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \left\{ \frac{\left[K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_1[K(\alpha)\rho] - Y(\alpha) J_1[K(\alpha)\rho] \right] \cdots \right.}{\left. \cdots \left[J_0[K(\alpha)b] Y_1[K(\alpha)t] - J_1[K(\alpha)t] Y_0[K(\alpha)b] \right] \right\}}{K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b) \right]}, t < \rho \\ \left\{ \frac{\left[K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_1[K(\alpha)t] - Y(\alpha) J_1[K(\alpha)t] \right] \cdots \right.}{\left. \cdots \left[J_0[K(\alpha)b] Y_1[K(\alpha)\rho] - J_1[K(\alpha)\rho] Y_0[K(\alpha)b] \right] \right\}}{K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b) \right]}, t > \rho \end{cases} \quad (2.46)$$

Denklem (2.39) şartı kullanılarak A katsayısı B cinsinden yazıldığında Denklem (2.31)'in homojen çözümü Denklem (2.47) biçiminde yazılabilir.

$$G_h^+(\rho, \alpha) = B(\alpha) \frac{J(\alpha) Y_1[K(\alpha)\rho] - Y(\alpha) J_1[K(\alpha)\rho]}{J(\alpha) Y_1} \quad (2.47)$$

Bu durumda $G^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$G^+(\rho, \alpha) = G_h^+(\rho, \alpha) + \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] \mathcal{G}(t, \rho, \alpha) dt \quad (2.48)$$

Dolayısıyla,

$$G^+(\rho, \alpha) = B(\alpha) \frac{J(\alpha) Y_1[K(\alpha)\rho] - Y(\alpha) J_1[K(\alpha)\rho]}{J(\alpha) Y_1} + \dots \quad (2.49)$$

$$\dots \frac{1}{K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b) \right]} \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] Q(t, \rho, \alpha) dt$$

yazılabilir.

Burada geçen $Q(t, \rho, \alpha)$ fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır.

$$Q(t, \rho, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} & \left[K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_1 [K(\alpha) \rho] - Y(\alpha) J_1 [K(\alpha) \rho] \right] \cdots \right. \\ & \left. \cdots \left[J_0 [K(\alpha) b] Y_1 [K(\alpha) t] - J_1 [K(\alpha) t] Y_0 [K(\alpha) b] \right] \right\}, t < \rho \\ \left\{ \begin{aligned} & \left[K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_1 [K(\alpha) t] - Y(\alpha) J_1 [K(\alpha) t] \right] \cdots \right. \\ & \left. \cdots \left[J_0 [K(\alpha) b] Y_1 [K(\alpha) \rho] - J_1 [K(\alpha) \rho] Y_0 [K(\alpha) b] \right] \right\}, t > \rho \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (2.50)$$

Denklem (2.28)'de $G^+(\rho, \alpha)$ yerine $G_n^+(\rho, \alpha)$ koyulması yardımıyla $B(\alpha)$ katsayısı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B(\alpha) = \frac{J(\alpha) P^+(\alpha)}{K(\alpha) b \left[J(\alpha) Y_0 [K(\alpha) b] - Y(\alpha) J_0 [K(\alpha) b] \right]} \quad (2.51)$$

Bu durumda $G^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonunu Denklem (2.52)'deki şekilde yazmak mümkün olur.

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} \left[\frac{J(\alpha) Y_1 [K(\alpha) \rho] - Y(\alpha) J_1 [K(\alpha) \rho]}{b} P^+(\alpha) \cdots \right. \\ \left. \cdots + \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] Q(t, \rho, \alpha) t dt \right] \quad (2.52)$$

Burada,

$$M(\alpha) = K(\alpha) \left[J(\alpha) Y_0 [K(\alpha) b] - Y(\alpha) J_0 [K(\alpha) b] \right] \quad (2.53)$$

Denklem (2.52) eşitliğinin sol tarafı $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde regüler olduğundan sağ tarafı da ilgili bölgede regüler olmalıdır. Fakat Denklem (2.52) eşitliğinin sağ tarafının regülerliği kompleks α düzleminin $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarısında oluşan basit kutupların yani $\alpha = \alpha_m$ noktalarının varlığı sebebiyle bozulabilir. Bu kutuplar Denklem (2.53) ile tanımlanan $M(\alpha)$ fonksiyonunun basit sıfırlarını oluşturmaktadırlar ve aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$M(\alpha_m) = 0, \quad \text{Im}(\alpha_m) > \text{Im}(-k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Bu kutuplar rezidülerinin sıfır olmasının zorlanması suretiyle kaldırılabilirler. Yani $M(\alpha_m)$ 'nin sıfıra eşit olduğu durumlarda Denklem (2.52)'nin sağ yanının geri kalan kısmının da sıfır olması koşulu öne sürülerek denklemin $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde regülerliğini bozan durumlar ortadan kaldırılmış olur. Bu nedenle Denklem (2.55) yazılır.

$$\frac{J(\alpha_m)Y_1[K(\alpha_m)\rho] - Y(\alpha_m)J_1[K(\alpha_m)\rho]}{b} P^+(\alpha_m) \dots \quad (2.55)$$

$$\dots + \int_a^b [f(t) - i\alpha_m g(t)] Q(t, \rho, \alpha_m) t dt = 0$$

Denklem (2.55)'den $P^+(\alpha_m)$ 'nin çekilmesiyle ve integralin seriye açılmasıyla Denklem (2.56) elde edilir.

$$P^+(\alpha_m) = -\frac{\pi}{2} K_m b [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m \quad (2.56)$$

Burada,

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_m} \int_a^b \begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} \left[J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b) \right] \rho d\rho \quad (2.57)$$

$$\Delta_m = \frac{b^2}{2} \left(\frac{2}{\pi K_m b} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \left[1 + \frac{ik\eta_2}{K_m^2 a} (2 + ik\eta_2 a) \right] \tilde{L}_1^2 \quad (2.58)$$

$$\tilde{L}_1 = J_0(K_m b) Y_1(K_m a) - J_1(K_m a) Y_0(K_m b) \quad (2.59)$$

$$K_m = K(\alpha_m) \quad (2.60)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.4. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilmesi

Denklem (2.16) ve Denklem (2.17) süreklilik koşulları göz önünde bulundurularak Denklem (2.61) yazılır.

$$F^+(b, \alpha) = G^+(b, \alpha) \quad (2.61)$$

Denklem (2.30)'dan $F^+(b, \alpha)$ 'nın ve Denklem (2.52)'den $G^+(b, \alpha)$ 'nın çekilmesiyle Denklem (2.62)'e ulaşılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)} P^+(\alpha) - \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta_2} = \dots \\ \dots \frac{1}{M(\alpha)} \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] [J(\alpha)Y_1(Kt) - Y(\alpha)J_1(Kt)] t dt \end{aligned} \quad (2.62)$$

Burada kullanılan $N(\alpha)$ ve $M_j(\alpha)$ fonksiyonları, Denklem (2.63) ve Denklem (2.64) ile ifade edilmiştir.

$$N(\alpha) = \frac{H_0^1(Kb)}{H_1^1(Kb)M_0(\alpha) + H_0^1(Kb)M_1(\alpha)} \quad (2.63)$$

$$M_j(\alpha) = J(\alpha)Y_j(Kb) - Y(\alpha)J_j(Kb), \quad j=0,1 \quad (2.64)$$

Denklem (2.57)'de de görülen $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ fonksiyonları Dini koşulunu sağlayan mutlak integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından aşağıdaki şekilde tam ortogonal fonksiyonlar kümesi cinsinden seriye açılabilirler[25].

$$\begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} [J_0(K_m b)Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho)Y_0(K_m b)] \quad (2.65)$$

Denklem (2.65)'te geçen seri ifadesi Denklem (2.62)'de yerine yazılıp ortaya çıkan integral hesaplanırsa, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olan ve Denklem (2.66)'da yazılmış olan Wiener-Hopf denklemi elde edilmiş olur.

$$\frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)}P^+(\alpha) - bF^-(b, \alpha) = -b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m][J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (2.66)$$

Burada,

$$J_m = J(\alpha_m) \quad (2.67)$$

$$Y_m = Y(\alpha_m) \quad (2.68)$$

biçiminde yazılmıştır.

2.5. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü

Burada amaç, Denklem (2.66)'daki $P^+(\alpha)$ fonksiyonunu elde etmektir. Bunun için önce Denklem (2.53) ve Denklem (2.63)'te tanımlanan $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ çekirdek fonksiyonları daha önceki bölümlerde açıklandığı gibi iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilir.

$$M(\alpha) = M^+(\alpha)M^-(\alpha) \quad (2.69)$$

$$N(\alpha) = N^+(\alpha)N^-(\alpha) \quad (2.70)$$

Buradaki $M^-(\alpha)$ ve $N^-(\alpha)$ fonksiyonları $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ alt yarı düzleminde, $M^+(\alpha)$ ve $N^+(\alpha)$ fonksiyonları $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(k)$ üst yarı düzleminde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır.

$M^+(\alpha)$ ve $N^+(\alpha)$ fonksiyonlarının açık ifadeleri [26]'da açıklanan yöntem uyarınca aşağıda verilmiştir.

$$M^+(\alpha) = \sqrt{M(0)} e^{\left\{ \frac{i\alpha(b-a)}{\pi} \left[1 - C - \ln \left(\frac{|\alpha|(b-a)}{\pi} + i \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) e^{\left(\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi} \right)} \quad (2.71)$$

$$N^+(\alpha) = \sqrt{N(\alpha)} \prod_{l=1}^L \left(\frac{\beta_l - \alpha}{\beta_l + \alpha} \right)^{1/2} e^{\left\{ \frac{i\alpha(b-a)}{\pi} \ln \left(\frac{2|\alpha|}{k} \right) \right\}} e^{\left\{ \frac{K(\alpha)(b-a)}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right) + \frac{1}{2} i(b-a)K(\alpha) + q(\alpha) \right\}} \quad (2.72)$$

$$q(\alpha) = \frac{1}{2} P \int_0^{\infty} K_w(w) \ln \left[\frac{\sqrt{k^2 - w^2 + \alpha}}{\sqrt{k^2 - w^2 - \alpha}} \right] dw \quad (2.73)$$

$$K_w(w) = \frac{(b-a)}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} \left[B_w(w) + B_w(we^{i\pi}) \right] \quad (2.74)$$

$$B_w(w) = \frac{bH_1^{(1)}(wb)}{H_0^{(1)}(wb)} \dots$$

$$\dots + \frac{\left[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb) \right] \begin{bmatrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik\eta a \\ -\left(\frac{i2k\eta}{w} + a \right) \end{bmatrix}}{\left[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb) \right] \begin{bmatrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ ik\eta \end{bmatrix}} \quad (2.75)$$

$$T_{ij}(w) = Y_i(wb)J_j(wa) - Y_j(wa)J_i(wb), \quad i, j = 0, 1 \quad (2.76)$$

Denklem (2.71)'deki, C Euler sabiti olup $C = 0,57721\dots$ 'dir. Denklem (2.72)'deki $\pm\beta_1$ ise $N(\alpha)$ fonksiyonunun kökleridir. Denklem (2.73)'deki P harfi ile tekil integralin Cauchy esas değerinin göz önüne alındığı belirtilmiştir. $M^\pm(\alpha)$ ve $N^\pm(\alpha)$ fonksiyonlarının $|\alpha| \rightarrow \infty$ için geçerli asimptotik ifadelerinin aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir.

$$M^\pm(\alpha) = |\alpha|^{1/2} e^{(b-a)|\alpha|} \quad (2.77)$$

$$N^\pm(\alpha) = e^{-(b-a)|\alpha|} \quad (2.78)$$

Denklem (2.66) $M^-(\alpha)N^-(\alpha)$ ile çarpılırsa Denklem (2.79) elde edilir.

$$\frac{P^+(\alpha)}{N^+(\alpha)M^+(\alpha)} - M^-(\alpha)N^-(\alpha) \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta} = \dots$$

$$\dots - bM^-(\alpha)N^-(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m] [J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (2.79)$$

Bu ifadenin sol yanındaki ilk iki terim kompleks α düzleminin sırasıyla üst ($\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$) ve alt ($\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$) yarılarında regüler fonksiyonlardır. Aynı denklemin sağ tarafındaki terimin her iki yarım düzlemde de tekillikleri vardır. Bu durumda önce sağ yandaki bu terime Wiener-Hopf ayrıştırması ve sonrasında Denklem (2.79)'a Liouville teoreminin uygulanmasıyla Denklem (2.80) elde edilir.

$$\frac{P^+(\alpha)}{N^+(\alpha)M^+(\alpha)} = b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m][J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]N^+(\alpha_m)M^+(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha + \alpha_m)} \quad (2.80)$$

2.6. Açınım Katsayılarının Hesabı

$\rho \in (a, b)$, $z < 0$ bölgesinde tanımlı olan $u_3(\rho, z)$ fonksiyonu dalga kılavuzu modları cinsinden Denklem (2.81) şeklinde yazılabilir.

$$u_3(\rho, z) = c_0 \frac{e^{-ikz}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] e^{-i\beta_n z} \quad (2.81)$$

Burada ξ_n 'ler aşağıdaki denklemin kökleridir.

$$[J_0(\xi_n b) Y_0(\xi_n a) - J_0(\xi_n a) Y_0(\xi_n b)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.82)$$

β_n 'ler ise dalga kılavuzu modlarına ilişkin yayılma sabitleridir.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 + \xi_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.83)$$

$$\xi_0 = 0 \rightarrow \beta_0 = k \quad (2.84)$$

Denklem (2.81)'in sağ yanındaki ilk terim kılavuz içerisinde gelen dalgaya ilişkin yansıyan alan ifadesidir. Denklem (2.18) ve Denklem (2.19) ile verilen süreklilik denklemleri Denklem (2.33), Denklem (2.34), Denklem (2.65) ve Denklem (2.81) ile birlikte değerlendirildiğinde aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} g_m [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] = \dots \\ \dots \frac{1}{\rho} + \frac{c_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} f_m [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] = \dots \\ \dots \frac{ik}{\rho} - ik \frac{c_0}{\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} i \beta_n c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Denklem (2.85) ve Denklem (2.86)'nın her iki yanı $[J_0(K_p b) Y_1(K_p \rho) - J_1(K_p \rho) Y_0(K_p b)]$ ifadesi ile çarpılıp ilgili denklemlerin ρ 'ya göre $\rho = a$ 'dan $\rho = b$ 'ye integrali alınırsa Denklem (2.87) ve Denklem (2.88) elde edilir.

$$\Delta_m g_m = (1 + c_0) I_m^{(1)} + I_m^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} I_n^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.87)$$

$$\Delta_m f_m = (1 - c_0) I_m^{(1)} + I_m^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \beta_n c_n}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} I_n^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.88)$$

Burada Δ_m Denklem (2.57) ve Denklem (2.58) ile, $I_m^{(1)}$, $I_m^{(2)}$, $I_n^{(3)}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$I_m^{(1)} = \int_a^b [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] d\rho \quad (2.89)$$

$$I_m^{(2)} = K_m a [J_0(K_m a) Y_0(K_m b) - J_0(K_m b) Y_0(K_m a)] \quad (2.90)$$

$$I_n^{(3)} = J_1(\xi_n a) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n a) \quad (2.91)$$

Denklem (2.80)'de $\alpha = \alpha_m$ koyulur ve Denklem (2.56) ile birlikte değerlendirilirse Denklem (2.92) ve Denklem (2.93) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi K_m b}{2} [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m = \dots \\
& \dots N^+(\alpha_m) M^+(\alpha_m) b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f_n - i\alpha_n g_n] N^+(\alpha_n) M^+(\alpha_n)}{2\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} I_n^{(4)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$I_n^{(4)} = J_n Y_1(K_n b) - Y_n J_1(K_n b) \tag{2.93}$$

Burada $J_n = J(\alpha_n)$ ve $Y_n = Y(\alpha_n)$ olarak tanımlanmıştır. Denklem (2.87), Denklem (2.88) ve Denklem (2.92) denklemleri f_m , g_m ve c_n ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$) bilinmeyen sabitlerini belirlemeye yarayan sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemini verir. Bu sonsuz denklemler sistemi, açılım serilerinin bir sayıda kesilmesiyle yaklaşık olarak çözülür.

2.7. Saçılan Alanın Hesabı ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde $\rho \in (a, b)$, $z < 0$ bölgesinde dominant moda ilişkin yansıma katsayısı ve $\rho > b$ bölgesindeki ışılan alan hesaplanarak kılavuz boyutları ve empedans gibi parametrelerin saçılan alana etkisi grafikler ile gösterilmiştir.

Öncelikle $\rho > b$ bölgesinde $F(\rho, \alpha)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü alınarak ışılan alanı elde edilir. Denklem (2.30) ifadesinden Denklem (2.94) elde edilir.

$$u_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{P^+(\alpha) H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] e^{-i\alpha z} d\alpha}{bK(\alpha) H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \tag{2.94}$$

Burada L , $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ şeridinde uzanan ve reel α eksenine paralel olan bir doğrudur. Denklem (2.95) ile gösterilen $H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho]$ fonksiyonunun $k\rho \rightarrow \infty$ için asimptotik ifadesi kullanılarak Denklem (2.94) yeniden düzenlenir ve integral en dik iniş çizgisi yöntemi ile hesaplanırsa Denklem (2.96) ve Denklem (2.97) elde edilir.

$$H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi K(\alpha)\rho}} e^{i\left(K(\alpha)\rho - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{2.95}$$

$$u_1(\rho, \theta) = H(\theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad kr \gg 1 \quad (2.96)$$

$$H(\theta) = -\frac{1}{\pi b \sin \theta} \frac{P^+(-k \cos \theta)}{H_0^{(1)}[k b \sin \theta]} \quad (2.97)$$

Burada r ve θ küresel koordinatları göstermektedir.

Son olarak Denklem (2.81) ile verilen $u_3(\rho, z)$ fonksiyonu, $\rho \in (a, b)$, $z < 0$ bölgesinde saçılan alan ifadesini göstermektedir. Bu ifadenin ilk terimi kılavuz içerisinde yayılan dominant TEM moduna ilişkin yansıyan alan terimidir ve c_0 katsayısı yansıyan alanın genliğini göstermektedir.

Aşağıdaki grafikler, eş eksenli dalga kılavuzunun iç iletkeninin ve dış iletkeninin yarıçaplarının yanı sıra iç iletkenin $z > 0$ bölgesindeki dışa uzayan parçasının yüzey empedans değerinin yansıyan alana ve rasyasyon alanına etkilerini göstermektedir. Grafikler iletim bölgesinde elde edilmiştir.

Şekil 2.3'te yansıyan alanın genliğinin ($|c_0|$), dalga sayısı ile değişim grafiği, $b = 1,7$ ve $\eta = 0,3i$ sabit alınıp a 'nın üç farklı değeri için verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi frekans arttıkça yansıma katsayısı hızla azalmaya başlamaktadır.

Şekil 2.4'te yansıyan alanın genliğinin ($|c_0|$) dalga sayısı ile değişim grafiği $a = 0,3$ ve $\eta = 0,3i$ sabit alınıp b 'nin üç farklı değeri için verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi yine, frekans arttıkça yansıma katsayısı azalmaktadır.

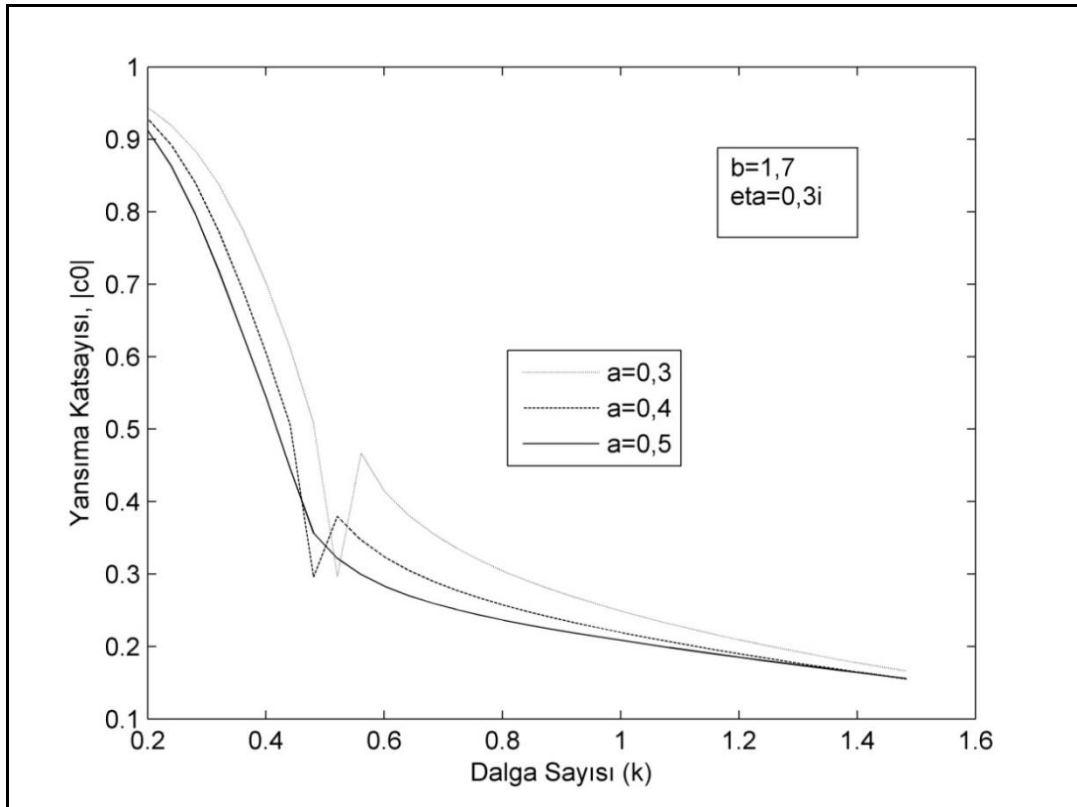
Şekil 2.5'te ise üç farklı η (yüzey empedansı) değeri için yansıyan alanın genliğinin ($|c_0|$), dalga sayısı ile değişim grafiği verilmiştir. Hesaplamalarda $b = 1,7$ ve $a = 0,3$ sabit alınmıştır. Bu grafikte de dalga sayısı ve dolayısıyla frekans artışı karşısında yansıma katsayısındaki azalma görülmektedir.

Şekil 2.6'da ışılan alanın Denklem (2.97) ile elde edilen asimptotik ifadesinin ($20 \log |H(\theta)|$), gözlem açısıyla değişimi üç farklı a (iç yarıçap) değeri için görülmektedir. Hesaplamalarda $b = 1,4$, $k = 2,0$ ve $\eta = 1,0i$ sabit alınmıştır. a 'nın

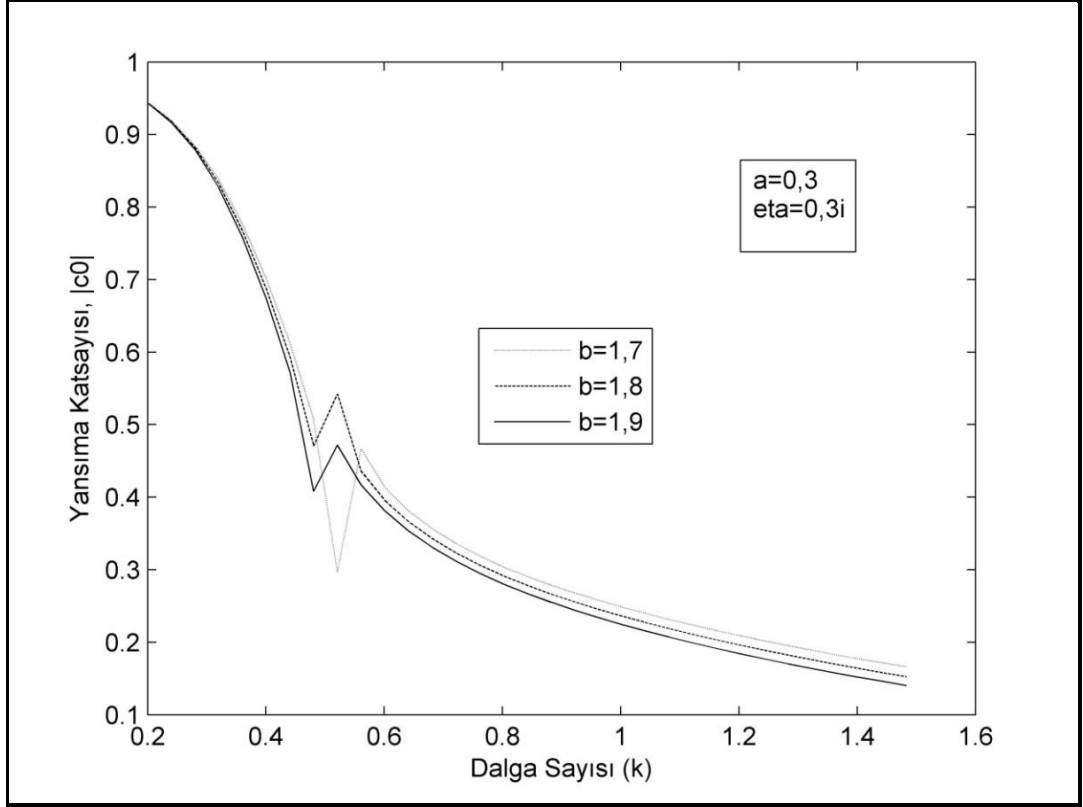
değeri arttıkça ışıyan alanın genlik değerinin tüm gözlem açılarında azaldığı görülmüştür.

Şekil 2.7’de ise üç farklı b (dış yarıçap) değeri için ışıyan alan genliğinin ($20\log|H(\theta)|$), gözlem açısıyla değişim grafiği görülmektedir. Hesaplamalarda $a = 0,3$, $k = 2,0$ ve $\eta = 1,0i$ sabit alınmıştır. b ’nin değeri arttıkça ışıyan alanın değerinin gözlem açısı $\theta \in (0^\circ - 90^\circ)$ bölgesinde artarken $\theta \in (90^\circ - 180^\circ)$ aralığında azaldığı görülmüştür.

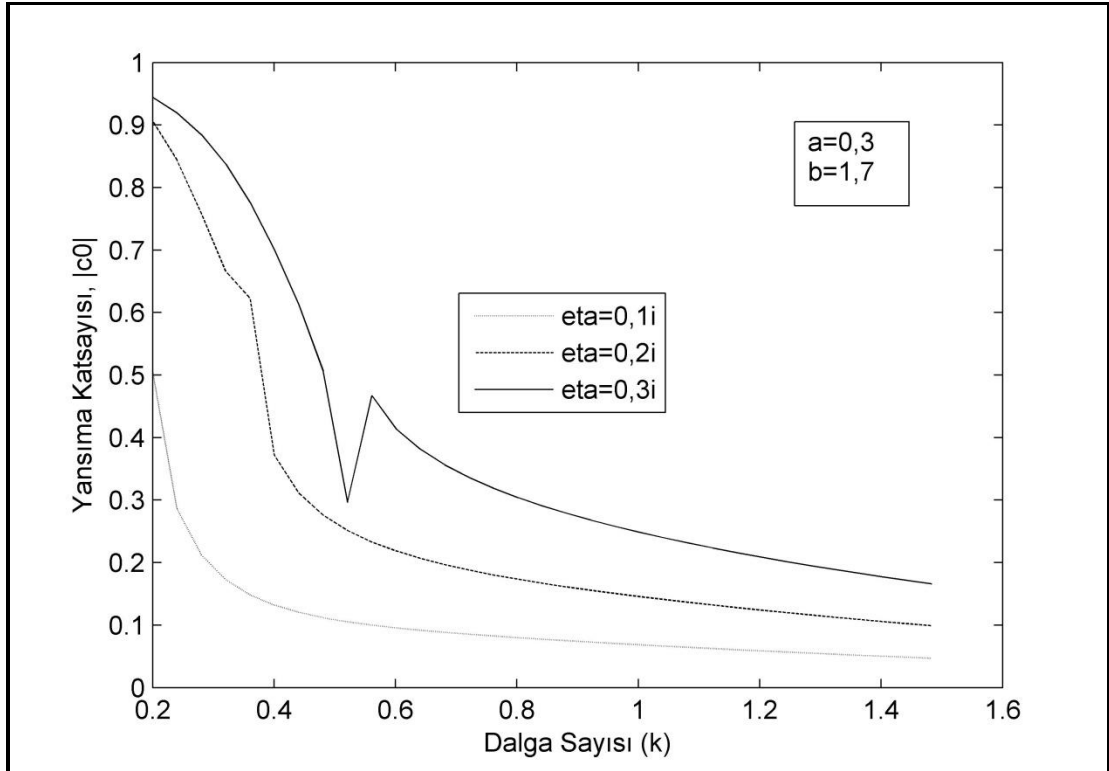
Şekil 2.8’de üç farklı η (yüzey empedansı) değeri için ışıyan alan genliğinin ($20\log|H(\theta)|$), gözlem açısıyla değişim grafiği kutupsal koordinat sisteminde verilmiştir. Hesaplamalarda $a = 0,3$, $b = 1,5$ ve $k = 2,0$ sabit alınmıştır. η ’nın değeri arttıkça ışıyan alanın genliğinin de arttığı gözlemlenmiştir.



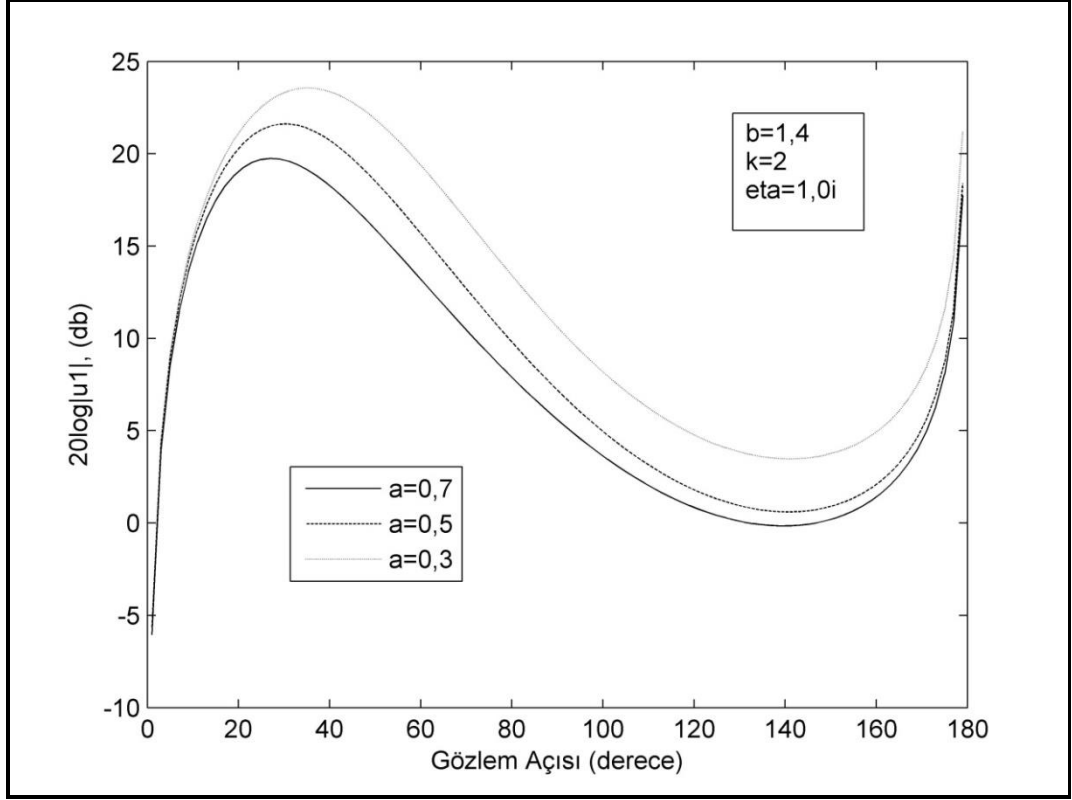
Şekil 2.3. İç iletkenin yarıçapının (a), yansıma katsayısı $|c_0|$ ’a etkisi



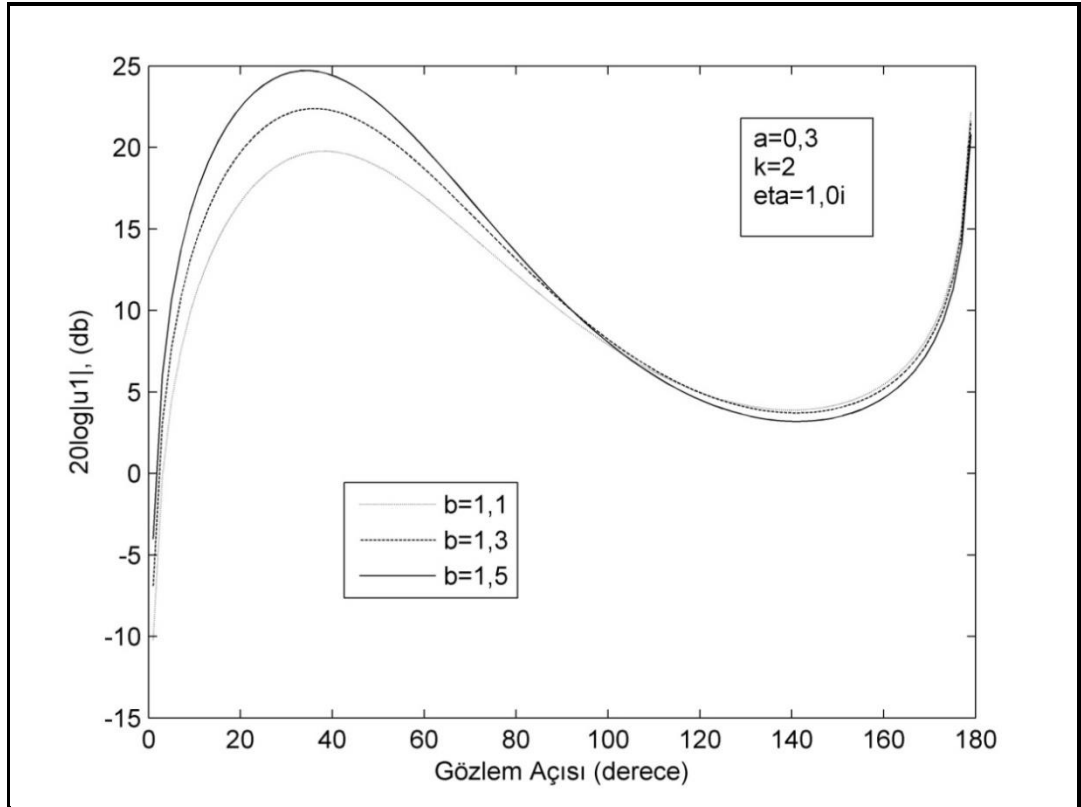
Şekil 2.4. Dış iletkenin yarıçapının (b), yansımaya katsayısı $|c_0|$ 'a etkisi



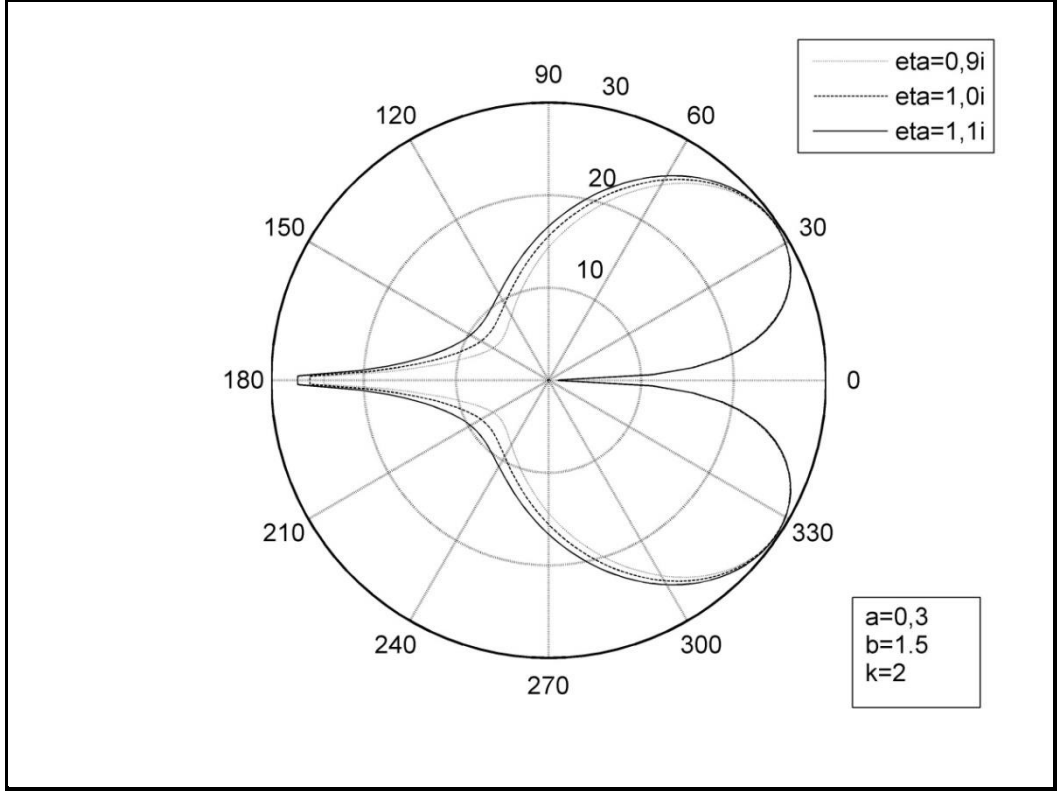
Şekil 2.5. Empedansın (η), yansımaya katsayısı $|c_0|$ 'a etkisi



Şekil 2.6. İç iletkenin yarıçapının (a), radyasyon alanına etkisi



Şekil 2.7. Dış iletkenin yarıçapının (b), radyasyon alanına etkisi

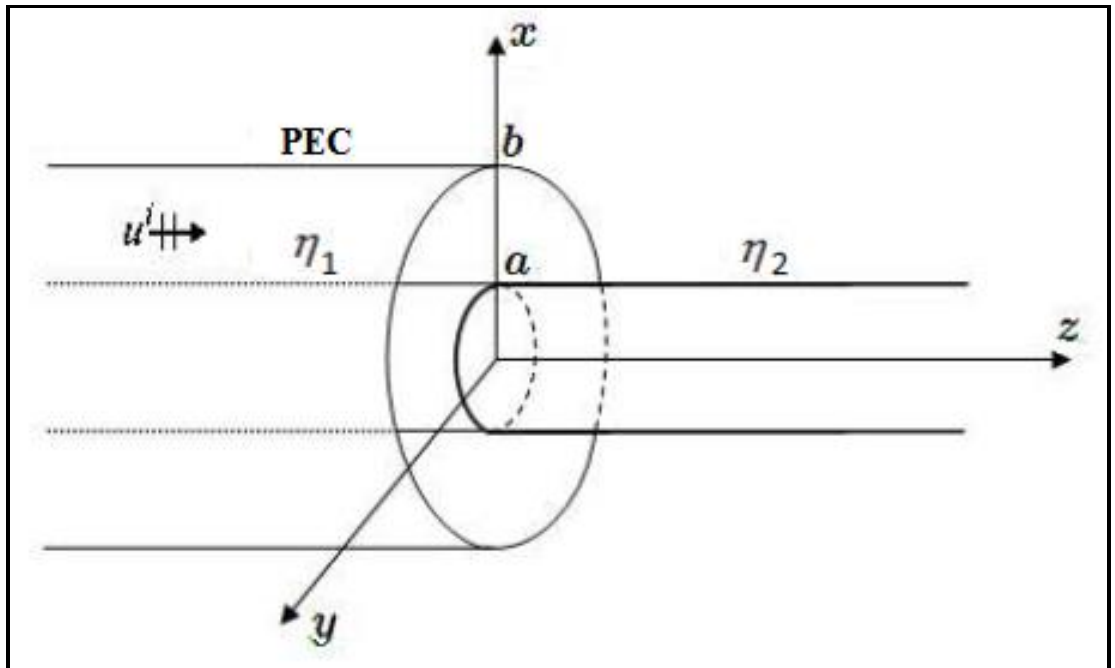


Şekil 2.8. Empedansın (η), radyasyon alanına etkisi

3. PARÇALI EMPEDANSA SAHİP SONSUZ İÇ SİLİNDİR VE YARI SONSUZ DIŞ İLETKENDEN OLUŞAN EŞ MERKEZLİ DAİRESEL DALGA KILAVUZUNDA HİBRİD TEM MODUNUN İŞİMASI

3.1. Problemin Tanımlanması ve Matematiksel Olarak Modellenmesi

Bu bölümde incelenen fiziksel yapı sonsuz ince, mükemmel iletken ve z doğrultusunda yarı sonsuz bir dış silindir ile z doğrultusunda ekstenel olarak sonsuza uzanan, $z < 0$ ve $z > 0$ 'da iki farklı empedans değerine sahip bir iç silindirden oluşan koaksiyel yapıdır. Bu sistem dalga kılavuzu bölgesinde hibrid TEM moduyla (TM_{00}) uyarılmaktadır.



Şekil 3.1. İç silindiri ekstenel doğrultuda sonsuza uzanan ve $z < 0$ ile $z > 0$ 'da iki farklı empedans değerine sahip olan, dış iletkeni ise yarı sonsuz bir eşeksenli dairesel dalga kılavuzu

Bir önceki problemde olduğu gibi problemi silindirik koordinat sisteminde tanımlamak kolaylık sağlayacaktır. (ρ, ϕ, z) silindirik koordinatlar olmak üzere, $\rho = b$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $z \in (-\infty, 0)$ ile belirli dış iletken yarı sonsuz, sonsuz ince ve

mükemmel iletkendir. $\rho = a$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ ile tanımlı iç silindir ise aksenal doğrultuda sonsuzdur ve $z < 0$ 'da $Z_1 = \eta_1 Z_0$ ve $z > 0$ 'da $Z_2 = \eta_2 Z_0$ ile karakterize edilen bir empedans yüzeyi vardır. Yine Z_0 boşluğun karakteristik empedansını ifade etmektedir.

ω açısal frekansı göstermek üzere, zamana bağlılığın $e^{-i\omega t}$ çarpanı ile ifade edildiği monokromatik halde gelen dalga u^i 'nin dalganın kılavuzu içerisinde $+z$ yönünde yayıldığını düşünülebilir. u^i 'nin hesaplanması tez çalışmasında ayrı bir kısımda incelenecektir. u^i , Wiener-Hopf denkleminin çözümünde kullanılacağı için henüz bilinmesine ihtiyaç yoktur.

$H_p^i = 0$, $H_\phi^i = u^i$, $H_z^i = 0$ verilmiştir. Problemin simetrisinden dolayı bütün alan bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$H_\phi = u(\rho, z) \quad (3.1)$$

$$E_\rho = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} u(\rho, z) \quad (3.2)$$

$$E_z = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho u(\rho, z)) \quad (3.3)$$

Bir önceki problemde olduğu gibi formülasyonunun sağlanabilmesi için toplam alan Denklem (3.4)'te gösterildiği şekilde parçalı bir fonksiyon olarak ifade edilebilir.

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z), & \rho > b, \quad z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z), & \rho \in (a, b), \quad z > 0 \\ u^i(\rho, z) + u_3(\rho, z), & \rho \in (a, b), \quad z < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Toplam alan, parçalı bir fonksiyon oluşturacak şekilde dalga kılavuzunun içinde $\rho = a$ ile $\rho = b$ arasında, dalga kılavuzunun dışında $\rho = a$ ile $\rho = b$ arasında ve $\rho > b$ bölgesinde olmak üzere üç parçaya ayrılmıştır. Birlikte toplam alanı ifade eden ve Denklem (3.4)'te geçen $u^i(\rho, z)$, $u_1(\rho, z)$, $u_2(\rho, z)$ ve $u_3(\rho, z)$ alanları,

birbirleriyle sınır ve süreklilik koşulları ile bağlı olup her biri Denklem (3.5) ile gösterilen Helmholtz denklemini sağlarlar.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right] u_n(\rho, z) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Burada k boşluğun dalga sayısına karşılık gelir. Bazı matematik işlemleri anlamlı kılabilmek için ortamın çok küçük de olsa bir iletkenliğinin olduğu, yani k 'nin çok küçük bir sanal kısma sahip olduğunu düşünülecektir. Kayıpsız duruma ilişkin sonuçlar ise yine analiz sonunda $\text{Im}(k) \rightarrow 0$ yapılarak elde edilecektir.

3.2. Sınır, Süreklilik, Ayrıt ve Radyasyon Koşullarının Belirlenmesi

Eldeki probleme dair sınır koşulları bir önceki probleme benzer şekilde elde edilebilir. Ancak bu sefer ikinci bir empedans yüzeyinin varlığı hesaba katılmalıdır.

$$E_z = \eta Z_0 H_\phi \quad (3.6)$$

Denklem (3.1) ve Denklem (3.3) yardımıyla η_1 ve η_2 yüzeyleri ile mükemmel iletken yüzey için Denklem (3.6) açık bir şekilde yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_1(\rho, z)] \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_3(\rho, z)] \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (3.8)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_3(\rho, z)] \Big|_{\rho=a} = \eta_1 Z_0 u_3(\rho, z) \Big|_{\rho=a}, \quad z > 0 \quad (3.9)$$

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_2(\rho, z)] \Big|_{\rho=a} = \eta_2 Z_0 u_2(\rho, z) \Big|_{\rho=a}, \quad z > 0 \quad (3.10)$$

Denklem (3.7), Denklem (3.8), Denklem (3.9) ve Denklem (3.10) denklemleri düzenlendiğinde u_1 , u_2 ile u_3 alanları için bu alanların kendilerinin ve türevlerinin sürekli olması gerektiği koşulu da hesaba katılarak aşağıdaki şekilde ifade edilen sınır ve süreklilik koşulları elde edilir.

$$u_1(b, z) + b \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (3.11)$$

$$u_3(b, z) + b \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0, \quad z < 0 \quad (3.12)$$

$$(1 + ika\eta_1) u_3(a, z) + a \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0, \quad z > 0 \quad (3.13)$$

$$(1 + ika\eta) u_2(a, z) + a \frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0, \quad z > 0 \quad (3.14)$$

$$u_2(b, z) = u_1(b, z), \quad z > 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b}, \quad z > 0 \quad (3.16)$$

$$u^i(\rho, 0) + u_3(\rho, 0) = u_2(\rho, 0), \quad \rho \in (a, b) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u^i(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial u_3(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u_2(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \rho \in (a, b) \quad (3.18)$$

Yukarıdaki sınır ve süreklilik koşulları ve Denklem (3.5) denklemi ile tanımlı karma sınır değer probleminin çözülmesi hedeflenmektedir ve bu problem için de problemin çözümünün tek olabilmesi için aşağıdaki ayrıt ve radyasyon koşullarının da göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

$$u^T(b, z) = O(|z|^{1/2}), \quad |z| \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

$$u_1(\rho, z) = O\left(\frac{e^{ik|\rho|}}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

3.3. u_1 ve u_2 Alan İfadelerinin Fourier Dönüşümlerinin Elde Edilmesi

$\rho > b$ bölgesi için $u_1(\rho, z)$ saçılan alanına göre Denklem (3.5)'in $z \in (-\infty, \infty)$ bandında Fourier dönüşümü alınmasıyla Denklem (3.21) elde edilir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] F(\rho, \alpha) = 0 \quad (3.21)$$

Bir önceki problemde de olduğu gibi $K(\alpha)$, $\alpha = k$ 'den $\alpha = k + i\infty$ 'a ve $\alpha = -k$ 'den $\alpha = -k - i\infty$ 'a kadar kesilmiş kompleks α düzleminde tanımlı karekök fonksiyonudur. Burada, $K(0) = k$ 'dir.

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (3.22)$$

$F(\rho, \alpha)$ fonksiyonu $u_1(\rho, z)$ 'nin Fourier dönüşümüdür. α ise kompleks Fourier dönüşüm değişkenidir.

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (3.23)$$

$\rho \rightarrow \infty$ olduğunda radyasyon koşulu da göz önüne alınarak Denklem (3.21) homojen diferansiyel denklemi çözüldüğünde Denklem (3.24) elde edilir.

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = A(\alpha) H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (3.24)$$

Burada $F^+(\rho, \alpha)$ ve $F^-(\rho, \alpha)$ sırasıyla $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ (üst yarı düzlem) ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ (alt yarı düzlem) bölgelerinde α 'nın analitik fonksiyonları olup aşağıda tanımlanmışlardır.

$$F^\pm(\rho, \alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (3.25)$$

Denklem (3.24)'teki $A(\alpha)$ spektral katsayısı, aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak belirlenecektir.

Denklem (3.11) sınır koşuluna Fourier dönüşümü uygulanırsa Denklem (3.26) ile gösterilen koşul elde edilir.

$$F^-(b, \alpha) + b\dot{F}^-(b, \alpha) = 0 \quad (3.26)$$

Burada (\cdot) ρ 'ya göre türev işlemini ifade etmektedir. Denklem (3.4)'e Denklem (3.26) sınır koşulu uygulandığında Denklem (3.27) ile tanımlanan $P^+(\alpha)$ yardımıyla $A(\alpha)$ spektral katsayısı Denklem (3.28) şeklinde elde edilmiş olur.

$$P^+(\alpha) = G^+(b, \alpha) + b\dot{G}^+(b, \alpha) = F^+(b, \alpha) + b\dot{F}^+(b, \alpha) \quad (3.27)$$

$$A(\alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \quad (3.28)$$

Böylelikle Denklem (3.24) ile Denklem (3.28)'in bir arada değerlendirilmesi suretiyle $u_1(\rho, z)$ alanının Fourier dönüşümü Denklem (3.29)'deki haliyle yazılır.

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (3.29)$$

Saçılan alan $u_2(\rho, z)$ göz önünde bulundurulduğunda, bu alan ifadesinin Denklem (3.5)'i sağladığı $\rho \in (a, b)$, $z > 0$ bölgesinde, Denklem (3.5)'in Fourier dönüşümü alındığında Denklem (3.30) sağ yanlı denklemi elde edilir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] G^+(\rho, \alpha) = f(\rho) - i\alpha g(\rho) \quad (3.30)$$

Burada geçen $G^+(\rho, \alpha)$, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde α 'nın analitik fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u_2(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (3.31)$$

Denklem (3.21)'den farklı olarak sağ tarafı sıfır olmayan Denklem (3.30) denkleminde görülen $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$f(\rho) = \left. \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, z) \right|_{z=0} \quad (3.32)$$

$$g(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad (3.33)$$

Bu problemde de Denklem (3.30) sağ yanlı denkleminin $\rho = a$ ve $\rho = b$ 'de sınır koşullarını sağlayan bir özel çözümünü elde etmek için Green fonksiyonu yöntemi kullanmak uygundur.

Denklem (3.30)'a dair Green fonksiyonunun, Denklem (3.34)'i Denklem (3.35), Denklem (3.36), Denklem (3.37) ve Denklem (3.38) şartları altında sağlaması gerekmektedir.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (a, b) \quad (3.34)$$

$$\mathcal{G}(\rho, t+0, \alpha) = \mathcal{G}(\rho, t-0, \alpha) \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t+0, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t-0, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (3.36)$$

$$\mathcal{G}(b, t, \alpha) + b \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) \right|_{\rho=b} = 0 \quad (3.37)$$

$$(1 + ika) \mathcal{G}(a, t, \alpha) + a \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) \right|_{\rho=a} = 0 \quad (3.38)$$

Bu şartları sağlayan Green fonksiyonu aşağıdaki formda olmalıdır.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \begin{cases} AJ_1(K(\alpha)\rho) + BY_1(K(\alpha)\rho), & t < \rho \\ CJ_1(K(\alpha)\rho) + DY_1(K(\alpha)\rho), & t > \rho \end{cases} \quad (3.39)$$

Burada kullanılan A, B, C ve D bilinmeyen katsayılarının bulunması için Denklem (3.35), Denklem (3.36), Denklem (3.37) ve Denklem (3.38) şartları kullanılır.

Denklem (3.37) ve Denklem (3.38) koşulları kullanılarak A ve C katsayıları sırasıyla B ve D cinsinden yazılırsa Green fonksiyonu Denklem (3.40) halinde sadece iki tane bilinmeyen katsayı ile yazılabilir.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \begin{cases} B \left\{ \begin{array}{l} Y_1(K(\alpha)\rho) \cdots \\ \cdots - J_1(K(\alpha)\rho) \frac{ik\eta_2 Y_1(K(\alpha)a) + K(\alpha)Y_0(K(\alpha)a)}{ik\eta_2 J_1(K(\alpha)a) + K(\alpha)J_0(K(\alpha)a)} \end{array} \right\}, & t < \rho \\ D \left\{ Y_1(K(\alpha)\rho) - J_1(K(\alpha)\rho) \frac{Y_0(K(\alpha)b)}{J_0(K(\alpha)b)} \right\}, & t > \rho \end{cases} \quad (3.40)$$

Denklem (3.35) ve Denklem (3.36) süreklilik bağıntıları da kullanıldığında B ve D katsayıları da elde edilebilir.

$$B = \frac{\pi J J_0(K(\alpha)b) Y_1(K(\alpha)t) - Y_0(K(\alpha)b) J_1(K(\alpha)t)}{2 J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b)} \quad (3.41)$$

$$D = \frac{\pi J_0(K(\alpha)b) J(\alpha) Y_1(K(\alpha)t) - Y(\alpha) J_1(K(\alpha)t)}{2 J(\alpha) Y_0(K(\alpha)b) - Y(\alpha) J_0(K(\alpha)b)} \quad (3.42)$$

Burada geçen $J(\alpha)$ ve $Y(\alpha)$ aşağıda tanımlanmıştır.

$$J(\alpha) = ik\eta J_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)J_0[K(\alpha)a] \quad (3.43)$$

$$Y(\alpha) = ik\eta Y_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)Y_0[K(\alpha)a] \quad (3.44)$$

Böylelikle Green fonksiyonunu Denklem (3.45) biçiminde yazmak mümkün olur.

$$\mathcal{G}(t, \rho, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \left\{ \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] \right] \cdots \\ \cdots \left[\mathbf{J}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] - \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] \mathbf{Y}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \right] \right]}{\mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) \right]} \right\}, t < \rho \\ \left\{ \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] \right] \cdots \\ \cdots \left[\mathbf{J}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] \mathbf{Y}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \right] \right]}{\mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) \right]} \right\}, t > \rho \end{cases} \quad (3.45)$$

Denklem (3.38) şartı kullanılarak A katsayısı B cinsinden yazıldığında Denklem (3.30)'un homojen çözümü Denklem (3.46) biçiminde yazılabilir.

$$\mathbf{G}_h^+(\rho, \alpha) = \mathbf{B}(\alpha) \frac{\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right]}{\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1} \quad (3.46)$$

Böylelikle $\mathbf{G}^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu Denklem (3.47) formunda elde edilir.

$$\mathbf{G}^+(\rho, \alpha) = \mathbf{G}_h^+(\rho, \alpha) + \int_a^b \left[\mathbf{f}(t) - i\alpha \mathbf{g}(t) \right] \mathcal{G}(t, \rho, \alpha) dt \quad (3.47)$$

Yani,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^+(\rho, \alpha) &= \mathbf{B}(\alpha) \frac{\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right]}{\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1} + \dots \\ &\dots \frac{1}{\mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) \right]} \int_a^b \left[\mathbf{f}(t) - i\alpha \mathbf{g}(t) \right] \mathbf{Q}(t, \rho, \alpha) dt \end{aligned} \quad (3.48)$$

yazılabilir.

Burada geçen $\mathbf{Q}(t, \rho, \alpha)$ fonksiyonu Denklem (3.49) ile tanımlıdır.

$$\mathbf{Q}(t, \rho, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \left\{ \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] \right] \cdots \\ \cdots \left[\mathbf{J}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] - \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] \mathbf{Y}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \right] \right]}{\mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) \right]} \right\}, t < \rho \\ \left\{ \frac{\left[\begin{array}{l} \mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) t \right] \right] \cdots \\ \cdots \left[\mathbf{J}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \mathbf{Y}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] - \mathbf{J}_1 \left[\mathbf{K}(\alpha) \rho \right] \mathbf{Y}_0 \left[\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right] \right] \right]}{\mathbf{K}(\alpha) \left[\mathbf{J}(\alpha) \mathbf{Y}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) - \mathbf{Y}(\alpha) \mathbf{J}_0 \left(\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{b} \right) \right]} \right\}, t > \rho \end{cases} \quad (3.49)$$

Denklem (3.27) denkleminde $G^+(\rho, \alpha)$ yerine $G_h^+(\rho, \alpha)$ koyulması yardımıyla $B(\alpha)$ katsayısı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B(\alpha) = \frac{J(\alpha)P^+(\alpha)}{K(\alpha)b \left[J(\alpha)Y_0 \left[K(\alpha)b \right] - Y(\alpha)J_0 \left[K(\alpha)b \right] \right]} \quad (3.50)$$

Böylece $G^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu Denklem (3.51) biçiminde elde edilmiş olur.

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} \left[\frac{J(\alpha)Y_1 \left[K(\alpha)\rho \right] - Y(\alpha)J_1 \left[K(\alpha)\rho \right]}{b} P^+(\alpha) \dots \right. \\ \left. \dots + \int_a^b \left[f(t) - i\alpha g(t) \right] Q(t, \rho, \alpha) t dt \right] \quad (3.51)$$

Burada,

$$M(\alpha) = K(\alpha) \left[J(\alpha)Y_0 \left[K(\alpha)b \right] - Y(\alpha)J_0 \left[K(\alpha)b \right] \right] \quad (3.52)$$

olarak tanımlanmıştır.

Denklem (3.51) eşitliğinin sol tarafı $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde regüler olduğundan sağ tarafı da aynı bölgede regüler olmak zorundadır. Ancak Denklem (3.51) eşitliğinin sağ tarafının regülerliği kompleks α düzleminin $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarısında oluşan basit kutupların yani $\alpha = \alpha_m$ noktalarının varlığı sebebiyle bozulabilir. Bu kutuplar Denklem (3.52)'de tanımlanan $M(\alpha)$ fonksiyonunun basit sıfırlarını oluşturmaktadırlar ve Denklem (3.53) şeklinde tanımlanırlar.

$$M(\alpha_m) = 0, \quad \text{Im}(\alpha_m) > \text{Im}(-k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

Bu kutuplar rezidülerinin sıfır olmasının zorlanması suretiyle kaldırılabilirler. Yani $M(\alpha_m)$ 'nin sıfıra eşit olduğu durumlarda Denklem (3.51)'in sağ yanının geri kalan kısmının da sıfır olması koşulu öne sürülerek denklemin $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde regülerliğini bozan durumlar ortadan kaldırılmış olur. Bu nedenle Denklem (3.54) yazılır.

$$\frac{J(\alpha_m)Y_1[K(\alpha_m)\rho] - Y(\alpha_m)J_1[K(\alpha_m)\rho]}{b} P^+(\alpha_m) \cdots \quad (3.54)$$

$$\cdots + \int_a^b [f(t) - i\alpha_m g(t)] Q(t, \rho, \alpha_m) dt = 0$$

Denklem (3.54)'ten $P^+(\alpha_m)$ 'nin çekilmesi ve integralin seriye açılması yoluyla Denklem (3.55) elde edilir.

$$P^+(\alpha_m) = -\frac{\pi}{2} K_m b [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m \quad (3.55)$$

Burada,

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_m} \int_a^b \begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] \rho d\rho \quad (3.56)$$

$$\Delta_m = \frac{b^2}{2} \left(\frac{2}{\pi K_m b} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \left[1 + \frac{ik\eta_2}{K_m^2 a} (2 + ik\eta_2 a) \right] \tilde{L}_1^2 \quad (3.57)$$

$$\tilde{L}_1 = J_0(K_m b) Y_1(K_m a) - J_1(K_m a) Y_0(K_m b) \quad (3.58)$$

$$K_m = K(\alpha_m) \quad (3.59)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.4. Wiener-Hopf Denklemine Elde Edilmesi

Denklem (3.15) ve Denklem (3.16) süreklilik koşulları göz önünde bulundurularak Denklem (3.60) yazılır.

$$F^+(b, \alpha) = G^+(b, \alpha) \quad (3.60)$$

Denklem (3.29)'dan $F^+(b, \alpha)$ 'nın ve Denklem (3.51)'den $G^+(b, \alpha)$ 'nın çekilmesiyle Denklem (3.61) elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)} P^+(\alpha) - \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta_2} = \dots \\ & \dots \frac{1}{M(\alpha)} \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] [J(\alpha)Y_1(Kt) - Y(\alpha)J_1(Kt)] t dt \end{aligned} \quad (3.61)$$

Burada kullanılan $N(\alpha)$ ve $M_j(\alpha)$, Denklem (3.62) ve Denklem (3.63) denklemleriyle ifade edilmiştir.

$$N(\alpha) = \frac{H_0^1(Kb)}{H_1^1(Kb)M_0(\alpha) + H_0^1(Kb)M_1(\alpha)} \quad (3.62)$$

$$M_j(\alpha) = J(\alpha)Y_j(Kb) - Y(\alpha)J_j(Kb), \quad j=0,1 \quad (3.63)$$

Denklem (3.56)'da da görülen $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ fonksiyonları Dini koşulunu sağlayan mutlak integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından, bir önceki problemdeki gibi aşağıdaki şekilde tam ortogonal fonksiyonlar kümesi cinsinden seriye açılabilirler.

$$\begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(K_m b)Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho)Y_0(K_m b) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Denklem (3.64)'te geçen seri ifadesi Denklem (3.61)'de yerine yazılıp ortaya çıkan integral hesaplanırsa, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olan ve Denklem (3.65)'te yazılmış olan Wiener-Hopf denklemi elde edilmiş olur.

$$\frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)} P^+(\alpha) - bF^-(b, \alpha) = -b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m] [J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (3.65)$$

Burada,

$$J_m = J(\alpha_m) \quad (3.66)$$

$$Y_m = Y(\alpha_m) \quad (3.67)$$

biçiminde yazılmıştır.

3.5. Wiener-Hopf Denkleminein Çözümü

Denklem (3.65) ile tanımlanmış olan Wiener-Hopf denkleminein çözülmesinden kastedilen, $P^+(\alpha)$ fonksiyonunu elde edilmesidir. Bunu gerçekleştirebilmek için Denklem (3.52) ve Denklem (3.53) denklemleriyle tanımlanan $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ çekirdek fonksiyonlarını aşağıda görüldüğü biçimde (+) ve (-) tipte iki fonksiyonun çarpımı biçiminde ifade etmek gerekmektedir.

$$M(\alpha) = M^+(\alpha)M^-(\alpha) \quad (3.68)$$

$$N(\alpha) = N^+(\alpha)N^-(\alpha) \quad (3.69)$$

Burada görülen $M^-(\alpha)$ ve $N^-(\alpha)$ fonksiyonları $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ alt yarı düzleminde, $M^+(\alpha)$ ve $N^+(\alpha)$ fonksiyonları $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(k)$ üst yarı düzleminde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlar olmak mecburiyetindedir.

Yine $V^-(\alpha)$ fonksiyonu $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ alt yarı düzleminde, $V^+(\alpha)$ fonksiyonu $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(k)$ üst yarı düzleminde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlar olma şartını yerine getiren ve Denklem (3.70) ile tanımlı $V(\alpha)$ fonksiyonuna [26]'da tanımlanan yöntem uygulandıında Denklem (3.71) elde edilir.

$$V(\alpha) = M(\alpha)N(\alpha) = V^+(\alpha)V^-(\alpha) \quad (3.70)$$

$$V^+(\alpha) = \sqrt{V(0)} e^{\left\{ \frac{i\alpha(b-a)}{\pi} \left[1 - C - \ln \left(\frac{2\pi}{k(b-a)} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] + \frac{K(\alpha)(b-a)}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right) - \frac{1}{2} i(b-a)K(\alpha) + q(\alpha) \right\}} \dots$$

$$\dots \prod_{l=1}^L \left(\frac{\beta_l - \alpha}{\beta_l + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) e^{\left(\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi} \right)} \quad (3.71)$$

Burada,

$$q(\alpha) = \frac{1}{2} P \int_0^{\infty} K_w(w) \ln \left[\frac{\sqrt{k^2 - w^2} + \alpha}{\sqrt{k^2 - w^2} - \alpha} \right] dw \quad (3.72)$$

$$K_w(w) = \frac{(b-a)}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} [B_w(w) + B_w(we^{i\pi})] \quad (3.73)$$

$$B_w(w) = \frac{bH_1^{(1)}(wb)}{H_0^{(1)}(wb)} \dots$$

$$\dots + \frac{[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb)] \begin{bmatrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik\eta a \\ -\left(\frac{i2k\eta}{w} + a\right) \end{bmatrix}}{[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb)] \begin{bmatrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ ik\eta \end{bmatrix}} \quad (3.74)$$

$$T_{ij}(w) = Y_i(wb)J_j(wa) - Y_j(wa)J_i(wb), \quad i, j = 0, 1 \quad (3.75)$$

Şeklinde tanımlanmıştır.

Denklem (3.70)'deki C Euler sabiti olup $C = 0,57721\dots$ 'dir. $\pm\beta_1$ ise $N(\alpha)$ fonksiyonunun kökleridir. Denklem (3.72)'deki P harfi ile tekil integralin Cauchy esas değerinin göz önüne alındığı belirtilmiştir. $M^\pm(\alpha)$ ve $N^\pm(\alpha)$ fonksiyonlarının $|\alpha| \rightarrow \infty$ için geçerli asimptotik ifadelerinin aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir.

$$M^\pm(\alpha) = |\alpha|^{1/2} e^{(b-a)|\alpha|} \quad (3.76)$$

$$N^\pm(\alpha) = e^{-(b-a)|\alpha|} \quad (3.77)$$

Denklem (3.65) $M^-(\alpha)N^-(\alpha)$ ile çarpılırsa Denklem (3.76) elde edilir.

$$\frac{P^+(\alpha)}{N^+(\alpha)M^+(\alpha)} - M^-(\alpha)N^-(\alpha) \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta} = \dots$$

$$\dots - bM^-(\alpha)N^-(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m] [J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (3.78)$$

Bu ifadenin sol yanındaki ilk iki terim kompleks α düzleminin sırasıyla üst ($\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$) ve alt ($\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$) yarılarında regüler fonksiyonlardır. Ancak Denklem (3.78) denkleminin sağ tarafındaki terimin her iki yarım düzlemde

de tekillikleri vardır. Bu durumda önce sağ yandaki bu terime Wiener-Hopf ayrıştırması ve sonrasında Denklem (3.78) ifadesine Liouville teoreminin uygulanmasıyla Denklem (3.79) elde edilir.

$$\frac{P^+(\alpha)}{V^+(\alpha)} = b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha_m g_m][J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{2\alpha_m(\alpha + \alpha_m)} V^+(\alpha_m) \quad (3.79)$$

3.6. Gelen Dalga u^i 'nin Elde Edilmesi

Daha önceki bölümlerde değinilen ve denklemlerde kullanılan u^i , hesaplanmadan bırakılmıştır. Ancak alan ifadelerini elde etmek için kullanılacak olan açınım katsayılarının hesaplanmasında gelen dalga ifadesinden yararlanılması gerekmektedir.

Rahatça görülebilir ki incelenen dalga kılavuzunun bir önceki problemde olduğu gibi TEM modu ile uyarılması mümkün değildir. Aşağıdaki işlemlerde, hibrid TEM modundaki (TM_{00}) gelen dalganın elde edilişi gösterilmiştir.

u^i 'nin elde edilmesi için öncelikle, dalga kılavuzunu oluşturan silindirlerin arasında kalan bölgede u_3 alanının tabi olduğu sınır koşullarına tabi olan aşağıdaki ifade tanımlanır.

$$H = \tilde{B}J_1[K(\alpha)\rho] + \tilde{C}Y_1[K(\alpha)\rho] \quad (3.80)$$

Burada \tilde{B} ve \tilde{C} bilinmeyen katsayılardır. (3.80)'e (3.81) ve (3.82) sınır koşullarının uygulanmasıyla (3.83) karakteristik denklemi elde edilir.

$$H(b, \alpha) + b \frac{\partial H(b, \alpha)}{\partial \rho} = 0, \quad z < 0 \quad (3.81)$$

$$(1 + ika\eta_l)H(a, \alpha) + a \frac{\partial H(a, \alpha)}{\partial \rho} = 0, \quad z < 0 \quad (3.82)$$

$$\frac{\left\{ \begin{aligned} &ik\eta_1 \left[J_1(\xi_n a) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n a) \right] \cdots \\ &\cdots + \xi \left[J_0(\xi_n a) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_0(\xi_n a) \right] \end{aligned} \right\}}{Y_0(\xi_n b)} = 0 \quad (3.83)$$

Denklem (3.83)'ün kökleri ξ_n ile gösterilmiş olup dalga kılavuzu modlarının yayılma sabitleri olan β_n 'ler Denklem (3.84) ile tanımlanmıştır.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.84)$$

ξ_n ve β_n değerleri kullanılarak gelen dalga u^i aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u^i = \left[J_1(\xi_0 \rho) - \frac{J_0(\xi_0 b)}{Y_0(\xi_0 b)} Y_1(\xi_0 \rho) \right] e^{i\beta_0 z} \quad (3.85)$$

3.7. Açınım Katsayılarının Hesabı

$\rho \in (a, b)$, $z < 0$ bölgesinde tanımlanmış olan $u_3(\rho, z)$ fonksiyonu dalga kılavuzu modları cinsinden Denklem (3.86) şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} u_3(\rho, z) = &c_0 \left[J_1(\xi_0 \rho) - \frac{J_0(\xi_0 b)}{Y_0(\xi_0 b)} Y_1(\xi_0 \rho) \right] e^{-i\beta_0 z} \cdots \\ &\cdots + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[J_1(\xi_n \rho) - \frac{J_0(\xi_n b)}{Y_0(\xi_n b)} Y_1(\xi_n \rho) \right] e^{-i\beta_n z} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Daha önce yazılmış olan Denklem (3.17) ve Denklem (3.18) süreklilik koşulları ve Denklem (3.32), Denklem (3.33), Denklem (3.64) tanımları yardımıyla, yukarıda Denklem (3.86) ile verilen u_3 ve Denklem (3.85) ile verilen u^i ifadeleri de göz önünde bulundurularak Denklem (3.87) ve Denklem (3.88) ifadeleri yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} g_m \left[J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b) \right] = &\cdots \\ \cdots (c_0 + 1) \left[J_1(\xi_0 \rho) - \frac{J_0(\xi_0 b)}{Y_0(\xi_0 b)} Y_1(\xi_0 \rho) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[J_1(\xi_n \rho) - \frac{J_0(\xi_n b)}{Y_0(\xi_n b)} Y_1(\xi_n \rho) \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \left[J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b) \right] &= i\beta_0 (1 - c_0) \cdots \\ \cdots \left[J_1(\xi_0 \rho) - \frac{J_0(\xi_0 b)}{Y_0(\xi_0 b)} Y_1(\xi_0 \rho) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} i\beta_n c_n \left[J_1(\xi_n \rho) - \frac{J_0(\xi_n b)}{Y_0(\xi_n b)} Y_1(\xi_n \rho) \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

Denklem (3.85) ve Denklem (3.86) denklemlerinin her iki tarafı $\rho \left[J_0(K_p b) Y_1(K_p \rho) - J_1(K_p \rho) Y_0(K_p b) \right]$ ifadesiyle çarpılarak bu denklemlerin ρ 'ya göre $\rho = a$ 'dan $\rho = b$ 'ye kadar integralleri alınır, denklemlerin sol taraflarının Lommel İntegrali formunda olduğu ve sadece $p = m$ durumunda sıfırdan farklı bir değere sahip olduğu görülür. Bu durumda Denklem (3.87) ve Denklem (3.88) denklemleri Denklem (3.89) ve Denklem (3.90) formuna dönüştürülür.

$$\Delta_m g_m = (c_0 + 1) I_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_n^{(1)} \quad (3.89)$$

$$\Delta_m f_m = i\beta_0 (1 - c_0) I_0^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} i\beta_n c_n I_n^{(1)} \quad (3.90)$$

Burada,

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \int_a^b \left[J_1(\xi_n \rho) - \frac{J_0(\xi_n b)}{Y_0(\xi_n b)} Y_1(\xi_n \rho) \right] \cdots \\ \cdots \left[J_0(K_p b) Y_1(K_p \rho) - J_1(K_p \rho) Y_0(K_p b) \right] \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.91)$$

şeklinde tanımlıdır.

Daha önce elde edilmiş olan Denklem (3.79) denkleminde $\alpha = \alpha_m$ koyulur ve Denklem (3.55) ile birlikte değerlendirilirse Denklem (3.92) elde edilir.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi K_m b}{2} [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m &= \cdots \\ \cdots N^+(\alpha_m) M^+(\alpha_m) b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f_n - i\alpha_n g_n] N^+(\alpha_n) M^+(\alpha_n)}{2\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} I_n^{(2)}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$I_n^{(2)} = J_n Y_1(K_n b) - Y_n J_1(K_n b) \quad (3.93)$$

Burada $J_n = J(\alpha_n)$ ve $Y_n = Y(\alpha_n)$ olarak tanımlanmıştır.

Görüldüğü gibi Denklem (3.89), Denklem (3.90) ve Denklem (3.92) denklemleri f_m , g_m ve c_n ($m=0, 1, 2, \dots$; $n=0, 1, 2, \dots$) bilinmeyen sabitlerini belirlemeye yarayacak sonsuz lineer cebirsel bir denklemler sistemi oluşturmaktadır. Bu denklem sistemini, Denklem (3.94) biçiminde ifade edilen yapıda yazmak mümkündür.

$$\begin{bmatrix} \Delta_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & i\beta_0 I_0^{(1)} & \cdots & i\beta_n I_n^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_m & 0 & \cdots & 0 & i\beta_0 I_m^{(1)} & \cdots & i\beta_n I_n^{(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_0 & \cdots & 0 & -I_0^{(1)} & \cdots & -I_n^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \Delta_m & -I_m^{(1)} & \cdots & -I_n^{(2)} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_m \\ g_0 \\ \vdots \\ g_m \\ c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\beta_0 I_0^{(1)} \\ \vdots \\ i\beta_0 I_m^{(1)} \\ I_0^{(1)} \\ \vdots \\ I_m^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Denklem (3.94) sonsuz denklem sisteminin belirli sayıda f_m , g_m ve c_n katsayıları için çözülmesi, seri açılımı biçiminde ifade edilmiş alan bileşenlerinin yaklaşık olarak hesaplanmasına olanak sağlamaktadır.

3.8. Saçılan Alanın Hesabı ve Sayısal Sonuçlar

Daha önce $\rho > b$, $z \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlanmış olan $u_1(\rho, z)$ dalga kılavuzunun dışına saçılan alanı ifade etmektedir ve yine daha önce tanımlanmış olan Denklem (3.29) yardımıyla $F(\rho, \alpha)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünü elde ederek Denklem (3.95) biçiminde ifade edilebilir.

$$u_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_L^{P^+} \frac{P^+(\alpha) H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] e^{-iaz} d\alpha}{bK(\alpha) H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \quad (3.95)$$

Burada L , $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ şeridinde uzanan ve reel α eksenine paralel bir doğrudur. $H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho]$ fonksiyonunun $k\rho \rightarrow \infty$ için asimptotik ifadesi Denklem (3.96) şeklindedir.

$$H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi K(\alpha)\rho}} e^{i\left(K(\alpha)\rho - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (3.96)$$

Denklem (3.95) ve Denklem (3.96) denklemleri birlikte incelenir ve integral en dik iniş çizgisi yöntemi ile hesaplanırsa Denklem (3.97) ve Denklem (3.98) elde edilir.

$$u_1(\rho, \theta) = H(\theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad kr \gg 1 \quad (3.97)$$

$$H(\theta) = -\frac{1}{\pi b \sin\theta} \frac{P^+(-k \cos\theta)}{H_0^{(1)}[k b \sin\theta]} \quad (3.98)$$

Burada r ve θ aşağıdaki şekilde tanımlanır ve küresel koordinatları gösterir.

$$\rho = r \sin\theta \quad (3.99)$$

$$z = r \cos\theta \quad (3.100)$$

Denklem (3.86)'da gösterilen $u_3(\rho, z)$ ifadesi dalga kılavuzu içerisinde saçılan alanı ifade etmektedir ve bu seri açılımının ilk terimi dalga kılavuzu içerisinde yansıyan alana aittir. Dolayısıyla c_0 katsayısı yansıyan alanın genliğini ifade etmektedir. Aşağıdaki grafikler iletim bölgesinde elde edilmiştir.

Şekil 3.2, yansıyan alanın genliğini ifade eden $|c_0|$ katsayısının dalga sayısı k ile değişimini $b=1,4$, $\eta_1=0,8i$ ve $\eta_2=0,3i$ iken a 'nın üç farklı değeri için göstermektedir. Grafiğe göre dalga sayısı ve dolayısıyla frekans arttıkça yansıma katsayısı hızla düşmektedir.

Şekil 3.3, yansıyan alanın genliğini ifade eden $|c_0|$ katsayısının dalga sayısı k ile değişimini $a = 0,7$, $\eta_1 = 0,8i$ ve $\eta_2 = 0,3i$ iken b 'nin üç farklı değeri için göstermektedir. Grafiğe göre yine dalga sayısı arttıkça yansımaya katsayısı hızla düşer.

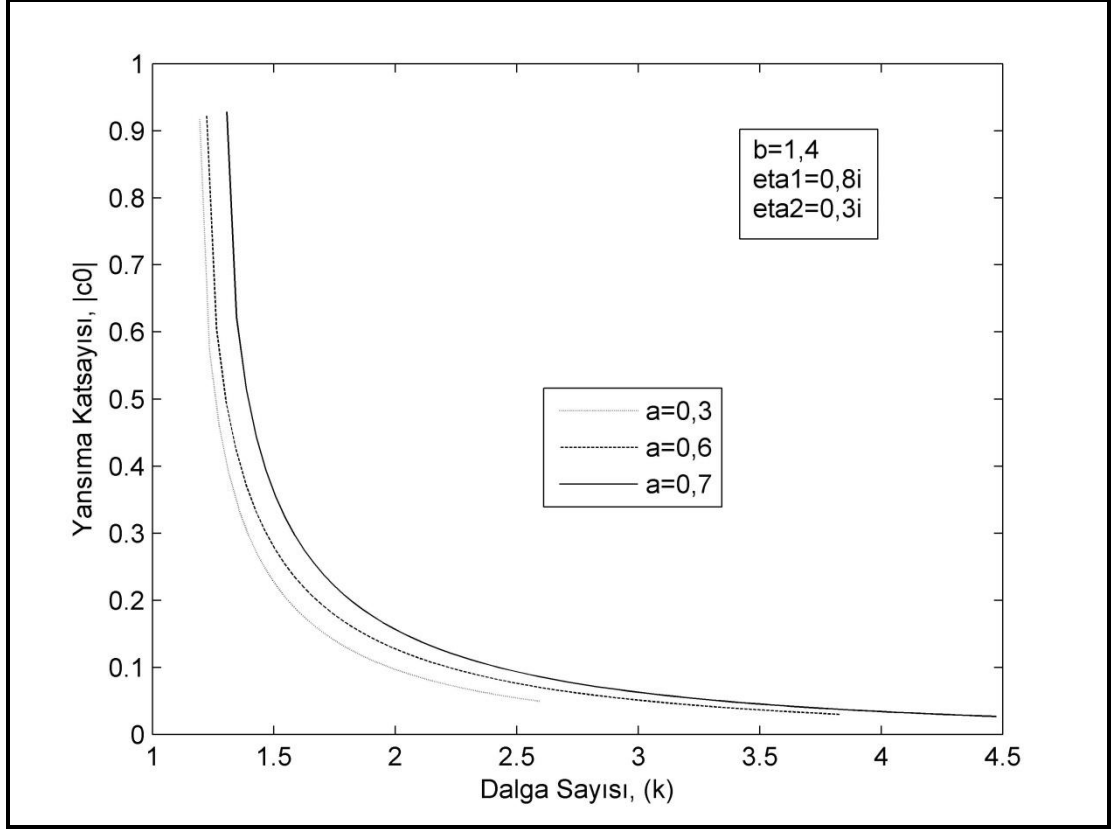
Şekil 3.4, yansıyan alanın genliğini ifade eden $|c_0|$ katsayısının dalga sayısı k ile değişimini $a = 0,7$, $b = 1,4$ ve $\eta_1 = 0,8i$ iken η_2 'nin üç farklı değeri için göstermektedir. Bu grafik de dalga sayısı ve dolayısıyla frekans arttıkça yansımaya katsayısının hızla düştüğünü gösterir.

Şekil 3.5, yansıyan alanın genliğini ifade eden $|c_0|$ katsayısının dalga sayısı k ile değişimini $a = 0,7$, $b = 1,4$ ve $\eta_2 = 0,4i$ iken η_1 'in üç farklı değeri için göstermektedir. Yine frekans arttıkça yansımaya katsayısının hızla düştüğü görülür.

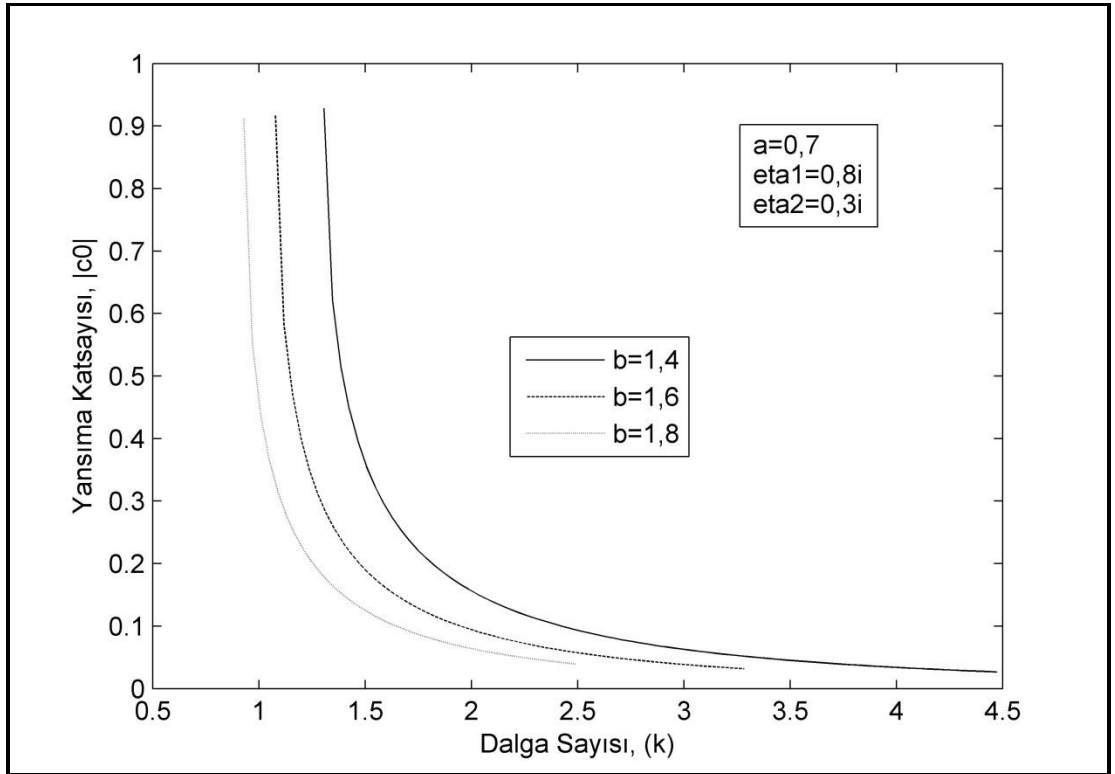
Şekil 3.6, saçılan alanın genliğinin $(20\log|H(\theta)|)$, gözlem açısı ile değişimini $a = 0,2$, $b = 1,4$, $k = 2,1$ ve $\eta_2 = 0,4i$ iken η_1 'in üç farklı değeri için göstermektedir. η_1 'in değeri arttıkça saçılan alanın maksimum değeri azalır.

Şekil 3.7, saçılan alanın genliğinin $(20\log|H(\theta)|)$, gözlem açısı ile değişimini $a = 0,2$, $b = 1,4$, $k = 2,1$ ve $\eta_1 = 0,4i$ iken η_2 'nin üç farklı değeri için göstermektedir. η_2 'nin değeri arttıkça yine hem saçılan alanın maksimum değerinin hem de bu değer gözlemlendiği açının arttığı gözlemlenmiştir.

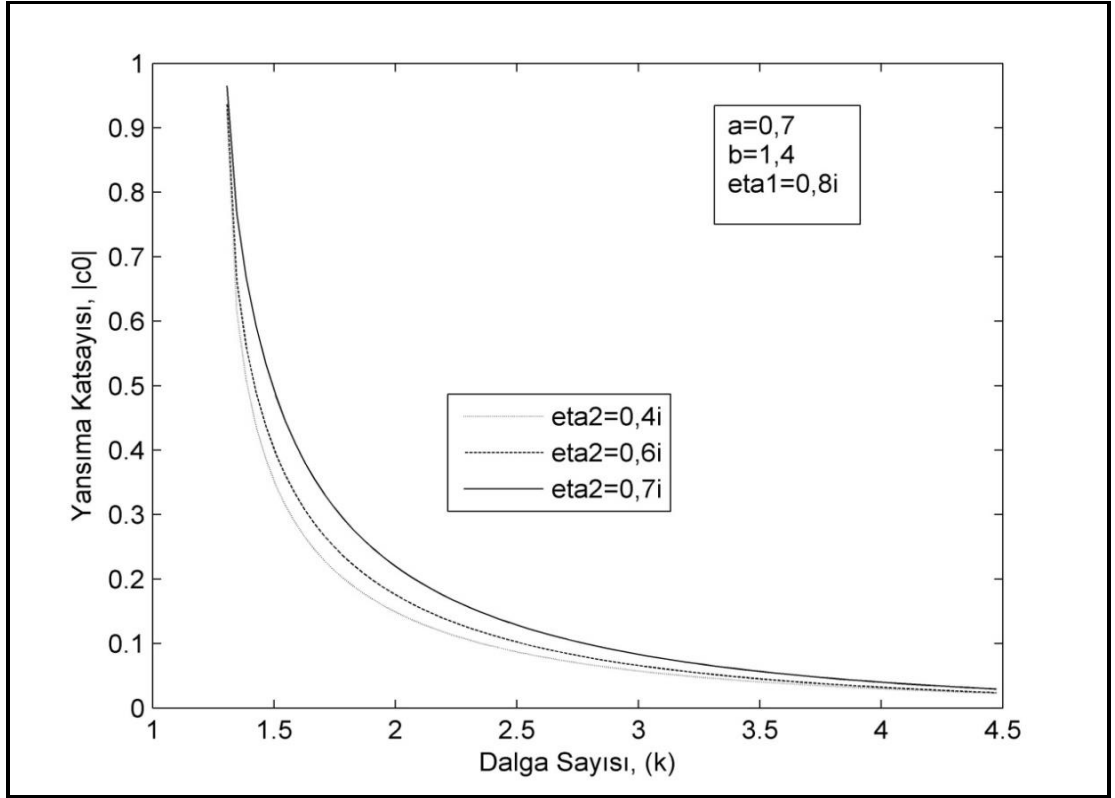
Şekil 3.8, saçılan alanın genliğinin $(20\log|H(\theta)|)$, gözlem açısı ile değişimini $a = 0,2$, $b = 1,4$, $\eta_1 = 0,7i$ ve $\eta_2 = 0,5i$ iken k 'nin üç farklı değeri için göstermektedir. k 'nin değeri arttıkça saçılan alanın maksimum değerinin gözlemlendiği açı azalırken saçılan alanın maksimum değerinin arttığı gözlemlenmiştir.



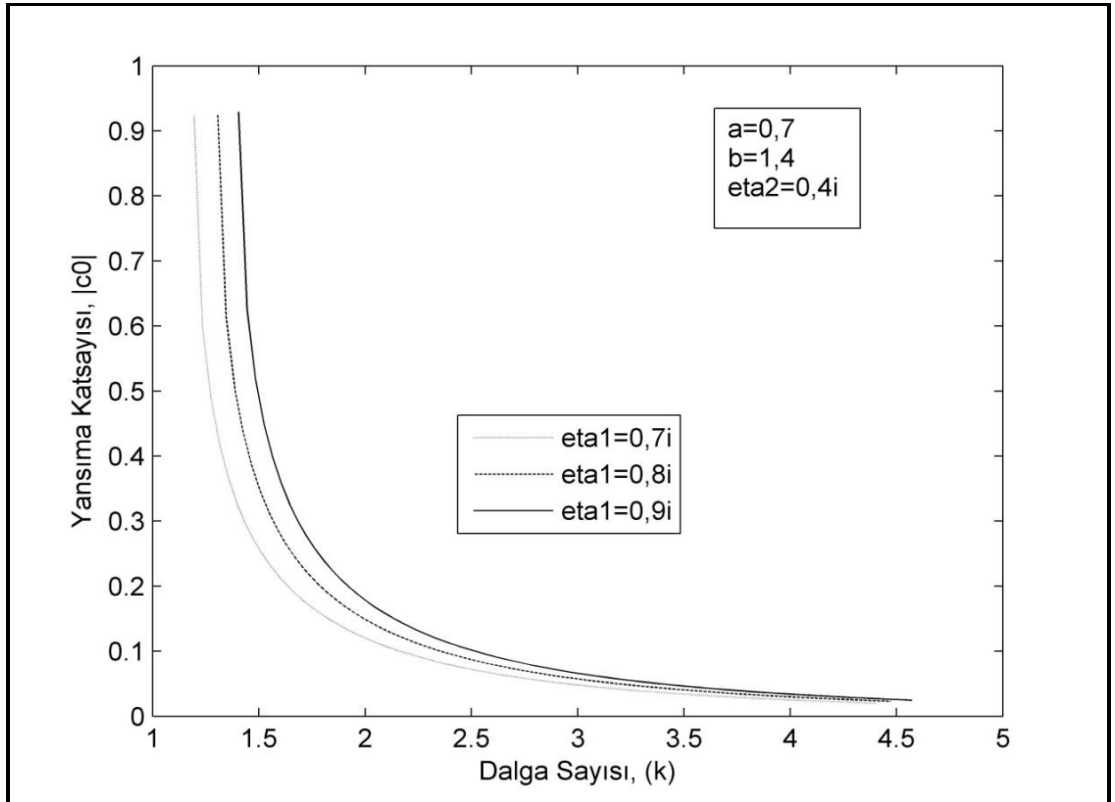
Şekil 3.2. Yarıçap a 'nin yansımaya katsayısına etkisi



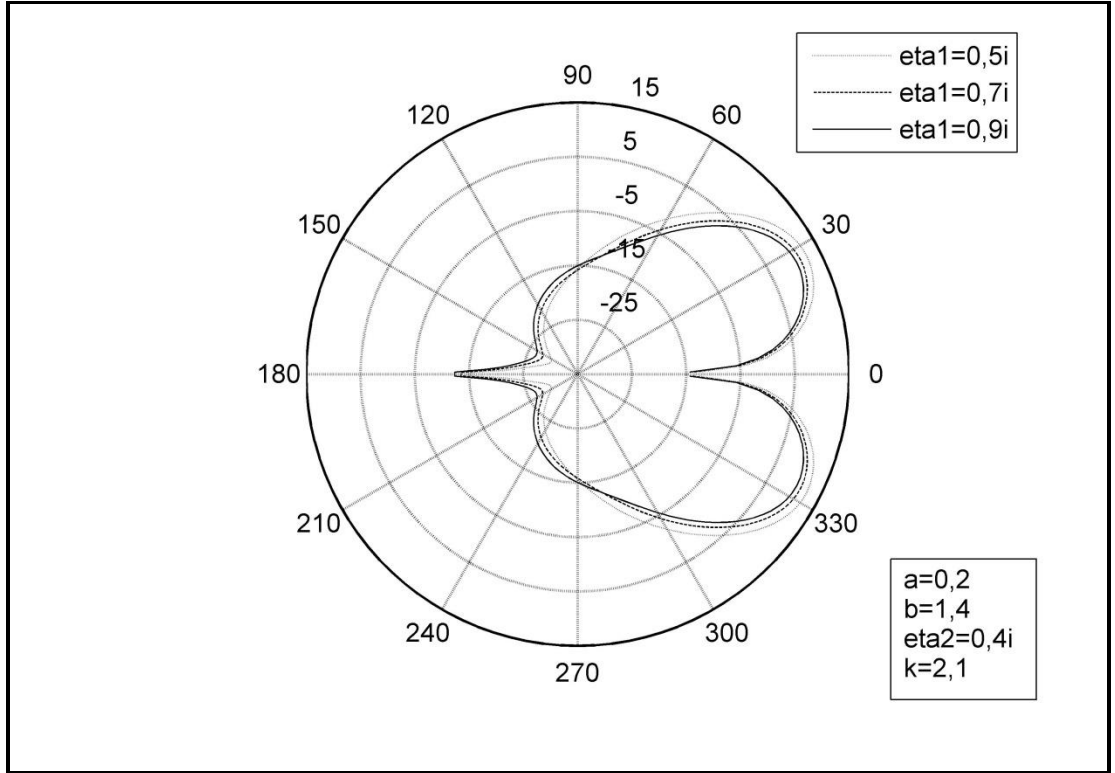
Şekil 3.3. Yarıçap b 'nin yansımaya katsayısına etkisi



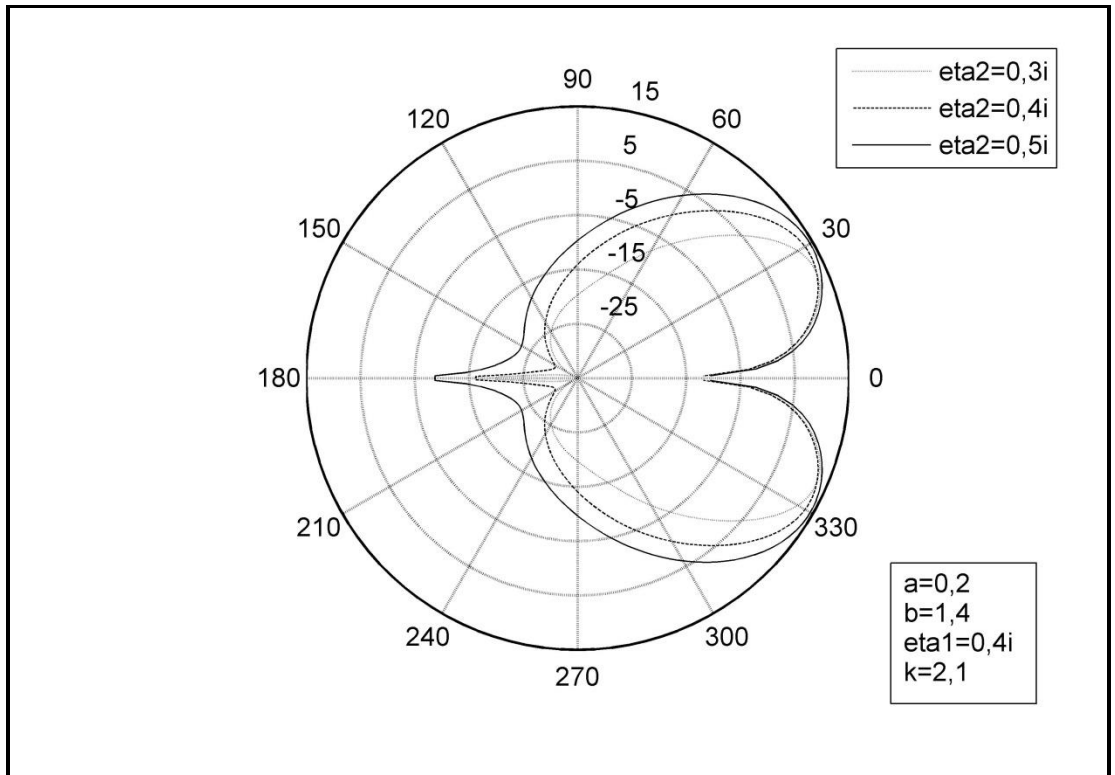
Şekil 3.4. η_2 'nin yansımaya katsayısına etkisi



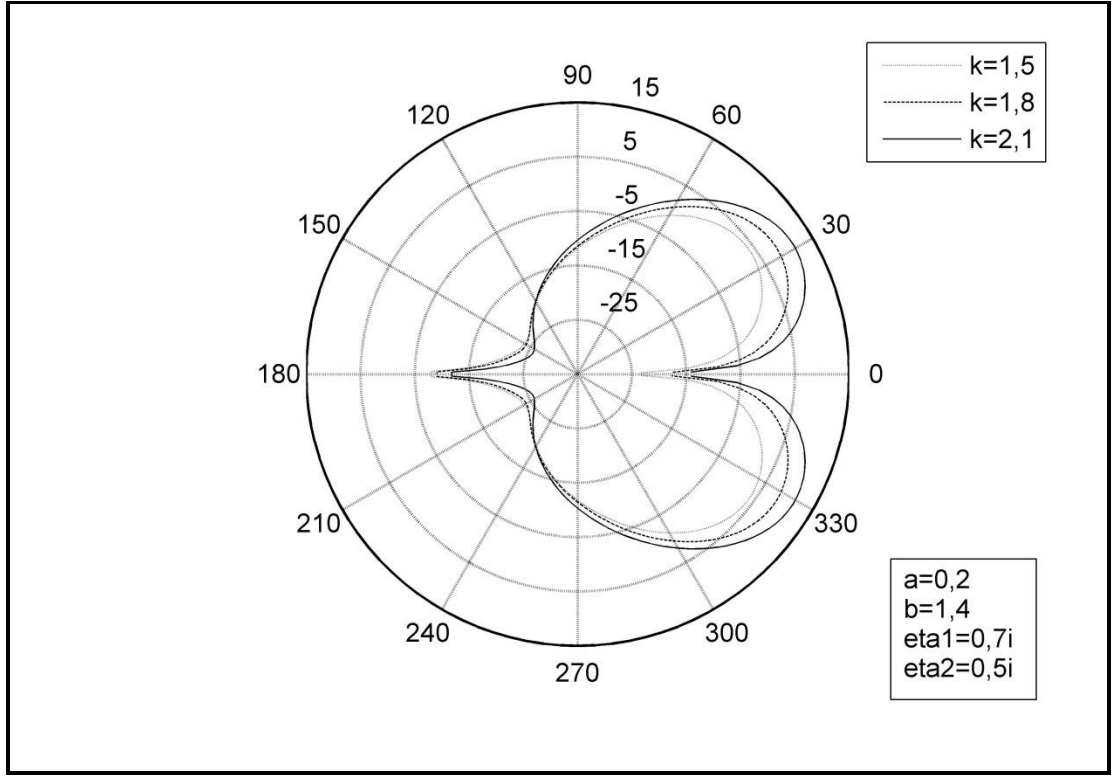
Şekil 3.5. η_1 'in yansımaya katsayısına etkisi



Şekil 3.6. η_1 'in saçılan alana etkisi



Şekil 3.7. η_2 'nin saçılan alana etkisi



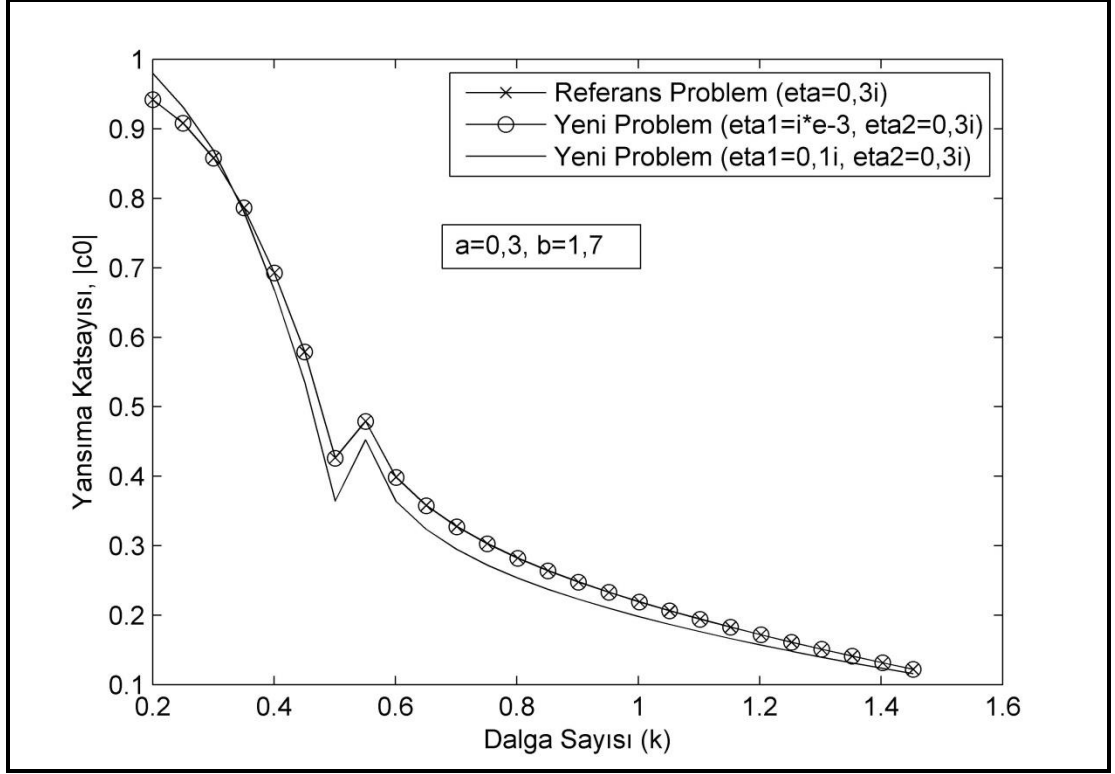
Şekil 3.8. k 'nın saçılan alana etkisi

4. İKİ PROBLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI VE NÜMERİK HESAPLAMALARIN YAKINSAKLIĞI

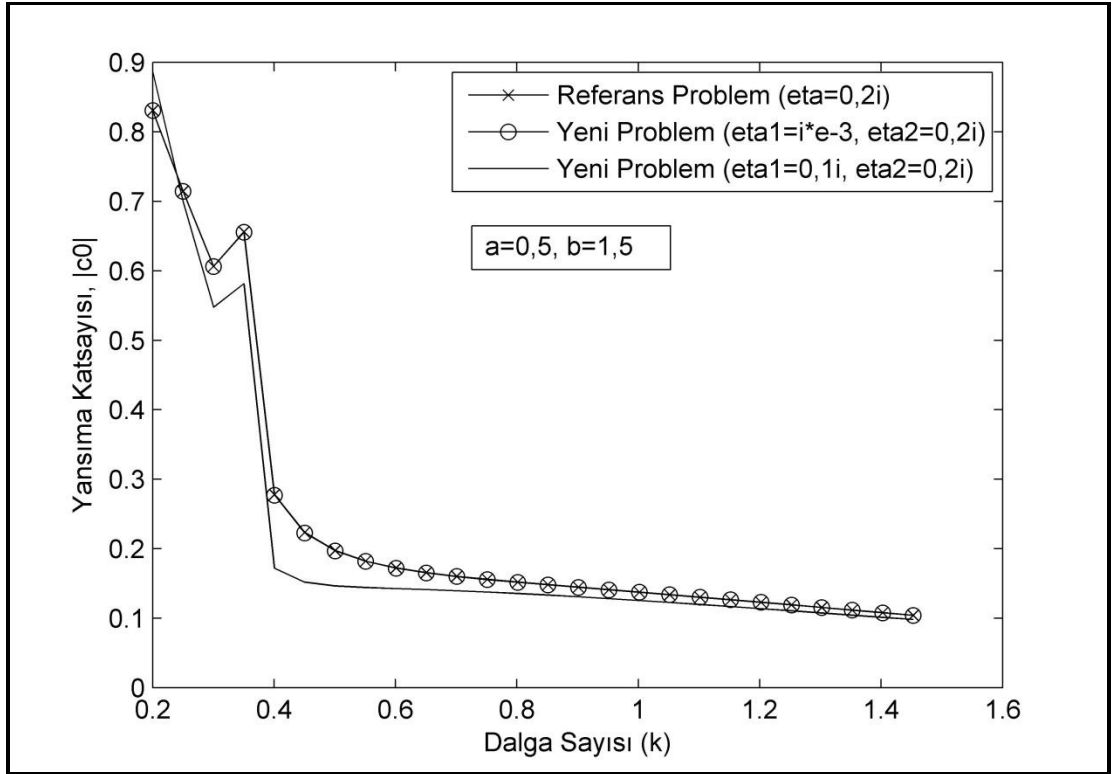
Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların tutarlılığını kontrol etmek adına, daha önce çözülmüş olan ve çözümü 2. bölümde detaylı biçimde açıklanmış olan problemin sayısal sonuçları ile ilk kez bu tez çalışmasında çözülen ikinci problemin sayısal sonuçları aynı fiziksel parametreler altında kıyaslanmıştır.

3. bölümde çözümü elde edilmiş olan, iç silindiri iki parçalı empedans özelliği gösteren dalga kılavuzunda $z < 0$ bölgesindeki empedans değerinin sıfıra çok yakın bir değer alınması ve $z > 0$ bölgesinde de 2. bölümde çözümü elde edilmiş olan dalga kılavuzu ile aynı empedans değeri kullanılması durumunda, aynı a ve b değerleri için her iki yapı için de aynı sayısal sonuçlar elde edilmesi beklenir. Yani aynı a ve b değerleri ile $\eta_1 \cong 0$ ve $\eta_2 = \eta$ alınması durumundaki sonuçlar karşılaştırılmalıdır.

Şekil 4.1 ve şekil 4.2’de görülebileceği üzere her iki problem için iç silindirin $z > 0$ bölgesinde aynı yüzey empedans değerinin olması durumunda, iki parçalı empedansa sahip yapıda η_1 değeri sıfıra yaklaştıkça her iki problemde elde edilen yansıma katsayıları birbirine yaklaşmaktadır.



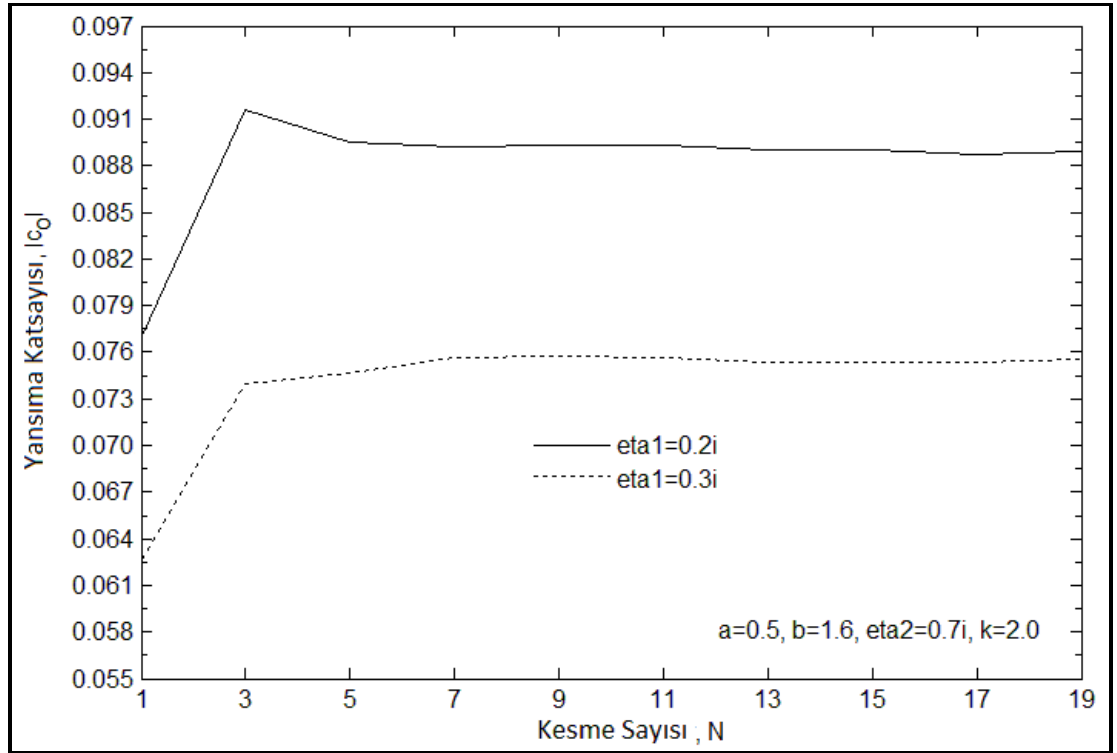
Şekil 4.1. $a = 0,3$, $b = 1,7$, $\eta = \eta_2 = 0,2i$, $\eta_1 = 10^{-3}i$ için iki problemin çözümü



Şekil 4.2. $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\eta = \eta_2 = 0,2i$, $\eta_1 = 10^{-3}i$ için iki problemin çözümü

Benzer matematiksel tanımlamalarla yola çıkılsa da farklı sınır koşulları nedeniyle alan ifadeleri birbirlerinden tamamen farklı denklem sistemlerinin çözümü olarak ortaya çıkan bu iki sistemin aynı şartlar altında aynı tutarlı sayısal sonuçları veriyor olmaları, ortaya atılan çözümlerin doğruluğunu kanıtlar.

Tez çalışmasında elde edilen bütün sayısal sonuçlar, Denklem (3.87), Denklem (3.88) ve Denklem (3.92) denklemleri ile Denklem (4.87), Denklem (4.88) ve Denklem (4.90) denklemlerinde geçen m ve n değerlerinin N adet terimde kesintiye uğratılmasıyla elde edilmiştir. Aşağıdaki şekilde yansıyan alanın genliğinin N kesme sayısı ile değişimi görülmektedir. Yansıyan alanın genliği, $N=7$ değerinden sonra kesme sayısının artışına karşı dikkate değer bir değişim göstermemektedir. Dolayısıyla sayısal hesaplamalar yapılırken N değerinin maksimum 7 alınması yeterli olmaktadır.



Şekil 4.3. Yansıyan alan genliğinin kesme sayısı ile değişimi

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında eş merkezli silindirik bir yapıda elektromanyetik ışınımın incelenmesi amacıyla Wiener-Hopf tekniği kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların doğruluğunun kanıtlanması için ise daha önce çözülmüş benzer bir yapının çözümleri kullanılmıştır. Her iki problemde de Wiener-Hopf tekniği kilit rol oynadığı için tezde öncelikle bu problemlerin çözümünde kullanılacak olan matematiksel yapılar hakkında temel bilgiler verilmiştir.

Öncelikle kompleks düzlemde Fourier dönüşümü ve Fourier integrali ile gösterilen fonksiyonların regülerlik özelliklerine değinilmiş, ardından da Wiener-Hopf problemi tanımlanarak homojen ve sağ yanlı Wiener-Hopf denklemlerinin çözümleri ve özellikleri incelenmiştir.

Matematiksel çerçevenin çizilmesinin ardından, daha önce çözülmüş olan iç silindiri aksenal doğrultuda sonsuza uzayan ve yarısı mükemmel iletken iken diğer yarısı bir empedans sınır koşulu ile tanımlı, dış silindiri ise yarı sonsuz ve mükemmel iletken olan dalga kılavuzundan TEM modunun ışınması problemi incelenmiştir. Bu problemin çözümüne dair detayların açıklanması daha sonra incelenen orijinal problemin çözümüne temel oluşturmaktadır.

Dalga kılavuzunun içinde ve dışındaki toplam alanın parçalı bir fonksiyon olarak ifade edilmesinin ardından sınır ve süreklilik koşulları ile alan ifadelerinin sağlanması gereken Helmholtz denkleminin yardımıyla bir Wiener-Hopf denklemi elde edilmiştir. Bu denklemin seriye açılması ve nümerik yöntemlerle faktörize edilmesi sayesinde problem bir sonsuz cebrik denklemler sistemine indirgenmiştir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilen bilinmeyen açınım katsayıları alan ifadelerinin elde edilmesini sağlamıştır. Bu sayede sayısal sonuçlar grafikler aracılığıyla sunulabilmiştir.

Bu problemin ardından, ilk kez bu tez çalışmasında çözülen iç silindiri iki parçalı empedansa sahip olan ve z eksenini boyunca sonsuza uzanan, dış silindiri ise sonsuz

ince, mükemmel iletken ve yarı sonsuz olan eş merkezli dalga kılavuzundan hibrid TEM modunun yani TM_{00} modunun ışıması problemi incelenmiştir.

Bu problemin çözümünde yöntem olarak aynı yol izlense de iki parçalı empedans nedeniyle sınır koşullarının farklılaşması, sınır koşulları ve Helmholtz denklemi ile tanımlı sınır değer probleminin değişmesine, dolayısıyla tamamen farklı bir matematiksel yapıyla karşılaşılmasına sebep olmuştur.

Her iki problem için de yarıçap ve empedans parametrelerinin yansıma katsayısı ve yayılan alana etkileri grafiklerle sunulduktan sonra, çözümlerin doğruluğunun test edilmesi adına aynı empedans ve yarıçap değerleri altında, farklı cebrik denklem sistemlerinin çözülmesi ile elde edilen sonuçların birbirleri ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Son olarak nümerik hesaplamalarda kesintiye uğratılan serilerin 7 terimden sonra aynı değere yakınsadıkları, dolayısıyla nümerik hesaplamalarda serilerin sadece 7 terimlerinin alınmasının yeterli olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Marcuvitz N., *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [2] Papadopoulos V. M., Wave Propagation in a Coaxial System, *Q. Appl. Math.*, 1960, **17**, 423-436.
- [3] Wu T. T., Input Admittance of Infinitely Long Dipole Antennas Driven from Coaxial Lines, *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1298-1301.
- [4] Orfanidis A. P., Kyriacou G. A., Sahalos J. N., A mode-matching Technique for the Study of Circular and Coaxial Waveguide Discontinuities Based on Closed-Form Coupling Integrals, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 2000, **48**(5), 880-883.
- [5] Gwarek W. K., Computer-Aided Analysis of Arbitrarily Shaped Coaxial Discontinuities, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1988, **36**(2), 337-342.
- [6] Wenhua Yu, Mittra R., Dey S., Application of the Nonuniform FDTD Technique to Analysis of Coaxial Discontinuity Structures, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 2001, **49**(1), 207-209.
- [7] Risley E. W., Discontinuity Capacitance of a Coaxial Line Terminated in a Circular Waveguide, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1969, **17**(2), 86-92.
- [8] Risley E. W., Discontinuity Capacitance of a Coaxial Line Terminated in a Circular Waveguide: Part II - Lower Bound Solution (Short Papers), *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1973, **21**(8), 564-566.
- [9] Silvester P., Cermak I. A., Analysis of Coaxial Line Discontinuities by Boundary Relaxation, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1969, **17**(8), 489-495.
- [10] Sreenivasiah I., Chang D. C., A Variational Expression for the Scattering Matrix of a Step Discontinuity in a Coaxial Line and its Application to the Study of a Multimode Coaxial TEM Cell, *Microwave Symposium*, Orlando, USA, 30 April.- 2 May 1979.
- [11] Sreenivasiah I., Chang D. C., A Variational Expression For The Scattering Matrix of a Double-Step Discontinuity in a Coaxial Line and Its Application to a Tem Cell., *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1981, **29**(1), 41-47.

- [12] Razaz M., Davies B. J., Capacitance of the Abrupt Transition from Coaxial-to-Circular Waveguide, *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1979, **27**(6), 564-569.
- [13] Yansheng Xu, Bosisio R. G., Analysis of Different Coaxial Discontinuities for Microwave Permittivity Measurements, *Trans. Instrum. Meas.*, 1993, **42**(2), 538-543.
- [14] Andersen J. B., *Metallic and Dielectric Antennas*, Polyteknisk Forlag: Lyngby, Denmark, 1970.
- [15] Vijayaraghavan S., Arora R. K., Scattering of a Shielded Surface Wave in a Coaxial Waveguide by a Wall Impedance Discontinuity (Correspondence), *Trans. Microwave Theory Tech.*, 1971, **19**(8), 736-739.
- [16] Bird T. S., TE₁₁ Mode Excitation of Flanged Circular Coaxial Waveguides with an Extended Centre Conductor, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, 1987, **35**(12), 1358-1366.
- [17] Bird T. S., Exact Solution of Open-Ended Coaxial Waveguide with Centre Conductor of Infinite Extent and Applications, *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings H*, 1987, **134**(5).
- [18] Saoudy S. A., Sinha B., Wiener-Hopf Type Analysis of Dielectric-Coated Dipole Antenna in Relatively Dense Medium, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, 1991, **39**(8), 1057-1061.
- [19] Hacivelioglu F., Büyükaksoy A., Analysis of a Coaxial Waveguide with Finite-Length Impedance Loadings in the Inner and Outer Conductors, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, DOI:10.1155/2009/473616.
- [20] Hacivelioglu F., Büyükaksoy A., Scattering of the TEM Mode at the Junction of Perfectly Conducting and Impedance Coaxial Waveguides, *Electrical Engineering*, 2010, **92**(4-5).
- [21] Tayyar İ. H., Büyükaksoy A., A Wiener-Hopf Analysis of the Coaxial Waveguide Radiator, *2011 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, Torino, Italy., 12-16 September 2011.
- [22] Demir A., Büyükaksoy A., Polat B., Diffraction of Plane Sound Waves by a Rigid Circular Cylindrical Cavity with an Acoustically Absorbing Internal Surface, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2002, **82**(9), 619-629.
- [23] Demir A., Büyükaksoy A., Wiener-Hopf Approach for Predicting the Transmission Loss of a Circular Silencer with a Locally Reacting Lining, *International Journal of Engineering Science.*, 2005, **43**(5-6), 398-416.

- [24] Demir A., Büyükaksoy A., Transmission of Sound Waves in a Cylindrical Duct with an Acoustically Lined Muffler, *International Journal of Engineering Science*, 2003, **41**(20), 2411-2427.
- [25] Sneddon I. H., *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [26] Mittra R., Lee S. W., *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, McMillan, New York, 1971.
- [27] Büyükaksoy A., Uzgören G., Alkumru A., *Dalga Kırınımında Analitik Yöntemler Cilt:1-2*, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul, 2011.
- [28] Tayyar İ. H., Büyükaksoy A., İç Silindiri Eksenel Doğrultuda Sonsuz Uzayan Dış İletkeni ise Yarı Sonsuz Eşeksenli Dairesel Dalga Kılavuzundan TEM Modunun İşıması, *EMO Bilimsel Dergi*, 2011, **1**(1), 45-50.

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

- [1] **Karayahşi K.**, Dolma A., Ateş E., Çatal N., Akıllı Bir Kontrol Düzlemi Kullanan Optik Şebekelerde Bağlantı Yönlendirme ve Dalga Boyu Atama, *IEEE 17. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı*, Antalya, Türkiye, 9-11 Nisan 2009.
- [2] Dolma A., **Karayahşi K.**, SUO/RF Hibrid Haberleşme Sistemleri ve Çeşitli Uygulamaları, *IEEE 18. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı*, Diyarbakır, Türkiye, 22-24 Nisan 2010.
- [3] Dolma A., **Karayahşi K.**, SUO/RF Sistemlerin Uygulanabilirliği, 5. *URSI Bilimsel Kongresi*, ODTÜ, Kuzey Kıbrıs, 25-27 Ağustos 2010.
- [4] **Karayahşi K.**, Tayyar İ. H., Dolma A., Hybrid TEM Wave Radiation from a Coaxial Waveguide with a Semi-infinite PEC Outer Cylinder and an Infinite Inner Cylinder Loaded with Partial Impedance, *Proceedings of PIERS 2015 in Prague*, Prague, Czech Republic, 06-09 July 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Kutlu KARAYAHŞI, 1981 yılında İzmir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladıktan sonra 2000 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik Öğretmenliği Bölümünden 2005 yılında mezun oldu. Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalında 2005 yılında başladığı Yüksek Lisans programını 2008 yılında tamamladı. 2009 yılından beri Okan Üniversitesi’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.